МЕХАНИКА ВА ИНШООТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ АСОСИДАГИ БИР МАРТАЛИК ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РУЗМАТОВ МАКСУД ИСРАИЛОВИЧ

ГРАВИТАЦИОН МАЙДОНЛАРДА ОПТИМАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАРНИ ТОПИШНИНГ АНАЛИТИК УСУЛЛАРИ

01.02.01 – Назарий механика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент - 2021

УДК: 531.01

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of Dissertation Abstract of the Doctor of Philosophy (PhD) on Physical-mathematical sciences

МЕХАНИКА ВА ИНШООТЛАР СЕЙСМИК МУСТАҲКАМЛИГИ ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ АСОСИДАГИ БИР МАРТАЛИК ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РУЗМАТОВ МАКСУД ИСРАИЛОВИЧ

ГРАВИТАЦИОН МАЙДОНЛАРДА ОПТИМАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАРНИ ТОПИШНИНГ АНАЛИТИК УСУЛЛАРИ

01.02.01 – Назарий механика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент - 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM351 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.instmech.uz) ва «Ziyonet» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Коршунова Наталья Александровна** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Дусматов Олимжон Мусурмонович** физика-математика фанлари доктори
	Югай Лев Павлович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 рақамли Илмий кенгаш асосидаги бир марталик Илмий Кенгашнинг 2021 йил 16 июль соат 14^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100125, Тошкент шаҳри, Дўрмон йўли кўчаси, 33, 1-мажлислар зали. Тел.: (+99871) 262-71-52, факс: (+99871) 262-71-32, e-mail: instmech@academy.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси М.Т. Ўрозбоев номидаги Механика ва иншоотлар сейсмик мустаҳкамлиги институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (10-рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100125, Тошкент ш., Дўрмон йўли кўчаси, 33-уй.

Диссертация автореферати 2021 йил 29 июнь куни тарқатилди.
(2021 йил 16 июндаги 1-рақамли реестр баённомаси).

М.М. Мирсаидов
Илмий даражалар берувчи бир марталик илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор, ЎзР ФА академиги

М.К. Усаров
Илмий даражалар берувчи бир марталик илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., к.и.х.

Р.А. Абиров
Илмий даражалар берувчи бир марталик илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., к.и.х.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) дисертацияси аннотацияси)

Диссертация ишининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда, гравитацион майдонда ҳаракат қилувчи космик аппарат масса марказининг оптимал траекторияларини ҳисоблаш масалаларига келтирилади. Вариацион масала дифференциал тенгламаларининг аналитик ечимларини топиш, чекли масса сарфи билан ҳаракатланувчи нуқтанинг оптимал траекторияларни қуриш ва бошқариш параметрларини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади. Шунинг учун сонли ҳисобларсиз узоқ вақт оралиқлари учун ҳаракатни прогнозлаш, мураккаб ҳисобларни амалга оширмай космик аппарат орбитасини олдиндан берилган хоссаларига кўра бошланғич шартларни танлаш имконини берадиган, тежамкор ҳамда қулай бўлган содда аналитик назарияни қуриш осмон механикасида муҳим аҳамиятга эга.

Жаҳонда сунъий осмон жисмлари траекторияларини оптималлаш, таянч траекторияларни топиш, вариацион масала тенгламаларининг биринчи интеграллари тўлиқ системасини топиш, бу тенгламалар системасининг тартибини пасайтириш, унинг хусусий интеграллари ва хусусий ечимларини топиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Космик аппарат параметрларини қийматларини аввалдан аниқлашда, тортиш қисмлари ўзгарганда траектория параметрларини узлуксизлигини таъминлашда, космик аппарат ва траектория параметрлари орасида муҳим функционал боғланишларни аниқлашда аналитик ечимларни аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Шунинг учун аналитик ечимларни қуриш, бундай ечимларни топиш усулларини ишлаб чиқишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Республикамизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган космик тадқиқотлар ва технологиялар ривожланишининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилган. Жумладан, вариацион масаланинг янги аналитик ечимларини топиш, оптимал траекторияларни қуриш, траекторияларни оптималлашнинг аналитик усулларини ишлаб чиқиш бўйича муҳим натижаларга эришилди. Мамлакатимизда илм-фан ривожи ҳамда фундаментал тадқиқот натижаларини ҳаётга татбиқ қилиш учун фундаментал тадқиқотларнинг муҳим йўналишлари Ўзбекистонни янада ривожлантириш бўйича 2017-2021 йиллардаги Ҳаракатлар стратегиясига киритилган[1]. Бу борада космик парвозлар механикаси масалаларини ечиш, оптимал траекторияларни топиш, космик аппарат ва траектория параметрлари орасида функционал боғланишларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 30 августдаги ПФ-5806-сон «Ўзбекистон Республикасида космик фаолиятни ривожлантириш

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сон Фармони.

тўғрисида»ги Фармони ва 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон “Фанлар Академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. XX асрнинг иккинчи ярмида комик тадқиқотлар ва мос равишда назарий механика, баллистика ва учиш динамикаси соҳаларида жадал ривожланиш бошланди. Космик аппарат траекторияларини оптималлаш масалалари анча кенг масалалар доирасида қўйилди, негаки кўп маблағ талаб қиладиган учириш муаммолари ва сунъий йўлдошларнинг ишлаши кўпгина ҳолларда фазода таянч ориентацияни мавжудлиги билан боғлиқ. Кўплаб тадқиқотлар орасида Д.Ф.Лоуден ва Дж.Лейтманнинг ишларини алоҳида таъкидлаб ўтиш жоиз. Базис-векторни киритишга асосланган Лоуден усули бир жинсли тортиш майдони, текис марказий Ньютон майдонида ракета траекторияларини оптималлаш масалалари синфи учун якунланган назарияни қуришнинг самарали аналитик усул ҳисобланади ва ихтиёрий гравитацион майдонда тадқиқотлар олиб бориш учун асос бўлади.

Аниқ амалий масалаларни ечишда ва траекторияларни оптималлаш муаммосининг аналитик ечимини топишга оид сезиларли натижалар А.А.Космодемьянский, Д.Е.Охоцимский, В.А.Егоров, D.F.Lawden, А.И.Лурье, Дж.Лейтман, Т.Н.Эдельбаум, С.Пайнс, Г.Дж.Келли, Г.М.Роббинс, В.К.Исаев, В.С.Новоселов, Breakwell J.V., Dixon J.F., Bonnard B., Gon B.S., Hull D.G., А.Г.Азизова Н.А.Коршунова, Д.М. Азимов ва бошқалар томонидан олинган. Ҳозирги кунга келиб КА траекторияларини оптималлаш ва синтез масалаларига оид кўплаб илмий мақолалар ва монографиялар чоп этилган. D.M.Azimov ва R.H.Bishop ишларида ихтиёрий тортиш актив қисмлари учун аналитик ечимларни олиш, оптимал таянч траекторияларни синтез қилиш ҳамда олинган ечимларни автоном йўллаш системасида амалий қўллаш ва таҳлил қилиш масалалари кўрилган.

Мамлакатимизда XX асрнинг 70 йилларида космик парвозлар динамикаси соҳасида илмий мактабга асос солинган (ТошДУ). Вариацион масаланинг дифференциал тенгламалари ёпиқ гамильтон системасига олиб келиниши мумкинлигини кўрсатишда А.Г.Азизов, Н.А.Коршунова, Д.М.Азимовларнинг ишларини алоҳида қайд этиш мақсадга мувофиқдир. Шунинг учун гравитацион майдонларда КА массалар марказининг оптимал траекторияларини тадқиқ қилиш ҳамда тортиш кучининг миқдори ва йўналишини аниқлаш учун аналитик механиканинг гамильтон системалари учун ривожлантирилган аппаратидан фойдаланиш мумкин. Улар томонидан марказий Ньютон майдонида, марказий чизиқли майдонда, иккита қўзғалмас марказлардан бири чексиз узоқ бўлган ҳолдаги майдонда ва иккита қўзғалмас марказли гравитацион майдонда антив қисмлар учун хусусий интеграллар ва хусусий ечимлар топилган. Марказий Ньютон майдони ҳолида максимал тортиш қисмлари учун умумий интегралларнинг тузилиши аниқланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация иши Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасининг Ф-4-29 “Ноидеал ва шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси” (2012-2016 йй.) мавзуидаги лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади аналитик механика усулларидан фойдаланган ҳолда гравитацион майдонларда оралиқ тортиш қисмлари учун аналитик ечимларни топиш; чегараланган уч жисм масаласи учун янги оптимал траекторияларни топишда Докшевич усулининг самарадорлилигини асослашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

– доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласида оралиқ тортиш қисмлари учун инвариант муносабатларни топиш;

– Докшевич усули ёрдамида топилган хусусий интеграллар асосида доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласида оралиқ тортиш қисмлари учун аналитик ечимларни топиш;

– бошланғич шартлар, актив қисмларнинг мавжуд бўлиш соҳаси ва давомийлигига чекловлар олиш;

– текис марказий гравитацион майдонлар ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун аналитик ечимларни топиш услубларини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти марказий ва марказий бўлмаган гравитацион майдонларда, хусусан, доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласи ҳолида оралиқ тортиш қисмларида ҳаракатланувчи нуқтадан (КА массалар маркази) иборат.

Тадқиқотнинг предмети Докшевич усули ёрдамида доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласи ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун вариацион масаланинг аналитик ечимлари, марказий гравитацион майдонлар ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун аналитик ечимларни топиш услубларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида гамильтон системалари учун ривожлантирилган аналитик механика усуллари, математик моделлаштириш, вариацион ҳисоб, траекторияларни оптималлашнинг Лоуден усули, дифференциал тенгламаларнинг хусусий интегралларини аниқлашнинг Докшевич усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

– Докшевич усули ёрдамида доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласида оралиқ тортиш қисмлари учун инвариант муносабатлар олинган;

– оралиқ тортиш қисмлари учун текис доиравий чегараланган уч жисм масаласи ҳолида хусусий ечимларнинг учта тури ва текис доиравий бўлмаган ҳолда тўртта тури топилган;

– бошланғич шартларга, топилган актив қисмларнинг мавжуд бўлиш соҳаси ва давомийлигига чекловлар олинган;

– текис марказий майдонлар ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун вариацион масаланинг аналитик ечимларини топиш услуби ишлаб чиқилган ҳамда марказий Ньютон майдони ва ихтиёрий марказий майдон ҳоли учун аналитик ечимлар топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

олинган натижалар хусусий интегралларни топишнинг Докшевич усули самарали бўлган масалалар доирасини кенгайтириш имконини беради;

текис доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласи ҳолида актив қисмлар учун аналитик ечимларнинг бир қатор вариантлари олинган;

марказий Ньютон ва ихтиёрий марказий майдон ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун аналитик ечимни топиш услуби таклиф қилинган;

олинган аналитик ечимлар сонли интеграллашда таянч траекториялар сифатида олиниши ҳамда осмон баллистикасида аниқ манёврларни амалга оширишда қўлланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги аналитик механика, дифференциал тенгламалар назариясининг маълум усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазалар ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, гравитацион майдонларда нуқта ҳаракатини оптималлаш муаммосини ечишга маълум даражада қадам қўйилган. Оптималлаш масаласини аналитик ечиш муаммосининг асосий қисми гамильтон шаклига эга бўлган системаларни ечишга келтирилганлиги сабабли, бу масалани ечишда аналитик механика усулларидан фойдаланиш мумкин. Тадқиқот ишида олинган натижалар аналитик механика усулларини қўллаш мумкин бўлган масалалар доирасини сезиларли даражада кенгайтириш имконини беради. Умумий интегралларнинг тузилишига оид хулосалар янги интегралларни топишни енгиллаштиради.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, топилган аналитик ечимлар аниқ учиш масалалари учун таянч траекториялар сифатида, сонли ҳисоблаш жараёнларининг сифатини назорат қилишда қўлланилиши мумкин. Аналитик ечимларни мавжудлиги осмон баллистикаси масалаларини, космик навигация масалаларини ечиш учун муҳим ахамиятга эга. Докшевич усулидан фойдаланиш шу кунгача ечилмаган бир қатор масалаларнинг хусусий интегралларини топиш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Дифференциал тенгламаларнинг хусусий интеграллари ва хусусий ечимларини топишда Докшевич усулини қўллаш бўйича олинган натижалар асосида КамДУ математик ва компьютер моделлаштириш лабораторияси илмий тадқиқот ишлари доирасида жисмларни ҳаракати масаласи учун динамик системаларни тадқиқ қилишда қўлланилган (Камчатка давлат университетининг 29 декабр 2020 йилдаги №763-01 сонли маълумотномаси). Натижада, мазкур усул динамик системаларни ечимини топиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро илмий-амалий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 10 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан 1 та хорижий ва 4 та республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертация ҳажми 112 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “**Вариацион масаланинг дифференциал тенгламаларини интеграллаш муаммоси**” деб номланган биринчи бобида гравитацион майдонларда нуқтанинг (КА массалар маркази) оптимал ҳаракати ҳақидаги вариацион масаланинг Лоуден усулида қўйилиши келтирилган; актив қисмларда вариацион масаланинг дифференциал тенгламаларини квадратураларга келтириш учун зарур бўлган интегралларнинг минимал сони ҳақидаги саволга жавоб берилган; вариацион масаланинг аналитик ечимларини аниқлаш усуллари келтирилган. Асосий эътибор, дифференциал тенгламаларнинг хусусий интегралларини топишнинг Докшевич усулига қаратилган.

Чегараланган m $(0 \le m \le \widetilde{m})$ масса сарфига эга нуқта учун Майер масаласи қўйилади. Нуқтани бошланғич ҳолатдан $(t = 0,\quad \vec{v} = \vec{v}_0,\quad \vec{r} = \vec{r}_0,\quad M = M_0)$ қандайдир чекли ҳолатга ўтказадиган ва берилган функционални (чекли ҳолат функционалини) минималлаштирадиган тортиш кучининг миқдори ва йўналишини топиш зарур. Бунда ушбу дифференциал тенгламалар ўринли

$$\dot{\vec{v}} = \frac{cm}{M}\vec{e} + \vec{g}(\vec{r}), \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{M} = -m,$$

бу ерда $M(t)$ – КА массаси; $\vec{g}(\vec{r})$ – гравитацион тезланиш; $\vec{r}$ – нуқтанинг радиус-вектори; $\vec{v}$ – нуқтанинг тезлиги; $\vec{e}$ – тортиш кучи йўналишининг бирлик вектори; c – ёниш маҳсулотларининг нисбий тезлиги миқдорини ўзгармас деб ҳисоблаймиз.

Биринчи параграфда стационарликнинг $\kappa = \frac{c}{M}\lambda - \lambda_7$ ўтиш функцияси ва тезликка қўшма кўпайтувчи - $\vec{\lambda}$ базис-вектор орқали ифодаланган зарурий шартлари келтирилади ($\vec{e} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}$).

Вариацион масаланинг асосий қисми ўн тўртинчи тартибли

$$\dot{\vec{v}} = \frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}(\vec{r}); \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{v}; \qquad \dot{M} = -m; \tag{1}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\vec{\lambda}_r; \qquad \dot{\vec{\lambda}}_r = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}}\vec{\lambda}; \qquad \dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2}\lambda,$$

ёпиқ Гамильтон системаларини нол (НТ, $m = 0$), оралиқ (ОТ, $0 < m(t) < \widetilde{m}$) ва максимал (МТ, $m = \widetilde{m}$) тортиш қисмлари бўйича интеграллаш масаласига келтирилади, бунда гамильтониан қуйидаги кўринишга эга

$$H = \vec{\lambda}\left(\frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}(\vec{r})\right) + \vec{\lambda}_r\vec{v} - \lambda_7 m, \tag{2}$$

бу ерда ортиқча ўзгарувчини (m бошқаришни) фазавий ўзгарувчилар орқали ифодалаш мумкин. $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_r, \lambda_7$ – $\vec{v}, \vec{r}$ ва M га қўшма Лагранж кўпайтувчилари. Мазкур ишда, асосан, ОТ қисмлари кўрилади.

Вариацион масала тенгламаларини интеграллаш маълум маънода гравитацион майдон моделини танлашга боғлиқ.

Иккинчи параграфда аналитик механиканинг гамильтон системалари учун ривожланган аппаратини осмон баллистикаси масалаларида таянч траекторияларни топиш учун қурол сифатида фойдаланиш имкони борлиги кўрсатилган.

Ҳозирги кунга келиб (1) дифференциал тенгламалар системасини оптимал траекторияларнинг барча қисмлари учун ўринли бўлган тўртта умумий интеграли: ихтиёрий стационар майдонлар учун ўринли бўлган (2) гамильтонианни сақланишига мос келган интеграл ва марказий майдонлар учун ўринли бўлган векторли интеграл мавжуд. Векторли интегралнинг ташкил этувчилари кўпайтувчиларга нисбатан чизиқли ва уларнинг ихтиёрийсини циклик интеграл қилиш мумкин. Бундан ташқари, ОТ қисмларида яна учта интеграл ўринли: улардан иккитаси майдоннинг танланишига боғлиқ эмас (массани ўзи ичига олган интеграл ва базис-вектор миқдорини ўзгармаслигини ифодаловчи интеграл), характеристик тезликни ўз ичига олган учинчи интеграл эса фақат марказий майдонлар учун ўринли.

Шундай қилиб, ОТ қисмлари учун марказий гравитацион майдонлар ҳолида ўн тўртинчи тартибли гамильтон системалари учун еттита умумий интеграл мавжуд. Ўққа нисбатан симметрик майдонлар ҳолида – фақат тўртта умумий интеграл бор. Чегараланган уч жисм масаласи ҳолида ОТ қисмлари учун фақат иккита интеграл мавжуд. Вариацион масала дифференциал тенгламаларини умумий ечимини аниқлаш учун мавжуд интеграллар етарли эмас.

Маълум сондаги интеграллар ва инвариант муносабатларнинг мавжуд бўлиши система тартибини пасайтириш имконини беради. Шунинг учун кўрилаётган дифференциал тенгламалар системаси тартибини энг юқори даражада пасайтириш учун қанча интеграл керак бўлади деган савол туғилади. Мазкур параграфда агар маълум интеграллардан фарқли яна битта интеграл топилса, у ҳолда ОТ қисмлари учун марказий майдонларнинг фазовий ҳолида масала квадратураларга келтирилиши кўрсатилган.

Умумий ечимни олиш имкони бўлмаган ҳолларда табиийки, хусусий интегралларни топиш муаммоси юзага келади.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида Гамильтон системалари хусусий интеграллари ва хусусий ечимларини топиш усуллари келтирилган: Леви-Чивита усулида инволюцияда бўлган бир нечта интеграллар ёки инвариант муносабатлардан фойдаланилади; Леман-Филе усулида Гамильтон-Якоби тенгламасининг тўлиқ бўлмаган интегралидан фойдаланилади. Алоҳида эътибор хусусий интегралларни топишнинг Докшевич усулига қаратилган. Бу усул кўрилаётган дифференциал тенгламалар системаси учун хали топилмаган интегралларни таҳлилига асосланган. Кўрилаётган дифференциал тенгламалар системасини интегралларини билишни талаб қилмайдиган Докшевич усули марказий ва марказий бўлмаган гравитацион майдонларда актив қисмларда траекторияларни оптималлаш масалаларида хусусий интеграллар ва хусусий ечимларни топишда яхши натижалар берди.

Тўртинчи параграфда иккита қўзғалмас марказлардан бири чексиз узоқда жойлашган ҳолдаги гравитацион майдон учун Докшевич усули ёрдамида хали топилмаган интегралларни тузилишини ўрганиш мумкинлиги кўрсатилган. Бу интегралларнинг тузилишига оид хулосалар олинган.

Кейинги иккита бобда нуқта траекторияларини оптималлаш масаласини аналитик ечимларини олиш учун Докшевич усулидан фойдаланишнинг самарадорлиги кўрсатилган.

Диссертациянинг “**Доиравий чегараланган уч жисм масаласи**” деб номланган иккинчи бобида текис доиравий чегараланган уч жисм масаласи ҳолида ОТ қисмларида вариацион масаланинг хусусий интеграллари ва хусусий ечимларини топишда Докшевич усулидан фойдаланилган.

Биринчи параграфда доиравий чегараланган уч жисм масаласи доирасида вариацион масаланинг қўйилиши келтирилган.

Ўзгарувчан массали нуқта (космик аппаратнинг (КА) массалар маркази) массалари M_1 ва M_2 ($M << M_2 < M_1$) бўлган иккита тортиш марказлари гравитацион майдонида ҳаракат қилади. Қулайлик учун бу марказларни мос равишда Ер ва Ой деб номлаймиз. Массаси M бўлган нуқта тортиш марказларининг ҳаракатига таъсир кўрсатмайди. Ой Ер атрофида доиравий орбита бўйлаб ҳаракат қилади деб қаралади.

Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари ушбу кўринишга эга

$$\frac{d^2\vec{\tilde{r}}}{dt^2} = \frac{cm}{M}\vec{e} - \frac{\mu_1}{\tilde{r}^2}\frac{\vec{\tilde{r}}}{\tilde{r}} - \frac{\mu_2}{\rho^2}\frac{\left(\vec{\tilde{r}} - \vec{r}_1\right)}{\rho} - \frac{\mu_2}{a^2}\frac{\vec{r}_1}{a}.$$

бу ерда $\vec{\tilde{r}}$, $\vec{r}_1$ – мос равишда нуқта (КА) ва Ойнинг геоцентрик радиус-векторлари, $r_1 = a$ – Ер ва Ой марказлари орасидаги ўртача масофа. μ_1, μ_2 – мос равишда Ер ва Ойнинг гравитацион параметрлари.

Характеристик тезликни минималлаш ҳақидаги масала учун геоцентрик цилиндрик координаталар системасида гамильтониан қуйидагича киритилган

$$H = \lambda_1\left(\frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2}{\rho^3}\left(r - a\cos\alpha\right) - \frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha + \frac{v_2^2}{r}\right) + \lambda_2\left(\frac{cm}{M}\lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3}a\sin\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha - \frac{v_1 v_2}{r}\right) + \lambda_3\left(\frac{cm}{M}\lambda_3 - \frac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 z}{\rho^3}\right) + \lambda_4 v_1 + \lambda_5\frac{v_2}{r} + \lambda_6 v_6 - \lambda_7 m.$$

Бу ерда v_1, v_2, v_3 цилиндрик системада $\vec{v}$ нуқта тезлигини ташкил этувчилари; $\lambda_i\left(i = \overline{1,7}\right)$ – $v_1, v_2, v_3, r, \varphi, z, M$ координаталага қўшма кўпайтувчилар; $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - базис-вектор, $|\vec{\lambda}| = 1, \vec{e} = \vec{\lambda}$; α – Ой орбитаси текислигида КА ва Ой орасидаги бурчак.

Вариацон масаланинг дифференциал тенгламалари учун ОТ қисмларида фақат иккита интеграл мавжуд

$$\lambda_7 M = c;\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{3}$$

Бу интеграллар умумий ечимни аниқлаш учун етарли эмас. Леви-Чивита ёки Леман-Филе усулларини қўллаш учун бу интеграллар етарли эмас. Лекин Докшевич усули хусусий интеграллар ёки инвариант муносабатларни аниқлаш имконини беради.

Иккинчи параграфда Докшевич усули ёрдамида турли хусусий ечимларни олиш имконини берадиган инвариант муносабатлар олинган.

Ушбу

$$F\left(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5\right) = const, \tag{4}$$

кўринишдаги хусусий интеграл қаралган.

F функциядан вақт бўйича тўлиқ ҳосила вариацион масала дифференциал тенгламаларига кўра айнан нолга тенг бўлади. (4) интегралда қатнашмайдиган ўзгарувчилар бу шарт билан боғланмагани учун ихтиёрий бўлиши мумкин, у ҳолда F функциядан вақт бўйича олинган тўлиқ ҳосила ифодасида шу ўзгарувчиларнинг олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак. Натижада хусусий ҳосилаларга нисбатан бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинади. Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг бош детерминанти нолга тенг бўлиши керак

$$\lambda_4(2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5)(\lambda_1 r - \lambda_1 a\cos\alpha - \lambda_2 a\sin\alpha)(\lambda_2\cos\alpha - \\ - \lambda_1\sin\alpha)(\lambda_1 a\sin\alpha - \lambda_2 a\cos\alpha + \lambda_2 r) = 0. \quad (5)$$

Ҳар бир қавсдаги ифодаларни нолга тенглаб, турли хусусий ечимларга олиб келувчи инвариант муносабатларни олиш мумкин.

Учинчи параграфда Докшевич усули ёрдамида топилган хусусий интеграллар асосида хусусий ечимларнинг учта варианти олинган. (5) шарт асосида $z = 0$ эканлиги олинган, яъни КА Ой орбитаси текислигида ҳаракат қилади. Шундай экан $v_3 = 0$, $\lambda_3 = 0$.

Мисол учун, биринчи вариантда (5) ифодада бир вақтнинг ўзида қуйидаги ифодалар нолга тенг бўлсин

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0,\ \lambda_1 r - \lambda_1 a\cos\alpha - \lambda_2 a\sin\alpha = 0.$$

У ҳолда вариацион масаланинг дифференциал тенгламаларидан тезликнинг v_2 трансверсал ташкил этувчиси қўзғалмас марказгача бўлган r масофага пропорционал тарзда ўзгариши, ОТ қисми бўйлаб ҳаракат вақтида хамиша $\alpha < \pi/4$ бўлиши келиб чиқади. КА нинг бурчак тезлиги ω га ва ОТ қисми давомийлигига, яъни нуқтанинг бошланғич тезлиги ва бошланғич ҳолатига чекловлар олинди.

Топилган хусусий ечимга нуқтани ОТ қисми бўйлаб соат милига тескари (Ойнинг ҳаракати тарафга) ўраладиган спирал чизиқ мос келиши кўрсатилган. Тортиш кучи радиал ва қўзғалмас марказдан қараб йўналган. Нуқтанинг бурчак тезлиги Ойнинг бурчак тезлигидан кичик. КА (нуқта) Ойдан вақт давомида ортиб борувчи α бурчакка орқада қолади. Нуқтанинг $M(t)$ массаси кўрсаткичли қонунга кўра камаяди

$$M = M_0 e^{\frac{-(N(t)+A)}{c}},$$

бу ерда $N(t) = \dfrac{\mu_1}{\dot{\alpha} a^2}(tg\alpha - \sin\alpha) + 2a\omega\dot{\alpha}\sin\alpha > 0$, $A = N(t_0) > 0$.

“Доиравий бўлмаган уч жисм масаласи ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун хусусий ечимлар” деб номланган учинчи бобда доиравий бўлмаган уч жисм масаласи ҳолида ОТ қисмларида вариацион масаланинг бир қатор аналитик ечимлари топилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида доиравий бўлмаган уч жисм масаласи ҳолида вариацион масалани қўйилиши келтирилган. Ой Ер атрофида эксцентриситети e ва параметри p бўлган эллиптик орбита бўйлаб ҳаракат қилади деб қаралади.

Вариацион масаланинг дифференциал тенгламалари r, φ, z геоцентрик цилиндрик координаталар системасида ёзилган, бунда олдинги бобдаги белгилашлардан фойдаланилган ва

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta},\ \vec{\rho} = \vec{\tilde{r}} - \vec{r}_1,\ \tilde{r}^2 = r^2 + z^2,\ \rho^2 = r^2 + z^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\alpha,\ \alpha = \theta - \varphi.$$

$\varphi = 0$ ўқ Ой орбитасининг перимарказидан ўтади, θ – унинг ҳақиқий аномалияси. $t_0 = 0$ онда Ой ўзининг перимарказида жойлашган деб олинади. Кеплер тенгламасидан фойдаланиб θ ва вақтни боғланишини топиш мумкин.

Вариацион масала дифференциал тенгламалари учун ОТ қисмларида фақат иккита (3) интеграл маълум. (4) хусусий интеграл учун Докшевич усули билан қуйидаги муносабатлар олинган

$$
\begin{gathered}
z = 0,\ v_3 = 0,\ \lambda_3 = 0, \\
\lambda_4 \left(2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5\right)\left(\lambda_1 r - \lambda_1 r_1 \cos\alpha - \lambda_2 r_1 \sin\alpha\right)(\lambda_2 \cos\alpha - \\
- \lambda_1 \sin\alpha)(\lambda_1 r_1 \sin\alpha - \lambda_2 r_1 \cos\alpha + \lambda_2 r) = 0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Ҳар бир қавс ичидаги ифодаларни нолга тенглаб, турли ечимларга олиб келувчи инвариант муносабатларни олиш мумкин.

Кейинги параграфларда тўрта хусусий ечимлар олинган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида бир вақтнинг ўзида ушбу

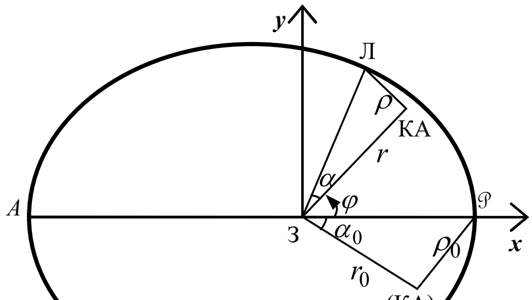
$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0, \qquad \lambda_1 r - \lambda_1 r_1 \cos\alpha - \lambda_2 r_1 \sin\alpha = 0.$$

ифодалар нолга тенг бўлган ***1-Вариант*** олинган. Бу ҳолда КА Ер ва Ой орасидаги соҳада жойлашиши кўрсатилган.

Тезликнинг v_2 трансверсал ташкил этувчиси r масофага пропорционал равишда ўзгаради.

$$v_2 = \frac{v_{20}}{r_0} \frac{p}{1 + e\cos\theta} \cos(\theta - \omega\, t - \varphi_0), \quad \alpha = \theta - \varphi = \theta - \omega t - \varphi_0 .$$

φ бурчак вақтга пропорционал равишда ортади ($v_{20} > 0$ бўлса) ёки камаяди ($v_{20} < 0$ да). r ва ρ тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари бўлади (1-расм),



Расм 1. КА ни бошланғич ва итиёрий вақт онидаги ҳолати.

α бурчак ОТ қисми бўйлаб ҳаракат давомида ҳар доим ўткир бўлади ва

$$tg\alpha = \frac{\rho}{r} < 1, \quad \alpha < \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

(7) шарт нуқтанинг бошланғич тезлиги, бошланғич ҳолати ва ОТ қисмини давомийлигига чегара қўяди

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi_0 < 0, \quad 0 \le \theta < \omega\, t + \frac{\pi}{4} + |\,\varphi_0\,|,$$

$$r_{10} = r_P, \quad r_0 = a(1-e)\cos\varphi_0, \quad \alpha_0 = \varphi_0 \ .$$

1-расм вақтнинг иккита $t_0 = 0$ ва ихтиёрий онига мос келади. КА Ойнинг ҳаракати томонга қараб ҳаракат қилади ва ундан вақт давомида ўзгарувчи α бурчакка ортда қолади. Ҳаракат вақти ва Ойнинг θ ҳақиқий аномалияси Кеплер тенгламасидан кичик эксцентриситет ҳолида қуйидагича ифодаланади

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_1}} (\theta - e\sin\theta).$$

У ҳолда

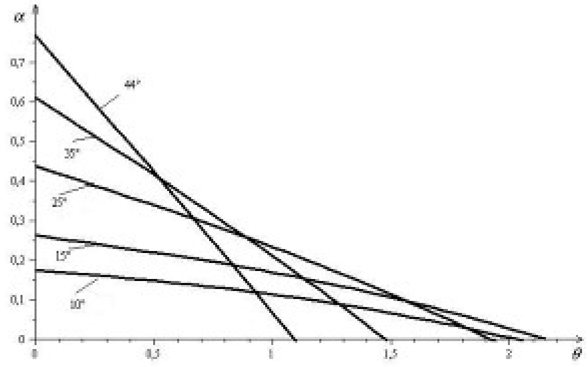
$$\alpha(\theta) = \theta - \omega\sqrt{\frac{a^3}{\mu_1}}(\theta - e\sin\theta) + |\varphi_0|,\ r(\theta) = \frac{p\cos\alpha(\theta)}{1 + e\cos\theta}.$$

Массанинг ўзгариш қонунини $\dot{v}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_1}$ тенгламадан топиш мумкин:

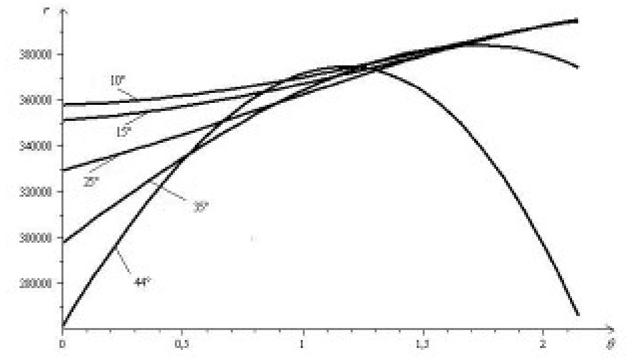
$$\frac{dM}{M} = f(\theta, \mu_1, \mu_2, e, p, \varphi_0, v_{20})d\theta.$$

Учинчи параграфда олинган натижаларни намойиш қилиш учун Ойнинг кичик эксцентриситети учун сонли ҳисоблар келтирилган. Ер ва Ой учун ушбу сонли қийматлар киритилган: $\mu_1 = 398603$ км^3/с^2; $\mu_2 = 4900$ км^3/с^2; $e = 0{,}055$; $a = 384400$ км; $p = a(1 - e^2) = 383237$ км; $r_P = 363104$ км; $r_0 = r_P \cos\varphi_0$. v_{20} сифатида КА нинг маҳаллий айланавий тезлиги олинган.

2-расмда α бурчакни θ га боғлиқлиги келтирилган (бурчаклар радианларда ўлчанади). Графикдан кўринадики, α бурчак вақт ўтиши билан камаяди. ОТ қисмлари Ойни перимарказдан $\theta < 123^\circ$ бурчаккача бўлган ҳаракатида мавжуд.



Расм 2. $|\varphi_0|$ бурчакнинг турли хил бошланғич қийматларида α бурчакни θ га боғлиқлиги.



Расм 3. $|\varphi_0|$ бурчакнинг турли хил бошланғич қийматларида r ни θ га боғлиқлиги.

3-расмда қўзғалмас марказгача бўлган $r(\theta)$ масофани (км ларда) θ бурчакка (радианларда) боғлиқлик графиги келтирилган. $r(\theta)$ масофа $33^\circ < |\varphi_0| < 45^\circ$ бурчакларда $\theta < 68^\circ$ учун ўсади ва $68^\circ < \theta < 123^\circ$ да камаяди. $|\varphi_0| < 33^\circ$ бурчаклар учун $r(\theta)$ масофа барча θ ларда ўсади.

Шундай қилиб, биринчи вариант шуни кўрсатадики, олинган хусусий ечим нуқтани оралиқ тортиш қисмида эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатига мос келади, бу чизиқнинг шакли нуқтанинг бошланғич ҳолатига боғлиқ. КА Ойдан вақт давомида камайиб борувчи ўткир бурчакка ортда қолади. Тезликнинг трансверсат ташкил этувчиси қўзғалмас марказгача бўлган масофага пропорционал равишда ўзгаради. Нуқтанинг бошланғич тезлиги, бошланғич ҳолати ва ОТ қисмининг давомийлигига чегара топилган. Тортиш кучи радиал. Барча миқдорлар вақтнинг маълум функцияси бўлган Ойнинг ҳақиқий аномалияси орқали ифодаланган.

Вариант 2 (§3.4). (6) муносабатда ушбу ифода нолга тенг бўлсин

$$\lambda_2 \cos\alpha - \lambda_1 \sin\alpha = 0.$$

$\lambda_2 = 1$ (тортиш трансверсал) ҳол олинган, яъни $\alpha = \pi / 2$, КА Ойдан 90° га ортда қолади. Кўпайтувчилар учун тенгламалардан қуйидаги муносабат олинган

$$\frac{3\mu_2}{\rho^5} r r_1 = -2 \frac{\mu_1}{r_1^3} e \sin\theta ,$$

бу муносабатдан эса, ОТ қисмлари $\sin\theta < 0,\ \pi < \theta < 2\pi$ бурчаклар учун мавжуд бўлиши келиб чиқади.

Тезликнинг

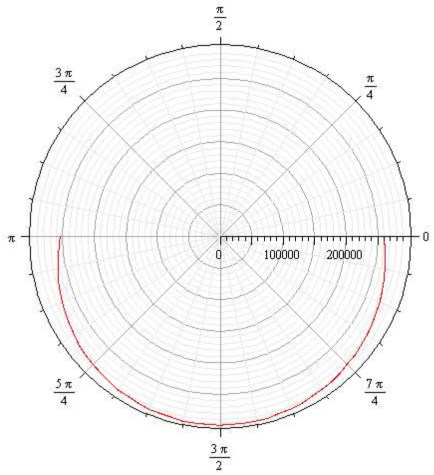
$$v_1 = -2e\sqrt{\frac{\mu_1}{p}} \cos\theta + c_1 ,$$

радиал ташкил этувчисини (бу ерда c_1 - ихтиёрий ўзгарувчи) вақт ўтиши билан камайиши кўрсатилган. $r(\theta)$ масофанинг ўзгариш қонуни топилган

$$r - c_2 = \frac{pe\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)}\left(-2 - c_1\sqrt{\frac{p}{\mu_1}}\right) + \frac{2p}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} arctg\ \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} tg\frac{\theta}{2}\left(2e^2 + c_1\sqrt{\frac{p}{\mu_1}}\right).$$

$r(\theta)$ масофани ўзгаришини кўриш учун тезликнинг радиал ташкил этувчисини аниқ бошланғич қиймати учун ($c_1 = 0$ да) график қурилган (4-расм). Сонли қийматлар Ой учун олинган: e = 0,055, p = 383237 км, $r_0 = 260000$ км, $\pi < \theta < 2\pi$.

Шундай қилиб, иккинчи вариант нуқтани оралиқ тортиш қисми бўйича ҳаракатига мос келади, бунда нуқтанинг геоцентрик масофаси ҳамма вақт Ой орбитасининг ҳақиқий аномалиясига боғлиқ бўлади. У ўсиши ҳам, камайиши ҳам мумкин. Нуқта Ойдан 90º бурчакка ортда қолади. Тортиш трансверсал. Топилган ОТ қисмларини мавжуд бўлиш соҳасига чекловлар олинган. Нуқтанинг массаси кўрсаткичли қонунга кўра камаяди. Барча миқдорлар Ой орбитасининг ҳақиқий аномалияси орқали ифодаланган.



Расм 4. r масофани Ой орбитасининг θ ҳақиқий аномалиясига боғлиқлик графиги.

(6) муносабатда бир вақтнинг ўзида

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0,\ \lambda_1 r_1 \sin\alpha - \lambda_2 r_1 \cos\alpha + \lambda_2 r = 0 .$$

ифодалар нолга тенг бўлган ҳолда яна иккита вариант (§3.5) олинган.
Маълумки, ОТ қисми тортишиш марказидан ўтувчи текисликда ётган ҳол учун маълум бўлган интеграллар вариацион масалани квадратураларга келтириш учун етарли. ОТ қисмлари учун текис масаланинг ечими биринчи бўлиб Лоуден томонидан берилган. Диссертациянинг **“Марказий гравитацион майдонларда оралиқ тортиш қисмлари учун интегралланадиган ҳоллар”** деб номланган тўртинчи бобида ОТ қисмлари учун аналитик ечимни

топишнинг маълум интеграллардан фойдаланиладиган бошқа усули таклиф қилинган. Бу усул ёрдамида нафақат текис марказий майдон ҳоли учун, балки ихтиёрий марказий майдон ҳоли учун ҳам аналитик ечимлар топилган.

Биринчи параграфда марказий Ньютон майдонида ҳаракатланувчи нуқтанинг характеристик тезлигини минималлаш масаласи кўриб чиқилган. Ҳаракат тортиш марказидан ўтувчи текисликда содир бўлади. Ҳаракат вақти чекланмаган. Бу масала ўнта тенгламадан иборат гамильтон системаси билан ифодаланади (r,φ қутб координаталарида)

$$\dot{v}_1 = \frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v_2^2}{r},\ \dot{v}_2 = \frac{cm}{M}\lambda_2 - \frac{v_1 v_2}{r},\dot{r} = v_1,\ \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r},\ \dot{M} = -m,$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_4,\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_1\frac{v_2}{r} + \lambda_2\frac{v_1}{r} - \lambda_5\frac{1}{r},$$

$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r^2} + \lambda_5\frac{v_2}{r^2},\ \dot{\lambda}_5 = 0,\ \dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2}.$$

Бу тенгламалар учун ушбу бешта интеграл маълум

$$\lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r} + \lambda_4 v_1 + \lambda_5\frac{v_2}{r} = 0, \qquad \lambda_5 = a, \qquad \lambda_7 M = c,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2r\lambda_4 - V = b. \tag{8}$$

Бу ерда V – характеристик тезлик ($V = c\ln\frac{M_0}{M_1}$), a,b - ихтиёрий ўзгармаслар.

Бу интеграллардан бири циклик, иккитаси инволюцияда эканлиги ва яна бири гамильтонианни ўзгармаслигини ифодалашини эътиборга олиб, маълум интеграллар масалани квадратураларга келтириш имконини бериши ҳақида хулоса қилинади.

Масалани тўлиқ ечиш учун нуқтанинг ҳолати ва тезлигини ҳамда тортиш кучининг миқдори ва йўналишини аниқловчи еттита: $r,\varphi,v_1,v_2,M,\lambda_1,\lambda_2$ функцияларни топиш зарур.

(9) ифоданинг биринчи муносабатни вақт бўйича икки марта дифференциаллаб ва қутб координаталар системасида векторларнинг ташкил этувчиларини киритиб, базис-вектор учун тенгламани ушбу иккита тенгламага келтирилган

$$\ddot{\lambda}_1 - \lambda_2\ddot{\varphi} - 2\dot{\lambda}_2\dot{\varphi} - \lambda_1\dot{\varphi}^2 = \lambda_1\frac{2\mu}{r^3},\ \ddot{\lambda}_2 + \lambda_1\ddot{\varphi} - \lambda_2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\lambda}_1\dot{\varphi} = -\lambda_2\frac{\mu}{r^3}.$$

Маълум интеграллардан фойдаланиб ҳамда қийин бўлмаган алмаштиришлардан сўнг масала ушбу системани ечишга келтирилиши кўрсатилган:

$$a\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right) - 2\lambda_1\lambda_2 v_1 v_2 + \lambda_1^2 v_2^2 + \lambda_2^2 v_1^2 = \lambda_1^2\frac{\mu}{r},$$

$$\lambda_1^2 v_2^2 + \lambda_2^2 v_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 v_1 v_2 - 3\lambda_1^2\lambda_2^2 v_1^2 + 6\lambda_1^3\lambda_1 v_1 v_2 - 3\lambda_1^4 v_2^2 = \lambda_1^2\frac{\mu}{r},$$

$$\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right)\left(a_3 + 3\lambda_1^2\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right)\right) = 0,$$

$$\lambda_1^2 v_1 - 2\lambda_2^2 v_1 + 3\lambda_1\lambda_2 v_2 + 2\lambda_2 a_3 = \lambda_1\left(V + b\right).$$

Масалани ечимини берадиган барча миқдорлар топилган:

$$r = \frac{9\mu\lambda_1^6}{a^2\left(1 - 3\lambda_1^2\right)}, \quad \varphi = -3\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 4\arcsin\lambda_1 + c_1, \tag{9}$$

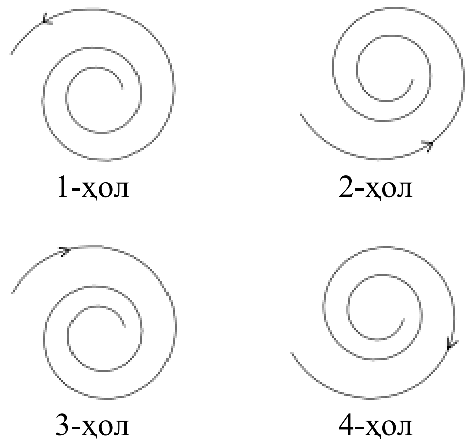
$$v_1 = \frac{a\lambda_2}{\lambda_1^2}\cdot\frac{2\left(2\lambda_1^2 - 1\right)}{5\lambda_1^2 - 3}, \qquad v_2 = \frac{a}{3\lambda_1^3}\cdot\frac{\left(4\lambda_1^2 - 3\right)\left(1 - 3\lambda_1^2\right)}{5\lambda_1^2 - 3}, \; dt = \frac{27\mu\lambda_1^7\left(3 - 5\lambda_1^2\right)}{a^3\left(1 - 3\lambda_1^2\right)^2\lambda_2}d\lambda_1$$

бу ерда c_1 – ихтиёрий ўзгармас.

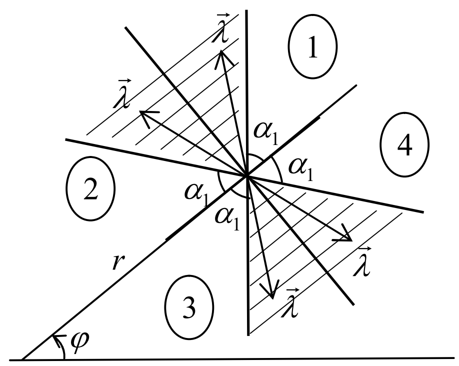
Шундай қилиб, топилган траекторияни тавсифловчи барча миқдорлар базис-векторнинг λ_1 радиал ташкил этувчиси орқали ифодаланган.

(9) тенгламалар қутб координаталарида ОТ қисмини параметрик тенгламаларини – Лоуден спиралини аниқлайди.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида спиралларнинг турлари бўйича тавсифлар берилган.



Расм 5. Лоуден спиралларининг турли ҳоллари.



Расм 6. Тортиш кучи йўналишини ўзгариш соҳалари.

Топилган спираллар ориентация, масштаб ва тортишиш маркази атрофида ҳаракат йўналишидан ташқари барча ҳолларда ўхшаш. 6-расмда юқорида кўрилган барча ҳолларга мос равишда тортиш кучи йўналишини ўзгариш соҳаси (штрихланган қисмлар) тасвирлаган.

Учинчи параграфда гравитацион тезланиши

$$\vec{g} = -\frac{g(r)}{r}\vec{r}$$

бўлган ихтиёрий марказий майдон ҳоли кўрилган.

Ҳаракат тортишиш марказидан ўтувчи текисликда содир бўлади. Ҳаракат вақти фиксирланмаган. Худди §4.1 даги каби бу масала ўнта тенгламадан иборат гамильтон системаси билан тавсифланади (r, φ қутб координаталарида), бу системанинг гамильтониани (2) кўринишга эга ва бу ҳолда ҳам бешта интеграл мавжуд.

Масалани тўлиқ ечимини олиш учун маълум бўлган интеграллар етарли эканлиги кўрсатилган.

§4.1 да келтирилган йўлга кўра базис-вектор учун тенглама қуйидаги иккита тенгламага келтирилган

$$\ddot{\lambda}_1 - \lambda_2\ddot{\varphi} - 2\dot{\lambda}_2\dot{\varphi} - \lambda_1\dot{\varphi}^2 = -\lambda_1\frac{dg(r)}{dr},\ \ddot{\lambda}_2 + \lambda_1\ddot{\varphi} - \lambda_2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\lambda}_1\dot{\varphi} = -\lambda_2\frac{g(r)}{r}.$$

$g(r) = \dfrac{\mu}{r^n}(n \neq \pm 1)$ деб, §4.1 даги каби алмаштиришларни бажариб, траектория тенгламалари

$$r = \left(\frac{\mu(n+1)^2\lambda_1^6}{a^2\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad \varphi = -\frac{3}{n-1}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{4}{n-1}\arcsin\lambda_1 + c_1, \quad (10)$$

ва тезликнинг ташкил этувчилари топилган

$$v_1 = \frac{2a\lambda_2}{(n+1)\lambda_1^2}\cdot\frac{2(n+1)\lambda_1^2-3}{(n+3)\lambda_1^2-3},\ \ v_2 = \frac{a_3}{(n+1)\lambda_1^3}\cdot\frac{\left(4\lambda_1^2-3\right)\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)}{(n+3)\lambda_1^2-3}.$$

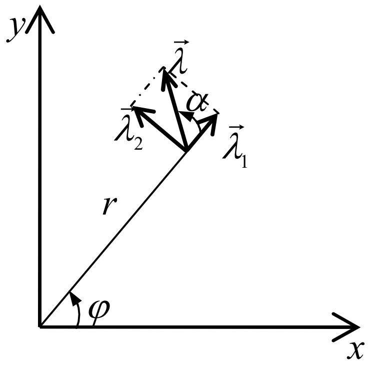
Шундай қилиб, топилган траекторияни характерловчи барча миқдорлар базис-векторнинг λ_1 радиал ташкил этувчиси орқали ифодаланган.

Топилган траектория бўйлаб ҳаракат вақтини аниқлаш учун қуйидаги дифференциал олинган

$$dt = \frac{3-(n+3)\lambda_1^2}{(n-1)\lambda_2}\left(\frac{\mu(n+1)^{n+1}\lambda_1^{n+5}}{a^{n+1}\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} d\lambda_1.$$

(10) тенгламалар қутб координаталарида ОТ қисмини параметрик тенгламаларини ифодалайди. $n = 2$ да Лоуден спираллари ҳосил бўлади.

$n = 4$ бўлган ҳол кўриб чиқилган. Тортиш кучи вектори ва радиус-вектор орасидаги бурчак α орқали белгиланган. Тўртта ҳол ўринли эканлиги кўрсатилган, биринчи ҳолда $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ бўлсин (7-расм).



Расм 7.

α бурчак $\pi/2$ дан α_1 гача камаяди, $\alpha_1 = \arccos\left(1/\sqrt{5}\right) \approx 63^\circ$. φ бурчак $-\infty$ дан φ_1 гача монотон ўсади, $\varphi_1 = -2 - 4/3\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right) + c_1$. r масофа 0 дан $+\infty$ гача монотон ўсади. Мос келадиган ОТ қисми тортиш марказидан соат стрелкасига тескари ёйилувчи спирал чизиқдан иборат бўлади. Нуқта шу спирал чизиқ бўйлаб тортишиш марказидан узоқлашиб боради.

Биринчи ҳолни акси бўлган яна учта ОТ қисмлари топилган. Барча спираллар ориентация, масштаб ва тортишиш маркази атрофида ҳаракат йўналишини ҳисобга олинмаганда бир-бирига ўхшаш. Нуқта тортишиш марказига яқинлашиши ҳам, узоқлашиши ҳам мумкин.

ХУЛОСА

“Гравитацион майдонларда оптимал траекторияларни топишнинг аналитик усуллари” мавзусидаги фалсафа доктори (PhD) диссертацияси бўйича ўтказилган тадқиқотлар асосида қуйидаги хулосалар қилинган:

1. Нуқта траекторияларини оптималлаш масаласининг хусусий интегралларини олишда Докшевич усулининг самарадорлиги кўрсатилган.
2. Иккита қўзғалмас марказлардан бири чексиз узоқда жойлашган ҳолдаги гравитацион майдон учун Докшевич усули ёрдамида ҳали топилмаган интегралларнинг тузилишига оид хулосалар олинган.
3. Доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласи ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун хусусий интеграллар ва хусусий ечимларни топиш учун Докшевич усули қўлланилган.
4. Докшевич усули ёрдамида доиравий ва доиравий бўлмаган чегараланган уч жисм масаласи ҳолида оралиқ тортиш қисмлари учун инвариант муносабатлар олинди.
5. Докшевич усули ёрдамида олинган хусусий интеграллар асосида оралиқ тортиш қисмлари учун текис доиравий чегараланган уч жисм ҳолида янги аналитик ечимларнинг учта варианти ва доиравий бўлмаган ҳолда янги тўртта аналитик ечимлар олинди.
6. Топилган актив қисмларни тавсифловчи миқдорлар учун аналитик ва график таҳлил қилинди. Массанинг ўзгариш қонуни топилди. Бошланғич шартлар, топилган актив қисмларни мавжуд бўлиш соҳаси ва давомийлигига чекловлар олинди.
7. Текис марказий гравитацион майдонлар ҳолида оралиқ тортиш қисмлари ҳолида вариацион масала дифференциал тенгламалари учун маълум интеграллардан фойдаланадиган аналитик ечимларни топиш услуби таклиф қилинди.
8. Марказий Ньютон ва ихтиёрий марказий майдон ҳоли учун аналитик ечимлар топилди.
9. Олинган натижалар хусусий интегралларни аниқлашнинг Докшевич усулини қўллаш мумкин бўлган масалалар доирасини сезиларли кенгайтириш имконини беради. Топилган аналитик ечимлардан сонли интеграллашда таянч траекториялар сифатида, ҳамда осмон баллистикасида аниқ манёврларни амалга оширишда фойдаланиш мумкин.

РАЗОВЫЙ НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПРИ НАУЧНОМ СОВЕТЕ DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИНСТИТУТЕ МЕХАНИКИ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РУЗМАТОВ МАКСУД ИСРАИЛОВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент - 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована Высшей аттестационной комиссией при Кабинете Министров Республики Узбекистан № B2019.2.PhD/FM351.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский и английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.instmech.uz) и Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Коршунова Наталья Александровна** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дусматов Олимжон Мусурмонович** доктор физико-математических наук
	Югай Лев Павлович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится 16 июля 2021 года в 14 ^{00} часов на заседании разового научного совета при Научном совете DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 при Институте механики и сейсмостойкости сооружений (Адрес: 100125, г.Ташкент, ул. Дурмон йули, 33, зал заседаний-1. Тел.: (+99871) 262-71-32, факс: (+99871) 262-71-52, e-mail: instmech@academy.uz)

С диссертацией можно ознакомится в Информационно-ресурсном центре Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан (зарегистрирована за №10). Адрес: Адрес: 100125, г.Ташкент, ул. Дурмон йули, 33. Тел.: (+99871) 262-71-32.

Автореферат диссертации разослан 29 июня 2021 года.
(протокола рассылки №1 от 16 июня 2021 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI M.T. O'ROZBOYEV NOMIDAGI MEXANIKA VA INSHOOTLAR SEYSMIK MUSTAHKAMLIGI INSTITUTI

М.М. Мирсаидов
Председатель разового научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор, академик АН РУз

М.К. Усаров
Ученый секретарь разового научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., с.н.с.

Р.А. Абиров
Председатель научного семинара при разовом научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., с.н.с.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертационной работы. В мире многочисленные научные и практические исследования в области механики космического полета в основном сосредоточены на расчете оптимальных траекторий центра масс космических аппаратов (КА), движущихся в гравитационном поле. Согласно Лоудену считается, что секундный расход массы ограничен. Вариационная задача сводится к определению реактивной силы, обеспечивающей оптимальность траекторий. Поэтому построение достаточно простой аналитической теории, которая была бы удобной, экономичной и позволяла бы, не проводя громоздкие расчеты, выбирать начальные условия для орбит КА с заранее заданными свойствами, без численного интегрирования прогнозировать движение на длительных интервалах времени, остается одной из важных задач небесной механики.

В мире широко изучаются вопросы, связанные с оптимизацией траекторий искусственных небесных тел, нахождением опорных траекторий, определением полной системы первых интегралов уравнений вариационной задачи, понижением порядка системы этих уравнений, отысканием её частных интегралов и частных решений. Существенное преимущество наличия таких решений, по сравнению с численно построенными решениями, заключается в том, что аналитические решения не связаны с вопросами сходимости, позволяют заранее определить начальные значения параметров, обеспечивают непрерывность параметров траектории при изменении режима тяги и содержат важные функциональные зависимости между параметрами КА и траектории. Поэтому нахождение аналитических решений, разработка методов определения таких решений является одним из целевых научных исследований.

В нашей республике большое внимание уделяется таким важным направлениям, которые являются научным и практическим применением фундаментальных наук как развитие космических исследований и технологий; решение задач исследования и использования космического пространства для достижения научных, экономических, экологических, информационных, коммерческих и иных целей, а также укреплению обороны и безопасности республики. В частности, значительные результаты были получены при нахождении новых аналитических решений вариационной задачи, построении оптимальных траекторий, разработке аналитических методов оптимизации траекторий. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям отражены в Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан на 2017-2021 гг.[2] Выполненные в данной работе исследования непосредственно связаны с проблемами механики космического полета,

---

[2] Указ Президента Республики Узбекистан УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 г.

определением оптимальных траекторий и установлением функциональных зависимостей между параметрами КА и траектории.

Исследование, проведенное в данной диссертации, в определенной степени служит решению задач, указанных в Указах Президента Республики Узбекистан: УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года; УП-5806 «О развитии космической деятельности в Республике Узбекистан» от 30 августа 2019 года и в Постановлении Президента Республики Узбекистан ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Во второй половине двадцатого столетия началось бурное развитие космической техники и соответственно развернутые исследования в области теоретической механики, баллистики и динамики полета. Задачи оптимизации траекторий КА стали ставиться для все более широкого круга задач, так как дорогостоящие запуски и функционирование искусственных спутников в большинстве своих случаев требуют наличия известной опорной ориентации в пространстве. Особо следует отметить, среди многочисленных исследований, работы Д.Ф.Лоудена и Дж.Лейтмана. Метод Лоудена введения базис-вектора послужил эффективным аналитическим методом для построения законченной теории широкого класса задач оптимизации ракетных траекторий для однородного поля тяготения, для плоского случая центрального ньютоновского поля, является основой для проведения исследований в произвольном гравитационном поле.

Существенные результаты аналитического решения проблемы оптимизации траекторий и при решении конкретных практически важных задач были получены в работах А.А.Космодемьянского, Д.Е.Охоцимского, В.А.Егорова, Д.Ф.Лоудена, А.И.Лурье, Дж.Лейтмана, Т.Н.Эдельбаума, С.Пайнса, Г.Дж.Келли, Г.М.Роббинса, В.К.Исаева, В.С.Новоселова, Breakwell J.V., Dixon J.F., Bonnard B., Gon B.S., Hull D.G., А.Г.Азизова, Н.А.Коршуновой, Д.М. Азимова и других. К настоящему времени по вопросам оптимизации и синтеза траекторий КА опубликовано большое количество статей и монографий. В работах D.M.Azimov и R.H.Bishop рассмотрены вопросы получения аналитических решений для активных участков произвольной тяги, синтеза опорных оптимальных траекторий, а также анализ и доведение траекторных решений до практического использования в бортовой системе автономного наведения.

В начале 70-х годов XX века в нашей республике была создана научная школа в области динамики космического полета (ТашГУ). Особо следует отметит результаты трудов А.Г.Азизова, Н.А.Коршуновой и Д.М.Азимова, в которых было показано, что дифференциальные уравнения вариационной задачи сводятся к замкнутой гамильтоновой системе. Поэтому для исследования оптимальных траекторий центра масс КА в гравитационных полях и определения величины и направления тяги можно использовать аппарат аналитической механики, разработанный для гамильтоновых систем. Ими найдены частные интегралы и частные решения для активных участков в центральном ньютоновском поле, в центральном линейном поле, в случае предельного варианта задачи двух неподвижных центров и в случае гравитационного поля двух неподвижных центров. Выяснена структура общих интегралов для участков максимальной тяги в случае центрального ньютоновского поля.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно - исследовательских работ Ф-4-29 «Динамика управляемых механических систем с неидеальными и условными связями» (2012-2016 гг.) Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Целью исследования является определение аналитических решений на участках промежуточной тяги в гравитационных полях с использованием методов аналитической механики; подтверждение эффективности метода Докшевича определения частных интегралов для отыскания новых оптимальных траекторий в случае ограниченной задачи трёх тел.

Задачи исследования:

– получить, применяя метод Докшевича, инвариантные соотношения для участков промежуточной тяги в случаях круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел;

– получить, на основе найденных методом Докшевича частных интегралов, аналитические решения для участков промежуточной тяги в случаях круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел

– получить ограничения на начальные условия, на область существования и на длительность найденных активных участков;

– разработать методику определения аналитического решения для участков промежуточной тяги в плоском случае центральных полей.

Объектом исследования является точка (центр масс КА), движущаяся на участках промежуточной тяги в центральных и нецентральных гравитационных полях, в частности в случае круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел.

Предметом исследования является определение новых аналитических решений вариационной задачи методом Докшевича на активных участках в рамках круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел; разработка метода определения аналитических решений для участков промежуточной тяги в случае центральных полей.

Методы исследования. В процессе исследования применены методы аналитической механики, развитые для гамильтоновых систем, методы математического моделирования, методы вариационного исчисления, метод Лоудена оптимизации траекторий, метод Докшевича определения частных интегралов дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

– получены, при помощи метода Докшевича, инвариантные соотношения для участков промежуточной тяги в случае круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел;

– найдены, для участков промежуточной тяги, три варианта частных решений в случае плоской круговой и четыре варианта частных решений в случае плоской некруговой ограниченной задачи трёх тел;

– получены ограничения на начальные условия, на область существования и на длительность найденных активных участков, определены величина и направление силы тяги;

– предложена методика определения аналитического решения для участков промежуточной тяги в плоском случае центральных полей, использующий знание интегралов дифференциальных уравнений вариационной задачи. Найдены аналитические решения для случая центрального ньютоновского и случая произвольного центрального полей.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

полученные в работе результаты позволяют значительно расширить круг задач, для исследования которых оказывается эффективным метод Докшевича определения частных интегралов;

получен ряд вариантов аналитических решений для активных участков в случаях плоской круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел;

предложена методика определения аналитического решения для участков промежуточной тяги в случае центрального ньютоновского и в случае произвольного центрального полей;

полученные в диссертации аналитические решения могут быть использованы в качестве опорных траекторий при численном интегрировании, а также найти применение при осуществлении конкретных маневров в небесной баллистике.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств с использованием известных методов аналитической механики, методов теории дифференциальных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что сделан определенный шаг для решения проблемы оптимизации движения точки (центра масс КА) в гравитационных полях. Поскольку основная часть проблемы аналитического решения задачи оптимизации сведена к интегрированию систем, имеющих гамильтонову форму, то можно использовать методы аналитической механики. Полученные в работе результаты позволяют значительно расширить круг задач, для исследования которых оказываются эффективными методы аналитической механики.

Найденные структуры общих интегралов облегчат поиск новых общих интегралов.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные в диссертации аналитические решения могут быть использованы в качестве опорных траекторий для конкретных задач перелёта, для контроля качества численных процессов. Наличие аналитических решений имеет важное значение для решения задач небесной баллистики, для решения проблем навигации в космосе. Применение метода Докшевича позволит определить частные интегралы ряда нерешенных до сих пор задач.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по применению метода Докшевича нахождения частных интегралов и частных решений дифференциальных уравнений были использованы при исследовании динамических систем с наследственностью в задаче о движении тел в рамках научно-исследовательской деятельности лаборатории математического и компьютерного моделирования КамГУ. (Справка №763-01 Камчатского государственного университета от 29 декабря 2020 года). В результате это дало возможность, применить данный метод при получении решений динамических систем с наследственностью.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 5 международных научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 10 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестацинной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 работа опубликована в зарубежном издании и 4- в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, поделенных на пятнадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Проблема интегрирования дифференциальных уравнений вариационной задачи»,** приводится вариационная задача об оптимальном движении точки (центр масс космического аппарата - КА) в гравитационных полях в постановке Лоудена; дан ответ на вопрос о минимальном количестве интегралов, необходимом для сведения дифференциальных уравнений вариационной задачи к квадратурам на активных участках; представлены методы определения аналитических решений вариационной задачи. Основное внимание уделено методу Докшевича определения частных интегралов дифференциальных уравнений.

Вариационная задача ставится в виде задачи Майера для точки с ограниченным секундным расходом массы m $(0 \le m \le \widetilde{m})$. Требуется найти величину и направление силы тяги, переводящей точку из начального положения $(t=0,\quad \vec{v}=\vec{v}_0,\quad \vec{r}=\vec{r}_0,\quad M=M_0)$ в некоторое конечное, минимизируя при этом заданный функционал (функцию конечного состояния). При этом обязаны выполняться дифференциальные уравнения

$$\dot{\vec{v}} = \frac{cm}{M}\vec{e} + \vec{g}(\vec{r}),\quad \dot{\vec{r}} = \vec{v},\quad \dot{M} = -m,$$

где $M(t)$ – масса КА; $\vec{g}(\vec{r})$ – гравитационное ускорение, $\vec{r}$ – радиус - вектор точки, $\vec{v}$ – ее скорость, $\vec{e}$ - единичный вектор направления силы тяги; величина относительной скорости истечения продуктов сгорания c считается постоянной.

В первом параграфе приводятся необходимые условия стационарности, выраженные через функцию переключения $\kappa = \frac{c}{M}\lambda - \lambda_7$ и базис-вектор $\vec{\lambda}$ – множитель, сопряженный скорости ($\vec{e} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}$).

Основная часть вариационной задачи сводится к задаче интегрирования по участкам нулевой (НТ, $m=0$), промежуточной (ПТ, $0 < m(t) < \widetilde{m}$) и максимальной (МТ, $m = \widetilde{m}$) тяг замкнутой гамильтоновой системы четырнадцатого порядка

$$\dot{\vec{v}} = \frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}(\vec{r});\qquad \dot{\vec{r}} = \vec{v};\qquad \dot{M} = -m; \tag{1}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\vec{\lambda}_r;\qquad \dot{\vec{\lambda}}_r = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}}\vec{\lambda};\qquad \dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2}\lambda,$$

с гамильтонианом

$$H = \vec{\lambda}\left(\frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}(\vec{r})\right) + \vec{\lambda}_r\vec{v} - \lambda_7 m, \tag{2}$$

где лишнюю переменную (управление m) можно выразить через фазовые переменные. Здесь $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_r, \lambda_7$ – множители Лагранжа, сопряженные $\vec{v}, \vec{r}$ и M. В данной работе рассматриваются в основном участки ПТ.

Интегрирование уравнений вариационной задачи существенно зависит от выбора модели гравитационного поля.

Во втором параграфе показана возможность использования аппарата аналитической механики, развитого для гамильтоновых систем, в качестве инструмента нахождения опорных траекторий в задачах небесной баллистики.

К настоящему времени найдено только четыре общих интеграла системы дифференциальных уравнений (1), справедливых для всех участков оптимальной траектории: интеграл, соответствующий сохранению гамильтониана (2) и имеющий место для любых стационарных полей, и векторный интеграл, имеющий место для центральных полей. Составляющие векторного интеграла линейны относительно множителей и любой из них можно сделать циклическим интегралом. Кроме того, на участках ПТ имеют место ещё три интеграла: два из них не зависят от вида поля (интеграл, содержащий массу, и интеграл, выражающий постоянство величины базис-вектора), а третий интеграл, содержащий характеристическую скорость, имеет место только для центральных полей.

Таким образом, для участков ПТ в случае центральных гравитационных полей для системы четырнадцатого порядка известно только семь общих интегралов. В случае осесимметричных полей – только четыре общих интеграла. В случае ограниченной задачи трёх тел для участков ПТ известны только два интеграла. Известных интегралов недостаточно для определения общего решения дифференциальных уравнений вариационной задачи.

Наличие некоторого числа интегралов и инвариантных соотношений позволяет понизить порядок системы. Поэтому возникает вопрос о минимальном количестве интегралов, необходимых для наибольшего понижения порядка системы дифференциальных уравнений. В данном параграфе на основе анализа интегралов показано, что для участков ПТ в пространственном случае центральных полей, если будет найден только еще один интеграл, кроме известных, задача сведется к квадратурам.

В тех случаях, когда не удаётся получить общего решения, естественным образом встаёт вопрос об отыскании частных решений.

В третьем параграфе первой главы приведены метод Леви-Чивита, использующий знание только некоторого числа интегралов или инвариантных соотношений, находящихся в инволюции; метод Леман-Филе, использующий знание неполного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби. Особое внимание уделено методу Докшевича определения частных интегралов. Этот метод основан на анализе структуры интегралов, ещё не найденных для данной системы дифференциальных уравнений. Метод Докшевича, не требующий знания интегралов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, дал хорошие результаты при определении частных интегралов и частных решений для активных участков задачи об оптимизации траекторий в центральных и нецентральных гравитационных полях.

В четвертом параграфе на примере гравитационного поля предельного варианта двух неподвижных центров показано, что при помощи метода Докшевича можно исследовать структуру интегралов, имеющих место на активных участках, но до сих пор не найденных. Получены выводы относительно состава этих интегралов.

В последующих двух главах показана эффективность применения метода Докшевича для получения аналитических решений задачи оптимизации траекторий точки.

Во второй главе «**Круговая ограниченная задача трёх тел»** используется метод Докшевича для определения частных интегралов и частных решений вариационной задачи на участках ПТ в случае плоской круговой ограниченной задачи трёх тел.

В первом параграфе дается постановка вариационной задачи в рамках круговой ограниченной задачи трёх тел.

Точка переменной массы $M(t)$ движется в гравитационном поле двух центров притяжения с массами M_1 и M_2 ($M << M_2 < M_1$), для удобства названных Землёй и Луной соответственно. Их массы соизмеримы. Точка с массой M не оказывает воздействия на движение центров притяжения. Предполагается, что Луна движется относительно Земли по круговой орбите.

Дифференциальное уравнение движения точки имеет следующий вид

$$\frac{d^2\vec{\tilde{r}}}{dt^2} = \frac{cm}{M}\vec{e} - \frac{\mu_1}{\tilde{r}^2}\frac{\vec{\tilde{r}}}{\tilde{r}} - \frac{\mu_2}{\rho^2}\frac{\left(\vec{\tilde{r}} - \vec{r}_1\right)}{\rho} - \frac{\mu_2}{a^2}\frac{\vec{r}_1}{a}.$$

Здесь $\vec{\tilde{r}}$, $\vec{r}_1$ – геоцентрические радиус-векторы точки (КА) и Луны соответственно, $r_1 = a$ – среднее расстояние между центрами Земли и Луны. μ_1, μ_2 – гравитационные параметры Земли и Луны соответственно.

Для задачи о минимизации характеристической скорости введён гамильтониан в геоцентрической цилиндрической системе координат

$$H = \lambda_1\left(\frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2}{\rho^3}\left(r - a\cos\alpha\right) - \frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha + \frac{v_2^2}{r}\right) + \lambda_2\left(\frac{cm}{M}\lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3}a\sin\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha - \frac{v_1 v_2}{r}\right) + \lambda_3\left(\frac{cm}{M}\lambda_3 - \frac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 z}{\rho^3}\right) + \lambda_4 v_1 + \lambda_5\frac{v_2}{r} + \lambda_6 v_6 - \lambda_7 m.$$

Здесь v_1, v_2, v_3 – составляющие скорости $\vec{v}$ точки в цилиндрической системе; $\lambda_i \left(i = \overline{1{,}7}\right)$ – множители, сопряженные координатам $v_1, v_2, v_3, r, \varphi, z, M$; $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – базис-вектор, $|\vec{\lambda}| = 1, \vec{e} = \vec{\lambda}$; α – угловое рассогласование между КА и Луной в плоскости орбиты Луны.

Для дифференциальных уравнений четырнадцатого порядка вариационной задачи известны только два интеграла на участках ПТ

$$\lambda_7 M = c;\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \qquad (3)$$

Их недостаточно для определения общего решения. Этих интегралов недостаточно для применения метода Леви-Чивита или метода Леман-Филе. Но метод Докшевича даёт возможность определить частные интегралы или инвариантные соотношения.

Во втором параграфе при помощи метода Докшевича, получены инвариантные соотношения, которые могут привести к различным частным решениям. Рассмотрен частный интеграл вида

$$F(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5) = const\,. \tag{4}$$

Полная производная по времени от функции F в силу дифференциальных уравнений вариационной задачи тождественно равна нулю. Поскольку величины, не входящие в интеграл (4) не связаны этим условием и могут быть произвольными, то коэффициенты при них в выражении полной производной по времени от F должны быть равны нулю. Получена система линейных алгебраических однородных уравнений относительно частных производных. Чтобы эта система имела решение, отличное от нуля, её определитель должен быть равен нулю

$$\begin{gathered}\lambda_4(2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5)(\lambda_1 r - \lambda_1 a\cos\alpha - \lambda_2 a\sin\alpha)(\lambda_2\cos\alpha - \\ - \lambda_1\sin\alpha)(\lambda_1 a\sin\alpha - \lambda_2 a\cos\alpha + \lambda_2 r) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Приравнивая выражения в каждой скобке нулю, можно получить инвариантные соотношения, приводящие к различным частным решениям.

В третьем параграфе найдены три варианта частных решений на основе частных интегралов, найденных методом Докшевича. При условии (5) получено, что $z = 0$, то есть КА движется в плоскости орбиты Луны. Следовательно, $v_3 = 0,\ \lambda_3 = 0$.

К примеру, в первом варианте пусть в (5) обращаются в нуль одновременно следующие выражения

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0\,,\ \lambda_1 r - \lambda_1 a\cos\alpha - \lambda_2 a\sin\alpha = 0\,.$$

Тогда из дифференциальных уравнений вариационной задачи следует, что трансверсальная составляющая скорости v_2 изменяется пропорционально расстоянию r до неподвижного центра; угол $\alpha < \pi/4$ во всё время движения по участку ПТ. Получены ограничения на угловую скорость ω КА и на длительность участка ПТ, а значит на начальную скорость и начальное положение точки.

Показано, что найденному частному решению соответствует движение точки по участку ПТ, который принадлежит спиралевидной кривой, закручивающейся против часовой стрелки (в сторону движения Луны). Сила тяги радиальная, направлена от неподвижного центра. Угловая скорость точки меньше угловой скорости Луны. КА (точка) отстаёт от Луны на угол α, который с течением времени растёт. Масса точки $M(t)$ убывает по показательному закону

$$M = M_0 e^{\frac{-(N(t)+A)}{c}}\,,$$

где $N(t) = \dfrac{\mu_1}{\dot{\alpha}a^2}(tg\alpha - \sin\alpha) + 2a\omega\dot{\alpha}\sin\alpha > 0$, $A = N(t_0) > 0$.

В третьей главе **«Частные решения для участков промежуточной тяги в случае некруговой ограниченной задачи трёх тел»** находится ряд аналитических решений вариационной задачи на участках ПТ в случае некруговой ограниченной задачи трёх тел.

В первом параграфе третьей главы дана постановка вариационной задачи в случае некруговой ограниченной задачи трёх тел. Предполагается, что Луна движется относительно Земли по известной эллиптической орбите с эксцентриситетом e и параметром p.

Дифференциальные уравнения вариационной задачи записаны в геоцентрической цилиндрической системе координат r,φ,z в гамильтоновой форме, где используются обозначения предыдущей главы, кроме того

$$r_1 = \frac{p}{1+e\cos\theta},\ \vec{\rho} = \vec{\tilde{r}} - \vec{r}_1,\ \tilde{r}^2 = r^2 + z^2,\ \rho^2 = r^2 + z^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\alpha,\ \alpha = \theta - \varphi .$$

Ось $\varphi = 0$ проходит через перицентр орбиты Луны, θ- её истинная аномалия, отсчитывается от направления на перицентр. Считается, что при $t_0 = 0$ Луна находилась в своём перицентре. Угол θ как функцию времени можно найти, используя уравнение Кеплера.

Для дифференциальных уравнений вариационной задачи известны только два интеграла (3) на участках ПТ. Для частного интеграла (4) методом Докшевича получены следующие соотношения

$$\begin{gathered} z = 0,\ v_3 = 0,\ \lambda_3 = 0, \\ \lambda_4(2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5)(\lambda_1 r - \lambda_1 r_1\cos\alpha - \lambda_2 r_1 \sin\alpha)(\lambda_2\cos\alpha - \\ - \lambda_1\sin\alpha)(\lambda_1 r_1\sin\alpha - \lambda_2 r_1\cos\alpha + \lambda_2 r) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Приравнивая выражения в каждой скобке нулю, можно получить инвариантные соотношения, приводящие к различным частным решениям.

В следующих параграфах найдены четыре варианта частных решений.

Во втором параграфе третьей главы получен ***Вариант 1*** для случая, когда обращаются в нуль одновременно следующие выражения

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0, \qquad \lambda_1 r - \lambda_1 r_1\cos\alpha - \lambda_2 r_1\sin\alpha = 0 .$$

Показано, что КА находится в области между Землёй и Луной.

Трансверсальная составляющая скорости v_2 изменяется пропорционально расстоянию r до неподвижного центра.

$$v_2 = \frac{v_{20}}{r_0}\frac{p}{1+e\cos\theta}\cos(\theta - \omega t - \varphi_0), \qquad \alpha = \theta - \varphi = \theta - \omega t - \varphi_0 .$$

Угол φ растет (при $v_{20} > 0$) или убывает (при $v_{20} < 0$) пропорционально времени. r и ρ катеты прямоугольного треугольника (рис.1), угол α во всё время движения по участку ПТ острый и

$$tg\alpha = \frac{\rho}{r} < 1, \quad \alpha < \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

Условие (7) даёт ограничение на начальную скорость, начальное положение точки и на длительность участка ПТ.

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi_0 < 0, \quad 0 \le \theta < \omega t + \frac{\pi}{4} + |\varphi_0|, r_{10} = r_P, \quad r_0 = a(1-e)\cos\varphi_0, \quad \alpha_0 = \varphi_0 .$$

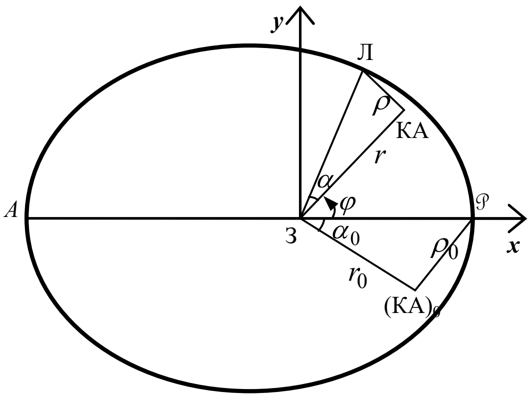


Рис.1. Положение КА в начальный и в произвольный момент времени.

Рис.1 соответствует двум моментам времени: начальному $t_0 = 0$ и произвольному. КА движется в сторону движения Луны, отставая от неё на угол α, изменяющийся с течением времени.

Время движения выражено через истинную аномалию Луны θ, используя приближенную формулу, полученную из уравнения Кеплера при малом эксцентриситете

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_1}}(\theta - e\sin\theta).$$

Тогда $\alpha(\theta) = \theta - \omega\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu_1}}(\theta - e\sin\theta) + |\varphi_0|$, $r(\theta) = \dfrac{p\cos\alpha(\theta)}{1 + e\cos\theta}$.

Закон изменения массы можно определить из уравнения $\dot{v}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_1}$:

$$\frac{dM}{M} = f(\theta, \mu_1, \mu_2, e, p, \varphi_0, v_{20})d\theta.$$

В третьем параграфе для иллюстрации результатов приведён численный пример в случае малого эксцентриситета орбиты Луны. Введены следующие числовые значения величин для Земли и Луны: $\mu_1 = 398603$ км^3/с^2; $\mu_2 = 4900$ км^3/с^2; $e = 0{,}055$; $a = 384400$ км; $p = a(1-e^2) = 383237$ км; $r_P = 363104$ км; $r_0 = r_P\cos\varphi_0$. В качестве v_{20} взята местная круговая скорость для КА.

На рис.2 дан график зависимости угла рассогласования α от θ (углы измеряются в радианах). Из графика следует, что угол рассогласования α с течением времени убывает. Участки ПТ существуют только при движении Луны от перицентра до углов $\theta < 123^\circ$.

На рис.3 дан график изменения расстояния $r(\theta)$ (в км) до неподвижного центра притяжения от угла θ (в радианах). Расстояние $r(\theta)$ при углах $33^\circ < |\varphi_0| < 45^\circ$ растет для $\theta < 68^\circ$ и убывает для $68^\circ < \theta < 123^\circ$. Для углов $|\varphi_0| < 33^\circ$ расстояние $r(\theta)$ растёт для всех θ.

Таким образом, первый вариант показывает, что найденному частному решению соответствует движение точки по участку ПТ, принадлежащему кривой, форма которой зависит от начального положения точки. КА отстаёт от Луны на острый угол, убывающий с течением времени. Трансверсальная составляющая скорости изменяется пропорционально расстоянию до неподвижного центра. Найдено ограничение на начальное положение, начальную скорость точки и на длительность участка ПТ. Сила тяги оказалась радиальной. Все величины выражены через истинную аномалию орбиты Луны, являющуюся известной функцией времени.

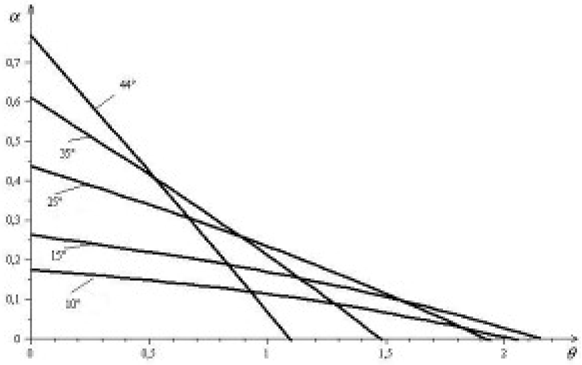


Рис.2. Зависимость угла рассогласования α от θ при различных начальных значениях угла $|\varphi_0|$.

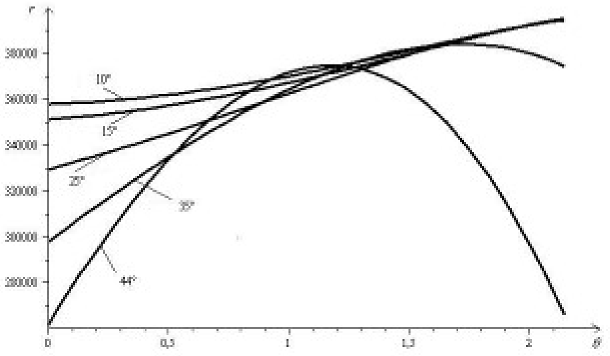


Рис. 3. Зависимость r от θ для различных начальных значениях угла $|\varphi_0|$.

Вариант 2 (§3.4). Пусть в (6) обращается в нуль следующее соотношение

$$\lambda_2 \cos\alpha - \lambda_1 \sin\alpha = 0\,.$$

Получен случай $\lambda_2 = 1$ (тяга трансверсальная), то есть $\alpha = \pi/2$, КА отстаёт от Луны на 90°. Из уравнений для множителей получено соотношение

$$\frac{3\mu_2}{\rho^5} r r_1 = -2\frac{\mu_1}{r_1^3} e \sin\theta\,,$$

откуда следует, что участки ПТ существуют для углов $\sin\theta < 0,\ \ \pi < \theta < 2\pi$.

Показано, что радиальная составляющая скорости

$$v_1 = -2e\sqrt{\frac{\mu_1}{p}}\cos\theta + c_1\,,$$

(где c_1 - произвольная постоянная) убывает с течением времени. Найден закон изменения расстояния $r(\theta)$ до неподвижного центра

$$r - c_2 = \frac{pe\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)}\left(-2 - c_1\sqrt{\frac{p}{\mu_1}}\right) + \frac{2p}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} arctg\,\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} tg\frac{\theta}{2}\left(2e^2 + c_1\sqrt{\frac{p}{\mu_1}}\right).$$

Для выяснения поведения расстояния $r(\theta)$ построен график для конкретного начального значения радиальной составляющей скорости (при $c_1 = 0$) (рис.4). Числовые значения взяты для Луны: e = 0,055, p = 383237 км.

Таким образом, второй вариант соответствует движению точки по участку ПТ, геоцентрическое расстояние до которого в каждый момент времени зависит от истинной аномалии орбиты Луны. Оно может как возрастать, так и убывать. Получены ограничения на область существования найденных участков ПТ. Все величины выражены через истинную аномалию орбиты Луны, являющуюся известной функцией времени.

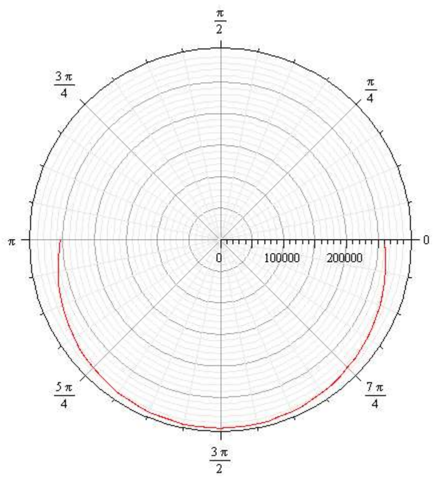


Рис.4. Зависимость расстояния r от истинной аномалии орбиты Луны θ.

Ещё два варианта (§3.5) получены для случая, когда в (6) обращаются в нуль одновременно выражения

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0,\ \lambda_1 r_1 \sin\alpha - \lambda_2 r_1 \cos\alpha + \lambda_2 r = 0.$$

Известно, что для плоского случая, когда участок ПТ лежит в плоскости, проходящей через центр тяготения, известных интегралов оказалось достаточным для сведения вариационной задачи к квадратурам. Решение плоской задачи для участков ПТ впервые было дано Лоуденом. В четвертой главе «**Интегрируемые случаи для участков промежуточной тяги в центральных гравитационных полях»** предложен другой, более естественный, метод определения аналитического решения для участков ПТ, использующий известные интегралы. Этим методом найдены аналитические решения не только для плоского случая центрального ньютоновского поля, но и для случая произвольного центрального поля.

В первом параграфе рассмотрена задача о минимизации характеристической скорости точки, движущейся в центральном ньютоновском поле. Движение происходит в плоскости, проходящей через центр притяжения. Время движения не фиксировано. Эта задача описывается гамильтоновой системой десяти уравнений (в полярных координатах r,φ)

$$\dot v_1 = \frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v_2^2}{r},\ \dot v_2 = \frac{cm}{M}\lambda_2 - \frac{v_1 v_2}{r}, \dot r = v_1,\ \dot\varphi = \frac{v_2}{r},\ \dot M = -m,$$

$$\dot\lambda_1 = \lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_4,\ \dot\lambda_2 = -2\lambda_1\frac{v_2}{r} + \lambda_2\frac{v_1}{r} - \lambda_5\frac{1}{r},$$

$$\dot\lambda_4 = \lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r^2} + \lambda_5\frac{v_2}{r^2},\ \dot\lambda_5 = 0,\ \dot\lambda_7 = \frac{cm}{M^2}.$$

с пятью известными интегралами

$$\lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r} + \lambda_4 v_1 + \lambda_5\frac{v_2}{r} = 0, \qquad \lambda_5 = a, \qquad \lambda_7 M = c,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1,\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2r\lambda_4 - V = b. \tag{8}$$

Здесь V - характеристическая скорость, a,b - произвольные постоянные.

Основываясь на том, что один из интегралов циклический, два других находятся в инволюции, ещё один выражает сохранение гамильтониана, делается заключение, что известные интегралы позволяют свести задачу к квадратурам.

Для полного решения задачи необходимо найти семь функций времени: $r,\varphi,v_1,v_2,M,\lambda_1,\lambda_2$, определяющих положение и скорость точки, а также величину и направление силы тяги.

Дифференцируя первое соотношение (8) дважды по времени и вводя составляющие векторов в полярной системе координат, уравнение для базис-вектора сведено к двум уравнениям

$$\ddot\lambda_1 - \lambda_2\ddot\varphi - 2\dot\lambda_2\dot\varphi - \lambda_1\dot\varphi^2 = \lambda_1\frac{2\mu}{r^3},\ \ddot\lambda_2 + \lambda_1\ddot\varphi - \lambda_2\dot\varphi^2 + 2\dot\lambda_1\dot\varphi = -\lambda_2\frac{\mu}{r^3},$$

Показано, что после несложных преобразований с использованием известных интегралов задача сводится к решению следующей системы:

$$a\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right) - 2\lambda_1\lambda_2 v_1 v_2 + \lambda_1^2 v_2^2 + \lambda_2^2 v_1^2 = \lambda_1^2 \frac{\mu}{r},$$

$$\lambda_1^2 v_2^2 + \lambda_2^2 v_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 v_1 v_2 - 3\lambda_1^2\lambda_2^2 v_1^2 + 6\lambda_1^3\lambda_1 v_1 v_2 - 3\lambda_1^4 v_2^2 = \lambda_1^2\frac{\mu}{r},$$

$$\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right)\left(a_3 + 3\lambda_1^2\left(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1\right)\right) = 0,$$

$$\lambda_1^2 v_1 - 2\lambda_2^2 v_1 + 3\lambda_1\lambda_2 v_2 + 2\lambda_2 a_3 = \lambda_1\left(V + b\right).$$

Найдены все величины, решающие задачу:

$$r = \frac{9\mu\lambda_1^6}{a^2\left(1 - 3\lambda_1^2\right)}, \qquad \varphi = -3\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 4\arcsin\lambda_1 + c_1, \tag{9}$$

$$v_1 = \frac{a\lambda_2}{\lambda_1^2}\cdot\frac{2\left(2\lambda_1^2 - 1\right)}{5\lambda_1^2 - 3}, \qquad v_2 = \frac{a}{3\lambda_1^3}\cdot\frac{\left(4\lambda_1^2 - 3\right)\left(1 - 3\lambda_1^2\right)}{5\lambda_1^2 - 3}, \; dt = \frac{27\mu\lambda_1^7\left(3 - 5\lambda_1^2\right)}{a^3\left(1 - 3\lambda_1^2\right)^2\lambda_2}d\lambda_1$$

где c_1 - произвольная постоянная.

Таким образом, все величины, характеризующие найденную траекторию, определены через радиальную составляющую базис-вектора λ_1.

Уравнения (9) образуют параметрические уравнения участка ПТ в полярных координатах – спираль Лоудена.

Во втором параграфе четвёртой главы даются характеристики различных типов спиралей. Найденные спирали идентичны во всём, за исключением ориентации, масштаба и направления движения вокруг центра тяготения (рис. 5). На рис.6 представлена возможная область (заштрихованные участки) изменения направления силы тяги, соответствующая всем рассмотренным выше четырём случаям.

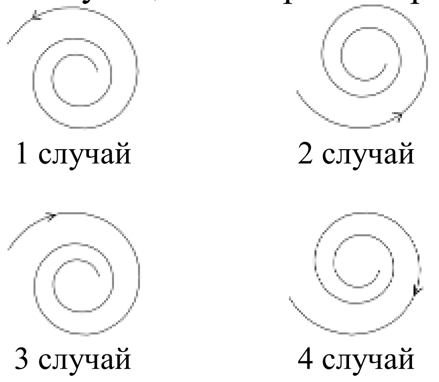


Рис.5. Различные случаи спиралей Лоудена.

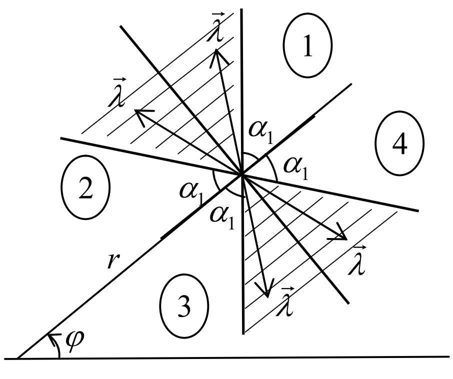


Рис.6. Области изменения направления силы тяги.

В третьем параграфе рассмотрен случай произвольного центрального поля с гравитационным ускорением

$$\vec{g} = -\frac{g(r)}{r}\vec{r}\,.$$

Движение происходит в плоскости, проходящей через центр притяжения. Время движения не фиксировано. Также как в §4.1 эта задача описывается гамильтоновой системой десяти уравнений (в полярных координатах r,φ) с гамильтонианом (2) и с пятью известными интегралами.

Показано, что известных интегралов достаточно для получения полного решения задачи. Следуя методике, изложенной в §4.1, уравнение для базис-вектора сведено к двум уравнениям

$$\ddot{\lambda}_1-\lambda_2\ddot{\varphi}-2\dot{\lambda}_2\dot{\varphi}-\lambda_1\dot{\varphi}^2=-\lambda_1\frac{dg(r)}{dr},\ \ddot{\lambda}_2+\lambda_1\ddot{\varphi}-\lambda_2\dot{\varphi}^2+2\dot{\lambda}_1\dot{\varphi}=-\lambda_2\frac{g(r)}{r}.$$

Полагая, $g(r)=\dfrac{\mu}{r^n}(n\neq\pm1)$, проделывая те же преобразования, что и в §4.1, получены уравнения траектории

$$r=\left(\frac{\mu(n+1)^2\lambda_1^6}{a^2\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}},\qquad \varphi=-\frac{3}{n-1}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{4}{n-1}\arcsin\lambda_1+c_1,\quad (10)$$

и составляющие скорости

$$v_1=\frac{2a\lambda_2}{(n+1)\lambda_1^2}\cdot\frac{2(n+1)\lambda_1^2-3}{(n+3)\lambda_1^2-3},\ \ v_2=\frac{a_3}{(n+1)\lambda_1^3}\cdot\frac{\left(4\lambda_1^2-3\right)\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)}{(n+3)\lambda_1^2-3}.$$

Таким образом, все величины, характеризующие найденную траекторию, определены через радиальную составляющую базис-вектора λ_1.

Для определения времени движения по найденной траектории получено следующее уравнение

$$dt=\frac{3-(n+3)\lambda_1^2}{(n-1)\lambda_2}\left(\frac{\mu(n+1)^{n+1}\lambda_1^{n+5}}{a^{n+1}\left(1-(n+1)\lambda_1^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{n-1}}d\lambda_1.$$

Уравнения (10) образуют параметрические уравнения участка ПТ в полярных координатах. При $n=2$ получаются спирали Лоудена.

Рассмотрен случай, когда $n=4$. Введён угол α, который вектор тяги составляет с радиусом-вектором точки. Возможны четыре случая.

В первом случае пусть $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ (рис. 7).

Угол α убывает от $\pi/2$ до α_1, $\alpha_1=\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)\approx63^\circ$. Угол φ возрастает монотонно от $-\infty$ до φ_1, $\varphi_1=-2-4/3\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)+c_1$.

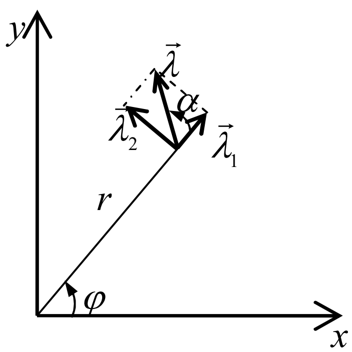


Рис. 7

Расстояние r растёт монотонно от 0 до $+\infty$. Соответствующий участок ПТ принадлежит спирали, раскручивающейся из центра притяжения против часовой стрелки и уходящей на бесконечно большое расстояние после бесконечного числа оборотов вокруг полюса. По этой спирали точка удаляется от центра притяжения.

Получены ещё три участка ПТ, являющихся зеркальным отображением первого. Все спирали идентичны во всём, за исключением ориентации, масштаба и направления движения вокруг центра тяготения. Точка может, как приближаться к центру тяготения, так и удаляться от него.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам исследования, проведённого по теме диссертации доктора философии (PhD) «Аналитические методы оптимизации траекторий в гравитационных полях», сделаны следующие выводы:

1. Показана эффективность метода Докшевича для получения частных интегралов задачи оптимизации траекторий точки.
2. При помощи метода Докшевича получены выводы относительно состава неизвестных интегралов для участков промежуточной тяги на примере гравитационного поля предельного варианта двух неподвижных центров.
3. На участках промежуточной тяги для определения частных интегралов и частных решений вариационной задачи в случае плоской круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел применён метод Докшевича.
4. При помощи метода Докшевича получены инвариантные соотношения для участков промежуточной тяги в случае круговой и некруговой ограниченной задачи трёх тел.
5. На основе частных интегралов, полученных методом Докшевича, найдены три новых варианта аналитических решений для участков промежуточной тяги в случае плоской круговой и четыре новых варианта в случае плоской некруговой ограниченной задачи трёх тел.
6. Проведен аналитический и графический анализ величин, характеризующих найденные активные участки. Найден закон изменения массы. Получены ограничения на начальные условия, на область существования и на длительность найденных активных участков.
7. Предложена методика определения аналитического решения для участков промежуточной тяги в плоском случае центральных полей, использующий знание интегралов дифференциальных уравнений вариационной задачи.
8. Найдены аналитические решения для случая центрального ньютоновского и для случая произвольного центрального поля.
9. Полученные в работе результаты позволяют значительно расширить круг задач, для исследования которых оказывается эффективным метод Докшевича определения частных интегралов. Полученные в диссертации аналитические решения могут быть использованы в качестве опорных траекторий при численном интегрировании, а также найти применение при осуществлении конкретных маневров в небесной баллистике.

ONE-TIME SCIENTIFIC COUNCIL AT THE SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING THE SCIENTIFIC DEGREES OF DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 AT THE INSTITUTE OF MECHANICS AND SEISMIC STABILITY OF STRUCTURES

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RUZMATOV MAKSUD

ANALYTICAL METHODS FOR OPTIMIZING TRAJECTORIES IN GRAVITATIONAL FIELDS

01.02.01- Theoretical mechanics

DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM351.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.instmech.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific advisor:	**Korshunova Natalya Aleksandrovna** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Dusmatov Olimjon Musurmonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Yugay Lev Pavlovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place 16 July 2021 at 14 ^{00} at the meeting of the One-time Scientific Council under the Scientific Council DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 at the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures (Address: Durmon yuli, 33, Conference hall-1, Tashkent, 100125, Ph.: (+99871) 262-71-32, fax: (+99871) 262-71-52, e-mail: instmech@academy.uz).

Dissertation is possible to review in Information-Resource Centre at the Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures (is registered №10). Address: Durmon yuli, 33, Tashkent, 100125, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 262-71-32.

Abstract of dissertation sent out on 29 June 2021 year
(Mailing report №1 on 16 June 2021 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI M.T.O'ROZBOYEV NOMIDAGI MEXANIKA VA INSHOOTLAR SEYSMIK MUSTAHKAMLIGI INSTITUTI

M.M. Mirsaidov
Chairman of the One-time scientific council on award of scientific degrees, doctor of technical sciences, professor, Academician of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan

M.K.Usarov
Scientific secretary of the One-time scientific council on award of scientific degrees, doctor of Physical and mathematical sciences, Senior Researcher

R.A. Abirov
Chairman of scientific Seminar under the One-time Scientific council on award of scientific degrees, doctor of Physical and mathematical sciences, Senior Researcher

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

The aim of research is to determine analytical solutions in the intermediate thrust arcs in gravitational fields using the methods of analytical mechanics; confirmation of the effectiveness of the Dokshevich method for determining the partial integrals for finding new optimal trajectories in the case of the restricted three-body problem.

The object of research is a point (the center of mass of the spacecraft) moving in the intermediate thrust arcs in the central and non-central gravitational fields, in particular in the case of a circular and non-circular limited problem of three bodies.

Scientific novelty of the research is as following:

using the Dokshevich method, invariant relations were obtained for the intermediate thrust arcs in the case of a circular and non-circular restricted three-body problem;

three variants of particular solutions in the case of the plane circular and four variants of particular solutions in the case of the plane noncircular restricted three-body problem were found for the intermediate thrust arcs;

restrictions on the initial conditions, on the region of existence and on the duration of the found active sections were obtained, the magnitude and direction of the thrust force were determined;

a method is proposed for determining the analytical solution for the intermediate thrust arcs in the plane case of central fields, using the knowledge of the integrals of the differential equations of the variational problem. Analytical solutions are found for the case of a central Newtonian and the case of an arbitrary central field.

Implementation of research results.

The results obtained in the dissertation on the application of the Dokshevich method for finding partial integrals and partial solutions of differential equations were used in the study of dynamical systems with heredity in the problem of the motion of bodies in the framework of the research activities of the laboratory of mathematical and computer modeling of KamSU. (Reference No. 763-01 of Kamchatka State University dated December 29, 2020). As a result, this made it possible to apply this method when obtaining solutions to dynamical systems with heredity.

The structure and volume of dissertation. This thesis consists of an introduction, four chapters, conclusions and reference list. The total volume of the thesis is 112 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Коршунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения для участков промежуточной тяги в центральном ньютоновском поле // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2014, №3-4, – С.3-8. (01.00.00; №4)
2. Коршунова Н.А., Рузматов М.И., Кодирова Ш.Ш. Новые частные решения для активных участков в случае круговой ограниченной задачи трёх тел // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2015, № 1, – С.3-7. (01.00.00; №4)
3. Рузматов М.И. Аналитические решения для участков промежуточной тяги в произвольном центральном поле // Журнал Вестник НУУз, 2015, № 2/1, – С. 106-110. (01.00.00; №8)
4. Коршунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения для участков промежуточной тяги в случае некруговой ограниченной задачи трёх тел // Узбекский журнал «Проблемы механики», 2016, №2, – С. 3-7. (01.00.00; №4)
5. Natalya Korshunova, Maksud Ruzmatov, Juragul Manglieva and Alisher Ibragmov Integrals for Intermediate Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems. Volume 12 | 07-Special Issue. 2020. Pp: 2126-2137. (№3, Scopus, IF= 0.4)

II бўлим (II часть; part II)

6. Коршунова Н.А., Рузматов М.И. интегрируемый случай для участков промежуточной тяги в центральном ньютоновском поле // Международная научно-практическая конференция «Инновация -2014». Сборник научных статей. – Ташкент, 2014. – С. 247-248.
7. Коршунова Н.А., Рузматов М.И., Кодирова Ш.Ш. Новые аналитические решения для участков промежуточной тяги в случае круговой ограниченной задачи трёх тел // Международная научно-практическая конференция «Инновация -2015». Сборник научных статей. – Ташкент. 2015. – С. 280-281.
8. Коршунова Н.А., Рузматов М.И. Частные решения для участков максимальной тяги в случае ограниченной задачи трёх тел // Материалы международной научно-технической конференции «Прочность конструкций, сейсмо-динамика зданий и сооружений», Ташкент. 2016. – С. 278-281.
9. Коршунова Н.А., Рузматов М.И., Максудова Г. Аналитические решения для активных участков в случае некруговой ограниченной задачи

трёх тел // Международная научно-практическая конференция «Инновация - 2016». Сборник научных статей. – Ташкент. 2016. – С. 224-225.

10. Рузматов М.И. Метод Докшевича определения частных интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений // Международная научно-практическая конференция «Инновация - 2017». Сборник научных статей. – Ташкент. 2017. – С.239-240.

Автореферат «ЎзМУ хабарлари» илмий журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Бичими 60х84 1/16. Ризограф босма усули. Times гарнитураси.

Шартли босма тобоғи: 2,75. Адади 100. Буюртма №31.
Баҳоси келишилган нархда.

“ЎзР Фанлар академияси Асосий кутубхонаси” босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100170, Тошкент ш., Зиёлилар кўчаси, 13-уй.