УЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА УРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ТУКИМАЧИЛИК ВА ЕНГИЛ САНОАТ ИНСТИТУТИ

«**Технологик жараёнларни автоматлаштириш ва компьютерлаштириш**» кафедраси

5521800 - «Автоматлаштириш ва бошкарув» мутахассисилиги бакалаврлари учун

«**Бошкариш масалаларида оптималлаш»** фанидан

МАЪРУЗА МАТНИ

Ушбу «Бошкариш масалаларида оптималлаш» фанидан тузилган маъруза матни намунавий дастур асосида ёзилган бўлиб, 5521800 – «Автоматлаштириш ва бошқарув» йўналиши бакалавриатура талабаларига мўлжалланган.

Тузувчилар: Сиддиқов И.Х.
Искандаров З.Э.
Алимова Г.Р.
Фарходова Л.Ф.

Тақризчилар: ТДТУ, «Автоматика ва телемеханика» доц. Зарипов О.
ТТЕСИ. «Технологик жараёнларни автоматлаштириш ва компьютерлаштириш» кафедраси катта ўқитувчиси, Салахутдинов Р.Т.

ТТЕСИ илмий – услубий кенгашида муҳокама қилинган ва чоп этишга тавсия қилинган.

Баённома № __20_ «_18_»__05_____2010 й

ТТЕСИ таҳририятида «______» нусхада кўпайтирилган.

Мавзу 1.
ОПТИМАЛЛАШ МАСАЛАСИ ВА УНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИ

Р е ж а:

1.Кириш.
2.Оптималлаш масаласи ва унинг математик моделининг қўйилиши.
3.Оптималлаш масаласи математик моделининг классификацияси.
4.Оптимал ечимни қабул қилишнинг асосий босқичлари.
5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel. Санкт-Петербург, 1997.
2.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.

1.Кириш

Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаш инсон фаолиятининг турли соҳаларида кенг қўлланиладиган фанлардан биридир. Бу соҳадаги муҳим муваффақиятларга катта техник тизимларни лойиҳалаш ва анализ қилиш натижасида эришилган.
Инсон олдига қўйиладиган барча масалаларни ечишда яхши ёки ёмон деган ечимни қабул қилиши мумкин. Ечим қабул қилиш жараёни формаллашган (формализован) ва формаллашмаган ҳолда бўлиши мумкин.

Формаллашмаган ечим қабул қилиш -бу агар айтиш лозим бўлса ижод, санъатдир. Формаллашмаган ечимни қабул қилиш учун инсондан ҳеч нарса керак бўлмайди. Масалан, инсон ўтирди, ўйлади, ечим қабул қилди. Ҳақиқатдан ҳам бу ҳолда ечимнинг тўғрилигига ҳеч қандай кафолат (гарантия) йўқ. Инсон кўп ҳолларда ҳеч қандай асоссиз ўзи ўйлаган ҳолда, айрим ҳолларда эса тажрибасига ишонган ҳолда ечимларни қабул қилади.

Формаллашган ечимга келсак, у аниқ тавсияга асосланиб қабул қилинади. Формаллашган ечим қабул қилиш иккита усулга асосланади:

-мантиқий моделлаш;

-оптималлаш.

Мантиқий моделлашда юқори билимга эга бўлган мутахассислар томнидан усул танланиб, ким тамонидан ечим қабул қилиш кераклиги аниқланиб, танланган усул ёрдамида бирор бир ҳолат ёки бошқа ҳолатда нима қилиш кераклилиги аниқланади. Бунинг учун қуйидаги функциялар хизмат қилади: ВА (И), ЁКИ (ИЛИ), АГАР (ЕСЛИ), ЙЎҚ (НЕ).

Энг оддий усул, масалан қуйидаги кўринишда бўлиши мумкин: “Агар (Если) ёмғир ёғаётса, у ҳолда (ТО) зонтни олинг”. Бу усулга янада аниқлаштириш киритиш мумкин. “Агар (Если) ёмғир ёғаётса ва (И) уйдан чиқиш керак бўлса, у ҳолда (ТО) зонтни олинг ёки (ИЛИ) плаш кийиб чиқинг”.

Ҳақиқатдан ҳам жуда мураккаб ҳолатларда ечим қабул қилиш шунга ўхшаш аниқлашлар ёрдамида етарлича аниқ таклифларни бериш имконини беради. Комьпютерда мантиқий моделлашни амалга ошириш учун махсус Пролог (мантиқий дастурлаш) тили ишлаб чиқилган.

Ечим қабул қилишнинг **оптималлаш** усули қуйидагиларга асосланади:

-математик моделлаш;

-компьютерда масалани ечиш;

-бошланғич маълумотлар.

Математик моделлашнинг иккита имконияти мавжуд:

-қўйилган саволга тез жавоб топиш;

-кенг тажриба ўтказиш имконияти.

Ечим қабул қилиш алгоритми анча мураккаб бўлиб, унда компьютерни қўлламасдан туриб амалий жиҳатдан бажариш мумкин эмас. Компьютерда оптимал ечимни излаш алгоритми учун ишлаб чиқилган дастурий таъминот ва бошланғич маълумотларсиз изланаётган натижага эришиб бўлмайди. Бундай дастурий таъминот Excel воситасида “Поиск решения” сервис хизматида мавжуд. Бунда бошланғич маълумотларнинг етарлича аниқлиги катта аҳамиятга эга.

2.Оптималлаш масаласи ва унинг математик моделининг қўйилиши

Оптималлаш масаласини оддий бир ҳол учун кўриб чиқайлик. Оддий математик моделга эга, мураккаб математик формула ишлатилмайдиган формасини етарлича тавсифлаш қийин бўлган идишни олайлик. Бу идиш кувшин (кўза) бўлмаса ҳам, унинг формасини етарлича тавсифлаш қийин.

Айтайлик ҳажми тўғри бурчакли паралелопепед формага эга бўлган бакни лойиҳалаштириш керак бўлсин. Бунда унинг ҳажмини ҳисоблаш формуласи қуйидагича бўлади.

$$V=a\cdot b\cdot h \qquad (1)$$

бу ерда a, b, h –нинг тамонлари.

Бу масаланинг математик моделини тузиш учун масала қўйилиши тавсифини бериш керак: ҳажми V=2000 га тенг бўлган бак ўлчамини аниқлаш талаб этилсин ва бакни таёрлаш учун кам материал кетсин, унинг майдони (сирти)

$$S=2\cdot [a\cdot b+(a+b)\cdot h] \qquad (2)$$

Бундай масаланинг математик қўйилиши қуйидагича ёзилади.

$$F=S\rightarrow min$$
$$V=2000 \qquad (3)$$

Бу ёзув V=2000 шарт билан S катталикни минималлаштириш маъносини билдиради. Охирги (3) формулани (1) ва (2) ларга асосланиб қуйидагича ёзиш мумкин.

$$F=2\cdot [a\cdot b+(a+b)\cdot h]\rightarrow min$$
$$a\cdot b\cdot h=2000$$

Бу боғланишларга яна кўпроқ компьютер учун керак бўлган шартни қўшамиз. Бу шарт тўртбурчак томонлари фақат мусбат қийматга эга бўлишлиги шартидир, яъни

a, b, h>0.

У ҳолда масаланинг оптимал ечимини излашнинг қуйидаги математик моделига эга бўламиз:

$$\text{МФ (ЦФ)}\ \ F=2\cdot[a\cdot b+(a+b)\cdot h]\rightarrow min$$
$$\text{ЧГ(ОГР)}\ \ a\cdot b\cdot h=2000 \qquad (4)$$
$$\text{ЧШ (ГРУ)}\ a, b, h>0$$

Бу модел учта асосий ташкил этувчилардан иборат:

-мақсад функцияси (МФ);

-чегаралаш (ЧГ);

-чегаравий шарт (ЧШ).

Энди оптималлаш масаласининг математик моделини умумий ҳолда кўриб чиқайлик. Бунинг учун яна юқоридаги келтирилган мисолни қараймз. Унда қуйидаги белгилашларни киритамиз $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=h$. У ҳолда (4) қуйидагича ёзилади.

$$F=2\cdot[x_1\cdot x_2+(x_1+x_2)\cdot x_3]\rightarrow min$$
$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=2000 \qquad (5)$$
$$x_1, x_2, x_3>0$$

Ёки буни умумлаштирган ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин.

$$F=f(x_1,x_2,x_3)\rightarrow min$$
$$g(x_1,x_2,x_3)=B \qquad (6$$
$$x_1, x_2, x_3>0$$

Бу (6) моделни янада умумлаштириб компакт ҳолда ёзадиган бўлсак, у қуйидаги кўринишни олади.

$$F=f(x_j)\rightarrow min(max,Const)$$
$$g_i(x_j)\leq B_i \qquad (7)$$
$$d_j\leq x_j\leq D_j\ \ i=1,2,\dots,m;\ \ j=1,2,\dots,n$$

(7) модел оптималлаш масаласининг умумлашган математик формасининг ёзилишидир.

Бу модел формулалари маъноларини берамиз:

1) мақсад функцияси (МФ) –оптималлаш критерияси бўлиб масала ечимининг оптималлигини, яъни яхшилиги маъносини кўрсатади. Бунда мақсад функцияси 3 турга мўлжалланган бўлиши мумкин:

- максималлаштириш;
- минималлаштириш;
- берилган қийматга мўлжалланган.

2) чегаралаш (ЧГ) -ўзгарувчилар ўртасидага боғланишларни ўрнатади. Улар бир тарафлама ёки икки тарафлама бўлиши мумкин, масалан:

- $g_i(x_j)\leq B_i$ бир тарафлама берилиш;
- $A_i\leq g_i(x_j)\leq B_i$ икки тарафлама берилиш.

Excel ёрдамида оптималлаш масаласини ечишда икки тарафлама чегаралаш иккита бир тарафлама чегаралашга ажратилиб берилади, яъни

$$g_i(x_j)\geq A_i$$
$$g_i(x_j)\leq B_i$$

3) чегаравий шарт (ЧШ) -қиймати изланаётган ўзгарувчиларга чегаралашларни қўйади.

Масаланинг барча чегараланишлар ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимларига **-мумкин бўлган ечимлар тўплами** дейилади.

Оптималлаш масаласининг асосий характеристикаларидан бири бу унинг ўлчамидир. Унинг ўлчами n -ўзгарувчилар сони ва m -чегаралашлар сони билан аниқланади. Бунда учта ҳол бўлиши мумкин: $n<m$, $n=m$, $n>m$.

1. $n<m$ ҳолни қараймиз.

Мисол,

$$x_1+2=5$$
$$x_1-8=15$$

системани қарайлик. Бу ерда $n=1$, $m=2$. Кўриниб турибдики масала ечими мавжуд эмас. Чунки биринчи тенгламада x_1 қиймати 3 иккинчи тенламада x_1 қиймати 7.

2. $n=m$ ҳолни қараймиз.

Мисол,

$$x_1+ x_2=5$$
$$x_1 - x_2=1$$

Бу ҳолда $n=m=2$. Бундай n ва m боғланиш тенгламалар системасини ечишнинг зарур шартидир. Бу ҳолда ечим мавжуд. Лекин шундай ҳолатлар бўлиши мумкинки $n=m$ бўлганда ҳам ягона ечим мавжуд бўлмайди, масалан

$$x_1+ x_2=5$$
$$2x_1+2x_2=10$$

бу система ягона ечимга эга эмас, яъни у чизиқли боғлангандир.

3. $n>m$ ҳолни қараймиз.

Мисол,

$$x_1+ x_2=5$$

бу ерда $n=2$, $m=1$. Бу ҳолда x_1 ва x_2 тенгламани қаноатлантирадиган чексиз кўп қийматни қабул қилиши мумкин.

3.Оптималлаш масаласи математик моделининг классификацияси

Оптималлаш масаласининг математик модел элементлари бўлган изланаётган ўзгарувчилар, боғланишлар ва бошланғич маълумотлар бирикмаси оптималлаш масаласининг ҳар хил синфларини ташкил қилади ва уларни ечишда турли усуллар талаб этилади. Математик модел элементлар турларига қараб оптималлаш масаласини қуйидаги синфларга ажратиш мумкин:

- Чизиқли дастурлаш. Бунда боғланишлар чизиқли, изланаётган ўзгарувчилар узлуксиз ва бошланғич маълумотлар аниқ қийматлар бўлади.
- Чизиқсиз дастурлаш. Бунда боғланишлар чизиқсиз, изланаётган ўзгарувчилар узлуксиз ёки бутун сонли бўлиб, бошланғич маълумотлар ҳам аниқ қийматлар бўлади.
- Бутун сонли дастурлаш. Бунда боғланишлар чизиқли, изланаётган ўзгарувчилар бутун сонли ва бошланғич маълумотлар аниқ қийматлар бўлади.

- Динамик дастурлаш. Бунда боғланишлар чизиқли ёки чизиқсиз бўлиб, кўпроқ вақтга боғлиқ масалалар қаралади ва бошқа.

Бошланғич маълумотлар (исходные данные) математик модел учун қуйидагилар бўлади:

- Мақсад функцияси $F(x_j)$;
- Чегаралашнинг чап тамони $g_i(x_j)$ ва ўнг тамони b_j.

Изланадиган ўзгарувчилар узликсиз ва дискрет бўлиши мумкин. Узликсиз деб шундай ўзгарувчиларга (катталикларга) айтиладики, у берилган чегаравий шартда исталган қиймат қабул қилиши мумкин. Дискрет деб шундай ўзгарувчиларга (катталикларга) айтиладики, у фақат берилган қийматни қабул қилади. Бутун сонли деб шундай дискрет ўзгарувчиларга айтиладики, у фақат бутун қиймат қабул қилади.

Ўзгарувчилар орасидаги боғланишлар чизиқли ва чизиқсиз бўлиши мумкин. Боғланиш чизиқли дейилади, агарда ўзгарувчи биринчи даражали бўлиб, у билан фақат айириш ёки қўшиш бажарилса. Акс ҳолда чизиқсиз дейилади.

4.Оптимал ечимни қабул қилишнинг асосий босқичлари

Оптимал ечимни қабул қилишнинг асосий босқичлари қуйидагилардан иборат:

1.Масалани танлаш. Бунда масала қандай талабларни қаноатлантириши кераклиги аниқлаштирилади. Масалани танлаш оптимал ечимни қабул қилишда асосий рол ўйнайди. Чунки масала натўғри танланса ечимни қабул қилишда кўп вақт талаб қилинади ва масалани ечишда танланган оптимал усул керакли натижани бермайди.

2.Масалани қўйиш. Бунда масаланинг математик модели ва унинг элементлари аниқланади.

3.Масала математик моделини тузиш. Бу босқич ҳам жуда асосий бўлиб, оптимал ечим қабул қилишга асосланган математик моделни тузиш масаласи қаралади.

4.Масала учун бошланғич маълумотларни йиғиш. Бу босқичда тузилган математик моделга мос бошланғич маълумотлар йиғилади. Масала ва унинг математик моделининг тўғрилигини текшириш учун керакли тест маълумотлари ташкил қилинади.

5.Масалани ечиш. Бу босқичда керакли усул танланиб масала ечилади.

6.Ечимни таҳлил қилиш. Бу босқич ечим қабул қилишнинг асосий инструменти бўлиб, олинган оптимал ечим математик модел асосида таҳлил қилинади.

7.Оптимал ечимни қабул қилиш. Оптимал ечим олинган натижаларга асосланиб мутахасис тамонидан қабул қилинади.

8.Ечимни график кўринишда тасвирлаш оптимал ечимни қабул қилишда муҳим фактор бўлиб, унда маълумотлар яққол тасвирланади.

5.Мавзу бўйича саволлар

1.Ечим қабул қилиш жараёнининг қандай ҳолатлари бўлиши мумкин?
2.Мантиқий моделлаш деганда нимани тушунасиз?
3.Ечим қабул қилишда оптималлаш усули нималарга асосланади?
4.Мсаланинг мумкин бўлган ечимлари деганда нимани тушунасиз?
5.Оптималлаш масаласини қандай синфларга ажратиш мумкин?
6.Мақсад функцияси нима?
7.Ўзгарувчилар орасидаги боғланишлар қандай бўлиши мумкин?
8.Оптимал ечимни қабул қилишнинг асосий босқичларини айтиб беринг.

Мавзу 2
ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИНГ МАТЕМАТИК ҚЎЙИЛИШИ

Р е ж а:
1.Кириш.
2.Чизиқли тенламалар системаси ва уни ечиш усуллари.
3.Чизиқли программалаш масаласининг математик модели.
4.Чизиқли дастурлаш масаласи ечимларининг хусусиятлари.
5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, 1984й. 1 қисм.
3.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высщая школа” М. 1980г.

1.Кириш

Математик дастурлаш математиканинг асосан кўп вариантли ечимга эга бўлган масалаларинининг энг яхши, мақсадга мувофиқ, яъни оптимал ечимини топишга ёрдам берувчи бир йўналишидир. Математик дастурлаш чизиқли дастурлаш, чизиқли бўлмаган дастурлаш ва динамик дастурлаш деб аталувчи қисмларни ўз ичига олади. “Дастурлаш” деганда ечимларни кетма- кет ҳосил қилиш жараёни тушунилади. Бу ечим жараёнки, унда энг аввал бошланғич ечим топилади ва кейин бу ечим қадамба-қадам яхшиланиб борилади. Бу жараён энг яхши дастур топулгунча давом эттирилади ва ҳар бир қадамда махсус кўрсатгичлар ёрдамида қандай иш тутиш, ҳамда оптимал ечимга қандай яқинлашиш кераклиги кўрсатилиб борилади.
Чизиқли дастурлаш масаласини тўлиқ тушуниш учун олдин чизиқли функция, чизиқли тенгламалар ва тенгчизиклар, уларнинг ечимлари ҳақида тўлиқ тассавурларга эга бўлиш лозим. Шу сабаб биз математикада бу тушунчалар берилган бўлсада уларга қисқача тушунтириш бериб ўтамиз.

2.Чизиқли тенламалар ва уларни ечиш усуллари

Функция чизиқли ва чизиқсиз бўлиши мумкин. Функция чизиқли дейилади, агарда унда қатнашаётган ўзгарувчи биринчи даражали бўлиб, у билан фақат айириш ёки қўшиш бажарилса. Акс ҳолда чизиқсиз дейилади.

Амалиётда кўплаб амалий масалалар чизиқли тенгламалар системасини ечишга келади. Чизиқли тенламалар системасини ечишнинг бир қанча усуллари мавжуд. Уларга Гаусс, Крамер, матрица, итерация, Зейдел, Жардан-Гаусс усулларини мисол қилиш мумкин. Бу усулларни қўллаган ҳолда компьютерда Excel, MathCad ва MatLab дастурий воситаларнинг стандарт математик функциялари ёрдамида тенгламалар системасини жуда осон ечиш мумкин.

Қуйидаги формулага n-та номалумли n-та тенгламалар системаси дейилади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Бу тенгламалар системаси вектор формада қуйидагича ёзилади

A·X=B. (2)

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

А -тенглама коэффициентлари матрицаси;
X -номалумлар вектори;
B -тенглама озод ҳадлари вектори.

(2) вектор тенгламасини ечиш учун унинг икки тамонига A^{-1} тескари матрицани кўпайтирамиз ва натижада қуйидагига эга бўламиз.

A^{-1}·A·X= A^{-1}·B. (3)

Матрицани унинг тескарисига кўпайтириш қоидасига кўра унинг натижаси бирлик матрицага эга. Шу сабаб (3) тенгламани қуйидагича ёзамиз

X= A^{-1}·B. (4)

Бу эса (1) тенгламалар системасининг ечимидир. Ечимни топиш учун (4) тенгламада олдин тескари матрицани топиш ва кейин уни В векторига кўпайтириш лозим. Бу жараённи Excel жадвал процессорида МОБР (тескари матрицани топиш) ва МУМНОЖ (матрицани матицага ёки векторга кўпайтириш) функцияси ёрдамида жуда осон амалга ошириш мумкин.

Мисол. Фирма тўртта A1,A2,A3,A4 турдаги маҳсулот ишлаб чиқаришда C1,C2,C3,C4 турдаги ресурсларни ишлатади. Ресурслардан ҳар бир маҳсулот бир бирлигига кетадиган меёр ва бир кунда кетадиган ресурслар ҳажми жадвалда берилган.

Маҳсулот тури	Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлиги учун кетадиган меёр				Бир кунда кетадиган ресурслар ҳажми
	A1	A2	A3	A4	
S1	2	2	4	1	2250
S2	2	1	1	2	1550
S3	3	1	2	1	1850
S4	1	2	1	3	1700

Масаланинг математик моделини ёзинг ва уни ечиб бир кунда ишлаб чиқиладиган маҳсулотлар ҳажмини топинг.

Ечиш. Фирма ҳар куни A1 маҳсулотдан x_1, A2 маҳсулотдан x_2, A3 маҳсулотдан x_3 ва A4 маҳсулотдан x_4 ҳажмда ишлаб чиқарилади. У ҳолда масала қуйидаги тенгламалар системасига келади.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 2250 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 1550 \\ 3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 1850 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 1700 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини матрица формасида ёзамиз

A·X=B.

Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3. \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2250 \\ 1550 \\ 1850 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

Тенламалар системасини ечишнинг Жардан-Гаусс усулини кўриб чиқамиз. Жардан-Гаусс усули чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун зарурат туғулганда A^{-1} тескари матрицани топиш учун энг қулай усуллардан биридир. Бу усул моҳияти қуйидагидан иборат: Системадаги биринчи тенгламадан ихтиёрий 0 дан фарқли коэффициентли номалум танланади ва биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадлари шу коэффициентга бўлинади. Биринчи тенглама ёрдамида танланган номаълум бошқа ҳамма тенламалардан йўқотилади. Иккинчи тенгламадан ихтиёрий 0 дан фарқли коэффициентли номалум танланади ва иккинчи тенгламанинг ҳамма ҳадлари шу коэффициентга бўлиб чиқилади. Бу тенглама ёрдамида танланган номаълум қолган ҳамма тенламалардан йўқотилади ва ҳоказо.

3.Чизиқли программалаш масаласининг математик модели

Чизиқли дастурлаш математик дастурлашнинг асосий қисмларидан бири бўлиб, кўп ўзгарувчи функцияларнинг экстремумларини топишни ўрганади ва иқтисодий-математик моделларни текширишда математик аппарат бўлиб ҳисобланади.

Кўп ўзгарувчи функциянинг минимум ёки максимуми изланаётганда ўзгарувчиларга кўп чекланишлар қўйилади. Бу чекланишларнинг ҳар хил турларига қараб чизиқли програмалаш масаласи уч хил кўринишда ёзилади: симметрик, каноник ва стандарт. Чизиқли программалаш масаласининг қўйидаги исталган формада ёзилган математик моделини қараймиз.

Математик модел қўйидагича талқин қиланади: Тенгламалар ёки тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи ўзгарувчиларининг шундай манфий бўлмаган қийматларини топиш талаб қилинадики, бунда ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлган миқдор (мақсад функцияси) энг катта (энг кичик) қийматга эга бўлсин (эришсин).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

Ушбу математик моделни вектор кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n}) \qquad (3.1)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

(3.1) формуланинг биринчиси иқтисодий маънода излананаётган миқдорларга қўйиладиган чекланишларни ифодалайди, улар ресурслар миқдори, маълум талабларни қондириш зурурати, технология шароити ва бошқа иқтисодий ҳамда техникавий факторлардан келиб чиқади. Иккинчи шарт - ўзгарувчиларнинг, яьни изланаётган миқдорларнинг манфий бўлмаслик шарти бўлиб ҳисобланади. Учинчиси мақсад функцияси дейилиб, изланаётган миқдорнинг бирор боғланишини ифодалайди (ишлаб чиқариш махсулотларини сотишдан келадиган фойда, маълум миқдордаги ишни бажаришга сарф бўлган харажат ва ҳ.к.).

Агар мақсад функцияси иқтисодий факторларни ифодаласа, у ҳолда функциянинг максимум қиймати изланади, акс ҳолда минимумни излаш керак бўлади.

1-таъриф. Номалумларнинг сон қийматлари туплами масаланинг плани дейилади.

2-таъриф. Чекланишлар системасини қаноатлантирувчи хар қандай план (ечим) мумкин бўлган план (ечим) дейилади.

3-таъриф. Мақсад функциясига максимал (ёки минимал) қиймат берувчи мумкин бўлган план (ечим) масаланинг оптимал плани (ечими) дейилади.

Мақсад функциясининг чекланишларини қаноатлантирадиган максимум ёки минимумини топишнинг (3.1) масаласи кўриниши стандарт чизиқли дастурлаш масаласи дейилади.

Тенгсизликлар системаси кўринишида берилган чекланиш шартларини қўшимча ўзгарувчилар, яъни x_{n+i} киритиб тенгламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \;\;, \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

У ҳолда бундай масалага каноник кўринишда берилган чизиқли дастурлаш масаласи дейилади.

4.Чизиқли дастурлаш масаласи ечимларининг хусусиятлари

Чизиқли дастурлаш масалалари хусусмиятларини баён этишдан олдин қаварик тўпламлар ва қавариқ функцияалар тушунчаларига тўхталиб ўтамиз.

1-таъриф. n ўлчовли фазода берилган X тўплам ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқта билан бирга шу нуқталарни бирлаштирувчи кесмани ҳам ўз ичида сақласа, унга қавариқ тўплам дейилади.

1-хосса. Чизиқли дастурлаш масалаларининг ечимлар тўплами қавариқдир.

2-хосса. Чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига мумкин бўлган ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг учки нуқталаридагина эришади. (хоссаларни исботлаш мустаыил иш ыилиб берилади)

5.Мавзу бўйича саволлар

1.Математик дастурлаш математиканинг қандай йўналишларидан ҳисобланади?
2.“Дастурлаш” деганда нима тушунилади?
3.Чизиқли ва чизиқсиз функцияга таъриф беринг.
4.Чизиқли тенламалар системасини ечишнинг қандай усулларини биласиз?
5.Тенламалар системасини ечишнинг Жардан-Гаусс усулини тушунтириб беринг.
6.Чизиқли дастурлаш масаласининг математик моделини тушунтириш беринг.
7.Чизиқли програмалаш масаласи қандай кўринишларда бўлади?
8.Қандай ечим мумкин бўлган ечим дейилади?
9.Қандай ечим оптимал ечим дейилади?
10.Чизиқли дастурлаш масаласининг қандай хоссалари бор?

Мавзу 3
ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИНГ ГЕОМЕТРИК ИНТЕРПРИТАЦИЯСИ ВА УНИ ЕЧИШНИНГ ГРАФИК УСУЛИ

Р е ж а:
1.Кириш.
2.Чизиқли дастурлаш масаласинининг геоматематик интерпритацияси.
3.Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг график усули.
4.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, 1984й. 1 қисм.
3.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высщая школа” М. 1980г.

1.Кириш

Чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечиш уни геометрик тасвирлашга асосланган. Икки ўлчовли фазода (текисликда) берилган чизиқли дастурлаш масаласини ечиш учун график усулни қўллаш мумкин. N>2 ўлчовли фазода берилган масалани график усул билан ечиш ноқулай, чунки бу ҳолда, ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакни ясаш қийинлашади.

2.Чизиқли дастурлаш масаласинининг геоматематик интерпритацияси

Бизга мақсад функциянинг чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган минимумини топишнинг чизиқли дастурлаш масаласи берилган бўлсин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad (i=\overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \min$$

Тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган ихтиёрий $x_1, x_2 \dots, x_n$ сонлар тўплами унинг ечимлари дейилади.
Система ҳеч бўлмаса битта ечимга эга бўлса система биргаликда дейилади. Акс ҳолда эса, система биргаликда эмас дейилади. Бундан кейин биз тенгсизликлар системасини биргаликда деб фараз қиламиз.
n=2 бўлганда тенгсизликлар системасидан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \le b_i, \ i=\overline{1,m}; \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Бу тенгсизликларнинг ҳар бири $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ тўгри чизиқ билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j\geq 0$ $j=1;2$ эса $x_j=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлар бўлади. Тенгсизликлар системаси биргаликда бўлганлиги учун ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади, яъни чегаравий тўғри чизиқлар бир-бири билан кесишиб, мумкин бўлган (ўринли) ечимлар тўпламини ҳосил қилади. Демак, n=2 бўлганда мумкин бўлган ечимлар тўплами кўпбурчакнинг нуқталаридан иборат бўлади. Масалан, m=4 бўлганда мумкин бўлган ечимлар тўплами 1-расмда кўрсатилган кўпбурчакдан иборат бўлади. Агар n=3 бўлса ва бу тенгсизликларнинг ҳар бирига геометрик нуқтаи назардан қараганда уларнинг ҳар бири

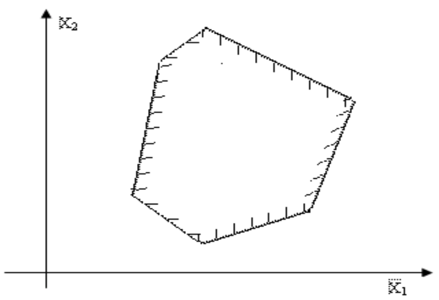
$$a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 =b_i, \quad (i=1,2,...m)$$

текисликлар билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j\geq 0$ лар эса, $x_j=0$ текисликлар билан чегараланган уч ўлчовли ярим фазолардан иборат бўлади.
Иккинчи томондан, система биргаликда бўлганлиги учун бу ярим фазолар кесишиб, бирор бир кўпёқли ҳосил қилади. Кўпёқли эса мумкин бўлган ечилар тўпламини беради, яъни унинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари системада n>3 бўлса, бу тенгсизликларнинг ҳар бири

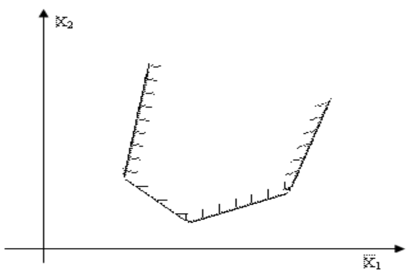
$$a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+ ...+a_{in}x_n =b_i, \quad (i=1,2,...m)$$

гипертекисликлар билан ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари эса $x_j=0$ гипертекисликлар билан чегараланган ярим фазолардан иборат бўлади. Бу ярим фазолар кесишиб, мумкин бўлган ечимлар тўплами бўлган бирорта кўпёқлини ҳосил қилади.

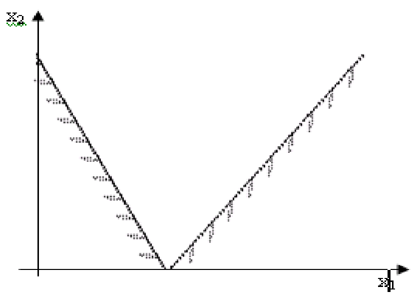
Юқоридаги мулоҳазалар чизиқли дастурлаш масалаларини геометрик нуқтаи назаридан қуйидагича талқин қилишга имкон беради: мумкин бўлган ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг шундай нуқтасининг координаталарини топиш керакки, бу нуқтада мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига эришсин.

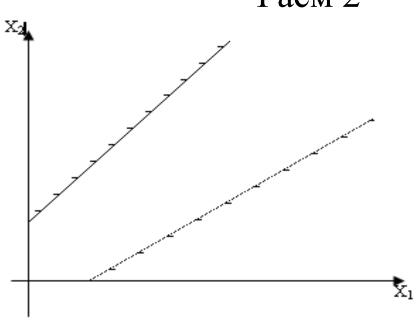


Расм 1



Расм 2





Расм 3 Расм 4

Мумкин бўлган ечимлар соҳаси (тўплами) қаварик кўпбурчак (1-расм), кўпбурчакли қаварик соҳа (2-расм), ягона нуқта (3-расм) ва бўш тўплам (4-расм) бўлиши мумкин.

3.Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг график усули

Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг график усули асосан ўзгарувчилар сони иккита ва масала симметрик формада берилган ҳолда ишлатилади. Чизиқли дастурлаш масаласини икки ўзгарувчи учун қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min)$$

Бу масаланинг мумкин бўлган ечимлари соҳаси қаварик кўпбурчак ёки қаварик кўпқирра, ёки ягона нуқта бўлиши мумкин. Тенгсизликларнинг ҳар бири чизиқлан билан чегараланган ярим текисликларни ифодалайди. Чизиқли функция ҳам маълум бир ўзгармас қийматда тўғри чизиқни ифодалайди $c_1x_1+c_2x_2=const$.

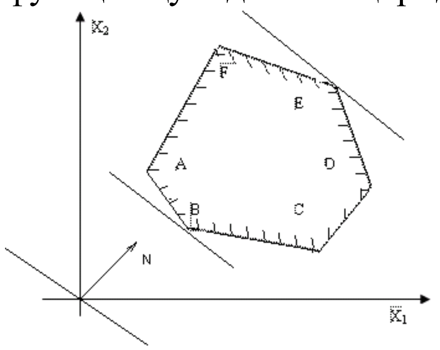
Фараз қилайлик, мумкин бўлган ечимлар қаварик кўпбурчакдан ташкил топган бўлсин. Ечимлардан ташкил топган қаварик тўпламни ҳосил қилиш учун тўғри чизиқлар билан чегараланган кўпбурчакни ясаймиз. Бу кўпбурчак ABCDEF бўлсин (5-расм). Мақсад функцияси X_1OX_2 текисликда параллел тўғри чизиқларни беради. Чизиқли функцияни ихтиёрий ўзгармас c_0 сонга тен деб олайлик. Унда

$c_1x_1+c_2x_2=const= c_0$

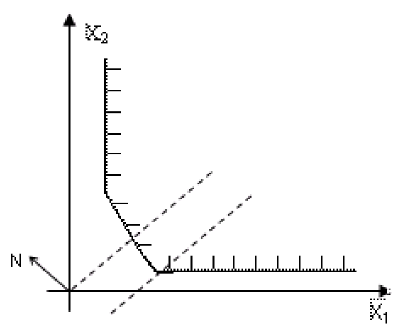
тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Унга перпендикуляр бўлган $N(c_1,c_2)$ вектор z-функциянинг ўсиш йўналишини белгилайди (5-расм).

Агар ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчак чегараланмаган бўлса икки ҳол бўлиши мумкин:

1-ҳол. $c_1x_1+c_2x_2=const$ тўғри чизиқ $N(c_1,c_2)$ вектор вектор бўйича ёки унга қарама-қарши йўналишда силжиб бориб ҳар вақт қаварик кўпбурчакни кесиб ўтади. Аммо на минумум ёки максимум қийматга эришмайди. Бу ҳолда чизиқли функция қуйидан ва юқоридан чегараланмаган бўлади (6-расм).

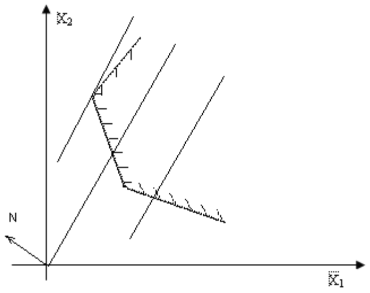


Расм 5

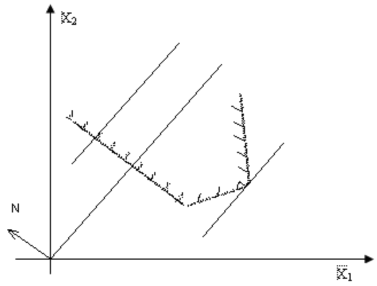


Расм 6

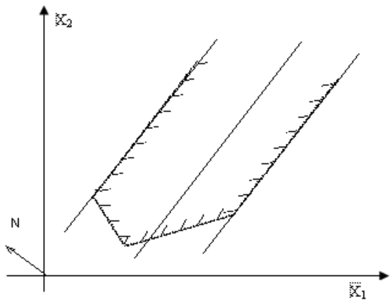
2-ҳол. $c_1x_1+c_2x_2=const$ тўғри чизиқ $N(c_1,c_2)$ вектор бўйича силжиб бориб қаварик кўпбурчакнинг бирорта четки нуқтасида минумум ёки максимум қийматга эришади. Бундай ҳолда чизиқли функция юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган (расм 7) ёки қуйидан чегараланган юқоридан эса чегараланмаган бўлиши мумкин (расм 8). Баъзи чизиқли функция юқоридан ҳам, қуйидан ҳам эса чегараланган бўлиши мумкин (расм 9).



Расм 7



Расм 8



Расм 9

Чизиқли програмалаш масаласини график усулда ечиш қуйидаги кетма-кетликда бажарилади:

1.Тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг графиклари қурилади .

2.Ҳар бир тенгсизликнинг текисликдаги аниқланиш томонлари (соҳаси) белгиланади.

3.Мумкин бўлган ечимлар соҳаси ажратилади .

4.N=(c_1,c_2) вектори қурилади ва унга (0,0) нуқтада перпендикуляр ўтказилади.

5.Кўпбурчакдан перпендикулярга параллел чизиқни вектор йўналиши бўйича паралел силжитилиб экстремал нуқта топилади. Агар Z функциянинг минимал қийматига мос нуқтани топиш керак бўлса, у ҳолда бу нуқта p векторга перпендикулярнинг шу вектор йўналиши бўйича силжитганда мумкин бўлган нуқталар соҳасининг биринчи нуқтасига мос келади. Максимум қиймат берувчи нуқта эса энг охирги нуқта бўлади. Агар вектор қиймати (манфий ишора) -N бўлса юқоридаги ҳолнинг тескариси бўлади.

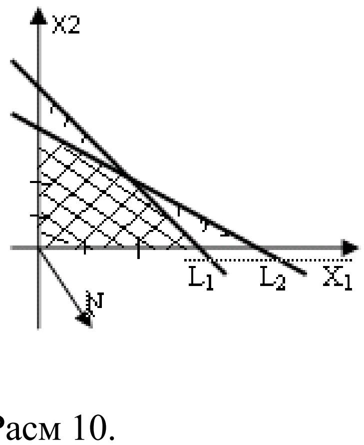
6.Оптимал нуқта кординатаси топилади ва Z функция қиймати ҳисобланади.

Мисол. Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \quad (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$Z = 2x_1 - 5x_2 \to \max$$



Расм 10.

Берилган тенгсизликларнинг графикларини X_1OX_2 текисликда қурамиз ва мумкин бўлган ечимлар сохасини аниқлаймиз (расм 10). Соҳа графигида штрихланган жойни аниқлайди. Чунки бу жой ҳамма тенгсизликларни қаноатлантирувчи соҳадир. Мумкин бўлган ечимлар сохасидан оптимал ечимни аниқлаймиз. Аниқлаш учун (0,0) нуқтадан ўтувчи N=(2,-5) векторини ясаймиз ва унинг йўналишини аниқлаймиз. (0,0) нуқтада бу векторга N перпиндикулярини ўтказамиз ва уни вектор йўналиши бўйича силжитамиз. Соҳа билан перпиндикулярнинг охирги кесишиш нуқтаси A нуқта бўлади. Бу нуқта Z функциясига максимал қиймат берувчи нуқтадир. Бу нукта (3,0) бўлиб унинг координатаси $x_1=3$, $x_2=0$ масаланинг ечими бўлади. Графикдан кўриниб турибдики z функцияга минумум қиймат берувчи нуқта эса (0,3).

4.Мавзу бўйича саволлар

1.Тенгсизликлар системаси қачон биргаликда дейилади.
2.Чизиқли дастурлаш масаласини геометрик тасвирланишини тушунтириб беринг.
3.Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг график усулида мумкин бўлган ечимлар соҳаси қандай аниқланади?
4.График усулда $N(c_1,c_2)$ вектори қандай қурилади?
5.Агар ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчак чегараланмаган бўлса қандай ҳоллар бўлиши мумкин?
6.Чизиқли дастурлаш масаласини график усулда ечиш кетма-кетлигини тушунтириб беринг.

Мавзу 4,5
ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШНИНГ СИМПЛЕКС ЖАДВАЛ УСУЛИ

Р е ж а:

1.Кириш.
2.Симплекс жадвал тузиш.
3.Масаланинг бошланғич таянч планини тузиш.
4.Оптимал планни топиш.
5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высшая школа” М. 1980г.
3.Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Вышейщая школа, 1985г.

1.Кириш

Олдинги маърузамизда айтганимиздек, чизиқли дастурлаш масаласининг оптимал планини унинг барча планларидан ташкил топган қаварик тўпламнинг четки нуқталари орасидан қидириш керак. Бундай нуқталар сони ёки бошқача айтганда таянч планлар сони n дан m тадан тузилган C_n^m группалаш орқали аниқланади. Масаладаги номалумлар сони n ва тенгламалар сони m катта бўлганда барча (мумкин бўлган) таянч планларнинг оптималлигини текшириб чиқиш анча қийин бўлади. Шунинг учун таянч планларни тартиб билан текшириб чиқиб, улар ичидан оптимал планни аниқлаб берувчи ечиш схемасининг берилиши талаб қилинади.

Чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг бундай схемаларидан бири бу - Симплекс усулидир. Бу усул бошланғич таянч пландан чекли сондаги итерациядан кейин оптимал планни ҳосил қилиш йўлини кўрсатади ва ҳар бир навбатдаги итерация олдингисига нисбатан оптимал планга яқинроқ планни беради. Ечиш жараёни оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг чизиқли функцияси чекли экстимум қийматга эга эмаслиги аниқлангунча давом эттирилади. Бу усул ҳозирги кунда кенг миқиёсда ишлатилиб ШЭҲМлар учун унинг амалий пакет дастурлари ишлаб чиқилган.

2.Симплекс жадвал тузиш

Симплекс усули чизиқли дастурлаш масаласини ечишнинг асосий усулларидан бири бўлиб, кетма кет яқинлашиш усули ёрдамида $x_1, x_2, \ldots x_n$ ўзгарувчиларнинг шундай оптимал қийматини топадики, бу қийматлар мақсад функциясиги максимал (ёки минимал) қиймат беради.

Қуйидаги функционалга максимум қиймат берувчи чизиқли дастурлаш масаласи берилган бўлсин.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

Масалани ечиш учун симплекс жадвал қурамиз ва симплекс усули ғоясини бериш учун берилган масалани қуйидагича каноник формада ёзамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

Бу ерда x_{n+i} - базис ўзгарувчилар дейилади. Уларни қулайлик, ҳамда бошқа ўзгарувчилардан фарқлаш учун мос равишда $y_1, y_2, \ldots y_m$ деб белгилаймиз ва яна қуйидаги белгилашларни киритамиз $b_{i0}=b_i$; $b_{i,j}=a_{i,j}$; $b_{0j}=c_j$. Бу белгилашлар асосида симплекс жадвал тузамиз.

БЎ	1	$-x_1$	$-x_2$	. . .	$-x_s$	. . .	$-x_n$
y_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	. . .	b_{1s}	. . .	b_{1n}
y_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	. . .	b_{2s}	. . .	b_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_s	b_{r0}	b_{r1}	b_{r2}	. . .	$\mathbf{b_{rs}}$	. . .	b_{rn}

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	. . .	b_{ms}	. . .	b_{mn}
Z	b_{00}	b_{01}	b_{02}	. . .	b_{0s}	. . .	b_{0n}

Чизиқли дастурлаш масаласини симплекс усул ёрдамида ечиш икки босқичдан иборат:

1.Бошланғич таянч планни топиш.

2.Таянч планлар ичидан масаланинг оптимал планини топиш.

3.Масаланинг таянч планини тузиш

Бошланғич таянч планни топиш қуйидаги алгоритм бўйича бажарилади:

1.Симплекс жадвалдан ҳал қилувчи элементни топиш:

1.1.Ҳал қилувчи элементни топиш олдин ҳал қилувчи устунни топишдан бошланади. Бунинг учун озод ҳадлар устунига қаралади. Агар озод хадлар устунидаги элементлар ҳаммаси мусбат бўлса, бу бошланҚич план таянч план бўлади ва иккинчи этапга ўтилади. Агар манфий элемент мавжуд бўлса улардан модул бўйича энг каттаси танланади(агар битта бўлса шу элемент ўзи олинади). Мисол учун айтайлик бу элемент b_{r0} бўлсин. Шу b_{r0} элемент турган r сатр қаралади. Агар сатр элементларидан хаммаси мусбат бўлса, масаланинг ечими мавжуд бўлмайди (бу ҳолда ҳисоблашлар шу жойда тўхтатилади). Агар сатрда манфий элемент мавжуд бўлса, улардан модул бўйича энг каттаси танланади (агар битта бўлса ўзи олинади). Шу элемент турган устун ҳал қилувчи устун дейилади. Мисол учун бу s-чи устун бўлсин.

1.2.Ҳал қилувчи сатр топилади. Озод хадларни ҳал қилувчи устун элементларга бўлиб чиқилади ва улардан мусбатларининг энг кичиги танланади, яъни

$$\min\left\{ \frac{b_{10}}{b_{1s}}; \frac{b_{20}}{b_{2s}}; \ldots; \frac{b_{r0}}{b_{rs}}; \ldots; \frac{b_{m0}}{b_{ms}} \right\}.$$

Айтайлик, бу нисбатлар ичида мусбатларнинг энг кичиги b_{rs}/b_{r0} бўлсин. У ҳолда шу b_{rs} элемент турган сатр ҳал қилувчи сатр дейилади, b_{rs} элементнинг ўзи эса ҳал қилувчи элемент бўлади.

2.Ҳал қилувчи устун ва сатр ўзгарувчилари ўринлари алмштирилади, (яьни x_s ва y_s янги жадвалда ўринлари алмашади).

3.Жадвалда симплекс алмаштириш бажарилади.

3.1.Ҳал қилувчи устун элементлари ҳал қилувчи элементга бўлиб чиқилиб янги жадвалга ёзилади, яъни $b'_{is} = -b_{is} / b_{rs} \ (i \neq r)$.

3.2.Ҳал қилувчи сатр элементлари хал қилувчи элементга бўлиб чиқилиб янги жадвалга ёзилади, яъни $b'_{rj} = b_{rj} / b_{rs} \quad (j \neq s)$.

3.3.Ҳал қилувчи элемент 1 га тенглаштирилиб ўзига бўлинади, яъни $b'_{rs} = 1 / b_{rs}$.

3.4.Янги симплекс жадвалнинг қолган элементлари қуйидаги формула орқали топилади.

$$b'_{ij} = \frac{b_{ij}b_{rs} - b_{is}b_{rj}}{b_{rs}} \quad \text{ёки} \quad b'_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{is}b_{rj}}{b_{rs}}\ ; \quad i \neq r\ , \quad j \neq s$$

Янги жадвалда b'_{ij} -элементни ҳисоблашда эски жадвалдан b_{ij}, b_{is} ,b_{rj}, b_{rs} - элементларини топиш қуйидагича бўлади:

b_{ij} - b'_{ij} элементнинг эски жадвалдаги унга мос элемент;

b_{is} -b_{ij} элемент турган сатр билан b_{rs} ҳал қилувчи элемент устуни кесишмасидаги элемент;

b_{rj} -b_{ij} элемент турган устун билан b_{rs} ҳал қилувчи элемент сатри кесишмасидаги элемент;

b_{rs} - ҳал қилувчи элемент.

БЎ	*1*	$-x_1$	$-x_2$	. . .	$-y_r$	. . .	$-x_n$
y_1	b'_{10}	b'_{11}	b'_{12}	. . .	b'_{1s}	. . .	b'_{1n}
y_2	b'_{20}	b'_{21}	b'_{22}	. . .	b'_{2s}	. . .	b'_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_s	b'_{r0}	b'_{r1}	b'_{r2}	. . .	b'_{rs}	. . .	b'_{rn}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
y_m	b'_{m0}	b'_{m1}	b'_{m2}	. . .	b'_{ms}	. . .	b'_{mn}
Z	b'_{00}	b'_{01}	b'_{02}	. . .	b'_{0s}	. . .	b'_{0n}

4.Янги топилган симплекс жадвалда таянч план мавжуд бўлса иккинчи босқичга, яъни оптимал планни топишга ўтилади, акс ҳолда юқоридаги процесс янги жадвал учун токи таянч план топилгунча қайта такрорланади.

4. Масаланинг оптимал планни топиш

Агар 1 босқичдан олинган таянч планнинг симплекс жадвалдаги Z-сатр элементлари (озод ҳади b'_{00} дан ташқари) ҳаммаси мусбат бўлса, бу олинган бошланғич таянч план ягона ва у масаланинг оптимал плани (ечими) бўлади. Агар Z сатрдаги ҳамма мусбат элементларидан камида биттаси нулга тенги бўлса, у ҳолда масаланинг чексиз кўп оптимал плани мавжуд бўлади. Агар Z сатрдаги элементлардан ҳеч бўлмаганда биттаси манфий бўлса, оптимал план қуйидаги алгоритим бўйича топилади:

1. Ҳал қилувчи элементни топиш.

1.1.Ҳал қилувчи устун топилади. Z-қатордаги манфий элементларнинг модул бўйича энг каттаси (битта бўлса ўзи) танланади. Шу элемент турган устун ҳал қилувчи устун бўлади.

1.2.Ҳал қилувчи сатр топилади. Озод ҳадлар элементлари ҳал қилувчи устун элементларига бўлиб чиқилади ва улардан мусбатларининг энг кичиги олинади, яъни биринчи босқичнинг 1.2 пунктидаги каби. Бу сонга мос келувчи устундаги элемент ҳал қилувчи элемент ва шу элемент турган сатр эса ҳал қилувчи сатр бўлади.

2.Ҳал қилувчи сатр ва устун ўзгарувчилари ўз жойларини алмаштиради (агарда ҳали улар алмаштирилмаган бўлса).

3.Жадвалда симплекс алмаштириш бажарилади. Симплекс алмаштириш 1-босқичдаги 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 пунктлар каби бажарилади.
4.Янги топилган жадвалнинг Z сатри қаралади. Агар Z қатордаги ҳамма элементлар мусбат бўлса, олинган охирги план масаланинг оптимал плани бўлади. Акс ҳолда юқоридаги 1,2,3 пунктлар яна такрорланади, токи оптимал план топилгунча.
Изоҳ: Чизиқли дастурлаш масаласида, агар мақсад функциясининг минумими изланса юқоридаги 1-чи босқич тўлиғича ўринли бўлиб, 2-босқичда эса фақат Z - қатор элементлари манфий ҳолатга келтирилиши керак, яъни тескари ҳолат бўлади

1-мисол

$$z=5x_1-x_2+3x_3$$

чизиқли функцияга максимум қиймат берувчи

$$x_1+x_2+x_3\leq 2$$
$$4x_1+2x_2+x_3\leq 3$$
$$x_1-x_2+2x_3\leq -1$$
$$-3x_1+2x_2-2x_3\leq 5$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

чегаравий системасининг мумкин бўлган ечимлари соҳасида номаълумлар топилсин.

Чегаравий системани каноник кўринишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2$$
$$4x_1+2x_2+x_3+x_5=3$$
$$x_1-x_2+2x_3+x_6=-1$$
$$-3x_1+2x_2-2x_3+x_7=5$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0$$

Тенгламада базис ўзгарувчиларни симплекс ўзгарувчилардан фарқлаш учун $x_4=y_1$, $x_5=y_2$, $x_6=y_3$, $x_7=y_4$ белгилашларни киритамиз ва Симплекс жадвал тузамиз.

Сў / Бў	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
y_1	2	1	1	1
y_2	3	4	2	1
y_3	-1	1	-1	2
y_4	5	-3	2	-2
Z	0	-5	1	-3

Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти берилганлигини ҳисобга олиб, тўғридан-тўғри таянч ечимни топишга киришамиз. Озод ҳадлар ичида -1 манфий ишорали коэффициент бор. Шу қатордан ишораси манфий бўлган модул бўйича энг катта элементни топамиз. У x_2 устунидаги -1 элементдир. Қоидага биноан мусбат нисбатлар ичидан энг кичигини топамиз:

$$+\min\{2/1, 3/2, -1/-1, 5/2\}=1/1$$

Демак, унга мос элемент x_2 устунидаги -1 элемен. Бу элемент ҳал қилувчи элемент бўлади. Энди Симплекс алмаштириш қилиб, қуйидаги жадвални тузамиз.

Сў / Бў	1	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$
y_1	1	2	1	3
y_2	1	6	2	5
x_2	1	-1	-1	-2
y_4	3	-1	2	2
z	-1	-4	1	-1

Бу жадвалдан кўриниб турибдики озод ҳадлар мусбат, шу сабаб таянч план мавжуд. Энди оптимал ечимини топиш учун Z қаторига қараймиз. Бу қаторда иккита манфий ишорали коэффициент бор. Улардан модул бўйича қиймати катта бўлган коэффициентни танлаб оламиз, у -4 элементидир. Қоидага биноан ҳал қилувчи элементни аниқлаб янги жадвал тузамиз:

$$+\min\{1/2,\ 1/6,\ 1/-1,\ 3/-1\}=1/6$$

Унга мос элемент x_1 устунидаги 6 элемен. Бу элемент ҳал қилувчи элемент бўлади. Энди Симплекс алмаштириш қилиб, қуйидаги жадвални тузамиз.

Сў / Бў	1	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$
$У_1$	2/3	-1/3	1/3	4/3
X_1	1/6	1/6	1/3	5/6
X_2	7/6	1/6	-2/3	-7/6
$У_4$	19/6	1/6	7/3	17/6
Z	-1/3	2/3	7/3	7/3

Озод ҳадлар ва Z қаторидаги коэффициентлар мусбат. Демак, оптимал ечим топилди, яъни $y_2=y_3=x_3=0$ ва $x_1=1/6$, $x_2=7/6$ бўлганда Z нинг максимал қиймати -1/3 га тенг бўлади, яъни z=-1/3.

2-мисол.

Берилган чизиқли программалаш масаласининг мақсад функциясига min қиймат берувчи ечимни топинг.

$$x_1+x_2\leq 2$$

$$2x_1-x_2\geq 2$$

$$\alpha_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

$$z=x_1-x_2\rightarrow \min$$

Чегаравий системани каноник кўринишда қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x_1+x_2+x_3=2$$

$$-2x_1+x_2+x_4=-2$$

Симплекс жадвал қурамиз. Биринчи жадвалда озод ҳадлар ичида манфий элемент мавжуд. Шунинг учун таянч планни топамиз. Бу жадвалдан ҳал қилувчи элементни топиб, Симплекс алмаштириш бажарамиз ва иккинчи жадвалга эга бўламиз. Иккинчи жадвалда таянч план мавжуд. Шу сабаб ундан оптимал планни топишга ўтамиз.

Сў / Бў	1	$-x_2$	$-x_2$

Сў / Бў	1	$-y_2$	$-x_2$

y_1	2	1	1
y_2	-2	-2	1
z	0	-1	1

y_1	1	1/2	3/2
x_1	1	-1/2	-1/2
z	1	-1/2	1/2

Оптимал планни топиш учун Z- қатор элементларини манфай ҳолга келтириш керак. Бунинг учун жадвалдан ҳал қилувчи элементни топамиз. Ҳал қилувчи элемент 3/2. Симплекс алмаштириш қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

Сў / Бў	1	$-y_2$	$-y_1$
x_2	2/3	1/3	2/3
x_1	4/3	-5/6	-1/3
Z	2/3	-7/6	-1/3

Жадвалдан кўриниб турибдики мақсад функциясига минимал қиймат берувчи нуқта мавжуд, яъни:

$x_1=4/3$; $x_2=2/3$; $z_{min}=2/3$.

5.Мавзу бўйича саволлар

1.Симплекс жадвали қандай қурилади?
2.Чизиқли дастурлаш масаласини симплекс усул ёрдамида ечиш қндай босқичлардан иборат?
3.Ҳал қилувчи элемент қандай топилади?
4.Таянч план қачон оптимал план бўла олади?
5.Таянч планни топиш алгоритмини тушунтириб беринг.
6.Оптимал планни топиш алгоритмини тушунтириб беринг.
7.Симплекс алмаштиришлар жадвалда қандай бажарилади?

Мавзу 6
ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШНИНГ СУНЪИЙ БАЗИС УСУЛИ

Р е ж а:

1.Кириш.
2.Сунъий базис усули.
3.Сунъий бизис усулини қўллашга мисол.
4.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Вышейщая школа, 1985г.

1.Кириш

Юқорида биз чизиқли дастурлаш масаласининг бошланғич таянч плани мавжуд ва бошланғич планни тузиш мумкин бўладиган *m*- ўлчовли бирлик матрица масала шартида қатнашади деб фараз қилдик. Бу бирлик матрица ёрдами билан оптимал планга ўтишга ёрдам берадиган планни тузиў мумкин. Агар чизиқли дастурлаш масаласининг чегаравий шартлари AX=B (B≥0) кўринишда берилган бўлса, қўшимча ўзгарувчилар киритиш йўли билан бирлик матрицани масала шартига киритиш мумкин.

Амалда учрайдиган айрим чизиқли дастурлаш масалалари планга эга бўлган ҳолда бирлик матрицани ўз ичига олмайди ва чекланишлар системасида номаълумлар сони чекланишлар сонидан етарлича катта бўлади. Бундай масалаларни ечишда “сунъий базис усули” қўлланилади.

2.Сунъий базис усули

Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min$$

Бу ерда $b_i \geq 0$, ва сисиема бирлик матрицани ўз ичига олмайди. Масаланинг шартига бирлик матрицани киритиш учун системадаги ҳар бир тенгламага *сунъий ўзгарувчилар* деб аталувчи $y_1, y_2, \ldots, y_m$ номаълумларни мос равишда қўшамиз ва уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \\ y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \end{cases}$$

Қуйидаги, ёрдамчи мақсад функциясини тузамиз $F=y_1+y_2+\ldots+y_m$ ва унинг юқоридаги шартни қаноатлантирадиган минимумини топамиз. Агар minF>0 бўлса, қўйилган масала $y_1= y_2= \ldots= y_m =0$ бўлганда, $x_i \geq 0$ шартни қаноатлантирадиган ечимга эга бўлмайди. Агар minF=0 бўлса, базис ечим масаланинг оптимал ечими бўлади. Бунинг учун ёрдамчи мақсад функциясини минимумга олиб келувчи масалани симплекс усулида ечамиз.

3.Сунъий бизис усулини қўллашга мисол

Ушбу $Z=x_1+x_2+3x_3$ функциянинг чекланиш шартлари қуйидагича бўлиб:

x_1--$x_3+x_4=3$

$2x_1 -x_2=2$

$3x_1 -2x_2-x_4=1$

$x_j \geq 0,\ j=1,2,3,4$

уни қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Ечиш. Чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилмаган бўлганлиги учун симплекс усулдан фойдаланиб бўлмайди. Бу масалани симплекс жадвал усули билан ечиш учун сунъий базис усулидан фойдаланамиз. y_1, y_2, y_3 сунъий номаълумлар ёрдамида бу масалага мос чизиқли программалаш масаласини қуйидагича ёзамиз:

$y_1=3-(x_1--x_3+x_4)$,

$y_2=3-(2x_1 -x_2)$,

$y_3=1-(3x_1 -2x_2-x_4)$

Бу система учун манфий бўлмаган $x_j\geq 0$ $j=1, 2, 3, 4$ ларни ва қуйидаги

$F= y_1+ y_2+ y_3$

ёрдамчи мақсад функцияга минимум қиймат берувчи y_1, y_2, y_3 ларни топамиз.

Бошланғич жадвалда базис номаълумлар учун y_1, y_2, y_3 ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз.

$y_1+x_1--x_3+x_4=3$

$y_2+2x_1 -x_2=3$

$y_3+3x_1 -2x_2-x_4=1$

$F+6 x_1-3 x_2-x_3+3x_4=7$

$Z- x_1- x_2-2x_3=0$

Бу масалага мос симплекс жадвал қуйидагича бўлади:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	3	1	0	-1	4
y_2	3	2	-1	0	0
y_3	1	3	-2	0	-1
F	7	6	-3	-1	3
Z	0	-1	-1	-2	0

Симплекс жадвалнинг биридан иккинчисига кетма-кет ўтиб, қуйидаги жадвалларни тузамиз

	1	$-y_3$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
y_1	8/3	-1/3	2/3	-1	13/3
y_2	7/3	-2/3	1/3	0	2/3
x_1	1/3	1/3	-2/3	0	-1/3
F	5	-2	1	-1	5
Z	1/3	1/3	-5/3	-2	-1/3

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$
x_2	4	-1/2	3/2	-3/2	13/2
y_2	1	-1/2	-1/2	1/2	-3/2
x_1	3	0	1	-1	4
F	1	-3/2	-3/2	1/2	-3/2
Z	21/3	-1/2	-5/2	-9/2	21/2

	1	$-y_3$	$-y_1$	$-y_2$	$-x_4$
x_2	7	-2	0	3	2
x_3	2	-1	-1	2	-3
x_1	5	-1	0	2	1
F	0	-1	-1	-1	-0
Z	16	-4	-2	9	-3

Охирги жадвалда F дан бошланувчи сатрда мусбат элемент мавжуд эмас. Демак, топилган {5;7;2;0;0;0} ечим оптимал ечим бўлади, чунки бу ечимда F=0. Демак, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ да $Z_{min}=16$ бўлиб, $x_1=5$; $x_2=7$; $x_3=2$; $x_4=0$.

4.Мавзу бўйича саволлар

1.Чизиқли дастурлаш масаласида сунъий базис усули қачон қўлланилади?

2.F ёрдамчи мақсад функцияқандай қурилади?

3.Сунъий базис усулини тушунтириб беринг.

Мавзу 7
ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШНИНГ ЎЗАРО ИККИ ЁКЛАМА МАСАЛАЛАРИ

Р е ж а:

1.Кириш.

2.Ўзаро икки ёқлама масаланинг қўйилиши.

3.Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделлари турлари ва унинг асосий теоремаси.

4.Ўзаро икки ёқлама симплекс усул.

5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.

2.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высшая школа” М. 1980г.

3.Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Вышейщая школа, 1985г.

1.Кириш

Ҳар қандай чизиқли дастурлаш масаласига, унга ўзаро икки ёқлама бўлган бошқа бир чизиқли дастурлаш масаласи тўғри келади. Берилган дастлабки (бошланғич) масала билан унга нисбатан икки ёклама бўлган масала ўртасида бевосита боғланиш ўлиб, яъни бирининг ечимидан иккинчисининг ечимини топиш мумкин. Ўзаро боғлиқ бундай масалаларга биргаликда ***иккиланган масалалар*** дейилади.

2.Ўзаро икки ёқлама масаланинг қўйилиши

Берилган дастлабки масала ва унга нисбатан ўзаро икки ёқлама бўлган масала ҳам бирон бир иқтисодий жараённи ифодалайди. Масалан, ресурслардан фойдаланиш масаласини кўриб чиқайлик. Бирор бир корхона микдори b_i $(i=1,2,..,m)$ бирликка тенг бўлган m хил ресурсларга эга бўлиб, бу ресурслардан n хил маҳсулот ишлаб чиқариш учун фойдаланиладиган бўлсин: j бирлик маҳсулот ишлаб чикариш учун i хилдаги ресурслардан a_{ij} бирлик сарфлансин. Маҳсулот бирлигининг нархи c_j бирликка тенг булсин. Корхонанинг энг куп даромад олиш масаласини таъминлайдиган планини тузишнинг математик модели қурилсин. j-хилдаги маҳсулот бирлигининг миқдорини x_j билан белгиласак қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (7.1)$$

функциянинг чекланиш тенгсизликлари системаси

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, m \\ x_j \ge 0,\ j = 1, m \end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

ни қаноатлантирадиган максимумни топинг.

Энди (7.1)-(7.2) масалага нисбатан икки ёқлама бўлган масаланинг математик моделини қурамиз. Бунинг учун y_i *(i=1,2,..,m)* билан *i* хилдаги ресурс бирлигининг нархини белгилаймиз, у ҳолда ҳар бир *j* бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф бўлган ресурснинг нархи

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

га тенг бўлади. Сарф қилинган ресурснинг нархи ишлаб чиқарилган маҳсулот нархидан ошиб кетмаслиги учун

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_{j,} (j = 1,\ n) \qquad (7.3)$$

бўлиши керак. Иккинчи томондан корхона b_i *(i=1,2,..,m)* бирликка тенг бўлган ресурсга эга бўлгани учун сарф қилингин умумий ресурнинг нархи

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (7.4)$$

га тенг бўлади. Демак (7.3)-(7.4) масала дастлабки (7.1)-(7.2) масалага нисбатан икки ёклама масаланинг математик моделидир.

Бу масалани иқтисодий нуктаи назардан қуйидагича талқин қилиш мумкин: Ресурс микдори b_i га тенг бўлиб маҳсулот бирлигининг нархи c_j га тенг бўлганда ресурс бирлигининг нархи y_i ни умумий сарф энг кам бўладиган қилиб танлаш керак. Бошқача қилиб айтганда (7.4) функциянинг чекланиш шартлари (7.3) ни қаноатлантирадиган энг кичик қиймати топилсин.

Дастлабки масала (7.1) – (7.2) ни матрица формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Z_{\max} = CX$$
$$AX \le B,\ \ X \ge 0$$

У ҳолда икки ёклама (7.3) – (7.4) масала эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F_{\min} = B^{'}Y$$
$$A^{'}Y^{'} \ge C^{'},\ Y \ge 0$$

Матрица формада ёзилган дастлабки ва икки ёқлама масалаларнинг матрицалари ва векторлари бир-бирига нисбатан транспонирланган бўлади.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B^{'} = (b_1,\ \ ..\ \ b_m), \qquad C = (c_1,\ c_2,\ ..,c_n), \quad C^{'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{m1} \\ a_{12} & \cdot\cdot & a_{1m2} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot\cdot \\ y_m \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \cdot\cdot \\ x_n \\ \\ \end{pmatrix}$$

3.Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделлари турлари ва унинг асосий теоремаси

Ўзаро икки ёқлама масалаларнинг математик модели икки хил бўлади:

1.Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалалар.

Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалаларнинг дастлабки масаласида чекланиш шартлари тенгламалар системасидан иборат бўлиб, унга нисбатан икки ёқлама масалада эса чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлади ва номаълумлар манфий қийматлар ҳам қабул қилиши мумкин бўлади.

Масалан:

а) Дастлабки масала — Икки ёқлама масала

$Z_{\min}=CX$ — $F_{\max}=B'Y$

$AX=B,\; X\ge 0$ — $A'Y\le C'$

б) Дастлабки масала — Икки ёқлама масала

$Z_{\max}=CX$ — $F_{\min}=B'Y$

$AX=B,\; X\ge 0$ — $A'Y\ge C'$

2.Симметрик бўлган ўзаро икки ёқлама масалалар.

Симметрик бўлган ўзаро икки ёқлама масалаларнинг дастлабки масаласи ва унга нисбатан икки ёқлама масала бўлган масалаларда чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлиб, изланаётган номаълумлар албатта мусбат қийматлар ҳам қабул қилиши керак.

Масалан:

а) Дастлабки масала — Икки ёқлама масала

$Z_{\max}=CX$ — $F_{\min}=B'Y$

$AX\le B,\; X\ge 0$ — $A'Y\ge C',\, Y\ge 0$

б) Дастлабки масала — Икки ёқлама масала

$Z_{\min}=CX$ — $F_{\max}=B'Y$

$AX\le B,\; X\ge 0$ — $A'Y\le C',\, Y\ge 0$

Мисол. Дастлабки масала. Қуйидаги масалага икки ёқлама масала тузилсин.

$x_1+2x_2-x_4+x_5=1$

$-4x_2+x_3+2x_4-x_5=2$

$3x_2+x_5+x_6=5$

$x_j\ge 0,\; j=1,2,\ldots,6$

$Z=x_2-x_4-3x_5\to min$

Ечиш. Дастлабки масалада

$$C=(0;\ 1;\ 0;\ -1;\ -3;\ 0)$$

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0\\0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$$

$Z_{min}=CX;\ \ AX=B;\ \ X\geq 0$ бўлади. Дастлабки масала симметрик бўлмаган масалага тўғри келади. Шунинг учун а) пунктга асосан икки ёқлама масала қуйидагича бўлади:

$$F_{max}=B'Y;\quad A'Y\leq C'$$

Бу ерда

$$B'=(1,\quad 2,\quad 5),\quad C'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\\3\\0\end{bmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -4 & 3\\0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ёки

$$2y_1-4y_2+3y_3\leq 1$$
$$-y_1+2y_2\leq -1$$
$$y_1-y_2+y_3\leq -3$$
$$y_i\leq 0,\ \ i=1,2,3$$
$$F=y_1+2y_2+5y_3\rightarrow max$$

Теорема. Дастлабки масала ечимга эга бўлса, унга икки ёқлама бўлган масала ҳам ечимга эга бўлади ва қуйидаги

$$minZ=maxF$$

тенглик ўринли бўлади. Агар мана шу ўзаро икки ёқлама масаланинг бирортасида мақсад функция чегараланмаган бўлса, иккинчи масала ечимга эга бўлмайди.

(Теорема исботи мустақил иш қилиб берилади).

4.Ўзаро икки ёқлама симплекс усул

Дастлабки масаланинг ечимидан, унга нисбатан икки ёқлама масаланинг ёки ёқлама масаланинг ечимидан дастлабки масаланинг ечимини келтириб чиқаришга имкон берадиган симплекс усул *ўзаро икки ёқлама симплекс усул* дейилади.

Бу усул ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асослангандир. Ўзаро икки ёқлама симплекс усулнинг асосий мазмуни қуйидагидан иборат:

бизга қуйидаги

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i=\overline{1,m}\\ x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,n}\end{array}\right\}$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min$$

ва унга нисбатан икки ёқлама

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \le c_j,\ \ j=\overline{1,n}\\ y_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}\end{array}\right\}$$

$$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

масалалар берилган бўлсин. Бу дастлабки ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалага симплекс усулни қўллаш учун чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилган, яъни

$$x_{n+1}=-b_i+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\quad b_i \le 0$$

$$y_{m+j}=-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i+c_{j,}\ c_j \ge 0$$

кўринишда бўлиши керак. Бу ерда тенгламалар системаси масаладаги уларга мос тенсизликлар системасидан қўшимча

$$x_{n+i}\ge 0,\ i=1,2,\dots,m;\ \ y_{m+j}\ge 0,\ j=1,2,\dots,n$$

номалумларни киритиш натижасида келиб чиқади. Бу ерда $x_{n+I},\ \ x_{n+2},..,x_{n+m}$ номалумлар берилган масала учун базис, $x_I, x_2,.., x_n$ лар озод номаълумлардир. $y_{m+I},y_{m+2},..,y_{m+n}$ номаълумлар эса икки ёқлама масала учун базис, $y_I, y_2,.., y_m$ лар эса озод номаълумлардир.

Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асосан $minZ=maxF$ бўлгани учун юқоридаги масалаларнинг бирортасининг оптимал ечимини топсак, иккинчисининг ҳам оптимал ечимини топган бўламиз.

Бунинг учун, берилган масаладаги базис номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги озод номаълумлар ва берилган масаладаги озод номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги базис номаълумлар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш кифоядир, яъни:

$$x_{n+I}\leftrightarrow y_1;\ x_{n+2}\leftrightarrow y_2;\ \dots;\ x_{n+m}\leftrightarrow y_m;\ x_I\leftrightarrow y_{m+1};\ x_2\leftrightarrow y_{m+2};\ \dots;\ x_n\leftrightarrow y_{m+n}.$$

Агар берилган масаланинг оптимал ечими $\{0,0,\dots,x_{n+1},x_{n+2},\dots,x_{n+m}\}$ бўлса, унга икки ёқлама бўлган масаланинг оптимал ечими $\{y_1,y_2,\dots,y_m,0,0,\dots,0\}$ бўлиб, y_1 x_{n+1} олдидаги коэффициентга, яъни $y_1=c_{n+1}$ га; y_2 эса x_{n+2} олдидаги коэффициентга, яъни $y_2=c_{n+2}$ га; y_m эса x_{n+m} олдидаги коэффициентга, яъни $y_m=c_{n+m}$ га тенгдир.

Мисол. Қуйидаги масалага икки ёқлама масала тузулсин ва уларнинг ечими ўзаро икки ёқлама симплекс усули билан топилсин.

$$x_1+2x_2-x_4+x_5=1$$
$$-4x_2+x_3+2x_4-x_5=2$$
$$3x_2+x_5+x_6=5$$
$$x_j \geq 0,\ j=1,2,\dots,6$$
$$Z=x_2-x_4-3x_5 \to min$$

Ечиш. Бу мисол юқорида кўриб ўтилди, унинг икки ёқлама масаласини қуйидагича ёзамиз:

$$2y_1-4y_2+3y_3 \leq 1$$
$$-y_1+2y_2+y_5 \leq -1$$
$$y_1-y_2+y_3+y_6 \leq -3$$
$$y_i \leq 0,\ i=1,2,3$$
$$F=y_1+2y_2+5y_3 \to max$$

Дастлабки масалада x_I, x_3 ва x_6 номаълумлар базис, x_2, x_4 ва x_5 номаълумлар озод номаълумлардир. Икки ёқлама масалада эса y_4, y_5 ва y_6 номаълумлар базис, y_1, y_2 ва y_3 номаълумлар озод номаълумлардир. Бу мисол учун қуйидаги муносабатларни ўрнатамиз:

$$x_I \leftrightarrow y_1;\ x_3 \leftrightarrow y_2; x_5 \leftrightarrow y_3;\ x_2 \leftrightarrow y_4;\ x_4 \leftrightarrow y_5;\ x_5 \leftrightarrow y_6.$$

5.Мавзу бўйича саволлар

1.Иккиланган масала деб қандай масалаларга айтилади?
2.Ўзаро икки ёқлама масаланинг математик қўйилишини тушунтириб беринг.
3.Ўзаро икки ёқлама масаланинг матица кўринишини ёзиб беринг.
4.Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделининг неча хили бор?
5.Симметрик бўлмаган ва бўлган ўзаро икки ёқлама масалалар фарқи нимада?
6.Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасини айтиб беринг.
7.Қандай усул ўзаро икки ёқлама симплекс усул дейилади?
8.Ўзаро икки ёқлама симплекс усулни тушунтириб беринг.

Мавзу 8,9
ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Р е ж а:

1.Кириш.
2.Транспорт масаласи ва унинг математик модели.
3.Транспорт масаласининг таянч планини топиш усуллари.
4.Транспорт масаласининг оптимал планни топишнинг Потенциаллар усули.
5.Транспорт масаласига доир мисол.
6.Очиқ моделли транспорт масаласи.
7.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1984й. 1 қисм.

3.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высшая школа” М. 1980г.
4.Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.. Математическое программирование. Высшая школа, М., 1976.

1.Кириш

Оптимал режалаштиришнинг математик модели иқтисодий жараёнларнинг барчасида чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш масаласи каби формилировка қилинади. Масалан, маҳсулот ишлаб чиқаришнинг оптимал плани топиш масаласи, транспорт масаласи, корхоналарни оптимал жойлаштириш масаласи, ресурсларни тақсимлаш масаласи ва шунга ўхшаш масалаларнинг маделини айтиш мумкин. Бу масалалар ичида транспорт масаласи алоҳида ўрин тутади.

2.Транспорт масаласи ва унинг математик модели

Юкларни жўнатиш пунктларидан берилган қабул қилиш пунктларига ташиб беришнинг оптимал планини топиш масаласига транспорт масаласи дейилади ва у қуйидагича формулировка қилинади:

Айтайлик $A_1,A_2,..,A_m$ пункитларида уларга мос $a_1,a_2,...,a_m$ миқдордаги бир жинсли юклар жойлашган бўлсин. Бу $A_1,A_2,..,A_m$ -ларга жўнатиш пунктлари деймиз. Бу юкларни n-та $B_1,B_2,...,B_n$ пунктлари қабул қилиши керак бўлиб ва уларнинг талаблари мос равишда $b_1,b_2,...,b_n$ бўлсин. Ҳар бир x_{ij} -бирликдаги юкни i-чи жўнатиш пунитидан j-чи қабул қилиш пунитига олиб бориш нархи (харажати) c_{ij} -маьлум бўлсин. Бу юкларни ташиш планини шундай тузишимиз керакки талабгор пунктлар максимал қониқиш олсин ва ҳамма юкларни олиб бориш учун кетган харакатлар йиғиндиси минимал бўлсин.

Транспорт масаласини шартли равишда жадвал кўринишда берамиз. Жадвалда қуйидагилар кўрсатилади: қабул қилиш пунитлари, жўнатиш пунктлари, юк запаслари, юкка бўлган эхтиёж ва ҳар бир i-чи жўнатиш пунктидан j-чи қабул қилиш пунктига юбориладиган юк бирликларининг нархи (яьни таьриф матрицаси) берилади.

Жўнатиш пунктлари	Қабул қилиш пунктлари				Юк запаслари
	B_1	B_2	. . . .	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . .	. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . .
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . . .	c_{mn} x_{mn}	a_n
Юкга бўлган эхтиёж	b_1	b_2	. . . .	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

Бу ерда $C=\{c_{ij}\}$ матрицасига таъриф матрицаси ёки транспорт харажатлари дейилади. $X=\{x_{ij}\}$ матрицага эса -транспорт масалсининг плани дейилади. Бу ерда x_{ij} - i-чи пунктдан j-чи пунктга етказиладиган юклар ҳажми (сони).
Ташиш плани билан боғлиқ кетган харажатларнинг умумий йиғиндиси қуйидаги мақсад функцияси орқали ифодаланади.

$Z= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+ . . . +c_{1n}x_{1n}+ c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+ . . . +c_{2n}x_{2n}+ . . .$
$c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+ . . . +c_{mn}x_{mn}$

Бу ерда x_{ij}- ўзгарувчилар юк запаси, юкга бўлган эхтиёж ва манфий бўлмаслик шартларини (чегараланишларни) бажарган бўлиши керак.

Юқоридагиларни ҳисобга олган ҳолда транспорт масаласининг математик моделини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n})$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

Транспорт масаласининг математик қўйилиши қуйидагича талқин қилинади: Чегаравий системалар, манфий бўлмаслик шарти ва мақсад функцияси берилган дейлик. Талаб қилинадики системанинг ечимлар тўпламидан шундай манфий бўлмаган ечимларини (планини) топиш керакки, мақсад функцияси минимал қийматга эришсин.
Транспорт масаласи икки турга бўлинади, очиқ ва ёпиқ турдаги. Агар юк запаслари йиғиндиси талаб қилинган юклар йиғиндисига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

масала ёпиқ турдаги масала бўлади
Агар юк запаслари йиғиндиси талаб қилинган юклар йиғиндисига тенг бўлмаса, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

масала очиқ турдаги масала бўлади.

3.Транспорт масаласининг таянч планини топиш усуллари

Транспорт масаласини ечиш икки босқичдан иборат.
1.Бошланғич таянч планни топиш.
2.Таянч планлар ичидан оптимал планни топиш.
Таянч планни тузишнинг бир неча усуллари мавжуд: «Шимолий-ғарб бурчак», «Кичик элементлар», «Фогель» ва бошқалар.

Транспорт масаласи учун бошланғич таянч планни топиш.

«Шимолий-ғарб бурчак» усули.

Юкларни ташишнинг бошланғич планни тузишда «шимолий-ғарб бурчак» усулидан фойдаланиш қуйидагича амалга оширилади:

1.Таърифф жадвали тузилади.

	b_1	b_2	. . . . .	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	. . . . .	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	. . . . .	c_{2n}
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
a_m	c_{m1}	c_{m2}	. . . . .	c_{mn}

2.Чап томондаги юқоридаги бурчак, яъни (шимолий-ғарб бурчак) дан бошлаб сатр бўйича ёки устун бўйича силжиймиз. (1,1) катакга a_1 ва $в_1$ нинг энг кичигини жойлаштирамиз, яъни $x_{11}=\min(a_1,b_1)$.

3.Агар $a_1>b_1$ бўлса $x_{11}=b_1$ ни берамиз, биринчи устун шу билан ёпилади, яьни $x_{i1}=0$ (i=2,m). (Биринчи қабул қилувчининг талаби тўлиқ қаноатлантирилди).

4.Биринчи сатр бўйича силжиймиз (1;2) катакга, бу ерга a_1-b_1,b_2 нинг энг кичигини жойлаштирамиз, яьни $x_{12}=\min(a_1-b_1,b_2)$.

5.Агар $b_1>a_1$ бўлса 1-чи сатр ёпилади, яьни $x_{1j}=0$ (j=2,n).

6.Қўшни катакларни тўлдиришга ўтамиз (2.1), яьни $x_{21}=\min(a_2,b_1-a_1)$.

7.Иккинчи сатр ёки иккинчи устун катакларини тўлдиришга ўтамиз ва ҳаказо.

Бу жараён токи ресурслар тугамагунча давом этади.

«Кичик элементлар» усули.

«Кичик элементлар» усули ёрдамида таянч планни топиш қуйидагича амалга оширилади:

1.Юклар қабул қилувчиларга тариф жадвалидаги энг кичик c_{ij} ташиш нархига мос катакни тўлдиришдан бошланади.

2.Энг кичик тариф c_{ij} катагига a_i ёки b_j нинг энг кичиги жойлаштрилади.

3.Кейин тўлигинча юк запаслари расход қилинган сатр ёки қабул қилиш пункти талаби қондирилгач мос устун йўқотилади.

4.Агар жўнатиш пунктидаги юк запаслари тўлиқ тақсимланган бўлса ва қабул қилувчи талаби тўлиқ қанотлантирилса уларга мос сатр ва устун йўқотилади.

5.Қолган сатр ва устунлардан яна кичик таъриф олинади. Юк запасларини тақсимлаш жараёни, токи юк запаси тугагунча ва талаблар қаноатлантирилгунча давом этади.

4.Транспорт масаласининг оптимал планни топишнинг Потенциаллар усули.

Агар юқоридаги усуллар ёрдамида бошланғич таянч план топилган бўлса оптимал планни топиш потенциаллар усулида бажарилади.

Транспорт масаласи оптимал планни топишнинг потенциаллар усули қуйидагилардан иборат:

1.Юқоридаги келтирилган усуллар ёрдамида юкларни ташишнинг таянч плани аниқланади.

2.Мос равишда юкларни қабул қилувчи ва жўнатувчи пунктлар учун u_i ва v_j потенциаллари аниқланади.

3.Буш катакларда потенциаллар йиҚиндиси хисобланади $c'_{ij} = u_i+v_j$.

4.Бўш катакларда c_{ij} ва c'_{ij} тарифлар фарқи хисобланади.

$S_{ij} = c_{ij} +c'_{ij}= c_{ij} -(u_i+v_j)$.

5.Агар, хамма бўш катаклардаги фарк $S_{ij}>0$ бўлса олинган план оптимал бўлади.

6.Агар, бўш катаклардан бирортасида $S_{ij}<0$ бўлиб қолса, бўш бўлмаган катакларга x_{ij} ўзгарувчи қиймати киритилади, яъни юқоридаги фарқ минимал бўлсин. Шу катак учун бўш бўлмаган катаклар ёрдамида ёпиқ контур хосил қилинади ва юклар шу контурда қайта тақсимланади. Натижада янги ташиш планга эга бўламиз.

Бу жараён токи фарқ $S_{ij}>0$ бўлмагунча давом этади ва охирги олинган юкларни ташиш плани оптимал бўлади.

5.Транспорт масаласига доир мисол

Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг

b_k / a_i	40	25	20	50
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

Ечиш: Бошланғич таянч планни «Шимолий-ғарб бурчак» ва «Кичик элементлар» усулида топамиз. «Шимолий-ғарб бурчаги» усули қоидасига биноан жадвалнинг (1,1) катагига $X_{1,1}$=min(60,40)=40 сонини жойлаштирамиз, кейинги X_{12}=min(60-40,25)=20 сонини (1,2) катагига жойлаймиз. Шу билан биринчи пунктда юк тугади ва кейинги катаклар (1,3) ва (1,4) ёпилди.

Кейинги пунктдаги юкларни тақсимлашни бошлаймиз. (2,2) катакга X_{22}=min(40,5)=5 сонини жойлаштирамиз. Шу билан 1-чи ва 2-чи талабгорлар талаби қондирилди, яни 1-чи ва 2-чи устун ёпилди. (2,3) катакка X_{23}=min(35,20)=20 жойлаштирилади. 3-чи талабгор талаби бажарилди. қолган юкни (2,4) катакка жойлаштирамиз, яъни X_{24}=min(15,50)=15 ва иккинчи жўнатиш пунктида юк тугади. 3-чи жўнатиш пунктидаги юкни тақсимлашни бошлаймиз. (3,1),(3,2),(3,3) катаклар епилган, яъни 1,2 ва 3 талабгорлар талаби қондирилган. (3,4) катакка X_{34}=min(35,35)=35 ёзамиз. Шу билан юклар тўлиқ тақсимланди, яъни қуйидаги планга эга бўлдик.

$$X = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

Мақсад функцияси қиймати Z=595 ни ташкил қилади.

Қўйилган масаланинг таянч планини энди «Энг кичик элементлар» усули билан топамиз.

Ечиш: Устун ёки сатр бўйича энг кичик харажатни топамиз.
Сатр бўйича бу элемент (1;3) катакда жойлашган, яъни c_{13} =1. Шунинг учун бу катакга X_{13}=min(60,20)=20 юкни жойлаймиз. Учинчи талабгорнинг талаби қаноатлантирилди. Шу туфайли кейинги хисоблашларда 3-чи устун қаралмайди. Кейинги энг кичик элементни топамиз. Бу элемент (1,4) ва (2,2) катакларда жойлашган, яъни c_{14}=2 ва c_{22}=2. Юкларни бу катакларга жойлаймиз. X_{14}=min(60-20,50)=40, X_{22}=min(40,25)=25. Иккинчи талабгор талаби қаноатлантирилди, шу туфайли кейинги хисоблашларда 2-чи устун қаралмайди.
Кейинги энг кичик элементлар (2,4) ва (3,2) катакларда жойлашган, яъни c_{24}=3 ва c_{32}=3. Бу катакларга юкларни жойлаштирамиз X_{24}=min(40-25,50-40)=10. (3,2) катак қаралмайди, чунки бу устун хисобдан чиқарилган. Кейинги энг кичик элементни излаймиз, бу элемент c_{21}=4. Юкни бу катакга жойлаймиз X_{21}=min(15-10, 40)=5. Энг охирги кичик элемент c_{31}=7. Бу катакга ҳам юкни жойлаймиз X_{31}=min(35,40-5)=35. Натижада юкларни тақсимлаб, бошланғич таянч планга эга бўлдик, яъни

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Мақсад функциясини хисоблаймиз Z=415.
Энди масаланинг оптимал планини топамиз. Оптимал планни топиш учун потенциаллар усулидан фойдаланамиз. Бошланғич таянч план «Энг кичик элементлар» усулида топилган дейлик. Уни қуйидаги жадвал куринишида ёзамиз.

b_k / a_i	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 5	- 2 25	6	3 10	1
35	- 7 35	+ 3	5	4	4
v	3	1	1	2	

Жадвалда бўш бўлмаган катаклар қуйидаги шартни каноанлантириади.
r=3+4-1=6
Юкни жўнатувчи ва талабгорлар потенциалини аниқаймиз ва қуйидаги тенгламаларга эга бўламиз.

$u_1+v_3=1$; $u_1+v_4=2$; $u_2+v_1=4$
$u_2+v_2=2$; $u_2+v_4=3$; $u_3+v_1=7$

Маълумки тенгламалар сони номалумлар сонидан 1 та кам, яъни номалумлар 1 таси озод ва у исталган қиймат олиши мумкин. Мисол учун айтайлик $u_1=0$. У холда қолган потенциаллар қуйидагича аниқланади
$u_1=0$, $v_3=1$, $v_4=2$, $u_2=1$, $v_2=1$, $v_1=3$, $u_3=4$.
Бўш катакларда s_{ij} қийматини қўйидаги формула билан аниқлаймиз $S_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$. У ҳолда
S_{11}=5-(0+3)=2; S_{12}=4-(0+1)=3; S_{23}=6-(1+1)=4;

S_{32}=3-(4+1)=-2; S_{11}=5-(4+1)=0; S_{34}=4-(4-+2)=-2.

Олинган план оптимал бўла олмайди, чунки s_{ij} лар ичида манфийлари ҳам мавжуд S_{32}=S_{34}==-2. Бу катаклар учун ёпиқ контур (цикл) ҳосил қиламиз. (3,2) катак учун контур (3,2),(3,1),(2,1),(2,2). Контурни соат стрекаси ёки унга тескари бўйича (3,2) катакдан бошлаб кетма-кет + ва - ишораларини қўйиб чиқамиз. Манфий катаклардан энг кичигини танлаймиз min(25;35)=25, яъни x_{22}=25. Катакларда юкларни қайта тақсимлаймиз. Тақсимланишда умумий баланс бу катакларда бузилмасин ва харажатлар минимал бўлсин. Минусли катак (2,2) даги юкни кейинги мусбат катакдаги юкга қўшамиз. У ҳолда (2,1) катакда юк 5+25=30 бўлади. Баланс бузилмаслик учун (3,1) катакдаги юкдан 25 бирлигини (3,2) катакга юклаймиз. Шундай қилиб янги планга эга бўлдик. Бу жадвал учун потенциалларни аниқлаймиз ва бўш катакларда s_{ij} ларни ҳисоблаймиз:

S_{11}=5-(0+3)=2; S_{12}=4-(0+1)=3; S_{23}=6-(1+1)=4;

S_{22}=2-(2+1)=0; S_{33}=5-(4+1)=0; S_{34}=4-(4-+2)=-2;

b_k / a_i	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	+ 4 30	2 0	6	- 3 10	1
35	- 7 10	3 25	5	+ 4	4
v	3	1	1	2	

Янги олинган план ҳам оптимал эмас, чунки S_{34}=-2. Ёпиқ контур тузамиз ва юкларни бу контур ичида қайта тақсимлаймиз ва натижада қуйидаги планга эга бўламиз

b_k / a_i	40	25	20	50	u
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 0	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
V	3	1	1	2	

Олинган план оптимал план, чунки барча бўш катакларда S_{ij} лар мусбат. Демак, оптимал план қуйидагича бўлади.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Мақсад функциясининг қиймати z_{min}=375.

6.Очиқ моделли транспорт масаласи

Баъзи транспорт масалаларида юк запаслари талаблар йиғиндисидан кичик ёки катта бўлиши мумкин. Бундай масалалар очиқ турдаги транспорт масаласи дейилади. Бундай ҳолларда сохта (фиктив) m+1 жўнатиш ёки n+1 қабул (истемол) қилувчи пунктлари киритилади, яъни

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0 \quad \text{ёки}$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$$

Бу пунктларда транспорт харажатлари нулга тенг қилиб олинади, яъни $c_{m+1,j}=0$ ёки $c_{i,n+1}=0$.

Мисол. Қуйидаги очиқ моделли транспорт масаласини ечинг.

b_k / a_i	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	0	2	3	4	5

Бу масалада

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 > \sum_{j=1}^{5} b_j = 13$$

Шунинг учун олтинчи сохта талабгорни киритамиз, унинг талаби $b_6=16-13=3$ бўлади. Бу сохта пунктни киритиб, масалани қуйидагича ёзамиз.

b_k / a_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	0	2	3	4	5	0

Бу масалани ечиб 7-циклда оптимал ечимни топамиз, яъни

$x_{12}=1$, $x_{13}=3$,

$x_{24}=2$, $x_{25}=2$, $x_{26}=1$,

$x_{31}=3$, $x_{32}=2$, $x_{36}=2$,

$$y_{min}=1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 0+0\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 0=13$$

7.**Мавзу бўйича саволлар**

1.Транспорт масаласининг иқтисодий маъносини тушунтириб беринг.
2.Транспорт масаласининг математик модели қандай талқин қилинади?
3.Таъриф матрицаси нима?
4.Транспорт масаласининг плани деганда нимани тушунасиз?
5.Транспорт масаласи қачон очиқ турдаги ва қачон ёпиқ турдаги бўлади?
6.Транспорт масаласини ечиш қандай этаплардан иборат?
7.Таянч планни топишнинг қандай усулларини биласиз?

8.Оптимал планни топишнинг қандай усулларини биласиз?
9.Оптимал планни аниқлаш қандай критерия ёрдамида аниқланади?

Мавзу 10,11
ИШЛАБ ЧИҚАРИШНИ РЕЖАЛАШТИРИШ ВА ЮК ТАШИШДА ТРАНСПОТЛАРНИ ТАҚСИМЛАШ МАСАЛАЛАРИ

Р е ж а:

1.Кириш.
2.Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи.
3.Режалаштириш масалаларига математик моделлар тузиш.
4.Юк ташишда транспортларни тақсимлаш масаласи ва унга доир мисол.
5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.
2.Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1984й. 1 қисм.
3.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высшая школа” М. 1980г.
4.Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.. Математическое программирование. Высшая школа, М., 1976.

1.Кириш

Оптимал режалаштиришнинг математик модели иқтисодий жараёнларнинг барчасида чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш масаласига келади. Масалан, маҳсулот ишлаб чиқаришнинг оптимал плани топиш масаласи, корхоналарни оптимал жойлаштириш масаласи, ресурсларни тақсимлаш масаласи ва бошқа. Бу масалалар ичида режалаштириш ва тақсимот масаласи алоҳида ўрин тутади.

2.Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи

Корхона тайёр маҳсулот ишлаб чиқариш учун m-хил ресурсларга эга бўлсин. Ҳар бир ресурснинг ҳажми маълум бўлиб, бир бирлик маҳсулотга кетадиган мос ресурснинг нормаси ҳам аниқ дейлик. Айрим ишлаб чиқариладиган маҳсулотларга талаб ҳам аниқ ва уларнинг бир бирлиги учун оладиган даромади ҳам берилган. Ресурсларнинг чекланганлигини ҳисобга олган ҳолда, ҳар бир ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг ҳажмини аниқлаш керак.
Қуйидаги белгилашларни киритамиз:
j-ресурс номери;
m-ресурслар сони;
i-ишлаб чиқариладиган маҳсулот номери;
n-ишлаб чиқариладиган маҳсулот сони;
A_i -i-чи ресурснинг ҳажми;
a_{ij} -бир бирлик j-чи махсулотга i -чи ресурсдан кетадиган норма;

B_j -j-чи маҳсулотга бўлган бошқа корхоналар талаби;
c_j -ҳар қайси ишлаб чиқаришдан келадиган иқтисодий фойда;
x_j - ҳар бир ишлаб чиқиладиган махсулот хажми.
Ишлаб чиқаришнинг шундай X планини тузиш талаб қилинадики, тайёрланадиган маҳсулотнинг ҳар бири ($x_1, x_2, \ldots x_n$) дан энг кўп умумий фойда келадиган бўлсин.
У ҳолда масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:
1) Мақсад функцияси.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

2) Ресурслар учун қуйидаги чекланишлар;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le A_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

3) Талаблар учун чекланишлар:

$$x_j \ge B_j$$

4) Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти.

$$x_j \ge 0$$

Чекланишлар системаси ҳамда мақсад функция номаълумларга нисбатан чизиқли бўлгани учун масала чизиқли программалаш масаласи бўлади.
Масалани қуйидагича тавсифлаш мумкин. X планнинг шундай x_j компонентлари топилсинки, улар барча тенгсизликларни қаноатлантириб Z функцияналга энг катта қиймат берсин.

3.Режалаштириш масалаларинг математик моделларини тузиш.

1-масала. Фабрика икки хил A ва B тикув махсулти ишлаб чиқаради. Бу махсулотларни ишлаб чиқаришда уч хил N_1, N_2, N_3 типдаги матеиалларни ишлатади. N_1-материалдан 15 м., N_2-материалдан 16 м., N_3-материалдан 18 м. мавжуд.
M_1- маҳсулотни ишлаб чиқариш учун N_1-дан 2м., N_2-дан 1м., N_3-дан 3м. ишлатади.
M_2- махсулотни ишлаб чиқариш учун N_1-дан 3м., N_2-дан 4м., N_3-дан 0м. ишлатади.
M_1- махсулотнинг бир бирлигидан келадиган фойда 10 сўмни, M_2 - махсулотдан келадиган фойда 5 сўмни ташкил қилади.
Ишлаб чиқаришнинг шундай планини тузиш керакки фабрика максимал фойда олсин.
Масаланинг математик моделини тузамиз:
$2x_1+3x_2 \le 15$
$x_1+4x_2 \le 16$
$3x_1 \le 18$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$
$Z=10x_1+5x_2 \rightarrow \max$

2-масала. Завод икки хил A ва B товар ишлаб чиқаради. Бу товарларни ишлаб чиқаришда тўрт хил R_1, R_2, R_3, R_4 ресурсларни ишлатади, яъни

R_1- токор стоногидан 5700 норма соат.

R_2- фрезерчи станогидан 3700 норма соат.

R_3- йиғиш учун 5000 норма соат.

R_4- ярим фабрикат 610 кг.

А- махсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун:

R_1 -дан 300 норма соат.

R_2 -дан 200 норма соат

R_3 - дан 200 йиғиш норма соат.

R_4 - дан 10 кг. керак бўлади.

Бир бирлик В-махсулотни тайёрлаш учун:

R_1 дан 400 норма соат.

R_2 дан 100 норма соат.

R_3 дан 500 норма соат.

R_4 дан 75 кг керак бўлади.

А-махсулотдан энг камида 10 та.

Б-дан чекланмаган.

Бир бирлик А-махсулотдан келадиган фойда 3 минг сўмни, В-дан 8 минг сўмни ташкил қилади. Ишлаб чиқаришнинг шундай планини тузишимиз кераки, завод максимал фойда олсин. Масаланинг математик моделини тузамиз.

x_1 -А -махсулот хажми.

x_2 -В-махсулот хажми.

1)Ресурсларнинг чекланишини тузамиз:

$300x_1+400x_2\leq5700$

$200x_1+100x_2\leq3700$

$200x_1+500x_2\leq5000$

$10x_1+70x_2\leq610$

2)А махсулотни ишлаб чиқариш учун минимал чегара:

$x_1\geq10$, x_2 дан исталганча.

3)Ўзгарувчиларнинг манфий бўлмаслик шарти

$x_1\geq0$, $x_2\geq0$

4)Мақсад функцияси

$Z=3x_1+8x_2\rightarrow max$

4.Юк ташишда транспортларни тақсимлаш масаласи ва унга доир мисол

Тақсимот масаласи жуда кўп соҳаларда учрайди. Бу масалани юкларни ёки пасажирларни ташишда йўллар бўйича транспортларни тақсимлаш масаласида қараб чиқайлик. Бу масаланинг қўйилиши қуйидагича бўлади.

m та транспорт йўлига тақсимлаш учун n хил транспорт берилган бўлсин. Агар i-хилдаги транспорт сони N_i (i=1,2,..,n) га j-номерли транспорт йўли бўйича i-хил транспорт бир ойлик юк, ташиш ҳажми a_{ij} бирликка ва шу билан боғлиқ бўлган харажат b_{ij} сўмга тенг бўлса, энг кам харажат сарфлаб, j-номерли транспорт йўли бўйича c_j бирликдан кам бўлмаган ташиш ишини таъминлаш учун зарур бўлган i-хилдаги транспортлар сони x_{ij} ни топиш масаласининг математик моделини тузиш талаб қилинган бўлсин.

Биринчидан барча ташиш учун кетадиган харажат қуйидагига тенг бўлади.

$$Z=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_{ij}\to\min$$

Иккинчидан, масала шартига кўра i-хилдаги транспорт сони N_i га тенг бўлиб, j-номерли транспорт йўли бўйича c_j бирликдан кам бўлмаган ташиш ишини бажариш керак бўлганлиги учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\ge c_j,\ \ \sum_{j=1}^{m}x_{ij}=N_i$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ (i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m})$$

Бу ва юқоридаги мақсад функцияси масаланинг математик модели бўлиб ҳисобланади.

Масала. Тўртта ҳаво йўлига тақсимлаш учун 3 хил самолёт берилган бўлсин. Агар ҳар бир хилдаги самолётларнинг сони, бир ойлик юк ташиш ҳажмининг бирлиги ва самолётларни ишлатиш учун кетган харажатларнинг сон қиймати қуйидаги жадвалдагидек бўлса, самолётларни шундай тақсимлаш керакки, энг кам харажат сарфлаб, ҳар бир ҳаво йўли бўйича мос равишда 300, 200, 1000, ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилсин.

Самолётлар хили	Самолётлар сони	Ҳар бир ҳаво йўли бўйича бир ойлик юк ташиш ҳажми				Ҳар бир ҳаво йўли бўйича самолётларни ишлатиш учун кетган харажат			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	30	25	10	17	70	28	15	45
3	30	25	50	30	45	40	70	40	65
Юк ташиш бирлиги миқдори		300	200	1000	500				

Масаланинг математик модели қурилсин.

Ечиш. j-номерли ҳаво йўли бўйича юк ташиш учун зарур бўлган i-хил самолётлар сонини x_{ij} билан белгиласак, шу йўллар бўйича юк ташиш учун кетган харажатлар жадвалга асосан қуйидагича бўлади:

$Z_1=15x_{11}+70x_{21}+40x_{31}$

$Z_2=20x_{12}+28x_{22}+70x_{32}$

$Z_3=25x_{13}+15x_{23}+40x_{33}$

$Z_4=40x_{14}+45x_{24}+65x_{34}$

Умумий харажат эса

$$Z=Z_1+Z_2+Z_3+Z_4=\sum_{i=1}^{4}Z_i$$

га тенг бўлади. Иккинчи томондан, ҳар бир хаво йўли бўйича мос равишда 300, 200, 1000 ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилиши, ҳамда ҳар бир хил самолётдан шу йўлларнинг ҳаммасига 50, 20 ва 30 тадан беркитилиши керак бўлганлиги учун қуйидаги чекланиш шартларига эга бўласиз:

$$\left.\begin{aligned}15x_{11}+30x_{21}+25x_{31}&\ge 300\\10x_{12}+25x_{22}+59x_{32}&\ge 200\\20x_{13}+10x_{23}+30x_{33}&\ge 1000\\50x_{14}+17x_{24}+45x_{34}&\ge 500\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}&=50\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}&=20\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}&=30\\x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,3};\ j&=\overline{1,4}\end{aligned}\right\}$$

5.Мавзу бўйича саволлар

1.Ишлаб чиқаришни режалаштиришнинг математик моделида маҳсулотга қандай қўшимча шарт қўйилади,

2.Ишлаб чиқаришнинг планини деганда нимани тущунасиз?

3.Ишлаб чиқаришни режалаштиришнинг математик модели таърифини беринг.

4.Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи қўйилишини таърифланг.

5.Юкларни ёки пасажирларни ташишда йўллар бўйича транспортларни тақсимлаш масаласи таърифини беринг.

Маруза 12
БУТУН СОНЛИ ДАСТУРЛАШ

Р е ж а:

1.Кириш.

2.Бутун сонли дастурлаш масаласининг математик модели.

3.Бутун сонли дастурлаш масаласини ечиш учун Гомори усули.

4.Кесувчи тенгламаларни тузиш.

5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Сафаева К., Бекназарова Н. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1984й. 1 қисм.

1.Кириш

Ўзгарувчиларга бутун сонли бўлишлик шарти қўйилган чизиқли дастурлаш масалаларига *бутун сонли дастурлаш* масалалари дейилади. Бутун сонли дастурлаш масалаларига саёҳ ҳақидаги масала, оптимал жадвал тузиш, транспорт воситаларини маршрутлашни оптималлаш, оптимал жойлаштириш масаласи ва ҳоказолар мисол бўла олади

2.Бутун сонли дастурлаш масаласининг математик модели

Бутун сонли дастурлаш масаласи математик моделини умумий ҳолда ёзищдан олдин қуйидаги бутун сонли дастурлаш масалаларини кўриб чиқамиз.

1.Сайёҳ ҳақидаги масала. Фараз қилайлик P_0 шаҳарда яшовчи сайёҳ n та P_1, P_2, . . . , P_n шаҳарларида бир мартадан бўлиб, минимал вақт ичида P_0 шаҳарга қайтиб келиши керак бўлсин. Бу масаланинг математик моделини тузиш учун сайёҳнинг P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориши учун сарф қилинган вақтини t_{ij} (i=1,2,..,n; j=1,2,..,m) билан ҳамда унинг ҳар бир P_i шаҳардан P_j шаҳарга бориш вариантининг характеристикасини x_{ij} билан белгилаймиз. Агар сайёҳ P_i шаҳардан P_j шаҳарга борса, x_{ij}=1, бормаса, x_{ij}=0 бўлади. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} = 1 \ \text{ёки} \ \ x_{ij} = 0$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min$$

2.Оптимал жойлаштириш масаласи. Фараз қлайлик, m та $A_1, A_2, \ldots, A_m$ пунктларда бир хил маҳулот ишлаб чиқарувчи корхоналарни жойлаштириш керак бўлсин. Ҳар бир корхонанинг иш қувватини билдирувчи x_i, (i=1,2,..,m) бутун сонли қийматларни қабул қилади. Ҳар бир A_i пункдан маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган харажат ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдорига боғлиқ бўлиб $f_i(x_i)$ функция орқали ифодаланади. Соддалик учун бу функцияни чизиқли деб қабул қиламиз, яъни

$$f_i(x_i)=c_i x_i.$$

Бундан ташқари n та пункда бу маҳсулот истеъмол қилинади. Ҳар бир истеъмол қилувчи пунктнинг маҳсулотга бўлган талаби маълум ва улар $b_1,\ b_2\ ,\ldots,b_n$ бирликларни ташкил қилади деб фараз қиламиз. Ҳар бир A_i ишлаб чиқарувчи пункт ҳар бир истеъмол қилувчи пункт билан боғланган ва транспорт харажатларининг матрицияси $C=(c_{ij})$ дан иборат бўлсин.

A_i пунктдан j пунктга юбориладиган маҳсулот миқдорини x_{ij} билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда ифодаланади.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$$

$$x_{ij} \geq 1 \qquad x_i - \text{бутун сон}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

Юқорида келтирилган масалаларда номаълумларга бутун бўлишлик шарти қўйилган. Чизиқли дастурлаш масаласидан ана шундай шартлар билан фарк киладиган масалаларини бутун сонли дастурлаш масаласи деб атаймиз.

Бутун сонли дастурлаш масаласини умумий ҳолда қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \ \text{ва бутун}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

ёки вектор формада

$$AX=b$$
$$X\geq 0 \text{ ва бутун}$$
$$Z=CX\rightarrow min$$

Бутун сонли дастурлаш масалаларидаги номаълумларнинг ҳаммаси учун бутун бўлишлик шарти қўйилса, бундай масалалар *тўлиқ бутун сонли дастурлаш масалалари*, агар уларнинг маълум бир қисми учунгина бу шартлар қуйилса, *кисман бутун сонли дастурлаш масалалари* дейилади.

3.Бутун сонли дастурлаш масаласини ечиш учун Гомори усули

Бутун сонли дастурлаш масаласи чизиқли дастурлаш масаласидан қўшимча шартлар билан фарқ қилади. Бу шартларнинг қатнашиши бутун сонли дастурлаш масаласини ечиш жараёнини қийинлаштиради. Натижада чизиқли дастурлаш масалалрини ечиш учун қўлланиладиган усулларни бутун сонли дастурлаш масалаларига қўллаш мумкин бўлмай қолади.

Бутун сонли дастурлаш масалаларини ечиш учун унинг хусусиятларини эътиборга олувчи усуллар яратилган бўлиб, улардан америка олими Р.Гомори яратган усул оптимал ечимни берувчи энг аниқ усул ҳисобланади. Р.Гомори тўлик бутун сонли ва қисман бутун сонли дастурлаш масалаларини ечиш усулларини яратган. Унинг фақат бутун сонли дастурлаш масалалрини ечиш учун мулжалланган 1-алгоритми билан танишамиз.

Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат. Берилган бутун сонли дастурлаш масаласида номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан, уларни оддий чизиқли дастурлаш масаласи сифатида симплекс усулдан фойдаланиб ечамиз. Агар ечим бутун сонлардан иборат бўлса, у бутун сонли дастурлаш масаласининг ҳам ечими бўлади. Акс ҳолда номаълумларнинг бутун бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама тузилади.

3.Кесувчи тенгламаларни тузиш

1.Фараз қилайлик, масаладаги сонларнинг бутун бўлишлик шарти ташлаб юборишдан ҳосил бўладиган масала ечилган ва унинг оптимал ечими мавжуд бўлсин. Агар барча x лар бутун сонлар бўлса, топилган ечим бутун сонли дастурлаш масаланинг ечими бўлади.

2.Фараз қилайлик, баъзи x лар каср сонлардан иборат бўлсин, яъни симплекс жадвалдаги озод ҳадлар устуни қийматлари ичида каср сонлар ҳам мавжуд бўлсин. Уларнинг бутун кисмларини [x] билан белгилаймиз. У ҳолда бу сонларнинг каср кисмлари q лар куйидагича аниқланади:

$$q_i=x_i-[x_i],\quad q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}].$$

Фараз қилайлик, баъзи $q_i\neq 0$ бўлсин. У ҳолда, $\max\limits_{q_i\neq 0} q_i = q_k$

симплекс жадвалнинг тенгликни қаноатлантирувчи k катори учун кесувчи тенглама тузилади. Бунинг учун аввал

$$q_{k1}x_1+q_{k2}x_2+\ldots+q_{kn}x_n\geq q_k$$

тенгсизлик тузилади, сунгра уни (-1) га кўпайтириб, x_{n+1} қўшимча ўзгарувчи киритамиз.

$$-q_{k1}x_1-q_{k2}x_2-\ldots-q_{kn}x_n+x_{n+1}=q_k$$

Бундай тузилган тенглама *кесувчи тенглама* дейилади.

3.Кесувчи тенгламани симплекс жадвалнинг m+2 қаторига жойлаштирамиз ваа симплекс жадвални алмаштиришларини бажарамиз.

Агар ҳосил бўлган янги симплекс жадвалда барча x_i лар бутун сонли (яъни ҳамма $q_i=x_i-[x_i]=0$) бўлса, топилган ечим берилган бутун сонли дастурлаш масаласининг ечими бўлади. Акс ҳолда юқоридаги 2 ва 3 пунктлар яна такрорланади. Умуман бу жараён масаланинг бутун сонли ечими топулгунча ёки масаланинг бутун сонли ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Мисол. Қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласининг бутун сонли ечимини топинг.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 6 \\ 2x_1-3x_2\le 3 \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ \ \textit{бутун}$$

$$Z=8-3x_1-x_2\to\min$$

Масалани нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+x_4=3 \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ \ \textit{бутун}$$

$$Z=8-3x_1-x_2\to\min$$

Масалани симплекс усулда ечамиз.

1.

БЎ	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	6	2	3
x_4	3	2	-3
Z	8	3	1

2.

БЎ	1	$-x_4$	$-x_2$
x_3	3	-1	6
x_1	1.5	0.5	-1.5
Z	3.5	-1.5	5.5

3.

БЎ	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
Z	0.75	-0.58	-0.92

Шундай қилиб масаланинг масаланинг оптимал плани топилди, лекин бу план бутун сонли эмас. Биринчи тенгламанинг каср қисми энг катта бўлгани учун, шу биринчи қаторга нисбатан кесувчи тенглама тузамиз:

$$\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{6}x_4\ge\frac{1}{2}$$

Бу тенгсизликнинг икки томонига (-1) ни кўпайтириб, x_5 қўшимча ўзгарувчини киритамиз.Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}x_4+x_5=-\frac{1}{2}$, яъни

$-0.17x_3+0.17x_4+x_5=-0.5$

Бу охирги тенгламада барча коэффициентларнинг бутун қисмлари нулга тенг бўлгани сабаб улар ўзлари ўзгаришсиз қолади. Уни жадвалнинг охирига жойлаштирамиз.

4.

БЎ	1	$-x_4$	$-x_3$
x_2	0.5	-0.17	0.17
x_1	2.25	0.25	0.25
x_5	-0.5	0.17	-0.17
Z	0.75	-0.58	-0.92

Симплекс алмаштириш қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

БЎ	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
Z	3.5	-1.5	-5.5

Энди симплекс жадвалнинг иккинчи қаторига нисбатан кесувчи тенгламани тузамиз. $1.5x_4+0.5x_4\geq 1.5$

Бу тенгсизликда коэффициентлар бутун қисми нулдан катта бўлгани сабаб $q_i=x_i-[x_i]$, $q_{ij}=a_{ij}-[a_{ij}]$ фойдаланиб уларнинг каср қисмини ажратамиз, яъни $q_2=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$, $q_{24}=1.5-[1.5]=1.5-1=0.5$.

Тенгсизликнинг икки томонига (-1) ни кўпайтириб, x_6 қўшимча ўзгарувчини киритамиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$-0.5x_4-0.5x_5+x_6=-0.5$, яъни $-\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2}x_5+x_6=-\frac{1}{2}$

Уни жадвалнинг охирига жойлаштирамиз.

5.

БЎ	1	$-x_4$	$-x_5$
x_2	0.0	0.0	1.0
x_1	1.5	0.5	1.5
x_3	3.0	-1.0	-6.0
x_6	-0.5	-0.5	-0.5
Z	3.5	-1.5	-5.5

Симплекс алмаштириш қилиб қуйидаги жадвалга эга бўламиз.

БЎ	1	$-x_6$	$-x_5$
x_2	-1.0	-1.0	2.0
x_1	0.0	-1.0	3.0
x_3	9.0	5.0	-12.0

x_4	1.0	1.0	-2.0
Z	9.0	4.0	-11.0

5.

БЎ	1	$-x_6$	$-x_5$
x_2	0.0	1.0	0.0
x_1	1.0	1.0	1.0
x_3	4.0	-5.0	-2.0
x_4	1.0	1.0	-2.0
Z	5.0	-4.0	-3.0

Ҳосил бўлган симплекс жадвалда озод ҳадлар устуни элементлари бутун сонлардан иборат. Демак, бутун сонли дастурлаш масаласи ечими X=(1,0,5,1) бўлади ва Z_{min}=5.

5.Мавзу бўйича саволлар.

1.Қандай чизиқли дастурлаш масалалари бутун сонли дастурлаш масалалари дейилади?

2.Бутун сонли дастурлаш масалалари турига қандай масалалар киради?

3.Сайёҳ ҳақидаги масалага тушунтириш беринг.

4.Оптимал жойлаштириш масаласига тушунтириш беринг.

5.Бутун сонли дастурлаш масаласининг умумий математик модели қандай?

6.Гомори усулни тушунтириб беринг.

7.Кесувчи тенглама қандай тузилади?

8.Симплекс жадвалда қачон кесувчи тенглама тузилади?

Мавзу 13,14
ЧИЗИҚСИЗ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Р е ж а:

1.Кириш.

2.Лагранжнинг аниқмас купайтувчилар усули.

5.Мавзу бўйича саволлар.

Адабиётлар

1.Бадалов Ф.Б. Оптималлаш назарияси ва математик дастурлаштириш. “Ўқитувчи”, Тошкент, 1989й.

2.Кузнецов Ю.Н., Кубозов В.И., Волощенко А.Б. Математическое прпограммирование. “Высшая школа” М. 1980г.

3.Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И. Сборник задач по математическому программированию. Минск, Вышейщая школа, 1985г.

1.Кириш

Чизиқсиз дастурлаш масалаларининг мақсад функциялари ва чекланиш шартларида қатнашадиган функциялар изланаётган номаълумларнинг чизиқсиз функцияларидан иборат бўлади. Агар бизга n ўзгарувчи, яъни X=(x_1, x_2,…,x_n) га боғлик бўлган бирорта функциянинг чэкланиш тенгламалари ёки тенгсизликлари системасини қаноатлантирадиган минимумни топиш талаб қилинган бўлса, бу шартли минималлш масаласи Лагранжнинг аниқмас купайтувчилар усули ёрдамида шартсиз минималлаш масаласига келтирилади. Бу функциянинг минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0 . \qquad (5.1.1)$$

Бу шарт функциянинг *стационарлик шарти* дейилади. Берилган *f(x)* функцияга минимум берувчи стационар (критик) нукталар (5.1.1) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. *f(x)*функция *n* ўзгарувчига боғлиқ чизиқсиз функция бўлганлигидан (5.1.1) тенгламанинг ечимларини топиш анча мураккаб масалалардан бири бўлиб, уни ечиш учун ҳозиргача ягона усул мавжуд эмас. Бу тенгламаларнинг кўринишига қараб, уни ечиш учун ҳар хил тақрибий усуллар қўлланилади. Масалан, *f(x)* функциянинг аникланиш сохасидан x_0 нукта танлаб олиниб, бу нуктада *f(x)* функцияга минимум берувчи x^* нуқтанинг нолинчи қадами дейилади. x_0 нуқта функцияга минимум берувчи x^* нуқта учун дастлабки такрибий нуқта бўлиб, x^* нуқтага якинроқ бўлган x_1 тақрибий нуқтага, яъни биринчи қадамга ўтиш зарур. Бу ўтиш икки босқичдан иборат бўлади:

1.x_0 нуқтанинг x_1 нуқтага ўтишдаги ҳаракат йуналиши танланади.

2.шу йуналиш бўйича қандай қадам билан юриш аниқланади.

x_1 нуқтани танлаш умумий ҳолда қуйидаги шартга бўйсуниши керак:

$$f(X)<f(X_0).$$

1-таъриф. Функциянинг минимумини ёки максимумини топиш алгоритми, агар X_0 X_1, X_1 X_2, X_{i-1} X_i га ўтиш иаълум бир қоида асосида амалга оширилса, **детерминаллашган** алгоритм дейилади.

2-таъриф. Функциянинг минимумини ёки максимумини топиш алгоритми агар X_{i-1} X_i ўтиш, яъни X_{i-1} дан X_i га ўтиш (i=1,2,…,n) бирор тасодифий механизм асосида бўлса, тасодифий алгоритм дейилади.

Детерминаллашган алгоритмлар нолинчи, биринчи, иккинчи ва ҳоказо тартибли бўлиши мумкин.

Агар хар бир кетма-кет якинлашишда, яъни X X да факат функциянинг ўзи қатнашадиган бўлса, бундай детерминаллашган алгоритм -нолинчи, биринчи тартибли ҳосила қатнашадиган бўлса – биринчи ва ҳоказо тартибли алгоритмлар дейилади.

Агар бирорта чизиқсиз дастурлаштириш масаласи ва унинг бирор тақрибий ечиш усули берилган бўлса, «Бу тақрибий ечиш усулининг аниқ ечимга яқинлашиш тезлиги кандай?» -деган савол туғилади. Бу саволга қуйидагича жавоб бериш мумкин. Агар

$$\|X_{i-1} - X^*\| < q\| X_i - X^* \|, \quad 0<q<1$$

Тенгсизликда =1 бўлса, бу тақрибий ечиш усулиниг яқинлашиш тезлиги *чизиқли*, =2 бўлса, *квадратик*, <1 бўлса, *геометрик* дейилади.

5.2-Ньютон усули

*x** нукта *f(x)* функцияга минимум берувчи нуқта бўлиши учун шу нуқтада берилган функциянинг градиенти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$grad\, f(x^*)=df(x^*)/dx=0$$

Шундай қилиб, *f(x)* функцияга минимум берувчи нуқта мавжуд бўлса, у нуқта қуйидаги

МУНДАРИЖА

АДАБИЁТЛАР

1. Габасов Р.” Методы оптимизации “, 1981 г.
2. Акулич И.Л. “Математическое программирование в примерах и задачах.”1986г.
3. Габасов Р.”Методы оптимизации”,1995 г.
4. Бадалов Ф.Б. “Оптималлаш назарияси ва математик программалаш” 1989 й.
5. Зайченко Ю.П. “Исследование операций”,1975 г.
6. Вентцель Е.С. “Исследование операций”, 1972 г.
7.Монахов В.М. и др. “Методы оптимизации”, 1978 г.