МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)**

Метод интегральных преобразований в задачах математической физики

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель: Ю.Б. Савченко,

С.А. Ткачева

Воронеж

2014

1. Метод интегральных преобразований.

Для решения задач математической физики с непрерывным спектром может быть использован метод интегральных преобразований. Под интегральным преобразованием функции $f(x)$ понимается значение определенного интеграла, взятого по заданному промежутку от произведения $f(x)$ на ядро преобразования, представляющее собой функцию переменной x и некоторого параметра, который может принимать произвольные значения в заданной вещественной или комплексной области.

Интегральные преобразования, встречающиеся в математической физике, могут быть условно разделены на «вещественные» и «комплексные» в зависимости от значений, принимаемых параметром преобразования.

Пусть задана некоторая функция $K(x,v)$, где $a < x < \infty, b < v < \infty$. Будем предполагать эту функцию непрерывной от x и v в указанной области. Пусть $f(x) \in A$ - функция вещественной переменной(А – некоторый класс функций). Если для каждой функции класса А интеграл

$$F(v) = \int_a^{\infty} K(x,v) f(x) dx \qquad (1)$$

сходится, то в этом случае говорят, что определено *интегральное преобразование* $F(v)$ от функции $f(x)$ на классе А. При этом функция $K(x,v)$ называется ядром интегрального преобразования.

Во многих случаях существует обратная зависимость для (1). Она имеет вид:

$$f(x) = \int_b^{\infty} M(x,v) F(v) dv. \qquad (2)$$

Функция $M(x,v)$ называется ядром обратного преобразования. Формула (2) – обращение преобразования (1). Конкретная структура ядра $M(x,v)$ зависит от ядра $K(x,v)$ и пределов изменения переменных. Как правило, формула (2) имеет место в некотором классе В (не на всем классе А:В $\subset$ А), то есть $f(x) \in B$. Обе формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$f(x) = \int_b^{\infty} M(x,v) dv \int_a^{\infty} K(y,v) f(y) dy, f(x) \in B \qquad (3)$$

Формула (3) – разложение функции $f(x)$ по функциям $M(x,v)$. Часто случается, что формулы (1) и (2) взаимны.

Синус-преобразование Фурье:

интегрированию уравнения в частных производных, содержащих на единицу меньше независимых переменных, чем заданное уравнение. Если исходное уравнение с двумя независимыми переменными, то применение интегрального преобразования сводит задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Преобразование Фурье.

Ввиду большой важности интегрального преобразования Фурье напомним здесь некоторые основные свойства этого преобразования.

Пусть $f(x)$ - произвольная функция, определенная на интервале $(-\infty;+\infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(x)$ - кусочно-непрерывная на $(-\infty;+\infty)$.
2) $f(x)$ абсолютно интегрируемая на всей числовой оси.

Будем говорить, что тогда $f(x) \in A$. При таких условиях функция $f(x)$ может быть представлена в виде разложения в интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx}\, ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi}\, d\xi, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Причем в точке разрыва первого рода $x = c$ левая часть формулы должна быть заменена полусуммой $[f(c-0)+f(c+0)]/2.$

Преобразованием Фурье от функции $f(x)$ называется интеграл:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx}\, dx, \qquad -\infty < s < +\infty.$$

Для Функций, удовлетворяющих перечисленным условиям, преобразование Фурье всегда существует. Действительно, интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x) e^{isx}\, dx,$$

где α и β - любые конечные числа , когда существует(интеграл Римана). Поэтому интеграл Фурье сходится.

Преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

Если $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, где функции $f_1(x), f_2(x) \in A$, а c_1 и c_2 – константы, то $\tilde{f}(s) = c_1 \tilde{f}_1(s) + c_2 \tilde{f}_2(s)$ (свойство линейности преобразования Фурье).

Сверткой двух функций $f_1(x), f_2(x) \in A$ называется функция, определяемая по формуле: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y)\,dy = \{f_1, f_2\}$; причем свертка коммутативна, то есть $\{f_1, f_2\} = \{f_2, f_1\}$. Справедлива формула $\tilde{f}(s) = \tilde{f}_1(s)\tilde{f}_2(s)$, $\tilde{f}(s) \to 0$ при $s \to \pm\infty$.

Имеет место формула обращения, которая справедлива для функций $f(x) \epsilon B$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(x)$ - кусочно-непрерывна и имеет конечное число максимумов и минимумов в любом замкнутом промежутке $[a;b] \subset (-\infty; +\infty)$.
2) $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ имеет конечное значение.

Формула обращения имеет вид (в точках непрерывности)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s) e^{-isx}\,ds, -\infty < x < +\infty.$$

2. Определение преобразования Лапласа. Оригинал и изображение.

Пусть $f[t]$ –интегрируемая на (0,T) при любом T>0 функция, равная нулю при t>0: $f[t]$ =0 при t<0. Если эта функция при t>0 удовлетворяет оценке

$$|f[t]| \le Ce^{at}, C > 0, a \ge 0, t > 0, \qquad (1.1)$$

то можно рассмотреть интеграл

$$F[p] = \int_0^{\infty} f[t] e^{\ pt}\,dt, p = \sigma + i\xi, \sigma > a, \xi \epsilon R. \qquad (1.2)$$

Действительно, справедлива оценка

$$|F[p]| \le \int_0^\infty |f[t]|e^{-\sigma t}dt - \int_0^\infty |f[t]e^{-at}|\, e^{-(\sigma-a)t}dt \le C\int_0^\infty e^{-(\sigma-a)t}dt - \frac{C}{(\sigma-a)} < \infty. \qquad (1.3)$$

При выводе (1.3) была использована оценка (1.1). Из оценки (1.3), в частности, следует, что $|F[p]| \to 0\ \sigma = Re p \to \infty$.

Функция $F[t]$является аналитической функцией комплексной переменной p в плоскости $Re p > a$. Для того чтобы это проверить, находим пока формально

$$\frac{dF}{dp} = \int_0^\infty f[t](-t)e^{-pt}\,dt. \qquad (1.4)$$

Как и при выводе (1.3), находим

$$\left|\frac{dF[p]}{dp}\right| \le \int_0^\infty |f[t]e^{-at}|\, te^{-(\sigma-a)t}dt \le C\int_0^\infty te^{-(\sigma-a)t}dt = \frac{-C}{(\sigma-a)}\int_0^\infty \partial_t\, e^{-(\sigma-a)t}dt =$$

$$= \frac{-C}{(\sigma-a)}\left(te^{-(\sigma-a)t}\right) \quad - e^{-(\sigma-a)t}dt = \frac{C}{(\sigma-a)^2}.$$

Последнее означает, что интеграл равномерно по $Re p > a$ сходится и, следовательно, производная $\frac{dF[p]}{dp}$ существует при $Re p > a$, и формула (1.4) справедлива при $Re p > a$.

Интеграл (1.2) называется преобразование Лапласа функции $f[t]$ и обозначается $\mathcal{L}[f]$. В этом случае функция $f[t]$ называется оригиналом, а функция $\mathcal{L}[f] = F[p]$ – изображением.

Преобразование Лапласа можно связать с преобразованием Фурье. Действительно, из (1.2) имеем $\mathcal{L}[f][p] = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\xi)t}\,dt = \int_0^\infty (f[t]e^{-\sigma t})e^{-i\xi t}dt = \int_{-\infty}^\infty g[t]e^{-i\xi t}\,dt$, где $g[t] = f[t]e^{-\sigma t}$ при $t \ge 0$ и $g[t] = 0\ при\ t < 0$ (преобразование Фурье берётся со знаком -).

В дальнейшем все приводимые в тексте примеры будут отмечаться знаком "■".