

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ЖОҚАРЫ ҲАМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ
МИНИСТРЛИГИ**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК
УНИВЕРСИТЕТИ**

**Изетаева Г.К., Джакаева К.Д.,
Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.**

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

(Оқыў қолланба, I бөлим)

Нөкис – 2020

Изетаева Г.К., Джакаева К.Д., Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.
//Математикалық анализ. (I бөлім) / Оқыу қолланба, – Нөкіс:
ҚМУ, 2020. – 168 б.

Бул оқыу қолланба жоқары оқыу орынлары бакалавриат, магистратура студентлери, академиялық лицей оқыушылары, профессор-оқытушылар хәм үзликсиз билимлендириу системасының барлық тарауларында жұмыс алып барып атырған педагоглар, илимий изертлеушилер ушын зәрүр болып, педагогикалық технологияны билимлендириу процессине енгизиу мәселесинде математика оқыу пәнлери шынығыуларының жойбарларын ислеп шығыуда үлги хәмде билимлендириу процессине енгизиу бойынша методикалық жәрдем болады.

Қарақалпақ мәмлекетлик университети оқыу ислери бойынша проректоры, физика-математика илимлери кандидаты, доцент
М.М.Ибрагимовтың улыуа редакторлығы астында

Пикир билдириушилер:

С.Абдалова – педагогика илимлери кандидаты, доцент;

А.Даужанов – физика-математика илимлери кандидаты, доцент.

Бул оқыу қолланба Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети оқыу методикалық кеңесиниң 2020-жыл 4-март сәнеси 8/7.4 – санлы баянламасы менен баспаға усыныс етилген.

Кирисиў

Педагогикалық технология, оның тәсиршең усыллары, қолланылыўы лазым болған қураллары, билимлендириў тараўын түптен өзгертиўге, қәнигелер билимин еледе жетилистириўге қаратылған болыўы лазым. Авторитар ҳәм жасалма пикир жүритиў усылынан ўаз кешиў, сабыр-тақат, қанаат, өзгелер пикирин хўрметлеў, миллий ҳәм улыўма инсанийлық қәдириятларын хўрметлеў сыяқлы сыпатларын қәлиплестириўден ибарат. Бул мәселениң шешими белгили дәрежеде тәлимди технологияластырыў менен байланысly.

Мәмлекетимизде тәлим процессин илимий тийкарда пайда етип, оны жеделлестириў мақсетинде заманагөй педагогикалық технологияларды оқыў процессине енгизиў басқышы даўам етпекте. Хәзирги күнде билимлендириў системасында тәлим процессин заманагөй педагогикалық технология менен тәмийинлеў, оған тийисли оқыў әдебиятлардың жаңа әўладын жаратыў ҳәм әмелиятқа енгизиў – тийкаргы ўазыйпалардың бири болып қалмақта.

Бул ўазыйпаның тийкаргы шешимлериниң бири педагогикалық технологияның миллий моделин тәлим-тәрбия процессине енгизиў болып, буның тийкары болса оқыў пәнлериниң сабақ жойбарларын дүзиў болып есапланады. Жойбарлаў тийкарында модулли оқытыў теориялық жақтан толық тийкарланған болып, бүгинги күнде оны тәлим процессине енгизиў ең актуал мәселе болып есапланады.

Тәлим-тәрбия тараўында мийнет етип атырған хәр бир адам бүгинги күнде жүзеге келип атырған жаңа түсиниклерди аңлаўы, және де оқыў шынығыўларын жойбарлаў тийкарында модулли оқытыў технологияларынан хабардар болыўлары керек. Авторлар жазған бул оқыў қолланба профессор-оқытыўшылар аз күш ҳәм аз ўақыт сарплап, терең ҳәм пухта билимлерди бериў ушын кең имканиятлар жаратады.

Педагогикалық технологияны тәлим процессине кеңнен енгизиў мақсетинде ҳәм әмелге асырылған жумыслардың нызамлы даўамы сыпатында Қарақалпақ мәмлекетлик университети профессор-оқытыўшылары “Математикалық

анализ” пәнінің оқыу шынығыулары жойбарластырылды хәм оның нәтийжеси сыпатында математика хәм математиканы оқытыу методикасы тәлим бағдарлары оқыу процессінде математика пәнлери бойынша биринши мәрте жойбарластырылған оқыу қолланба жаратылды.

Бул оқыу қолланба жоқары оқыу орынлары математика тәлим бағдарлары бакалавриат студентлери менен биргеликте, магистратура студентлери, оқытыушылар хәм үзликсиз тәлим системасының барлық бууынларында ислеп атырған профессор-оқытыушылар, педагоглар жәмәәти, илимий изертлеушилер ушын зәрүр дерек болып, педагогикалық технологияны оқыу процессине енгизиу мәселесінде оқыу пәнлери шынығыуларының жойбарластырыуын ислеп шығыуда үлги хәм де тәлим процессине енгизиу бойынша методикалық жәрдем болады.

1. МИЛЛИЙ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯ ТИЙКАРЫНДА “МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ” ПӘНИ ОҚЫҰ ШЫНЫҒЫҰЛАРЫНЫҢ ЖОЙБАРЛАРЫ

1-кесте

Т/р	Жойбар дүзиў басқышлары хәм орынланатуғын әмеллер
1.	“Математикалық анализ” пәнин бир пүтин деп қарап, “макро модуль” деп қабыл етип, онда берилетуғын материаллардың көлеми хәм мазмунынан келип шығып, – “үлкен”, “орта” хәм “киши” модульларға ажыратылады, соң, олардың мақсети хәмде оларға ажыратылған ўақыт белгиленеди.
2.	Хәр бир киши модуль жәрдемінде берилетуғын билимлер системасы ишинен таяныш тусиниклер ажыратылады.
3.	Таяныш тусиниклер тийкарында бақлаў сораўлары дузилип, талабалар билим хәм көнликпелерин баҳалаў түр хәм өлшемлери белгиленеди.
4.	Оқыў шынығыўларының хәр бир киши модульінде қолланылатуғын сабақ түри анықланып алынады.
5.	Хәр бир киши модульда қолланылатуғын педагогикалық методлар анықланып, орынлары таўып қойылады.
6.	Оқыў шөлкеминде бар болған ахборот технологиялардан хәмде хәр бир киши модульдағы шынығыўының характеринен келип шығып, оқыў шынығыўын әмелге асырыўда пайдаланылатуғын ахборот технологиялардың қолланыў орынлары белгиленеди.
7.	Оқыў шынығыўы процессінде, хәр бир киши модульда пайдаланылатуғын дидактикалық материаллардың түри хәм орны анықланады.
8.	Орта модуль мазмуны хәм оқытыў процессиниң барысын аңлатыўшы модульиниң жөнелтириўши тексти жазылды.

**2. “Математикалық анализ” пәнінің үлкен модуллары,
олардан гөзленген мақсетлери хәм құрамындағы орта
модулар саны**

2-кесте

Т/ р	Үлкен модулар аты	Модуллардан гөзленген мақсет	Орта модулар саны
1.	Көплик	Басланғыш түсиниклерден бири болған көплик тусиниги, олардың түрлерин, көпликлер үстинде әмеллер, олардың қәсийетлерин талабаларға түсиндириў хәм Эйлер-Венн диаграммалары жәрдемінде сүўретлениўин үйретиў.	1 (1 лекция, 1 әмелий шынығыў)
2.	Ғақыйқый санлар	Рационал санлар көплиги хәм оның қәсийетлери, ғақыйқый сан түсинигин (шексиз онлық бөлшеклер бойынша яки кесим бойынша киритилиўи) киритиўди, ғақыйқый санлар көплиги хәм оның қәсийетлерин, ғақыйқый санлар үстинде әмеллер орынланыўын, санлы көпликлердиң шегаралары хәм ғақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ғаққындағы теореманы дәлиллеўди талабаларға түсиндириў.	2 (2 лекция, 2 әмелий шынығыў)

3.	Санлар избе-излиги ушын лимит теориясы	Өзгериўши хәм турақлы шамалар түсиниклерин киритиўди, санлар избе- излигиниң лимити хәм жыйнақлы избе-изликлердиң қәсийетлерин, жыйнақлы избе- изликлер үстинде арифметикалық әмеллер орынланыўын, шексиз үлкен шамалар, шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланысларын, анық емес аңлатпалар ҳаққында, монотон избе-изликлер хәм олардың лимити анықламасы хәм монотон избе-изликлердиң лимити ҳаққындағы теоремаларды талабаларға үйретиў. Сондай-ақ, үлес избе- изликлер, Больцано Вейерштрасс леммасы, Коши теоремасын дәлиллеўди, избе- изликтің жоқары хәм төменги лимитлерине анықлама берип, мысаллар жәрдемінде оларға түсиндириў.	3 (3 лекция модули, 4 әмелий шынығыў модули)
4.	Функция хәм оның лимити	Функция тусиниги, кери функция, элементар функциялар хәм олардың қәсийетлерин талабаларға үйретиў, қурамалы функция, функцияның графиги, натурал аргументли функциялар (санлы избе-изликлер) ҳаққында мағлыўматлар бериў, натурал аргументли функция (санлар избе-излиги)ның лимити, лимиттиң қәсийетлери, монотон	4 (4 лекция модули, 3 әмелий шынығыў модули)

		избе-изликлердин лимитин түсиндириў хәм ишпе-иш жайласқан сегментлер принципи, Коши теоремасы, қәлеген аргументли функция лимити анықламаларын келтирип, функция лимитиниң бар екенлиги ҳаққында теоремаларды дәлиллеўди және де функцияларды салыстырыўды ("о", "О", - белгилер) түсиндириў.	
5.	Функция-ның үзликсизлиги	Функция үзликсизлигине анықлама берип, хәм бул үзликсиз функциялар үстинде әмеллер орынлаўды, қурамалы функцияның үзликсизлиги, элементар функциялардың үзликсизлиги хәм олардың қәсийетлерин талабаларға үйретиў. Функцияның үзилиске түсиўи, үзилис точкаларының түрлери, функцияның тең өлшемли үзликсизлигин хәмде Кантор теоремасын дәлиллеў, мысаллар жәрдемінде түсиндириў.	3 (3 лекция модули, 4 әмелий шынығыў модули)
6.	Функция-ның туўынды хәм дифференциалы	Функция туўындысының геометриялық хәмде механикалық мәнислери, туўынды есаплаў қағыйдалары хәм формулалары менен талабаларды таныстырыў хәм функция дифференциалланыўшылығын, функция дифференциалын есаплаў, жуўық есаплаў формуласы	3 (3 лекция модули, 6 әмелий шынығыў модули)

		жәрдемінде мысаллар ислеўди үйретиў, жоқары тәртипте туўынды хәм дифференциалларды есаплаў, дифференциал есаптың тийкарғы теоремаларын дәлийллеў хәмде Тейлор формуласын түсиндириў.	
7.	Дифференциал есаптың базы қолланыўлары	Туўынды түсинигинен пайдаланып, функцияның өсиўши хәмде кемейиўшилигин анықлаўды, функцияның максимумы хәм минимумы, оларды туўынды жәрдемінде табыўды, функцияның дөңес хәм ойыслығы, функцияларды толық тексериўди талабаларға үйретиў.	2 (2 лекция модули, 4 әмелий шынығыў модули)
	Жәми		18

3. Орта модуллеры хәм оқыў саатларының улыўма саны

3-кесте

Т/р	Орта модуллеры	Саны хәм сааты
1.	Орта модуллердың улыўма саны	28
2.	Лекция оқыў саатларының улыўма саны	56 саат
3.	Әмелий шынығыў саатларының улыўма саны	49 саат
5.	Өз бетинше тәлим саатлары саны	- саат
6.	Жәми оқыў саатлары	- саат

Еслетпе: Тәлим жөнелиси: 5130100 – Математикалық. ОҰМТВтиң 2018 жыл 25 август 744-санлы буйрығы менен тастыйықланған оқыў режеси.

2. Мақсетлер жуўмағында ислетилетуғын фейиллер системасы

4-кесте

Т/р	Фейиллер	Т/р	Фейиллер
1.	Түсиндириў	7.	Анықлап шығыў
2.	Дәлиллеў	8.	Көрсетип бериў
3.	Анықлаў	9.	Көрсетиў
4.	Тәртипке келтириў	10.	Шешиў, группаластырыў
5.	Ийелеў, анықлаў	11.	Өзгертириў
6.	Айтып бериў		

Еслетпе: Орта модуль мақсетлерине қарап фейиллерден бири қойылады.

I. БИРИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – КӨПЛИК

(1 лекция хәм 1 әмелий шынығыў модули)

Киши модуллар:

1. Көпликлер ҳаққында тийкарғы түсиниклер;
2. Көплик элементлери, үлес көплик хәм көпликлердин теңлиги;
3. Көпликлер үстинде әмеллер;
4. Биринши модулдың жойбары.

Биринши киши модуль: Көпликлер ҳаққында тийкарғы түсиниклер

Көплик анықлама берилмейтуғын, тийкарғы математикалық түсиниклерден бири болып есапланады.

Көплик түсиниги, көпликлер теориясы немис математиги Георг Кантор (1845-1908) тәрәпинен киритилген.

Көплик базы бир затлар, буйымлар, объектлер менен биргеликте қараў нәтийжесинде пайда болады. Мәселен: барлық натурал санларды биргеликте қараў натурал санлар көплигин, туўры сызықта жатыўшы барлық нокатларды биргеликте қараў бул туўры сызық нокатлары көплигин береді.

Екинши киши модуль: Көплик элементлери, үлес көплик хәм көпликлердин теңлиги

1-анықлама. Көпликти пайда етиўши объектлер бул көпликдин элементлери делинеди.

Көпликлер латын яки грек алфавитининң үлкен ҳәриплери:

$A, B, C, D, E, F, \dots$ лар менен, оның элементлери болса, усы алфавиттинң киши ҳәриплери $a, b, c, d, \dots$ лар менен белгиленеди.

Егер A көплик $a, b, c, \dots$ элементлерден дүзилген болса, ол $A = \{a, b, c, \dots\}$ көринисинде жазылады.

Көпликти пайда етиўши элементлер саны шекли хәм шексиз болыўы мүмкин. Соның ушын көпликлер де шекли яки шексиз болады.

2-анықлама. Элементтер саны шекті болған көптік **шекті көптік**, ал элементтер саны шексіз болған көптік **шексіз көптік** делінеді.

Базы бір шекті хәм барлық шексіз көптіктерді өз элементтері арқалы толық жазыу мүмкін емес. Бундай жағдайларда көптіктер өз элементтерінің характеристикалық қасиеттері арқалы беріледі.

Мәселен:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ теңлемінің шешімлері көптігі $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ көрінісінде жазылады. Улыуа жағдайда, егер A көптіктің барлық элементтері қалған P қасиетке ийе болса, онда $A = \{x \mid p(x)\}$ жазылады.

$a \in A$ - “ a элемент A көптікке тийісі” деген мәністі аңлатады. b элементтің A көптікке тийісі емесігі $b \notin A$ түрінде жазылады.

Бір неше көптіктер берілген болсын: $A, B, C, \dots$

3-анықлама. A көптіктің хәр бір элементі B көптікке тийісі болса хәм керісінше, B көптіктің хәр бір элементі A көптікке тийісі болса, A хәм B көптіктер **өз-ара тең делінеді** хәм $A = B$ түрінде белгіленеді.

4-анықлама. B көптіктің хәр бір элементі A көптікке тийісі болса, B көптік A көптіктің **үлес көптігі делінеді** хәм $B \subseteq A$ түрінде белгіленеді.

$\subseteq$ — үлес белгісі.

Егер A, B, C көптіктер бір көптіктің үлес көптіктері деп қаралса, бундай жағдайда үлес қатнасы төмендегі қасиеттерге ийе болады:

1-қасиет. $A \subseteq B$ хәм $B \subseteq A$ болса, бундай жағдайда $A = B$ болады.

2-қасиет. $A \subseteq B$ хәм $B \subseteq C$ болса, бундай жағдайда $A \subseteq C$ болады.

5-анықлама. B көптіктің барлық элементтері A көптікте бар болып, соның менен бірге A да және B ға тийісі болмаған элементтер де бар болса, B көптік A көптіктің **меншікті үлес көптігі делінеді** хәм $B \subset A$ түрінде белгіленеді.

6-анықлама. Бир элементке де ийе болмаған көплік бос көплік делинеді хәм ол $\emptyset$ түрінде белгиленеди.

7-анықлама. А көпликтің өзи де бос көплік. А көпликтің меншиксиз үлес көплиги делинеді.

Қәлеген n элементли көпликтің барлық үлес көпліклери саны 2^n ге тең. Бул тастыйықлаўды математикалық индукция усылы менен дәлиллеў мүмкин. Хақыйқаттан да, бир элементли көплік 2 үлес көплікке ийе, яғный бул көпликтің өзи де бос көплік, демек, $2 = 2^1$, $n=1$ болады. Ойлап қарайық, тастыйықлаў n элементли $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ көплік ушын орынлы болсын. n элементли көплікке x_{n+1} элементти қосып, $(n+1)$ элементли $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ көпликті пайда етемиз. $(n+1)$ элементтің үлес көпліклери n элементли көпликтің үлес көпліклеринен де оның үлес көпліклерине x_{n+1} элементтің қосындысынан пайда болған үлес көпліклерден ибарат болады. Солай етип, $(n+1)$ элементли көпликтің үлес көпліклери саны n элементли көплік үлес көпліклери санынан еки мәрте көп болады. Басқаша айтқанда, $(n+1)$ элементли көпликтің үлес көпліклери саны $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ болады.

Үшінши киши модуль: Көпліклер үстінде әмеллер

Еки A хәм B көпліклер берилген болсын. Олар үстінде орынланатуғын әмеллерди қарап шығамыз.

8-анықлама. A хәм B көпліклердің кемінде биреўине тийисли болған барлық элементлерден дүзилген C көплікке көпліклердің бирикпеси делинеді хәм

$A \cup B$ яки $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ёки } x \in B\}$ түрінде жазылады.

Бул түсиникти қәлеген шекли сандағы көпліклер ушын да киритиў мүмкин. n $A_1, A_2, \dots, A_n$ көпліклер берилсе, олардың бирикпеси

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

түрінде жазылады.

9-анықлама. A хәм B көплеклердің барлық улыўма элементлеринен дүзилген C көплек бул **көплеклер кесилиспеси делинеди** хәм $C = A \cap B$ түринде жазылады.
 n көплеклер кесилиспеси болса

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

түринде жазылады.

10-анықлама. A көплектен B көплектің айырмасы деп, A ға тийисли, бирақ B ға тийисли болмаған барлық элементлерден дүзилген көплекке айтылады хәм $E = A/B$ түринде жазылады.

11-анықлама. A ның B да хәм де B ның A да болмаған элементлер көплиги бул **көплеклердің симметриялық айырмасы делинеди** хәм $C = A \Delta B$ түринде жазылады.

Анықламадан көринеди, симметриялық айырма

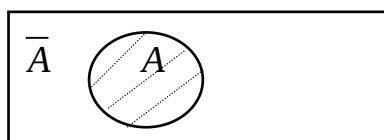
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

дан ибарат екен.

12-анықлама. Хеш қандай көплектің айқын үлес көплиги болмайтуғын көплек **универсал көплек делинеди** хәм U менен белгиленеди.

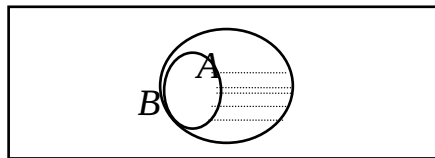
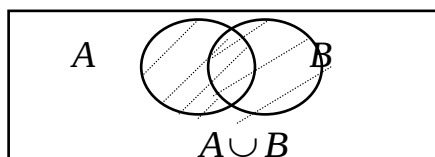
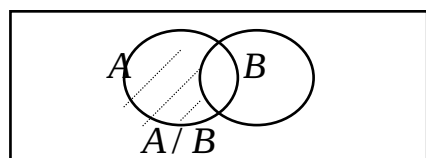
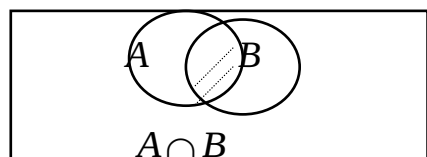
Универсал көплектің барлық үлес көплеклери көплигин $U(U)$ менен белгиленеди. Бул жағдайда $A \in U(U)$ ны $A \subseteq U$ деп түсиниледи. U универсал көплектің барлық үлес көплеклери арасында еки айқын емес үлес көплек бар болып, олардан бири оның өзи де $\emptyset$ көплек, қалғанлары болса меншикли үлес көплеклер болады. U универсал көплек шекли болса, оның барлық үлес көплеклери де шекли болады. U шексиз болса, оның үлес көплеклери шекли яки шексиз болыўы мүмкин.

U универсал көплек туўры төртмүйеш пенен, оның айқын үлес көплеклерин бул төртмүйеш ишиндеги шеңберлер менен сүүретленеди. Бул жағдайда төртмүйештің штрихланған үлеси A үлес көплек болса, штрихланбаған үлеси $\bar{A}$ толтырыўшы көплек болады.

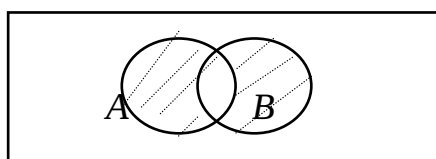
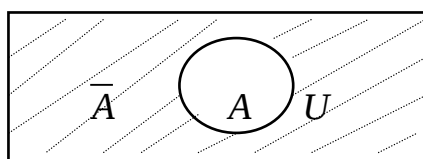


$$1) A \cup A = A$$

$$2) A \cup \bar{A} = U$$



B көплицти A көпликке шекем толтырыўшы көплик.



A көплицти U универсал толтырыўшы көплик

A хәм B көпликлердиң көпликке шекем симметриялык айырмасы

Көпликлерди бундай сүүретлеў Эйлер-Венн диаграммалары делинеди.

Көпликлер үстинде әмеллердиң қәсийетлери

1-қәсийет. Қәлеген еки A хәм B көпликлердиң кесилиспеси хәм бирикпеси коммутатив болады, яғный:

$$A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (2)$$

2-қәсийет. Бирикпе хәм кесилиспе әмеллери ассотциатив, яғный:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (3)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (4)$$

3-қәсийет. Үш A, B хәм C көпликлер үстинде орынланатуғын кесилиспе хәм бирикпе әмеллери дистрибутивлик ызамаына бойсынады, яғный:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (6)$$

4-қәсийет. Идемпотентлик ызыамлары орынлы болып есапланады, яғный:

$$A \cup A = A \quad (7)$$

$$A \cap A = A \quad (8)$$

5-қәсийет. Жутылыў ызыамлары орынлы, яғный:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (9)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (10)$$

Көпликлердин декарт көбеймеси

Еки бос емес A хәм B көпликлер берилген болсын.

13-анықлама. A көпликтің элементлерин биринши, B көпликтің элементлерин екинши қылып дүзилген барлық жуплықлар көплиги A хәм B көпликлердин **Декарт көбеймеси** делинеди хәм ол $A \cdot B$ түринде белгиленеди.

Төртинши киши модуль: Биринши модульдың жойбары

Киши модульларының атлары хәм мақсетлери

1.1.1-кесте

Тийкарғы түсиниклерден бири болған көплик түсинигин хәм олардың түрлерин, көпликлер үстинде әмеллер, олардың қәсийетлерин студентлерге түсиндириў хәм Эйлер-Венн диаграммалары жәрдемінде сүүретлеўди үйретиў.

**Биринши орта модульдың киши модульларының
атлары хәм мақсетлери**

1.1.2-кесте

№	Киши модульлар аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Көплеклер хақында тийкарығы түсиниклер	Көплек – анықлама берилмейтуғын түсиник екенлигин хәр түрли мысаллар арқалы студентлерге түсиндирий хәм көплек элементлери – көплекти пайда етиўши объектлер екенлигин оларға үйретиў.
2.	Көплек элементлери, үлес көплек хәм көплек- лердің теңлиги.	Шекли хәм шексиз көплек хақында түсиникти, үлес көплек – көплектиң үлеси, бос көплек – элементлери болмаған көплек екенлигин студентлерге түсиндирий хәм көплеклердің теңлиги хақында анықламаларды келтирий.
3.	Көплеклер үстинде эмеллер	Көплеклер үстинде эмеллерди орынлаўды, универсал көплек, Эйлер-Венн диаграммасы хәм Декарт көбеймеси хақында түсиниклерди студентлерге түсиндирий.

**Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

1.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Көплек, көплек элементлери.	1) Көплек хақында түсиник. 2) Көплеклер хәм олардың элементлери қандай белгиленеди? 3) Көплеклерге мысаллар келтириң.
2.	Шекли хәм шексиз көплеклер, үлес	1) Шекли көплек деп неге айтылады? Мысаллар келтириң.

	көплік, бос көплік.	2) Шексиз көплік деп неге айтылады? Мысаллар келтирің. 3) Үлес көплікке анықлама берің. 4) Көпліклердің теңлігіне анықлама берің. 5) Бос көплік деп неге айтылады?
3.	Көпліклердің бирикпесі, көпліклердің кесліспесі, көпліклердің айырмасы, универсал көплік, Эйлер-Венн диаграммасы, Декарт көбейме.	1) Көпліклер үстінде қандай әмеллер орынлау мүмкін? Оларға анықлама берің. 2) Хәр бір әмел үшін Эйлер-Венн диаграммаларын сызың. 3) Көпліклер үстінде орынланатуғын қандай қасиеттерді билесіз? 4) Көпліклердің Декарт көбеймесі анықламасын келтирің? 5) Қандай көплік универсал көплік болады?

Ескертиу: Киши модуллардағы бақылау сорауларынан студенттер өз бетінше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллардың бақылау сораулары тийкарында дүзилген тест

1.1.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкін болған жуаулар	
1.	Көпліклер қалай белгиленеди?	А	Латын яки грек алфавитиниң үлкен хәриплери менен.
		Б	Латын яки грек алфавитиниң киши хәриплери менен.
		В	Грек алфавитиниң хәриплери менен.
2.	Шекли хәм шексиз	А	Шекли хәм шексиз көпліклерге анықлама берилмейди.

	көплеклерге анықлама бериң?	Б	Элементтер саны шексіз болған көплек шексіз көплек және керісінше болса, шекті көплек делинеді. Элементтер саны шексіз болған көплек шекті көплек.
		В	Элементтер саны шекті болған көплек шекті көплек, элементтер саны шексіз болған көплек шексіз көплек делинеді.
3.	Бос көплек деп неге айтылады?	А	Бұндай көплек жоқ.
		Б	Тек бір элементке ие болған көплек.
		В	Бір элементке де ие болмаған көплек.
4.	А көплек элементтерін бірінші, В көплек элементтерін екінші қылып дүзілген барлық жуплықтар көплігі не делинеді?	А	Көплектердің Декарт көбеймесі.
		Б	Көплектердің кесилиспесі.
		В	Көплектердің айырмасы.
5.	А көплектің хәрбір элементі В көплекке тийіс болса және керісінше, В көплектің хәрбір элементі А көплекке тийіс болса, А және В ... көплектер делинеді.	А	универсал
		Б	өз-ара тең
		В	симметриялық

6.	А көпликтің өзі де бос көплік ... делинеді.	А	универсал көплік
		Б	айқын емес үлес көплигі
		В	бос көплік
7.	Илимге көплік түсинигін кириткен, көпліклер теориясына тийкар салған алымды көрсетің ?	А	Немис математиги Георг Кантор.
		Б	Мухаммед ал-Хорезмий
		В	Гаусс.
8.	А хәм В көпліклердің барлық улыўма элементлеринен дүзилген С көплік ... делинеді.	А	бул көпліклердің бирикпеси
		Б	бул көпліклердің айырмасы.
		В	бул көпліклер кесилиспеси
9.	А ның В да хәм де В ның А да болмаған элементлер көплиги ...	А	$A \setminus B$
		Б	$A \Delta B$
		В	$A \cup B$
10.	Хәр қандай көпликтің айқын үлес көплиги деп қаралмаған көплік не деп аталады?	А	Универсал көплік.
		Б	Айқын емес үлес көплиги.
		В	Бос көплік.

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри хәм типі, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

1.1.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	кирисиў, диалоглы, көргизбелі, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри хәм типі:	аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын	түсиндириў, айтып бериў, машқалалы

усыл хәм методлар:	сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерин жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	жеке ҳалда, топар менен, кең тарқалған.
Оқытыў шәраятлары:	мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	жазба жұмыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информация-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

1.1.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыў шынығыўлардың жойбарлары.

II. ЕКІНШІ ҮЛКЕН МОДУЛ – ХАҚЫЙҚЫЙ САНЛАР

(2 лекция модули, 2 әмелий шынығыу модули)

Киши модуллар:

1. Хақыйқый сан түсиниги;
2. Хақыйқый санлар көплиги хәм оның қәсийетлери;
3. Хақыйқый санлар үстинде әмеллер;
4. Екинши модулдың жойбары.

Биринши киши модуль: Хақыйқый сан түсиниги

Сан түсиниги узақ өтмиштен белгили. Адамлар санасы менен дәслең 1,2,3,... – натурал санларды қолланған. Кейин ала терис сан, рационал сан хәм және хақыйқый сан түсиниклери киргизилген хәм үйренилген. Бул түсиниклер бизге мектеп курсынан белгили болғанлығы себепли натурал санлар, пүтин санлар, рационал санлар көпликлериниң ең әхмийетли қәсийетлерине қысқаша тоқтап өтемиз. Хақыйқый сан түсинигине келгенде соны айтып өтиў керек, оның киритилиўи математикалық анализ ушын қанаатландыарлы дәрежеде емес. Сонлықтан, төменде хақыйқый сан түсинигин Дедекинд бойынша киритемиз хәм хақыйқый санлар көплигиниң туўындыларын толық үйренемиз.

Бизге белгили, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ барлық натурал санлар көплигин аңлатады. Көпликтен алынған қәлеген натурал n , m хәм p санлар ушын төмендеги еки тастыйықлаў орынлы:

1) $n = m, n > m, n < m$ қатнаслардан бири хәм тек бирейи орынлы.

2) $n < m, m < p$ теңсизликеринен $n < p$ теңсизликтиң орынлы екенлиги келип шығады.

Егер E көплек элементлери ушын жоқарыда келтирилген 1) хәм 2) қатнаслар орынлы болса, E көплек **жыйнақлы көплек** делинеди.

Екинши киши модуль: Ҳақыйқый санлар көплиги хәм оның қәсийетлери

Натурал санлар көплиги N да еки әмел қосыў $(n+m)$ хәм көбейтиў $(n \cdot m)$ әмеллери киритиледи хәм олар төмендеги қәсийетлерге ийе болады:

- 1) Коммутативлик: $n+m=m+n$, $n \cdot m=m \cdot n$
- 2) Ассоциативлик: $(n+m)+p=n+(m+p)$, $(n \cdot m) \cdot p=n \cdot (m \cdot p)$
- 3) Дистрибутивлик: $(n+m) \cdot p=n \cdot p+m \cdot p$
- 4) N көпликте сондай k элемент бар, $k \cdot n=n \cdot k=1$ болады. Бул элемент $k=1$.

Барлық терис, натурал санлар, ноль саны хәм барлық натурал санлардан ибарат көплек пүтин санлар көплигин пайда етеди хәм бул әдетте Z хәриби менен белгиленеди.

$$Z = \{\dots -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$N \subset Z$ пүтин санлар көплиги, натурал санлар көплиги түринде жыйнақлы көплек болады. Бул қысқармайтуғын $r = \frac{p}{n}$, $p \in Z$, $n \in N$ бөлшек көринисте сүүретленген хәр бир сан **рационал сан** делинеди.

Жоқарыдағы p хәм n санлардың 1 ден басқа улыўма бөлийүшилери жоқлығы $(p, n)=1$ белги менен аңлатамыз. Солай етип,

$$Q = \left\{ r : r = \frac{p}{n}, (p, n)=1, p \in Z, n \in N \right\}$$

Рационал санлардың жоқарыда келтирилген анықламасы төмендеги анықламаға эквивалент: шексиз периодлы онлық бөлшек көринисте сүүретленетуғын хәр бир сан **рационал сан** делинеди. Бизге белгили, $N \subset Z \subset Q$

Рационал санлар көплиги Q да пүтин санлар көплиги сыяқлы жыйнақлы.

Үшінші киши модуль: Ғақыйқый санлар үстинде әмеллер

Рационал санлар көплиги қосыў, көбейтиў, айырма әмеллери менен бир қатарда бөлиў әмели (нольге тең болмаған санға) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ да киритиледи.

Анықлама. Рационал санлар көплиги сондай A ҳәм A' көплеклерге ажыратылса,

- 1) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$
- 2) $A \cup A' = Q$
- 3) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шәртлер қанаатландырылса, A ҳәм A' көплеклер Q көплекте кесим аңлатады деп айтылады.

Әдетте кесим (A, A') түринде белгиленип, A көплек кесимниң төменги класс, A' көплек болса кесимниң жоқары класы деп аталады.

Рационал санлар көплиги Q да орынланған үшінши түр кесим төменги класта да ҳәм жоқарғы класта да ашық болған кесим иррационал кесим делинеди.

Рационал санлар көплиги Q да аңлатылған иррационал кесим, иррационал санды анықлайды делинеди ҳәм U деп белгиленеди.

Рационал ҳәм де иррационал санлар улыўма ат пенен ҳақыйқый санлар деп аталады. Барлық ҳақыйқый санлар R ҳәриби менен белгиленеди. Анықламаға қарап, $R = Q \cup U$

Төртинши киши модуль: Екинши модульдың жойбары Екинши үлкен модуль қурамындағы биринши орта модульдың улыўма мақсети

2.1.1-кесте

Натурал санлар, пүтин санлар, рационал санлар көплеклери бизге мектеп математика курсынан мәлим болғанлығы себепли, олардың ең әҳмийетли қәсийетлерине қысқаша мағлыўмат бериў. Иррационал сан түсинигин киритиў ҳәм ҳақыйқый сан түсинигин Дедекинд бойынша киритиў ҳәм оның қәсийетлерин студентлерге толық үйретиў. Сондай-ақ,

оларға җақыйқый санлар үстинде әмеллерди (қосындысы, көбеймеси, дәрежеси) олардың қәсийетлерин хәм әмелиятта қолланылыўын түсиндириў.

Биринши орта модульдың киши модульларының атлары хәм мақсетлери

2.1.2-кесте

№	Киши модуль аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Ғақыйқый сан түсиниги.	Натурал санлар, пүтин санлар, рационал санлар көпликлери бизге мектеп математика курсынан белгили болғанлығы себепли, олардың ең әҳмийетли қәсийетлерине қысқаша мағлыўмат бериў хәм иррационал сан түсинигин киритиўди студентлерге үйретиў.
2.	Ғақыйқый санлар көплиги хәм оның қәсийетлери.	Ғақыйқый сан түсинигин Дедекинд бойынша киритиў хәм оның қәсийетлерин студентлерге толық үйретиў.
3.	Ғақыйқый санлар үстинде әмеллер.	Ғақыйқый санлар үстинде әмеллерди (қосындысы, көбеймеси, дәрежеси) олардың қәсийетлерин хәм әмелиятта қолланылыўын студентлерге үйретиў.

Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

2.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Натурал санлар, пүтин санлар, рационал санлар, иррационал санлар,	1) Қандай санлар натурал санлар делинеди? 2) Пүтин санларға мысаллар келтириң.

	хақыйқый санлар.	3) Рационал санлар деп қандай санларға айтылады? 4) Иррационал санға анықлама берің. 5) Хақыйқый сан деп қандай санларға айтылады?
2.	Хақыйқый санлар көплиги, оның қасиеттери, Дедекинд принципи.	1) Хақыйқый санлар көплигине анықлама берің. 2) Хақыйқый санлар көплигиниң қасиеттерин айтып берің. 3) Дедекинд принципи не хаққында?
3.	Хақыйқый санлар үстінде әмеллер.	1) Хақыйқый санлар үстінде қандай әмеллер орынланады. 2) Хақыйқый санлардың қосындысы хәм айырмасына анықлама берің. 3) Хақыйқый санлардың көбеймеси деп қандай санға айтамыз? 4) Хақыйқый санлар көбеймесиниң қасиеттерин айтып берің.

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллердың бақлаў сораўлары тийкарында дүзилген тест

2.1.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Натурал санлар қатары қайсы жуўапта дурыс берилген?	А	1,2,3,4,...
		Б	2,3,4,5,...
		В	1,2,3,4,5,6,7

2.	Пүтин санлар көплиги	А	$Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
		Б	$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
		В	$Z = \{\dots - 3, -2, -1, 0\}$
3.	Рационал санлар деп қандай санларға айтылады?	А	Шексиз периодлы онлық бөлшек көринисте сұўретленетуғын ҳәр бир сан рационал сан делинеди.
		Б	Шексиз периодлы болмаған онлық бөлшек көринисте сұўретленетуғын ҳәр бир сан рационал сан делинеди.
		В	$r = \frac{P}{n}$ көринисиндеги сан.
4.	Иррационал санға анықлама бериң.	А	Шексиз онлық бөлшек.
		Б	Шексиз, периодлы онлық бөлшек.
		В	Шексиз, периодлы болмаған онлық бөлшек.
5.	Қосыў ҳәм көбейтиў әмеллери қайсы қағыйда арқалы байланысқан?	А	$a + b = b + a, a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
		Б	$a + (b + c) = (a + b) + c, ab = ba$
		В	$(a + b) \cdot c = ac + bc$
6.	Ҳақыйқый санлар деп қандай санларға айтылады?	А	Натурал ҳәм де иррационал санлар улыўма ат пенен ҳақыйқый санлар делинеди.
		Б	Рационал ҳәм де иррационал санлар улыўма ат пенен ҳақыйқый санлар делинеди.
		В	Рационал ҳәм де натурал санлар улыўма ат пенен ҳақыйқый санлар делинеди.
7.	Ҳақыйқый санлар көплигиниң қәсийетлерин айтып бериң.	А	Ҳақыйқый санлар көплигиниң тәртиплестирилгенлиги, тығызлығы, толықлығы.
		Б	Ҳақыйқый санлар көплигиниң избе-излиги, тығызлығы.

		В	Ҳақыйқый санлар көплигиниң үзликсизлиги, тығызлығы.
8.	Дедекинд принципи не ҳаққында?	А	Көпликтиң үзликсизлик қәсийети.
		Б	Көпликтиң избе-излиги.
		В	Көплигиниң тығызлығы.
9.	Ҳақыйқый санлардың қосындысына анықлама бериң.	А	$\forall a, b \in \mathbf{R}$ ушын олардың қосындысы деп аталатуғын сан бирден-бир анықланған ҳәм $a + b$ көринисте белгиленеди.
		Б	Ҳақыйқый санлардың қосындысы деп $a + b$ көринистеги санға айтылады.
		В	Ҳақыйқый санлардың қосындысына анықлама берилмеген.
10.	Ҳақыйқый санлардың көбеймеси деп қандай санға айтамыз?	А	Ҳақыйқый санлардың көбеймеси деп $a \cdot b$ көринистеги санға айтамыз.
		Б	$\forall a, b \in \mathbf{R}$ ушын олардың көбеймеси деп аталатуғын жалғыз анықланған сан табылады ҳәм $a \cdot b$ көринисте жазылады.
		В	$\forall a, b \in \mathbf{R}$ ушын олардың көбеймеси деп $a \cdot b$ көринистеги санға айтамыз.

Киши модуллардың оқыў шынығыўы түри ҳәм типи, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл ҳәм методлар

2.1.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисиў, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.

Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, айтып бериў, иллюстрация, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке ҳалатта, топарлар менен, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедмия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	Жазба жумыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

**Киши модулардың педагогикалық процесссте
пайдаланылатуғын информация-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

2.1.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыў шынығыўлардың жойбарлары.

2. ЕКІНШІ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКІНШІ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Санлы көпліктердің шекаралары. Ғажайып санлар көплігінің толықлығы ғажайындағы теорема

Киші модульдер:

1. Санлы көпліктердің шекаралары;
2. Ғажайып санлар көплігінің толықлығы ғажайындағы теорема;
3. Екінші үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Бірінші кіші модуль: Санлы көпліктердің шекаралары

Анықлама. Егер $\forall E \subset R \exists b : \forall x \in E \ x \leq b$ болса E көплігі жоғарыдан шектелген. b саны E ні жоғарыдан шектелейтуғын сан болады.

$E \subset R$ көплігі жоғарыдан шектелген $\forall b \in R$
($\exists x \in E$) $x > b$.

Егер b саны E көплігі жоғарыдан шектелейтуғын болса, бұндай жағдайда $\forall x \in E \Rightarrow x \leq b$ хәм $b < b'$ саны үшін $\forall x' \in E \ x' \leq b'$ теңсізлігі орынлы, бұл жағдайда b' саны да E -көплігін жоғарыдан шектелейді.

Егер E көпліктегі барлық санлардан кіші болмаған b саны бар болса, яғни $b \in E$ болып, $\forall x \in E \Rightarrow x \leq b$ орынлы болса, онда $b = \max E$ -ең үлкен сан. Бұндай сан жалғыз.

Үздіксіздік қасиеті

Анықлама: $A \subset R$ хәм $B \subset R$ екі көплік R ғажайып санлар көплігінің кесімі деп атаймыз, егер

1⁰. $A \cup B = R$

2⁰. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

3⁰. $\forall a \in A$ саны хәм $\forall a \in B$ саны үшін $a < b$ болады.

1⁰ қасиет. Ғәр бір ғажайып санның A ямаса B көпліктерінің тек біреуіне тийіс екенлігін аңлатады.

3⁰ қасиеттен $A \cap B = \emptyset$. Ғажайықаттан да егер $x \in A \cap B$ элементи бар болғанда $x \in A$ хәм $x' \in B$ болып, 3⁰-қасиеттен надурыс $x < x'$ теңсізлігі келіп шығатуғын еді.

A хәм B көплеклери арқалы анықланған хақықый санлар көплеклердин кесилисиүйи $\frac{A}{B}$ арқалы белгиленеди.

A кесилисиүйиниң төменги класс, B кесилисиүйиниң жоқарғы класы деп аталады.

Мысал. Қәлеген бир $\alpha \in R$ саны сайлап алынады. Алдын A көплигине $x \leq \alpha$ теңсизликти қанаатландыратуғын барлық санларды киритемиз, B ға $y > \alpha$ санларды киритемиз:

яғный

$$A = \{x : x \leq \alpha\}, B = \{y : y > \alpha\} \quad (1)$$

Бундай анықланған A хәм B көплеклери хақықый санлар көплиги кесилисиүйин анықлайды.

1^0 -3⁰ қәсийетти тексерий

$$1^0. 1) A \cup B = R$$

$$2) A = \{x : x < \alpha\}; B = \{y : y \geq \alpha\} \quad (2)$$

(1) хәм (2) формулаларда да кесим α саны арқалы анықланады, яғный

$$\alpha = \frac{A}{B}$$

Кесимниң 2 қәсийети:

1^0 . (1) де A көплигинде ең үлкен сан бар, B да ең киши сан жоқ.

(2) формулада A -да ең үлкен сан жоқ, B -да ең киши сан бар хәм ол α ға тең.

Дәлиллениүйи. (1) формуланы қараймыз. α санының A көплекте ең үлкени екенлиги A көплекти анықлайтуғын (1) формуладан көринип турыпты. B да ең киши элемент жоқ екенлигин дәлиллеймиз.

Мейли, керисинше B да ең киши элемент бар деп ойлайық хәм оны β арқалы белгилеймиз, $\beta \in B$ болғанлығы ушын $\alpha < \beta$ болады. Онда

$$\alpha + \alpha < \beta + \alpha \Rightarrow \alpha < \frac{\beta + \alpha}{2} \Rightarrow \frac{\beta + \alpha}{2} \in \beta.$$

$$\text{Енди } \alpha + \beta < \beta + \beta \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \in A.$$

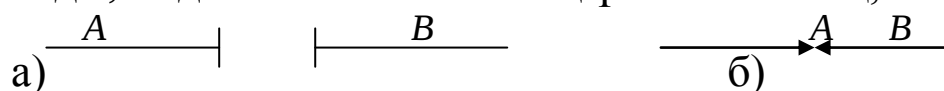
Бул қарама-қарсылық тастыйықлаўды дәлиллейди.

Хақыйқый санлар көплигиниң үзликсизлик қәсийети бул көпликте базы бир сан арқалы кесилисиўден басқа кесилисиўиниң болмайтуғынын аңлатады.

Екинши киши модуль: Хақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ҳаққындағы теорема

Үзликсизлик қәсийети. Хақыйқый санлар көплиги ҳәр бир $\frac{A}{B}$ кесилисиўи ушын ҳәм бул кесилисиўди әмелге асыратуғын α саны бар, яғный $\alpha = \frac{A}{B}$.

Бул сан кесимниң анықламаға сәйкес яки төменги класындағы ең үлкен сан болады, бундай шәрайтта жоқарғы класта ең киши сан жоқ яки жоқарғы класта ең киши сан болады, онда төменги класта ең үлкен сан жоқ, яғный



Хақыйқый санлар көплигиниң бул үзликсизлик қәсийети Дедекиндиниң үзликсизлик принципи деп аталады.

Дедекин (1831-1916)-немис математиги.

Теорема 1. Қәлеген шегараланған бос емес көплек анық жоқарғы шегараға ийе.

Мейли E жоқарыдан шегараланған көплек болсын. Шегараланған көплек $\emptyset \neq E \subset R$. B арқалы E -ни жоқарыдан шегаралап турған санлар көплигин белгилеп A -арқалы қалған хақыйқый санлар көплигин белгилеймиз. Енди A ҳәм B көплеклериниң хақыйқый санлар көплигиниң кесими болатуғынлығын көрсетемиз.

Хақыйқаттан A көплиги B -ға кирмейтуғын барлық санлардан турады, соның ушын

$$A \cup B = R \quad (1)$$

болады.

E -көплиги жоқарыдан шегараланған соның ушын A көплигин жоқарыдан шегаралайтуғын b саны бар болады. Онда B көплигин анықлаў усылына тийкарланып, $b \in B$ деп жазыў мүмкин, яғный

$$B \neq \emptyset \quad (2)$$

Енди A ның бос емес екенлигин дәлиллеймиз. Шәрт бойынша E көплиги бос емес. Онда ҳеш болмағанда бир x саны бар болады да $x \in E$ болады. Демек, $x-1$ саны A көплигин жоқарыдан шегаралай алмайды, себеби, $x-1 < x, x \in E$. Солай етип, E көплигинде $x-1$ ден үлкен x элементи бар екен. Онда $x-1 \notin B$, себеби B, E көплигин жоқарыдан шегаралап турған санлардан ибарат.

Онда $x-1 \in A$, себеби A -ға B көплигине кирмейтуғын барлық санлар тийисли.

Демек,

$$A \neq \emptyset \quad (3)$$

Енди $\forall a \in A$ саны $\forall b \in B$ санынан киши екенлигин көрсетеди.

$$a < b \quad (4)$$

Мейли, керисинше сондай $\forall a \in A$ хәм $\forall b \in B$ санлары бар болып $a \geq b$ теңсизлиги орынлы деп ойлап қарайық.

b саны E көплигин жоқарыдан шегаралайтуғын болғаны ушын $a \geq b$ теңсизлигинен a саны да E көплигин жоқарыдан шегаралайды деген нәтийжеге келемиз. Онда $a \in B$ болыуы керек. Онда a саны бир ўақытта A ға да V ға да тийисли болғанын көремиз. Бундай болыуы мүмкин емес, себеби A көплиги V ға кирмейтуғын санлардан дүзилген.

Бул қарама-қарсылық $a \geq b$ теңсизлиги $a \in A, b \in B$ шәрти орынлы болмайтуғынын көрсетеди. Онда $a < b \quad \forall a \in A$ хәм $a \in A, b \in B$ теңсизлиги туўры болады.

$$A \neq \emptyset \text{ хәм } a < b \quad \forall a \in A \quad a \in A, b \in B$$

(1)-(4) шәртлериниң орынланыуы A хәм V көплеклери ҳақыйқаттан кесим пайда болыуын көрсетеди.

Мейли β саны бул кесим пайда ететуғын сан болсын, яғный $\beta = \frac{A}{B}$. Сондай β саны бар болады. Дедикинд принципи.

Енди бул β саны E көплекти жоқарыдан шегаралап туратуғынлығын көрсетеди. Егер бундай болмағанда, $x \in E$ саны бар болар еди хәм $x > \beta$ теңсизлиги орынлы болар еди. y санын $\beta < y < x$ теңсизликти қанаатландыратуғындай етип сайлап алыу керек.

Онда $y > \beta$ хәм $\beta = \frac{A}{B}$ болғанлығы ушын $y \in B$ болады. Онда $y \in E$ көпликті жоқарыдан шегаралайды деген нәтиже келип шығады. Бундай болыуы мүмкін емес, себеби $y < x \in E$, онда y саны E көплигін жоқарыдан шегаралауы мүмкін емес. Бул қарама-қарсылық β -ның E көплигін жоқарыдан шегаралайтуғылығын көрсетеді хәм сол себепли $\beta \in B$.

$\beta = \frac{A}{B}$ болғанлығы ушын β саны $\max A = \beta$, егер $\beta \in A$ болса, яки $\min B = \beta$, егер $\beta \in B$ болса, болады. Бизде $\beta \in B$ сол себепли $\beta = \min B$, яғный E көпликті жоқарыдан шегаралап тұрған санлардың ең кишиси. Онда $\beta = \sup E$ болады.

Архимед қәсийети

Теорема 2. $\forall a \in R$ саны ушын $n > a$ теңсизлигін қанаатландыратуғын $n \in N$ саны бар болады.

$$(\forall a \in R)(\exists n \in N): n > a$$

Мейли, Архимед қәсийети орынланбасын. Онда $a \in R$ саны бар болып, $\forall n \in N$ ушын $n \leq a$ теңсизлиги орынлы $(\forall a \in R)(\exists n \in N): n > a$

Бул $a \in R$ саны натурал санлар көплигін жоқарыдан шегаралайтуғынлығын аңлатады. Онда натурал санлар көплиги жоқарыдан шегараланған көплек сыпатында анық жоқарғы шегараға ийе болады. Оны β арқалы белгилеп, $\beta = \sup N$ $\beta - 1 < \beta$ болғанлығы ушын $\beta - 1 < \beta$ шәртин қанаатландырыушы n натурал саны бар болады. Онда $\beta < n + 1$. Онда β, N ушын $\sup$ бола алмайды. Демек, Архимед қәсийети дұрыс.

Лемма. a хәм b санлары $0 < a < b$ қандай болмасын $n \in N$ саны бар болып, $n \cdot a > b$ теңсизлиги орынланады. $\frac{b}{a}$ саны ушын $n \in N$ саны бар болып, $n > \frac{b}{a}$ орынлы болады. Онда $n \cdot a > b$.

Ишпе-иш жайласқан сегментлер принципі.

Анықлама. $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n], \dots$ сегментлери ишпе-иш жайласқан деп аталады, егер

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_2 \leq b_1 \quad (1)$$

теңсизлиги орынлы болса, яғный $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

Теорема 3. Қалеген ишпе-иш жайласқан сегментлер системасы ушын олардың хәммесине тийисли болған ең кеминде бир ноқат бар болады.

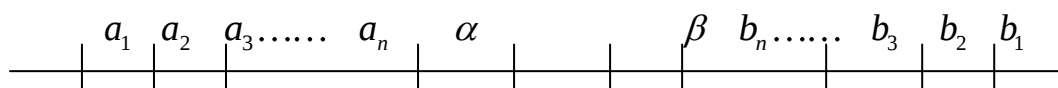
Кантор мәнисиндеги үзликсизлик.

$\Omega = \{[a_n, b_n]\}$ Ишпе-иш жайласқан сегментлер системасы.

Дәлилленйи: Мейли, $\Omega = \{[a_n, b_n]\}$ ишпе-иш жайласқан сегментлер системасы берилген болсын. $\{a_n\}$ Бул сегментлердин шеп жағындағы шетиниң көплиги, $\{b_n\}$ -оң жағындағы шетиниң көплиги. (1) теңсизлигинен $\{a_n\}$ көплигиниң жоқарыдан шегараланғанлығы келип шығады (мәселен b_1 саны $\{a_n\}$ -ди жоқарыдан шегаралайды).

Соның ушын анық жоқарғы шегараның бар болыуы хаққындағы теоремадан $\{a_n\}$ ушын анық жоқарғы шегара бар

$$\alpha = \sup \{a_n\} \quad (2)$$



$\{b_n\}$ көплигиниң қалеген элементи $\{a_n\}$ көплигин жоқарыдан шегаралайды, α оның анық жоқарғы шегарасы болғанлығы ушын

$$\alpha \leq b_n, \quad \forall n \in N \quad (3)$$

теңсизлиги орынлы. (3) теңсизлик сегментлердин оң жағындағы шетлер көплиги төменнен шегараланған екенлигин аңлатады хәм сол себепли $\{b_n\}$ көплигиниң анық төменги шегарасы бар болады.

$$\beta = \inf \{b_n\} \quad (4)$$

Енди $\alpha, \{b_n\}$ көплекти төменнен шегаралайды, ал $\beta, \{a_n\}$ көплекти төменнен шегаралайтуғын ең үлкен сан, Онда $\alpha \leq \beta$. Сол себепли $n = 1, 2, \dots$ натурал санлары ушын

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n \quad (5)$$

теңсизилиги орынлы. Бул болса, $[\alpha, \beta]$ сегменттеги қалеген ноқат Ω -ға киретуғын барлық кесиндиге тийисли болады

яғный егер $a_n, n=1,2,\dots$ теңсізлігінен $\forall n \in N$ үшін $a_n \leq x \leq b_n$ теңсізлігі орынлы болады. Теорема дәлилленді.

Ескертиў: Теореманы дәлиллеў барасында

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \supset [\alpha, \beta] \quad (6)$$

екенлігі көрсетилді.

Анықлама. Мейли, $[a_n, b_n], a_n \in R, b_n \in R, n=1,2,\dots$ болсын. $b_n - a_n$ ұзынлығы нольге умтылады, егер $\forall \varepsilon > 0$ бундай n_ε номерли кесинди бар болып, $n \geq n_\varepsilon$ теңсізлігін қанаатлантауғын номерге ийе кесиндилер үшін $b_n - a_n < \varepsilon$ теңсізлігі орынлы болса.

Екинши үлкен модул қурамындағы екинши орта модулдың улыўма мақсети

2.2.1-кесте

Санлы көплеклер, санлы көплеклердің шегаралары хәм оның қәсийетлерин хәм де ҳақыйқый санларды геометриялық сүүретлеў хәм ҳақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ҳаққындағы теореманы дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атлары хәм мақсетлери

2.2.2-кесте

№	Киши модуллар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Санлы көплеклердің шегаралары.	Санлы көплеклер, санлы көплеклердің шегаралары хәм оның қәсийетлерин студентлерге үйретиў.
2.	Ғақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ҳаққындағы теорема	Ғақыйқый санларды геометриялық сүүретлеў хәм ҳақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ҳаққындағы теореманы дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм оларға
тийкарланып дүзилген бақлаў сораўлары**

2.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Санлы көпликлер, санлы көпликтің түрлери, санлы көпликлердиң шегаралары хәм оның қәсийетлери.	1) Қандай көпликлер санлы көпликлер делинеди? 2) Санлы көпликтің түрлерин айтып бериң. 3) Санлы көпликлердиң шегаралары. 4) Санлы көпликлердиң қәсийетлери.
2.	Ҳақыйқый санлар көплигиниң толықлығы ҳаққындағы теорема.	1) Ҳақыйқый санларды геометриялық сүўретлең. 2) Ҳақыйқый санлар көплигиниң қәсийетлерин айтып бериң. 3) Ҳақыйқый санның дәрежеси. 4) Дедекинд теоремасы не ҳаққында?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

2.2.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Қатнаслар қайсы жуўапта дурыс берилген?	А	$N \subset Q \subset Z \subset R$
		Б	$Z \subset N \subset Q \subset R$
		В	$N \subset Z \subset Q \subset R$
2.	Санлы көпликтің түрлери қайсы жуўапта дурыс келтирилген.	А	Сегмент, интервал, ярым интервал.
		Б	Сегмент, интервал, ярым сегмент.

		В	Сегмент, ярым интервал, ярым сегмент.
3.	Қандай көплік шегараланған делинеді?	А	Егер көплік төменнен хәм жоқарыдан шегараланған болса.
		Б	Егер көплік тек төменнен шегараланған болса.
		В	Егер көплік тек жоқарыдан шегараланған болса.
4.	Жоқарыдан шегараланған көпликтің, жоқарғы шегараларының ең кишиси не деп аталады?	А	Көпликтің дәл төменги шегарасы.
		Б	Көпликтің төменги шегарасы.
		В	Көпликтің дәл жоқарғы шегарасы.
5.	Көплікте $\sup$ хәм $\inf$ лар нени аңлатады?	А	Көпликтің дәл жоқарғы хәм анық төменги шегарасын.
		Б	Көпликтің жоқарғы хәм төменги шегарасын.
		В	Көпликтің дәл төменги хәм жоқарғы шегарасын.
6.	$\{x: x \in R, a < x < b\}$ көринисіндеги көплік не деп аталады?	А	Сегмент.
		Б	Интервал.
		В	Ярым сегмент.
7.	Дедекинд теоремасы не хәкқында?	А	Хәкыйқый санлар көплигиниң тығызлығы хәкқында.
		Б	Хәкыйқый санлар көплигиниң избе-излиги хәкқында.
		В	Хәкыйқый санлар көплигиниң толықлығы хәкқында.
8.	нени аңлатады?	А	х хәм у ноқатлары арасындағы аралығын.

		Б	Әпиұайы теңлік.
		В	х хәм у ноқатлары арасындағы узынлық.
9.	Қәлеген шегараланған бос емес көплик ... шегараға ийе.	А	Анық жоқарғы.
		Б	Анық төменги.
		В	Жоқарғы хәм төменги.
10.	$\forall a \in \mathbf{R}$ саны ушын $n > a$ теңсизлигин қанаатландыратуғын $n \in N$ саны бар болады. $(\forall a \in \mathbf{R})(\exists n \in N): n > a$ Кимге тийисли?	А	Хеш кимге.
		Б	Архимед қәсийети.
		В	Дедекинд теоремасы.

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри хәм типи, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

2.2.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисиў, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке ҳалда, топарлар менен, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	Жазба жұмыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

**Киши модуллардың педагогикалық процессте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

2.2.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыў шынығыўлардың жойбар- лары.

III. ҮШИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Санлы избе-изликлердің лимити

(3 лекция модули, 4 әмелий шынығыу модули)

1. ҮШИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Санлар избе-излигинің лимити. Жыйнақлы избе-изликлердің қасиетлери хәм олар үстінде орынланатуғын арифметикалық әмеллер

Киши модулар:

1. Санлар избе-излигинің лимити;
2. Жыйнақлы избе-изликлердің қасиетлери;
3. Жыйнақлы избе-изликлер үстінде арифметикалық әмеллер;
4. Үшінши үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Санлар избе-излигинің лимити

1-анықлама. Егер натурал санлар қатары-

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots \quad (1)$$

ның хәр бир элементи n ға, хакыйқый сан x сәйкес келтирилген болса,

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (2)$$

хакыйқый санлар көплиги **санлы избе-изликлер** делинеди.

Бул жерде $x_n - n$ - элемент яки ағза делинеди.

2-анықлама. Избе-изликтің n -ағзасы оның **улыуа ағзасы** делинеди.

Мәселен, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ төмендеги избе-изликти аңлатады.

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \quad (3)$$

Избе – изликтің анықланыуынан көринеди, избе – излик натурал санлар көплигинде берилген $y = f(x)$ функция болып есапланады. Соның ушын избе – излик натурал аргументли функция деп те жүритиледи.

Шексиз санлы избе – изликлер хәр түрли усылларда берилиуи мүмкин. Бул усыллардан айрымларын келтирип өтиуимиз мүмкин.

Избе – изликтің улыўма ағза формуласы менен **берилиўи**. Бул усылда n -ағзаның мәнисин бул ағзаның тәртип номери менен байланыстырыўшы формула бериледи. Улыўма ағза формуласы жәрдемінде избе-изликтің қәлеген ағзасын табыў мүмкин, яғный бул формула избе-изликти толық анықлайды.

Избе-изликтің өз ағзасы тәртип номери менен бул ағзаның мәниси арасындағы сәйкесликти сөзлер арқалы аңлатып бериў мүмкин.

Избе-изликтің рекуррент усылда берилиўи. Егер избе-изликтің дәслепки бир яки бир неше ағзалары берилген болып, кейинги ағзаларын усы берилген ағзалар жәрдемінде табыў мүмкиншилигин бериўши формула көрсетилген болса, избе-излик рекуррент усылда берилген делинеди.

Рекуррент сөзи **латын тилинде қайтыў** деген мәнисти береді.

Избе-излик кесте яки графикалық көринисте де берилиўи мүмкин. Избе-изликтің графиги дискрет ноқатлар көплигинен ибарат болады.

Егер избе-изликтің дәслепки бир неше ағзалары берилген болып, кейинги ағзаларды берилген ағзалар арқалы аңлатыў усылы айтылмаған болса, бул ағзалардың берилиўи избе-изликтің толық анықланыўы ушын жетерли болмайды.

1-Мысал: 3;5;7;... избе-изликти екиден үлкен тақ санлар яки екиден үлкен әпиўайы санлар избе-излиги сыпатында, сондай-ақ, $x_n = 2n + 1 + \sin \pi n$ формула менен берилген избе-излик сыпатында қараў мүмкин.

2-мысал: $a_1 = 3, a_n = 2^n \cdot a_{n-1} - 4 \quad (n \geq 2)$ болса, $\{a_n\}$ избе-изликтің a_2, a_3, a_4 ағзалары табылсын.

Шешим: Бул жерде $\{a_n\}$ избе-излик рекуррент усылда берилген. $a_1 = 3$ болғаны ушын рекуррент формула жәрдемінде $a_n = 2^n \cdot a_{n-1} - 4$

$$a_2 = 2^2 \cdot a_1 - 4 = 4 \cdot 3 - 4 = 8$$

$$a_3 = 2^3 \cdot a_2 - 4 = 8 \cdot 8 - 4 = 60$$

$$a_4 = 2^4 \cdot a_3 - 4 = 16 \cdot 60 - 4 = 956$$

екенлигин табамыз.

Санлы ізбе-ізіліктер үстінде төмендегі әмеллерді орынлау мүмкін.

$$1) \{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$$

$$2) a \cdot \{x_n\} = \{a \cdot x_n\} \text{ } a\text{-қәлеген}$$

$$3) \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$$

$$4) \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}, y_n \neq 0$$

Егер (3.1.2) ізбе-ізіліктің қәлеген ағзасы $x_n \leq M$ ($x_n \geq M$) болса, ол **жоқарыдан (төменнен) шегараланған** делинеді.

Мәселен, (3.1.3) ізбе-ізілік үшін $x_n \leq 1$ хәм соның менен бирге $x_n > 0$ болып, хәм жоқарыдан хәм төменнен шегараланған. Бундай қатарлар **шегараланған** делинеді.

Мәселен: 1) $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ — төменнен шегараланған.

2) $-1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$ — жоқарыдан шегараланған.

3-анықлама. Егер қәлеген киши $\varepsilon > 0$ үшін бундай N номер табыу мүмкін болып, барлық $n > N$ лар үшін

$$|a_n| < \varepsilon$$

теңсізліктер орынланса, $\{a_n\}$ **шексіз киши ізбе-ізілік** делинеді.

4-анықлама. Егер қәлеген $A > 0$ сан үшін бундай N номер табыу мүмкін болып, $n > N$ лар үшін

$$|x_n| > A$$

теңсізлік орынланса, $\{x_n\}$ **шексіз үлкен ізбе-ізілік** делинеді.

Мысаллар: 1) $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ - шексіз киши ізбе-ізілік.

2) $\{x_n\} = n^2 + 1$ - шексіз үлкен ізбе-ізілік.

Екинши киши модуль: Жыйнақлы избе-изликлердин қәсийетлери

1-қәсийет. Шекли сандағы шексиз киши избе-изликлер қосындысы шексиз киши избе-излик болады.

2-қәсийет. Шексиз киши избе-изликтің турақлы санға көбеймеси шексиз киши избе-излик болады.

3-қәсийет. Шексиз киши избе-изликлер көбеймеси шексиз киши избе-излик болады.

4-қәсийет. Шексиз киши избе-изликке қарама-қарсы избе-излик шексиз үлкен избе-излик болады, яғный $\{x_n\}$ шексиз киши избе-излик болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ шексиз үлкен избе-излик болады.

5-анықлама. Егер қәлеген киши $\varepsilon > 0$ сан ушын бундай n номер табыў мүмкин болып, барлық $n > N$ лар ушын

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (4)$$

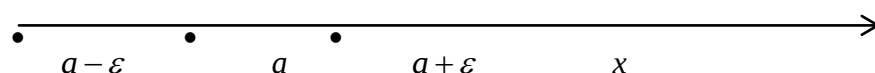
теңсизлик орынланса, a саны $\{x_n\}$ избе-изликтің лимити делинеди хәм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (5)$$

түринде жазылады.

(4) ни төмендегише жазыў мүмкин.

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ ЯКИ } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$



избе-изликтің ағзалары қәлеген $n > N$ нан баслап $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$ кесиндиде жатады, яғный бул кесиндиде избе-изликтің шексиз көп ағзалары жатады.

6-анықлама. Егер $\{x_n\}$ избе-излик шекли лимитке ийе болса, онда жыйнақлы избе-излик кери жағдайда таралыўшы избе-излик делинеди.

Дәлилленіўи. $\{x_n\}$ избе-излик 2, a хәм b лимитке ийе болсын деп ойлап қарайық, бул жағдайда

$$x_n = a + \alpha_n, \quad x_n = b + \beta_n$$

теңликлер орынлы болады, бул жерде α_n, β_n - шексиз киши избе-изликлер. Бул теңликлерди өз-ара айырамыз. Нәтийжеде

$$a - b = -\alpha_n + \beta_n$$

пайда болады. Бул теңликтің лимитін табамыз.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a - b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha_n + \beta_n) = 0$$

Буннан $a = b$ екенлігі келип шығады. Теорема дәлилленді.

Үшінші киші модул: Жыйнақлы избе-изликлер үстінде арифметикалық әмеллер

Теорема-1. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болса, бул жағдайда $\{x_n\}$ избе–излик a сан менен шексиз киші избе-изликтің қосындысы көринисінде сұўретленеди хәм керисинше, егер $\{x_n\}$ избе–изликті a сан менен шексиз киші избе-изликтің қосындысы көринисінде сұўретлеў мүмкин болса, бул жағдайда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ болады.

1-нәтийже. α_n избе-излик шексиз киші избе-излик болса, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ болады.

2-нәтийже. Турақлы избе-изликтің лимиті өзіне тең $\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$ болады.

Теорема-2. Егер $\{x_n\}$ избе–излик лимитке ийе болса, бул лимит жалғыз болады.

Теорема-3. Егер избе–излик лимитке ийе болса, бул жағдайда ол шегараланған избе-излик болады.

Теорема-4. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ болса, онда $\{x_n + y_n\}$ избе–излик хәм лимитке ийе хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ теңлик орынлы.

Теорема-5. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ болса, онда $\{x_n \cdot y_n\}$ избе–излик лимитке ийе хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ теңлик орынланады.

Теорема-6. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ болып, $b \neq 0$ болса, онда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ избе-излик n ниң қәлеген мәнисинен баслап мәниске ийе $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ болады.

1-нәтийже. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

2-нәтижесі. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, (c = \text{const})$

3-нәтижесі. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^k, (k - \text{натурал сан})$

Теорема. Егер $x_n \leq y_n \leq z_n$ болып, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ болса, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ болады.

Төртінші киші модуль: үшінші үлкен модульдің бірінші орта модуль жойбары

Үшінші үлкен модуль құрамындағы бірінші орта модульдің ұлыма мақсесі

3.1.1-кесте

Санлар ізбе-излигі хәм оның лимитин, жыйнақлы ізбе-изликлердің қасиетлерин дәлиллей хәм студентлерге жыйнақлы ізбе-изликлер үстинде арифметикалық әмеллердің орынланыўын мысаллар жәрдемінде түсиндирий.
--

Бірінші орта модульдің киші модульларының атлары хәм мақсетлери

3.1.2-кесте

№	Киші модуль аты	Киші модульдардың мақсетлери
1.	Санлар ізбе-излигининг лимити.	Санлар ізбе-излиги, санлы ізбе-изликтинг ұлыма ағзасы, шегараланған хәм шегараланбаған ізбе-изликлер ҳаққында хәм санлар ізбе-излиги лимитин есаплаўды студентлерге түсиндирий.
2.	Жыйнақлы ізбе-изликлердің қасиетлери.	Жыйнақлы ізбе-изликлер, шексиз киші хәм шексиз үлкен ізбе-изликлер, жыйнақлы ізбе-изликлердің қасиетлерин дәлиллей хәм студентлерге толық студентлерге үйретий.
3.	Жыйнақлы ізбе-изликлер	Жыйнақлы ізбе-изликлер үстинде арифметикалық әмеллерди орынлаў

	үстінде арифметикалық әмеллер.	хәм студентлерге түсиндирий.	мысаллар жәрдемінде
--	--------------------------------------	---------------------------------	------------------------

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

3.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Санлар избе-излиги, санлы избе-изликтің улыўма ағзасы, шегараланған хәм шегараланбаған избе- изликлер, санлар избе- излиги лимити.	1. Санлы избе-излик деп неге айтылады? 2. Избе-изликтің улыўма ағзасы не? 3. Санлы избе-изликлер үстінде кандай әмеллер орынланады? 4. Избе-излик функция ма? – функция болса қандай? 5. Қандай шәртлер орынланса, кандай избе-излик шегараланған избе-излик делинеди? 6. Шегараланбаған избе-изликте кандай шәрт орынланады? 7. Избе-изликтің лимитине анық- лама берің.
2.	Жыйнақлы избе- изликлер, шексиз киши хәм шексиз үлкен избе- изликлер, жыйнақлы избе-изликлердің қәсийетлери.	1. Жыйнақлы избе-изликке анық- лама берің. 2. Шексиз киши хәм шексиз үлкен избе-изликлердің анық- ламасы. 3. Шексиз киши избе-изликлер- дің қәсийетлери. 4. Жыйнақлы избе-изликлердің қәсийетлери.
3.	Жыйнақлы избе- изликлер үстінде арифметикалық әмеллер.	1. Жыйнақлы избе-изликлердің қосындысы жыйнақлы бола ма? 2. $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-изликлери жыйнақлы болса $\{x_n y_n\}$ избе-излик те жыйнақлы болады хәм және кандай формула орынлы?

		3. Жыйнақлы ізбе-изликтердің қатнасының лимиті неге тең? 4. Жыйнақлы ізбе-изликтер үстінде қандай арифметикалық әмеллер орынланыуы мүмкін?
--	--	---

Ескертиу: Киші модульдардағы бақылау сұрауларынан студенттер өз бетінше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

1.4. Киші модульдардың бақылау сұраулары тийкарында дүзілген тест

3.1.4-кесте

№	Сұраулар	Мүмкін болған жауаптар	
1.	Ізбе-изликтің улыўма ағзасы не?	А	Ізбе-изликтің n -ағзасы оның улыўма ағзасы делинеди.
		Б	Ізбе-изликтің ақырғы ағзасы оның улыўма ағзасы делинеди.
		В	Ізбе-изликтің улыўма ағзасы болмаған.
2.	Ізбе-излик функция ма? – функция болса қандай?	А	Ізбе-излик функция емес.
		Б	Ізбе–излик натурал санлар көплигинде берілген функция. Ол натурал аргументли функция делинеди.
		В	Ізбе–излик ҳақыйқый санлар көплигинде берілген функция. Ол натурал аргументли функция делинеди.
3.	Қандай шәртлер орынланса, қандай ізбе-излик шегараланған ізбе-излик делинеди?	А	$\{x_n\}$ ізбе–излик ушын a ҳәм b ҳақыйқый санлар табылып, барлық n натурал санлар ушын $a \leq x < b$ шәрт орынланады.
		Б	$\{x_n\}$ ізбе–излик ушын a ҳәм b ҳақыйқый санлар табылып, барлық n натурал санлар ушын $a < x \leq b$ шәрт орынланады.
		В	$\{x_n\}$ ізбе–излик ушын a ҳәм b ҳақыйқый санлар табылып, барлық

			n натурал санлар ушын $a \leq x \leq b$ шәрт орынланады.
4.	Шегараланбаған избе-изликте қандай шәрт орынланады?	А	Қәлеген $M > 0$ сан ушын сондай бир N натурал сан табылып, $ x_n > M$ шәрт орынланады.
		Б	Избе-изликтің қәлеген ағзасы $x_n \leq M$ болса.
		В	Избе-изликтің қәлеген ағзасы $x_n \geq M$ болса.
5.	Жыйнақлы избе- изликке анықлама бериң.	А	Избе-излик шекли лимитке ийе болмаса, онда жыйнақлы избе-излик.
		Б	Избе-излик шекли лимитке ийе болса, ол жыйнақлы избе-излик.
		В	Избе-изликтің қәлеген ағзасы $x_n \geq M$ болса, онда ол жыйнақлы избе-излик.
6.	Избе-излик лимитке ийе болса, шегараланған ба?	А	$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$
		Б	$-\varepsilon < x_n < \varepsilon$
		В	$a < x_n < a$
7.	α_n избе-излик шексиз киши избе- излик болса, ... болады.	А	$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$
		Б	Оның лимити жоқ.
		В	$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = C$
8.	Турақлы избе- изликтің лимити неге тең?	А	Анықланбаған.
		Б	$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C$
		В	$\lim_{n \rightarrow \infty} C = 0$
9.	Шекли сандағы шексиз киши избе- изликлер қосындысы неге тең?	А	Шексиз үлкен избе-излик болады.
		Б	Анықланбаған.
		В	Шексиз киши избе-излик болады.
10.	Шексиз киши избе-изликке қарама-қарсы избе-излик қандай болады?	А	Анықланбаған.
		Б	Шексиз үлкен избе-излик болады
		В	Шексиз киши избе-излик болады.

**Киши модуллардың оқыу шынығыу түри, онда
қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар**

3.1.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимларни ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, иллюстрация, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазуу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке ҳалда, топарлар менен, массалық.
Оқытуу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

**Киши модуллардың педагогикалық процесссте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

3.1.6-кесте

Оқытуудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модуллар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс хәм көрсетели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери.

2. ҮШИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Шексиз үлкен шамалар. Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланыслар.

Анық емес аңлатпалар.

Избе-изликтің жоқарғы хәм төменгі лимитлери

Киши модулар:

1. Шексиз үлкен шамалар. Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланыслар;
2. Анық емес аңлатпалар;
3. Үшінші үлкен модульдың екінші орта модуль жойбары.

Бирінші киши модуль: Шексиз үлкен шамалар. Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланыслар

Қәлеген $\{x_n\}$ избе-излик берілген болсын.

Анықлама. Егер хәр қандай оң M сан берілгенде де сондай $n_0 \in N$ сан бар болып, барлық $n > n_0$ лар ушын

$$|x_n| > M$$

теңсизлиги орынлы болса, x_n **өзгериўши шексиз үлкен шама** деп аталады, тийисли $\{x_n\}$ шексиз үлкен избе-излик делинеди.

Демек, шексиз үлкен шама өзгериўши шама болып, бул өзгериў процессинде абсолют мәниси бойынша алдыннан берілген хәр қандай оң саннан үлкен болады.

Бизге мәлим, шексиз үлкен шамалар шекли лимитке ийе емес.

Егер қәлеген M сан алынғанда хәм сондай $n_0 \in N$ сан табылса, барлық $n > n_0$ лар ушын $x_n > M$ ($x_n < -M$) болса, $\{x_n\}$ избе-изликтің лимити $\infty(-\infty)$ деп алынады хәм $\lim x_n = \infty$ ($\lim x_n = -\infty$) түрінде жазылады.

Егер избе-изликтің лимити шексиз болса, оны таралыўшы избе-излик деп қараймыз. Мәселен, усы $\{-n\}, \{n\}$ избе-изликлер шексиз үлкен болыўы анық. Олардың лимити сәйкес түрде $-\infty$ хәм ∞ болады.

Ескертиў: Хәр қандай шексиз үлкен избе-излик шегараланған избе-излик. Бирақ хәр қандай шегараланбаған избе-излик шексиз үлкен болыўы шәрт емес.

Мәселен: $1, 1^2, 1, 2^2, 1, 3^2, \dots, 1, n^2, 1, \dots$ избе-излик шегараланбаған болып, шексиз үлкен емес.

Енди шексиз үлкен хәм де шексиз киши шамалар арасындағы байланысты аңлататуғын әпиўайы теореманы келтиремиз.

Теорема. Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз үлкен болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик шексиз киши болады.

Дәлилленйи. Қәлеген $\varepsilon > 0$ санды алайық, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз үлкен болғаны ушын $M = \frac{1}{\varepsilon}$ деп алынғанда да сондай $n_0 \in N$ сан бар, барлық $n > n_0$ лар ушын $|x_n| > M$ болады.

Демек, барлық $n > n_0$ лар ушын $\{x_n\} > \frac{1}{\varepsilon}$ болып, буннан $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$ болыўы келип шығады. Бул болса $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излигиниң шексиз киши екенин билдиреди. Теорема дәлилленди.

Теорема. Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз киши болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик шексиз үлкен болады.

Екинши киши модул: Анық емес аңлатпалар

$\{x_n\}, \{y_n\}$ избе-изликлер берилген болсын. Бул лимитлер ушын төмендеги

1) $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-излик лимитлери шекли,

2) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ($y_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$) избе-изликтің лимитине тийисли

анықламада $\lim y_n \neq 0$ шәртлер орынланбаған жағдайдағы избе-изликтің характерин үйренемиз.

1. $\frac{0}{0}$ көринистеги анық емеслик. $\lim x_n = 0, \lim y_n = 0$ болсын $\{x_n\}$

хәм $\{y_n\}$ избе-изликлерден дүзилген $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ избе-изликтің

характери $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-изликлерден хәр бириниң нольге

қандай умтылыуына қарап түрліше болыуы мүмкін. Буны төмендеги мысалларда көреміз.

1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ хәм $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ізбе-изликлердің лимитлери нольге тең екенлиги белгили. Енди $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ізбе-изликти дүзейик.

$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \{n\}$. Демек, $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

2) $\{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ хәм $\{y_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}$ ізбе-изликлердің лимитлери нольге тең. Бул ізбе-изликлерден дүзилген $\left\{\frac{(-1)^n}{2}\right\}$ ізбе-излик лимитке ийе емес.

3) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ хәм $\{y_n\} = \left\{\frac{5}{n^2}\right\}$ ізбе-изликлерден хәр биринің лимити нольге тең болып, бул ізбе-изликлерден дүзилген $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{1}{5}$ ізбе-излик ушын $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{5}$ болады.

$x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ болғанда $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ізбе-изликтің характерин анықлау анық емесликти ашыу делинеди. Биз жоқарыда көрген мысалларға тийисли анық емесликлерди ашып бердик.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ көринистеги анық емеслик $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ ізбе-изликлерден хәр биринің лимити шексиз болсын. $\lim x_n = \infty, \lim y_n = \infty$. Бул жағдайда да $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ізбе-изликтің характери қандай болыуын жоқарыдағыдай етип алдыннан айтып болмайды.

3. $0 \cdot \infty$ көринистеги анық емеслик. $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ ізбе-изликлерден хәр биринің лимити шексиз болсын. $\lim x_n = 0, \lim y_n = \infty$.

4. $\infty - \infty$ көринистеги анық емеслик $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ ізбе-изликлер берилген болып, олар хәр түрли белгисиз шексизликке умтылсын. Мәселен: $\lim x_n = \infty, \lim y_n = -\infty$ десек, бул ізбе-изликлер қосындысынан дүзилген $\{x_n + y_m\}$ ізбе-изликтің характери де хәр түрли болады.

Үшінші киши модуль: Үшінші үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары

Үшінші үлкен модуль құрамындағы екінші орта модульдің ұлыма мақсәти

3.2.1-кесте

Шексиз үлкен, шексиз киши шамалар түсиниклерин хәм бул шамалар арасындағы байланысларды, қандай аңлатпа анық емес болыўын хәм оның түрлерин, избе-изликтин жоқарыдан яки төменнен шегаранғанлығы хәм оның жоқарғы хәм төменги лимитлерин табыўды студентлерге үйретиў.

Биринши орта модульдің киши модуль атлары хәм мақсетлери

3.2.2-кесте

№	Киши модуль аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Шексиз үлкен шамалар. Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланыслар.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар түсиниклерин, шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланысларды студентлерге үйретиў.
2.	Анық емес аңлатпалар.	Қандай аңлатпа анық емес болыўын хәм оның түрлерин студентлерге үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

3.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар, шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасындағы байланыслар.	1) Шексиз үлкен шамалар деп неге айтамыз? 2) Шексиз киши шамалар не? 3) Шексиз үлкен хәм шексиз киши шамалар арасында қандай байланыс бар?
2.	$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ көринисіндеги анық емесликлер.	1) Анық емес аңлатпалардың түрлери қандай? 2) Анық емесликлерды мысаллар жәрдемінде түсидириң хәм анық емесликлерди ашып бериң?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

3.2.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Егер хәр қандай оң M сан берилгенде хәм бундай $n_0 \in N$ сан бар болса, барлық $n > n_0$ лар ушын ... теңсизлиги орынлы болса, x_n өзгериўши шексиз үлкен шама деп аталады.	А	$ x_n > M$
		Б	$ x_n < M$
		В	$m < x_n < M$
2.	Шексиз киши шама не?	А	$\{x_n\}$ избе-излигиниң лимити нольге тең болмаса, x_n

			өзгериўши шексиз киши шама делинеди.
		Б	$\{x_n\}$ избе-излигиниң лимити нольге тең болса, x_n өзгериўши шексиз киши шама делинеди.
		В	$\{x_n\}$ избе-излик лимитке ийе болмаса, x_n өзгериўши шексиз киши шама делинеди.
3.	Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз үлкен болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик ...	А	шексиз үлкен болады.
		Б	жыйнақлы болады.
		В	шексиз киши болады.
4.	Анық емес аңлатпаның түрлери қандай?	А	$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ көринистеги анық емесликлер.
		Б	$0 \cdot \infty, \infty - \infty$ көринистеги анық емесликлер.
		В	А, Б
5.	Избе-изликтің лимити шексиз болса, онда ол ... болады.	А	жыйнақлы избе-излик.
		Б	тарқалыўшы избе-излик.
		В	шексиз үлкен избе-излик.
6.	Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз киши болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик ...	А	шексиз үлкен болады.
		Б	жыйнақлы болады.
		В	шексиз киши болады.
7.	Хәр қандай шексиз үлкен избе-излик ...	А	жыйнақлы избе-излик.
		Б	тарқалыўшы избе-излик.
		В	шегарланған избе-излик.
8.	Хәр қандай шегараланбаған избе-изли ...	А	шексиз үлкен болыўы шәрт емес.
		Б	шексиз киши болыўы шәрт

			емес.
		В	шексиз киши болады.
9.	Шексиз үлкен хәм де шексиз киши шамалар арасындағы байланысты аңлататуғын әпиұайы теорема қайсы жуұапта дурыс?	А	Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз үлкен болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик шексиз киши болады.
		Б	$\{x_n\}$ избе-излик шексиз үлкен болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик шексиз киши болады.
		В	Егер $\forall n \in N$ ушын $x_n \neq 0$ болып, $\{x_n\}$ избе-излик шексиз киши болса, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ избе-излик шексиз киши болады.
10.	$1, 1^2, 1, 2^2, 1, 3^2, \dots, 1, 2^2, 1, 3^2, \dots, 1, n^2, 1$ шегараланған ба?	А	Избе-излик шегараланбаған болып, ол шексиз киши емес.
		Б	Избе-излик шегараланған болып, ол шексиз үлкен емес.
		В	Избе-излик шегараланбаған болып, ол шексиз үлкен емес.

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

3.2.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисиў, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирларин жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).

Тәлим формалары:	Жеке халда, топарлар менен, кең тарқалған.
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия кураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жумыслар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

3.2.6-кесте

Оқытыудың техник кураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер тийкарында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели кураллар хәм оқыу шынығыўлардың жойбарлары.

3. ҮШИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Монотон ізбе-ізликтер хәм олардың лимити. Үлес ізбе-ізликтер. Больцано Вейерштрасс леммасы. Коши теоремасы

Киши модулар:

1. Монотон ізбе-ізликтер хәм олардың лимити;
2. Монотон ізбе-ізликтердің лимити ҳаққындағы теоремалардың қолланылыўлары;
3. Үлес ізбе-ізликтер. Больцано Вейерштрасс леммасы. Коши теоремасы ізбе-ізликтің жоқарғы хәм төменги лимитлери;
4. Үшінши үлкен модульдың үшінши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Монотон ізбе-ізликтер хәм олардың лимити

Монотон ізбе-ізликтер. $\{x_n\}$ ізбе–ізлик берілген болсын. Егер ізбе-ізликтің екінши ағзасынан бастап, ҳәр бир ағзасы өзинен алдыңғы ағзасынан үлкен болса, яғный, $x_{n+1} > x_n$ шәрт барлық натурал n санлар ушын орынланса, $\{x_n\}$ ізбе–ізлик өсиўши ізбе-ізлик, егер ізбе-ізликтің екінши ағзасынан бастап, ҳәр бир ағзасы өзинен алдыңғы ағзасынан киши болса, яғный, $x_{n+1} < x_n$ шәрт барлық натурал n санлар ушын орынланса, $\{x_n\}$ ізбе–ізлик **кемейиўши ізбе-ізлик** делинеди.

Егер $\{x_n\}$ ізбе–ізликтің 2-ағзасынан бастап, ҳәр бир ағзасы өзинен алдыңғы ағзасынан киши болмаса, яғный, $x_{n+1} \geq x_n$ теңсизлик барлық натурал n санларда орынланса, $\{x_n\}$ ізбе–ізлик кемеймейтуғын ізбе-ізлик, егер $\{x_n\}$ ізбе–ізликтің 2-ағзасынан бастап, ҳәр бир ағзасы өзинен алдыңғы ағзасынан үлкен болмаса, яғный, $x_{n+1} < x_n$ теңсизлик орынланса, $\{x_n\}$ ізбе–ізлик **өспейтуғын ізбе-ізлик** делинеди.

Өсиўши хәм өспейтуғын, кемейиўши хәм кемеймейтуғын ізбе-ізликтер **монотон ізбе-ізликтер** деп аталады.

$\{x_n\}$ шексиз избе–излик берилген болсын. Оның дәслепки $N-1$ ағзасын таслап жиберилгеннен соң пайда болатуғын

$$x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$$

шексиз санлы избе-излик $\{x_n\}$ избе–изликтің N -бөлеги деп аталады хәм $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ көринисінде белгиленеди. $\{x_n\}$ избе–изликтің дәслепки бир неше бөлегин келтирейик:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \quad (1\text{-бөлек, } \{x_n\}_{n=1}^{\infty})$$

$$x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \quad (2\text{-бөлек, } \{x_n\}_{n=2}^{\infty})$$

Егер барлық $n \geq N$ натурал санлар ушын $|x_n| < \varepsilon$ теңсизлик орынланса, $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ бөлек 0 ның ε дөгерегинде жатады делинеди.

$a=0$ санның қәлеген ε -дөгерегин алсақ та, $x_n = \frac{1}{n}$ избе-изликтің бул дөгерекке тийисли болатуғын қәлеген бөлеги бар болады хәм қәлеген $\varepsilon > 0$ сан ушын сондай N натурал сан бар. Барлық $n \geq N$ $\{x_n\}$ избе–излик берилген болсын. Егер $a=0$ ноқаттың қәлеген ε -дөгереги ушын $\{x_n\}$ избе–изликтің бул дөгеректе жатыўшы қәлеген $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ бөлеги бар болса, $\{x_n\}$ избе–излик **шексиз киши избе-излик** делинеди.

Егер $\{x_n\}$ избе–излик шексиз киши избе-излик болса, бул жағдайда 0 диң хәр қандай дөгерегин алсақ та, бул дөгеректе избе-изликтің қандай да бир ағзасынан баслап барлық ағзалары жатады. Дөгеректің сыртында болса, көби менен шекли сандағы ағзалар қалыўы мүмкин.

Теорема. Еки $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-изликлер берилген болсын. Егер

- 1) $\{x_n\}$ өсийўши, $\{y_n\}$ кемейийўши избе-излик,
- 2) $\forall n \in N$ лар ушын $x_n < y_n$
- 3) $\lim\{x_n - y_n\} = 0$ $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-изликлер жыйнақлы хәм $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$ теңлик орынлы.

Дәлил. $\{x_n\}$ избе-излик өсийўши, $\{y_n\}$ избе-излик болса кемейийўши хәм де хәр бир $n \in N$ ушын $x_n < y_n$ теңсизлик орынлы болғанлығы $\forall n \in N$ ушын $x_n \leq y_1$ $y_n \geq x_1$ теңсизликлер орынланады. Бул болса $\{x_n\}$ избе-излик жоқарыдан, $\{y_n\}$ избе-излик болса төменнен шегараланғанлығын билдиреди. Монотон избе-изликлер лимити ҳаққындағы теоремаға

тийкарынан $\{x_n\}$ хәм $\{y_n\}$ избе-изликлер жыйнақлы болады. Демек, $\lim x_n$ хәм $\lim y_n$ лар бар. Соның ушын $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n$ $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$ болып, теореманың үшінши шәртинен болса $\lim x_n - \lim y_n = 0$, болыуы келип шығады. Теорема дәлилленди.

Екинши киши модуль: Монотон избе –изликлердің лимити хакқындағы теоремалардың қолланылыуы

Дәлилленген теоремадан зәрүрли нәтийже келип шығады. Бул нәтийже бириниң ишине бири жайласқан сегментлер принципи деп аталады. Буның ушын алдын бириниң ишине бири жайласқан сегментлер избе-излик түсиниги менен танысамыз.

Егер $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ сегментлер избе-излиги төмендеги $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ қатнаста болса, бул сегментлер бириниң ишине бири жайласқан сегментлер избе-излиги делинеди.

Нәтийже. Егер бириниң ишине бири жайласқан $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ сегментлер избе-излиги ушын $\lim(b_n - a_n) = 0$ болса, онда $\{a_n\}$ хәм $\{b_n\}$ избе-изликлер лимитке ийе хәм де бул лимит барлық сегментлерге тийисли болған жалғыз нокат бар болады.

Теорема. Бул $E = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ көплик санақлы болмаған шексиз көплик болады.

Лемма. (Больцано-Вейерштрасс леммасы) Егер $\{x_n\}$ шегараланған болса, бул избе-изликтен сондай үлес избе-излик ажыратыу мүмкин, ол жыйнақлы болады.

Математикалық анализдің зәрүрли теоремаларынан бирин келтиремиз.

Вейерштрасс теоремасы. Егер кемеймейтуғын $\{x_n\}$ избе–излик жоқарыдан шегараланған болса, бул жағдайда бул избе–излик лимитке ийе болады.

**Үшінші киши модуль: Үлес ізбе-ізіліклер. Больцано
Вейерштрасс леммасы. Коши теоремасы ізбе-ізіліктің
жоқарғы хәм төменгі лимитлери**

Мысал: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ізбе-ізіліктің лимити бар екенлигин көреміз. Соның ушын $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ізбе-ізілікті қарайық. x_n ізбе-ізілік төменнен шегараланған ізбе-ізілік болады. $x_n > 0$.

Вейерштрасс теоремасына қарата $\{x_n\}$ ізбе-ізілік лимитке ийе:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
 теңликтен, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

лимиттің де бар екенлиги келип шығады. Бул лимит e хәриби менен белгиленеди.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (e \approx 2,71828)$$

Теорема. Шегараланған монотон ізбе-ізіліклер жыйнақлы болады.

Дәлил. $x_n \leq x_{n+1}$ болсын. Теорема шәртинен тийкарланып $x_n \leq M$. бул ізбе-ізіліктің элементлеринен дүзилген санлы көплик x ти қараймыз. x дәл жоқарғы шегараға ийе. Буны a арқалы белгилейміз. Дәл жоқарғы шегара қәсийетинен тийкарланып $n > N$ ушын $x_n > a - \varepsilon$ болады.

Екинши тәрәптен дәл жоқарғы шегара анықламаға тийкарланып $x_n \leq a < a + \varepsilon$ болады.

Демек, $n > N$ лар ушын $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ямаса $|x_n - a| < \varepsilon$ келип шығады. Бул болса екенин билдиреди.

$x_n \geq x_{n+1}$ ушын да тап сондай дәлилленеди.

Анықлама. Егер қәлеген киши $\varepsilon > 0$ сан ушын сондай $n_0 \in \mathbb{N}$ сан бар болса, барлық $n > n_0$ хәм барлық $m > n_0$ лар ушын $|x_n - x_m| < \varepsilon$ (4) теңсизлик орынланса, $\{x_n\}$ **фундаментал ізбе-ізілік** деп аталады.

Теорема. (Коши теоремасы) Избе-изликтер жыйнақты болыуы ушын ол фундаментал болыуы зәрүрли хәм жеткиликли.

Коши теоремасы **жыйнақтылық критериясы** деп те жүритиледи.

Анықлама. $\{x_n\}$ избе-излик үлес лимитлериниң ең үлкени (ең кишиси) берилген избе-изликтің жоқарғы (төменги) лимити деп аталады хәм $\overline{\lim x_n}$, $(\lim x_n)$ түринде белгиленеди.

$\{x_n\}$ избе-изликтің жоқарыдан шегараланбаған (шегараланған) болса, оның жоқарғы лимити бар хәм $\infty(-\infty)$ кетіп болады

$$\overline{\lim x_n} = \infty \quad \lim x_n = -\infty$$

$\{x_n\}$ избе-изликтің төменнен шегараланбаған (шегараланған) болса, оның төменги лимити бар.

Теорема. Хәр қандай избе-изликтің жоқары хәм де төменги лимитлери бар.

Нәтиҗе. Егер избе-излик шегараланған болса, оның жоқарғы хәм де төменги лимитлери шекли болады.

Төртинши киши модул:Үшінши үлкен модулдың үшінши орта модул жойбары.

Үшінши үлкен модул қурамындағы үшінши орта модулдың улыўма мақсети

3.3.1-кесте

Өсиўши хәм кемейиўши избе-излик, монотон избе-изликтер анықламасы, олардың лимити ҳаққындағы теоремаларды дәлиллеўди, ϵ санының анықламасын, бириниң ишине бири жайласқан сегментлер принципін студентлерге түсиндириў хәм санақлы болмаған шексиз көпликтің бар екенін хәм үлес избе-изликтерди мысаллар жәрдемінде түсиндириў хәм де Больцано Вейерштрасс леммасы, Коши теоремасын дәлиллеўди оларға үйретиў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атлары хәм мақсетлери

3.3.2-кесте

№	Киши модуллар аты	Киши модуллардың мақсети
1.	Монотон избе-изликлер хәм олардың лимити.	Өсиўши хәм кемейиўши избе-излик, монотон избе-изликлер хәм де олардың лимити ҳақындағы теоремаларды дәлиллеўди студентлерге үйретиў.
2.	Монотон избе-изликлердин лимити ҳақындағы теоремалардың қолланылыўы.	e санының анықламасын хәм бириниң ишине бири жайласқан сегментлер принципин студентлерге түсиндириў, санақлы болмаған шексиз көпликтин бар екенлигин дәлиллеўди оларға үйретиў.
3.	Үлес избе-изликлер, Больцано Вейерштрасс леммасы, Коши теоремасы, избе-изликтин жоқарғы хәм төменги лимитлери	Үлес избе-изликлерди мысаллар жәрдеминде студентлерге түсиндириў, Больцано Вейерштрасс леммасы, Коши теоремасын дәлиллеўди, избе-изликтин жоқарыдан ямаса төменнен шегараланғанлығы хәм оның жоқарғы хәм төменги лимитлерин мысаллар жәрдеминде студентлерге түсиндириў.

Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

3.3.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Өсиўши хәм кемейиўши избе-излик, монотон избе-изликлер, монотон избе-изликлер лимити.	1) Монотон избе-излик деген не? 2) Өсиўши избе-излик деп неге айтамыз? 3) Кемейиўши избе-излик деп неге айтамыз? 4) Монотон избе-изликлер лимитине анықлама бериң.

2.	ε санының анықтамасы, биринің ишине бири жайласқан сегментлер принципі, санақлы болмаған шексіз көплік.	1) ε санының анықтамасын келтірің. 2) Биринің ишине бири жайласқан сегментлер принципі не хақында? 3) Санақлы болмаған шексіз көплік бул қандай көплік?
3.	Үлес ізбе-изліклер, Больцано-Вейерштрасс леммасы, Коши теоремасы, ізбе-изліктің жоқарғы хәм төменгі лимиттері.	1) Үлес ізбе-изліклер дегенде нени түсинесіз? 2) Ізбе-изліктің жоқарғы лимиті дегенде нени түсинесіз? 3) Ізбе-изліктің төменгі лимиті деген не? 4) Больцано Вейерштрасс леммасын айтып берің. 5) Коши теоремасы не хақында?

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллердың бақлаў сораўлары тийкарында дүзилген тест

3.3.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Егер $x_n \geq a$ шәрт орынланса, $\{x_n\}$ ізбе-излік ... шегараланған делинеди.	А	жоқарыдан.
		Б	төменнен.
		В	монотон.
2.	Егер $x_n \leq a$ шәрт орынланса, $\{x_n\}$ ізбе-излік ... шегараланған делинеди.	А	жоқарыдан.
		Б	төменнен.
		В	монотон.
3.	Егер $a \leq x_n \leq b$ шәрт	А	монотон.
		Б	шегараланған.

	орынланса, $\{x_n\}$ избе–излик ... избе–излик делинеди.	В	жоқарыдан.
4.	Өспейтуғын хәм кемеймейтуғын избе–изликлер ... избе–изликлер делинеди.	А	жоқарыдан.
		Б	төменнен.
		В	монотон.
5.	e санының анықламасын келтириң.	А	e санының анықламасы жоқ.
		Б	$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ избе–изликтің лимити e санына тең.
		В	$x_n = (1 + n)^n$ избе–изликтің лимити e санына тең.
6.	Избе-изликтің жоқарғы лимити дегенде нени түсинесиз?	А	Лимитлердің ең үлкени.
		Б	Үлес лимитлеринің ең үлкени.
		В	Үлес лимитлеринің ең кишиси.
7.	$\{x_n\}$ шексиз избе–изликтің дәслепки $N-1$ ағзасын таслап жиберилгеннен соң пайда болатуғын $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ шексиз санлы избе–излик не деп аталады?	А	Үлес избе-излик.
		Б	Шекли санлы избе-излик.
		В	Монотон избе-излик.
8.	Санақлы болмаған шексиз көплик бул қандай көплик?	А	Усы $E = \{x : x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$ көплик санақлы болмаған шексиз көплик.
		Б	Усы $E = \{x : x \in R, -1 \leq x \leq 1\}$ көплик санақлы болмаған шексиз көплик.
		В	Усы $E = \{x : x \in R, x \leq 1\}$ көплик санақлы болмаған шексиз көплик.

9.	Избе-изликлер жыйнақлы болыуы ушын ол фундаментал болыуы зәрүрли хәм жеткиликлик ... теоремасы?	А	Больцано Вейерштрасс.
		Б	Коши.
		В	Контор.
10.	Егер $\{x_n\}$ шегараланған болса, бул избе-изликтен сондай үлес избе-излик ажыратыу мүмкин, ...	А	монотон болады.
		Б	тарқалыушы болады.
		В	жыйнақлы болады.

Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри хәм типі, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

3.3.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түрі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыру.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, иллюстрация, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқыту шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

Киши модуллардың педагогикалық процесссте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

Оқытыудың техникалық құраллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели құраллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

IV. ТӨРТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Функция хәм оның лимити

(4 лекция модули, 3 әмелий шынығыў модули)

1. ТӨРТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛИ ТЕМАСЫ: (Лекция) Функция түсиниги. Элементар функциялар

Киши модулар:

1. Функция анықламасы;
2. Функцияның берилиў усыллары;
3. Жуп хәм тақ функциялар. Периодлы хәм периодсыз функциялар;
4. Монотон функция. Кери функция. Қурамалы функция;
5. Элементар функциялар;
6. Төртінши үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Функция анықламасы

1-анықлама. Егер x шаманың D областтағы ҳәр бир мәнисине қандай да бир усыл ямаса нызам бойынша y тиң қандай да бир E областтағы анық бир мәниси сәйкес келсе, y өзгериўши шама x **өзгериўши шаманың функциясы** делинеди.

Бул жерде x өзгериўши шама еркли өзгериўши ямаса аргумент, бул шама болса **ерксиз өзгериўши ямаса функция** делинеди.

Функцияны төмендегише белгилеў мүмкин: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, хәм басқа да. Егер $x = x_0$ болғанда $y = f(x)$, функцияның мәниси y_0 болса, бул

$y_0 = f(x_0)$ ямаса $y|_{y=y_0} = f(x_0) = y_0$ түринде белгиленеди.

2-анықлама. Аргумент x тиң қабыл ететуғын мәнислери көплиги функцияның **анықланыў областы** делинеди хәм $D(f)$ ямаса $D(y)$ менен белгиленеди.

3-анықлама. Функцияның қабыл қылатуғын мәніслер көп­ли­ги оның **мәніслер об­ла­сты** делине­ди хәм $E(f)$ ямаса $E(y)$ пенен бел­ги­лене­ди.

4-анықлама. $y = f(x)$ функцияның гра­фи­ги деп, ОХУ тең өл­ше­м­ли ли­гин­де­ги ко­ор­ди­на­та­ла­ры $y = f(x)$ қат­нас пенен бай­ла­нысқан $p(x, y)$ ноқатлар көп­ли­гине айты­ла­ды.

Екинши киши модуль: Функцияның берилиуі усуллары

Функция аналитикалық, кесте хәм графикалық усулларда берилиуі мүмкін.

Функция аналитикалық усулда берілгенде x хәм y шамалар арасындағы байланыс формула арқалы бериледи.

Функция кесте усылында берілгенде x хәм y шамалар арасындағы байланыс кесте көринисинде аңлатылады.

Функция графикалық усулда берілгенде оның гра­фи­ги бел­ги­ли болып, аргументтің түр­ли мәніслерине сәй­кес келиуіші мәніслери көбинесе графиктен табылады.

Үшінши киши модуль: Жуп хәм тақ функциялар.

Периодлы хәм периодсыз функциялар

7-анықлама. Егер $y = f(x)$ функцияда хәр бир $x \in D(f)$ ушын $f(-x) = f(x)$ тең­лик орынланса, онда $f(x)$ функция **жуп функция** делине­ди.

Егер хәр бир $x \in D(f)$ ушын $f(-x) = -f(x)$ тең­лик орынланса, онда $f(x)$ функция **тақ функция** делине­ди.

Егер $y = f(x)$ функцияда хәр бир $x \in D(f)$ хәм $x \pm T \in D(f)$ ушын
$$f(x \pm T) = f(x)$$
 тең­лик орынланса, онда $f(x)$ функция **периодлы функция** делине­ди.

T -кәлеген ҳақықый сан. Оның ең киши оң мәніси t_0 бар болса, оған $f(x)$ **функцияның периоды** делине­ди.

9-анықлама. Егер $y = f(x)$ функцияда хәр бир $x \in D(f)$ хәм $x \pm T \in D(f)$ ушын

$$f(x \pm T) \neq f(x)$$

теңлік орынланса, $f(x)$ функция **периодлы болмаған функция** делинеди.

Мәселен: $y = \sin x$ функция $T = 2\pi$ периодқа ийе болғаны ушын

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

теңлік орынлы болады.

Төртінші киши модуль: Монотон функция. Кери функция. Қурамалы функция

$y = f(x)$ функция қандай да бир $D(y) = [a, b]$ областта анықланған болсын.

5-анықлама. Егер x тиң бул областқа тийисли кәлеген x_1 хәм x_2 мәнислери ушын $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) < f(x_2)$ (ямаса $f(x_1) < f(x_2)$ теңсизлик орынлы болса, $f(x)$ функция **Д областта өсиўши (кемейиўши)** делинеди. Өсиўши хәм кемейиўши функциялар **монотон функциялар** делинеди.

6-анықлама. Егер $x_1 < x_2$ болғанда $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ямаса $f(x_1) \geq f(x_2)$ болса, функция D областта **кемеймейтуғын (өспейтуғын) функция** делинеди. $D(f) = [a, b]$ област болса $f(x)$ функцияның өсиў ямаса кемейиў аралығы делинеди.

1) Егер $F(x, y) = 0$ функцияны y ке қарата шешиў мүмкин болмаса, y **анық емес функция** делинеди.

Мәселен, $x^3 + y^2 - x = 0$ анық емес функция болып, оны y ке қарата шешсек, 2 функция пайда болады, яғный

$$\begin{cases} y = \sqrt{x - x^3}, & \text{агар } y \geq 0 \text{ бўлса,} \\ y = -\sqrt{x - x^3}, & \text{агар } y < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

2) $[a, b]$ кесиндиде анықланған өсиўши ямаса кемейиўши $y = f(x)$ функция берилген болсын. Хәм де $f(a) = c, f(b) = d$ болсын. Анықлық ушын $f(x)$ функция өсиўши болсын. $[a, b]$ кесиндиде x_1 хәм x_2 ноқатларды аламыз, бунда $x_1 < x_2$ болсын, онда $y_1 = f(x_1)$ хәм $y_2 = f(x_2)$ болып, $y_1 < y_2$ болады. Буған кери тастыйықлаў да туўры, егер $y_1 < y_2$ болып, $y_1 = f(x_1)$ хәм $y_2 = f(x_2)$ болса, $x_1 < x_2$ болады. Демек, x тиң мәнислери менен

y тиң оларға сәйкес мәнислери арасында өз-ара бир мәнисли сәйкеслик қойылды.

y ти аргумент x ти болса функция деп қарасак, онда

$$x = \varphi(y)$$

пайда болады. Бул функция $y = f(x)$ функцияға **кери функция** делинеди.

Буны төмендегише айтып өтиў мүмкин, $y = f(x)$ функцияның мәнислер областы $x = \varphi(y)$ функцияның анықланыў областы болады ҳәм керисинше.

3) Пикир жүритейик, қалеген A областта x өзгериўшинин функциясы $x = \varphi(y)$ берилген болып, оның мәнислер областы E болсын. E областта $y = F(y)$ функция берилген болсын. Олай болса, x өзгериўшининг D областтағы хәр бир мәнисине y өзгериўшининг E областтағы анық бир мәниси сәйкес келеди.

Солай етип, x өзгериўшининг D областтағы хәр бир мәнисине y өзгериўшининг анық мәниси сәйкес келеди, яғный: $y = f(x) = f[\varphi(x)]$ Бул курамалы функция делинеди. $y = \varphi(x)$ болса, аралық функция делинеди.

Бесинши киши модуль: Элементар функциялар

Тийкарғы элементар функцияларға биз мектеп элементар курсында өткен дәрежели функция, көрсеткишли функция, логарифмлик функция, тригонометриялық функция ҳәм кери тригонометриялық функциялар киреди. Олардың анықланыў областлары, мәнислер областлары ҳәм графиклерин билемиз.

Енди тийкарғы элементар функциялар ҳәм курамалы функция түсиниклери жәрдемінде элементар функцияға анықлама беремиз.

10-анықлама. Элементар функция деп, тийкарғы элементар функциялардан шекли сандағы арифметикалық әмеллер ҳәм олардан алынған курамалы функциялардан дүзилген функцияға айтылады.

Мысаллар: $y = \frac{\lg \sin(x^2 + 1)}{\sqrt{x - 1}}, \quad y = \sin^2 \operatorname{tg} 3x,$
 $y = \ln \operatorname{arctg} 2^{-x}, \dots$

Элементар функциялар алгебралық хәм трансцендент функцияларға бөлинеди.

11-анықлама. Алгебралық функциялар деп, аргументлер үстинде шекли алгебралық әмеллер орынлаў мүмкин болған функцияларға айтылады.

Оларға төмендеги функциялар киреди:

1) Пүтин рационал функция, яғный n - дәрежели көп ағзалы

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

2) Бөлшек-рационал функция, яғный еки көп ағзалы қатнасы:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m};$$

3) Иррационал функция, яғный әмеллер орынлаў процессинде аргумент x корен ишинде қатнасқан функция.

12-анықлама. Барлық алгебралық болмаған функциялар трансцендент функциялар делинеди.

Оларға көрсеткишли функция, логарифмлик функция, тригонометриялық функция хәм кери тригонометриялық функциялар киреди.

Алтынши киши модуль: Төртинши үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Төртинши үлкен модуль қурамындағы биринши орта модульдың улыўма мақсети

4.1.1-кесте

Функция анықламасы хәм оның берилиў усылларын, функциялардың жуп хәм тақлығы, периодлы хәм периодлы емес, монотон, кери хәм курамалы функциялар анықламаларын хәм олардың қасийетлерин үйретиў хәм элементар функциялардың графикалық хәм мысаллар жәрдеминде студентлерге түсиндириў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атлары хәм мақсетлери

4.1.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Функция анықламасы.	Функция анықламасы, анықланыў областы хәм мәнислер областлары ҳаққында, еркли хәм ерксиз өзгериўшилери ҳаққында студентлерге айтып бериў.
2.	Функцияның берилиў усыллары.	Функцияның берилиў усулларын хәм олардың бир-биринен паркын студентлерге түсиндириў.
3.	Жуп хәм тақ функциялар, периодлы хәм периодсыз функциялар.	Жуп хәм тақ, периодлы хәм периодсыз функцияларды хәм де олардың қасиетлерин мысаллар жәрдемінде студентлерге түсиндириў.
4.	Монотон функция, Кери функция, қурамалы функция.	Өсиўши хәм кемейиўши функцияларды, монотон, кери хәм қурамалы функциялар анықламасын айтып бериў хәм де мысаллар жәрдемінде студентлерге түсиндириў.
5.	Элементар функциялар.	Элементар функциялардың анықламалары хәм олардың қасиетлерин студентлерге үйретиў хәм графикалық мысаллар жәрдемінде көнликпелер пайда етиў.

Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

4.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Функция, анықланыў көплиги, мәнислер көплиги, еркли хәм ерксиз өзгериўши, Дирихле функциясы, функцияның берилиў усуллары.	1) Функция деп неге айтамыз? 2) Функцияның анықланыў көплиги, мәнислер көплиги деп неге айтамыз? 3) Функцияның берилиў усул- ларын айтып бериң. 4) Дирихле функциясы деп қандай функцияға айтамыз?

2.	Жуп хәм так функциялар, симметриялық көплек, периодлы хәм периодсыз функциялар, өсиўши хәм кемейиўши функциялар, монотон функция, кери функция, қурамалы функция.	1) Симметриялық көплек деп қандай көплекке айтамыз? 2) Қандай қылып жуп хәм так функцияларды анықлаў мүмкин? 3) Монотон функция деп қандай функцияға айтамыз. 4) Кери функция ҳаққында айтып бериң. 5) Қурамалы функцияға анықлама бериң.
3.	Пүтин хәм бөлшек рационал функция, дәрежели функция, көрсеткишли функция, логарифмлик функция, тригонометриялық функция, гиперболалық функция, кери тригонометриялық функция.	1) Элементар функцияларға мысаллар келтириң. 2) Дәрежели функцияның қасиетлерин айтып бериң. 3) Көрсеткишли хәм логарифмлик функциялар арасында қандай байланыс бар? 4) Тригонометриялық хәм кери тригонометриялық функциялар ҳаққында айтып бериң. 5) Гиперболалық функция ҳаққында айтып бериң.

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллердың бақлаў сораўлары тийкарында дүзилген тест

4.1.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Функция деп неге айтамыз?	А	Егер x көплектеги хәр бир x санға қандай да бир f қағыйдасына қарата y көплектеги бир y сан сәйкес қойылған болса, x көплекте функция берилген деп аталады.
		Б	Егер x көплектеги хәр бир x санға y көплектеги бир y сан сәйкес

			қойылған болса, x көплікте функция берілген деп аталады.
		В	Егер x көпліктегі бір x санға кәлеген f қағыйдаға қарата y көпліктегі бір сан сәйкес қойылған болса, x көплікте функция берілген деп аталады.
2.	Функция $y = f(x)$ көринисінде берілген болса, ... анықланыў көплиги, ... мәнислер көплиги деп аталады.	А	x - анықланыў областы. y - мәнислер областы.
		Б	y - анықланыў, x - мәнислер көплиги.
		В	Дурыс жуўап жоқ.
3.	Функцияның берилиў усыллары неше хәм қандай?	А	3, аналитикалық, графикалық хәм кесте көринисінде бериледи.
		Б	2, графикалық хәм кесте көринисінде бериледи.
		В	Шексиз.
4.	Дирихле функциясы деп қандай функцияға айтамыз?	А	Хәр бир рационал санға 1 ди, хәр бир иррационал санға 0 ди сәйкес қойыў нәтийжесинде пайда болатуғын функцияға айтамыз.
		Б	Хәр бир рационал санға 0 ди, хәр бир иррационал санға 1 ди сәйкес қойыў нәтийжесинде пайда болатуғын функцияға айтамыз.
		В	Хәр бир пүтин санға 0 ди, хәр бир иррационал санға 1 ди сәйкес қойыў нәтийжесинде пайда болатуғын функцияға айтамыз.
5.	Қандай етип жуп хәм тақ функцияларды анықлаў мүмкин?	А	$f(-x) = f(x)$ теңлиги орынлы болса, $f(x)$ жуп функция. $f(-x) = -f(x)$ теңлиги орынлы болса, $f(x)$ тақ функция болады.
		Б	$f(-x) = f(x)$ теңлиги орынлы болса, $f(x)$ жуп функция. $f(-x) = -f(x)$ теңлиги орынлы болса, $f(x)$ тақ

			функция болады. Егер еки теңлик те орынлы болмаса, $f(x)$ функция жуп та, тақ та болмайды.
		В	$f(-x) = -f(x)$ теңлиги орынлы болса, $f(x)$ жуп функция. $f(-x) = f(x)$ теңлиги орынлы болса $f(x)$ тақ функция болады. Егер еки теңлик те орынлы болмаса, $f(x)$ функция жуп та, тақ та болмайды.
6.	Монотон функция деп қандай функцияларға айтамыз?	А	Өсіуіші хәм де кемеіуіші функцияларға.
		Б	Тек кемеіуіші функцияларға.
		В	Тек өсіуіші функцияларға.
7.	Өз-ара кери функцияларды көрсетің.	А	$y = e^x, y = \ln x$
		Б	$y = a^x, y = \ln x$
		В	$y = x^2 + 1, y = \sqrt{x}$
8.	Көрсеткішли функцияның ... анықланыу областы, ... мәніслер областы.	А	анықланыу областы R көплигинен, мәніслер областы барлық оң санлардан ибарат.
		Б	анықланыу областы N көплигинен, мәніслер областы барлық оң санлардан ибарат.
		В	анықланыу областы R көплигинен, мәніслер областы барлық пүтин оң санлардан ибарат.
9.	Көрсеткішли хәм логарифмлик функциялар арасында қандай байланыс бар?	А	Олар арасында хеш қандай байланыс жоқ.
		Б	Өз-ара кери функциялар.
		В	Өз-ара эквивалент функциялар.
10.	Кери тригонометриялық функциялар берилген жууапты көрсетің?	А	$y = \arctan x, y = \arccos x, y = \arcsin x, y = \operatorname{arccotg} x$
		Б	$y = \log x, y = \arccos x, y = \arcsin x, y = \operatorname{arccotg} x$
		В	$y = \operatorname{arctg} x, y = x, y = \operatorname{arccotg} x, y = \sin(\ln x)$

Киши модулардың оқыу шынығыуы түри хәм типі, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

4.1.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Айтып бериу, машқалалы сәубет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазуу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытуу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бахалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәубетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

4.1.6-кесте

Оқытуудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери.

2. ТӨРТІНШІ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКІНШІ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Функцияның лимиті және оның қасиеттері

Киші модульдер:

1. Функцияның нүктедегі, шексіздіктегі лимиті және оның қасиеттері;
2. Бір тәрептіліктің лимиттері;
3. Шектіліктің лимитке ие болған функциялардың қасиеттері;
4. Шектіліктің лимитке ие болған функциялар үшін арифметикалық амалдар;
5. Төртінші үлкен модульдің екінші орта модуль жүйесі.

Бірінші кіші модуль: Функцияның нүктедегі, шексіздіктегі лимиті және оның қасиеттері

1-анықталам. Егер $y = f(x)$ функция $x = a$ нүктесінің қандай да бір дәрежесінде анықталған болып, $x = a$ (нүктенің өзінде анықталбаған болуы мүмкін) қалаған $\varepsilon > 0$ сан үшін сондай $\delta > 0$ сан бар болса, $|x - a| < \delta$ теңсіздікті қанааттандырушы барлық $x \neq a$ нүктелер үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздік орындалса, A шектілігі сан $y = f(x)$ функцияның $x = a$ **нүктедегі лимиті** делінеді және төмендегіше жазылады:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ ямаса } x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow A$$

$|x - a| < \delta$ теңсіздікті a нүктенің δ дәрежесінде жататуын нүктелер, $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздікті болса A нүктенің ε дәрежесінде жататуын $f(x)$ функциялар қанааттандырады, яғни $f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$

Функцияның шексіздіктегі лимиті

2-анықталам. Егер $y = f(x)$ функция x тиіс жетерлік үлкен мәнілерінде анықталған болып қалаған $\varepsilon > 0$ сан үшін сондай $N > 0$ сан бар болса,

$$|x| > N$$

теңсіздікті қанааттандырушы барлық x лар үшін

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

теңсізлік орынланса, турақлы A сан $y = f(x)$ функцияның $x = \infty$ шексізліктеги **лимита** делинеди хәм төмендегише жазылады:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

3-анықлама. (a, b) интервалда анықланған $y = f(x)$ функция ушын сондай $M > 0$ сан бар болса, барлық $x \in (a, b)$ лар ушын $|f(x)| \leq M$ теңсізлік орынланса, $y = f(x)$ функция (a, b) да **шегараланған** делинеди. Егер бундай сан бар болмаса, $y = f(x)$ функция (a, b) да **шегараланбаған** делинеди.

Қәсийет. Егер

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

шекли сан болса, бул жағдайда $y = f(x)$ функция ноқатының қандай да бир дөгерегинде шегараланған болады. Егер $f(x)$ функция қандай да бир интервалда шегараланған болса, $\frac{1}{f(x)}$ хәм бул интервалда шегараланған болады. ($f(x) \neq 0$)

Екинши киши модуль: Бир тәрәплеме лимитлер

4-анықлама. Егер $y = f(x)$ функцияның $x = a$ ноқаттағы лимита анықламасында x өзгериўши a дан киши болғанынша қалса, бундай жағдайда функцияның A_1 лимита функцияның $x = a$ ноқаттағы шеп тәрәплеме лимита делинеди хәм төмендегише жазылады:

$$A_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \text{ ямаса } A_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a-0)$$

Егер $a = 0$ болса, онда төмендегише жазылады:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(-0)$$

5-анықлама. Егер $y = f(x)$ функцияның $x = a$ ноқаттағы лимита анықламада x өзгериўши a дан үлкен болғанынша қалса, онда функцияның A_1 лимита функцияның $x = a$ ноқаттағы оң тәрәплеме лимита делинеди хәм төмендегише жазылады:

$$A_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \text{ ямаса } A_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

Егер $x = a$ болса, төмендегіше жазылады:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0)$$

6-анықлама. Функцияның оң және шеп тәрептеме лимиттері оның бір тәрептеме лимиттері делинеді.

Демек, $y = f(x)$ функцияның a нүктедегі бір тәрептеме лимиттері бар және олар өз-ара тең, яғни:

$$f(a-0) = f(a+0)$$

болғанда ғана бұл функция $x = a$ нүктеде лимитке ийе болады.

Бірінші әжайып лимит.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1)$$

формула **бірінші әжайып лимит** делинеді.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sin mx} = 1$$

лерде бірінші әжайып лимит болады.

Екінші әжайып лимит.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (2)$$

формула **екінші әжайып лимит** делинеді.

(2) формуланы $n = x$ болғанда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (3)$$

түрінде жазыу мүмкін.

Үшінші киші модуль: Шекли лимитке ийе болған функциялардың қасиеттері

Теңсізлік белгиси менен аңлатылатуғын қасиеттер. x көплік берілген болып, a болса оның лимит нүктесі болсын. Бұл көплікте $f(x)$ функция анықланған.

1. Егер бул $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ бар болып, $A > p(A < q)$ болса, a ның жеткилики киши дөгерегинен алынған $x(x \neq a)$ ның мәнислеринде $f(x) > p, (f(x) < p)$ болады.

Егер бул $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ бар болып, $A > 0(A < 0)$ болса, a ның жеткилики киши дөгерегинен алынған $x(x \neq a)$ ның мәнислеринде $f(x) > 0 (f(x) < 0)$ болады.

2. Егер $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ бар болса, a ның жеткилики киши дөгерегинен алынған $x(x \neq a)$ ның мәнислеринде $f(x)$ функция шегараланған болады.

3. Егер аргумент x тиң a ноқаттың қандай да бир $U_\delta(a)$ дөгерегинен алынған барлық мәнислеринде $f(x) \leq q(x)$ теңсизлик орынлы болып, $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} q(x)$ лимитлери бар болса,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} q(x)$$

теңсизлик орынлы болады.

4. Егер аргумент x тиң a ноқаттың қандай да бир $U_\delta(a)$ дөгерегинен алынған барлық мәнислеринде $f(x) \leq p(x) \leq q(x)$ теңсизлик орынлы болса хәм

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

$\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ лимитлери бар болып,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} q(x) = d$$

болса, онда $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = d$ болады.

Төртинши киши модуль: Шекли лимитке ийе болған функциялар үстінде арифметикалық әмеллер

x көплик берилген болып, a болса оның лимит ноқаты болсын. Бул көпликте $f(x), g(x)$ функциялар анықланған.

1. Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар лимитке ийе болса, $f(x) \pm g(x)$ функциялар да лимитке ийе хәм

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

теңлик орынлы.

2. Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар лимитке ийе болса, $f(x) \cdot g(x)$ функция да лимитке ийе хәм

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

теңлик орынлы.

3. Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар лимитке ийе болып, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ болса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция хәм лимитке ийе хәм

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

теңлик орынлы.

Бесинши киши модуль: Төртинши үлкен модульдың екінши орта модуль жойбары.

Төртинши үлкен модуль құрамындағы екінши орта модульдың улыўма мақсети

4.2.1-кесте

Функцияның лимити хәм оның қасиетлерин, шекли лимитке ийе болған функциялардың қасиетлерин хәм олар үстінде орынланатуғын арифметикалық әмеллерди студентлерге үйретіў.

**Биринши орта модулдың киши модулларының
атамалары хәм мақсетлери**

4.2.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Функцияның но- қаттағы, шексиз- ликтеги лимити хәм оның қә- сийетлери.	Функцияның ноқаттағы лимитине анықлама берип хәм оның шекли санға тең болыўын көрсетиў. Функцияның шексизликтеги лимити шекли саннан ибарат екенлигин хәм оның қәсийетлерин студентлерге түсиндириў.
2.	Бир тәреплеме лимитлер.	Бир тәреплеме лимитлер шеп хәм оң лимитлерге анықламасын хәм де әжайып лимитлерди студентлерге түсиндириў.
3.	Шекли лимитке ийе болған функциялардың қәсийетлери.	Теңсизлик белгиси менен аңлатылатуғын қәсийетлерди студентлерге үйретиў хәм айырымларын дәлиллеў.
4.	Шекли лимитке ийе болған функциялар үс- тинде арифмети- калық әмеллер.	Шекли лимитке ийе болған функциялар үстинде арифметикалық әмеллерди студентлерге үйретиў хәм мысаллар жәрдемінде түсиндириў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

4.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Ноқаттың дөгериги, көпликтің лимит ноқаты, функцияның ноқаттағы лимити, шексизликтеги лимити.	1) Ноқаттың шеп хәм оң дөгериги қандай көринисте болады? 2) Көпликтің лимит ноқатына анықлама бериң. 3) Функцияның ноқаттағы лимитиниң Коши хәм Гейне анықламалары парқын

		түсіндириң. 4) Функцияның шексіздіктегі лимиті шекті санға тең болуын көрсетің?
2.	Бір тәрептіліктің лимит- лер -шегі және оң лимиттер.	1) Бір тәрептіліктің лимиттері деп неге айтамыз? 2) Шегі және оң лимиттерінің Коши анықтамасын келтірің. 3) Шегі және оң лимиттерінің Гейне анықтамасын айтып берің. 4) Әбәйліктің лимиттері.
3.	Шектіліктің лимитке ие болған функциялар- дың қасиеттері.	1) Шектіліктің лимитке ие болған функциялардың қасиеттері нешеу? 2) Шексіздік белгісі менен анықталатынын қасиеттерді айтып берің?
4.	Шектіліктің лимитке ие болған функциялар үстінде арифмети- калық әрекеттер.	1) Шектіліктің лимитке ие болған функциялардың қосындысы және айырмасының лимиті неге тең? 2) Шектіліктің лимитке ие болған функциялардың көбейтіндісі және қатынасының лимиті неге тең?

Ескерту: Киші модульдердегі бақылау сұрақтарынан студенттер өз бетінше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киші модульдердің бақылау сұрақтары тийкарында дүзілген тест

4.2.4-кесте

№	Сұрақтар	Мүмкін болған жауаптар	
1.	Кім функцияның лимит нүктесі анықтамасын ізбе- іздік жәрдемінен түсіндіреді?	А	Коши.
		Б	Лагранж.
		В	Гейне.
2.	Коши функцияның	А	Ізбе-іздік жәрдемінен.

	лимит ноқаты анықла-масын қалай кири-теди?	Б	$\varepsilon - \delta$ тилинде.
		В	Функцияның лимит ноқаты анықла-масын келтирмеген.
3.	Функцияның бір тәреп-ле-ме лимит-лери деп неге айта-мыз?	А	Функцияның оң тәреп-ле-ме лимитине.
		Б	Функцияның шеп тәреп-ле-ме лимитине.
		В	Функцияның оң хәм шеп тәреп-ле-ме лимитине.
4.	Әжайып лимитлер қайсы жууапта дурыс берилген?	А	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
		Б	$\lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
		В	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
5.	Шекли лимитке ийе болған функция-лардың қәсийетлери неше?	А	3
		Б	5
		В	4
6.	Шекли лимитке ийе болған функция-лардың қосындысы хәм айырмасының лимити неге тең?	А	Анықланбаған.
		Б	Функция лимитлериниң қосындысы хәм айырмасына тең.
		В	Хәр бир функция лимитлериниң қосындысына тең.
7.	Шекли лимитке ийе болған функциялар-дың көбеймеси хәм қатна-сының лимити неге тең?	А	Функция лимитлериниң көбеймеси хәм қатна-сына тең.
		Б	Лимити жоқ.
		В	Функция лимитлериниң қатна-сына тең.

**Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри, онда
қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар**

4.2.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирий, айтып бериу, иллюстрация, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқыту шәратлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәубетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

**Киши модуллардың педагогикалық процесссте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

4.2.6-кесте

Оқытудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери.

3. ТӨРТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Монотон хәм курамалы функцияның лимити. Коши теоремасы

Киши модулар:

1. Курамалы функцияның лимити;
2. Өсийиши функцияның лимити;
3. Кемейиши функцияның лимити;
4. Коши теоремасы;
5. Төртиниши үлкен модульдың үшінши модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Курамалы функцияның лимити

Көпшилик жағдайларда курамалы функцияның лимитин есаплауға туўры келеди. Биз төменде курамалы функцияның лимитин есаплау имканын беретугын теореманы келтиремиз.

Пикир жүритип қарайық, қандайда бир x көпликте $t = \varphi(x)$ функция анықланған хәм бул функция мәнислеринен ибарат T көпликте $y = f(t)$ функция анықланған болып, олар жәрдемінде курамалы функция $y = f(\varphi(x))$ пайда етилген болсын. Бул курамалы функция x көпликте анықланған. Соның менен бирге a сан, x көпликтің лимит ноқаты болсын.

Теорема. Егер 1) $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c$ лимит орынлы болып, a ноқатының сондай $U_\delta(a)$ дөгереди бар болса, барлық $x \in U_\delta(a)$ лар ушын $\varphi(x) \neq c$ болса,

2) $\tilde{n}$ сан T көплигинің лимит ноқаты болып, $\lim_{t \rightarrow c} f(t) = b$ лимит бар болса, бул жағдайда $x \rightarrow a$ да курамалы функция $y = f(\varphi(x))$ та лимитке ийе хәм

$$\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b.$$

болады.

Биз жоқарыда шекли лимитке ийе болған функциялар үстинде арифметикалық әмеллерди көрип өттік.

Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялардың хәр бириниң лимити шексиз ямаса $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция лимити қаралғанда $g(x) \neq 0$ болып қалса, бул жағдайда анық емес аңлатпаларға келемиз.

x көплек берилген болып, a болса оның лимит ноқаты болсын. Бул көплекте $f(x), g(x)$ функция анықланған. Егер $x \rightarrow a$ да:

1) $f(x) \rightarrow 0$ $g(x) \rightarrow 0$ болса, олардың $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатнасы $\frac{0}{0}$ көринисіндегі анық емеслікті аңлатпайды.

2) $f(x) \rightarrow \infty$ $g(x) \rightarrow \infty$ болса, олардың $\frac{f(x)}{g(x)}$ қатнасы $\frac{\infty}{\infty}$ көринисіндегі анық емеслік болады.

3) $f(x) \rightarrow 0$ $g(x) \rightarrow \infty$ болса, олардың $f(x) \cdot g(x)$ көбеймеси $0 \cdot \infty$ көринисіндегі анық емеслікті аңлатпайды.

4) $f(x) \rightarrow \pm\infty$ $g(x) \rightarrow \pm\infty$ болса, яғный $f(x)$ хәм де $g(x)$ функциялар хәр түрлі белгідегі шексизлікке умтылса, $f(x) + g(x)$ аңлатпа $\infty - \infty$ көринисіндегі анық емеслік болады.

Биз шекли лимитке ийе болған функциялардың қасиетлерін үйрендік. Енді функция лимитинің бар екенлігі мәселесі менен шуғылланамыз. Дәслеп бул мәселені дара жағдайда монотон функцияларға қарата шешеміз.

Екинши киши модуль: Өсіуші функцияның лимиті

x көплек берилген болып, a (шекли ямаса $+\infty$) болса оның лимит ноқаты хәм барлық $x \in X$ лар ушын $x \leq a$ болсын. x көплекте $f(x)$ функция анықланған.

Теорема. $f(x)$ функция x көплекте өсіуші болсын. Функция жоқарыдан шегараланған болса, a шекли лимитке ийе, жоқарыдан шегараланбаған болса, оның лимиті $+\infty$ болады.

Үшінши киши модуль: Кемейуші функцияның лимиті

x көплек берилген болып, a (шекли ямаса $-\infty$) болса, оның лимит ноқаты хәм барлық $x \in X$ лар ушын $x \geq a$ болсын. x көплекте $f(x)$ функция анықланған.

Теорема. Егер $f(x)$ функция x көплікте кемеийіуші болып, ол төменнен шегараланған болса, $g(x)$ функция a нокатта шекли лимитке ийе, төменнен шегараланбаған болса, оның лимити $-\infty$ болады.

Төртінші киши модуль: Коши теоремасы

Енди функция лимитинің бар екенлиги ҳаққындағы улыўма теоремасын келтиремиз.

x көплек берилген болып, a оның лимит нокаты болсын. Бул көплікте $f(x)$ функция анықланған.

Анықлама. Егер $\forall \varepsilon > 0$ сан ушын сондай $\delta > 0$ сан табылсын, аргумент x тиң $0 < |x' - a| < \delta$ $0 < |x'' - a| < \delta$ теңсизликлерин қанаатландырыўшы қәлеген x' хәм $x'' (x' \in X, x'' \in X)$ мәнислеринде $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ теңсизлиги орынлы болса, $f(x)$ функция ушын a нокатта Коши шәрти орынланады делинеди.

$f(x)$ функция ушын a нокатта Коши шәртинің орынланбаўы төмендегини аңлатады:

$\delta > 0$ сан алғанымызда да сондай $\varepsilon > 0$ хәм $0 < |x' - a| < \delta$ $0 < |x'' - a| < \delta$ теңсизликлерин қанаатландырыўшы x' хәм $x'' (x' \in X, x'' \in X)$ мәнислери табылады $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$ болады.

Теорема. (Коши) $f(x)$ функция a нокатта шекли лимитке ийе болыўы ушын бул функция a нокатта Коши шәртинің орынланыўы зәрүрли хәм жеткиликли.

Бесинши киши модуль: Төртінші үлкен модульдың үшінши модуль жойбары.

Төртінші үлкен модуль қурамындағы үшінши орта модульдың улыўма мақсети

4.3.1-кесте

Студентлерге монотон хәм қурамалы функцияның лимитин хәм Коши теоремаларын дәлиллейди үйретиў.
--

Биринши орта модульдың киши модульларының

атамалары хәм мақсетлери

4.3.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модулардың мақсети
1.	Қурамалы функцияның лимити.	Қурамалы функцияның лимитин есаплау имканын беретугын bazı теоремаларды үйретиу, анық емес аңлатпаларды студентлерге түсиндириу.
2.	Өсиуши функцияның лимити.	Лимиттин бар екенлиги ҳаққындағы мәселесин дара жағдайда монотон функцияларға қарағанда белгилеу, өсиуши функцияның лимити ҳаққындағы теореманы дәлиллеуди студентлерге түсиндириу.
3.	Кемейиуши функцияның лимити.	Лимиттин бар екенлиги ҳаққындағы мәселесин дара жағдайда монотон функцияларға қарағанда белгилеу. Кемейиуши функцияның лимити ҳаққындағы теореманы дәлиллеуди студентлерге түсиндириу.
4.	Коши теоремасы.	Коши шәртинин орынланыуына анықлама берип, лимиттин бар екенлиги ҳаққындағы улыуа теорема Коши теоремасын дәлиллеуди студентлерге үйретиу.

Киши модулардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

4.3.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлау сораулары
1.	Қурамалы функцияның лимити, анық емес аңлатпа.	1) Қурамалы функцияның лимитке ийе болыу шәртлери. 2) Қандай көринистеги аңлатпалар анық емес делинеди? 3) Анық емес аңлатпаларға мысал келтириң.
2.	Өсиуши функцияның	1) Өсиуши функция шекли

	лимити.	лимитке ийе болыуы ушын қандай шәрт орынланыуы керек? 2) Өсиуши функция жоқарыдан шегараланбаған болса, оның лимити неге тең?
3.	Кемейиуши функцияның лимити.	1) Кемейиуши функция шекли лимитке ийе болыуы ушын қандай шәрт орынланыуы керек? 2) Кемейиуши функция жоқарыдан шегараланбаған болса, оның лимити неге тең?
4.	Коши шәрти, Коши теоремасы.	1) Коши шәртинің орынланыуы ҳаққындағы анықламаны айтып берің. 2) Коши теоремасы не ҳаққында? 3) Коши шәртинің орынланыуы мүмкин болған мысаллар келтириң.

Ескертиу: Киши модуллардағы бақлау сорауларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллардың бақлау сораулары тийкарында дүзилген тест

4.3.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкин болған жууаплар	
1.	Өсиуши функция шекли лимитке ийе болыуы ушын қандай шәрт орынланыуы керек?	А	Функция жоқарыдан шегараланған бұлыуы керек.
		Б	Функция жоқарыдан шегараланбаған болыуы керек.
		В	Ғеш қандай шәрт керек емес.
2.	Өсиуши функция жоқарыдан шегараланбаған болса, оның лимити неге	А	жоқ.
		Б	$+\infty$ ке тең.
		В	$-\infty$ ке тең.

	тең?		
3.	Кемейиўши функция шекли лимитке ийе болыўы ушын қандай шәрт орынланыўы керек?	А	Функция төменнен шегараланбаған болыўы керек.
		Б	Функция жоқарыдан шегараланған болыўы керек.
		В	Функция төменнен шегараланған болыўы керек.
4.	Кемейиўши функция жоқарыдан шегараланбаған болса, оның лимити неге тең?	А	$+\infty$ ке тең.
		Б	$-\infty$ ке тең.
		В	Шекли санға тең.
5.	Ким тәрәпинен лимиттің бар екенлиги ҳаққындағы улыўма теорема дәлилленген?	А	Лагранж.
		Б	Гейне .
		В	Коши .
6.	Монотон функция анықламасында түсип қалдырылған сөзди табың. Өсиўши, өспейтуғын ... ҳәм кемейетуғын функциялар монотон функция делинеди.	А	Кемейиўши.
		Б	Өсиўши.
		В	Кемеймейтуғын.
7.	Шегараланған функция анықламасында түсип қалған сөз ҳәм символларды анықлаң. $y = f(x)$ ушын $\exists M > 0$ болып, ... ушын $ f(x) \leq M$ орынланса, $y = f(x)$ функция (a, b) да шегараланған	А	(a, b)
		Б	$\exists M > 0$
		В	$\forall x \in (a, b)$

	делинеди.		
8.	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялардың хәр бириниң лимити шексиз болып қалса не қыламыз?	А	Бул жағдайда анық емес аңлатпаларға келемиз.
		Б	Хәр қандай әмел қоллансақ та шексиз болып қала береді.
		В	Хеш қандай әмел қоллау шәрт емес.
9.	$f(x)$ функция a нокатта шекли лимитке ийе болыуы ушын қандай шәрт орынланыуы керек?	А	Бул функция ушын a нокатта Коши шәртиниң орынланыуы зәрурли хәм жеткиликли.
		Б	Бул функция ушын a нокатта Коши шәртининг орынланыуы зәрурли.
		В	Коши шәртиниң орынланыуы жеткиликли.
10.	$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ функция ушын $x = 0$ нокатта Коши шәрти ...	А	орынланады.
		Б	орынланбайды.
		В	$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ функция ушын $x = 0$ нокатта анықланбаған.

Киши модулардың оқыу шынығыуы түри хәм типи, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

4.3.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим кураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын кураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.

Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия құраллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жумыслар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялар хәм дидактикалық материаллар

4.3.6-кесте

Оқытыудың техникалық құраллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели құраллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

4. ТӨРТІНШІ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ТӨРТІНШІ ОРТА МОДУЛИ ТЕМАСЫ: (Лекция) Шексіз үлкен хәм шексіз киши функциялар. Функцияларды салыстырыў

Киши модулар:

1. Шексіз үлкен хәм шексіз киши функциялар;
2. Шексіз үлкен хәм шексіз киши функциялардың қәсийетлери;
3. Функцияларды салыстырыў;
4. Төртінші үлкен модульдың төртінші орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Шексіз үлкен хәм шексіз киши функциялар.

Бизге x көплек берилген болып, a болса оның лимит ноқаты болсын. Бул көплекте $f(x), g(x)$ функция анықланған.

Анықлама. Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити нольге тең болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да **шексіз киши функция** деп аталады.

Анықлама. Егер $x \rightarrow a$ да $g(x)$ функцияның лимити ∞ болса, $g(x)$ функция $x \rightarrow a$ да **шексіз үлкен функция** деп аталады.

Екинши киши модуль: Шексіз үлкен хәм шексіз киши функциялардың қәсийетлери

1. Шекли сандағы шексіз киши функциялар қосындысы шексіз киши функция болады.

2. Шегараланған функцияның шексіз киши функция менен көбеймеси шексіз киши функция болады.

3. Егер $f(x)(f(x) \neq 0)$ шексіз киши функция болса, $\frac{1}{f(x)}$ шексіз үлкен функция болады.

4. Егер $g(x)(g(x) \neq 0)$ шексіз үлкен функция болса, $\frac{1}{g(x)}$ шексіз киши функция болады.

Үшінші киши модуль: Функцияларды салыстырыу

Анықлама. Егер $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ушын сондай турақлы $\delta > 0$ хәм $c > 0$ табылсын, барлық $x \in U_\delta(a)$ лар ушын

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

теңсизлик орынланса, бул жағдайда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияға қарағанда шегараланған делинеди.

Анықлама. Егер $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ушын $f(x) = o(g(x))$ хәм $g(x) = o(f(x))$ қатнастары орынлы болса, онда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар бир тәртіпте функциялар делинеди.

Анықлама. Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ($x \neq 0$ да $g(x) \neq 0$) ушын

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

болса, онда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар эквивалент функциялар деп аталады.

Анықлама. Егер $f(x)$ хәм $g(x)$ шексиз киши функциялар ушын $f(x) = \alpha(x)g(x)$ теңлик орынлы болып, онда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ болса, онда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ қа қарағанда жоқары тәртіпте шексиз киши функция деп аталады. Ол

$$f(x) = o(g(x))$$

түрінде белгиленеди.

Теорема. $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ($x \neq 0$ да $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$) эквивалент болыуы ушын

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= o(g(x)) \\ g(x) - f(x) &= o(f(x)) \end{aligned}$$

теңлиги орынлы болыуы зәрүрли хәм жеткиликли.

Төртінші киши модуль: Төртінші үлкен модульдің төртінші орта модуль жойбары.

Төртінші үлкен модуль құрамындағы төртінші орта модульдің ұлыма мақсәти

4.4.1-кесте

Шексиз үлкен хәм шексиз киши функцияларға анықлама берип, олардың қәсийетлерин хәм де функцияларды салыстырыў ушын базы белгилер менен бир қанша анықлама хәм теоремаларды дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

Биринши орта модульдің киши модульларының атлары хәм мақсетлери

4.4.2-кесте

№	Киши модульлар аты	Киши модульлардың мақсәти
1.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялар.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың анықламасын мысаллар жәрдемінде студентлерге түсиндириў.
2.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың қәсийетлери.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың қәсийетлерин студентлерге үйретиў.
3.	Функцияларды салыстырыў.	Функцияларды салыстырыў ушын базы белгилерди киритиў, анықлама хәм теоремаларды дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

4.4.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Шексиз үлкен функция, шексиз киши функция.	1) Шексиз үлкен функция деп қандай функцияға айтамыз? 2) Шексиз киши функцияға анықлама бериң.

		3) Шексиз үлкен хәм шексиз киши функцияларға мысал келтириң.
2.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың қәсийетлери.	1) Шекли сандағы шексиз киши функциялар қосындысы қандай функция болады? 2) Шегараланған функцияның шексиз киши функция менен көбеймеси қандай функция болады? 3) Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың қәсийетлери неше?
3.	Салыстырыў белгилери, шегараланған функция, бир тәртипли функция, эквивалент функция, жоқары тәртипли шексиз киши функция.	1) Қандай салыстырыў белгилерин билесиз? 2) Функция шегараланған болыўы ушын қандай шәрт болыўы керек? 3) Бир тәртипли функция деп қандай функцияға айтамыз? 4) Эквивалент функцияларға мысал келтириң. 5) Қандай функция жоқары тәртипли шексиз киши функция болады?

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

Киши модуллердың бақлаў сораўлары тийкарында дүзилген тест

4.4.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Шексиз үлкен функция деп қандай функцияға айтамыз?	А	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити нольге тең болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз үлкен функция деп аталады.
		Б	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити ∞ болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз үлкен функция деп

			аталады.
		В	Егер $x \rightarrow \infty$ да $f(x)$ функцияның лимити ∞ болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз үлкен функция деп аталады.
2.	Шексиз киши функцияға анықлама берің.	А	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити нольге тең болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз киши функция деп аталады.
		Б	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити ∞ болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз киши функция деп аталады.
		В	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функцияның лимити ∞ болса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да шексиз киши функция деп аталады.
3.	Шекли сандағы шексиз киши функциялар қосындысы қандай функция болады?	А	Шексиз үлкен.
		Б	Шексиз киши.
		В	Анықланбаған.
4.	Шегараланған функцияның шексиз киши функция менен көбеймеси қандай функция болады?	А	Шексиз үлкен.
		Б	Анықланбаған.
		В	Шексиз киши.
5.	Шексиз үлкен хәм шексиз киши функциялардың қасиетлери неше?	А	3
		Б	5
		В	4
6.	Егер $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ушын $f(x) = o(g(x))$ хәм $g(x) = o(f(x))$ қатнастары орын-	А	Эквивалент функциялар.
		Б	Бир тәртіпті функциялар.
		В	Жоқары тәртіпті шексиз киши функция.

	лы болса, онда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ... деп аталады.		
7.	Егер $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ($x \neq 0$ да $f(x) \neq 0$) ушын $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ болса, онда $x \rightarrow a$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар ...	А	Эквивалент функциялар.
		Б	Бир тәртіпли функциялар.
		В	Жоқары тәртіпли шексиз киши функция.
8.	Егер $f(x) \neq 0$ шексиз киши функция болса, $\frac{1}{f(x)}$...	А	Шексиз үлкен функция болады.
		Б	Анықланбаған.
		В	Шексиз киши функция болады.
9.	$x \rightarrow a$ да $f(x) = x, g(x) = 2x + x \sin x$ қандай функциялар?	А	Хеш қандай байланысы жоқ.
		Б	Бир тәртіпли функциялар.
		В	Эквивалент функциялар.
10.	$f(x) = s$ функция $x \rightarrow a$ да қандай функция болады?	А	Шексиз киши.
		Б	Шексиз үлкен.
		В	Жоқары тәртіпли функция.

Киши модулардың оқыу шынығыуы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

4.4.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу)

	ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	Жазба жұмыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

4.4.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

V. БЕСИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Функция хәм оның лимити

(3 лекция модули, 4 әмелий шынығыў модули)

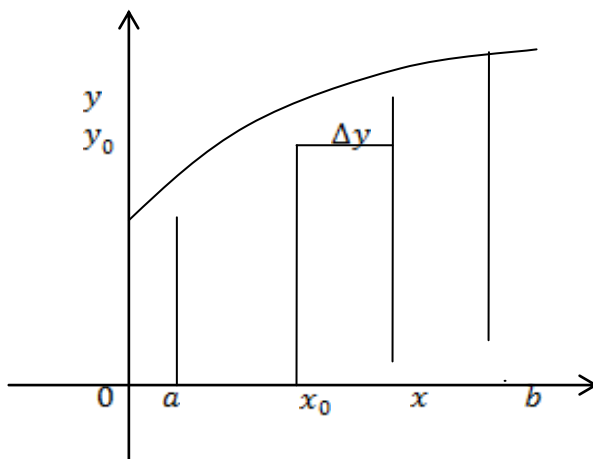
1. БЕСИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Функция үзликсизлиги анықламалары. Үзликсиз функциялар үстінде әмеллер

Киши модуллер:

1. Функция үзликсизлиги анықламалары;
2. Үзликсиз функциялар үстінде әмеллер;
3. Бесинши үлкен модульдың жойбары.

Биринши киши модуль: Функция үзликсизлиги анықламалары

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда анықланған болсын. (a, b) интервалға тийисли қәлеген x_0 нокатты аламыз. Бул нокатқа функцияның $y_0 = f(x_0)$ мәниси сәйкес келеди. Басқа x нокатты аламыз, $x \in (a, b)$. Оған функцияның $y = f(x)$ мәниси сәйкес келеди. $x - x_0$ айырма x аргументтиң x_0 нокаттағы арттырмасы делинеди хәм Δx менен белгиленеди. $f(x) - f(x_0)$ айырма $f(x)$ функцияның аргумент арттырмасы делинеди хәм Δy менен белгиленеди, яғный $x - x_0 = \Delta x$, $f(x) - f(x_0) = \Delta y$



1-чизма

Буннан $x = x_0 + \Delta x$,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (1)$$

Δx хәм Δy арттырмаларды иймек сызық бойлап ҳәрекетленип атырған ноқат координаталарының өзгериуи деп аталады.

1-анықлама. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта хәм оның дөгерегинде анықланған болып,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2)$$

болса, $y = f(x)$ функция x_0 **ноқатта үзликсиз** делинеди.

2-анықлама. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта хәм оның дөгерегинде анықланған болып, қәлеген $\varepsilon > 0$ сан ушын сондай $\delta > 0$ сан бар болса,

$$|x - x_0| < \delta$$

шәртти қанаатландырыушы қәлеген x ушын

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (3)$$

теңсизлик орынланса, $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта **үзликсиз** делинеди.

Егер (3) теңсизликти $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ деп жазсақ, оннан

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ келип шығады.}$$

3-анықлама. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта хәм оның дөгерегинде анықланған болып, аргументтиң шексиз киши арттырмасына функцияның шексиз киши арттырмасы сәйкес келсе, яғный

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (4)$$

болса, функция x_0 **ноқатта үзликсиз** делинеди.

4-анықлама. Функцияның шеп хәм оң лимитлери x_0 ноқатта бар хәм өз ара тең болса, $y = f(x)$ функция x_0 **ноқатта үзликсиз** делинеди.

Бул анықламадан көринеди:

1) $f(x)$ функция x_0 ноқатта хәм оның дөгерегинде анықланған

2) бир тәреплеме лимитлер бар хәм олар өз-ара тең,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

3) бул улыўма лимит функцияның x_0 ноқаттағы лимитине тең.

(4.4.2) лимитти төмендегише жазыў мүмкин:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$$

5-анықлама. Егер $y = f(x)$ функция $(a, x_0]$ аралықта анықланған хәм $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ болса, бул функция x_0 ноқатта **шептен үзликсиз** делинеди.

6-анықлама. Егер $y = f(x)$ функция $[x_0; b)$ аралықта анықланған хәм $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ болса, бул функция x_0 ноқатта **оңнан үзликсиз** делинеди.

Екинши киши модуль: Үзликсиз функциялар үстінде әмеллер

1-қәсийет. Егер $f(x)$ хәм $\varphi(x)$ функциялар x_0 ноқатта үзликсиз болса, онда $f(x) \pm \varphi(x)$ функция да x_0 ноқатта үзликсиз.

2-қәсийет. Егер $f(x)$ хәм $\varphi(x)$ функциялар x_0 ноқатта үзликсиз болса, онда $f(x) \cdot \varphi(x)$ көбейме де x_0 ноқатта үзликсиз болады.

3-қәсийет. Егер $f(x)$ хәм $\varphi(x)$ функциялар x_0 ноқатта үзликсиз болса, онда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ тийинди де x_0 ноқатта үзликсиз болады, бул жерде $\varphi(x) \neq 0$.

Үшинши киши модуль: Бесинши үлкен модульдың жойбары.

Бесинши үлкен модуль қурамындағы биринши орта модульдың улыўма мақсети

5.1.1-кесте

Функция үзликсизлигиниң Коши хәм Гейне анықламаларын, функцияның бир тәреплеме үзликсизлигин мысаллар жәрдемінде студентлерде көнликпе пайда етиў хәм үзликсиз функциялар үстінде әмеллерге тийисли теоремаларды дәлиллей хәм мысаллар жәрдемінде оларға түсиндирий.
--

**Биринши орта модулдың киши модулларының
атлары хәм мақсетлери**

5.1.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Функция үзликсизлиги анықламалары.	Функция үзликсизлигиниң Коши хәм Гейне анықламаларын хәм де функцияның бир тәреплеме үзликсизлигин студентлерге түсиндириў, мысаллар жәрдемінде оларда көнликпе пайда етиў.
2.	Үзликсиз функциялар үстинде әмеллер.	Үзликсиз функциялар үстинде әмеллерге тийисли теоремаларды дәлиллеў хәм мысаллар жәрдемінде студентлерге түсиндириў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

5.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Аргумент хәм функцияның арттырмасы, функцияның ноқаттағы үзликсизлиги, функцияның бир тәреплеме үзликсизлиги.	1) Аргумент хәм функцияның арттырмасы ҳаққында түсиник. 2) Функцияның ноқаттағы үзликсизлиги ҳаққында анықламалар. 3) Функцияның бир тәреплеме үзликсизлиги ҳаққында анықламалар.
2.	Үзликсиз функциялар үстинде әмеллер (қосындысы, айырмасы, көбеймеси, қатнасы)	1) Үзликсиз функциялар қосындысы қандай функция болады? 2) Үзликсиз функциялар айырмасы қандай функция болады? 3) Үзликсиз функциялар көбеймеси қандай функция болады? 4) Үзликсиз функциялар қатнасы

	қандай функция болады?
--	------------------------

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше тәлимде пайдаланады.

**Киши модуллердың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

5.1.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Аргумент хәм функцияның арттырмасы берилген жуўапты көрсетиң.	А	$\Delta y = f(x) - f(x_0), \Delta x = x - x_0$
		Б	$\Delta y = f(x_0) - f(x), \Delta x = x - x_0$
		В	$\Delta y = f(x_0) - f(x), \Delta x = x_0 - x$
2.	Функцияның ноқаттағы үзликсизлиги ҳақындағы анықламасы қандай?	А	Функцияның шеп хәм оң лимитлери x_0 ноқатта бар хәм өз-ара тең болса, $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз делинеди.
		Б	Функцияның шеп хәм оң лимитлери x_0 ноқатта бар хәм өз-ара тең болмаса, $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз делинеди.
		В	Функцияның лимити бар болса, $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз делинеди.
3.	Егер $y = f(x)$ функция $[x_0; b)$ аралықта анықланған хәм $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ болса, бул функция x_0 ноқатта	А	шептен үзликсиз делинеди.
		Б	үзликсиз емес.
		В	оңнан үзликсиз делинеди.
4.	Егер $y = f(x)$ функция $(a, x_0]$ аралықта анықланған хәм $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ болса, бул функ-	А	шептен үзликсиз делинеди.
		Б	үзликсиз емес.
		В	оңнан үзликсиз делинеди.

	ция x_0 нокатта		
5.	Егер $f(x)$ хэм $\varphi(x)$ функциялар x_0 нокатта ... болса, онда $f(x) \pm \varphi(x)$ функция хэм x_0 нокатта үзликсиз болады.	А	үзликсиз.
		Б	анықланған.
		В	үзликсиз емес.
6.	... онда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ тийинди де x_0 нокатта үзликсиз болады, ... нокатлардың орнына сәйкес жууапты табың?	А	Егер $f(x)$ хэм $\varphi(x)$ функциялар x_0 нокатта үзликсиз болса,бул жерде $\varphi(x) = 0$
		Б	Егер $f(x)$ хэм $\varphi(x)$ функциялар x_0 нокатта үзликсиз болса, ... бул жерде $\varphi(x) \neq 0$
		В	Егер $f(x)$ хэм $\varphi(x)$ функциялар x_0 нокатта үзликсиз емес болса, ... бул жерде $\varphi(x) \neq 0$.
7.	Функциялардың көбеймеси нокатта үзликсиз болыуы ушын қандай шәрт орынланыуы керек?	А	Берилген функциялар бул нокатта үзликсиз болыуы шәрт емес.
		Б	Берилген функциялар бул нокатта үзликсиз болса.
		В	Берилген функциялар үзликсиз болса.

Киши модулардың оқыу шынығыу түри хэм типи, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хэм методлар

5.1.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хэм методлар:	Түсиндириу, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәубет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хэм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим	Жеке түрде, группалық, массалық.

формалары:	
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия құраллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жұмыстар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

5.1.6-кесте

Оқытыўдың техникалық Құраллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели құраллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

2. БЕСИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Құрамалы хәм монотон функцияның үзликсизлиги. Үзликсиз функциялардың қәсийетлери

Киши модуллар:

1. Құрамалы хәм монотон функцияның үзликсизлиги;
2. Үзликсиз функциялардың қәсийетлери;
3. Бесинши үлкен модулдың екинши орта модул жойбары.

Биринши киши модул: Құрамалы хәм монотон функцияның үзликсизлиги

$f(x)$ функция x аралықта анықланған болсын.

1. Теорема. Егер $f(x)$ функция x аралықта монотон функция болса, онда бул аралықтың кәлеген ноқатында я үзликсиз болады, ямаса тек биринши түр үзилиске ийе болады.

Дәлил. $f(x)$ функция x аралықта өсиўши болсын. x тиң сондай a ноқатын алайық, қандай да бир $\delta > 0$ ушын $(a - \delta; a + \delta) \subset X$ болсын. Шәртке қарата $\forall x \in (a - \delta; a)$ ушын $f(x) \geq f(a)$ хәм $\forall x \in (a; a + \delta)$ ушын $f(x) \leq f(a)$ болады. Демек, $f(x)$ функция $(a - \delta; a)$ да жоқарыдан, $(a; a + \delta)$ да төменнен шегараланған болады. Монотон функция лимити теоремаға тийкарланып

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \leq f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \geq f(a)$$

болады.

Егер $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$ болса, функция a ноқатта үзликсиз болады.

Егер $f(a-0) < f(a+0)$ болса, бул ноқатта функция биринши түр үзилиске ийе болады.

Егер a ноқат x аралықтың шетки ноқаты болса, жоқарыдағыға қарата бул ноқаттағы бир тәрепleme лимиттиң бар екенлигин көрсетиў жетерли. Бизге мәлим, $f(x)$ функция x аралықта кемейиўши болған жағдайда да тастыйықлаўларымыз тап жоқарыдағыдай болады. Теорема дәлилленди.

2. Теорема. Егер $f(x)$ функция x аралықта монотон функция болып, оның мәніслер көплиці $Y_f = \{f(x): x \in X\}$ қандай да бір аралықтан ибарат болса, онда бул функция x та үзликсиз болады.

Дәлил. Анықлық ушын $f(x)$ функция x аралықта өсіуші болсын. Пикир жүритейик, $f(x)$ функция теореманың шәртлерин қанаатландырса да, ол қандай да бир $a \in X$ ноқатта үзликсиз болмасын, бул түрде 1-теоремаға қарата ол биринши түр үзилиске ийе болады, яғный $f(a-0) < f(a+0)$ болады. Нәтийжеде

$$x < a \text{ болса, } f(x) \leq f(a-0)$$

$$x > a \text{ болса, } f(x) \geq f(a+0)$$

болып, $f(x)$ функция $f(a-0) < f(a+0)$ интервалдағы $f(a)$ дан басқа мәніслерин хеш бир $x \in X$ да қабыл қыла алмайды. Бул болса, $f(x)$ тиң мәніслер көплиці Y_f қандай да бир аралықтан ибарат екенлигине карама-қарсы. Демек, функция a ноқатта биринши түр үзилиске ийе бола алмайды. Теорема дәлилленди.

$y = f(x)$ функция x көплицте, $z = \varphi(f(x))$ курамалы функция дүзилген болсын.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функция $a \in X$ ноқатта $z = \varphi(y)$ функция басқа a ноқатқа сәйкес келген $y_a = f(a)$ ноқатта үзликсиз болса, $z = \varphi(f(x))$ курамалы функция a ноқатта үзликсиз болады.

1-қәсийет. Егер $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ хәм $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$ лимитлер бар болса, бундай жағдайда x_0 ноқатта $f[\varphi(x)]$ курамалы функция бар, соның менен бирге

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

теңлик орынлы болады.

2-қәсийет. Егер $y = \varphi(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз, соның менен бирге $\varphi(x_0) = y_0$ болып, $f(y)$ болса y_0 ноқатта үзликсиз функция болса, бул жағдайда $f[\varphi(x)]$ курамалы функция x_0 ноқатта үзликсиз болады.

3-қәсийет. Тийкары элементар функциялар өзлери анықланған барлық ноқатларда үзликсиз болады.

4-қасиет. Барлық элементар функциялар өзлерінің анықланыу областларында үзлексиз.

Екинши киши модуль: Үзлексиз функциялардың қасиетлери

Функцияның ноқат дөгерегиндеги қасиетлери оның локаль қасиетлери делинеди.

1. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзлексиз болса, бул жағдайда x_0 ноқаттың жеткилики киши дөгерегинде функция шегараланған болады.

2. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзлексиз хәм $f(x) \neq 0$ болса, бул жағдайда x_0 ноқаттың жеткилики киши дөгерегинен алынған барлық x ноқатларда функция мәнислери белгиси $f(x_0)$ диң белгиси сыяқлы болады.

3. Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзлексиз болса, бул жағдайда $\forall \varepsilon > 0$ ушын x_0 ноқаттың жеткилики киши дөгереги табылады, бул дөгерегинен алынған қәлеген x', x'' ноқатлар ушын $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ болады.

Сегментте үзлексиз болған функцияның қасиетлери (глобаль қасиетлери)

Енди x көплик түринде $[a; b]$ сегментти, яғный $X = \{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a; b]$ көпликти алып, бул көпликте анықланған хәм үзлексиз болған функцияның қасиетлерин үйренемиз.

Теорема. (Больцано-Кошининг биринши теоремасы) Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментте анықланған хәм үзлексиз болып, сегменттиң шетки ноқатларында хәр түрли белгиге ийе мәнислерине ийе болса, бул жағдайда сондай c ($a < c < b$) ноқат табылады, бул ноқатта функция нольге айланады: $f(x)$

Теорема. (Больцано-Кошидин екинши теоремасы) Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментте анықланған хәм үзлексиз болып, оның шетки ноқатлары да $f(a) = A$, $f(b) = B$ мәнислерине ийе хәм $A \neq B$ болса, A хәм B арасында хәр қандай C сан алынғанда да a менен b арасында сондай c ноқат табылады $f(c) = C$ болады.

Дәлил. Анықтық үшін $A < B$ болсын, кәлеген $C \in (A; B)$ алайық. Жәрдемши $\varphi(x) = f(x) - C$ функция дүземіз. Бизге мәлим, $A - C < 0, \varphi(b) = B - C > 0$ мәніслерін қабыл етеди. Бул жағдайда Больцано-Кошидің биринши теоремасына қарата a менен b арасында сондай c нокат табылады $\varphi(c) = 0$, яғный $f(c) = C$ болады. Бул болса теореманы дәлиллейди.

Теорема. (Вейерштрасстың биринши теоремасы) Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментте анықланған хәм үзликсиз болса, функция бул сегментте шегараланған болады.

Дәлил. Керисинше пикир жүритсек, яғный $[a; b]$ да үзликсиз болған $f(x)$ функция шегараланған болсын, онда $[a; b]$ да сондай x_n нокат табылады, бул нокат үшін $|f(x_n)| > n$ теңсизлиги орынлы болады. $\{x_n\}$ избе-изликтен Больцано-Вейерштрасстың леммасына тийкарланып жыйнақлы үлес $\{x_{n_1}\}$ избе-излик ажыратыў мүмкин $x_{n_1} \rightarrow x_0 : x_0 \in [a; b]$

Енди $f(x)$ функция $[a; b]$ да үзликсиз болғанлықтан $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ болады. Бул болса, $|f(x_n)| > n$ яғный $|f(x_n)| \rightarrow \infty$ деп қылған пикиримизге қарама-қарсы. Демек, функция $[a; b]$ да шегараланған. Теорема дәлилленди.

Теорема. (Вейерштрасстың екинши теоремасы) Егер $f(x)$ функция $[a; b]$ сегментте анықланған хәм үзликсиз болса, функция бул сегментте өзиниң дәл жоқары хәм дәл төменги шегараларына ериседи, яғный $[a; b]$ да сондай x_1, x_2 нокатлар табылады $f(x_1) = \sup_{x \in [a; b]} \{f(x)\}, f(x_2) = \inf_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ теңликлери орынлы.

Үшинши киши модул: Бесинши үлкен модулдың екинши орта модул жойбары.

Бесинши үлкен модул қурамындағы екинши орта модулдың улыўма мақсети

5.2.1-кесте

Студентлерге курамалы хәм монотон функцияның нокаттағы үзликсизлигин, лимитлерди есаплағанда функция үзликсизлигинен пайдаланып билиўди хәм де үзликсиз функциялардың локал хәм глобал қәсийетлерин үйретиў, Вейерштрасстың биринши хәм

екинши теоремаларының дәлилленіуін оларға түсиндириу.

Биринши орта модулдың киши модулларының атамалары хәм мақсетлери

5.2.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Қурамалы хәм монотон функцияның үзликсизлиги.	Қурамалы хәм монотон функцияның ноқаттағы үзликсизлигин хәм де лимитлерди есаплағанда функция үзликсизлигинен пайдалана билиуди студентлерге үйретиу.
2.	Үзликсиз функциялардың қасиетлери.	Үзликсиз функциялардың локал хәм глобал қасиетлерин студентлерге үйретиу, Вейерштрасстың биринши хәм екінши теоремаларының дәлилленіуін түсиндириу.

Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

5.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлау сораулары
1.	Қурамалы хәм монотон функцияның ноқаттағы үзликсизлиги.	1. Қурамалы функцияның ноқаттағы үзликсизлигинің анықламасы қандай? 2. Монотон функцияның ноқаттағы үзликсизлигинің анықламасын айтып берің.
2.	Үзликсиз функциялардың локал хәм глобал қасиетлери, Вейерштрасстың биринши хәм екінши теоремалары.	1. Үзликсиз функциялардың қандай қасиетлери локал қасиетлери делинеди? 2. Глобал қасиетлерин айтып берің. 3. Вейерштрасстың биринши хәм екінши теоремаларын айтып берің.

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жумыс тапсырмаларында да пайдаланады.

**Киши модуллердың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

5.2.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Функция a ноқатта үзликсиз болыўы ушын қандай қатнас орынлы болыўы керек?	А	$f(a-0) = f(a) = f(a+0)$
		Б	$f(a-0) < f(a+0)$
		В	$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$
2.	Тийкарғы элементар функциялардың үзликсизлик қасийети қайсы жуўапта дурыс берилген?	А	Хақыйқый санлар көплигинде үзликсиз.
		Б	Өзлери анықланған барлық ноқатларда үзликсиз.
		В	Базы бир аралықта үзликсиз.
3.	Функцияның локал қасийетлери деген не?	А	Сегментте үзликсиз болған функцияның қасийетлери.
		Б	Аралықта үзликсиз болған функцияның қасийетлери.
		В	Функцияның ноқат дөгерегиндеги қасийетлери.
4.	Функцияның глобал қасийетлери деген не?	А	Сегментте үзликсиз болған функцияның қасийетлери.
		Б	Аралықта үзликсиз болған функцияның қасийетлери.
		В	Функцияның ноқат дөгерегиндеги қасийетлери.
5.	Егер $y = f(x)$ функция x_0 ноқатта үзликсиз болса, онда x_0 ноқаттың жеткилики киши дөгерегинде функция ... болады.	А	Шегараланған.
		Б	Шегараланбаған.
		В	Өсиўши.
6.	Егер $f(x)$ функция	А	Вейерштрассстың екинши

	[a,b] сегментте анықланған хәм үзликсиз болса, функция бул сегментте шегараланған болады. Кимнің теоремасы?		теоремасы.
		Б	Вейерштрасстың биринши теоремасы.
		В	Больцано-Кошидің биринши теоремасы.
7.	Элементар функциялар ушын үзликсизлик қасиети қайсы жуыпта дурыс берилген?	А	Хақыйқый санлар көплигинде үзликсиз.
		Б	Өзлери анықланған барлық нокатларда үзликсиз.
		В	Өзлеринің анықланыў областларында үзликсиз.
8.	Вейерштрасстың екинши теоремасы не хаққында?	А	Функция сегментте дәл жоқары хәм дәл төменги шегараларына ерисиўи хаққында.
		Б	Функцияның жоқары хәм төменги шегараларына ерисиўи хаққында.
		В	Функцияның базы бир аралықта дәл жоқары хәм дәл төменги шегараларына ерисиўи хаққында.
9.	Функцияның қандай да бир нокатта нольге айланыўи хаққындағы теорема кимге тийисли?	А	Вейерштрасстың екинши теоремасы.
		Б	Больцано-Кошидің биринши теоремасы.
		В	Больцано-Кошидің екинши теоремасы.
10.	Егер $f(x)$ функция x аралықта монотон функция болса, бул аралықтың қалеген нокатында я үзликсиз болады, ямаса тек ...	А	сапластырылатуғын үзилиске ийе болады.
		Б	екинши түр үзилиске ийе болады.
		В	биринши түр үзилиске ийе болады.

Киши модуллардың оқыў шынығыў түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

5.2.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түрі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыру.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирий, айтып бериу, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқыту шәратлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

5.2.6-кесте

Оқытудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери.

3. БЕСИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Функцияның үзилиси, үзилистин түрлери. Функцияның тең өлшемлі үзликсизлиги . Кантор теоремасы

Киши модулар:

1. Функцияның үзилиси, үзилистин түрлери;
2. Функцияның тең өлшемлі үзликсизлиги . Кантор теоремасы;
3. Бесинши үлкен модулдың үшінши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Функцияның үзилиси, үзилис точканың түрлери

Анықлама. Егер x_0 нокатта $y = f(x)$ үшін төмендеги шарттерден кемінде бирейи орынланса, x_0 нокат $f(x)$ функцияның үзилис нокаты, функцияның өзи болса **үзликли функция делинеди.**

- 1) функция x_0 нокатта анықланбаған;
- 2) функция x_0 нокатта анықланған, лекин бир тәреплене лимиттерден бирейи жоқ болса;
- 3) функция x_0 нокатта анықланған, бир тәреплене лимиттер бар, лекин олар өз-ара тең емес;
- 4) функция x_0 нокатта анықланған, бир тәреплене лимиттер бар хәм олар өз-ара тең, лекин олар функцияның бул нокаттағы мәнисине тең емес, яғный $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$

Функцияның үзилис нокатлары 3 түрге бөлинеди:

1. Сапластырылатуғын үзилис;
2. Биринши түр үзилис;
3. Екинши түр үзилис.

Анықлама. x_0 нокатта $y = f(x)$ анықланбаған, бирақ бир тәреплене лимиттер бар хәм өз-ара тең болса, x_0 нокат сапластырылатуғын **үзилис нокат** делинеди.

Анықлама. Егер $f(x)$ функция x_0 нокатта анықланған ямаса анықланбаған, бирақ бир тәреплене лимиттер бар хәм олар өз-

ара тең болмаса, онда x_0 нокат биринши түр үзилис нокаты делинеди. $k' = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ саны функцияның x_0 **ноқаттағы секириуі** делинеди.

Анықлама. Егер x_0 нокатта бир тәрептеме лимитлерден кемінде биреуі бар емес ямаса шексизликке тең болса, x_0 нокат **екинши түр үзилис нокаты** делинеди.

Екинши киши модуль: Функцияның тең өлшемлі үзлексизлігі . Кантор теоремасы

Анықлама. $y = f(x)$ функция (a,b) аралықтың хәр бир нокатында үзлексиз болса, ол бул аралықта **үзлексиз функция** делинеди.

Анықлама. $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндинің барлық нокатларында үзлексиз болса, ол кесиндиде **үзлексиз функция** делинеди.

1-қәсіyet. Функцияның шегараланғанлығы хәкқындағы теорема.

Егер $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде үзлексиз болса, ол бул кесиндиде шегараланған функцияда болады, яғный сондай турақлы шекли $\bar{y}, \bar{y}$ санлар бар, барлық $x \in [a,b]$ мәнислер ушын $\bar{y} \leq f(x) \leq \bar{y}$ теңсизлик орынлы.

Егер интервал хәм ярым интервал алынатуғын болса, бул қәсіyet туўры болмаўы мүмкин.

2-қәсіyet. Функцияның ең киши хәм ең үлкен мәнисинің бар екенлігі хәкқындағы теорема.

Егер $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде үзлексиз болса, бул жағдайда да берилген функция бул кесиндиде өзинің ең киши хәм ең үлкен мәнисине ериседи, яғный сондай $x_1, x_2 \in [a,b]$ бар, барлық $x \in [a,b]$ ушын $f(x_1) \geq f(x)$ хәм $f(x_2) \leq f(x)$ теңсизликлер орынлы болады.

3-қәсіyet. Аралық мәнис хәкқындағы теорема.

Егер $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде үзлексиз болып, буның менен бирге $\bar{y}, \bar{y}$ лар функцияның $[a,b]$ дағы ең киши хәм ең үлкен мәнислери болса, бул жағдайда функция бул кесиндиде $\bar{y}$ хәм $\bar{y}$ арасындағы барлық аралық мәнислерди қабыл

қылады, яғный $\delta < \mu < \delta$ шәртти қанаатландырыўшы қәлеген μ сан ушын кеминде бир $x = c \in [a, b]$ сондай ноқат бар, оның ушын $f(c) = \mu$ теңлик туўры болады.

4-қәсийет. Функцияның нольге айланыўы ҳаққындағы теорема.

Егер $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да үзликсиз хәм кесиндиниң ақырларында ҳәр түрли белгиге ийе мәнислерди қабыл қылса, онда $[a, b]$ кесиндиде кеминде бир сондай ноқат бар, бул ноқатта функция мәниси нольге айланады.

Теорема. (Кантор теоремасы) Егер $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да анықланған хәм үзликсиз болса, функция бул сегментте тең өлшемли үзликсиз болады.

Үшинши киши модул: Бесинши үлкен модулдың үшинши орта модул жойбары.

Бесинши үлкен модул қурамындағы үшинши орта модул улыўма мақсети

5.3.1-кесте

Функцияның ноқаттағы үзилиси хәм үзилистиң түрлерин, функцияның үзликсизлиги менен оның тең өлшемли үзликсизлиги айырмашылығын түсиндириў хәм де Кантор теоремасын дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атамалары хәм мақсетлери

5.3.2-кесте

№	Киши модуллар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Функцияның үзилиси, үзилистиң түрлери.	Функцияның ноқаттағы үзилиси хәм үзилистиң түрлерин мысаллар жәрдемінде студентлерге түсиндириў.
2.	Функцияның тең өлшемли үзликсизлиги . Кантор теоремасы.	Функцияның үзликсизлиги менен оның тең өлшемли үзликсизлиги айырмашылығын түсиндириў хәм Кантор теоремасын дәлиллеўди студентлерге үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

5.3.3-кесте

қ/т	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Функцияның ноқаттағы үзилиси, үзилистиң түрлери, сапластырылатуғын үзилис, биринши хәм екинши түр үзилислер.	1. Функцияның үзилис ноқатлары. 2. Функцияның ноқаттағы үзилиси. 3. Сапластырылатуғын үзилис. 4. Биринши хәм екинши түр үзилислер ҳақында айтып бериң.
2.	Функцияның үзликсизлиги, тең өлшемли үзликсизлиги, Кантор теоремасын дәлиллеў.	1. Үзликсиз функциялардың қәсийетлери. 2. Интервал хәм кесиндиде үзликсиз функциялардың анықламалары. 3. Кесиндиде үзликсиз функциялардың қәсийетлери. 4. Кантор теоремасы.

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жумыс тапсырмаларында да пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

5.3.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Функцияның үзилис ноқатлары неше түрге бөлинеди?	А	3
		Б	2
		В	5
2.	x_0 ноқатта $y = f(x)$ анықланбаған, лекин бир тәреплеме лимитлер бар хәм өз-ара тең болса, x_0 ноқат үзилистиң	А	Сапластырылатуғын үзилис.
		Б	Биринши түр үзилис.
		В	Екинши түр үзилис.

	қайсы түрине тийисли?		
3.	Егер $f(x)$ функция x_0 нокатта анықланған ямаса анықланбаған, бірақ бір тәрептеме лимитлер бар хәм олар өз-ара тең болмаса, онда ...	А	x_0 нокат екінші түр үзилис нокаты делинеди.
		Б	x_0 нокат бірінші түр үзилис нокаты делинеди.
		В	x_0 нокат сапластырылатуғын үзилис нокаты делинеди.
4.	$k = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ саны нени билдиреди?	А	Функцияның x_0 нокаттағы секириуі.
		Б	Функцияның x_0 нокаттағы арттырмасы.
		В	Хақыйқый сан.
5.	Егер x_0 нокатта бір тәрептеме лимитлерден кемінде биреуі де бар болмаса ямаса шексизликке тең болса ...	А	x_0 нокат екінші түр үзилис нокаты делинеди.
		Б	x_0 нокат бірінші түр үзилис нокаты делинеди.
		В	x_0 нокат сапластырылатуғын үзилис нокаты делинеди.
6.	$y = f(x)$ функция (a, b) аралықтың хәр бир нокатында үзликсиз болса, ол бул аралықта ...	А	Үзликсиз емес функция делинеди.
		Б	Үзликсиз функция делинеди.
		В	Анықланған делинеди.
7.	$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде қандай болса, өзиниң ең киши хәм ең үлкен мәнисине ериседи.	А	Бул кесиндиде үзликсиз болса.
		Б	Бул кесиндиде үзликли болса.
		В	Бул кесиндиде анықланған болса.
8.	Егер $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да үзликсиз хәм кесиндиниң ақырларында түрли белгиге ийе мәнислерди қабыл етсе, онда ...	А	$[a, b]$ кесиндиде функция мәниси нольге айланады.
		Б	Кемінде бир сондай нокат бар, бул нокатта функция мәниси нольге айланады.
		В	$[a, b]$ кесиндиде кемінде бир сондай нокат бар, бул нокатта

			функция мәнісі нольге айналады.
9.	$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ бу аңлатпа нени аңлатады?	А	x_0 нокат $f(x)$ функцияның үзіліс нокаты, функцияның өзі болса үздіксіз функция екенлігін.
		Б	x_0 нокатта $f(x)$ функцияның үздіксіз функция екенлігін.
		В	Бір тәрептілігі шектілігі бар екенлігін білдіреді.
10.	Кантор теоремасы не хакқында?	А	Функцияның сегменттегі тең өлшемлі үздіксізлігі хакқында.
		Б	Функцияның аралықтағы тең өлшемлі үздіксізлігі хакқында.
		В	Функцияның тең өлшемлі үздіксізлігі хакқында.

Киші модульдердің оқыу шынығыуы түрі, онда қолланылатуғын педагогикалық усул хәм методлар

5.3.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисуу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түрі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усул хәм методлар:	Түсиндируу, машқалалы сәубет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүрінде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазуу хәм көрсетуу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытуу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм	Жазба жұмыстар, бақлау, сәубетлер

баҳалаў:	даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.
----------	---------------------------------------

**Киши модуллардың педагогикалық процессте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

5.3.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшинши киши модуллар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

VI. АЛТЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛ — Функцияның туыңдысы хәм дифференциалы

(3 лекция модули, 6 әмелий сабақ модули)

1. Алтыншы үлкен модульдиң биринши орта модуль темасы: (лекция) Функция туыңдысының геометриялық хәм де механикалық мәнислери. Туыңды есаплаў кәделери хәм формулалары

Киши модульлар:

1. Функция туыңдысының геометриялық мәнислери;
2. Функция туыңдысының механикалық мәнислери;
3. Туыңды есаплаў кәделери хәм формулалары;
4. Алтыншы үлкен модульдиң биринши орта модульдиң жойбары

Биринши киши модуль: Функция туыңдысының геометриялық мәнислери

$y = f(x)$ функция D областында анықланған болсын. Ерки $x_0 \in D$ нокат алып хәм x_0 ге Δx өсим беремиз, $x_0 + \Delta x \in D$ болсын. Онда функция $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ өсим алады.

1-анықлама. Функцияның x_0 нокаттағы өсими Δy ти аргумент өсими Δx қа қатнасының $\Delta x \rightarrow 0$ деги лимити бар болса, онда бул лимит функцияның x_0 нокаттағы **туыңдысы** делинеди хәм төмендегише белгиленеди:

$$y'_{x=x_0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}, f'(x_0)$$

Демек,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (1)$$

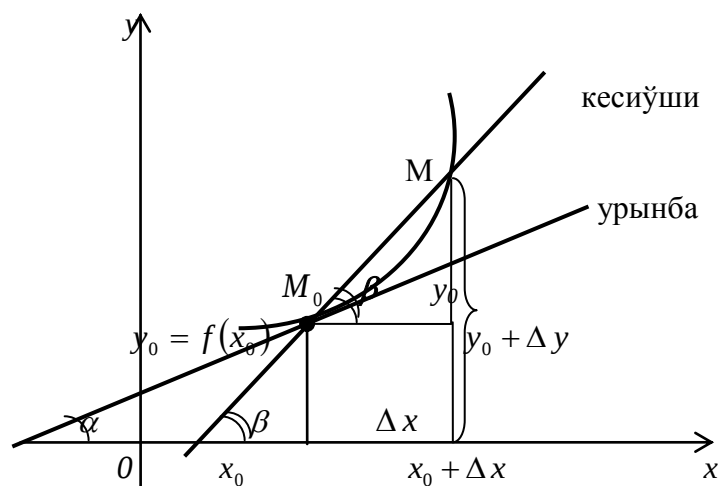
Егер аргумент x тың A областтағы ерки мәниси қаралып атырған болса, туыңды төмендегише жазылады:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (2)$$

Буд жерде лимитти есаплаўда x турақлы деп қаралады.

(1) хәм (2) формулалардан, туўынды функцияның өзгериў тезлигин аңлатады, яғный аргумент бир бирликке өзгергенде функция неше бирликке өзгериўин көрсетеди.

а) Туўындының геометриялық мәниси. x_0 ноқатты таңлап аламыз. $f(x_0) = |M_0\Phi|_{x_0}$ ға Δx өсим беремиз.



Функцияның өсими

$$f(x_0 + \Delta x) = |M_0M|.$$

M_0 хәм M ноқатлардан кесинди өткеремиз. Кесиндиниң қыяланыў мүйеши φ болсын. M ноқат $y = f(x)$ иймек сызық бойлап M_0 ноқатқа жақынлассын хәм $\Delta x \rightarrow 0$ болады. M_0M кесиндиси, M_0T ге умтылады. M_0T ның қыяланыў мүйеши α болсын, $\varphi \rightarrow \alpha$.

2-Анықлама. M_0M кесиндиниң $M \rightarrow M_0$ деги жағдайы M_0T иймек сызыққа M_0 ноқатта жүргизилген урынба делинеди. Сызылмадан, $|M_0E| = \Delta x, |ME| = \Delta y$ $\triangle MMT$ дан:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{|ME|}{|M_0E|} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \Delta x \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \alpha, \operatorname{tg} \varphi &\rightarrow \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \end{aligned} \quad (3)$$

болады.

$$(3) \text{ теңдіктен: } \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (4)$$

болатуғыны келип шығады.

Демек, x_0 нокатта $y = f(x)$ иймек сызыққа жүргизилген урынбаның мүйешлик коэффиценти функцияның сол нокаттағы туўындысына тең. Берилген $M_0(x_0, y_0)$ нокаттан өтип, ох көшериниң оң бағыты менен пайда болған урынбаның теңлемеси:

$$y - y_0 = K(x - x_0) \text{ ямаса } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

болады. Бул иймек сызыққа $M_0(x_0, y_0)$ нокатта жүргизилген урынбаның теңлемеси деп аталады.

Екинши киши модуль: Функция туўындысының механикалық мәнислери

б) Туўындының механикалық мәниси. Туўры сызықлы тең өлшеўли болмаған нокатның t ўақыт ишинде басып өткен жолы $S = S(t)$ болсын. Онда t_0 ўақыт аралығында басып өтилген жол $S = S(t_0)$ болып, $t = t_0 + \Delta t$ ўақыт ишинде басып өтилген жол болса, $S = S(t_0 + \Delta t)$ болады. Δt ўақыт ишинде басып өтилген жол $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ болады. $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ қатнас Δt ўақыт арасындағы орташа тезлик делинеди, бул қатнастың $\Delta t \rightarrow 0$ дағы лимити нокаттың t_0 ўақыттағы тезлигин анықлайды, бул бир заматтағы тезлик делинеди. $y = f(x)$ қандай байланысты аңлатпасын, Δy қатнас X ге қарата өзериўиниң орташа тезлигин, $y'(x_0)$ болса x_0 нокаттағы бир заматтағы өзгериў тезлигин аңлатады.

в) Туўындының экономикалық мәниси.

Кәрхана бир қыйлы өним ислеп шығарсын, онда ислеп шығарыў қәрежетлери, ол ислеп шығарыў көлеми x тың функциясы болады яғный $y = f(x)$. Мейли, ислеп шығарыў көлеми Δx ге өзгертсин, онда ислеп шығарыў қәрежетлери $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ге өзгередиди. Қәрежетлер өсими Δy тиң өним көлеми өсими Δx ге қатнасын дүземиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Бул теңлік өнім көлеминің бир бирлікке өзгергенде қәрежетлердің орташа өзгеріуін аңлатады.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

лимитке өтемиз, бул лимит туўынды болып, ислеп шығарыў лимит қәрежетлери делинеди.

Демек, ислеп шығарыў қәрежетлери функциясынан алынған туўынды өндиристін лимит қәрежетлерин аңлатады.

Үшінши киши модуль: Туўынды есаплаў қағыйдалары хәм формулалары

Енди еки функция қосындысы, айырмасы, көбеймеси хәм катнасының туўындыларын табыў қағыйдаларын келтиремиз. Соңынан элементар функциялардың туўындыларын есаплаймыз

$f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар (a,b) интервалда анықланған болсын.

1) Егер $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялардың хәр бири $x \in (a,b)$ ноқатта $f'(x)$ хәм $g'(x)$ туўындыға ийе болса, онда $f(x) \pm g(x)$ функцияда x ноқатта туўындыға ийе хәм

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \quad (1)$$

формула орынлы.

Хақыйқаттан да, $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар $x \in (a,b)$ ноқатта $f(x)$ хәм $g(x)$ туўындыға ийе болсын. Анықламаға муўапық ($t \in (a,b), t \neq x$)

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Енди $F(x) = f(x) \pm g(x)$ деп белгилеп, төмендегини аламыз:

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \frac{g(t) - g(x)}{t - x}$$

Бул теңликте $t \rightarrow x$ да лимитке өтсек, төмендегиге ийе боламыз:

$$F'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = f'(x) \pm g'(x)$$

2) Еки функция көбеймесинин тууындысы. Егер $f(x)$ хэм $g(x)$ функцияларының хэр бири $x \in (a, b)$ ноқатта $f'(x)$ хэм $g'(x)$ тууындыларға ийе болса, онда $f(x) \cdot g(x)$ функцияда x ноқатта тууындыға ийе хэм

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2)$$

формула орынлы.

$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ деп белгилеп, $\frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x}$ қатнасын төмендеги көринисте жазып аламыз. Бул теңликте $t \rightarrow x$ де лимитке өтип, төмендегини аламыз:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\Phi(t) - \Phi(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(x) \right] = \\ &= g(x) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot f(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

3) Еки функция қатнасының тууындысы. Егер $f(x)$ хэм $g(x)$ функциялардың хэр бири $x \in (a, b)$ ноқатта $f'(x)$ хэм $g'(x)$ тууындыларға ийе болып, $g(x) \neq 0$ болса, онда $\frac{f(x)}{g(x)}$ функцияда x ноқатта тууындыға ийе хэм

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (3)$$

формула орынлы.

Бул формуланы дәлиллейден алдын функция тууындысы анықламасынан пайдаланып $\frac{1}{g(x)} (g(x) \neq 0)$ функцияның $x \in (a, b)$ ноқаттағы тууындысын есаплаймыз.

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(x)}}{t - x} = \frac{\frac{g(x) - g(t)}{g(t) \cdot g(x)}}{t - x} = -\frac{1}{g(x)} \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{g(t)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

Демек,

$$\left[\frac{1}{g(x)} \right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0) \quad (4)$$

Енди (2) хэм (4) формулалардан пайдаланып табамыз.

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right]' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Төртінші киши модуль: Алтыншы үлкен модульдің бірінші орта модуль жойбары

Алтыншы үлкен модуль құрамындағы бірінші орта модульдің ұлыма мақсәти

6.1.1-кесте

Функция туўындысының анықламасы хәм оның геометриялық, механикалық мәнислерин, еки функция қосындысы, айырмасы, көбеймеси, айырмасының нәтийжесин есаплаў қағыйдаларын хәм формулаларын, элементар функциялардың туўындыларын табыў жолларын студентлерге үйретиў.
--

Бірінші орта модульдің киши модульларының атамалары хәм мақсетлери

6.1.2-кесте

№	Киши модуль атамасы	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Функция туўындысының геометриялық мәнислери.	Функция туўындысының анықламалары хәм оның геометриялық мәнислерин студентлерге үйретиў.
2.	Функция туўындысының механикалық мәнислери.	Функция туўындысының механикалық хәм экономикалық мәнислерин студентлерге үйретиў.
3.	Туўынды есаплаў қағыйдалары хәм формулалары.	Еки функция қосындысының, айырмасының, көбеймесиниң, қатнасының туўындысын есаплаў қағыйдаларын хәм формулаларын студентлерге үйретиў хәм элементар функциялардың туўындысын табыў усулларын түсиндириў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген қадағалаў сораўлары**

6.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Қадағалаў сораўлары
1.	Туўынды, туўындының геометриялық мәниси.	1. Функцияның туўындысы деп неге айтылады? 2. Туўынды функцияның қандай қасиетин аңлатады? 3. Туўындының геометриялық мәниси нени аңлатады?
2.	Функцияның туўындысы механикалық хәм экономикалық мәниси.	1. Функцияның физикалық мәнислери нени аңлатады? 2. Функцияның экономикалық мәнислери нени аңлатады? 3. Туўындының механикалық мәнислери нени аңлатады?
3.	Еки функция қосындысы, айырмасы, көбеймесиниң туўындысы, қатнастың, элементар функциялардың туўындылары.	1. Еки функция қосындысының, айырмасының туўындысы қалай есапланады? 2. Еки функция көбеймеси, қатнасының туўындысы қалай табылады? 3. Элементар функциялардың туўынды кестесин ядлап алың.

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жұмыс тапсырмаларында да пайдаланады.

**Киши модул бақлаў сораўлары тийкарында
дүзилген тест сораўлары**

6.1.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар
1.	Функцияның туўындысы деп неге айтылады?	А Функцияның x_0 нокаттағы өсими Δy тиң аргумент өсими Δx ке қатнасының шегине айтылады.

		Б	Функцияның x_0 нокаттағы өсими Δy тиң аргумент өсими Δx ке қатнасы $\Delta x \rightarrow 0$ деги шегине айтылады.
		В	Функцияның x_0 нокаттағы өсими Δy тиң аргумент нокаттағы өсими Δx ке қатнасының $\Delta y \rightarrow 0$ дағы шегине айтылады.
2.	Туўындының геометриялық мәнисини аңлатады?	А	x_0 нокатта $y = f(x)$ иймек сызыққа жүргизилген урынбаның мүйешлик коэффициентин.
		Б	$y = f(x)$ иймек сызыққа жүргизилген урынбаның мүйешлик коэффициентин.
		В	x_0 нокатта $y = f(x)$ иймек сызыққа жүргизилген урынбаны.
3.	Туўындының физикалық мәнисинен ибарат?	А	Δy қатнас x қа қарата өзгериўиниң орташа тезлигин.
		Б	Δy қатнас x қа қарата өзгериўиниң орташа тезлигин.
		В	y қатнас x қа қарата өзгериўиниң орташа тезлигин.
4.	Туўындының экономикалық мәнисинен ибарат?	А	Өндиристиң лимит қәрежетлерин сыпатлайды.
		Б	Өндиристиң қәрежетлерин сыпайлайды.
		В	Өндиристиң көлемин аңлатады.
5.	Туўындының механикалық мәнисинен ибарат?	А	x_0 нокаттағы анық емес өзгерис тезлигин сыпатлайды.
		Б	x_0 нокаттағы өзгериў тезлигин аңлатады.
		В	Өзгериў тезлигин аңлатады.
6.	Еки функцияның қосындысы хәм айырмасының	А	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
		Б	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
		В	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

	туўындысы неге тең болады?		
7.	Еки функцияның көбеймесинің туўындысы неге тең болады?	А	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$
		Б	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$
		В	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
8.	Еки функция қатнасының туўындысы неге тең болады?	А	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$
		Б	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$
		В	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
9.	Иймек сызыққа $M_0(x_0, y_0)$ нокатта жүргизилген урынба теңлемесин көрсетиң.	А	$y + y_0 = f'(x_0)(x + x_0)$
		Б	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
		В	$y - y_0 = K(x + x_0)$
10.	Туўындысы өзине тең болған функцияны көрсетиң?	А	$y = e^x$
		Б	$y = a^x$
		В	$y = \ln x$

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

6.1.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри :	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көникпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирий, айтып бериў, машқалалы сәўбетлесий, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).

Тәлім формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия кураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жумыслар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модулар пайдаланылатуғын информациялық технологиялар хәм дидактикалық материаллар

6.1.6-кесте

Оқытыудың техникалық кураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс хәм көргизбели кураллар хәм сабақ өтиу режелери.

2. АЛТЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (лекция) Функция дифференциалы. Жоқары тәртіпті туынды және дифференциалдар

Киші модульдер:

1. Функция дифференциалы;
2. Жоқары тәртіпті туынды және дифференциалдар;
3. Алтыншы үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Бірінші кіші модуль: Функция дифференциалы

1-теорема. (Дәлиллейсіз). Егер $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктеде туындасы бар болса, бұл функция осы нүктеде үздіксіз болады.

Анықлама. Егер Δy ти төмендегі

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

көріністе жазылуы мүмкін болса, $f(x)$ функция қаралып атырған нүктеде **дифференциалданыушы делінеді**, бұл жерде A -турақты,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

2-теорема $y = f(x)$ функция x_0 нүктеде дифференциалданыушы болыуы үшін, оның осы нүктеде туындыға ие болыуы зәрүрлі және жетерлі.

Дәлиллей. (Зәрүрлілігі). $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктеде дифференциалданыушы болсын. Анықламаға мууапық, $f(x)$ функцияның $x \in (a, b)$ нүктедегі өсимін

$$\Delta y = A\Delta x + O(\Delta x) \quad (*)$$

көріністе жазылуы мүмкін. Соңғы (*) теңліктен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x}$

теңлікті жазылуы мүмкін. Буннан:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[A + \frac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right] = A$$

яғнай $x \in (a, b)$ нүктеде туындының бар болыуы және $f'(x) = A$ болыуы келіп шығады.

Жетерлілігі. $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ нүктеде шеклі $f'(x)$ туындыға ие болсын.

Туўындының анықламасына муўапық:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

болады. Егер $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$ деп алсақ, оннан $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ екенлигин табамыз. Бул теңликте α шамасы Δx қа ғәрезли хәм $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta \alpha \rightarrow 0$. Демек, $f(x)$ функция $x \in (a, b)$ ноқатта дифференциалланыўшы болып, $A = f'(x)$ болады.

Теорема дәлилленди.

Анықлама. $f(x)$ функция өсими Δy тиң Δx қа қарата сызықлы бас бөлеги $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ берилген $f(x)$ функцияның x ноқаттағы дифференциалы деп аталады. Функция дифференциалы dy яки $df(x)$ арқалы белгиленеди: $dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$

Дифференциаллаўдың әпиўайы қағыйдалары.

$f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар (a, b) интервалда анықланған болып, $x \in (a, b)$ ноқатта олардың дифференциаллары $df(x), dg(x)$ бар болсын. Онда

$$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$$

функцияныңда усы (a, b) ноқатта дифференциаллары бар хәм олар төмендеги

$$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$$

$$d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$$

$$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

формула орынлы.

1) Бизге белгили, $y = f(y)$ хәм $y = g(x)$ болса, өзгериўши шама y , өзгериўши x тиң қурамалы функциясы делинеди, бул болса аралық аргумент делинеди.

$f(y)$ функция y бойынша, $\varphi(x)$ функция болса x бойынша туўындыға ийе болсын, яғный $y'_u = f'_u(u), u'_x = \varphi'$ онда y тиң x бойынша туўындысы y'_x бар болып, ол төмендегише есапланады:

Ҳақыйқаттан да, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta u \rightarrow 0)}} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u \cdot u'_x$$

2) x хәм y өзгериўшилер арасында арасындағы функционаллық байланыс қандай да $F(x_1, y) = 0$ (*) формула менен берилген болсын. Егер қандай да $y = f(x)$ функция бул теңлемени қанаатландырса, онда $y = f(x)$ функция (*) теңлик пенен анықланған айқын емес функция делинеди. Егер (*) ны y қа қарата шешиў мүмкин болса, функция айқын көриниске келтирилди делинеди.

Айқын емес функцияның туўындысын оны айқын көриниске келтирместен турып табыў мүмкин. Айқын емес жағдайда $F(x_1, y) = 0$ теңлеме менен берилген функцияның туўындысын табыў ушын бул теңлемени y ти x тың функциясы екенин есапқа алған ҳалда x бойынша дифференциаллаў керек.

Екинши киши модуль: Жоқары тәртіптеги туўынды хәм дифференциаллар

$f(x)$ функция (a, b) интервалда анықланған болып, оның хәрбир x нокатында $f'(x)$ туўындыға ийе болсын. Бизге мәлим $f'(x)$ туўынды x өзгериўшиниң функциясы болады. Бул $f'(x)$ туўынды да өз нәўбетинде қандай да бир $x_0 \in (a, b)$ да туўындыға ийе болыўы мүмкин.

Анықлама. Егер $f(x)$ функция (a, b) интервалдың хәрбир нокатында $f'(x)$ туўындыға ийе болып, бул $f''(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ да туўындыға ийе болып, онда $f(x)$ функцияның x_0 нокатындағы екинши тәртіптеги туўындысы деп аталады.

Функцияның екинши туўындысы $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0}$

белгилеўлердин бири менен белгиленеди. $f(x)$ функцияның үшінши, төртинши хәм т.б тәртіптеги туўындылары усы тәртіпте анықланады. Улыўма алғанда, $f(x)$ функция (a, b) интервалының хәрбир нокатында $(n-1)$ тәртіптеги $f^{(n-1)}(x)$ туўындыға ийе болсын. Бул $f^{(n-1)}(x)$ функцияның $x_0 \in (a, b)$

ноқаттағы туўындысы (егер ол бар болса) $f(x)$ функцияның ноқаттағы n -тәртіпті туўындысы деп аталады хәм ол $y_{x=x_0}^{(n)}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\left(\frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right)_{x=x_0}$ лардың бири арқалы белгиленеди. Әдетте, $f(x)$ функцияның $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(n-1)}(x)$,... туўындылары, оның жоқары тәртіпті туўындысы деп аталады.

Енди курамалы функцияның дифференциалын табамыз.

Мейли, $u = f(x)$ функция (a, b) интервалда, $y = F(u)$ функция болса $(c; d)$ интервалда анықланған болып, бул функциялар жәрдемінде $y = F(f(x)) = \Phi(x)$ курамалы функция дүзилген болсын, (бунда, $x \in (a, b)$ де $u = f(x) \in (c; d)$ болыўы талап етиледі).

Курамалы функцияның туўындысы ушын табылған жоқарыдағы формуладан пайдаланып, усы курамалы функцияның дифференциалын табамыз:

$$d\Phi(x) = d[F(f(x))] = [F(f(x))]' dx = F'(u) \cdot f'(x) dx = F'(u) du$$

Соны айтып өтиўимиз керек, бул жағдайда du шама аргумент u дың еркли өсими емес, ол x өзгериўшиниң функциясы.

Үшинши киши модул: Алтыншы үлкен модулдың екінши орта модул жойбары.

Алтыншы үлкен модул курамындағы екінши орта модулдың улыўма мақсети

6.2.1-кесте

Функциялардың дифференциалы, дифференциалланыўшы функциялар, дифференциаллаўдың әпиўайы қағыйдалары хәм курамалы функцияның дифференциалын хәм де функциялардың жоқары тәртіпті дара туўындылары дифференциалы жәрдемінде тексеріў мәселелерин студентлерге үйретіў.

**Биринши орта модулдың киши модулларының
атамасы хәм мақсети**

6.2.2-кесте

№	Киши модуллар атамасы	Киши модуллардың мақсети
1.	Функция дифференциалы.	Функциялардың дифференциалы, дифференциалланыўшы функциялар, дифференциаллаўдың әпиўайы қәсийетлери хәм курамалы функцияның дифференциалын студентлерге түсиндириў.
2.	Жоқары тәртипли туўынды хәм дифференциаллар .	Функциялардың жоқары тәртипли дара туўындылары хәм дифференциалларды табыў усулларын студентлерге үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш сөзлер хәм олар тийкарында
дүзилген бақлаў сораўлары**

6.2.3-кесте

№	Таяныш сөзлер	Бақлаў сораўлары
1.	Дифференциалланыўшы, функцияның дифференциалы, курамалы функцияның дифференциалы.	1. Дифференциалланыўшы функцияға анықлама бериң? 2. Функцияның дифференциалы дегенимиз не? 3. Курамалы хәм айқын емес функцияның туўындылары қалай табылады?
2.	Жоқары тәртипли туўынды хәм дифференциаллар.	1. Жоқары тәртипли туўынды қалай табылады? 2. Жоқары тәртипли дифференциалларды табыў кәделерин айтып бериң?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлау сораулары тийкарында
дүзилген тест сораулары**

6.2.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкін болған жуаулар	
1.	Дифференциалланушы функция деп аталады, егер ...	А	Δy ти төмендеги $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ көринисте жазуы мүмкін болса.
		Б	Δy ти төмендеги $\Delta y = A + \alpha(\Delta x)x$ көринисте жазуы мүмкін болса.
		В	Δy ти төмендеги $\Delta y = y + \alpha(\Delta x)$ көринисте жазуы мүмкін болса.
2.	Функцияның дифференциалы дегенимиз не?	А	$f(x)$ функция өсими Δy тиң Δx қа қарата сызықлы бас бөлеги.
		Б	$f(x)$ функцияның y тиң Δx қа қарата сызықлы бас бөлеги.
		В	$f(x)$ функция өсими Δy тиң Δx қарата сызықлы бөлеги.
3.	Қурамалы $y = f(u(x))$ функцияның туындасы қалай табылады?	А	$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$
		Б	$y'_x = f'_u(x) \cdot u'_x$
		В	$y'_x = f'_x(u) \cdot u'_x$
4.	Жоқары тәртіпті туынды деп неге айтамыз?	А	$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$
		Б	$f(x)$ функцияның $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), \dots$ туындлары, оның жоқары тәртіпті туындасы деп аталады.
		В	$f'(x), f''(x), f'''(x)$ туындлары, оның жоқары тәртіпті туындасы деп аталады.
5.	Қурамалы функцияның дифференциалы қандай көринисте болады?	А	$d\Phi(x) = d[F(f(x))] = [F(f(x))]' dx = F'(u) \cdot f'(x)dx = F'(u)du$
		Б	$[F(f(x))]' dx = F'(x) \cdot f'(x)dx = F'(u)du$
		В	$d\Phi(x) = d[F(f(x))] = [F(f(x))]' dx = F'(x) \cdot f'(x)dx = F'(x)dx$
6.	Дифференциаллаудың әпийайы	А	$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$ $d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) \pm f(x) \cdot dg(x)$

	қәделери қайсы жуўапта дурыс келтирилген?	Б	$d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$ $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g(x)^2}$
		В	$d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$ $d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$
7.	Функция берилген нокатта дифференциалланыўшы болыўы ушын ...	А	Берилген нокатта да үзликсиз болыўы зәрүрли хәм жетерли.
		Б	Үзликсиз болыўы шәрт емес.
		В	Берилген нокатта туўындыға ийе болыўы зәрүрли хәм жетерли.
8.	Туўындының экономикалық мәниси неден ибарат?	А	Өндиристиң көлеминен.
		Б	Өндиристиң лимит хәрекетлернен.
		В	Өнимдарлықтан.
9.	$y = f(\varphi(x))$ функцияның туўындысы.....	А	Қурамалы функцияның туўындысынан.
		Б	Кери функцияның туўындысынан.
		В	Дәрежели функцияның туўындысынан.
10.	Шеклик хәрекетлер	А	Туўындының экономикалық мәниси.
		Б	Туўындының механикалық мәниси.
		В	Бул туўынды.

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

6.2.6-кесте

Сабақ көриниси:	Кирисиў, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Сабақ түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көникпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, айтып бериў, машқалалы сәўбетлесиў, көргизбели, машқалалы лекция, тест.

Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүрінде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим көриниси:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шараяты	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалаў	Жазба жумыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

6.3.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модуллер тийкарында темаға байланыслы слайдлар көрсетиледи, сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм усы сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс хәм көргизбелі қураллар, сабақ режеси

2. АЛТЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШІ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (лекция) Дифференциаллық есаптың тийкарғы теоремалары. Тейлор формуласы

Киши модулар:

1. Дифференциаллық есаптың тийкарғы теоремалары;
2. Тейлор формуласы;
3. Алтыншы үлкен модульдің үшінші орта модуль жойбары.

Биринші киши модуль: Дифференциаллық есаптың тийкарғы теоремалары

Төмендегі теоремалар дифференциаллық есаптың тийкарғы теоремалары есепланады.

Ферма теоремасы

$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда берілген болып, ол усы интервалдың қандай да бир c нокатында өзіннің ең үлкен яки ең киши мәнісине ериссин. Егер функция c нокатта шекли туўындыға ийе болса, онда $f'(c) = 0$ болады.

Дәлиллей. Шәртке қарап $f(x)$ функция c нокатта ең үлкен мәніске ийе, яғный $\forall x \in X$ да $f(x) \leq f(c)$ теңсизлик орынлы, соның менен бирге c нокатта шекли $f'(x)$ туўынды бар болады. Бизге мәлим,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Бирақ $x > c$ болғанда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

хәм $x < c$ болғанда

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

болыўынан $f'(c) = 0$ екенлиги келип шығады. Усыған сәйкес функция c нокатта ең киши мәнісине ийе болғанда да $f'(c) = 0$ болыўы көрсетиледи. Теорема дәлилленди.

Ролл теоремасы

$f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде анықланған және үзлексіз болып, $f(a)=f(b)$ болсын. Егер функция (a,b) интервалда шеклі туындыға ийе болса, онда сондай c нүкте табылады, $f'(c)=0$ болады.

Дәлилдеу. $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментте үзлексіз. Демек, Вейерштрассның бірінші теоремасына сәйкес, бұл аралықта функция өзінің ең үлкен мәнісі M және ең кіші мәнісі m ге ерisesedi.

1) $m=M$ болсын. Бұнда $f(x)=const, x \in [a,b]$ болады. Бизге мәлім, бұл жағдайда $\forall x \in (a,b)$ үшін $f'(x)=0$ болады.

2) $m \neq M$ болсын. Бұл жағдайда $f(a)=f(b)$ болғаны үшін $f(x)$ функция өзінің ең үлкен мәнісі M және ең кіші мәнісі m лердің кемінде біреуіне $[a,b]$ сегментінің ішкі $c(a < c < b)$ нүктесінде ерisesedi.

Ферма теоремасына тийкарланып бұл нүктеде $f'(c)=0$ болады. Теорема дәлилленди.

Лагранж теоремасы

$f(x)$ функция $[a,b]$ кесиндиде анықланған және үзлексіз болсын. Егер функция (a,b) интервалда шеклі туындыға ийе болса, онда сондай c нүкте табылады, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ болады.

Коши теоремасы

$f(x)$ және $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесиндиде анықланған және үзлексіз болсын. Егер бұл функциялар (a,b) интервалда шеклі туындыларға ийе болып, (a,b) интервалдан алынған кәлеген x лар үшін $g'(x) \neq 0$ болса, онда сондай c нүкте табылады,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

болады.

Екінші кіші модуль: Тейлор формуласы

Кәлеген функция үшін Тейлор формуласы.

$f(x)$ функция (a,b) интервалда анықланған болып, ол $x_0 \in (a,b)$ да $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ туындыларға ийе болсын. Функцияны ноқаттағы туындыларынан пайдаланып, төмендегі

$$P_n(f; x) = P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

көп ағзалыны дүзейік.

Егер қаралып атырған $f(x)$ функция n -дәрежелі көп ағзалы болса, онда жоқарыда айтылғандардан $f(x) = P_n(f; x)$, яғни

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

болады. Егер $f(x)$ функция көп ағзалы болмаса, бізге мәлім, $f(x) \neq P_n(f; x)$ болып, олар арасында өзешелік жүзеге келеді. Біз оны $R_n(x)$ арқалы белгілейік:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f; x)$$

Нәтижесінде, $f(x) = P_n(f; x) + R_n(x)$ яғни,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

формулаға келеміз. Бул формула $f(x)$ функция үшін Тейлор формуласы деп аталады, $R_n(x)$ болса Тейлор формуласының қалдық ағзасы деп аталады. Тейлор формуласынан кеңірек пайдаланыу мақсетінде, оның қалдық ағзасының түрлі көріністерін келтіріу мүмкін.

Мәселен, Коши көрінісіндегі қалдық ағзалы Тейлор формуласын келтіреміз.

Жоқарыда қаралған $\Phi(t)$ функция сыпатында $\Phi(t) = xt$ функциясын алайық. Бізге мәлім, бул функция $[x_0; x] \subset (a; b)$ сегментте үздіксіз, $(x_0; x)$ интервалда шеклі туындыға ийе. Бул функция үшін $\hat{O}(\delta) = 0, \Phi(x_0) = x - x_0$ болады. Нәтижесінде,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n \cdot (x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x - x_0 - \theta(x - x_0)]^n (x - x_0) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n \end{aligned}$$

ийе болып,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n$$

Коши көринисіндегі қалдық ағзалы Тейлор формуласына ийе боламыз. Усыған ұқсас Лагранж, Пеано көринисіндегі қалдық ағзалы Тейлор формуласын келтіріп шығарса болады.

Үшінші киши модуль: Алтыншы үлкен модульдің үшінші орта модуль жойбары.

Алтыншы үлкен модуль құрамындағы үшінші орта модульдің ұлыма мақсәти

6.3.1-кесте

Дифференциаллық есептің тийкарғы Ферма, Ролл, Лагранж, Коши теоремаларын мәселелер шешіуде көрсетіп беріу, Тейлор формуласы хәм оның хәр түрлі көринистеги қалдығы, элементар функциялар ушын Маклорен формуласын студентлерге үйретіу.

Биринші орта модульдің киши модульдарының атамалары хәм мақсетлери

6.3.2-кесте

№	Киши модульдардың атамасы	Киши модульдардың мақсәти
1.	Дифференциаллық есептің тийкарғы теоремалары.	Дифференциаллық есептің тийкарғы теоремалары болған Ферма, Ролл, Лагранж, Коши теоремаларының мазмунын студентлерге түсиндириу.
2.	Тейлор формуласы.	Тейлор формуласы хәм оның қалдығы, элементар функциялар ушын Маклорен формуласын студентлерге көрсетіу.

Киши модульдардағы таяныш сөзлер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

6.3.3-кесте

№	Таяныш сөзлер	Бақлау сораулары
1.	Дифференциаллық есептің тийкарғы теоремалары Ферма, Ролл, Лагранж, Коши теоремалары.	1. Дифференциалланыушы функциялар хаққындағы теоремалардың атамалары. 2. Коши теоремасын айтып берің. 3. Ферма теоремасын дәлилең.

2.	Тейлор формуласы, Маклорен формуласы	1. Қәлеген функция үшін Тейлор формуласы. 2. Маклорен формуласы. 3. Коши көринисіндегі қалдық ағзалы Тейлор формуласы.
----	--------------------------------------	--

Ескертиу: Киші модульдардағы бақылау сұрақтарынан студенттер өз бетінше тәлімде де пайдаланады.

Киші модульдардың бақылау сұрақтары тийкарында дүзілген тест сұрақтары

6.3.4-кесте

№	Сұрақтар	Мүмкін болған жауаптар	
1.	Дифференциалланыушы функциялар хақындағы теоремалар қайсы жауапта дұрыс келтірілген?	А	Ферма, Ролл, Лагранж, Коши.
		Б	Пиано, Лагранж, Коши.
		В	Ферма, Ролл, Маклорен.
2.	$f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған хәм үзликсиз болсын. Егер функция (a, b) интервалда шеклі тууындыға ийе болса, сондай a нокат табылады ... болады.	А	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
		Б	$f'(a) = 0$
		В	$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
3.	Қәлеген функция үшін Тейлор формуласы қайсы жауапта дұрыс берілген?	А	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$
		Б	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$
		В	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x)^n + R_n(x)$
4.	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n$ Формуланьң атамасы?	А	Қәлеген функция үшін Тейлор формуласы.
		Б	Коши көринисіндегі қалдық ағзалы Тейлор формуласы.
		В	Маклорен формуласы.
5.	Егер бул функциялар (a, b) интервалда шеклі тууын-	А	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$
		Б	$f'(a) = 0$

	дыларға ийе болып, (a, b) интервалдан алынған кәлеген a лар үшін $g'(x) \neq 0$ болса, онда сондай a нокат табылады ... болады.	В	$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
6.	Тейлор формуласының қалдық ағзалары атамасы қайсы жуыпта дурыс берилген?	А	Лагранж, Пеано, Коши.
		Б	Лагранж, Пеано.
		В	Коши.
7.	$f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған хәм үзликсиз болып, $f(a) = f(b)$ болсын. Егер функция (a, b) интервалда шекли туындайға ийе болса ...	А	Онда сондай a нокат табылады, $f'(c) = 0$ болады.
		Б	Онда сондай a нокат табылады, $f'(x) = cf'(x) - c$ болады.
		В	Онда сондай a нокат табылады, $f(x) \neq 0$ болады.
8.	Маклорен қатары қайсы жуыпта дурыс берилген?	А	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + R_n(x)$
		Б	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n$
		В	$f(x) = \frac{f'(x_0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + R_n(x)$
9.	$f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған хәм үзликсиз болып, $f(a) = f(b)$ болсын. Егер функция (a, b) интервалда шекли туындайға ийе болса, онда сондай C нокат табылады, $f'(c) = 0$ болады.	А	Ролл теоремасы.
		Б	Лагранж теоремасы.
		В	Коши теоремасы.
10.	$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ x_0 диң қандай мәнисинде қатар Маклорен қатарына айланады?	А	$X_0 = 0$
		Б	$X_0 = 1$
		В	X_0 диң мәнисине ғәрезли емес.

**Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри, онда
қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар**

6.3.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирий, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәубет, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқыту шәратлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәубетлер дауамында берилетуғын жуаулар, тест.

**Киши модуллардың педагогикалық процессте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

6.3.6-кесте

Оқытудың техникалық қураллары	Дидактик материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар тийкарында темаға байланыслы слайдлар көрсетиледи. Сондай-ак, бақлау сораулары хәм усы сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс хәм көргизбели қураллар, сабақ режеси

VII. ЖЕТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Дифференциаллық есаптың базы бир қолланылыұлары (2 лекция модулы, 4 әмелий сабақ модулы)

1. ЖЕТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Функцияның өзгерип барыұы. Функцияның экстремум мәнислери

Киши модулар:

1. Функцияның өзгерип барыұы;
2. Функцияның экстремум мәнислери;
3. Жетинши үлкен модулдың биринши орта модул жойбары.

Биринши киши модул: Функцияның өзгерип барыұы

Дифференциаллық форманың инвариантлығы — функцияның аргументи басқа аргументтиң аралық функциясы ямаса еркли өзгериұши болыұына байланыслы болмаған ҳалда бирдей форманы қабыл қылыұы.

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta$ ны $\Delta y = dy + \beta$ киби жазыұ мұмкин.

Буннан,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy + \beta}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\beta}{dy} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\alpha \Delta x}{f'(x)\Delta x} \right) = 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1$$

Демек, Δf ҳәм df эквивалент шексиз киши муғдарлар, яғный

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \alpha \Rightarrow \Delta y \approx dy$$

келип шығады.

Бул теңликте Δx қанша киши болса, сонша кем қәтелик болады.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &\approx f'(x)\Delta x \\ f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x)\Delta x \end{aligned} \quad (9)$$

Бул жуұық есаплаұдың тийкарғы формуласы.

Берилген функцияға қарап оның ҳәр бир көриниси ушын жуұық есаплаұ формуласы бөлек жазылады.

Мәселен, $y = \sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x$, себеби

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \quad x=1, \quad \Delta x = \alpha \quad \text{десек,} \quad \sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{n}$$

1-теорема. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде өзгермес болыуы үшін (a, b) аралықта $f'(x) = 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.

2-теорема. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта кемеимейтуғын функция болыуы үшін $y = f'(x)$ тууындысы (a, b) интервалдың хәр бир ноқатында терис емес, яғный $f'(x) \geq 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.

3-теорема. $y = f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта өспейтуғын болыуы үшін $y = f'(x)$ тууындысы (a, b) интервалдың хәр бир ноқатында оң емес, яғный $f'(x) \leq 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.

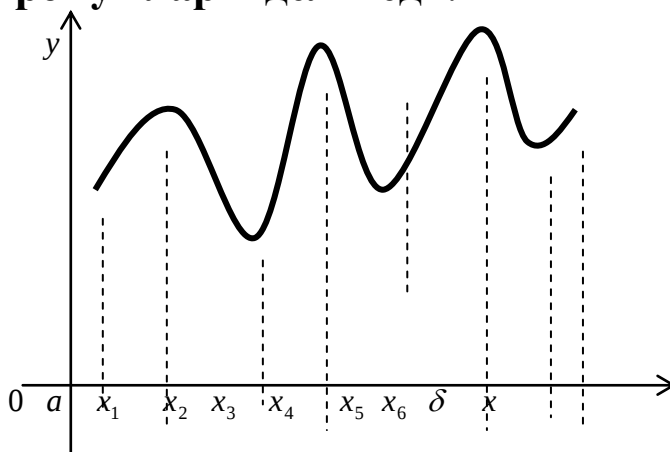
Екинши киши модуль: Функцияның экстремум мәнислери

1-анықлама. Егер x_0 ноқаттың жетерлише киши дөгерегиндеги хәмме ноқатлар үшін $f(x_0) > f(x)$ болса, $y = f(x)$ функция үшін $x = x_0$ максимал ноқат, $f(x_0)$ болса **функцияның максимумы делинеди.**

2-анықлама. Егер x_1 ноқаттың жетерлише киши дөгерегиндеги хәмме ноқатлар үшін $f(x_1) < f(x)$ болса, $y = f(x)$ функция үшін $x = x_1$ минимум ноқат, $f(x_1)$ болса **функцияның минимумы делинеди.**

3-анықлама. Функцияның максимумы хәм минимумы оның экстремал мәнислери ямаса **экстремумлары** делинеди.

Анықламадан, экстремум түсиниги функцияның локал (киши) аралықларға сәйкес қәсийетлери. Сол себепли функция анықланыу областында бир неше максимум хәм бир неше ми-



нимумга ийе болыуы мүмкін, хәм де функцияның айырым минимумлары оның айырым максимумларынан үлкен бола алады. Мәселен, $f(x_1) > f(x_2)$

Ферма теоремасы (экстремум бар болыуының зәрүрий шәрти). Дифференциалланыушы функцияның экстремум ноқаттағы тууындысы нольге тең.

4-анықлама. Егер базы бир x_0 ноқаттағы $f(x)$ функция үзликсиз болып, бул ноқатта $f'(x)=0$ ямаса $f'(x)=\infty$ ямаса $f'(x)$ үзилиске ийе болса, бул экстремум тек критик ноқат болыуы мүмкін.

4-теорема. Егер x_0 ноқат $f(x)$ функцияның критик ноқаты хәм бул ноқаттың базы бир дөгеринде $f(x)$ функцияның тууындысы шеп хәм оң тәрепте қарама-қарсы белгиге ийе болса, онда x_0 ноқат экстремум ноқаты болады, яғный:

1) $x < x_0$ болғанда $f'(x) > 0$ хәм $x > x_0$ болғанда $f'(x) < 0$ болса, x_0 максимум ноқаты болады;

2) $x < x_0$ болғанда егер $f'(x) < 0$ хәм $x > x_0$ болғанда $f'(x) > 0$ болса, x_0 минимум ноқаты есапланады.

Егер x_0 ноқаттың шеп хәм оң тәрeпинде функция тууындысының белгиси бир қыйлы болса, экстремум ноқат болмайды.

Үшинши киши модуль: Жетинши үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Жетинши үлкен модуль құрамындағы биринши орта модульдың улыўма мақсети

7.1.1-кесте

Функцияның тууындысы жәрдемінде оның өзгериў характерин анықлаў мәселелерин үйретиў хәм функцияның экстремум мәнислери, яғный максимум хәм минимум ноқатлардағы мәнислерин табыўды студентлерге түсиндириў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атлары хәм мақсетлери

7.1.2-кесте

к/т	Киши модуллар аты	Киши модуллардың мақсети
1.	Функцияның өзгериіп барыуы.	Функцияның туўындысы жәрдеминде оның өзгериіу характерин анықлау мәселелерин студентлерге үйретиу.
2.	Функцияның экстремум мәнислери.	Функцияның экстремум мәнислери, яғный максимум хәм минимум ноқатлардағы мәнислерин табыуды студентлерге үйретиу.

Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

7.1.3-кесте

к/т	Таяныш түсиниклер	Бақлау сораулары
1.	Кемеймейтуғын функция, өспейтуғын функция.	1) Дифференциаллық форманың инвариантлығы не? 2) Дифференциалды жууық есаплаулар усыллары кандай? 3) Қандай функция кемеймейтуғын функция делинеди? 4) Қандай функция өспейтуғын функция делинеди?
2.	Критикалық ноқат, максимум, минимум, экстремум.	1) Функцияның максимуми дегенимиз не? 2) Функцияның минимуми дегенимиз не? 3) Қандай ноқатлар стационар ямаса критик ноқатлар делинеди? 4) Функцияның экстремуми дегенимиз не? 5) Экстремум барлығының зәрүрли хәм жеткиликли шәртлерин айтың.

Ескертиу: Киши модуллардағы бақлау сорауларынан студентлер өз бетинше жумысларды ислегенде де пайдаланады.

**Киши модульдардың бақылау сораулары тийкарында
дүзілген тест**

7.1.4-кесте

қ/т	Сораулар	Мүмкін болған жуаулар	
1.	Функцияның аргументі басқа аргументтің аралық функциясы ямаса еркли өзгериуші болыуына байланыс-лы болмаған халда бирдей форманы қабыл қылыуы не деп аталады?	А	Дифференциаллық форманың инвариантлығы.
		Б	Дифференциалдың инвариантлығы.
		В	Дифференциаллық есаптың инвариантлығы.
2.	Жууық есаплаудың тийкарғы формуласы қайсы жуапта дурыс берілген?	А	$f(x + \Delta x) \approx f(x) - f'(x)\Delta x$
		Б	$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$
		В	$f(x - \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$
3.	$x < x_0$ болғанда $f'(x) < 0$ хәм $x > x_0$ болғанда $f'(x) > 0$ болса, x_0 —	А	Минимум ноқат.
		Б	Максимум ноқат.
		В	Экстремум ноқат болмайды.
4.	Егер x_1 ноқаттың жетер-лише киши дөгерегиндеги хәмме ноқатлар ушын $f(x_1) < f(x)$ болса, $f(x_1)$	А	Функцияның максимумы.
		Б	Функцияның минимумы.
		В	Функцияның x_1 ноқаттағы мәнисі.
5.	$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде өзгермес болыуы ушын ...	А	(a, b) аралықта $f'(x) \neq 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.
		Б	$[a, b]$ аралықта $f'(x) = 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.
		В	(a, b) аралықта $f'(x) = 0$ болыуы зәрүр хәм жеткиликли.
6.	Егер x_0 ноқаттың жетерлише киши дөгерегиндеги хәмме ноқатлар ушын	А	Функцияның максимумы.
		Б	Функцияның минимумы.
		В	Функцияның x_0 ноқаттағы мәнисі.

	$f(x) > f(x_0)$ болса, $f(x_0)$ –		
7.	$f(x)$ функция ушын $f'(x) \leq 0$ болыуы нени билдиреди?	А	$y = f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта өспейтуғын болыуын
		Б	$y = f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта кемеймейтуғын болыуын
		В	$y = f(x)$ функция (a, b) аралықта өспейтуғын болыуын
8.	$x < x_0$ болғанда $f'(x) > 0$ $x > x_0$ болғанда $f'(x) < 0$ $(x) < 0$ болса, x_0 –	А	Минимум нокат.
9.	Қандай функция кемеймейтуғын функция делинеди?	А	$y = f'(x)$ тууындысы (a, b) интервалдың хәр бир нокатында терис болған функция.
		Б	$y = f'(x)$ тууындысы (a, b) интервалдың хәр бир нокатында терис болмаған функция.
		В	$y = f'(x)$ тууындысы $[a, b]$ интервалдың хәр бир нокатында терис болмаған функция.
10.	Функцияның экстремуми не?	А	Функцияның максимумы хәм минимумы.
		Б	Функцияның максимумы.
		В	Функцияның минимумы.

Киши модулардың оқыу шынығыуы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

7.1.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, додалаулар, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).

Тәлім формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия құраллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модуллердың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

7.1.6-кесте

Оқытыушының техникалық құраллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер даўамында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм усы сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға байланыслы сабақлықлар, методикалық қолланбалар, көргизбели құраллар хәм де оқыу сабақлықларының режелери.

2. ЖЕТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ : (Лекция) Функцияның өзгеріп баруы. Функцияның экстремум мәніслері

Киші модулар:

1. Функцияның дөңеслігі хәм ойыслығы;
2. Функцияларды толық тексеріу;
3. Жетінші үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Бирінші кіші модуль: Функцияның дөңеслігі хәм ойыслығы

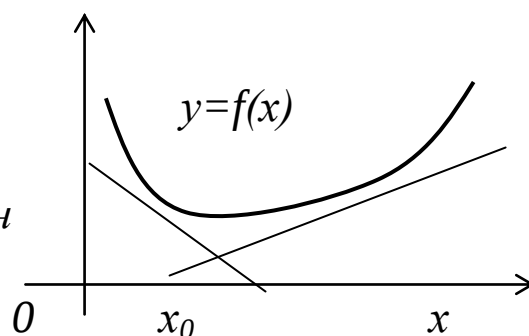
1-теорема. $y = f(x)$ функцияның екінші тәртіпті туындасы $y'' = f''(x)$ максимум нокатта теріс хәм минимум нокатта оң болады.

Дәлил. Мейли, $y = f(x)$ функция өзінің хәмме анықланыу нокатларында екі мәрте дифференциалланыушы болсын. Егер $x = x_0$ максимум нокат болса, $y = f(x)$ функция дөңес болып, бул нокатта $y'' = f''(x) < 0$ болады; минимум нокат болса $y'' = f''(x) > 0$ болады.

Буннан $y = f(x)$ функцияның максимумы хәм минимумын табыудың екінші қағыйдасы келип шығады:

1. $f'(x)$ хәм $f''(x)$ туындылар табылады;
2. $f'(x) = 0$ теңлеме шешилип, критикалық нокатлар табылады;
3. $f''(x)$ тиң хәр бир критикалық нокаттағы белгиси табылады;
4. Егер $f''(x) > 0$ болса, функция минимумға, $f''(x) < 0$ болса, функция максимумға ийе болады.

2-анықлама. Егер (a,b) интервалдың хәмме x нокатында $y = f(x)$ функция графигине өткерілген урынба графиктен төменде жатса, берілген функцияның графиги бул аралықта **ойыс** делинеди



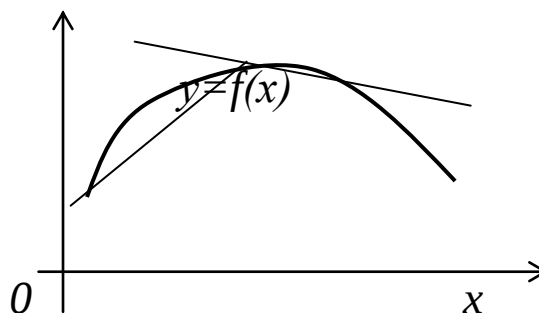
3-анықлама. Егер (a, b)

интервалдың y

хәмме x нокатында $y = f(x)$

функция графигине өткерилген
урынба

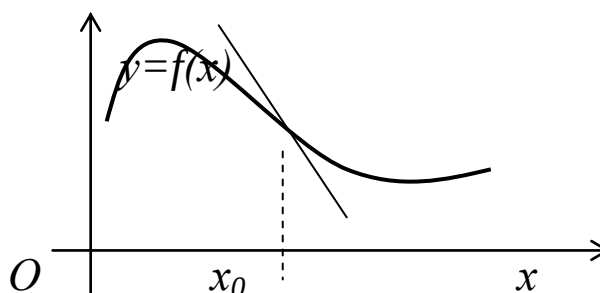
графиктен жоқарыда жатса,
берилген функцияның графиги
бул аралықта **дөңес** делинеди.



4-анықлама. Егер $y=f(x)$ функция
графиги $(x_0, f(x_0))$ нокаттан
өткерилгенде y

өзиниң ойыс – дөңеслигин

өзгертсе, бул нокат функция
графигиниң **ийилиў нокаты**
делинеди.



2-теорема. $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда анықланған болсын. Егер функция (a, b) интервалда екинши тәртіпли $f''(x)$ туўындыға ийе болып, (a, b) кесиндиден алынған хәмме x лар ушын $f''(x) < 0$ болса, онда иймек сызық (a, b) интервалда дөңес болады; Егер $f''(x) > 0$ болса, иймек сызық (a, b) интервалда ойыс болады.

Дәлил. $y=f(x)$ функция (a, b) интервалда екинши тәртіпли $f''(x)$ туўындыға ийе болып, $f''(x) < 0$ болсын. (a, b) дан x_0 нокат алып, $f(x)$ функцияның графигине $(x_0, f(x))$ нокатта урынба өткеремиз. Бул урынбаның теңлемеси $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ болады. Иймек сызық нокатларының ординаталары y пенен урынба нокатларының ординаталары Y арасындағы айырманы қараймыз:

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Енди $[x, x_0]$ кесиндини алайык, $[x, x_0] \subset (a, b)$. Бул кесиндиде $f(x)$ ушын Лагранж теоремасының хәмме шәртлери орынланады. Онда Лагранж теоремасына тийкар: яғный, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, бунда $c \in (x, x_0)$.

Жоқарыдағы (1) айырма төмендеги көриниске келеди:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0)$$

Және Лагранж теоремасынан пайдаланып табамыз:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$$

$$\text{Нәтижесінде } y - Y = f''(c_1)(x - x_0)(c - x_0) \quad (2)$$

(a, b) интервалдың x_0 хәм x нокатларына қарата еки жағдай болыуы мүмкин:

а) $x < x_0$ болсын. Бунда $x < c < x_0$ болып,
 $x - x_0 < 0, c - x_0 < 0$

болады.

Егер (a, b) да $f''(x) < 0$ ди есапқа алсақ, (4.6.2) қатнастан

$$y - Y < 0 \quad (3)$$

болыуын табамыз.

б) $x_0 < x$ болсын. Бунда $x_0 < c_1 < c < x$ болып,
 $x - x_0 > 0, c - x_0 > 0$

болады. Онда (2) қатнастан

$$y - Y < 0 \quad (4)$$

болыуы келип шығады.

(3) хәм (4) қатнастан хәмме x лар ушын

$$y - Y < 0, \text{ яғный } y > Y$$

Бул болса иймек сызық урынбадан хәр дайым төменде болыуын билдиреди. Демек, иймек сызық дөңес болады.

3-теорема. $f(x)$ функция (a, b) да анықланған болсын. Егер функция (a, b) да екінши тәртіпте $f''(x)$ тууындыға ийе болып, (a, b) интервалдан алынған барлық x лар ушын

$$f''(x) > 0$$

болса, онда иймек сызық (a, b) интервалда ойыс болады.

Дәлилли екінши теорема сыяқлы болады.

3-теорема. (Лопитал қағыйдасы) $f(x)$ хәм $\varphi(x)$ функциялар $x = a$ нокат дөгерегинде бар хәм дифференциалланыушы болып,

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \quad (\text{ёки } \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 \quad (\text{ёки } \infty)$$

ва

2) $\varphi(a) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

яғний $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ сыяқлы анықсызлықлар ушын еки функция қатнасының лимити усы функциялар туўындылары қатнасының лимитине тең. Дара жағдайға $a = -\infty$, $a = 0$, $a = \infty$ болыўы мүмкин.

Дәлил. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ болсын. Буннан $f(a) = \varphi(a) = 0$ болғаны ушын $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ қатнасты төмендегише жазыў мүмкин:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}$$

Бул теңликтен лимитке өтемиз:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)};$$

Демек, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ - теорема дәлилленди.

а) Айтайық, x - қәрежетлер, $f(x)$ – товар көлеми болсын. Онда $\frac{f(x)}{x}$ қатнас орташа өнімдарлық, $f'(x)$ болса лимит

өнімдарлық делинеди. $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$ - нәтийжелилик дәрежеси

делинеди.

x қәрежетти арттырылса, $f(x)$ товар көлеми де артып барады. Бирақ, қәрежет түрин және де көбейтилсе, ислеп шығарылып атырған товар көлеминиң артыў дәрежеси кемейеди. Мәселен, жер майданына дән жетистириўин алайық. Егер жумысшылар саны арттырылса, қосымша мийнет муғдарына сәйкес келген

товар көлеми кемейіп барады, яғнай $f(x)$ функцияның x бойынша өсіу тезлігі кемейеді.

б) Бірінші тәртіпті тууынды материаллық ноқат хәрекетінің тезлігін аңлатса, екінші тәртіпті тууынды болса усы ноқат хәрекетінің тезленіуін белгілейді.

Үшінші киші модуль: Жетінші үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Жетінші үлкен модуль курамындағы бірінші орта модульдің улыуа мақсеты

7.2.1-кесте

Функцияның дөңеслігін хәм ойыслығын анықлау ушын оның тууындысынан пайдаланып билиу бірінші хәм жоқары тәртіпті тууындылар, функцияларды тууынды жәрдемінде толық тексеріу мәселелерін студентлерге үйретиу.
--

Бірінші орта модульдің киші модульларының атлары хәм мақсетлари

7.2.2-кесте

№	Киші модульлар аты	Киші модульларнинг мақсетлари
1.	Функцияның дөңеслігі хәм ойыслығы.	Функцияның дөңеслігін хәм ойыслығын анықлау ушын оның тууындысынан пайдалана билиуди студентлерге үйретиу.
2.	Функцияларды толық тексеріу.	Бірінші хәм жоқары тәртіпті тууындылар, функцияларды тууынды жәрдемінде толық тексеріу мәселелерін студентлерге үйретиу

Киші модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

7.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлау сораулари
1.	Дөңес, ойыс, ийилиу ноқаты.	1) Функцияның дөңеслігіне хәм ойыслығына анықлама берің.

		2) Функцияның ийилиу нокатына анықлама берің. 3) Екінші тәртіпті туынды жәрдемінде функция графигинің дөңеслігін хәм ойыслығын анықлау қағыйдасы.
2.	Лопитал қағыйдасы, өнімдарлық, нәтийжелилік дәрежеси.	1) Анықсызлықларды туынды жәрде-минде де ашыу қағыйдасы. 2) Туындының экономикалық хәм механикалық мәніслерін түсіндірін 3) Товардың өнімдарлық, нәтийжелилік дәрежелері қандай анықланады?

Ескертиу: Киши модулардағы бақлау сорауларынан студентлер өз бетінше жұмыстарда да пайдаланады.

Киши модулардың бақлау сораулары тийкарында дүзилген тест

7.2.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкін болған жууаплар	
1.	Егер (a, b) интервалдың хәмме x нокатында $y = f(x)$ функция графигине өткерілген урынба графиктен төменде жатса, ...	А	Берілген функцияның графиги бул аралықта дөңес делинеди.
		Б	Берілген функцияның графиги бул аралықта ойыс делинеди.
		В	Берілген функцияның графиги y көшерине қарата ойыс делинеди.
2.	Егер (a, b) интервалдың хәмме x нокатында $y = f(x)$ функция графигине өткерілген урынба графиктен жоқарыда жатса, ...	А	Берілген функцияның графиги бул аралықта ойыс делинеди
		Б	Берілген функцияның графиги бул аралықта дөңес делинеди.
		В	Берілген функцияның графиги x көшерине қарата дөңес делинеди.
3.	Егер $y = f(x)$ функция графиги $(x_0, f(x_0))$ нокаттан өтиуде	А	функция графигинің үзіліс нокаты делинеди.
		Б	функция графигинің минимум нокаты делинеди.

	өзинің ойыс – дөңеслігін өзгертсе, онда бұл нөкат ...	В	функция графигинің ийилиу нөкаты делинеди.
4.	x - қәрежетлер, $f(x)$ – товар көлеми болсын. Онда $\frac{f(x)}{x}$ қатнас ...	А	Орташа өнимдарлық.
		Б	Лимит өнимдарлық.
		В	Нәтийжелілік дәрежеси.
5.	Нәтийжелілік дәрежеси деп неге айтылады?	А	x - қәрежетлер, $f(x)$ – товар көлеми болса $f'(x) = \frac{df}{dx}$.
		Б	x - қәрежетлер, $f(x)$ – товар көлеми болса $f''(x) = \frac{d^2 f}{d x^2}$.
		В	x - қәрежетлер, $f(x)$ – товар көлеми болса $\frac{f(x)}{x}$.
6.	x - қәрежетлер, $f(x)$ - товар көлеми болсын. Онда $f'(x)$...	А	Орташа өнимдарлық.
		Б	Лимит өнимдарлық.
		В	Нәтийжелілік дәрежеси.
7.	Анықсызлықларды тууынды жәрдемінде де ашыу қағыйдасы не деп аталады?	А	Коши қағыйдасы.
		Б	Лопитал қағыйдасы.
		В	Лагранж қағыйдасы.
8.	Биринши тәртіпли тууындының механикалық мәніси не?	А	Материаллық нөкат хәрекетинің тезлиги.
		Б	Материаллық нөкат хәрекетинің тезлениуі.
		В	Орташа тезлик.
9.	Екинши тәртіпли тууындының механикалық мәніси не?	А	Материаллық нөкат хәрекетинің тезлиги.
		Б	Материаллық нөкат хәрекетинің тезлениуі.
		В	Өзгериу тезлиги.
10.	Экстремумның зәрүрий шәрти қандай?	А	Тууындының нольге тең болыуы.
		Б	Тууындының нольден үлкен болыуы.
		В	Тууындының нольден киши болыуы.

Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри хәм типі, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

7.2.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри хәм типі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирий, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәубет, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқыту шәратлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәубетлер дауамында берилетуғын жуаулар, тест.

Киши модуллардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялар хәм дидактикалық материаллар

7.2.6-кесте

Оқытудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар дауамында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Соның менен бирге, бақлау сораулары хәм усы сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға байланысly сабақлықлар, методикалық қолланбалар, көргизбели қураллар хәм де оқыу сабақлықларының режелери.

Пайдаланылган адабиятлар

1. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 1992.
2. Каримов И.А. Мамлакатимизда демократик ислохотларни янада чуқурлаштириш ва фиқоралик жамиятини ривожлантириш концепсияси. Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислом Каримовнинг Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлис Қонунчилик палатаси ва Сенатининг қўшма мажлисидаги маърузаси. Халқ сўзи газетаси, 13.11.2010 йил.
3. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. -Т.: “Маънавият”, 2008 йил.
4. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” /Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.Ўзбекистон, 1997.
5. Ўзбекистон Республикасининг ”Таълим тўғрисида”ги Қонуни (1997 йил 29 августда қабул қилинган)/. Баркамол авлод –Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.Ўзбекистон, 1997 йил.
6. "Миллий истиқлол ғояси: асосий тушунча ва тамойиллар".–Т.: "Ўзбекистон" нашриёти, 2000 йил.
7. Азизходжаева Н.Н. Педагогик технологиялар и педагогик маҳорат - Т.: ТДПУ, “Низомий”, 2003.
8. Азларов Т.А., Мансуров Х.Т., Математик анализ, 1,2 қ, Т. “Ўқитувчи” 1994, 1995.
9. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси. Т.: Ўқитувчи, 2001.
10. Афони́на С.И. Математика ва гўзаллик.-Т.: “Ўқитувчи”,1987.-220 б.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализ, М., “Наука”, 1985.
12. Авлиёкулов Н. Замонавий ўқитиш технологиялари.Тошкент, 2001.
13. Гмурман В.Е.Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. -Т.: Ўқитувчи, 1977.

14. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. “Наука” 1990.

15. Juraev T.J., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X., Oliy matematika asoslari. Darslik. - T.: O'zbekiston, 1999. – 290 bet.

16. Жўраев Р., Саматов / Қаршибоев Ҳ. Замонавий информатик педагогик технологиялар асосида табиий фанларни ўқитиш. –Ж.: Халқ таълими, 1-сон, 2002 й.

17. Зорич В.А. Математический анализ. 1,2 т.М. “Наука” 1981.

18. Зиёмуҳаммедов Б., Тожиев М. Педагогик технология-замонавий ўзбек миллий модели.-Т.: “Лидер Пресс”, 2009.-104 бет.

19. Йўлдошев Ж.Ғ., Усмонов С.А. Педагогик технология асослари, Т.: “Ўқитувчи”, 2004.

20. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. 1,2. т. М., “Наука” 1979.

21. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. 1, 2 М. “Наука”, 1980.

22. Кудрявцев А.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. 1,2 т.М. “Наука”, 1984, 1986.

23. Никольский С.М. Курс математического анализа. 1,2т М.”Высшая школа”, 1975.

24. Махмудов М. Таълимни дидактик лойиҳалаш (Рисола). – Т.: Абдулла Қодирий номидаги халқ мероси нашриёти, 2002. - 79 б.

25. Очилов М. Янги педагогик технологиялар. –Қарши. Насаф, 2000.

26. Садуллаев А., Мансуров Х.Т., Худойберганов Г., Варисов А.К., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1,2 қ Т. “Ўқитувчи” 1993. 1995.

27. Саъдуллаев А. Математик анализ курси. 1,2,3-қисмлар. Тошкент, 1993.

28. Сейтхалилова Э.А., Қурбонов Ш. Управление качеством образования. Ташкент, Шарк, 2004 г.

29. Тожиев М., Зиёмуҳаммадов Б. Педагогик технологияни таълим-тарбия жараёнига тадбиғи ва унинг баркамол авлод

фазилатларини шакллантиришдаги ўрни. Монография. /Т.: «MUMTOZ SO'Z». 2010., -214 б.

30. Тожиев М, Ўралова М., Баҳодирова Г. “Педагогик технология ва педагогик маҳорат” фани ўқув машғулотларининг лойиҳалари (Педагогик технология ўзбек миллий моделининг амалиётга татбиғи). Қ.І: Ўқув ва илмий-услубий қўлланма/ Т.: «MUMTOZ SO'Z», 2010. - 205 б.

31. Тожиев М., Алимов А.Я., Қўчқаров Д.У. Педагогик технология – таълим жараёнига татбиғи: “Математика ўқитиш методикаси” фани ўқув машғулотларининг лойиҳаси. / Ўқув-услубий қўлланма. I қисм. Т.: ТАФАККУР, 2010. -148 б.

32. Толипов Ў.Қ., Усмонбоева М. Педагогик технологияларнинг тадбиқий асослари.-Т.: “Фан”, 2006.

33. Ходиев Б.Ю, Голиш Л.В, Рихсимбоев О.К. Кейс- стади - иқтисодий олий ўқув юртидаги замонавий таълим технологиялари: Илмий -услубий қўлланма. - Т.: Тошкент Давлат Иқтисодиёт университети, 2009.

34. Шаталов В.Ф. Эксперимент продолжается. М.:Педагогика, 1989.

35. Шокирова Х.Р. Каррали ва эгри чизикли интеграллар. Т. “Ўзбекистон”, 1992.

36. Юнусова Д. Таълим технологиялари асосида математик таълимни ташкил этиш. Т. “Университет”, 2005, 132 бет.

37. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1,2, 3 т. М. “Наука” 1970,

МАЗМУНЫ

1.	Кирисиў.....	3
2.	Миллий педагогикалық технология тийкарында “Математикалық анализ” пәни оқыў шынығыўларының жойбарлары.....	5
3.	“Математикалық анализ” пәниниң үлкен модуллеры, олардан гөзленген мақсетлери ҳәм қурамындағы орта модуллер саны.....	6
4.	Орта модуллеры ҳәм оқыў саатларының улыўма	9
5.	Мақсетлер жуўмағында ислетилетуғын феийллер системасы.....	10
6.	I. БИРИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Көплик.....	11
7.	II. ЕКИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Ҳақыйқый санлар	22
8.	III. ҮШИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Санлы избе-изликлердиң лимити.....	41
9.	IV. ТӨРТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Функция ҳәм оның лимити.....	69
10.	V. БЕСИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Функция ҳәм оның лимити.....	103
11.	VI. АЛТЫНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ — Функцияның туўындысы ҳәм дифференциалы	125
12.	VII. ЖЕТИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ – Дифференциаллық есаптың базы бир қолланылыўлары	150
13.	Пайдаланылған әдебиятлар.....	165

Изетаева Г.К., Джакаева К.Д.,
Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

I бөлім

Redaktori: A. Abdujalilov
Ko'rkem redaktori: S. Abduvaliyev
Tex. Redaktori: U. Vohidov
Operatori: D. O'rinova

Licenziya: AI №190, berilgen waqti 10.05.2011
Original-maketten bosıwǵa ruqsat etildi 12.11.2019-j.
Formatı 60x84 $\frac{1}{16}$. Kegli 11,5. «Times New Roman»
garniturası. Ofset usılında basıldı. Kólemi 10,5 b.t.
9,76 shártli b.t. Nusqası 100 dana. Buyırtpa 15/19.

«Tafakkur-bo'stoni» baspası. 100190. Tashkent qalasi,
Yunusobod-9, 13-54. E-mail: yunusali_1987@mail.ru

«Tafakkur-bo'stoni» MCHJ baspa-poligrafiyasında
chop etildi. Tashkent qalasi, Chilonzor koshesi, 1.
Telefon: (890) 000-33-93