

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ЖОҚАРЫ ҲАМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ
МИНИСТРЛИГИ**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК
УНИВЕРСИТЕТИ**

**Изетаева Г.К., Джакаева К.Д.,
Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.**

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

(Оқыў қолланба, II бөлим)

Нөкис-2020

Изетаева Г.К., Джакаева К.Д., Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.
//Математикалық анализ. (II бөлім) / Оқыу қолланба, – Нөкіс:
ҚМУ, 2020. – 96 б.

Бул оқыу қолланба жоқары оқыу орынлары бакалавриат, магистратура студентлери, академиялық лицей оқыушылары, профессор-оқытыушылар хәм үзликсиз билимлендириу системасының барлық тарауларында жұмыс алып барып атырған педагоглар, илимий изертлеушилер ушын зәрүр болып, педагогикалық технологияны билимлендириу процессине енгизиу мәселесинде математика оқыу пәнлери шынығыуларының жойбарларын ислеп шығыуда үлги хәмде билимлендириу процессине енгизиу бойынша методикалық жәрдем болады.

Қарақалпақ мәмлекетлик университети оқыу ислери бойынша проректоры, физика-математика илимлери кандидаты, доцент
М.М.Ибрагимовтың улыуа редакторлығы астында

Пикир билдириушилер:

С.Абдалова – педагогика илимлерикандидаты, доцент;

А.Даужанов – физика-математика илимлери кандидаты, доцент.

Бул оқыу қолланба Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети оқыу методикалық кеңесиниң 2020-жыл 4-март сәнеси 8/7.4 – санлы баянламасы менен баспаға усыныс етилген.

Кирисиў

Педагогикалық технология, оның тәсиршең усыллары, қолланылыўы лазым болған қураллары, билимлендириў тараўын түптен өзгертиўге, қәнигелер билимин елде жетилистириўге қаратылған болыўы лазым. Авторитар хәм жасалма пикир жүритиў усылынан ўаз кешиў, сабыр-тақат, қанаат, өзгелер пикирин хұрметлеў, миллий хәм улыўма инсанийлық қәдириятларын хұрметлеў сыяқлы сыпатларын қәлиплестириўден ибарат. Бул мәселениң шешими белгили дәрежеде тәлимди технологияластырыў менен байланысly.

Мәмлекетимизде тәлим процессин илимий тийкарда пайда етип, оны жеделлестириў мақсетинде заманагөй педагогикалық технологияларды оқыў процессине енгизиў басқышы даўам етпекте. Хәзирги күнде билимлендириў системасында тәлим процессин заманагөй педагогикалық технология менен тәмийинлеў, оған тийисли оқыў әдебиятлардың жаңа әўладын жаратыў хәм әмелиятқа енгизиў – тийкарғы ўазыйпалардың бири болып қалмақта.

Бул ўазыйпаның тийкарғы шешимлериниң бири педагогикалық технологияның миллий моделин тәлим-тәрбия процессине енгизиў болып, буның тийкары болса оқыў пәнлериниң сабақ жойбарларын дүзиў болып есапланады. Жойбарлаў тийкарында модулли оқытыў теориялық жақтан толық тийкарланған болып, бүгинги күнде оны тәлим процессине енгизиў ең актуал мәселе болып есапланады.

Тәлим-тәрбия тараўында мийнет етип атырған хәр бир адам бүгинги күнде жүзеге келип атырған жаңа түсиниклерди аңлаўы, және де оқыў шынығыўларын жойбарлаў тийкарында модулли оқытыў технологияларынан хабардар болыўлары керек. Авторлар жазған бул оқыў қолланба профессор-оқытыўшылар аз күш хәм аз ўақыт сарплап, терең хәм пухта билимлерди бериў ушын кең имканиятлар жаратады.

Педагогикалық технологияны тәлим процессине кеңнен енгизиў мақсетинде хәм әмелге асырылған жумыслардың нызамлы даўамы сыпатында Қарақалпақ мәмлекетлик

университети профессор-оқытыўшылары “Математикалық анализ” пәниниң оқыў шынығыўлары жойбарластырылды ҳәм оның нәтийжеси сыпатында математика ҳәм математиканы оқытыў методикасы тәлим бағдарлары оқыў процессинде математика пәнлери бойынша биринши мәрте жойбарластырылған оқыў қолланба жаратылды.

Бул оқыў қолланба жоқары оқыў орынлары математика тәлим бағдарлары бакалавриат студентлери менен биргеликте, магистратура студентлери, оқытыўшылар ҳәм үзликсиз тәлим системасының барлық буўынларында ислеп атырған профессор-оқытыўшылар, педагоглар жәмәәти, илимий изертлеўшилер ушын зәрүр дерек болып, педагогикалық технологияны оқыў процессине енгизиў мәселесинде оқыў пәнлери шынығыўларының жойбарластырыўын ислеп шығыўда үлги ҳәм де тәлим процессине енгизиў бойынша методикалық жәрдем болады.

1. МИЛЛИЙ ПЕДАГОГИКАЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯ ТИЙКАРЫНДА “МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ” ПӘНИ ОҚЫҰ ШЫНЫҒЫҰЛАРЫНЫҢ ЖОЙБАРЛАРЫ

1-кесте

Т/р	Жойбар дүзиў басқышлары хәм орынланатуғын әмеллер
1.	“Математикалық анализ” пәнин бир пүтин деп қарап, “макро модуль” деп қабыл етип, онда берилетуғын материаллардың көлеми хәм мазмунынан келип шығып, – “үлкен”, “орта” хәм “киши” модульларға ажыратылады, соң, олардың мақсети хәмде оларға ажыратылған ўақыт белгиленеди.
2.	Хәр бир киши модуль жәрдемінде берилетуғын билимлер системасы ишинен таяныш тусиниклер ажыратылады.
3.	Таяныш тусиниклер тийкарында бақлаў сораўлары дузилип, талабалар билим хәм көнликпелерин баҳалаў түр хәм өлшемлери белгиленеди.
4.	Оқыў шынығыўларының хәр бир киши модульінде қолланылатуғын сабақ түри анықланып алынады.
5.	Хәр бир киши модульда қолланылатуғын педагогикалық методлар анықланып, орынлары таўып қойылады.
6.	Оқыў шөлкеминде бар болған ахборот технологиялардан хәмде хәр бир киши модульдағы шынығыўының характеринен келип шығып, оқыў шынығыўын әмелге асырыўда пайдаланылатуғын ахборот технологиялардың қолланыў орынлары белгиленеди.
7.	Оқыў шынығыўы процессінде, хәр бир киши модульда пайдаланылатуғын дидактикалық материаллардың түри хәм орны анықланады.
8.	Орта модуль мазмуны хәм оқытыў процессиниң барысын аңлатыўшы модульиниң жөнелтириўши тексти жазылды.

**2. “Математикалық анализ” пәнінің үлкен модуллары,
олардан көзленген мақсетлери хәм құрамындағы орта
модулар саны**

2-кесте

Т/ р	Үлкен модулар аты	Модуллардан көзленген мақсет	Орта модулар саны
8.	Анық емес интеграл	Басланғыш функция, анық емес интеграл түсиниклери хәм интегралдың әпиұайы қәсийетлери, әпиұайы қағыйдаларын талабаларға түсиндириў хәм анық емес интеграл кестесин талабаларға ядлатыў, интеграллаў усылларын үйретиў хәм рационал функцияларды, тригонометриялық хәм базы иррационал функцияларды интеграллаўды оларға үйретиў.	2 (2 лекция модули, 6 әмелий шынығыў модули)
9.	Анық интеграл	Анық интеграл (Риман интегралы) анықламалары, анық интегралдың бар болыўы хәм интегралланыўшы функциялар класы менен талабаларды таныстырыў хәм интегралдың қәсийетлери хәм оны есаплаўды, интегралды жуўық есаплаў формулаларын, анық интегралдың геометрия, физика хәм механика пәнлерине енгизиўлерин оларға үйретиў.	3 (2 лекция модули, 10 әмелий шынығыў модули)
10.	Санлы қатарлар	Санлы қатарлар тусиниги, оның жыйнақлы хәм таралыўшы болыўына тийисли мәселелерди талабаларға түсиндириў хәм оң қатарлар олардың жыйнақлылық	3 (2 лекция модули, 6 әмелий шынығыў

		белгилерин, қалеген ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылығының Лейбниц, Дирихле хәм Абель белгилерин келтирип, жыйнақлы қатарлардың қасийетлерин оларға үйретиў.	модули)
11.	Меншиксиз интеграллар	Шегаралары шексиз меншиксиз (биринши тур) интеграллар хәм олардың жыйнақлылығы ҳаққында талабаларға жетерлише мағлыўмат бериў хәм биринши түр меншиксиз интегралларды есаплаўды оларға үйретиў.	(2 лекция модули, 3 әмелий шынығыў модули)
	Жәми		10

3. Орта модуллеры хәм оқыў саатларының улыўма саны

3-кесте

Т/р	Орта модуллеры	Саны хәм сааты
1.	Орта модуллердың улыўма саны	10
2.	Лекция оқыў саатларының улыўма саны	56 саат
3.	Әмелий шынығыў саатлаының улыўма саны	49 саат
5.	Өз бетинше тәлим саатлары саны	- саат
6.	Жәми оқыў саатлары	- саат

Ескертиў: Тәлим жөнелиси: 5130100 – Математика
ОЎМТВтиң 2018 жыл 25 август 744-санлы буйрығы менен тастыйықланған оқыў режеси.

2. Мақсетлер жуўмағында ислетилетуғын фейиллер системасы

4-кесте

Т/р	Фейиллер	Т/р	Фейиллер
1	Түсиндириў	7	Анықлап шығыў
2.	Дәлиллеў	8.	Көрсетип бериў
3.	Анықлаў	9.	Көрсетиў
4	Тәртипке келтириў	10.	Шешиў, Группаластырыў
5.	Ийелеў, Анықлаў	11.	Өзгертириў
6.	Айтып бериў		

Ескертиу: Орта модул мақсетлерине қарап фейиллерден бири қойылады.

VIII. СЕГИЗИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ –Анық емес интеграл
1. СЕГИЗИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА
МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Басланғыш функция, анық емес
интеграл түсиниклери. Интегралдың әпиұайы қәсийетлери,
әпиұайы қағыйдалары. Интеграллаў усыллары

Киши модулар:

- 1.Басланғыш функция, анық емес интеграл түсиниклери.
Интегралдың әпиұайы қәсийетлери, әпиұайы қағыйдалары;
- 2.Интеграллаў усыллары;
- 3.Сегизинши үлкен модулдың биринши орта модуль
жойбары.

**Биринши киши модуль: Басланғыш функция, анық емес
интеграл түсиниклери. Интегралдың әпиұайы
қәсийетлери, әпиұайы қағыйдалары**

$y = f(x)$ функция (a,b) интервалда берилген болсын.

Анықлама. Егер (a,b) интервалда дифференциалланыўшы
 $F(x)$ функцияның туўындысы берилген $f(x)$ қа тең болса, яғный

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

болса, бул жағдайда $F(x)$ функция (a,b) интервалда $f(x)$ тың
басланғыш функциясы делинеди.

Лемма. Егер $F(x)$ хәм $\Phi(x)$ функциялар (a,b) интервалда
 $f(x)$ функцияның басланғыш функциясы болса, бул $F(x)$ хәм
 $\Phi(x)$ функциялар бир-биринен өзгермес санға парқ қылады.

Дәлил. $F'(x) = f(x)$

$$\Phi'(x) = f(x)$$

болсын, яғный (a,b) интервалдағы хәмме x ушын $F(x)$ хәм $\Phi(x)$
лар $f(x)$ тың басланғыш функциялары. Бу теңликлерде

$$F'(x) = \Phi'(x)$$

яғный,

$$F'(x) - \Phi'(x) = 0$$

ямаса

$$[F(x) - \Phi(x)]' = 0$$

Бул теңлік $\forall x \in (a, b)$ ушын орынланады хәм демек, $F(x) - \Phi(x)$ айырма (a, b) да өзгермес, яғный

$$F(x) - \Phi(x) = C$$

Буннан

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (2)$$

Лемма дәлилленди.

$F(x) + C$ басланғыш функцияның улыўма көриниси деп жүритиледи.

Жоқарыда айтылғанлардан:

1) (a, b) интервалда берилген $f(x)$ функцияның басланғыш функциялары шексиз көп болыўы;

2) $f(x)$ функцияның қәлеген еки басланғыш функциясы бир-биринен өзгермес санға парқ қылыўы келип шығады.

Анықлама. $f(x)$ функцияның (a, b) интервалдағы барлық басланғыш функцияларынан ибарат көплик онын **анық емес интегралы** делинеди хәм $\int f(x) dx$ туринде белгиленип,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C - \text{const})$$

көринисте жазылады. Бунда $\int$ - интеграл белгиси, $f(x)$ - интеграл астындағы функция, $f(x) dx$ - **интеграл астындағы аңлатпа** делинеди.

Көбинесе «анық емес интеграл» термининиң орнына, қысқаша, интеграл сөзи ислетиледи.

Анықлама. Функцияның туўындысына көре оның өзін табыў, яғный функцияның анық емес интегралын табыў **интеграллаў** делинеди.

Функцияларды интеграллаў әмели дифференциаллаў әмелине қарата кері әмел болады.

Анық емес интегралдың тийкарғы қәсийетлери төмендегилерден ибарат.

1-қәсийет. Анық емес интегралдың туўындысы $f(x)$ қа, дифференциалы болса $f(x) dx$ қа тең, яғный:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x); \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

Дәлил: $F'(x) = f(x)$ болсын. Онда $\int f(x) dx = F(x) + C$ болады (анықламадан). Усыны итибарға алып табамыз:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

2-кәсімет. Функция дифференциалының анық емес интегралы усы функция менен өзгермес сан жыйындысына тең:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Дәлил: $F'(x) = f(x)$ болсын. Онда

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

Егер

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) \quad (4)$$

екенлигин итибарға алсақ, (3) хәм (4) теңлемелерден

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

болыуы келип шығады.

3-кәсімет. Өзгермес көбейтиўшини интеграл белгиси астынан шығарыў мүмкин:

$$\int k(x)dx = k \int f(x)dx$$

Дәлил: $F'(x) = f(x)$ болсын. Онда $\int f(x)dx = F(x) + C$ болады. k ға көбейтемиз.

$$k \int f(x)dx = kF(x) + kC = kF(x) + C_1 \quad (KC = C_1) \quad (5)$$

Бизге мәлим, $kF(x)$ функция $kf(x)$ ның басланғыш функциясы болады, себеби

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

демек,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1 \quad (6)$$

нәтийжеде, (5) хәм (6) аңлатпаларға көре

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

4-кәсімет. Еки функция алгебралық жыйындысының анық емес интегралы функциялар анық емес интегралларының алгебралық жыйындысына тең:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Дәлил: $F'(x) = f(x)$; $G'(x) = g(x)$ болсын. Онда

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1$$

$$\int g(x)dx = G(x) + C_2$$

Буларда

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx = F(x) \pm G(x) + (C_1 + C_0) \quad (7)$$

$F(x) \pm G(x)$ жыйынды $f(x) \pm g(x)$ ушын баслангыш функция.

Демек,

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = F(x) \pm G(x) + C \quad (C = C_1 + C_2) \quad (8)$$

(7) хәм (8) лерден

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

келип шығады.

5-кәсийет. Интеграллаў өзгериўшиси орнына басқа өзгериўши жазылса, баслангыш функцияның көриниси өзгермейди, яғный $\int g(x) dx = F(x) + C$ болса, $\int f(y) dy = F(y) + C$ болады.

$u = u(x)$ базы бир дифференциалланыўшы функция болсын. «Тийкарғы интеграллар кестеси» төмендеги интеграллардан ибарат:

$$1. \int 0 \cdot du = C, \quad (C = \text{const})$$

$$8. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a} \right| + C$$

$$2. \int du = u + C$$

$$9. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$$

$$10. \int e^u du = e^u + C$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$11. \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$5. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$12. \int \cos u du = \sin u + C$$

$$6. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C$$

$$13. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$7. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$14. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

Екинши киши модуль: Интеграллау усыллары

Интеграллаудың улыўма усылы жоқ, хәр бир интеграл ушын бөлек бөлек жандасыў керек. Сондай функциялар бар, олардың басланғыш функцияларын элементар функциялардың шекли жыйындысы формасында аңлатып болмайды. Бундай интеграллар алынбайтуғын интеграллар деп жүритиледи.

Мысал. $\int e^{-x^2} dx$; $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int \frac{\cos x}{x} dx$

Тиккелей интеграллау усылы интеграл белгиси астындағы функцияны алмастырыў, интегралдың қасиётлерин қоллау, тийкарғы интеграллар кестесинен пайдаланыўларды өз ишине алады.

Дифференциал белгиси астына киритиў интеграл астындағы аңлатпаны алмастырыўдан ибарат.

$$dx = d(x+a); \quad dx = \frac{1}{k} d(kx) = \frac{1}{k} d(kx+a); \quad adx = d(ax)$$

$$dx = \frac{1}{2} d(x^2); \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

Кестеге кирмеген $\int f(x)dx$ интегралды есаплау керек болсын. x ты t ерки өзгериўшиниң базы бир дифференциалланыўшы функциясы арқалы аңлатып, интеграллаудың жаңа $x=\varphi(t)$ өзгериўшисин киритемиз, буннан t ди x арқалы аңлатамыз.

$$t = \varphi(x)$$

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1)$$

екенлигин дәлиллеймиз.

Бул теңликти төмендегише түсиниў керек: теңликтиң оң бөлегинде интеграллаудан соң ески x өзгериўшиге қайтыў керек.

Дәлиллеу ушын теңликтиң шеп хәм оң бөлегиниң дифференциалын табамыз:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \quad (2)$$

$$d\left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt\right) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = f(x)dx \quad (3)$$

(2) хәм (3) лерди салыстырып (1) теңликтиң шеп хәм оң тәрәплериниң дифференциаллары тең екенлигин көремиз, бул болса басланғыш функциялар өзгермес қосылыўшыға ғана парк қылыўы мүмкинлигин аңлатады. (1) формула дәлилленди.

Бөлеклеп интеграллаў формуласы еки функция көбеймесин дифференциаллаў формуласынан келип шығады. $u(x)$ хәм $v(x)$ лар x тың дифференциалланыўшы функциялары болсын. Олардың көбеймесиниң дифференциалын табамыз:

$$d(uv)=vdu+udv \text{ буннан } udv=d(uv)-vdu$$

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu \text{ ямаса } \int udv=uv-\int vdu \quad (4)$$

(4) бөлеклеп интеграллаў формуласы делинеди.

Бул формула әдетте интеграл астындағы функция түрли кластағы дәрежели хәм көрсеткишли, дәрежели хәм тригонометриялық, тригонометриялық хәм көрсеткишли хәм тағы басқа функциялардың көбеймеси көринисинде аңлатылғандағана қолланылады. Бунда интеграллаўдың еки түрин ажыратып, олар ушын нени u деп хәм нени dv деп қабыл қылыў кереклигин көрсетиў мүмкин.

Биринши түрге $P_n(x)$ көпағзалының көрсеткишли ямаса тригонометриялық функцияға көбеймесин өз ишине алған интеграллар киреди. Бул жерде u арқалы $P_n(x)$ көпағзалысы белгиленеди, қалған хәмме аңлатпа болса dv арқалы белгиленеди.

Екинши түрге $P_n(x)$ көпағзалының логарифмлик ямаса кери тригонометриялық функцияға көбеймеси қатнасқан интеграллар киреди. Бундай жағдайда dv менен $P_n(x)dx$ аңлатпа белгиленеди, қалған хәмме аңлатпа болса u менен белгиленеди.

Көбинесе усындай интегралларда ушырасады, бунда бөлеклеп интеграллаў формуласын қайталап қолланыў нәтийжесинде дәслепки интеграл пайда болады. Бул жағдайда пайда қылынған теңлемени дәслепки интегралға қарата шешиў керек.

**Үшінші киші модул: Сегизінші үлкен модулдың
бірінші орта модул жойбары.**

**Сегизінші үлкен модул құрамындағы бірінші
орта модулдың улыўма мақсети**

8.1.1-кесте

Басланғыш функция ҳаққында мағлыўматларды бериў, анық емес интеграллар кестесин пайда қылыўшы формулаларды интеграллаў, өзгериўши алмастырыў ямаса орнына қойыў ҳәм бөлеклеп интеграллаў усылларын үйретиў ҳәм оларға байланыслы мысаллардың шешимлерин табыўды студентлерге түсиндириў.

**Биринши орта модулдың киши модуларының
атлары хәм мақсетлери**

8.1.2-кесте

№	Киши модулар аты	Киши модуларының мақсети
1.	Басланғыш функция, анық емес интеграл түсиниклери. Интегралдың әпиұайы қәсийетлери, әпиұайы қағыйдалары.	Функцияның басланғышы хаққындағы мағлыұматларды берийұ, анық емес интеграллар кестесин пайда қылыұшы формулаларды хәм де интегралдың әпиұайы қәсийетлерин студентлерге үйретиұ.
2.	Интеграллаұ усыллары.	Интеграллаұ, өзгериийши алмастырыұ ямаса орнына қойыұ хәм бөлеклеп интеграллаұ усылларын үйретиұ хәм оларға байланыслы мысаллардың шешимлерин табыұды түсиндирийұ.

**Киши модулардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген бақлаұ сораұлары**

8.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаұ сораұлары
1.	Басланғыш функция, интеграл, анық емес интеграл, интеграллар кестеси.	1) Басланғыш функцияның анықламасы. 2) Басланғыш функцияның улыұ-ма көриниси. 3) Анық емес интегралдың анықламасын айтың. 4) Анық емес интегралдың қандай қәсийетлери бар? 5) Интеграллар кестесин жазың.

2.	Интеграллау, өзгеріші алмастырыу, бөлеклеп интеграллау, интеграл астындағы функция, интеграл астындағы аңлатпа.	1) Интеграллау дегенде нени түсинесіз? 2) Тийкарғы интеграллау усылын айтың. 3) Орнына қойыу усылын айтың. 4) Бөлеклеп интеграллау усылының мәнисин келтириң. 5) Интеграл астындағы функция не делинеди?
----	---	--

Ескертиу: Киши модуллардағы бақлау сорауларынан студентлер өз бетинше жумысларында да пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлау сораулары тийкарында
дүзилген тест**

8.1.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкин болған жуаулар	
1.	Егер (a,b) интервалда дифференциаланыушы $F(x)$ функцияның тууындысы берилген $f(x)$ қа тең болса, онда ... $F'(x) = f(x)$	А	$F(x)$ функция (a,b) интервалда $f(x)$ тың басланғыш функциясы делинеди.
		Б	$f(x)$ функция (a,b) интервалда $F(x)$ тың басланғыш функциясы делинеди.
		В	$f(x)$ функция $F(x)$ тың басланғыш функциясы делинеди.
2.	Басланғыш функцияның улыума көриниси қандай?	А	$F(x) + C$
		Б	$F(x)$
		В	$F'(x) = f(x)$
3.	Анық емес интегралдың анықтамасы дурыс берилген жуапты көрсетиң?	А	$f(x)$ функция ушын хәмме басланғыш функциялары көплигине айтылады.
		Б	Хәмме басланғыш функцияларынан ибарат көпликке айтылады.
		В	$\int f(x)$ көринистеги аңлатпаға айтылады.
4.	Интеграл не?	А	Тууынды алыу әмели.

		Б	Туўынды алыў әмелине кери әмел.
		В	Дифференциаллаў әмели.
5.	Интеграллаў не?	А	Функцияның дифференциалын табыў.
		Б	Функцияның туўындысын табыў
		В	Функцияның анық емес интегралын табыў
6.	Интеграл астындағы функция не делинеди?	А	Үзликсиз функция
		Б	Интегралланыўшы функция
		В	Басланғыш функция
7.	Интеграл астындағы аңлатпа не деп аталады?	А	$f(x)$ функцияның дифференциалы
		Б	$f(x)$ функцияның интегралы
		В	Интеграл астындағы функция
8.	Бөлеклеп интеграллаў формуласы қайсы жуўапта дурыс берилген?	А	$\int u dv = uv + \int v du$
		Б	$\int u dv = u - \int v du$
		В	$\int u dv = uv - \int v du$
9.	Функция дифференциалының анық емес интегралы неге тең?	А	Усы функция менен өзгермес сан жыйындысына тең
		Б	Усы функцияға тең
		В	Өзгермес санға тең
10.	Интеграллаў өзгериўшиси орнына басқа өзгериўши жазылса, басланғыш функцияның көриниси ...	А	Интеграллаў өзгериўшиси орнына басқа өзгериўшини қойыў мүмкин емес
		Б	Өзгермейди
		В	Өзгереді

Киши модуллардың оқыў шынығыўы түри хәм типі, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

8.1.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисиў, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў,

түрі:	билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, айтып бериў, иллюстрация, машқалалы сәўбет, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	Жазба жұмыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

**Киши модуллердың педагогикалық процессте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

8.1.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши хәм үшінши киши модуллер даўамында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Соның менен бирге, бақлаў сораўлары хәм усы сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға байланыслы сабақлықлар, методикалық қолланбалар, көргизбелі қураллар хәм де оқыў сабақлықларының режелери.

**2. СЕГИЗИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА
МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Рационал функцияларды
интеграллаў. Тригонометриялық хәм базы бир иррационал
функцияларды интеграллаў**

Киши модуллер:

1. Рационал функцияларды интеграллаў;

2. Тригонометриялық хәм базы бир иррационал функцияларды интеграллаў;
3. Сегизинши үлкен модульдың екинши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Рационал функцияларды интеграллаў

Бөлшек рационал функцияларды интеграллаўға байланыслы мысаллар.

1. а) $\int \frac{a}{x-\alpha} dx;$

б) $\int \frac{a}{(x-\alpha)^k} dx, \quad k \geq 2;$

в) $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx.$

2. а) $\int \sin mx \cdot \cos mx dx;$

б) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx.$

3. Әпиўайы иррационал функцияларды интеграллаў.

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бөлшек **рационал функция** делинеди. Бул жерде $P_n(x)$ - n -дәрежели көп ағзалы, $Q_m(x)$ болса m - дәрежели көп ағзалы.

Егер $n \geq m$ болса, «**надурьс бөлшек**» делинеди. Бунда алымы бөлиминде бөлинип пүтин бөлеги ажыратылады. Хәр бир қосылыўшы бөлек – бөлек интеграл алынады.

Хәр қандай $P_n(x)$ көп ағзалы Безу теоремасына тийкарланып,

$$P_n(x) = a(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} (x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \dots (x^2+p_ex+q_e)^{s_e}$$

көринисинде жазыў мүмкин; бул жерде α_r саны $P_n(x)$ көп ағзалының k_r есели корени $x^2+p_ex+q_e$ лар дискриминанты терис болған квадрат үш ағзалылар.

Хәр қандай дурыс $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} (n < m)$ бөлшекти $\frac{A_1}{x-\alpha}; \frac{A_2}{(x-\alpha)^k}; \frac{Ax+B}{(x^2+px+S)^5}$ сыяқлы бөлшеклердің жыйындысы

көринисінде аңлатыў мүмкин.

$$a) \int \frac{A dx}{x-\alpha} = A \int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = A \ln|x-\alpha| + C$$

$$б) \int \frac{A dx}{(x-\alpha)^k} = A \int (x-\alpha)^{-k} dx = A \int (x-\alpha)^{-k} d(x-\alpha) = A \cdot \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + C$$

в) $D > 0$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \int \frac{ax+b}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} dx = \int \left[\frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} \right] dx;$$

$D < 0$ holda

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(b - \frac{ap}{2} \right) \cdot \int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$D = 0$ holda

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx = \int \frac{ax+b}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} dx$$

Екинши киши модуль: Тригонометриялық ҳәм базы бир иррационал функцияларды интеграллаў

$$a) \int \sin mx \cdot \cos mx dx = \int \frac{\sin 2mx}{2} dx = -\frac{1}{4m} \cos 2mx + C$$

б) $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$ интегралды көбеймени қосындыға келтирип есапланады, яғный $\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

в) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ ти есаплаўда n ҳәм m лердің жуп ҳәм тақ екенлиги итибарға алынады:

1) $n > 0$ ҳәм тақ болса, $\cos x = z$ алмастырыў менен,

2) $m > 0$ ҳәм тақ болса, $\sin x = z$ алмастырыў менен,

3) Егер еки m хэм n көрсеткишлер жуп хэм терис емес болса, онда

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

дәрежени пәсейтиў формулаларынан пайдаланылады.

4) $m + n = -2k$ болса, $\operatorname{tg} x = z$ алмастырыў менен шешиледи.

5) Егер дәрежелерден бири нольге тең, екиншиси терис так болса, $\frac{\operatorname{tg} x}{2} = z$ алмастырыў менен улыўма, $\int R(\sin x, \cos x) dx$

интегралда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$ универсал алмастырыў менен шешиледи.

а) $\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$ көринисиндеги интеграл $ax+b=t^n$ орнына қойыў жәрдеми менен табылады, бунда $P(x)$ рационал функция.

б) $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}) x^{m-1} dx$ интеграл $ax^m+b=t^n$ орнына қойыў жәрдеми менен табылады.

в) $\int \frac{(Mx+N)}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ көринистеги интеграл $x-a=\frac{1}{t}$ орнына қойыў жәрдеми менен табылады.

с) $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ көринистеги интеграл $x=asint$ орнына қойыў жәрдеми менен, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ көринистеги интеграллар болса $x=tg t$ орнына қойыў нәтийжесинде рационал тригонометриялық көриниске келтириледи.

д) $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ интеграл төмендеги үш жағдайда ақырына шекем шешиледи:

1) p – пүтин болғанда жайыў жолы менен;

2) $\frac{m+1}{n}$ пүтин болғанда $a+bx^n=t^s$ орнына қойыў жолы менен;

3) $\frac{m+1}{n} + n$ пүтин болғанда болса $ax^{-n}+b=t^s$ орнына қойыў жолы менен; C – бунда P ниң бөлиминен ибарат.

Үшінші киши модуль: Сегизінші үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Сегизінші үлкен модуль құрамындағы екінші орта модульдің ұлыма мақсети

8.2.1-кесте

Интеграллар кестеси жәрдемінде туўрыдан туўры интеграллаў мүмкин болмаған функцияларды, яғный рационал бөлшеклерден дүзилген функцияларды, базы бир тригонометриялық хәм иррационал функцияларды интеграллаўды студентлерге үйретиў.
--

Биринші орта модульдің киши модульларының атлары хәм мақсетлери

8.2.2-кесте

№	Киши модульлар аты	Киши модульлардин мақсетлери
1.	Рационал функцияларды интеграллаў.	Интеграллар кестеси жәрдемінде туўрыдан туўры интеграллаў мүмкин болмаған функцияларды, яғный рационал бөлшеклерден дүзилген функцияларды интеграллаўды студентлерге үйретиў.
2.	Тригонометриялық хәм базы бир иррационал функцияларды интеграллаў.	Интеграллар кестеси жәрдемінде туўрыдан туўры интеграллаў мүмкин болмаған функцияларды, яғный рационал бөлшеклерден дүзилген функцияларды, базы бир тригонометриялық хәм иррационал функцияларды интеграллаўды студентлерге үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

8.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Бөлшек рационал функцияларды интеграллаў, пүтин бөлегин ажыратыў, белгисиз коэффициентлер усылы, бөлими квадрат үш ағзалы болған дурыс бөлшеклер.	1) Надурыс бөлшек рационал функция қалай интегралланады? 2) Бөлими квадрат үш ағзалы болған дурыс бөлшек рационал функцияларды интеграллаў жолы? 3) Пүтин бөлеги қалай ажыратылады? 4) Белгисиз коэффициентлер усылы қалай әмелге асырылады?
2.	Тригонометриялық функцияларды интеграллаў, иррационал функцияларды интеграллаў.	1) Тригонометриялық функцияларды интеграллаўда нелерге итибар берий керек? 2) Иррационал функцияларды интеграллаўда улыўма жөнелис қалай аңлатылады?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан студентлер өз бетинше жумысларды ислегенде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары тийкарында
дүзилген тест**

8.2.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Бөлшек рационал функцияларды интеграллаў қандай усыл?	А	$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ көринистеги дурыс хәм надурыс бөлшеклерди интеграллаў усылы
		Б	Тек надурыс бөлшеклерди интеграллаў усылы
		В	Тек дурыс бөлшеклерди

			интеграллау ұсыны
2.	Пүтін бөлігі қалай ажыратылады?	А	Көп ағзалыны көп ағзалыға бөліу қағыйдасы менен ажыратылады
		Б	Көп ағзалыны көп ағзалыға көбейтйу қағыйдасы менен ажыратылады
		В	көп ағзалыны көп ағзалыға қосыу қағыйдасы менен ажыратылады
3.	$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$ интегралы қалай есапланады?	А	$ax+b=t^n$ орнына қойыу жолы менен
		Б	$ax^m+b=t^n$ орнына қойыу жолы менен
		В	$x-a=\frac{1}{t}$ орнына қойыу жолы менен
4.	$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ ти есаплағанда нени итибарға алыу керек?	А	n хәм m лардың белгилерин
		Б	n хәм m лардың жуп хәм тақлығын
		В	Функциялардың периодын
5.	$\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right) x^{m-1} dx$ интегралы қалай есапланады?	А	$ax+b=t^n$ орнына қойыу жолы менен
		Б	$ax^m+b=t^n$ орнына қойыу жолы менен
		В	$x-a=\frac{1}{t}$ орнына қойыу жолы менен
6.	$\int \sin mx \cdot \cos nx dx$ интегралы қалай есапланады?	А	Көбеймени қосындыға келтирип есапланады
		Б	Өзгериуши киритилип есапланады
		В	Бөлеклеп интеграллау жолы менен есапланады

7.	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ интегралы қалай есапланады?	А	$x = \operatorname{tg} t$ орнына қойыу жолы менен
		Б	$x = a \sin t$ орнына қойыу жолы менен
		В	$ax + b = t^n$ орнына қойыу жолы менен
8.	Тригонометриялық функцияларды интеграллауда нелерге итибар бериу керек?	А	Интеграл астындағы тригонометриялық функциялардың көринисине хәм дәрежелериниң жуптақлығына
		Б	Интеграл астындағы тригонометриялық функциялардың көринисине
		В	Интеграл астындағы тригонометриялық функциялардың дәрежелериниң жуптақлығына
9.	Интеграл астындағы тригонометриялық функциялардың көринисине қарап не қылыу мүмкин?	А	Көбеймени жыйындыға келтирип есаплау мүмкин.
		Б	Көбеймени жыйындыға келтириу, тәртибин пәсейтиу мүмкин.
		В	Тәртибин пәсейтип есаплау мүмкин.
10.	$\int \frac{(Mx + N)}{(x-a)\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ көринисиндеги интеграл қалай есапланады?	А	$ax + b = t^n$ орнына қойыу жолы менен.
		Б	$ax^m + b = t^n$ орнына қойыу жолы менен.
		В	$x - a = \frac{1}{t}$ орнына қойыу жолы менен.

**Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри, онда
қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар**

8.2.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәўбет, тест
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар)
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық
Оқытуу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория
Мониторинг хәм бақалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер дауамында берилетуғын жуўаплар, тест

**Киши модуллардың педагогикалық процессте
пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық
технологиялары хәм дидактикалық материаллар**

8.2.6-кесте

Оқытуудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модуллар дауамында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Соның менен бирге, бақлау сораўлары хәм усы сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға байланысly сабақлықлар, методикалық қолланбалар, көргизбели қураллар хәм де оқыу сабақлықларының режелери.

IX. ТОҒЫЗЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛ –Анық интеграл

(2 лекция модули, 10 әмелий сабақ модули)

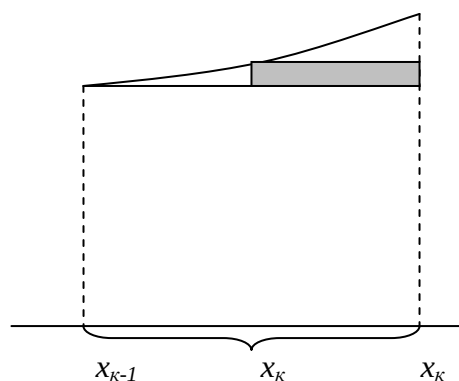
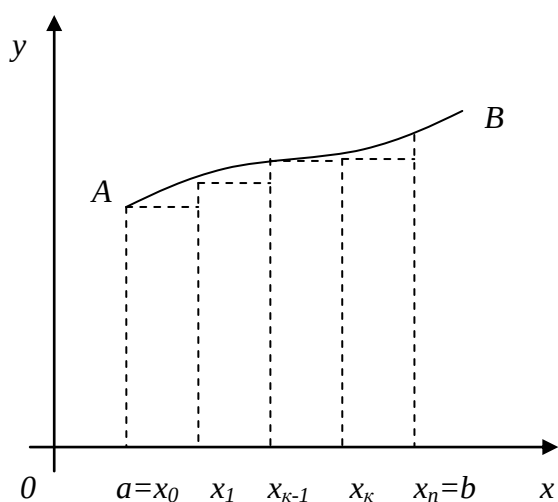
1. ТОҒЫЗЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Анық интеграл (Риман интегралы) анықтамалары. Анық интегралдың бар болуы және интегралланыушы функциялар класы

Киши модулар:

1. Анық интеграл (Риман интегралы) анықтамалары;
2. Анық интегралдың бар болуы;
3. Интегралланыушы функциялар класы;
4. Тоғызыншы үлкен модульдің бірінші орта модуль жойбары.

Бірінші киши модуль: Анық интеграл (Риман интегралы) анықтамалары

а) Иймек сызықты трапецияның майданы ҳақындағы мәселе.



$y=f(x)$ - оң монотон функция болсын. $aABb$ - иймек сызықты трапеция делинеди.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ барлық Δx_k лар өз-ара тең болуы шәрт емес. Иймек сызықты трапеция майданларын тууры төрт

мүйеш пенен алмастырамыз. Хәр бир төрт мүйеш майданы $f(x_{k-1})\Delta x_k$ ға тең. Барлық төрт мүйешлер майданларының қосындысы

$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_1 + f(x_1) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$$

Берилген иймек сызықлы трапеция ишине сызылған бағана формасының майданын береді хәм ол иймек сызықлы трапеция майданынан киши (егер берилген $f(x)$ функция өсиўши болса). Хәр бир Δx_k ны және майдаласақ, пайда болған бағаналы формасының майданы алдыңғысынан үлкен болады хәм трапеция майданынан киши хәм т.б.

Иймек сызықлы трапецияның майданы пайда болатуғын төртмүйешлер майданлары қосындысының $\lambda = \max \{\Delta x_k\} \rightarrow 0$ деги лимитине тең, яғный

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$$

б) Басып өтилген жол ҳаққындағы мәселе: Тезлик v ўақыт t ның функциясы болсын, онда $v = f(t)$ функцияны пайда етеміз. Ўақыт аралығын $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ n бөлекке бөлеміз.

Бул аралықлардың басланғыш бөлегинде ноқаттың тезликлери $v_1, v_2, \dots, v_n$ болады. Хәр бир Δx_k ушын $v_k \cdot \Delta t_k$ көбеймени дүземіз.

$$S_n = v_1 \cdot \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^n v_k \Delta t_k$$

Δt_k қанша киши болса, бул қосынды басып өтилген ҳақыйқый жолға сонша жақын болады.

Соның ушын ҳақыйқый жол S ушын

$$S = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v_k \Delta t_k$$

қабыл қылынады.

Анық интеграл – интеграл қосындысының лимити.

$[a, b]$ кесиндиде үзликсиз функция берилген болсын.

$$1) a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b; \quad x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$$

$$2) x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$$

3) $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ - көбеймелер қосындысын дүземіз ($k=1, 2, \dots, n$),
яғный

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Бул **интеграл қосынды** делинеди.

Δx_k ларды және бөлеклерге бөлеміз. Бунда интеграл қосынды өзгериўши шама болып, шекли лимитке ийе болады. Бул лимит $f(x)$ функцияны $[a, b]$ кесиндидеги **анық интегралы** делинеди хәм төмендегише жазылады.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

a хәм b лар **интегралдың шегаралары** болып, a – төменги шегара, b - жоқарғы шегара делинеди.

Солай етип: $f(x)$ функцияның a ва b шегаралар арасындағы **анық интегралы** деп $\sum f(\xi_k)\Delta x_k$ интеграл қосындысының Δx_k кесиндилердің ең үлкени **нольге умтылғандағы лимитине** айтылады.

Екинши киши модуль: Анық интегралдың бар болыўы

Анық интегралдың екинши анықламасы интеграл қосындысына қарағанда әдеўир әпиўайырақ болған Дарбу қосындыларына тийкарланады.

Дарбу қосындылары $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта анықланған болып, ол бул аралықта шегараланған болсын. Демек, сондай турақлы m хәм M санлар бар, $\forall x \in [a, b]$ лар ушын $m \leq f(x) \leq M$ теңсизликлер орынлы болады.

Енди $[a, b]$ аралықта қандай да бир $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z} (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ бөлеклеўди алайық. Соның ушын, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланған

екен, функция хәр бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) аралықта да шегараланған болып, бул функцияның анық шегаралары

$$m_k = \inf\{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$M_k = \sup\{f(x)\}, x \in [x_k, x_{k+1}]$$

бар болады.

Бизге мәлим, қәлеген $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ушын $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ теңсизликлер де орынлы болады. Енди m_k хәм M_k санларды $[x_k, x_{k+1}]$ аралықтың узынлығы $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) ға көбейтип төмендеги

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \dots + m_k \Delta x_k + \dots + m_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \dots + M_k \Delta x_k + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

қосындыларды дүземиз.

Анықлама. Бул

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

қосындылары сәйкес түрде Дарбудың төменги хәмде жоқарғы қосындылары деп аталады.

Бул анықламадағы m_k хәм M_k санлар ушын $m_k \leq M_k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) теңсизлик орынлы болғаны ушын $s \leq S$ теңсизликте орынлы болыуы келип шығады.

Анықлама. $\{s(P)\}$ көпликтің дәл жоқарғы шегарасы $f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндидеги төменги интегралы деп аталады хәм ол

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx$$

белгиленеди

$\{s(P)\}$ көпликтің дәл төменги шегарасы $f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндидеги жоқарғы интегралы деп аталады. Ол

$$\bar{I} = \int_a^b f(x) dx$$

белгиленеди

Анықлама. Егер $f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндидеги төменгі хәм де жоқарғы интеграллары бир-бирине тең болса, онда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы делинеди. Олардың улыўма мәниси

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ функцияның $[a, b]$ аралықтағы анық интегралы делинеди.

1-Лемма. Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған хәм шегараланған болса, онда

$$\underline{I} \leq \bar{I}$$

теңсизлик орынлы болады.

2-Лемма. Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесимде анықланған хәм шегараланған болса, онда $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылады, диаметри $\lambda_p < \delta$ болған $[a, b]$ кесиндини барлық p бөлеклерге бөлиў ушын

$$S(P) < \bar{I} + \varepsilon, s(P) > \bar{I} - \varepsilon$$

теңсизликлер орынлы болады.

1-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта интегралланыўшы болыўы ушын $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылып, $[a, b]$ аралықты диаметри $\lambda_p < \delta$ болған хәр қандай p бөлекке қарата Дарбу қосындылары

$$S(P) - s(P) < \varepsilon \quad (1)$$

теңсизликти қанаатландырыўы зәрүрли хәм жеткиликли.

Дәлил. Зәрүрлилиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта интегралланыўшы болсын. Анықламаға қарата $I = \underline{I} = \bar{I}$ болады, бунда

$$\bar{I} = \inf\{S(P)\}, \underline{I} = \sup\{s(P)\},$$

$\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылсын, $[a, b]$ кесиндиниң диаметри $\lambda_p < \delta$ болған хәр қандай p бөлеклеўге қарата Дарбу қосындылары ушын 2-Леммаға қарата

$$S(P) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}, \bar{I} - s(P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

теңсизлиги орынлы болып, оннан

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

теңсизлик келип шығады.

Жеткиликлілігі. $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылып, $[a, b]$ кесиндини диаметрі $\lambda_p < \delta$ болған хәр қандай P бөлеклейге қарата Дарбу қосындылары үшін

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

теңсизлик орынлы болсын. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланғанлығы үшін оның төменгі хәм де жоқарғы интеграллары

$$\bar{I} = \inf\{S(P)\}, \quad \underline{I} = \sup\{s(P)\},$$

бар хәм 1-Леммаға қарата $\underline{I} \leq \bar{I}$ теңсизлик орынлы болады. Бизге мәлим,

$$s(P) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S(P)$$

Бул қатнастан $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S(P) - s(P)$ болыўын табамыз. Демек, $\forall \varepsilon > 0$ сан үшін $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \varepsilon$ болып, оннан $\bar{I} = \underline{I}$ болыўы келип шығады.

Бул болса $f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы екенлигин билдиреди. Теорема дәлилленди.

Егер $f(x)$ функцияның $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) кесиндидеги тербелиўин ω_k арқалы белгилесек, онда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$$

болып, жоқарыда келтирилген теорема төмендегише аңлатылады.

2-теорема. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы болыўы үшін $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылып, $[a, b]$ кесиндиниң диаметрі $\lambda_p < \delta$ болған хәр қандай P бөлеклейде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \quad (2)$$

теңсизликтің орынланыўы зәрүрлі хәм жеткиликли.

(2) қатнасты төмендегі

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0 \quad (3)$$

көринисінде де жазыу мүмкін.

Үшінші киши модуль: Интегралланыушы функциялар класы

Енди анық интегралдың бар екенлиги ҳаққындағы теоремадан пайдаланып, базы функциялардың интегралланыушы болыуын көрсетемиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде анықланған болсын.

3-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз болса, онда бул аралықта интегралланыушы болады.

Дәлил. $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта үзликсиз болсын. Вейерштрассстың биринши теоремасына қарата $\forall \varepsilon > 0$ алынғанда да сондай $\delta > 0$ сан табылады, $[a, b]$ кесиндини узынлықлары δ дан киши болған бөлеклерге ажыратылғанда функцияның ҳәр бир бөлектеги тербелиуи ушын $\omega_k < \varepsilon$ теңсизлик орынлы болады. Демек, $[a, b]$ кесиндини диаметри $\lambda_p < \delta$ болған ҳәр қандай P бөлеклеуде

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a)$$

болып оннан

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$$

келип шығады. Демек, (3) қарата $f(x)$ функция $[a, b]$ де интегралланыушы. Теорема дәлилленди.

4-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланған ҳәм монотон болса, функция бул аралықта интегралланыушы болады.

Дәлил. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланған ҳәм бул аралықта айтайық, өсиуши болсын. $\forall \varepsilon > 0$ санды алып оған қарата $\delta > 0$ санды төмендегише сайлайық:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} > 0$$

соң $[a, b]$ кесиндинің диаметрі $\lambda_p < \delta$ болған p бөлеклейге қарата Дарбу қосындылары $S(P)$ хәм $s(P)$ ни дүземиз. Бул жағдайда

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] =$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})] =$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(x_{n-1}) - f(x_0)] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

Демек,

$$S(P) - s(P) < \varepsilon$$

бул болса (1) ге қарата $f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы екенлигин билдиреди. Шегараланған хәмде кемейиўши функцияның интегралланыўшы болыўыда тап усыған уқсас дәлилленеди. Теорема дәлилленди.

5-теорема. Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланған хәм бул аралықтың шекли сандағы ноқатларында үзилиске ийе болып, қалған барлық ноқатларында үзликсиз болса, функция бул аралықта интегралланыўшы болады.

Үшінши киши модуль: Тоғызыншы үлкен модульдың бірінши орта модуль жойбары.

Тоғызыншы үлкен модуль қурамындағы бірінши орта модульдың улыўма мақсети

9.1.1-кесте

Төменги хәм жоқарғы шегаралары мәлим болған анық интегралларды есаплаўды түсиндирий, интегралдың барлығы критерийсин, интегралдың Дарбу қосындыларына тийкарланып киритилген анықламаларын, интегралдың барлығы ҳаққындағы теоремалардан пайдаланып базы функциялардың интегралланыўшы болыўын студентлерге үйретиў.

**Биринши орта модульдің киши модульларының
атлары хәм мақсетлери**

9.1.2-кесте

№	Киши модульлар аты	Киши модульлардын мақсетлери
1.	Анық интеграл (Риман интегралы) анықламалары.	Төменги хәм жоқарғы шегаралары мәлим болған анық интегралларды есаплаўды студентлерге түсиндириў.
2.	Анық интегралдың бар болыўы.	Студентлерге интегралдың бар болыў критериясын, интегралдың Дарбу қосындыларына тийкарланып киритилген анықламаға көре көрсетип бериў.
3	Интегралланыўшы функциялар класы.	Интегралдың барлығы ҳаққындағы теоремалардан пайдаланып bazı функциялардың интегралланыўшы болыўын түсиндириў.

**Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм
олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

9.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Интеграл қосынды, анық интеграл, иймек сызықлы трапеция, төменги шегара, жоқарғы шегара.	1) Интеграл қосынды не? 2) Иймек сызықлы трапеция майданын хәм басып өткен жолды есаплаўдағы улыўмалық неден ибарат? 3) Анық интегралға анықлама бериң.

2.	Дарбу қосындысы, бар болыу критерийси?	1) Дарбу қосындыларын келтиріп шығарың. 2) Интегралдың Дарбу қосындыларына тийкарланып киритилген анықламаны айтып берің? 3) Интегралдың бар болыуы критерийси қандай?
3	Функциялардың интегралланыушы болыуы.	1) Үзликсиз функциялардың интегралланыушы болыу шарт-лерин айтып берің? 2) Егер функция монотон болса? 3) Функция берилген аралықтың базы ноқатларында үзіліске ийе болса?

Ескертиу: Киши модуллардағы бақлау сорауларынан студентлер өз бетинше жұмыстарды ислегенде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлау сораулары
тийкарында дүзилген тест**

9.1.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкин болған жуаулар	
1.	Иймек сызықлы трапецияның майданы қалай есапланады?	А	$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k$
		Б	$S = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$

		В	$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot \Delta x_k$
2.	Анық интегралға анықлама берің хәм оның көриниси қандай?	А	Интеграл қосындысының лимити. $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$
		Б	Интеграл қосындысының лимити. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) x_k = \int_b^a f(x) dx$
		В	Интеграл қосындысының лимити. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$
3.	Дарбудың төменги хәм де жоқарғы қосындылары көрсетилген дурыс жуўапты көрсетің.	А	$S = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k$
		Б	$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$
		В	$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k, S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k$
4.	Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта ... болса, онда $\underline{I} \leq \bar{I}$ теңсизлиги орынлы болады.	А	Анықланған хәм шегараланған
		Б	Шегараланған
		В	Анықланған
5.	Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта ... болса, ол бул аралықта интегралланыўшы болады.	А	Үзликсиз
		Б	Монотон
		В	Берилген аралықтың bazı нокатларында үзилiske ийе.
6.	Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ аралықта ... болса, функция бул	А	Шегараланған.
		Б	Шегараланған хәм монотон.

	аралықта интегралланыўшы болады.	В	Үзликсиз.
7.	Егер $f(x)$ функция [a, b] аралықта шегараланған хәм ... болса, функция бул аралықта интегралланыўшы болады.	А	Бул аралықтың шекли сандағы ноқатларында үзилиске ийе болып, қалған барлық ноқат- ларында үзликсиз.
		Б	Бул аралықтың шекли сандағы ноқатларында үзилиске ийе.
		В	Монотон.
8.	$f(x)$ функцияның a хәм b шегаралар арасындағы анық интегралы деп... айтылады.	А	$\sum f(\xi_k) \Delta x_k$ интеграл қосындысының Δx_k кесинди- лердің ең үлкени нольге умтылғандағы лимитине.
		Б	$\sum f(\xi_k) \Delta x_k$ интеграл қосынды- сының Δx_k кесиндинің нольге умтылғандағы лимитине.
		В	$\sum f(\xi_k) \Delta x_k$ интеграл қосынды- сының Δy_k кесиндилердің ең үлкени нольге умтылғандағы лимитине.
9.	$y = x$ туўры сызық, ОХ көшери хәм $x = 1$ туўры сызық пенен шегаралан- ған фигураның майданын есаплаң.	А	$\int_1^0 x dx = \frac{1}{2}$
		Б	$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$
		В	$\int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$
10.	Егер $f(x)$ функция- ның [a, b] аралық- тағы төменги хәм	А	Бул жағдайда $f(x)$ функция интегралланыўшы делинеди.
		Б	Бул жағдайда $f(x)$ функция

	де жоқары интегралары бир-бирине тең болса ...		$(a; b)$ аралықта интегралланыўшы делинеди.
		В	Бул жағдайда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде интегралланыўшы делинеди.

Киши модулардың оқыў шынығыўы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

9.1.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисиў, диалоглы, көргизбелі, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри хәм типі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириў, айтып бериў, иллюстрация, машқалалы сәўбет, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалаў:	Жазба жұмыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

Оқытыудың техникалық құраллары	Дидактикалық материаллар
Биринші, екінші хәм үшінші киши модулар тийкарында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў–методикалық комплекс, көрсетпели құраллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери.

2. ТОҒЫЗЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Интегралдың қасиеттері.

Интегралды жуық есеплеу формулалары

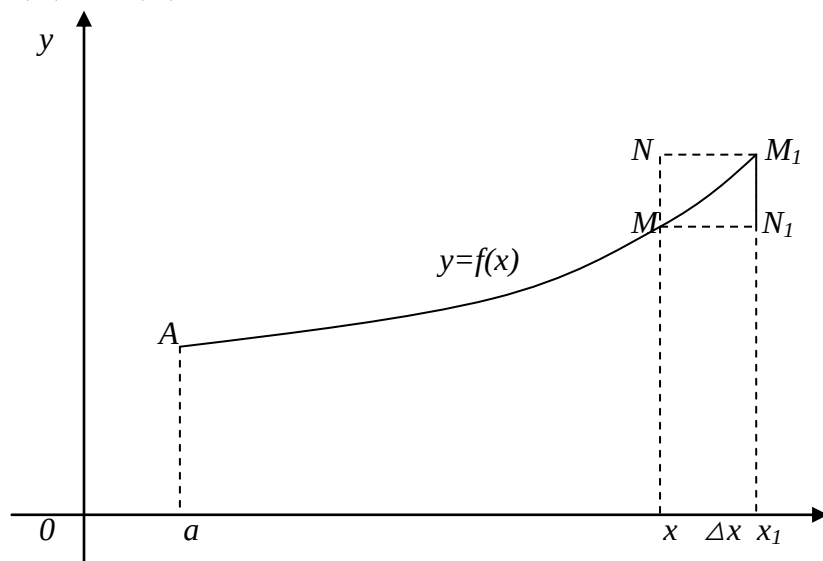
Киші модульдер:

1. Ньютон-Лейбниц формуласы және интегралдың қасиеттері;
2. Интегралды жуық есеплеу формулалары;
3. Тоғызыншы үлкен модульдің екінші орта модуль жойбары.

Бірінші кіші модуль: Ньютон-Лейбниц формуласы және интегралдың қасиеттері

Оң шегарасы өзгеріуші иймек сызықты трапецияны аламыз. Бұл трапецияның майданы оң шегараның жағдайына байланысты болған өзгеріуші шама. Бұл майданды $\Phi(X)$ деп белгілейміз.

Теорема. Өзгеріуші иймек сызықты трапецияның майданын аңлатыушы $\Phi(x)$ функциясы графиги трапецияның жоқарғы шегарасы болған $y=f(x)$ функциясы үшін басланғыш функция болады, яғни $\Phi(x)=\int f(x)dx$ дәлилдеу мүмкин $\Phi'(x)=f(x)$.



Дәлили. x қа Δx арттырмасын берсек, майдан $\Delta\Phi(x) = x M M_1 x_1$ болады. сызылмадан:

$$f(x)\Delta x < \Delta\Phi(x) < f(x+\Delta x)\Delta x, \quad \Delta x > 0; \quad f(x) < \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

$f(x)$ үзлексіз функция болғаны үшін

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) = f(x)$$

Солай етип, $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}$ лимитлери өз-ара тең болған екі өзгеріуші шама арасында жатады, соның үшін $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$, яғни $\Phi'(x) = F(x)$ шеп хәм оң шегаралары белгиленген $x=a$, $x=b$ деп алсақ,

$$a \text{ A } B b \text{ майдан} = \int_a^b f(x) dx$$

Бул майдан $\Phi(x)$ функциясының $x=b$ болғандағы жеке мәніси болады.

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$$

Тап усыған уқсас өзгеріуші трапеция майданы

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (1)$$

Бул (1) жоқарғы шегараның функциясы. Егерде $\Phi(x)$ функция қандайда бир басланғыш функция болса,

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (2)$$

болады. (1) хәм (2) ден

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C$$

$x=a$ да майдан нольге тең.

$$\Phi(a) = F(a) + C = 0 \rightarrow C = -F(a)$$

$$\text{Демек, } \Phi(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$$

$x=b$ десек,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3)$$

Бул анық хәм анық емес интеграл арасындағы байланыс болып, **Ньютон-Лейбниц формуласы** делинеди. Әдетте, бул формула төмендегіше жазылады:

$$\int_a^b F(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Солай етип, (3) формуланы анық интегралларды есаплау үшін төмендегіше қолланылады:

1. Интеграл астыдағы функцияның басланғыш функциясы табылады;
2. Басланғыш функцияның интеграл шегараларындағы дара мәніслери табылады;
3. Басланғыш функция дара мәніслериниң айырмасы табылады.

Анық интегралдың қәсийетлери.

1. Қосындының анық интегралы қосылыушылардың анық интегралларының қосындысына тең.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Дәлили. Интеграл қосындысын дүземиз.

$$\sum_{k=1}^n \{f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k)\} \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k$$

$\lambda \rightarrow 0$ да $\lim$ кетсек

$$\int_a^b [F_1(x) + F_2(x)] dx = \int_a^b F_1(x) dx + \int_a^b F_2(x) dx$$

2. Турақлы көбейтiушиниң интеграл белгиси астынан шығарыу мүмкин.

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

3. Анық интегралдың шегараларын өз-ара алмастырсақ интегралдың абсолют мәніси өзгермей, қарама-қарсыға алмасады.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

4. Егер $a < c < b$ болса,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

болады.

5. Интегралдың шегараларын өзгертпеген халда интеграл астындағы еркли өзгеріуішини қәлеген өзгеріуіши менен алмастырыу мүмкин.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(t) dt$$

Екинши киши модуль: Интегралды жууық есаплау формулалары

Егер $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде үзликсиз хәм оның басланғышы $F(x)$ белгили болса, бул функциядан алынған анық интеграл Ньютон-Лейбниц формуласы менен есапланады, яғный:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x) \quad (1)$$

Бирақ көп жағдайларда $f(x)$ тиң даслепки функциясын табыу жүдә қурамалы, ямаса улыума тауып болмайды. Демек, (1) ди қолланып болмайды. Буннан тысқары $f(x)$ кесте көринисинде берилген болса, оның басланғышы деген түсиниктиң мәниси жоғалады. Соның ушын жууық есаплау үлкен әхмийетке ийе болады.

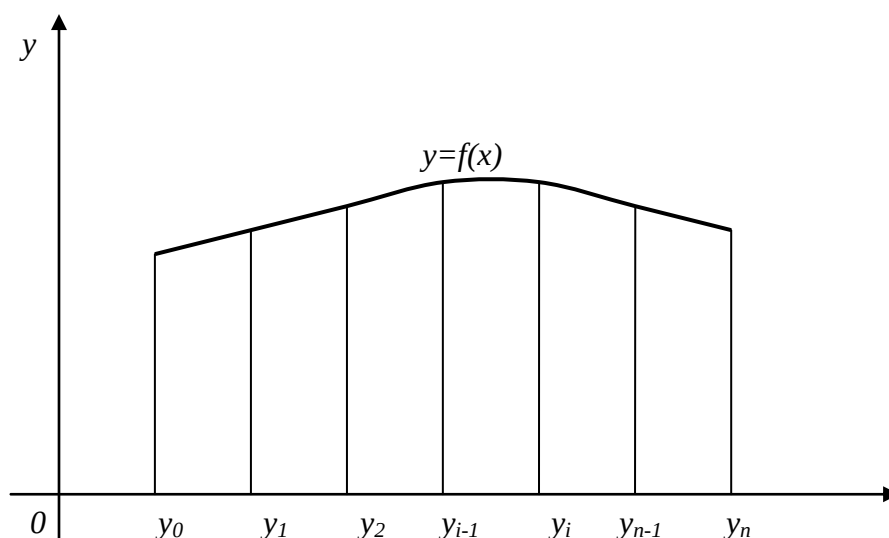
Бир есели (анық) интегралды санлы интеграллау механик **квadrатуралау** деп айтылады, оған сәйкес формулалар болса **квadrатура формулалары** деп жүритиледи.

Квadrатура формулаларының тийкарында интеграл астындағы функцияның бир неше мәнисинен пайдаланыу жатады.

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad (2)$$

Бул жердеги A_i лар қалеген турақлы коэффициентлер, олардың мәніслери белгили қағыйдалар тийкарында табылады.

Трапециялар формуласы. Интегралдың геометриялық мәнісінен пайдаланамыз (ямаса интеграл астындағы функцияны $[a, b]$ кесиндиде туўры сызық пенен алмастырамыз, нәтийже бирдей болады.



$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] \quad (3)$$

бул ең әпиўайы квадратура формулаларынан бири. Бул формуланың қәтелиқ дәрежеси

$$R = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\bar{x})$$

Буның анықлығын асырыў ушын $(b-a)$ n бөлекке бөлинеди:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = h$$

Хәр бир бөлек ушын (3) формула жазылады. Интеграл n интеграллар қосындысына тең болады. Бул жағдайда төмендегише формула алынады:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}h \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \quad (4)$$

Әдетте қәтелік төмендегіше жазылады:

$$|R| \approx \frac{1}{12} (b-a) \cdot h^2 \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Симпсон формуласы. Интеграл астындағы функция графигин $2n$ (жуп) бөлеклерге ажыратамыз хәм олардың хәр бирин парабола деп қараймыз. Иймек сызықлы трапеция майданы парабола шегаралы бир неше трапециялар майданлары қосындысы менен алмастырылады. Нәтийжеде, **Симпсон формуласы** (ямаса параболалар формуласы) деп аталыўшы төмендеги формула келип шығады.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$$

Бул формуланы төмендегіше жайып жазылады:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right]$$

Симпсон формуласының анықлық дәрежеси

$$|R| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max |f^{(IV)}(x)|$$

Бул формулада:

$$x_0 = a, \quad x_{2n} = b, \quad h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_k = x_0 + \frac{b-a}{2n} k$$

$$y_k = f(x_k) \quad x_k = x_0 + k h$$

**Үшинши киши модул: Тоғызыншы үлкен модулдың
екинши орта модул жойбары.**

**Тоғызыншы үлкен модул құрамындағы екинши
орта модулдың улыўма мақсети**

9.2.1-кесте

Интегралдың қәсийетлерин хәм оны Ньютон-Лейбниц формуласын қолланып нәтийжени есаплаўды талабаларға үйретиў, интеграл белгиси астындағы функция қурамалы болса, яғный басланғыш функциясы табылмаса, онда интегралдың жуўық есаплаў формулаларынан пайдаланып шешиўди оларға түсиндириў.

Биринши орта модулдың киши модулларының атлары хәм мақсетлери

9.2.2-кесте

№	Киши модуллар аты	Киши модуллардың мақсетлери
1.	Ньютон-Лейбниц формуласы хәм интегралдың қәсийетлери.	Ньютон-Лейбниц формуласы хәм интегралдың қәсийетлерин талабаларға үйретиў.
2.	Интегралды жуўық есаплаў формулалары	Интеграл белгиси астындағы функция курамалы болса, яғный басланғыш функциясы табылмаса, онда интегралдың жуўық есаплаў формулаларынан пайдаланып шешиўди талабаларға үйретиў.

Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

9.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Ньютон-Лейбниц формуласы, интегралдың қәсийетлери	1)Ньютон-Лейбниц формуласы не ушын хызмет қылады? 2)Анық интегралдың қәсийетлерин айтың.
2.	квадратура,төртмүйешликлер формуласы, трапециялар формуласы, Симпсон формуласы	1)Анық интеграллар қандай жағдайда жуўық есапланады? 2)Трапециялар формуласын келтирип шығарың. 3)Симпсон формуласы. 4) Квадратуралаў деген не? 5) Төртмүйешликлер формуласы

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан талабалар өзбетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллердың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

9.2.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Ньютон-Лейбниц формуласы қайсы жуўапта берилген?	А	$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$
		В	$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
2.	Қосындының анық интегралы неге тең?	А	Қосылыўшылар анық интегралларының қосындысына тең.
		Б	Қосылыўшыларанық интегралларына тең
		В	Қосылыўшылар анық интегралларының көбеймесине тең
3.	Егер $a < c < b$ болса, ... болады.	А	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
		В	$\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx$
4.	Анық интегралдың шегараларын өз-ара алмастырсақ интегралдың мәниси өзгереме?	А	Тек белгиси қарама-қарсыға алмасады.
		Б	Өзгереді хәм белгиси қарама-қарсыға алмасады.
		В	Абсолют мәниси өзгермей, қарама-қарсыға алмасады.
5.	Интегралдың шегараларын өзгертпеген жағдайда интеграл астындағы еркли өзгериўшини қәлеген	А	$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(t) dt$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

	өзгериўши менен алмастырыў мүмкин яғный ...	В	$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(t) dt$
6.	Анық интегралды санлы интеграллаў механикасы не делинеди?	А	квадратуралаў.
		Б	интегралды жуўық есаплаў.
		В	Ньютон-Лейбниц формуласын қолланып нәтийжени есаплаў.
7.	Анық интегралдардың жуўық есаплаў формуларының аты қайсы жуўапта толық берилген?	А	төртмүйешликлер формуласы, трапециялар формуласы, Симпсон формуласы.
		Б	төртмүйешликлер формуласы, трапециялар формуласы
		В	трапециялар формуласы, Симпсон формуласы.
8.	Трапециялар формуласы жуўапта берилген? қайсы дурыс	А	$S = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$
		Б	$S = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b+a)[f(a) - f(b)]$
		В	$S = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b+a)[f(a) + f(b)]$
9.	Анық интегралдың шегараларын өз-ара алмастырсак не өзгередиди?	А	интегралдың абсолют мәниси өзгермей, қарама қарсыға алмасады.
		Б	интегралдың абсолют мәнисиде, белгиси де өзгередиди.
		В	интегралдың абсолют мәниси өзгередиди, белгиси өзгермейди
10.	$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \times \sum_{k=0}^{n-1} (y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$	А	төртмүйешлик формуласы
		Б	трапеция формуласы
		В	Симпсон формуласы

	формула аты?		
--	--------------	--	--

Киши модуллардың оқыу шынығыуы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

9.2.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри хәм типі:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыруу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәубет, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазуу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытуу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәубетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

Киши модуллардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

9.2.6-кесте

Оқытуудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модуллар дауамында темаға сәйкес слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери.

4. ТОҒЫЗЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШІ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Анық интегралды есептеу және олардың қолданылыулары

Киші модульдер:

1. Анық интегралды есептеу;
2. Анық интегралдың қолданылыулары;
3. Тоғызыншы үлкен модульдің үшінші орта модуль жойбары.

Бірінші кіші модуль: Анық интегралды есептеу.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментте, $x=\phi(t)$ функция болса $[\alpha, \beta]$ кесиндиде анықланған, үзлексіз болып, t өзгеріуіші $[\alpha, \beta]$ кесиндиде өзгереді. $x=\phi(t)$ ның мәніслері $[a, b]$ кесиндині пайда етсін.

Егер $\phi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесиндиде үзлексіз $\phi'(t)$ тууындыға ийе болып, $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$ болса, бұл жағдайда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt \text{ теңлік орынлы болады.}$$

Бұл формула анық интегралда өзгеріуішіні алмастырып **интеграллау формуласы** делінеді.

Дәліл: Хәкыйқаттан да, $F(x)$ функция $[a, b]$ да $f(x)$ функцияның басланғыш функциясы болса, яғный

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

болса, онда анық емес интеграл қәсіятларине қарата

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(t)) + C$$

теңлік орынлы болады, онда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ хәм

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

жоқарыдағы теңліктің орынлы екенлігі келіп шығады.

Егер $u(x)$ хәм $v(x)$ функциялардың хәр бири $[a, b]$ да анықланған хәм үзликсиз болып, бул сегментте үзликсиз $u'(x)$ һәм $v'(x)$ туўындыларға ийе болса, онда

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

теңлик орынлы болады. Бул формула анық интегралда **бөлеклеп интеграллаў** формуласы делинеди.

Дәлил:

$$\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$$

болғаны ушын, анық интеграл қәсийетлерине тийкарланып

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du$$

теңликти пайда етемиз. Демек, бул жерден

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv \Big|_a^b$$

яғный

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

теңлик келип шығады.

Екинши киши модуль: Анық интегралдың қолланылыўлары

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ да анықланған үзликсиз функция болып, интервалда шекли туўындыға ийе болсын, онда доға узынлығы

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

формула менен табылады.

$[a, b]$ да $f(x)$ хәм $g(x)$ функциялар үзликсиз болып, $g(x) \leq f(x)$ теңсизлик орынлы болсын. $x = a$, $x = b$ хәм $f(x), g(x)$ функциялар

менен шегараланған област S -майданды есаплау үшін төмендегі формула орынлы болады

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

бул формуланы дәлиллейик. Улыұмалыққа зыян келтирместен $0 \leq g(x) \leq f(x)$ деп алыұымыз мүмкин. Бул жағдайда төмендегіден

$$\int_{ABCD} = \int_{aBCb} - \int_{aADb} = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

теңликти пайда етемиз.

$[a, b]$ да $f(x)$ функция үзликсиз болып, $f(x) \geq 0$ теңсизлик орынлы болсын. Биз $y = f(x)$ функция графигин Ox координатасы дөгерегинде айландырыұдан, хәмде XYZ кеңисликтеги $x = a$ хәм $x = b$ тегисликлер менен шегараланған айланба денениң V көлемин табыұ мәселесин қаратайық.

Бул мәселени шешиұ үшін $[a, b]$ ны $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ноқатлар менен бөлемиз. Кейин $[x_i, x_{i+1}]$ ден қәлеген бир ξ_i ноқатты алып, $[x_i, x_{i+1}]$ ге сәйкес келиұши айланба дене көлеми радиусы $f(\xi_i)$ ге бийиклиги Δx_i ге тең болған цилиндр көлеми менен алмастырамыз.

Егер биз Δx_i ди нольге умтылдырсак, бул алмастырыұдағы қәтелик соншелли кемейип барады.

Енди $[x_i, x_{i+1}]$ ге сәйкес келиұши цилиндр көлеми $\pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$ екенлигин итибарға алсак, төмендеги жуұық теңликти пайда етемиз

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i$$

Жоқарыдағы пикирди итибарға, алсак

$$V = \lim_{\max \Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

теңликти пайда етемиз. Демек, айланба дене көлеми үшін төмендегі формуланы пайда етемиз

$$V = \int_{\phi}^u \pi f^2(x) dx$$

Енди анық интегралды жууық есаплау мәселесин қаратайық.

Буны айтып өтиу керек, үзлексіз болған хәрқандай функция ушын Ньютон-Лейбниц формуласын қоллай алмаймыз, себеби бул формуланы қолланыу ушын, $y = f(x)$ функциясының басланғыш функциясын билиуимиз керек. Бирақ үзлексіз болған көп функциялардың басланғыш функцияларын, яғнай анық емес интегралларды хәр дайым да шекли адымда интеграллай алмаймыз. Мәселен $\int \frac{\sin x}{x} dx$ интеграл усылардан бири болып есапланады.

Усыған уқсас интегралларды есаплауда жууық есаплау формулаларын қоллау мүмкин. Усындай формулалардан бири, трапециялар формуласын келтиремиз.

$[a, b]$ аралықта $y = f(x)$ функция үзлексіз хәм $f(x) \geq 0$ болсын. Онда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл $y = f(x), x = a, x = b$ хәм $y = 0$ сызықлар менен шегараланған иймек сызықлы трапеция майданын береди.

$\int_a^b f(x) dx$ интегралды есаплауда $[x_i, x_{i+1}]$ бөлекке сәйкес келиуши $y = f(x)$ иймек сызық бөлегин, $(x_i, f(x_i))$ хәм $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ ноқатларын бирлестириуши тууры сызық пенен алмастырсақ, излеп атырған иймек сызықлы трапеция майданының $[x_i, x_{i+1}]$ аралыққа сәйкес келиуши трапеция менен алмастырған боламыз. Бул трапеция майданын S_i десек, бул майдан

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

теңлік арқалы табылады. x_i нокатларды сондай сайлап алайық $[a, b]$ кесинди бул нокатлар менен тең n бөлекке бөлинсин, яғный $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ болсын.

Бул жағдайда

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}$$

жууық теңликти пайда етемиз. Демек,

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1} = \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right] =$$

$$\frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

теңлік орынлы болады екен. Бул формулада, $h = \frac{b-a}{n}$ белгилеу

киритсек, $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i=1, 2, \dots, n$ теңліклер орынлы

болады. $x_0 = a$ және $x_n = b$ екенлигинен

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$$

формуланы пайда етемиз. Бул формула анық интегралды есеплаудың трапециялары формуласы делинеди. Бул формулада қәтеликти кемейтиу ушын n ды жетерлише үлкен алыуға ерисиу мүмкин. Қәтеликти бахалау ушын белгили бир теңсизликлерден пайдаланылады.

Егер анық интегралда шегаралардан кеминде бирейи шексиз болса, ямаса интеграл астындағы функция интеграллау кесиндиде шексизликке айланса, бундай интеграллар **меншиксиз интеграллар** деп аталады. Олар лимитке өтиу жолы менен есапланады.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Егер бул теңликтин оң жағында турған лимит бар болса, онда меншиксиз интеграл **жыйнақлы** делинеди. Бул лимит интегралдың мәниси сыпатында қабыл етиледі.

$[a, b]$ да үзлексіз хәм $X = a$ ноқатта анықланбаған ямаса үзіліске ийе болған функцияның меншиксіз интегралы төмендегіше болады.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Үшінші киши модуль: Тоғызыншы үлкен модульдің үшінші орта модуль жойбары.

Тоғызыншы үлкен модуль құрамындағы үшінші орта модульдің ұлыма мақсәти

9.3.1-кесте

Анық интегралларды есаплау ұсылларын, анық интеграллар жәрдемінде тегісликтегі майданларды хәм кеңісликтегі көлемлерди есаплау мәселелерин талабаларға үйретіу хәмде меншиксіз интегралларды оларға түсиндириу.

Биринші орта модульдің киши модульларының атлары хәм мақсетлери

9.3.2-кесте

№	Киши модульлардың аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Анық интегралды есаплау.	Анық интегралларды есаплау ұсылларын, яғный орнына қойыу ұсылы хәм бөлеклеп есаплау ұсылларын талабаларға үйретіу.
2.	Анық интегралдың қолланылыулары.	Анық интеграллар жәрдемінде тегісликтегі майданларды хәм кеңісликтегі көлемлерди есаплау мәселелерине хәмде меншиксіз интегралларды талабаларға түсиндириу.

Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлау сораулары

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Орнына қойыў усылы, бөлеклеп есаплаў усылы	1) Анық интегралды есаплаўдың тийкарғы формулаларын жазың. 2) Анық интегралды орнына қойыў усылы менен есаплаў. 3) Анық интегралды бөлеклеп интеграллаў.
2.	Геометриялық мәселелер шешиўде қолланыў, физикалық мәселелер шешиўде қолланыў, меншиксиз интеграл.	1) Анық интегралды геометриялық мәселелер шешиўде қолланыў. 2) Анық интегралды физикалық мәселелерди шешиўде қолланыў. 3) Қандай интеграл меншиксиз интеграл делинеди?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан талабалар өзбетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар
1.	Өзгериўшини алмастырып интеграллаў формуласы дурыс берилген жуўапты көрсетиң.	А $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$
		Б $\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big _a^b - \int_a^b v du$
		В $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)} dx$
2.	Анық интегралды есаплаўдың усыллары аты?	А орнына қойыў хәм бөлеклеп есаплаў усылы.
		Б орнына қойыў усылы.
		В бөлеклеп есаплаў усылы.

3.	Бөлеклеп интеграллау формуласы қайсы жуыпта дурыс көрсетилген?	А	$S = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - \phi(x)] dx$
		Б	$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big _a^b - \int_a^b v du$
		В	$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)} dx$
4.	$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)} dx$ формула жәрдемінде нени есаплау мүмкін?	А	доға ұзындығын.
		Б	трапецияның майданын.
		В	заттың көлемін.
5.	Егер тегіс фигура $y = f(x)$ хәм $y = \phi(x)$ сызықлар менен шегараланған болса, оның майданы ... формула менен табылады.	А	$S = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) + \phi(x)] dx$
		Б	$S = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - \phi(x)] dx$
		В	$S = \int_{x_1}^{x_2} [f(x)\phi(x)] dx$
6.	$\pi \int_a^b f^2(x) dx$ формуласы менен ... есапланады?	А	Дене көлемі.
		Б	Зат көлемі.
		В	Тегіс фигураның майданы.
7.	Материаллық нокат өзгеріуші $F(x)$ күш тәсирінде тууры сызық бойлап хәрекет қылса, $[a, b]$ жолда $F(x)$ тың орынлаған жұмысы ... формуласы менен табылады.	А	$A = \int_a^b F(x) dx$
		Б	$A = \pi \int_a^b F^2(x) dx$
		В	$A = \pi \int_a^b F(x) dx$
8.	Меншиксиз интегралларға анықлама берің.	А	Егер анық интегралда шегаралардан кемінде биреуі шексиз болса, ямаса интеграл

			астындағы функция интеграллау кесиндисінде шексізлікке айланса
		Б	Егер анық интегралда шегарадардан кемінде біреуі шексіз болса
		В	Интеграл астындағы функция интеграллау кесиндисінде шексізлікке айланса
9.	$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ лимит бар болса, мен- шиксиз интеграл?	А	жыйнақлы болады.
		Б	таралыушы болады.
		В	мәніске ийе делинеди.
10.	$[a, b]$ да үзлексиз хәм $x = a$ нокатта анықланбаған ямаса үзиліске ийе болған функцияның мен- шиксиз интегралы ...	А	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a-\varepsilon}^b f(x) dx$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x) dx$
		В	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$

Киши модулардың оқыу шынығыуы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

9.3.5-кесте

Шынығыудың формасы :	Кирисиу, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри :	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, машқалалы сәубет, көргизбели, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.

Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия кураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм баҳалау:	Жазба жумыслар, бақлау, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

9.3.6-кесте

Оқытыудың техникалық кураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модулар даўамында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораўлары хәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс, көрсетпели кураллар хәм оқыў шынығыўлардың режелери

Х. ОНЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛ –Санлы қатарлар (2 дана лекция модули, 6 дана әмелий шынығыў модули)

1. ОНЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Санлы қатарлар түсиниги, оның жыйнақлы хәм таралыўшы болыўы.

Киши модулар:

1. Санлы қатарлар түсиниги;
2. Санлы қатарлардың жыйнақлы хәм тарқалыўы;
3. Оныншы үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Санлы қатарлар түсиниги

Математикада прогрессия ағзаларының қосындысы менен байланысly болған мәселелер көп ушрасады. Әдетте, бул

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots \quad (1)$$

избе-излик $a \neq 0, q \neq 0$ болғанда **геометриялық прогрессия** деп аталады. Бул жерде a -прогрессияның биринши ағзасы, прогрессияның бөлими, aq^{n-1} прогрессияның улыўма ағзасы. Бул прогрессияның биринши n ағзасының қосындысы

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a - aq^n}{1 - q}, & \text{егер } q \neq 1, \text{ болса} \\ na, & \text{егер } q = 1, \text{ болса} \\ \frac{a}{1 - q}, & \text{егер } |q| < 1, \text{ болса} \end{cases}$$

формула менен аңлатылады. S_n қосындыға прогрессияның n - ағзасынан кейинги ағзаларын избе-из қоссақ, пайда болған төмендеги қосындылар

$$S_{n+1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$S_{n+2} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + aq^{n+1}$$

берилген шексиз прогрессияның барлық ағзаларының қосындысын елде анық аңлатып барыўы тийис.

Демек, $n \rightarrow \infty$ да S_n ниң лимитин шексиз прогрессияның барлық ағзалары қосындысы деп қараў мүмкин. Солай етип, бул

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

шексиз прогрессияның қосындысын үйрениў мәселеси келип шығады. Бул болса, санлы қатар түсинигине алып келеди.

Бул ҳақыйқый санлар избе-излиги берилген болсын.

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (2)$$

1-анықлама. (2) санлар избе-излигиниң ағзаларынан дүзилген

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (3)$$

қосынды **санлы қатар** делинеди.

Бул жерде $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ санлы қатардың ағзалары, u_n болса, оның **улыўма ағзасы** делинеди.

(3) қатардың ағзаларынан төмендеги қосындыларды дүземиз:

$$S_1 = u_1$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= u_1 + u_2 \\
S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\
&\dots\dots\dots \\
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Бул қосындылар қатардың **үлес қосындылары** делинеди.
Демек, қатар берилсе хәрдайым оның

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \quad (4)$$

қосындыларын дүзиу мүмкин.

2-анықлама. Егер $n \rightarrow \infty$ да (3) қатардың үлес қосындыларынан дүзилген (4) избе-излик шекли лимитке ийе болса, яғный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (5)$$

лимит мәніси **санлы қатар қосындысы** делинеди хәм ол

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

түрінде жазылады.

Екинши киши модул: Санлы қатарлардың жыйнақлы хәм таралыушы болыуы

3-анықлама. Егер $n \rightarrow \infty$ да (3) қатардың үлес қосындыларынан ибарат (4) избе-изликтің лимити шексиз болса, ямаса бул лимит жоқ болса, онда бул жағдайда берилген қатар **таралыушы** делинеди.

(3) қатар берилген болсын. Бул қатардың қәсийетлерин қарап шығамыз.

1-қәсийет. (3) қатар жыйнақлы болса, оның бир неше ағзаларын таслау-дан кейин пайда етилген қатар да жыйнақлы болады хәм керисинше, бир неше ағзалары тасланған қатар жыйнақлы болса, берилген қатар да жыйнақлы болады.

1-нәтийже. Егер (3) қатар жыйнақлы болса, оның қалдығы

$$r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$$

$m \rightarrow \infty$ да нольге умтылады.

2-қәсийет. Егер (3) қатар жыйнақлы болып, оның қосындысы C ға тең болса, бул жағдайда

$$Cu_1 + Cu_2 + \dots + Cu_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n \quad (6)$$

қатарда жыйнақлы хәм оның қосындысы CS ке тең болады.

3-қәсийет. Егер

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

қатарлар жыйнақлы болып, олардың қосындысы сәйкес түрде S_u хәм S_v ға тең болса, онда

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

қатар да жыйнақлы хәм оның қосындысы $S_u + S_v$ ға тең болады.

2-нәтийже. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатарлар жыйнақлы болса, онда бул жағдайда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Cu_n + Kv_n)$$

қатар да жыйнақлы болады хәм $\sum_{n=1}^{\infty} (Cu_n + Kv_n) = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n + K \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

теңлик орынлы болады, бунда C хәм K лар тураклы санлар, u_n болса $n \rightarrow \infty$ нольге умтылады, яғный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (7)$$

Қатар жыйнақлының зәрүрли шәртин қараймыз.

Теорема. Егер қатар жыйнақлы болса, онда қатардың улыўма ағзасы n шексиз өскенде нольге умтылады.

Дәлили: (2) қатар жыйнақлы, яғный $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ лимит бар болсын, бунда S — қатардың қосындысы (шекли сан). Бирақ бул жағдайда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S,$$

Себеби $n \rightarrow \infty$ да $(n-1) \rightarrow \infty$.

Қатардың улыұма ағзасы u_n ди дара қосындылар S_n va S_{n-1} менен аңлатмыз. Бизге мәлим,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Қатар улыұма ағзасының лимитин есаплаймыз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

Солай етип, егер қатар жыйнақлы болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Буны дәлиллеу талап етилген еди.

Нәтийже: Егер қатардың улыұма ағзасы $n \rightarrow \infty$ да нольге умтылмаса, онда бул жағдайда қатар таралыұшы.

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ теңлик орынлы болатуғын хәр қандай қатар да жыйнақлы бола бермейди. Бул шәрттиң орынланыұы қатар жыйнақлы болыұы ушын зәрүрли, бирақ жеткиликли шәрт емес, яғный қатар улыұма ағзасының нольге умтылыұы менен қатардың жыйнақлы екенлиги келип шыға бермейди, қатар таралыұшы болыұы да мүмкин. Мәселен, гармоникалық қатар деп аталыұшы

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

қатар ушын $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ болыұына қарамастан ол жыйнақлы емеслигин дәлиллеймиз. Гармоникалық қатардың дәслепки бир неше ағзасын төмендегидей группалап жазамыз:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Хәр қайсы қаұыс ишиндеги қосылыұшыларды олардың кишиси менен алмастырамыз. Нәтийжеде

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

ға ийе боламыз.

Хәр қайсы қаұыс ишиндеги қосылыұшылар қосындысы киширейеди хәм $\frac{1}{2}$ ге тең болады. Ақырғы қатар шексиз көп қаұысларға ийе болғанлығы себепли олардың қосындысы шексизликке умтылады. Демек, гармоникалық қатардың

қосындысы, әлбетте, шексіздікке умтылады. Солай етіп, биз гармоникалық қатардың таралыушы екенлігін дәлілледік.

Үшінші киші модул: Оныншы үлкен модулдың биринши орта модул жойбары.

Оныншы үлкен модул құрамындағы биринши орта модулдың улыўма мақсети

10.1.1-кесте

Санлы қатарға анықлама беріп, тийкарғы түсиниклерін хәм оның жыйнақлы хәм таралыушы болыуы ҳаққындағы теоремаларды дәліллеўди талабаларға үйретиў.

Биринши орта модулдың киші модулларының атлары хәм мақсетлери

10.1.2-кесте

№	Киші модуллар аты	Киші модуллардың мақсетлери
1.	Санлы қатарлар түсиниги	Санлы қатар анықламасын, оның улыўма ағзасы хәм үлес қосындылары түсиниклерін талабаларға толық үйретиў.
2.	Санлы қатарлардың жыйнақлы хәм таралыушы болыуы.	Санлы қатарлардың жыйнақлы хәм таралыушы болыуы ҳаққындағы теоремаларды дәліллеў, жыйнақлы қатарлардың қәсийетлерін талабаларға үйретиў.

Киші модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары

10.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Санлы қатар, улыўма ағза, үлес қосынды	1) Санлы қатарға анықлама берің? 2) Үлес қосынды не хәм оларды дүзиң.

		3) Санлы қатардың улыўма ағзасына анықлама бериң?
2.	Санлы қатарлардың жыйнақлы, санлы қатарлардың тарқалыўшы, жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери	1) Жыйнақлы қатарға анықлама бериң? 2) Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери? 3) Таралыўшы қатарға анықлама бериң?

Ескертиў: Киши модуллердағы бақлаў сораўларынан талабалар өзбетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллердың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

10.1.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар	
1.	Бул $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ избе-излик $a \neq 0, q \neq 0$ аты	А	Геометриялық прогрессия.
		Б	Арифметикалық прогрессия.
		В	Санлы қатар.
2.	Санлар избе-излигиниң ағзаларынан дүзилген $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қосынды не деп аталады?	А	Геометриялық прогрессия.
		Б	Арифметикалық прогрессия.
		В	Санлы қатар.
3.	Санлы қатар қосындысы деп неге айтамыз?	А	$n \rightarrow \infty$ да санлы қатардың үлес қосындыларынан дүзилген избе-изликтің шекли лимити.
		Б	$n \rightarrow \infty$ да санлы қатардың үлес қосындыларынан дүзилген избе-изликтің лимити
		В	$n \rightarrow \infty$ да санлы қатардың шекли лимити.
4.	Егер $n \rightarrow \infty$ те	А	бунда берилген қатар

	санлықатардың үлес қосындыларынан ибарат избе-изликтің лимити шексиз болса, ...		таралыўшы делинеди.
		Б	бунда берилген қатар жыйнақлы делинеди.
		В	бунда берилген қатар таралыўшы да, жыйнақлы да болмайды.
5.	Егер қатар жыйнақлы болса, оның қалдығы $r_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$	А	$m \rightarrow \infty$ да нольге умтылады.
		Б	$m \rightarrow \infty$ да шексизликке умтылады.
		В	$m \rightarrow \infty$ да лимити жоқ.
6.	Қатар жыйнақлының зәрүрли шәртин айтың?	А	Егер қатар жыйнақлы болса, онда қатардың улыўма ағзасы n шексиз өскенде нольге умтылады.
		Б	Егер қатар таралыўшы болса, онда қатардың улыўма ағзасы n шексиз өскенде нольге умтылады.
		В	Егер қатар жыйнақлы болса, онда қатардың улыўма ағзасы n шексиз өскенде шексизликке умтылады.
7.	Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатарлар жыйнақлы болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (Cu_n + Kv_n) \dots$	А	қатар да жыйнақлы болады.
		Б	қатарда таралыўшы болады.
		В	қатар таралыўшыда, жыйнақлы да болмайды.
8.	$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ санлы қатардың ағзалары, u_n болса оның... делинеди.	А	Улыўма ағзасы.
		Б	ақырғы ағзасы.
		В	шекли ағзасы.
9.	Егер қатардың улыўма ағзасы $n \rightarrow \infty$ да нольге умтылмаса, ...	А	Онда қатар узақласады.
		Б	Онда қатар жақынласады.
		В	Онда қатар ҳаққында бир зат айтыў мүмкин емес.

10.	Қатар жыйнақлы болса, оның бір неше ағзаларын таслаудан кейін пайда болған қатар ...	А	жыйнақлы болады.
		Б	таралыушы болады.
		В	Жыйнақлы да, таралыушы да болмайды.

Киши модуллардың оқыу шынығыуытүри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

10.1.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисиу, диалоглы, көргизбелі, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландыру.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндириу, айтып бериу, иллюстрация, машқалалы сәубет, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетиу ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бақалау	Жазба жұмыслар, гүзетиу, сәубетлер дауамында берилетуғын жууаплар, тест.

Киши модуллардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

10.1.6-кесте

Оқытыудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модуллар дауамында темаға тийисли слайдлар	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар,

көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс, көрсетпели қураллар хәм оқыу шынығыулардың режелери
---	---

2. ОНЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ЕКИНШИ ОРТА

МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Оң хәм қәлеген ағзалы қатарлар. Олардың жыйнақлылық белгилери

Киши модулар:

1. Оң ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылық белгилери;
2. Қәлеген ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылық белгилери;
3. Оныншы үлкен модульдың екинши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Оң ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылық белгилери

Төмендеги оң ағзалы қатарлар берилген болсын:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

Бул қатарлар ушын төмендеги тастыйықлаўлар орынлы:

1-теорема. Егер (1) қатардың сәйкес ағзалары (2) қатардың сәйкес ағзаларынан үлкен болмаса, яғный $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, \dots, u_n \leq v_n, \dots$ хәм (2) қатар жыйнақлы болса, онда бул жағдайда (1) қатар да жыйнақлы.

Дәлил: $s_n = \sum_{i=1}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n v_i$ лар берилген. Теорема шәртинен қарата $s_n \leq \sigma_n$ хәм (2) қатар жыйнақлы болғаны ушын

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$$

болады. Шәртке қарата $s_n < \sigma_n$.

Соның ушын $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ хәм $s < \sigma$ екенлиги келип шығады.

2-теорема. Егер (1) қатардың ағзалары (2) қатардың ағзаларынан киши болмаса, яғный $u_n \geq v_n (n = \overline{1, \infty})$ хәм (2) қатар таралыўшы болса, онда (1) қатарда таралыўшы.

Екинши киши модуль: Қәлеген ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылық белгилери

Даламбер белгиси. Егер (1) қатар ушын

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad (3)$$

шекли лимит бар болса, онда:

1. $n < 1$ болғанда қатар жыйнақлы;
2. $n > 1$ болғанда қатар таралыўшы;
3. $n = 1$ болғанда қатар жыйнақлы да таралыўшы да болыўы мүмкин. (Бул жағдайда басқа белгилер менен тексериледи.)

Дәлил: 1) $l < 1$ болсын. $l < q < 1$ ди қанаатландырыўшы q ди сайлап аламыз. Бул жағдайда (3) ке тийкарынан қандайда бир N нан баслап $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ орынлы болады. Яғный

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< qu_N \\ u_{N+2} &< qu_{N+1} < q^2 u_N \\ u_{N+3} &< qu_{N+2} < q^2 u_{N+1} < q^3 u_N \end{aligned}$$

төмендеги

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots \quad (4)$$

хәм

$$u_n + qu_n + q^2 u_n + \dots \quad (5)$$

Қатар ағзаларын салыстырып, (5) қатардың ағзалары бөлими $q < 1$ геометриялық прогрессия екенин қараймыз. Демек, (5) қатар жыйнақлы. (4) ти ағзалары қандайда бир N номерден баслап (5) қатардың сәйкес ағзаларынан киши. Буннан (4) қатардың жыйнақлы екенлиги келип шығады.

2) $n > 1$ болса, (3) тен $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ пайда болады. Бул теңсизлик барлық $n > N$ лар ушын орынланады хәм демек, қатардың улыўма ағзасы 0 (нол)ге умтылмайды.

Коши белгиси. Егер (1) санлы қатар ушын

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad (4)$$

шекли лимит бар болса, онда:

1. $n < 1$ болғанда қатар жыйнақлы;

2. $n > 1$ болғанда қатар таралыўшы;
3. $n = 1$ болғанда қатар жыйнақлы да, таралыўшы да болыўы мүмкин. (Бул жағдайда басқа белгилер менен тексериледи.)

Интеграл белгиси. (1) санлы қатар ағзалары ушын

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

болып,

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, f(3) = u_3, \dots, f(n) = u_n, \dots$$

болғанда

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (5)$$

Меншиксиз интеграл жыйнақлы болса, онда (1) қатар жыйнақлы болады, егер (5) таралыўшы болса, онда (1) қатар таралыўшы болады.

Мысалы: $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ қатар жыйналыққа тексерилсин.

Шешим: $u_n = \frac{1}{n^p}, f(x) = \frac{1}{x^p}$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_1^{\infty}, & \text{агар } p \neq 1, \text{ бұлса} \\ \ln x \Big|_1^N = \ln N, & \text{агар } p = 1, \text{ бұлса} \end{cases}$$

Егер $p > 1$ болса, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ интеграл жыйнақлы болады.

$p < 1$ болса, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$ интеграл таралыўшы.

$p = 1$ болса, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$ интеграл таралыўшы болады.

**Үшінші киши модуль: Оныншы үлкен модульдің екінші
орта модуль жойбары.**

**Оныншы үлкен модуль құрамындағы екінші
орта модульдің ұлыұма мақсети**

10.2.1-кесте

Оң ағзалы қатарлар ҳаққында мағлыұмат берип ҳәм оларды геометриялық ҳәмде ұлыұмаласқан гармоникалық қатарлар менен салыстырып, жыйнақлылық белгилери көрсетиледи ҳәм қәлеген ағзалы қатарлар ҳәм оларды жыйнақлылығының Лейбниц, Дирихле ҳәм Абель белгилерин үйретип, мысаллар жәрдемінде талабаларға түсиндириұ.
--

**Биринши орта модульдің киши модульларының
атлары ҳәм мақсетлери**

10.2.2-кесте

№	Киши модульлар аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Оң ағзалы қатарлар ҳәм олардың жыйнақлылық белгилери.	Оң ағзалы қатарлар ҳаққында мағлыұмат берип ҳәм оларды геометриялық ҳәмде ұлыұмаласқан гармоникалық қатарлар менен салыстырып, жыйнақлылық белгилери талабаларға көрсетиледи.
2.	Қәлеген ағзалы қатарлар ҳәм олардың жыйнақлылық белгилери.	Қәлеген ағзалы қатарлар жыйнақлылығының Даламбер, Коши ҳәм интеграл белгилерин талабаларға үйретип, мысаллар жәрдемінде түсиндириұ.

**Киши модульлардағы таяныш түсиниклер ҳәм олар
тийкарында дүзилген бақлаұ сораұлары**

10.2.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаұ сораұлары
---	-------------------	------------------

1.	Оң ағзалы қатарлар, жыйнақлылықтың салыстырыу белгиси.	1) Оң ағзалы қатар қандай қатар? 2) Санлы қатар жыйнақлылықтың салыстырыу белгисин түсіндириң. 3) Қатар дүзилисине қарап қандай болады.
2.	Қәлеген ағзалы қатарлар, Даламбер белгиси, Коши белгиси, интеграл белгиси.	1) Даламбер белгисин айтың. 2) Коши белгисин айтың. 3) Интеграл белгисин айтың.

Ескертиу: Киши модуллардағы бақлау сорауларынан талабалар өзбетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлау сораулары
тийкарында дүзилген тест**

10.2.4-кесте

№	Сораулар	Мүмкин болған жуаулар	
1.	Санлы қатар жыйнақлылықтың салыстырыу белгиси дурыс берилген жуапты көрсетиң.	А	Егер 1-қатардың сәйкес ағзалары 2-қатардың сәйкес ағзаларынан үлкен болмаса хәм 2-қатар жыйнақлы болса, онда 1-қатар да жыйнақлы.
		Б	Егер 1-қатардың сәйкес ағзалары 2-қатардың сәйкес ағзаларынан үлкен болмаса, онда 1-қатар да жыйнақлы.
		В	Егер 1-қатардың сәйкес ағзалары 2-қатардың сәйкес ағзаларынан үлкен болса хәм 2-қатар жыйнақлы болса, онда 1-қатар да жыйнақлы.
2.	Қәлеген ағзалы қатарлар хәм олардың жыйнақлылық белгилери	А	Даламбер белгиси, Коши белгиси, интеграл белгиси
		Б	Коши белгиси, интеграл белгиси

	атамалары	В	Даламбер белгиси, Коши белгиси
3.	Егер санлы қатар ушын $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ шекли лимит бар болса, ол түрде ... қатар жыйнақлы болады.	А	$n > 1$ болғанда
		Б	$n < 1$ болғанда
		В	$n = 1$ болғанда
4.	Егер санлы қатар ушын $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ шекли лимит бар болса, онда...	А	$n < 1$ болғанда қатар жыйнақлы, $n > 1$ болғанда қатар таралыўшы.
		Б	$n > 1$ болғанда қатар жыйнақлы, $n < 1$ болғанда қатар таралыўшы.
		В	$n < 1$ болғанда қатар жыйнақлы, $n = 1$ болғанда қатар таралыўшы.
5.	Санлы қатар ағзалары ушын $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ болып, $f(1) = u_1, f(2) = u_2, f(3) = u_3, \dots, f(n) = u_n, \dots$ болғанда $\int_1^{\infty} f(x) dx \dots$	А	Меншиксиз интеграл жыйнақлы болса, онда берилген қатар таралыўшы болады.
		Б	Меншиксиз интеграл жыйнақлы болса, онда берилген қатар жыйнақлы болады.
		В	меншиксиз интеграл таралыўшы болса, онда берилген қатар жыйнақлы болады.
6.	Егер санлы қатар ушын $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ шекли лимит бар болса, онда: 1. $n < 1$ болғанда қатар жыйнақлы; 2. $n > 1$ болғанда қатар таралыўшы; 3. $n = 1$ болғанда қатар жыйнақлыда,	А	Даламбер белгиси.
		Б	Коши белгиси.
		В	Интеграл белгиси.

	тарқалыўшы да болыўы мүмкин.		
7.	Егер 1-қатардың ағзалары 2-қатардың ағзаларынан киши болмаса, хәм 2-қатар тарқалса ...	А	онда 1- қатар да таралыўшы.
		Б	онда 1-қатар жыйнақлы болады.
		В	онда 1-қатар таралыўшыда, жыйнақлы да болмайды.
8.	$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ қандай қатар?	А	жыйнақлы.
		Б	таралыўшы.
		В	анықлап болмайды.
9.	$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ p ның қандай мәнислеринде жыйнақлы болады.	А	Егер $p > 1$ болса.
		Б	Егер $p < 1$ болса.
		В	Егер $p = 1$ болса.
10.	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ қандай қатар?	А	жыйнақлы.
		Б	таралыўшы.
		В	анықлап болмайды.

Киши модуллердың оқыў шынығыўы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

10.2.5-кесте

Шынығыўдың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбели, машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри :	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл хәм методлар:	Түсиндирийў, айтып бериў, машқалалы сәўбет, көргизбели, машқалалы лекция.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў хәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.

Мониторинг хэм бахалай:	Жазба жумыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.
-------------------------	---

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хэм дидактикалық материаллар

10.2.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хэм үшінши киши модулар даўамында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары хэм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хэм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс хэм көрсетпели қураллар хэмде оқыў шынығыўлардың режелери.

4. ОНЫНШЫ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ ҮШИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Белгилери алмасып келиўши қатарлар. Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери

Киши модуллер:

1. Белгилери алмасып келиўши қатарлар;
2. Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери;
3. Оныншы үлкен модульдың үшінши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Белгилери алмасып келиўшы қатарлар

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n - \dots \quad (1)$$

қатар белгилери алмасып келиўшы қатар делинеди. Бул жерде $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ лар оң санлар.

1-мысал: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ қатар белгилери алмасып келиўшы қатар болады.

2-мысал: $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ қатар белгилери алмасып келиуі болады.

1-теорема. (Лейбниц теоремасы). Егер $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ (1) қатарда ($u_n > 0$) $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \dots$ хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ болса, онда (1) қатар жыйнақлы болады хәм оның қосындысы 1-ағзасынан үлкен емес.

3-мысал: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ қатар сондай.

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Демек, бул қатар жыйнақлы болады.

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots u_n + \dots \quad (2)$$

Қатарда $u_n (n=1, 2, 3, \dots)$ ағзалары қалеген белгилерге ийе болса, яғный (2) қатарда белгилер қандайда бир қағыйдаға бойсынбаса, онда (2) қатар белгилери өзгериуі қатар делинеди.

2-теорема. Егер $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$ қатардың ағзалары сондай болсын, оның ағзаларының абсолют мәнислеринен дүзилген

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots \quad (3)$$

қатар жыйнақлы болса да (2) белгилери өзгериуі қатарда жыйнақлы.

4-мысал:

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots \quad (4)$$

қатар жыйнақлылыққа тексерилсин.

Шешим: Бул қатар ағзаларының абсолют мәнислеринен дүзилген

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots \quad (5)$$

қатардың хәр бир ағзасы

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (6)$$

қатар сәйкес ағзаларынан киши ямаса тең. (6) қатар жыйнақлы болады.

Демек,

$$\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots$$

қатарда жыйнақлы.

3-теорема. Егер

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

Қатардың ағзаларының абсолют мәнісінен дүзілген қатар, яғный

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots \quad (3)$$

қатар таралыұшы болса, онда (2) қатар да таралыұшы болады.

Жуұмақлап айтқанда, (2) қатардың жыйнақлы хәм таралыұы (3) қатарға байланысly.

1) Егер (2) қатар ағзаларының абсолют мәніслерінен дүзілген (3) қатар жыйнақлы болса, онда (2) қатар **абсолют жыйнақлы қатар** делинеди.

2) Егер (2) қатар ағзаларының абсолют мәніслерінен дүзілген (3) қатар таралыұшы болса, онда (2) қатар **шәртly жыйнақлы қатар** делинеди.

5-мысал: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ қатар ағзаларының абсолют мәніслерінен $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ қатар дүзсек, бул қатар гармоникалық қатар болғаны ушын таралыұшы болады. Демек, берілген қатар шәртly жыйнақлы болады.

Екинши киши модул: Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери

Жыйнақлы қатарларда ағзаларды группалаұ, абсолют жыйнақлы қатарларда болса, ағзаларының орнын алмастырыұ сыяқлы қәсийетлерге тоқтап өтемиз:

1) Группалаұ қәсийети.

Қәлеген $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар берілген болсын. Бул қатар ағзаларын группалап төмендеги қатарды дүземиз:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + a_{n_1+3} + \dots + a_{n_1+k}) + \dots \quad (1)$$

бунда $n_1, n_2, \dots, (n_1 < n_2 < \dots)$ лар натурал санлар избе-излигинин қандайда бир n_k үлес избе-излиги болып, $k \rightarrow \infty$ да $n_k \rightarrow \infty$

Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы болып, оның қосындысы A санға тең болса, онда бұл қатардың ағзаларын группалаудан пайда болған (1) қатарда жыйнақлы хәм оның қосындысы да A санға тең болады.

Дәлил: Анықламаға қарата берілген қатардың A_n үлес қосындысы үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (A шекли сан) лимит орынлы.

Енди (1) қатардың үлес қосындысын жазамыз:

$$A_{n_k} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + a_{n_1+3} + \dots + a_{n_1+k}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k})$$

Бұл үлес қосындылардан дүзилген

$$A_{n_1}, A_{n_2}, A_{n_3}, \dots, A_{n_k}, \dots$$

избе-изликти қарайық. Бұл $\{A_n\}$ избе-изликтің үлес избе-излиги.

Избе-излик лимитке ийе болыуынан оның хәр қандай үлес избе-излиги де бұл лимитке ийе болыу теоремасына қарата $\{A_n\}$ избе-излик жыйнақлы хәм оның лимити де A ға тең болады.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_k} = A$$

Бұл болса (1) қатардың жыйнақлы болыуын хәм оның қосындысы A ға тең екенін билдиреди.

2) Орын алмастырыу қәсийети. Қәлеген $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар берілген болсын. Бұл қатар ағзаларының орынларын алмастырып, төмендегі $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n$ (2) қатарды пайда етемиз. Бұл (2) қатардың хәр бир a'_n ағзасы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың тайынлы бир a_{n_k}

ағзасының тап өзи. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар абсолют жыйнақлы болып, қосындысы A санға тең болса, онда бул қатар ағзаларының орынларын кәлеген түрде алмастырыудан пайда болған (2) қатар жыйнақлы болады хәм оның қосындысы да A санға тең болады.

Үшінши киши модул: Оныншы үлкен модулдың үшінши орта модул жойбары.

Оныншы үлкен модул құрамындағы үшінши орта модулдың улыўма мақсети

10.3.1-кесте

Ағзаларының белгилери гезекпе-гезек өзгерип келетуғын қатарларды хәм Лейбниц теоремасын, жыйнақлы қатарларда ағзаларын группалаў, абсолют жыйнақлы қатарларда болса ағзалардың орнын алмастырыў сыяқлы қәсийетлерин талабаларға үйретиў.

Биринши орта модулдың киши модуллеры атлары хәм мақсетлери

10.3.2-кесте

№	Киши модуллер аты	Киши модуллердың мақсетлери
1.	Белгилери алма алмасып келиуши қатарлар.	Ағзаларының белгилери нәўбет пенен өзгерип келетуғын қатарларды түсиндириў хәм Лейбниц теоремасын дәлиллеўди талабаларға үйретиў.
2.	Жыйнақлы қатарлардың қәсийетлери.	Жыйнақлы қатарларда ағзаларын группалаў, абсолют жыйнақлы қатарларда болса, ағзалардың орнын алмастырыў сыяқлы қәсийетлерин талабаларға үйретиў.

**Киши модуллардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

10.3.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Белгилери алмасып келиўши қатар, өзгериўши қатар, Лейбниц теоремасы, абсолют жыйнақлы қатар, шәртли жыйнақлы қатар	1) Белгилери алмасып келиўши қатарлар деп неге айтылады? 2) Лейбниц теоремасын айтың. 3) Абсолют хәм шәртли жыйнақлы қатарларды түсиндириң хәм мысал келтириң.
2.	Ағзаларды группалаў қәсийети, ағзалардың орнын алмастырыў қәсийети.	1) Жыйнақлы қатарларда ағзаларды группалаў қәсийетин айтып бериң? 2) Абсолют жыйнақлы қатарларда ағзалардың орнын алмастырыў қәсийетин айтып бериң?

Ескертиў: Киши модуллардағы бақлаў сораўларынан талабалар өзбетинше тәлимде де пайдаланады.

**Киши модуллардың бақлаў сораўлары
тийкарында дүзилген тест**

10.3.4-кесте

№	Сораўлар	Мүмкин болған жуўаплар
1.	Лейбниц теоремасы қайсы жуўапта дурыс берилген?	А Егер $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ (1) қатарда $(u_n > 0) \dots u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \dots$ хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ болса, онда (1) қатар жыйнақлы болады хәм оның қосындысы 1-ағзасынан үлкен емес.
		Б Егер $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ (1) қатарда $(u_n > 0) \dots u_1 < u_2 < u_3 < u_4 \dots$ хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ болса, онда (1) қатар жыйнақлы болады хәм оның

			қосындысы 1-ағзасынан үлкен емес.
		В	Егер $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ (1) қатарда $(u_n > 0) \dots u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \dots$ хәм $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ болса, онда (1) қатар жыйнақлы болады хәм оның қосындысы 1-ағзасынан үлкен емес.
2.	Белгилери алмасып келиуши қатар көриниси қандай?	А	$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n - \dots$
		Б	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots u_n + \dots$
		В	$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + u_n - \dots$
3.	$u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_n + \dots$ (1) қатарда $u_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ қалеген белгилерге ийе болса, яғный (1) қатар да белгилер қандайда бир қағыйдаға бойсынбаса, онда (1) қатар...	А	онда (1) қатар оң ағзалы қатар делинеди.
		Б	онда (1) қатар белгилери өзгериуши қатар делинеди.
		В	онда (1) қатар белгилери алмасып келиуши қатар делинеди.
4.	Жыйнақлы қатарлардың қандай қәсийетлери бар?	А	ағзаларды группалау хәм ағзалардың орнын алмастыру қәсийети.
		Б	ағзаларды группалау қәсийети.
		В	ағзалардың орнын алмастыру қәсийети.
5.	Егер қатар ағзаларының абсолют мәнислеринен дүзилген қатар жыйнақлы болса, онда берилген қатар...	А	абсолют жыйнақлы қатар делинеди.
		Б	шәртли жыйнақлы қатар делинеди.
		В	таралыушы қатар делинеди.
6.	Қандай қатар	А	Егер қатар жыйнақлы болса.

	шәртли жыйнақлы қатар болады?	Б	Егер қатар ағзаларының абсолют мәніслерінен дүзілген қатар жыйнақлы болса.
		В	Егер қатар ағзаларының абсолют мәніслерінен дүзілген қатар таралыұшы болса.
7.	Егер $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ қатардың ағзалары сондай болсын, оның ағзаларының абсолют мәніслерінен дүзілген $ u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ қатар жыйнақлы болса, онда ...	А	белгилері өзгериұшы қатарда жақынласады.
		Б	белгилері алмасыұшы қатарда жақынласады.
		В	белгилері алмасып келиұшы қатар абсолют жақынласады.
8.	$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$ қатар жақынласыұға тексерилсин.	А	жыйнақлы.
		Б	таралыұшы.
		В	анықлап болмайды.
9.	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ қатар жыйнақлылыққа тексерилсин.	А	Шәртли жыйнақлы.
		Б	Абсалют жыйнақлы.
		В	Анықлап болмайды.
10.	Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жыйнақлы болып, оның қосындысы А санға тең болса, онда бул қатардың ағзаларын группалаұдан пайда	А	жыйнақлы хәм оның қосындысы хәм А санға тең болады.
		Б	таралыұшы хәм оның қосындысы да А санға тең болады.
		В	жыйнақлы, бирақ оның қосындысы А санға тең болмайды.

	болған қатар ...		
--	------------------	--	--

Киши модульдардың оқыу шынығыуы түри, онда қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар

10.3.5-кесте

Шынығыудың формасы:	Кирисий, диалоглы, көргизбелі, машқалалы лекция.
Шынығыудың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеу, билимди көнликпеге айландырыу.
Қолланылатуғын методлар:	Түсиндирий, айтып берий, машқалалы сәўбет, машқалалы лекция, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыу хәм көрсетий ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыу шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг хәм бахалау:	Жазба жұмыслар, бақлау, сәўбетлер дауамында берилетуғын жууаппар, тест.

Киши модульдардың педагогикалық процесссте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары хәм дидактикалық материаллар

10.3.6-кесте

Оқытыудың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екінши хәм үшінши киши модульдар дауамында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлау сораулары хәм бул сораулар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ хәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыу-методикалық комплекс хәм көрсетпелі қураллар хәмде оқыу шынығыулардың режелері.

XI. ОН БИРИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ

Меншиксиз интеграллар

(1 лекция модули, 3 әмелий шынығыў модули)

1. ОН БИРИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛДЫҢ БИРИНШИ ОРТА МОДУЛ ТЕМАСЫ: (Лекция) Меншиксиз интеграллар хәм оларды есаплаў

Киши модуллер:

1. Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллар;
2. Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллардың жыйнақлылығы ҳаққында;
3. Биринши түр меншиксиз интегралларды есаплаў;
4. Он биринши үлкен модульдың биринши орта модуль жойбары.

Биринши киши модуль: Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллар

$[a, b]$ кесиндиде $y = f(x)$ функциялар ушын киритилген анық интеграл түсинигинде, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесиндиде шегараланған болыўы керек еди.

Енди анық интеграл түсинигин бул шегаралардан узак болған функция хәм аралықлар ушын киритиўди қараймыз. Бундай интеграллар **меншиксиз интеграллар** делинеди.

Шексиз аралық ушын анық интеграл түсиниги. $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ аралықта берилген болып, қәлеген $a \leq t$ ушын $[a, t]$ кесиндиде интегралланыўшы болсын. Бундай жағдайда қәлеген $a \leq t$ ушын $\Phi(t) = \int_a^t f(x) dx$ функция анықланған болады.

Анықлама. $f(x)$ функцияның $[a, +\infty)$ аралықтағы меншиксиз интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ деп төмендеги $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t)$ лимитке айтылады, яғный

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Екинши киши модуль: Шегаралары шексиз меншиксиз интегралдардың жыйнақлылығы хақында

Егер бул лимит бар хэм шекли болса, меншиксиз интеграл жыйнақлы, болмаса **таралыўшы** делинеди.

Тап усындай $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ меншиксиз интегралды анықлаў мүмкин. $(-\infty, +\infty)$ аралықтағы меншиксизинтеграл болса, төмендегише анықланады: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$

Егер бул интеграллардан бирейи таралыўшы болса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ меншиксиз интеграл **таралыўшы** делинеди.

Үшинши киши модуль: Биринши түр меншиксиз интегралдарды есаплаў

Анықлама. $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$ лимит мәниси $y = f(x)$ функцияның $[a, b]$ кесиндидеги меншиксиз интегралы делинеди. Егер бул лимит бар хэм шекли болса, меншиксиз интеграл жыйнақлы болмаса **таралыўшы** делинеди.

Лимит мәниси $\int_a^b f(x) dx$ формада белгиленеди, яғный

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$$

Тап усыған уқсас $(a, b]$ аралықта үзликсиз хэм $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ болған $y = f(x)$ функция ушын меншиксиз интеграл анықланады. (a, b) интервалда үзликсиз, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ хэм

$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ болған функция үшін $\int_a^b f(x) dx$ меншиксиз

интеграл төмендегі теңлік арқылы анықланады

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

бұл жерде $c, a < c < b$ теңсізлікті қанаатландырыушы кәлеген бир сан.

Мысаллар:

$$1. \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{агар } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{агар } \alpha > 1 \end{cases}$$

Демек, $\alpha < 1$ де интеграл таралыушы, $\alpha > 1$ болса жыйнақлы болады $\alpha = 1$ де

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

болғаны үшін, жоқарыдағы интеграл $\alpha \leq 1$ де таралыушы екенлиги келип шығады.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\delta^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{агар } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{агар } \alpha < 1 \end{cases}$$

Демек, $\alpha > 1$ болғанда меншиксиз интеграл таралыушы $\alpha < 1$ де жыйнақлы болады. $\alpha = 1$ де

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} (-\ln \delta) = +\infty$$

болғаны үшін, жоқарыдағы интеграл $\alpha \geq 1$ де таралыушы екенлиги келип шығады.

Төртінші киши модуль: Он биринши үлкен модульдің биринши орта модуль жойбары.

Он биринши үлкен модуль құрамындағы үшінши орта модульдің улыўма мақсети

11.1.1-кесте

Шегаралары шексиз меншиксиз (биринши түр) интеграллар хәм олардың жыйнақлылығы хаққында талабаларға жетерлише мағлыұмат бериў хәм биринши түр меншиксиз интегралларды есаплаўды оларға түсиндириў.

**Биринши орта модульдың киши модульлары
атлары хәм мақсетлери**

11.1.2-кесте

№	Киши модуль аты	Киши модульлардың мақсетлери
1.	Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллар.	Талабаларға меншиксиз интеграллар хаққында мағлыұмат бериў, яғный оның анықламасын келтирип, мысаллар жәрдемінде оларға түсиндириў.
2.	Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллардың жыйнақлылығы хаққында.	Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллардың жыйнақлылығы хаққындағы анықламаларын айтыў хәм талабаларға түсиндириў.
3.	Биринши түр меншиксиз интегралларды есаплаў.	Биринши түр меншиксиз интегралларды есаплаў жолларын көрсети хәм мысаллар жәрдемінде талабаларға түсиндириў.

**Киши модульлардағы таяныш түсиниклер хәм олар
тийкарында дүзилген бақлаў сораўлары**

11.1.3-кесте

№	Таяныш түсиниклер	Бақлаў сораўлары
1.	Шегара, меншиксиз интеграл.	1) Меншиксиз интегралдың анықламасын айтып бериң? 2) Меншиксиз интегралдың шегаралары қандай болыўы мүмкин?

		3) Меншиксиз интегралға мысаллар келтирің?
2.	Шегаралары шексиз меншиксиз интеграллар, меншиксиз интеграллардың жыйнақтылығы	1) Шегараларына байланысты меншиксиз интеграллардың қандай түрлерін білесіз? 2) Меншиксиз интеграллардың жыйнақтылығы қалай анықланады? 3) $(-\infty, +\infty)$ аралықтағы меншиксиз интеграл қалай анықланады?
3.	Бірінші түр меншиксиз интеграл.	1) Бірінші түр меншиксиз интеграл деп қандай интегралға айтылады? 2) Меншиксиз интеграллар қандай есептеледі? 3) $y = f(x)$ функцияның $[a, b)$ аралықтағы меншиксиз интегралы қандай есептеледі?

Ескерту: Киші модульдердегі бақылау сұрақтарынан талабалар өзбетінше тәлімде де пайдаланады.

Киші модульдердің бақылау сұрақтары тийкарында дүзілген тест

11.1.4-кесте

№	Сұрақтар	Мүмкін болған жауаптар	
1.	$f(x)$ функцияның $[a, +\infty)$ аралықтағы меншиксиз интегралы деп неге айтамыз?	А	$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^t f(x) dx$
		Б	$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$
		В	$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^a f(x) dx$
2.	Меншиксиз интегралдың анықтамасы қайсы	А	Егер анық интегралда шегаралардан кемінде біреуі шексиз болса, бұндай

	жууапта дурыс берилген?		интеграллар меншиксиз интеграллар деп айтылады.
		Б	Интеграл астындағы функция интеграллау кесиндиде шексизликке айланса, бундай интеграллар меншиксиз интеграллар деп айтылады.
		В	А,Б
3.	Меншиксиз интегралдың жыйнақлылық шәрти қандай?	А	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ лимит бар болса.
		Б	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ лимит бар болса хәм шекли болса.
		В	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ лимит шекли болса.
4.	$(-\infty, +\infty)$ аралықтағы меншиксиз интеграл қалай анықланады?	А	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx - \int_a^{+\infty} f(x) dx$
		Б	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$
		В	Анықланбаған.
5.	$y = f(x)$ функцияның $[a, b)$ ара-лықтағы меншиксиз интегралы қалай есепланады?	А	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$
		Б	Есеплау жоллары анықланбаған.
		В	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$
6.	$[a, b]$ да үзликсиз хәм $x = a$ ноқатта анықланбаған ямаса үзилиске ийе болған функцияның меншиксиз интегралы көриниси қандай болады?	А	$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$
		В	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{a-\varepsilon}^b f(x) dx$

7.	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ ти жыйнақтылыққа тексерің.	А	$\alpha > 1$ де интеграл таралыўшы, $\alpha < 1$ болса жыйнақты болады.
		Б	$\alpha < 1$ де интеграл таралыўшы, $\alpha > 1$ болса жыйнақты болады.
		В	$\alpha < 1$ де интеграл таралыўшы, $\alpha \geq 1$ болса жыйнақты болады.
8.	(a, b) интервалда үзликсиз, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ хәм $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ болған функция ушын $\int_a^b f(x) dx$ меншиксиз интеграл қандай анықланады?	А	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b$
		Б	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b$
		В	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx, a < c < b$
9.	$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx$ лимит бар хәм шекли болса,...	А	Меншиксиз интеграл жыйнақты, болмаса таралыўшы делинеди.
		Б	Меншиксиз интеграл таралыўшы, болмаса жыйнақты делинеди.
		В	Меншиксиз интеграл таралыўшы.
10.	$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx$ ни жыйнақтылыққа тексерің.	А	$\alpha > 1$ болғанда интеграл таралыў- шы, $\alpha \leq 1$ де жыйнақты болады.
		Б	$\alpha < 1$ болғанда интеграл таралы- ўшы, $\alpha > 1$ да жыйнақты болады.
		В	$\alpha \geq 1$ болғанда интеграл таралыўшы, $\alpha < 1$ да жыйнақты болады.

**Киши модулардың оқыў шынығыўы түри, онда
қолланылатуғын педагогикалық усыл хәм методлар**

11.1.5-кесте

Шынығыўдың	Кирисиў,	диалоглы,	көргизбели,
------------	----------	-----------	-------------

формасы:	машқалалы лекция.
Шынығыўдың түри:	Аралас сабақ, жаңа билимлерди ийелеў, билимди көнликпеге айландырыў.
Қолланылатуғын усыл ҳәм методлар:	Түсиндириў, айтып бериў, иллюстрация, машқалалы сәўбет, тест.
Тәлим қураллары:	PowerPoint дәстүринде исленген көргизбе, ПЖКҚ (пикирлерди жазыў ҳәм көрсетиў ушын қураллар).
Тәлим формалары:	Жеке түрде, группалық, массалық.
Оқытыў шәраятлары:	Мультимедия қураллары менен үскенеленген аудитория.
Мониторинг ҳәм баҳалаў:	Жазба жумыслар, бақлаў, сәўбетлер даўамында берилетуғын жуўаплар, тест.

Киши модулардың педагогикалық процессте пайдаланылатуғын информациялық-коммуникациялық технологиялары ҳәм дидактикалық материаллар

11.1.6-кесте

Оқытыўдың техникалық қураллары	Дидактикалық материаллар
Биринши, екинши ҳәм үшінши киши модулар даўамында темаға тийисли слайдлар көрсетиледи. Сондай-ақ, бақлаў сораўлары ҳәм бул сораўлар тийкарында дүзилген тест слайдлар арқалы көрсетиледи.	Математикалық анализ ҳәм педагогикалық технологияға тийисли сабақлықлар, методикалық қолланбалар, оқыў-методикалық комплекс ҳәм көрсетпели қураллар ҳәмде оқыў шынығыўлардың режелери.

Пайдаланылған әдебиятлар

1. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 1992.

2. Каримов И.А. Мамлакатимизда демократик ислохатларни янада чуқурлаштириш ва фикоралик жамиятини ривожлантириш концепсияси. Ўзбекистон Республикаси Президенти Ислом Каримовнинг Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлис Қонунчилик палатаси ва Сенатининг қўшма мажлисидаги маърузаси. Халқ сўзи газетаси, 13.11.2010 йил.

3. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. -Т.: “Маънавият”, 2008 йил.

4. Ўзбекистон Республикасининг “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” /Баркамол авлод – Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.Ўзбекистон, 1997.

5. Ўзбекистон Республикасининг ”Таълим тўғрисида”ги Қонуни (1997 йил 29 августда қабул қилинган)/. Баркамол авлод –Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Т.Ўзбекистон, 1997 йил.

6. "Миллий истиқлол ғояси: асосий тушунча ва тамойиллар".-Т.: "Ўзбекистон" нашриёти, 2000 йил.

7. Азизходжаева Н.Н. Педагогик технологиялар и педагогик маҳорат - Т.: ТДПУ, “Низомий”, 2003.

8. Азларов Т.А., Мансуров Х.Т., Математик анализ, 1,2 қ, Т. “Ўқитувчи” 1994, 1995.

9. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси.Т.: Ўқитувчи,2001.

10. Афонина С.И. Математика ва гўзаллик.-Т.: “Ўқитувчи”,1987.-220 б.

11. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализ, М., “Наука”, 1985.

12. Авлиёқулов Н. Замонавий ўқитиш технологиялари.Тошкент, 2001.

13. Гмурман В.Е.Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. -Т.: Ўқитувчи, 1977.

14. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. “Наука” 1990.

15. Juraev T.J., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X., Oliy matematika asoslari. Darslik. - Т.: O'zbekiston, 1999. – 290 bet.

16. Жўраев Р., Саматов /Қаршибоев Х. Замонавий инфор­мацион ва педагогик технологиялар асосида табиий фанларни ўқитиш. –Ж.: Халқ таълими, 1-сон, 2002 й.

17. Зорич В.А. Математический анализ. 1,2 т.М. “Наука” 1981.

18. Зиёмуҳаммедов Б., Тожиев М. Педагогик технология-замонавий ўзбек миллий модели.-Т.: “Лидер Пресс”,2009.-104 бет.

19. Йўлдошев Ж.Ғ., Усмонов С.А. Педагогик технология асослари, Т.: “Ўқитувчи”, 2004.

20. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. 1,2. т. М., “Наука” 1979.

21. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. 1, 2 М. “Наука”, 1980.

22. Кудрявцев А.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. 1,2 т.М. “Наука”, 1984, 1986.

23. Никольский С.М. Курс математического анализа. 1,2т М.”Высшая школа”, 1975.

24. Махмудов М. Таълимни дидактик лойиҳалаш (Рисола). – Т.: Абдулла Қодирий номидаги халқ мероси нашриёти, 2002. - 79 б.

25. Очилов М. Янги педагогик технологиялар. –Қарши. Насаф, 2000.

26. Садуллаев А., Мансуров Х.Т., Худойберганов Г., Варисов А.К., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1,2 қ Т. “Ўқитувчи” 1993. 1995.

27. Саъдуллаев А. Математик анализ курси. 1,2,3-қисмлар. Тошкент, 1993.

28. Сейтхалилова Э.А., Қурбонов Ш.Управление качеством образования. Ташкент, Шарк, 2004 г.

29. Тожиев М., Зиёмуҳаммадов Б. Педагогик технологияни таълим-тарбия жараёнига тадбиғи ва унинг баркамол авлод фазилатларини шакллантиришдаги ўрни. Монография. /Т.: «MUMTOZ SO’Z». 2010., -214 б.

30. Тожиев М, Ўралова М., Баҳодирова Г. “Педагогик технология ва педагогик маҳорат” фани ўқув машғулотларининг лойиҳалари (Педагогик технология ўзбек миллий моделининг

амалиётга татбиғи). Қ.І: Ўқув ва илмий-услубий қўлланма/ Т.: «MUMTOZ SO'Z», 2010. - 205 б.

31. Тожиев М., Алимов А.Я., Қўчқаров Д.У. Педагогик технология – таълим жараёнига татбиғи: “Математика ўқитиш методикаси” фани ўқув машғулотларининг лойиҳаси. / Ўқув-услубий қўлланма. I қисм. Т.: ТАФАККУР, 2010. -148 б.

32. Толипов Ў.Қ., Усмонбоева М. Педагогик технологияларнинг тадбиқий асослари.-Т.: “Фан”,2006.

33. Ходиев Б.Ю, Голиш Л.В, Рихсимбоев О.К. Кейс- стади - иқтисодий олий ўқув юртидаги замонавий таълим технологиялари: Илмий -услубий қўлланма. - Т.: Тошкент Давлат Иқтисодиёт университети, 2009.

34. Шаталов В.Ф. Эксперимент продолжается. М.:Педагогика, 1989.

35. Шокирова Х.Р. Каррали ва эгри чизикли интеграллар. Т. “Ўзбекистон”, 1992.

36. Юнусова Д. Таълим технологиялари асосида математик таълимни ташкил этиш. Т. “Университет”, 2005, 132 бет.

37. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1,2, 3 т. М. “Наука” 1970,

М А З М У Н Ы

1.	Кирисиў.....	3
2.	Миллий педагогикалық технология тийкарында “Математикалық анализ” пәни оқыў шынығыўларының жойбарлары.....	5
3.	“Математикалық анализ” пәниниң үлкен модуллеры, олардан гөзленген мақсетлери ҳәм курамындағы орта модуллер саны.....	6
4.	Орта модуллеры ҳәм оқыў саатларының улыўма	7
5.	Мақсетлер жуўмағында ислетилетуғын феийллер системасы.....	7
6.	VIII. СЕГИЗИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ –Анық емес интеграл.....	9
7.	IX. ТОҒЫЗЫНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ –Анық интеграл.....	27
8.	X. ОНЫНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ –Санлы қатарлар	59
9.	XI. ОН БИРИНШИ ҮЛКЕН МОДУЛ Айқын емес интеграллар.....	85
10.	Пайдаланылған әдебиятлар.....	93

Изетаева Г.К., Джакаева К.Д.,
Ережепова Ш.Қ., Нарбаева Р.Д.

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

II бөлім

Redaktori:	A. Abdujalilov
Ko'rkem redaktori:	S. Abduvaliyev
Tex. Redaktori:	U. Vohidov
Operatori:	D. O'rinova

Licenziya: AI №190, berilgen waqti 10.05.2011
Original-maketten bosıwǵa ruqsat etildi 12.11.2019-j.
Formatı 60x84 ¹/₁₆. Kegli 11,5. «Times New Roman»
garniturası. Ofset usılında basıldı. Kólemi 6,0 b.t.
5,58 shártli b.t. Nusqası 100 dana. Buyırtpa 14/19.

«Tafakkur-bo'stoni» baspası. 100190. Tashkent qalasi,
Yunusobod-9, 13-54. E-mail: yunusali_1987@mail.ru

«Tafakkur-bo'stoni» MCHJ baspa-poligrafiyasında
chop etildi. Tashkent qalasi, Chilonzor koshesi, 1.
Telefon: (890) 000-33-93