МИНИСТЕРСТВО ЮСТИЦИИ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЮРИДИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Маннопова Э.Т.

МАТЕМАТИКА

Учебник для учащихся юридических колледжей

3240100 – Юриспруденция

ТАШКЕНТ
2019

УДК 510

Маннопова Э.Т.
Математика. Учебник для учащихся юридических колледжей. – Т.: ТГЮУ, 2019. – 193 стр.

Данный учебник составлен старшим преподавателем кафедры “Общеобразовательных дисциплин” ТГЮУ и рекомендован для печати на основании решения научно-методического Совета ТГЮУ №3 от 28 декабря 2018 года.

Составитель: Э.Т.Маннопова, старший преподаватель ТГЮУ

Рецензенты: Мухамедиева Д.К., старший научный сотрудник Научно-инновационного центра АКТ при ТУИТ, PhD по техническим наукам

Каримов А.З., кандидат ф.-м.н., доцент кафедры “Общеобразовательные дисциплины” ТГЮУ

Цель учебника – заложить основу логической культуры мышления юриста, научить применять математическую логику, правила и законы в профессиональной правовой сфере. В учебнике рассмотрены основные темы, такие как логика, множества, функции, функциональные отношения в правовом познании, понятие вероятности, понятия предела функции и производной, элементы математического анализа и математической статистики, а также приведена информация о великих математиках.

В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — выявить истину. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, уметь применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому, занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое профессиональное мышление. Применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. В юридической практике важную роль играет статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала.

Учебник рассчитан для студентов, обучающихся по направлению «Юриспруденция», также может быть полезно специалистам, работающим в этих направлениях.

ОГЛАВЛЕНИЕ

MUNDARIJA

Предисловие

Мы исходили из того, что курс математики для юристов должен, с одной стороны, быть достаточно широким, чтобы играть развивающую, гуманитарную роль. С другой стороны, он должен быть и достаточно содержательным, чтобы студенты научились решать хотя бы несложные прикладные задачи.

Курс рассчитан всего на 56 часов, поэтому по содержанию может быть только продолжением на более высоком уровне школьного курса математики. Мы попытались сделать курс более понятным и доступным, связать его с практической жизнью. Конечно же, объем курса не позволяет нам более подробно расписать и войти в курс высшей математики. Но, на наш взгляд, материалы подобраны интересно и будет познавательным для студентов юридического направления.

Изложение теории сопровождается упражнениями и типовыми заданиями. Упражнения и задания рассчитаны на развитие логического и критического мышления у студентов. Кроме того, они имеют практически-направленный характер.

Юристы не обязаны быть опытными математиками; им даже не обязательно уметь делать калькуляции. Тем не менее, все юристы должны хорошо понимать сложную математику, бухгалтерский учет и алгебру, чтобы удовлетворить определенные требования к работе. Почти каждый юрист нуждается в некотором количестве математики, чтобы правильно выполнять свою работу. Даже подсудимым нужно подсчитать срок тюремного заключения и выложить дело на оправдательный приговор. Адвокаты также должны структурировать свои аргументы так же, как математик структурирует доказательства. Они начинают со всех фактов, затем устанавливают законы и прецеденты и, наконец, используют всю эту информацию, чтобы сделать вывод, что обвиняемый виновен или невиновен.

Юристы часто имеют свои собственные офисы или, как минимум, должны знать и понимать, как работают их фирмы. Им нужна математика, чтобы понять доходы и обязательства, денежные потоки и расходы. Специалисты в налоговой сфере ежедневно используют математику, чтобы консультировать клиентов и создавать все сценарии, которые могут снизить налоговую нагрузку на клиента. Патентные юристы также используют математику как часть своих дел, чтобы научно доказать или опровергнуть патентную ответственность. Юристы по ценным бумагам рассчитывают капитал, структуру долга и капитала в раскрываемых документах. На самом деле, разные специалисты должны использовать математику в своей повседневной работе.

Математическая компетентность полезна для специалистов, работающих в юридической сфере. Многие юристы считают, что обучение математике улучшает аналитические навыки, и есть некоторые отрасли юридической практики, которые требуют от юристов работы со статистикой, концепциями личных финансов и принципами бухгалтерского учета. Умение работать с числами помогает адвокатам, практикующим в этих областях, обслуживать своих клиентов более эффективно.

Математика требует понимания чисел, формул и доказательств, которые могут научить разум логически мыслить. Сильные аналитические способности позволяют юристу воспринимать слабости в свидетельских показаниях или в деле, поданном законным оппонентом. Кроме того, адвокаты могут использовать логику для выработки убедительных аргументов для представления присяжным и судьям. Эти навыки также могут быть полезны при рассмотрении документов и контрактов, особенно когда адвокат пытается убедиться, что соглашение отвечает наилучшим интересам его клиента. Необычные положения или скользкие формулировки могут иногда создавать значительную юридическую путаницу для сторон договора, и только юрист с сильным аналитическим умом может обнаружить эти потенциальные проблемы.

Введение: Нужна ли юристу математика?

Авторы этого пособия полагают, что юристу математика нужна. Математика — это часть общечеловеческой культуры, такая же неотъемлемая и важная, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все наилучшие достижения человеческой мысли и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Таким образом, для студента гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина,* как, например, право для студента-математика.

Но для юриста значение математики этим не исчерпывается. В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — выявить истину. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, уметь применять на практике индуктивный и дедуктивный методы (вспомните Шерлока Холмса!). Поэтому, *занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое профессиональное мышление.*

Наконец, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. В юридической практике важную роль играет статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала. Ценность специалиста существенно возрастает, если он умеет делать все это.

Данный учебник помогает достичь указанных целей. Но написать его оказалось делом весьма непростым. Прежде всего потому, что предполагается обучать математике тех, кто уже мысленно с ней распрощался после окончания школы и полагал, что больше с ней не встретится. Понимая все это, мы начинаем наш курс с повторения школьного материала, несколько его обобщая и углубляя. Мы предлагаем учащимся такие разделы математики и такую последовательность изложения, при которых, на наш взгляд, усвоение будет происходить наиболее просто и естественно. В этом смысле изложение не является строгим и поэтому наш учебник отличается от стандартного математического курса примерно так же, как сборник рассказов от романа. Мы обсуждаем важнейшие математические понятия: число, вектор, функция, предел, аксиома, вероятность и показываем, как развивались математические идеи, заключенные в этих понятиях. Основная содержательная часть пособия представляет собой элементарное введение в курс теории вероятностей и математической статистики. Предполагается, что именно этому материалу будет посвящена большая часть практических занятий.

В некоторых областях практики юристы могут регулярно сталкиваться с математическими принципами. Хотя юрист может иметь возможность нанять финансового или бухгалтерского специалиста для оказания помощи в этих случаях, всётаки базовые знания могут помочь юристу взять под контроль дело и принять наилучшие возможные решения относительно того, как дело должно продолжаться.

Вот несколько примеров общих юридических вопросов, в которых может быть полезна математическая компетенция:

Налоговое право: налоговая система сложна. Хотя бухгалтеры могут выполнять большую часть тяжелой работы в этой области практики, адвокаты должны понимать отчеты и документы, которые они представляют властям.

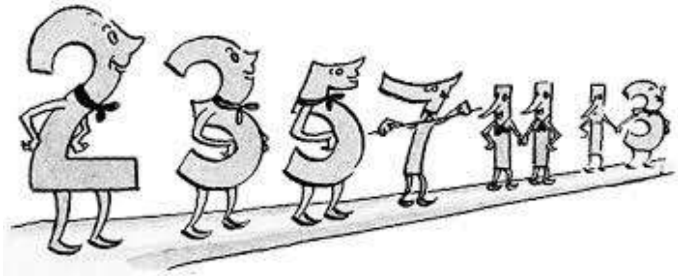
Семейное право: разделение активов и распределение вспомогательных платежей являются основными компонентами любого бракоразводного процесса. Оценка имущества и расчет чистой стоимости каждого из супругов могут быть сложным процессом, который требует математические знания.

Имущественное право: понимание стоимости имущества и его отдельных активов может быть полезным при консультировании клиентов по написанию завещания или подготовке к уходу в конце жизни.

Уголовное право: понимание статистики полезно при рассмотрении доказательств. Хотя во многих ситуациях адвокат по уголовным делам скорее всего будет полагаться на экспертов-свидетелей, важно понимать доказательства, основанные на вероятности и других математических понятиях.

Независимо от того, работаете ли вы один или в партнерстве, для вашего успеха важны разумное управление финансами и разумные методы учета. Вам нужно будет вести учет расходов, чтобы обеспечить адекватность процессов выставления счетов и оплаты. Даже если у вас есть бухгалтер или бухгалтер, который управляет вашими книгами, наличие приличных математических навыков поможет вам контролировать ее работу и гарантирует, что он делает свою работу хорошо и добросовестно.

I Часть.
РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА



§1. Понятие чисел.
Натуральные, целые и рациональные числа

Известные нам числа 1, 2, 3... называются *натуральными.* Их используют для счета или обозначения *количества предметов,* например: один юрист, два юриста и т.д. Кроме того, с помощью натуральных чисел обозначают *порядок* предметов. Например, если всех милиционеров в отделении выстроить по росту, то каждому из них можно присвоить номер: первый милиционер, второй милиционер и т.д. Поэтому различают *количественные числа* — один, два, три, четыре..., и *порядковые числа* — первый, второй, третий...

Чтобы записывать натуральные числа, большие десятки, мы пользуемся так называемой *десятичной позиционной системой.* Слово «позиционная» означает, что значение цифры зависит от ее места, например:

$157 = 1 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1,$

$625 = 6 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1,$

$582 = 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 1.$

Слово «десятичная» означает, что используются степени десятки. В другой системе, например, пятиричной, содержащей всего пять цифр 0, 1, 2, 3, 4, числовая позиционная запись расшифровывается так:

$231 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1;$

в двоичной системе, содержащей всего две цифры 0 и 1, мы получим:

$1\,011\,001 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1.$

Натуральные числа можно, как известно, складывать, вычитать, умножать и делить. Однако эти операции неравноценны. Очевидно, что сумма $a + b$ любых двух натуральных чисел a и b снова будет натуральным числом; то же самое можно сказать и о произведении ab. При этом порядок слагаемых и сомножителей не играет роли, т.е. $a + b = b+a$ и $ab = ba$.

Что же касается операций вычитания и деления, то здесь ситуация иная. Например, разность $5 - 2 = 3$ — число натуральное, но натурального числа $2 - 5$ не существует. В последнем случае используют так называемые *отрицательные числа* и записывают $2 - 5 = -3$, $4 - 10 = -6$ и т.п. Числа a и $-a$ называются *противоположными.*

Между натуральными числами и целыми отрицательными числами находится число 0 (нуль). Его рассматривают как количественное число; нуль предметов данного вида (например, попугаев в Антарктиде) означает отсутствие предметов данного вида. Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что множество попугаев, проживающих в Антарктиде, есть *пустое множество.*[1] Нуль обладает следующими свойствами:

1) $a + 0 = a$;

2) $a + (-a) = 0$;

3) на нуль делить нельзя.

Натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль называются в совокупности *целыми числами.* Множество всех натуральных чисел обозначается символом **N**, множество всех целых чисел — символом **Z**. Наглядно целые числа представляют точками на прямой (шкала термометра):

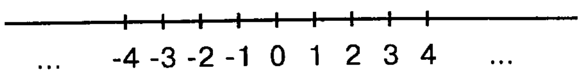


Рис. 1

[1] Понятие множества обсуждается в II Части.

В отличие от множества натуральных чисел, множество целых чисел устроено более «демократично»: любые два целых числа можно вычитать друг из друга и результат вычитания всегда будет также целым числом. Математики говорят, что множество целых чисел *замкнуто относительно операций сложения и вычитания,* и что это множество получено *расширением* множества натуральных чисел.

Потребность расширить множество натуральных чисел возникает и при делении. Например, семь милиционеров нельзя разделить на четыре равные части — такого количества милиционеров 7/4 не существует. Но мы вполне можем разделить семь миллионов сумлей на четыре равные части. Это число (1 миллион 750 тысяч) составляет 7/4 от общей суммы. Аналогичный смысл имеет обозначение $\frac{a}{b}$, где a и b — любые натуральные или даже целые числа ($b \neq 0$). Числа вида $\frac{a}{b}$ называются *обыкновенными дробями* или *рациональными числами.*[2] Множество всех рациональных чисел обозначается символом **Q**.

Целое число a можно записать как дробь $a/1$, поэтому целые числа входят как часть во множество рациональных чисел. В этом случае говорят, что множество целых чисел является *подмножеством* множества рациональных чисел. Точно так же, множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел. Записывается это следующим образом:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q},$$

а знак «$\subset$» читается так: «содержится в», «является подмножеством» или «является частью». Заметим, что во множестве рациональных чисел «равноправия» еще больше, чем во множестве целых чисел: любые два

[2] Между этими двумя понятиями есть некоторое различие. Например, одно и то же число 2/3 можно записать в виде различных дробей: 4/6, 6/9, 10/15 и т.д. Последние можно сократить, но дробь 2/3 сократить нельзя. Она является *несократимой.*

рациональных числа можно не только вычитать друг из друга, но можно и делить одно на другое (кроме деления на нуль!); при этом в результате указанных действий всегда будут получаться снова рациональные числа. Таким образом, множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырех операций: сложения, вычитания, умножения и деления.

Все натуральные числа, за исключением единицы, подразделяются на *простые* и *составные.* Натуральное число называется *составным,* если оно представляет собой произведение двух натуральных чисел, не равных единице, например: 4=2 • 2, 39 = 3 • 13, 111 = 3 • 37. Если натуральное число нельзя представить в виде такого произведения, то оно называется *простым,* например: 2, 3, 5, 7, 11.

Простые числа играют в математике особую роль. В их жизни много загадочного, и математики, стремясь разгадать эти тайны, открыли (и продолжают открывать до сих пор!) интереснейшие свойства простых чисел, придумали оригинальные математические методы исследования, которые применяются не только в теории чисел, но и в других разделах математики.

Древнегреческий математик Эратосфен предложил способ получения простых чисел, который называется решетом Эратосфена. Представим себе ряд натуральных чисел:

1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13

Рис. 2

Отметим (кружком) простое число 2 и затем вычеркнем все четные числа (или, как говорят, числа, кратные двум). Согласно определению, вычеркнутые числа не являются простыми, так как делятся на два и их можно записать в виде $2k$. Затем отметим простое число 3 и вычеркнем все числа, кратные трем: 3, 6, 9, 12 и т.д. Эти числа не простые, а составные, так как их можно записать в виде $3k$. Часть этих чисел, а именно четные, уже вычеркнута (на рис. 2 они зачеркнуты два раза). Следующее наименьшее незачеркнутое число — 5, оно простое. Выделим его, а затем вычеркнем все числа, кратные пяти: 10, 15, 20 и т.д. В результате останутся незачеркнутыми только простые числа.

Заметим, что осуществить описанную процедуру *полностью* практически невозможно, так как *множество натуральных чисел бесконечно.* Но мы можем, пользуясь решетом Эратосфена, найти «вручную» все простые числа, например, в первой тысяче натуральных чисел. Современные компьютеры позволили отодвинуть эту границу до 10^{20}. Принципиально, возможности ЭВМ здесь не ограничены.

Примеры

1. Найдите такое число x, что для любого числа a выполняется равенство $xa = a$.

2. Вспомните, что такое четные и нечетные числа. Назовите все четные простые числа.

3. Будет ли множество четных чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения?

4. Назовите наименьшее натуральное число.

5. Сравните дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{7}$ и $\frac{4}{11}$; $\frac{5}{13}$ и $\frac{3}{7}$.

6. Вспомните, что такое среднее арифметическое двух, трех или нескольких чисел. Найдите среднее арифметическое следующих чисел:

а) 1 и 2; б) –3 и 5; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; г) $\frac{4}{11}$ и 3; д) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$.

7. Покажите, что следующие числа являются простыми:

а) $2 \cdot 3 + 1$; б) $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$; в) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$; г) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11+1$.

Попробуйте предсказать общий результат.

§2. Действия над числами.

Десятичные дроби и действительные числа

Дроби, у которых знаменатель представляет собой степень десятки, т.е. 10, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ и т.д., называются *десятичными дробями.* Записываются они особым образом:

$$\frac{7}{10} = 0{,}7;\ \ 1\frac{3}{10} = 1{,}3;\ \ 2\frac{14}{1000} = 2{,}014.$$

Попытка записать любую обыкновенную дробь в виде десятичной дроби приводит иногда к *бесконечной десятичной дроби.* Например, разделив «уголком», мы получим:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots;\ \ \frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots;$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857142857142857\ldots;$$

Как видно, получающаяся бесконечная последовательность цифр содержит так называемый *период* — один и тот же повторяющийся набор цифр. Поэтому полученные десятичные дроби называют *бесконечными периодическими десятичными дробями.* Можно доказать, что любая обыкновенная дробь записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Обратное также верно: любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой десятичную запись некоторой обыкновенной дроби. Как найти последнюю, поясним на примере.

Пример. Превратим в обыкновенные дроби числа $q = 0{,}777\ldots$ и $p = 0{,}999\ldots$

Умножив на 10, получаем:

1) $10q = 7{,}777\ldots = 7 + q$, откуда $9q = 7$ и $q = \dfrac{7}{9}$.

Проверьте результат, превратив 7/9 в десятичную дробь.

2) $10p = 9{,}999\ldots = 9 + p$, откуда $9p = 9$ и $p = 1$. Заметим, что 1 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 0: 1,000...; аналогично, 0,24 = 0,24000..., 3,5 = 3,5000... и т.п.

Примеры

8. С помощью калькулятора и «вручную» превратите данную обыкновенную дробь в бесконечную периодическую десятичную дробь и укажите период: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{2}{5}$.

9. Превратите бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную: 1,888...; 0,1212...; 0,444...

Решив эти примеры, каждый будущий юрист задаст себе вопрос: а имеют ли смысл бесконечные *непериодические* десятичные дроби?

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катетов которого равна единице. Обозначим длину гипотенузы через *x*. По теореме Пифагора

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2. \qquad (1)$$

Докажем, что корни этого уравнения не являются рациональными числами. В самом деле, предположим противное, т.е. что корнем уравнения (1) является дробь $x = \frac{a}{b}$ (a и b — целые числа). Если дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить, сделаем это, и будем полагать далее, что дробь $\frac{a}{b}$ является уже несократимой.

Подставляя $\frac{a}{b}$ в уравнение (1), получим $\frac{a^2}{b^2}$ = 2 или

$$a^2 = 2b^2. \qquad (2)$$

Так как в правую часть равенства (2) входит множитель 2, то a^2 — число четное. Следовательно, число a также четное и его можно записать в виде $a = 2c$. Подставив в (2), получим $(2c)2 = 2b^2$ или, сократив на 2, $2c^2 = b^2$. Отсюда следует, что число b^2 также является четным. Но тогда четным будет и число b. Теперь, поскольку оба числа a и b получились четными, дробь $\frac{a}{b}$ является сократимой. Это противоречит сделанному выше предположению, что дробь $\frac{a}{b}$ — несократимая. Противоречие возникло вследствие того, что в самом начале было сделано неверное предположение — корнем уравнения

(1) является рациональное число — дробь $\frac{a}{b}$. Следовательно, никакая дробь не может быть корнем уравнения (1), что и требовалось доказать.

Результат наших рассуждений можно сформулировать иначе: квадратный корень из числа 2 не является рациональным числом, т.е. бесконечной периодической десятичной дробью.

Будем искать приближенные значения числа $x = \sqrt{2}$. Ясно, что $1 < x < 2$. Далее, так как $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 = x^2$, а $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2 = x^2$, то $1{,}4 < x < 1{,}5$. Это означает, что с точностью до 0,1 число x приближенно равно 1,4, ($x \approx 1{,}4$). Аналогично устанавливаем, что $1{,}41 < x < 1{,}42$, так как $1{,}41^2 < 2$, а $1{,}42^2 > 2$. Следовательно, с точностью до 0,01 получаем $x \approx 1{,}41$. Применив еще раз тот же прием, найдем, что $1{,}414 < x < 1{,}415$, т.е. $x \approx 1{,}414$, и т.д.

Описанная процедура позволяет находить все более точные приближения числа $\sqrt{2}$. Но ни одно из этих приближений не может быть равным $\sqrt{2}$, так как все приближенные значения являются рациональными числами, а мы доказали, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Поэтому последовательность приближенных значений будет *бесконечной.*

Итак, число $\sqrt{2}$ представляется в виде бесконечной последовательности приближенных значений. Каждое последующее значение получается добавлением к предыдущему нового десятичного знака. Это позволяет записать $\sqrt{2}$ в виде бесконечной десятичной дроби:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562373...$

Описанным способом можно находить десятичные приближения любого числа. Для обыкновенных дробей — это просто деление уголком (см. выше), которое приводит к бесконечным периодическим дробям. Поскольку число $\sqrt{2}$ не является рациональным, то представляющая его бесконечная десятичная дробь не будет периодической. Таким образом, мы приходим к понятию *бесконечной непериодической десятичной дроби.*

Для чисел вида $\sqrt{a}$, $a \in \mathbf{N}$ также имеются процедуры, позволяющие найти любое число знаков в их десятичной записи. Один из таких алгоритмов мы приводим ниже без описания[3]:

$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$

	1
24	100
×4	−96
281	400
×1	−281
2824	11900
×4	−11296
…	…

$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$

	4
42	100
×2	−84
443	1600
×3	−1359
4466	27100
×6	−26796
…	…

Найдите еще несколько знаков и проверьте результат с помощью калькулятора.

Заметим, что всякую бесконечную десятичную дробь можно записать в виде суммы бесконечного числа слагаемых:

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots;$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots$$

Такие суммы называются *рядами.* Первый ряд представляет собой так называемую *бесконечную геометрическую прогрессию, с* которой, возможно, Вы познакомились в школе. Второй ряд прогрессией уже не является.

В школе Вы решали квадратные, кубические и биквадратные уравнения. Их корни выражаются через радикалы второй, третьей или четвертой степени. Например, уравнение $x^3 = 5$ имеет корень $x = \sqrt[3]{5}$, уравнение $2x^2 = 3$ — корни $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[3] Это ребус посложнее, чем деление «уголком». Попробуйте его разгадать.

В школьных учебниках числа a, b и c обычно подбирают так, чтобы под корнем получался квадрат целого числа. Но, если коэффициенты уравнения не подбирать специально, то корни x_1 и x_2 будут, вообще говоря, бесконечными непериодическими десятичными дробями. Наиболее общий результат формулируется так: корень любого алгебраического уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (3)$$

степени n с целыми коэффициентами (если этот корень существует!) является, вообще говоря, бесконечной непериодической десятичной дробью.

Помимо алгебраических уравнений, существуют другие источники получения бесконечных непериодических десятичных дробей.

Определим два очень важных числа. Первое из них — число π, равное отношению длины l произвольной окружности к ее диаметру d:

$$\pi = \frac{l}{d}.$$

Это число известно с глубокой древности. Вавилонские, египетские, китайские и греческие математики нашли различные приближенные значения числа π.

$$3,\quad 4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2,\quad \sqrt{10},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{377}{120}$$

и другие. Рассматривая вписанные в окружность правильные $2n$-угольники, Архимед умел вычислять π с большой точностью. В частности, он нашел, что $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.

Лейбниц доказал, что число π можно представить в виде следующего ряда:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

(Заметьте, что дроби в правой части не являются десятичными.) Этот ряд позволяет находить приближенные значения числа π. Например, мы можем переписать равенство (4) так:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17}\right) - \ldots$$

В скобках стоят положительные числа. Поэтому, «отбросив» их, мы увеличиваем правую часть:

$$\frac{\pi}{4} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{263}{315} .$$

Умножив это равенство на 4, найдем оценку «сверху» для числа π: $\pi < \frac{1052}{315}$

С другой стороны, из того же равенства (4) находим:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15}\right) + \ldots$$

В скобках стоят положительные слагаемые. Поэтому, отбрасывая их, получаем:

$$\frac{\pi}{4} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{228}{315} ,$$

что дает оценку «снизу» для числа π: $\pi > \frac{912}{315}$. Итак, мы получили, что

$$\frac{912}{315} < \pi < \frac{1052}{315} .$$

Это довольно гсумая оценка истинного значения числа π. Ее можно улучшить, если взять для оценки не 5, а более слагаемых из ряда (4). Вот первые 15 точных знаков после запятой:

$$\pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Другое очень известное в математике число — так называемое неперово[4] число e — также может быть представлено в виде ряда:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Здесь мы используем стандартное обозначение $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$, которое читается «$n$ факториал».

Чтобы найти приближенное значение числа e, нужно в сумме (5) оставить несколько слагаемых, а остальными пренебречь. Чем больше слагаемых мы оставим, тем точнее будет результат:

$$e = 2{,}718281828459045...$$

Используя ЭВМ, можно подсчитать числа e и π с любой точностью.

Числа π и e относятся к так называемым *трансцендентным* числам. Так называются числа, которые не могут быть корнями никакого уравнения вида (3) с целыми коэффициентами.

Подведем итоги. Назовем *действительными* или *вещественными* числами все бесконечные десятичные дроби. Обозначим множество всех таких чисел через **R**. Из предыдущих рассуждений вытекает, что множество **R** включает в себя множество **Q** всех рациональных чисел, поэтому можно записать

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.*

Весьма важный математический факт заключается в том, что множество действительных чисел является *упорядоченным.* Это означает, что любые два действительных числа можно сравнить между собой, т.е. указать, какое из них больше (или меньше). Процедура сравнения очень проста: нужно последовательно сравнивать цифры, стоящие на одинаковых позициях. Например, 2,381615... > 2,381529..., т.к. на первых четырех позициях соответствующие цифры одинаковы, а 6 > 5. Описанное правило сравнения работает при одном (и единственном) соглашении: не рассматривать периодические дроби с периодом 9. При этом множество действительных чисел, образно говоря, не сузится, т.к. всякую бесконечную периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей *конечной* десятичной дробью, например:

0,999... = 1, 0,42999... = 0,43, 2,65999... = 2,66 и т.п. (см. пример на с. 15).

Напомним *свойства операций сложения и умножения действительных чисел:*

---

[4] В честь математика XVI в. Джона Непера.

переместительность или коммутативность:

$$\boldsymbol{a + b = b + a;}$$

сочетательность или ассоциативность (для сложения):

$$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c);}$$

сочетательность или ассоциативность (для умножения):

$$\boldsymbol{(ab)c = a(bc);}$$

распределительность или дистрибутивность:

$$\boldsymbol{a(b + c) = ab + ac.}$$

Числовые множества **N, Z, Q, R** являются примерами так называемых *числовых систем,* которые имеют специальные названия. Например, говорят *кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел.* Эти термины мы обсуждаем в восьмой главе. Там мы покажем, в частности, что поле действительных чисел можно расширить и получить так называемые *комплексные числа.*

Правило округления десятичных дробей

Поясним на примере. Следующие десятичные дроби мы округляем до сотых долей:

$$0{,}811 \approx 0{,}81,\ 0{,}812 \approx 0{,}81,\ ...,\quad 0{,}814 \approx 0{,}81,\ 0{,}815 \approx 0{,}82,\ 0{,}816 \approx 0{,}82,\ ...,$$
$$0{,}819 \approx 0{,}82.$$

Примеры

10. Вычислите с помощью калькулятора и округлите до тысячных:

$$\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{13},\ \sqrt{15},\ \sqrt{17},\ \sqrt{19},\ \sqrt{20}.$$

11. Найдите 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, 81, 9!, 10!.

12. Расставьте правильно знаки > или **<:**

а) 0,142816... 0,142827...; б) $\sqrt[3]{3}\quad \sqrt{2}$; в) $\frac{2}{7}\quad \sqrt{\frac{1}{3}}$; г) $\sqrt{5}\;$ 2,421619.

13. Округлите числа π и e до тысячных.

14. Решите линейное уравнение $3x - 2 = 0$, запишите ответ в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлите его до сотых.

15. Решите неравенство $3x + 7 > 0$, запишите ответ в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлите его до сотых.

Действия со степенями

По определению

$$a^0 = 1,\ a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n},\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Из этого определения следует, что для любых натуральных чисел m и n справедливы следующие формулы:

$$a^m\, a^n = a^{m+n},\ (a^n)^m = a^{mn},\ a^n\, b^n = (ab)^n.$$

Число, которое при возведении в степень n дает a, называется корнем степени n из a. Если число n нечетное, то существует только один корень степени n из числа a, который обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Если n четное, а число a — положительное, то корней будет два. Например, числа 3 и –3 будут корнями четвертой степени из 81, т.к. $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$. Положительный корень называется арифметическим и именно он обозначается символом $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Степень с дробным показателем определяется так:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m .$$

Оказывается, что имеют смысл и выражения вида a^x, где x — *любое* действительно число, например $\sqrt{2}$. Действия с такими степенями производятся по тем же правилам, что и с натуральными степенями, например, $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\pi} = 3^{\sqrt{2}+\pi}$.

При различных вычислениях большие числа удобно записывать в так называемой *стандартной форме,* т.е. в виде произведения двух множителей, первый из которых заключен между числами 1 и 10, а второй представляет собой степень десятки: $243507 = 2{,}43507 \cdot 10^5$, $0{,}184 = 1{,}84 \cdot 10^{-1}$ и т.д. Стандартную форму используют при работе с калькулятором, в особенности тогда, когда не хватает разрядов для точных вычислений. Например,

$243507 \cdot 1385462 = 2{,}43507 \cdot 10^5 \cdot 1{,}385462 \cdot 10^6 = (2{,}43507 \cdot 1{,}385462) \cdot 10^{11} \approx 3{,}37369695 \cdot 10^{11}$;

$3^{17} = 3^{16} \cdot 3 = (3^4)^4 \cdot 3 = (81)^4 \cdot 3 = (6581)^2 \cdot 3 = 3 \cdot (6{,}581 \cdot 10^3)^2 = 3 \cdot (6{,}581)^2 \cdot (10^3)^2 \approx 129{,}140163 \cdot 10^6$.

Проценты

Одна сотая доля какого-либо количества называется *процентом.* Например, в городе N всего 300 судей, следовательно, 3 судьи — это 1%, 6 судей — 2% и т.д.

Подумайте, сколько тверских судей составляют 4% от их общего числа? (В Твери 145 судей.)

Другой пример. Некто утаил прибыль в размере 10 млн. сум. Какую сумму недополучила казна, если налог на прибыль составляет 22%?

Решение: 10 млн $\cdot \frac{22}{100}$ = 2,2 млн.

Задача

За год в области совершено 6720 преступлений. Из них тяжких — 33; в состоянии алкогольного опьянения — 3262; связанных с дорожно-транспортными происшествиями — 1310. После завершения следствия переданы в суд 4520 дел; по 3816 из них уже вынесены приговоры, причем половина из последних — обвинительные; из всех обвинительных приведены в исполнение 40%. Заполните до конца следующую таблицу:

Всего	6720	100%
Тяжких	33	
В состоянии алкогольного опьянения	3262	
Транспортных	1310	
Завершено	4520	
Всего приговоров	3816	
Обвинительных		
Исполнено		

В первом столбце проставьте соответствующие абсолютные значения, а во втором укажите, какой процент они составляют от общего числа преступлений.

§3. Понятие равенства и неравенства

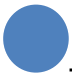
Само понятие равенства тесно переплетено с понятием сравнения, когда мы сопоставляем свойства и признаки, чтобы выявить схожие черты. Процесс сравнения требует наличия двух объектов, которые и сравниваются между собой. Данные рассуждения наводят на мысль, что понятие равенства не может иметь место, когда нет хотя бы двух объектов, чтобы было что сравнивать. При этом, конечно, может быть взято большее количество объектов: три и более, однако, в конечном, счете, мы так или иначе придем к сравнению пар, собранных из заданных объектов.

Смысл понятия «равенство» в обобщенном толковании отлично определяется словом «одинаковые». О двух одинаковых объектах можно говорить – «равные». Например, квадраты  и . А вот объекты, которые хоть по какому-то признаку отличаются друг от другу, назовем неравными.

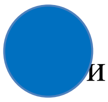
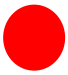
Говоря о равенстве, мы можем иметь в виду как объекты в целом, так и их отдельные свойства или признаки. Объекты являются равными в целом, когда одинаковы по всем характеристикам. Например, когда мы привели в пример равенство квадратов, имели в виду их равенство по всем присущим им свойствам: форме, размеру, цвету. Также объекты могут и не быть равными в целом, но обладать одинаковыми отдельными признаками. Например:  и . Указанные объекты равны по форме (оба – квадраты), но различны (неравны) по цвету и размеру.

Таким образом, необходимо заранее понимать, равенство какого рода мы имеем в виду.

Равенство – запись, в которой использован знак равно, разделяющий два математических объекта (или числа, или выражения и т.п.).

Понятие неравенства, как и понятие равенства, связывается с моментом сравнения двух объектов. В то время как равенство означает «одинаковы», то неравенство, напротив, свидетельствует о различиях объектов, которые сравниваются. К примеру,  и  - одинаковые объекты или равные.  и  - объекты, отличающиеся друг от друга или неравные.

Неравенство объектов определяется по смысловой нагрузке такими словами, как выше – ниже (неравенство по признаку высоты); толще – тоньше (неравенство по признаку толщины); длиннее – короче (неравенство по признаку длины) и так далее.

Возможно рассуждать как о равенстве-неравенстве объектов в целом, так и о сравнении их отдельных характеристик. Допустим, заданы два объекта:  и  . Без сомнений, эти объекты не являются одинаковыми, т.е. в целом они не равны: по признаку размера и цвета. Но, в то же время, мы можем утверждать, что равны их формы – оба объекта являются кругами.

В контексте математики смысловая нагрузка неравенства сохраняется. Однако, в этом случае речь идет о неравенстве математических объектов: чисел, значений выражений, значений величин (длина, площадь и т.д.), векторов, фигур и т.п.

Не равно, больше, меньше

В зависимости от целей поставленной задачи ценным можем являться уже просто факт выяснения неравенства объектов, но обычно вслед за установлением факта неравенства происходит выяснение того, какая все же величина больше, а какая – меньше.

Значение слов «больше» и «меньше» нам интуитивно знакомо с самого начала нашей жизни. Очевидным является навык определять превосходство объекта по размеру, количеству и т.д. Но в конечном счете любое сравнение приводит нас к сравнению чисел, которые определяют некоторые характеристики сравниваемых объектов. По сути, мы выясняем, какое число больше, а какое – меньше.

Запись неравенств с помощью знаков

Существуют общепринятые обозначения для записи неравенств:

- знак «не равно», представляющий собой перечеркнутый знак «равно»: ≠. Этот знак располагается между неравными объектами. Например: 5≠10 пять не равно десяти;
- знак «больше»: > и знак «меньше»: <. Первый записывается между большим и меньшим объектами; второй между меньшим и большим. Например, запись о сравнении отрезков вида |AB| > |CD| говорит о том, что отрезок AB больше отрезка CD;
- знак «больше или равно»: ≥≥ и знак «меньше или равно»: ≤≤.

Подробнее их смысл разберем ниже. Дадим определение неравенств по виду их записи.

Неравенства – алгебраические выражения, имеющие смысл и записанные при помощи знаков ≠, > , <, ≤, ≥≠, > , <, ≤, ≥.

Знаки строгих неравенств – это знаки «больше» и «меньше»: >> и << Неравенства, составленные с их помощью – строгие неравенства.

Знаки нестрогих неравенств – это знаки «больше или равно» и «меньше или равно»: ≥ и ≤. Неравенства, составленные с их помощью – нестрогие неравенства.

Свойства неравенств

Опишем свойства неравенств. Очевидный факт, что объект никак не может быть неравным самому себе, и это есть первое свойство неравенства. Второе свойство звучит так: если первый объект не равен второму, то и второй не равен первому.

Опишем свойства, соответствующие знакам «больше» или «меньше»:

- **Антирефлективность.** Это свойство можно выразить так: для любого объекта k неравенства $k > k$ и $k < k$ неверны;
- **Антисимметричность.** Данное свойство говорит о том, что, если первый объект больше или меньше второго, то второй объект, соответственно, меньше или больше первого. Запишем: если $m>n$, то $n<m$. Или: если $m<n$, то $n>m$;
- **Транзитивность.** В буквенной записи указанное свойство будет выглядеть так: если задано, что $a<b$ и $b<c$, то $a<c$. Наоборот: $a>b$ и $b>c$, а значит $a>c$. Данное свойство интуитивно понятно и естественно: если первый объект больше второго, а второй – больше третьего, то становится ясно, что первый объект тем более больше третьего.

§4. Решение уравнений

Из школьного курса известно, что два или более уравнений образуют систему, если они имеют общее решение. Решением системы двух уравнений называется пара чисел $(x_0; y_0)$, которая каждое уравнение системы обращает в тождество. Решить систему – значит найти все ее решения. Далее рассмотрим на примерах несколько способов решения систем.

Способ подстановки. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 5x-2y=11 \end{cases}$ Способ подстановки заключается в следующем:

1) выражаем одно неизвестное через другое, воспользовавшись одним из заданных уравнений. Обычно выбирают то уравнение, где это делается проще. В данном случае нам все равно, какое из заданных уравнений

использовать для нашей цели. Возьмем, например, первое уравнение системы, и выразим *x* через *y*: $x=\frac{12-3y}{2}$.

2) подставим во второе уравнение системы вместо *x* полученное равенство: $5\cdot\frac{12-3y}{2}-2y=11$.

Получили линейное уравнение относительно переменной *y*. Решим это уравнение, помножим это равенство на 2, чтобы избавиться от дроби в левой части равенства: $5\cdot(12-3y)-4y==22;\quad 60-15y-4y=22;\quad 19y=38;\quad y=2.$ Подставим найденное значение $y=2$ в равенство, выражающее *x*, получим: $x=\frac{12-3\cdot 2}{2}=\frac{6}{2}=3$. Таким образом, нами найдена пара значений $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$, которая является решением заданной системы. Осталось сделать проверку. Проверка: $\begin{cases}2\cdot 3+3\cdot 2=12,\\ 5\cdot 3-2\cdot 2=11;\end{cases}\quad\begin{cases}12\equiv 12,\\ 11\equiv 11.\end{cases}$

Способ уравнивания коэффициентов при неизвестных состоит в том, что исходную систему приводят к такой эквивалентной системе, где коэффициенты при *x* или *y* были одинаковы. Покажем, как это делается, на данном примере. Решим систему: $\begin{cases}5x-3y=17,\\ 2x+5y=13.\end{cases}$

1) Для приравнивания коэффициентов, например при *y* надо найти НОК(3; 5)=15, где 3 и 5 —коэффициенты при *y* в уравнениях системы. Затем разделить 15 на 3 — коэффициент при *y* в первом уравнении, получим 5. Делим 15 на 5 — коэффициент при — во втором уравнении, получаем 3. Следовательно, первое уравнение системы умножаем на 5. а второе на 3: $\begin{cases}5x-3y=17, & \vert\cdot 5\\ 2x+5y=13; & \vert\cdot 3\end{cases}\quad\begin{cases}25x-15y=85,\\ 6x+15y=39.\end{cases}$

2) Так как коэффициенты при *y* имеют противоположные знаки, складываем почленно уравнения системы:

$$\begin{cases} 25x - 15y = 85, \\ + \\ 6x + 15y = 39 \end{cases}$$
$$\overline{31x = 124}$$
$$x = 4$$

3) Для нахождения соответствующего значения *y* подставим значение *x* в любое исходное уравнение системы (обычно подставляют в то уравнение системы, где отыскание значения *y* проще). В исходной системе уравнения одинаковы по сложности, поэтому подставим значение x = 4 во второе уравнение, чтобы не делать лишней операции деления на -1: $2 \cdot 4 + 5y = 13; \;\; 5y = 13 - 8; \;\; 5y = 5; \;\; y = 1.$

Таким образом, найдена пара значений $\begin{cases} x = 4; \\ y = 1, \end{cases}$ которая является решением заданной системы.

Иногда задаются системы уравнений, где нет необходимости в уравнивании коэффициентов при неизвестных. Почленное сложение или вычитание уравнений системы приводит к простейшему решению. Например, решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - 2y = 13; \\ x + 2y = 7. \end{cases}$ Складывая почленно уравнения заданной системы, получим:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13, \\ + \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$
$$\overline{4x = 20}$$
$$x = 5$$

.Подставив вместо *x* значение 5 во второе уравнение исходной системы, находим соответствующее значение *y*: $5 + 2y = 7; \;\; 2y = 2; \;\; y = 1.$ Таким образом, решением системы является $\begin{cases} x = 5; \\ y = 1. \end{cases}$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Даже поверхностный взгляд на окружающих нас людей дает основания говорить об их несхожести. **Люди различаются** по полу, возрасту, темпераменту, росту, цвету волос, по уровню интеллекта и многим другим признакам. Природа наделила одного музыкальными способностями, другого — силой, третьего — красотой, а кому-то уготовила судьбу немощного инвалида. **Различия** между людьми, обусловленные их физиологическими и психическими особенностями, называются **естественными**.

Естественные различия далеко не безобидны, они могут стать основой для появления неравных отношений между индивидами. Сильные принуждают слабых, хитрые одерживают победу над простаками. **Неравенство, вытекающее из естественных различий, является первой формой неравенства**, в том или ином виде проявляющегося и у некоторых видов животных. Однако в **человеческом** обществе **главным является социальное неравенство,** неразрывно связанное с социальными различиями, социальной дифференциацией.

Социальными называются те **различия,** которые **порождены социальными факторами:** укладом жизни (городское и сельское население), разделением труда (работники умственного и физического труда), социальными ролями (отец, врач, политический деятель) и т. д., что ведет к различиям в степени обладания собственностью, получаемого дохода, власти, достижения социального статуса, престижа, образования.

Различные уровни социального развития являются **базой для социального неравенства**, возникновения богатых и бедных, расслоения общества, его стратификации (страта-слой, включающий в себя людей, имеющих одинаковые доходы, власть, образование, престиж).

Доход — сумма денежных поступлений, получаемых личностью за единицу времени. Это может быть труд, а может и владение собственностью, которая «работает».

Образование — комплекс знаний, полученных в учебных заведениях. Его уровень измеряется числом лет обучения. Скажем, неполная средняя школа — 9 лет. Профессор имеет за спиной более 20 лет образования.

Власть – возможность навязывать свою волю другим людям независимо от их желания. Измеряется количеством людей, на которое она распространяется.

Престиж – это оценка положения личности в обществе, сложившаяся в общественном мнении.

Неравенство между людьми существует в любом обществе. Это вполне естественно и закономерно, если учесть, что люди различаются по своим способностям, интересам, жизненным предпочтениям, ценностным ориентациям и т.д. В каждом обществе есть бедные и богатые, образованные и необразованные, предприимчивые и непредприимчивые, обладающие властью и лишенные ее. В связи с этим проблема происхождения социального неравенства, отношения к нему и путей его устранения всегда вызывала повышенный интерес, причем не только у мыслителей и политиков, но и у обывателей, которые рассматривают социальное неравенство как несправедливость.

II Часть. МНОЖЕСТВА

Явления, происходящие в природе, обществе, человеке очень сложны и разнообразны. Ученые изучают разные стороны этих явлений, причем каждая наука вырабатывает свои специфические методы исследования. Например, такое важное социальное явление как преступность изучают не только юристы, но и социологи, психологи, медики и т.д. Есть тут серьезная работа и для математиков. Их задача состоит, например, в том, чтобы подвергнуть математической обработке огромный статистический материал — отчеты органов внутренних дел и любые другие документы, содержащие различные числовые данные. Цель этой работы — выделить наиболее существенные сведения об интересующем нас явлении.

Результаты обработки представляют в виде таблиц, графиков, диаграмм и различных числовых характеристик, которые называют параметрами. Важнейшие из них — *среднее арифметическое* и *дисперсия.*Для начала разберем понятие множества и рассмотри операции над множествами.

§1. Понятие множеств

Понятие множества − одно из первичных в математике. Поэтому очень трудно дать ему какое-либо определение, которое бы не заменяло слово «множество» каким-нибудь равнозначным выражением, например, совокупность, собрание элементов и т.д. Элементы множества − это то, из чего это множество состоит, например, каждый студент вашей группы есть элемент множества студентов. Множества обычно обозначают большими буквами: A, B, C, N, ..., а элементы этих множеств − аналогичными маленькими буквами: a, b, c, n, ... Существуют стандартные обозначения для некоторых множеств. Например,

Z − множество целых чисел;

Q − множество рациональных чисел;

I − множество иррациональных чисел;

R − множество действительных чисел;

C − множество комплексных чисел.

Если элемент *a* принадлежит множеству A, то пишут: a∈A.

Множество считается заданным, если для любого объекта можно определить, принадлежит ли этот объект множеству или нет.

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, **множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое** (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ *(как вариант, с подстрочными индексами:* A_1, A_2, B_7 *и т.п.)*, а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

$A = \{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ – множество букв русского алфавита; $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

Множества A является *конечным* (состоящим из конечного числа элементов), а множество N – это пример *бесконечного* множества. Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое *пустое множество*:

$\varnothing$ – множество, в котором нет ни одного элемента.

Принадлежность элемента множеству записывается значком $\in$, например:

$б \in A$ – буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита; $\beta \notin A$ – буква «бета» **не** принадлежит множеству букв русского алфавита; $5 \in N$ – число 5 принадлежит множеству натуральных чисел; $5{,}5 \notin N$ – а вот число 5,5 – уже нет.

В абстрактной алгебре элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z$ и, соответственно, факт принадлежности оформляется в следующем стиле:

$x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X.

Вышеприведённые множества записаны *прямым перечислением* элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого *признака(ов)*, который присущ всем его элементам. Например:

$N^* = \{n \in N \mid n < 100\}$ – множество всех натуральных чисел, меньших ста.

Запомните: длинная вертикальная палка $|$ выражает словесный оборот «которые», «таких, что». Довольно часто вместо неё используется двоеточие: $N^* = \{n \in N : n < 100\}$ – давайте прочитаем запись более формально:*«множество элементов* n*, принадлежащих множеству* N *натуральных чисел,* **таких, что** *n<100»*.

Данное множество можно записать и прямым перечислением: $N^* = \{1, 2, 3, \ldots, 97, 98, 99\}$

Ещё примеры: $S_1 = \{\textit{Студенты} \mid \textit{занимают место в 1 ряду}\}$ – и если и студентов в 1-м ряду достаточно много, то такая запись намного удобнее, нежели их прямое перечисление.

$O = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ – множество чисел, принадлежащих отрезку $[0; 1]$. Обратите внимание, что здесь подразумевается множество *действительных* чисел, которые перечислить через запятую уже невозможно.

Следует отметить, что элементы множества не обязаны быть «однородными» или логически взаимосвязанными. Возьмите большой пакет и начните наобум складывать в него различные предметы. В этом нет никакой закономерности, но, тем не менее, речь идёт о множестве предметов. Образно говоря, множество – это и есть обособленный «пакет», в котором «волею судьбы» оказалась некоторая совокупность объектов.

Подмножества

Практически всё понятно из самого названия: множество G является **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества G принадлежит множеству A. Иными словами, множество G содержится во множестве A: $G \subset A$

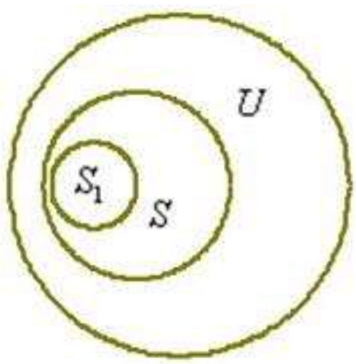
Значок $\subset$ называют значком *включения*.

Вернёмся к примеру, в котором A – это множество букв русского алфавита. Обозначим через G – множество его гласных букв. Тогда: $G \subset A$

Также можно выделить подмножество согласных букв и вообще – произвольное подмножество, состоящее из любого количества случайно (или неслучайно) взятых кириллических букв. В частности, любая буква кириллицы является подмножеством множества A.

Отношения между подмножествами удобно изображать с помощью условной геометрической схемы, которая называется **кругами Эйлера**.

Пусть S_1 – множество студентов в 1-м ряду, S – множество студентов группы, U – множество студентов университета. Тогда отношение включений $S_1 < S < U$ можно изобразить следующим образом:



Множество студентов другого ВУЗа следует изобразить кругом, который не пересекает внешний круг; множество студентов страны – кругом, который содержит в себе оба этих круга, и т.д.

Типичный пример включений мы наблюдаем при рассмотрении числовых множеств. Повторим школьный материал, который важно держать на заметке и при изучении высшей математики:

Числовые множества

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.). Это множество уже встретилось в статье, единственное, мы сейчас чуть-чуть модифицируем его обозначение. Дело в том, что числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами. Мне удобнее использовать жирный шрифт: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль.

Если к множеству $\boldsymbol{N}$ присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество целых чисел*:

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, рационализаторы и лентяи записывают его элементы со значками *«плюс минус»*.

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

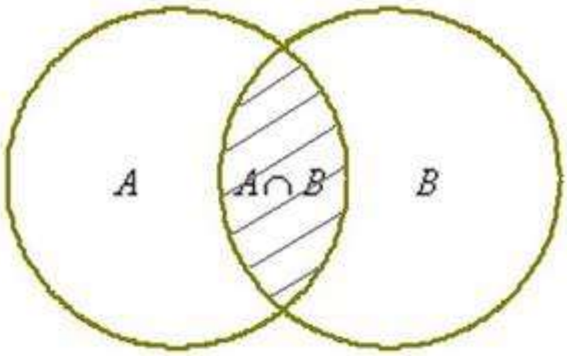
Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ – поскольку каждый элемент множества $\mathbf{N}$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}$. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

§2. Операции над множествами

Диаграммы Венна (по аналогии с кругами Эйлера) – это схематическое изображение действий с множествами. Опять же предупреждаю, что я рассмотрю не все операции:

1) **Пересечение** множеств характеризуется логической связкой **И** и обозначается значком $\cap$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит **и** множеству A, **и** множеству B. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств:



Так, например, для множеств $A = \{i, j, k\}, B = \{k, m\}$: $A \cap B = \{k\}$

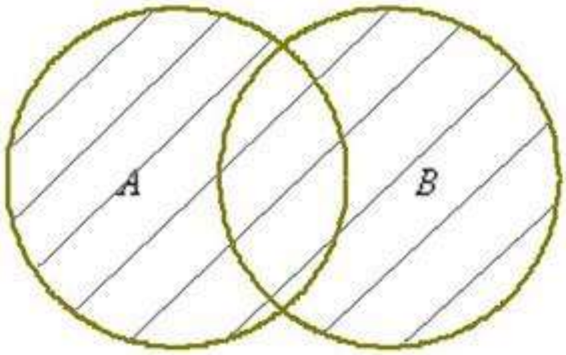
Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Такой пример нам только что встретился при рассмотрении числовых множеств: $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

Операция пересечения применима и для бОльшего количества множеств, в частности в Википедии есть хороший пример пересечения множеств букв трёх алфавитов.

2) **Объединение** множеств характеризуется логической связкой **ИЛИ** и обозначается значком $\cup$.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **или** множеству B:



Запишем объединение множеств $A = \{1, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 1\}$: $A \cup B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ – грубо говоря, тут нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы *(в данном случае единица на пересечении множеств)* следует указать один раз.

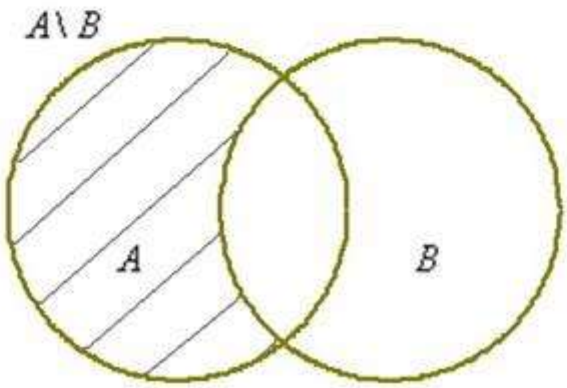
Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами: $\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для большего количества множеств, например, если $A = \{1, 2\}, B = \{0, 7\}, C = \{-10, -3\}$, то:

$A \cup B \cup C = \{-10, -3, 0, 1, 2, 7\}$, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания. Результат можно записать и так: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 0, 7, -10, -3\}$

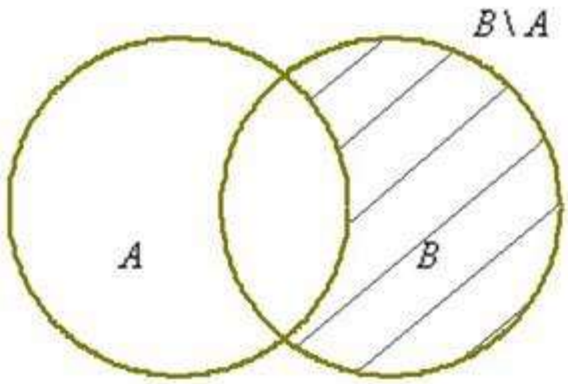
3) **Разностью** множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **и** не принадлежит множеству B:



4) Разность $A \setminus B$ читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$. Чтобы записать разность $A \setminus B$, нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B: $A \setminus B = \{b, c\}$

Пример с числовыми множествами: $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: **разностью** множеств B и A называют множество $B \setminus A$, каждый элемент которого принадлежит множеству B **и** не принадлежит множеству A:



Для тех же множеств $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$ $B \setminus A = \{1, 5\}$ – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A.

А вот эта разность оказывается пуста: $\mathbf{N} \setminus \mathbf{Z} = \varnothing$. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется.

Кроме того, иногда рассматривают *симметрическую* разность $A \Delta B$, которая объединяет оба «полумесяца»: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».

5) **Декартовым (прямым) произведением** множеств A и B называется множество $A \times B$ **всех** упорядоченных пар (a, b), в которых элемент $a \in A$, а элемент $b \in B$

Запишем декартово произведение множеств $A = \{d, 5, f\}, B = \{-1, d\}$: $A \times B = \{(d, -1), (d, d), (5, -1), (5, d), (f, -1), (f, d)\}$ – перечисление пар удобно осуществлять по следующему алгоритму: «сначала к 1-му элементу множества A последовательно присоединяем каждый элемент множества B, затем ко 2-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B, затем к 3-му элементу множества A присоединяем каждый элемент множества B»:

$$A \times B = \{(\underline{d}, \boxed{-1}), (\underline{d}, \boxed{d}), (\underline{5}, -1), (\underline{5}, d), (\underline{f}, -1), (\underline{f}, d)\}$$

Зеркально: **декартовым произведением** множеств B и A называется множество $B \times A$ всех упорядоченных пар (b, a), в которых $b \in B, a \in A$. В нашем примере: $B \times A = \{(-1, d), (-1, 5), (-1, f), (d, d), (d, 5), (d, f)\}$ – здесь схема записи аналогична: сначала к «минус единице» последовательно присоединяем все элементы множества A, затем к «дэ» –

те же самые элементы:

$$B \times A = \{(\underline{-1}, d), (\underline{-1}, 5), (\underline{-1}, f), (\underline{d}, d), (\underline{d}, 5), (\underline{d}, f)\}$$

Но это чисто для удобства – и в том, и в другом случае пары можно перечислить в каком угодно порядке – здесь важно записать **все** возможные пары.

А теперь гвоздь программы: декартово произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ – это есть не что иное, как множество точек (x, y) нашей родной декартовой системы координат XOY.

Задание для самостоятельного закрепления материала:

Выполнить операции $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $B \times A$, если:

1) $A = \{a, 1, 2\}$, $B = \{a, b, 1\}$;

2) $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Множество $A = \{2n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ удобно расписать перечислением его элементов.

И пунктик с промежутками действительных чисел:

3) $A = (-\infty; 3)$, $B = [-1; +\infty)$

Напоминаю, что квадратная скобка означает *включение* числа в промежуток, а круглая – его *невключение*, то есть «минус единица» принадлежит множеству B, а «тройка» **не**принадлежит множеству A. Постарайтесь разобраться, что представляет собой декартово произведение данных множеств. Если возникнут затруднения, выполните чертёж.

§3. Решение задач

1) $A = \{a, 1, 2\}$, $B = \{a, b, 1\}$

$A \cap B = \{a, 1\}$

$A \cup B = \{a, b, 1, 2\}$

$A \setminus B = \{2\}$

$B \setminus A = \{b\}$

$A \times B = \{(a, a), (a, b), (a, 1), (1, a), (1, b), (1, 1), (2, a), (2, b), (2, 1)\}$

$B \times A = \{(a, a), (a, 1), (a, 2), (b, a), (b, 1), (b, 2), (1, a), (1, 1), (1, 2)\}$

2) $A=\{2n-1 \mid n\in \mathbf{N}\}$, $B=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

A – *это множество нечётных натуральных чисел:* $A=\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$

$A\cap B=\{1, 3\}$

$A\cup B=\{-1, 0, 1, 2, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$

$A\setminus B=\{5, 7, 9, \ldots, 2n-1, \ldots\}$

$B\setminus A=\{-1, 0, 2\}$

$$A\times B=\left\{\begin{array}{l}(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)\\(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\\(5,-1),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3)\\\ldots\\(2n-1,-1),(2n-1,0),(2n-1,1),(2n-1,2),(2n-1,3)\\\ldots\end{array}\right\}$$

$$B\times A=\left\{\begin{array}{l}(-1,1), (-1,3), (-1,5), \ldots, (-1, 2n-1), \ldots\\(0,1), (0,3), (0,5), \ldots, (0, 2n-1), \ldots\\(1,1), (1,3), (1,5), \ldots, (1, 2n-1), \ldots\\(2,1), (2,3), (2,5), \ldots, (2, 2n-1), \ldots\\(3,1), (3,3), (3,5), \ldots, (3, 2n-1), \ldots\end{array}\right\}$$

III Часть. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ

Значение логики для юристов. Специфика работы юриста (будь то прокурор, судья, следователь, адвокат, юридический консультант, ученый-правовед и т.д.) заключается в постоянном применении особых логических приёмов и методов: определений и классификаций, аргументации и опровержений, и др. Степень владения этими приёмами, методами и иными логическими средствами является показателем уровня логической культуры юриста.

Как формируется логическая культура юриста?

Иногда высказывается мнение, что умение логично рассуждать присуще людям от природы. Это мнение ошибочно. Его опровергают многие исследования и научные факты. Логику можно развивать и совершенствовать тренингами.

В практической деятельности юристу часто приходится иметь дело с самыми разнообразными ситуациями. Умение анализировать сложившуюся обстановку, адекватно ее оценивать и делать правильные выводы является важным качеством каждого профессионала. Во многих случаях практика приводит к так называемым *логическим и комбинаторным задачам.*

Если логическая культура не даётся человеку от природы, то как же она формируется?

Логической культурой мышления овладевают в ходе общения, учёбы в школе и вузе, в процессе чтения литературы. Встречаясь неоднократно с теми или иными способами рассуждения, мы постепенно начинаем усваивать, какие из них правильные, а какие — нет. Затем начинаем сами рассуждать в соответствии с правильными способами рассуждения. Наша культура мышления повышается.

Логическая культура юриста повышается в процессе его профессиональной деятельности. Например, прокурор обнаруживает нелогичность рассуждений следователя и объясняет ему, какая ошибка допущена. Весьма вероятно, что в дальнейшем следователь эту ошибку не будет совершать.

§1. Элементы логики

На нашем занятии мы рассмотрим 5 логических операций: конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация и эквивалентность, которых Вам будет достаточно для решения сложных логических выражений. Также мы рассмотрим порядок выполнения данных логических операций в сложных логических выражениях и представим таблицы истинности для каждой логической операции.

Высказывание – это повествовательное предложение, про которое можно определенно сказать истинно оно или ложно (истина (логическая 1), ложь (логический 0)).

Логические операции – мыслительные действия, результатом которых является изменение содержания или объема понятий, а также образование новых понятий.

Логическое выражение – устное утверждение или запись, в которое, наряду с постоянными величинами, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных величин (объектов) логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: истина (логическая 1) или ложь (логический 0).

Сложное логическое выражение – логическое выражение, состоящее из одного или нескольких простых логических выражений (или сложных логических выражений), соединенных с помощью логических операций.

§2. Математическая (символическая) логика высказываний

1) Логическое умножение или конъюнкция:

Конъюнкция – это сложное логическое выражение, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба простых выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное сложеное выражение ложно. Обозначение: F = A & B.

Таблица истинности для конъюнкции

A	**B**	**F**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2) Логическое сложение или дизъюнкция:

Дизъюнкция – это сложное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из простых логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба простых логических выраженния ложны. Обозначение: F = A + B.

Таблица истинности для дизъюнкции

A	**B**	**F**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3) Логическое отрицание или инверсия:

Инверсия – это сложное логическое выражение, если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Другими простыми слова, данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ или слова НЕВЕРНО, ЧТО.

Таблица истинности для инверсии

A	неA
1	0
0	1

4) Логическое следование или импликация:

Импликация – это сложное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. Тоесть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) является следствием.

Таблица истинности для импликации

A	**B**	**F**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) Логическая равнозначность или эквивалентность:

Эквивалентность – это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.

Таблица истинности для эквивалентности

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Инверсия;
2. Конъюнкция;
3. Дизъюнкция;
4. Импликация;
5. Эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

§3. Операции над высказываниями

Логика высказываний, называемая также пропозициональной логикой - раздел математики и логики, изучающий логические формы сложных высказываний, построенных из простых или элементарных высказываний с помощью логических операций.

Высказываниями принято считать такие *предложения* (написанные на "словесном" либо математическом языке), о которых можно сказать одно из двух: *либо они являются истинными, либо ложными*.

Логика высказываний отвлекается от содержательной нагрузки высказываний и изучает их истинностное значение, то есть является ли высказывание истинным или ложным.

Рисунок сверху – иллюстрация явления, известного как «Парадокс лжеца». При этом, на взгляд автора проекта, такие парадоксы возможны только в средах, несвободных от политических заморочек, где на ком-то могут априори поставить клеймо лжеца. В естественном многослойном мире на *предмет «истины» или «лжи» оцениваются только отдельно взятые высказывания*. И далее на этом уроке вам представится *возможность самим оценить на этот предмет немало высказываний* (а затем посмотреть правильные ответы). В том числе сложных высказываний, в которых более простые связаны между собой знаками логических операций. Теперь рассмотрим и попробуем решить задачи.

Задача 1. Среди приведенных ниже предложений указать те, которые являются высказываниями, и те, которые не являются:

1) Ташкент – столица Узбекистана;

2) студент Ташкентского государственного университета;

3) Луна – спутник Земли;

4) $x < 0$;

5) число 5 – иррациональное.

Решение. 1) Является высказыванием; 2) не является высказыванием; 3) является высказыванием; 4) не является высказыванием; 5) является высказыванием.

Задача 2. Среди следующих высказываний указать элементарные и составные, в составных высказываниях выделить грамматические связки:

1) число 9 не делится на 3;

2) число 21 делится на 3 и на 7;

3) число 3 является делителем числа 27;

4) если число 15 делится на 5, то оно делится на 3;

5) число 18 делится на 9 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3.

Решение. 1) Элементарное высказывание – «число 9 делится на 3», составное – «число 9 не делится на 3», грамматическая связка – «не». 5

2) Элементарные высказывания – «число 21 делится на 3» и «число 21 делится на 7», составное – «число 21 делится на 3 и на 7», грамматическая связка – «и».

3) Элементарное высказывание.

4) Элементарные высказывания – «число 15 делится на 5» и «число 15 делится на 3», составное – «если число 15 делится на 5, то оно делится на 3», грамматическая связка – «если ..., то ...».

5) Элементарные высказывания – «число 18 делится на 9» и «число 9 делится на 3», составное – «число 18 делится на 9 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3», грамматическая связка – «тогда и только тогда».

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны: 1) река Исеть впадает в Каспийское море; 2) пейте апельсиновый сок; 3) все люди – братья; 4) математическая логика – увлекательная наука; 5) $5 < 4$; 6) $5\ 9\ 2\ x - x +$; 7) $5\ 9\ 0\ 2\ x - x + =$; 8) для всех натуральных чисел x и y верно равенство $x + y = y + x$.

2. Являются ли высказываниями следующие утверждения, установить, истинны они или ложны: 1) сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену; 2) сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену; 3) существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену.

3. Пусть x – высказывание «Студент Ташбаев изучает информатику», y – высказывание «Студент Ташбаев успевает по математической логике». Дать словесную формулировку следующих высказываний: 1) $x \,\&\, y$, 2) $y \leftrightarrow x$, 3) $x \to y$.

Задачи

1. В забеге участвовало 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение первых трех мест, если известно, что эти спортсмены всегда показывают разные результаты?

2. Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Преступник пытается открыть сейф и набирает шифр наудачу. Найдите наибольшее возможное число безуспешных попыток.

3. Некто написал 6 новогодних поздравлений своим друзьям, затем взял 6 разных конвертов и разложил открытки по конвертам наудачу. Каково число всех возможных комбинаций?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Метод математической индукции

Метод математической индукции является одним из наиболее универсальных методов проведения математических доказательств. Суть его заключается в следующем. Допустим, мы хотим доказать, что некоторое утверждение справедливо при любых значениях натурального числа *n,* содержащегося в формулировке этого утверждения. Например, что для любого натурального *n* справедливо следующее равенство:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Легко проверить, что эта формула дает правильный результат при n = 1, 2, 3, 4. Но невозможно ее проверить для *всех* значений *n,* т.к. множество натуральных чисел бесконечно! Как же доказать, что утверждение верно для любых *n,* не проверяя этого непосредственно? Оказывается, что достаточно:

а) проверить данное утверждение при $n = 1$;

б) предположив, что оно верно при $n = k$, доказать, что оно верно при $n = k + 1$. В этом и заключается метод математической индукции.

В рассматриваемом примере формула (1) при $n = 1$ дает $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, т.е. что сумма из одного слагаемого 1 равна единице. Таким образом, при $n = 1$ формула верна. Теперь предположим, что она верна при $n = k$, тогда справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Докажем, что формула (1) верна при $n = k + 1$, т.е.

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно, используя допущение, получаем

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще один пример. Докажем, что при любом натуральном показателе степени n число $8^n - 1$ делится на 7.

Доказательство. Проверим условия а) и б). Подставим в выражение $8^n - 1$ вместо n число 1. Тогда значение этого выражения будет равно $8 - 1 = 7$. Это число делится на 7, т.е. условие а) проверено. Теперь допустим, что $8^k - 1$ делится на 7. Покажем, что в таком случае $8^{k+1} - 1$ также делится на 7. Преобразуем последнее выражение так:

$$8^{k+1} - 1 = 8^{k+1} - 8^k + 8^k - 1 = 8^k(8-1) + (8^k - 1) =$$
$$= 8^k \cdot 7 + (8^k - 1).$$

В результате преобразований мы получили сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 7. Действительно, первое слагаемое имеет множитель 7, а второе делится на 7 по предположению индукции. Следовательно, сумма также делится на 7 и условие б) также проверено. Утверждение доказано.

Теперь докажем общее правило умножения (см. §2).

Теорема 1. *Пусть требуется последовательно выполнить n действий, причем первое действие может быть выполнено* m_1 *способами, второе —* m_2

способами и т.д. , наконец, n-е действие — m_n способами. Обозначим через S_n число всех способов, которыми можно выполнить n действий. Тогда

$$S_n = m_1 \bullet m_2 \bullet \ldots \bullet m_n. \qquad (2)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n = 1$ мы получаем одно действие, которое можно выполнить m_1 способами. Произведение (2) состоит в этом случае также из одного сомножителя m_1. Следовательно, формула (2) при $n = 1$ верна.

Допустим, что формула (2) верна для $n = k$ действий:

$$S_k = m_1 \bullet m_2 \bullet \ldots \bullet m_k. \qquad (3)$$

Докажем, что она верна для $n = k + 1$ действий. Обозначим произвольный вариант выполнения k действий набором из k чисел. Например, набор (3, 1, 6, ..., 5) означает вариант, в котором первое действие выполнено третьим способом, второе действие — первым способом и так далее, наконец, k-е действие выполнено пятым способом. В случае, если выполняются $k + 1$ действий, каждый вариант записывается как набор из $k + 1$ чисел. Но всякий набор из $k + 1$ чисел получается добавлением одного числа к какому-либо набору из k чисел. Например, из одного набора (3, 1, 6, ... , 5) можно получить такие:

(3, 1, 6, ..., 5, 1), (3, 1, 6, ..., 5, 2), ... , (3, 1, 6, ... 5, m_{k+1}),

т.е. всего m_{k+1} вариантов. Поэтому число всех способов выполнения $k + 1$ действий будет

$$S_{k+1} = S_k \bullet m_{k+1} = m_1 \bullet m_2 \bullet \ldots \bullet m_k \bullet m_{k+1}.$$

Таким образом, условие б) индукции тоже выполняется. Теорема доказана.

Задания

1. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наудачу. Каково наибольшее возможное число безуспешных попыток абонента?

2. Семеро терпеливых стоят в очереди в кассу. Сколькими способами можно составить очередь?

3. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают 3 карты. Каково число всех возможных комбинаций? Сколько троек содержат по крайней мере один туз? Сколько троек содержат только один туз? Сколько раз попадется комбинация дама – семерка – туз?

Размещения, перестановки, сочетания

При решении комбинаторных задач мы имеем дело с комбинациями из некоторых предметов. Эти комбинации могут отличаться одна от другой числом предметов, их составом или порядком.

Пример 1. *Пять бойцов сержанта Сбруева*

В отделении сержанта Сбруева проходят службу 5 новобранцев: Белкин, Пенкин, Фенькин, Свечкин и Овечкин. В свободное от нарядов время сержант обучает их, как рассчитаться по порядку. По команде «В одну шеренгу становись!» солдаты выстраиваются справа от Сбруева и по команде «По порядку номеров рассчитайсь!» производят расчет: «первый-второй-третий-четвертый-пятый». После этого сержант перестраивает новобранцев по-новому и расчет повторяется. Сколько раз может Сбруев повторить это упражнение, используя только разные способы построения солдат?

Решение. Договоримся указывать порядок расположения солдат первыми буквами их фамилий. Например, комбинация ПСОФБ означает, что первым является Пенкин, вторым — Свечкин и т.д. Все комбинации отличаются одна от другой порядком букв и называются *перестановками* из пяти букв. Нам нужно найти число всех таких перестановок. Сначала мы выведем общую формулу, а потом закончим обсуждение примера.

Пусть дано множество из n элементнов. Занумеруем все элементы каким-нибудь способом от 1 до n (в случае с новобранцами $n = 5$). Ясно, что занумеровать можно многими способами.

Определение. *Перестановкой* из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов.

Теорема 2. *Число всех различных перестановок из n элементов равно* n!

Доказательство. Всякую перестановку из n элементов можно получить с помощью n действий: первое действие — выбор первого элемента, второе действие — выбор второго элемента, и т.д., наконец, n-е действие — выбор элемента с номером n.

Первый элемент можно выбрать n различными способами; второй выбирается из оставшихся $n - 1$ элементов, поэтому число всех способов выполнения второго действия будет $n - 1$. После выбора второго элемента их останется $n - 2$, следовательно, число способов, которыми можно выполнить третье действие, будет $n - 2$. Таким образом, число способов, которыми выполняется очередное действие, будет на единицу меньше предыдущего. Следовательно, четвертое действие можно выполнить $(n - 2)$ способами, пятое — $(n - 4)$ способами и т.д., наконец, последнее действие — одним способом.

По правилу умножения (теорема 1) число всех способов выполнения действий, т.е. число всех перестановок, равно $n(n - 1)(n - 2) \cdot ... \cdot 1 = n!$. Теорема доказана.

Число всех перестановок из n элементов обозначают P_n. Согласно теореме 1 его можно найти по формуле

$$Pn = n!. \qquad (4)$$

Например, в случае с новобранцами ($n = 5$) мы получим $P_5 = 5! = 120$.

ЗАДАНИЯ

1. Выпишите все перестановки из букв *a, b, c*.

2. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 7, 2, 4, 9, если каждая цифра используется в записи числа только один раз?

3. Проверьте равенство $P_6 = 6P_5$.

4. Что больше: P_7 или 2^7?

5. С помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 закодируйте буквы А, В, Д, Е, Л, О, С, Т, Ь, заменив каждую букву какой-нибудь цифрой, и зашифруйте слово СЛЕДОВАТЕЛЬ. Каково число возможных вариантов кода?

Пример 2. *Однажды утром*

Однажды утром по улицам города Инфоландия на высокой скорости пронеслась машина. Она сбила зазевавшегося поросенка и скрылась в неизвестном направлении. Возвращавшийся из ресторана житель *N*, заметил номер автомобиля. Но когда появилась милиция, он с перепугу вспомнил только, что номер четырехзначный, все цифры разные, причем первая цифра 1, а последняя 4. Сколько автомобилей должна проверить автоинспекция?

Решение. Второй и третьей цифрами номера могут быть любые две из следующих: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Выбрав любую пару цифр, автоинспектор получит номер какого-либо автомобиля. Например, пара 5, 7 дает номер 1574. Эти же цифры но в другом порядке дают номер 1754. Следовательно, нужно перебрать столько номеров сколько будет всевозможных комбинаций из восьми перечисленных цифр по две с учетом их порядка. Такие комбинации называют *размещениями.* В данном случае мы ищем число размещений из восьми цифр по две.

Определение. *Размещением* из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k.

Теорема 3. *Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k\ \text{сомножителей}}\ . \qquad (5)$$

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 2. Каждое размещение можно получить с помощью k действий. Первое действие — выбор первого элемента — осуществляется n способами, второе действие — выбор второго элемента — $(n-1)$ способами, и т.д., наконец, последнее действие — выбор

k-того элемента — $(n - k + 1)$ способами. По правилу умножения число всех размещений будет $n(n - 1) \cdot\cdot\cdot (n - k + 1)$, что и требовалось доказать.

Вернемся к примеру 2. Согласно формуле (5) автоинспекция должна проверить $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ автомобилей.

ЗАДАЧИ

1. На трех карточках написаны буквы *Р, А, К.* Сколько различных слов можно составить, если словом считается любой набор из двух букв? Запишите эти слова.

2. В домоуправлении трудится 6 человек. Поступило распоряжение о премировании трех сотрудников (различными суммами). Сколькими способами можно это сделать?

3. На железнодорожной ветке Инфоландия—Лапландия имеется 10 станций. В течение дня с каждой станции на каждую другую выехало в точности по одному пассажиру. Сколько билетов было куплено в этот день?

4. Сколькими способами можно выбрать из семи разных книг какие-либо четыре и подарить их четырем милиционерам, занявшим первые четыре призовых места на конкурсе «Настоящий мужчина города Брюкова»?

5. Студенты одной группы должны сдать 5 экзаменов в течение восемнадцати дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?

6. В течение дня из Брюкова в Лапландия отправляется 8 автобусов. Разведенные супруги гражданин N и гражданка M не хотят ехать в одном автобусе. Сколькими способами они могут отправиться в разных автобусах?

Пример 3. *День Брюквы*

Согласно древнему обычаю, самый главный праздник в Брюкове — День Брюквы, проводится за счет средств городского бюджета и празднуется столько дней, сколько депутатов проголосует за то, чтобы праздник состоялся. Из десяти депутатов «за» проголосовали семь.

Каково число всех возможных вариантов голосования?

Решение. Мы должны найти число всех возможных групп из семи депутатов. Здесь порядок выбора не играет никакой роли, поэтому рассматриваемые комбинации отличаются одна от другой только составом лиц. Комбинации такого типа называются *сочетаниями.*

Определение. *Сочетанием* из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k. В примере 3 нужно найти C_{10}^7.

Теорема 4. *Число всех сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}. \qquad (6)$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь сочетание из n элементов по k

$$\underbrace{(a, b, c, \ldots, f)}_{k \text{ букв}}.$$

Переставляя эти элементы всевозможными способами, получим k! всех размещений из n по k одного и того же состава. Таким образом, из одного сочетания получается k! размещений. Следовательно, из C_n^k сочетаний получится $C_n^k \bullet k!$ размещений, т.е.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!.$$

Отсюда, с учетом формулы (5) получаем:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k},$$

что и требовалось доказать.

В примере 3 было $n = 10$, $k = 7$, поэтому число всех вариантов голосования присяжных равно $C_{10}^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 120.$

ЗАДАНИЯ

1. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выбрать 6 делегатов для переговоров с администрацией института по вопросу о свободной продаже пива в студенческом буфете?

2. Сколькими способами можно поставить три пешки на белые клетки шахматной доски?

3. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 5 спортсменов из двенадцати. Сколькими способами он может составить команду?

4. На окружности выбрано 7 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?

5. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 4. Каково число всех возможных вариантов?

Числа сочетаний C_n^k обладают многими важными свойствами. Некоторые из них понадобятся нам в дальнейшем. Например,

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (7)$$

Доказательство. Если из *n* элементов выбрать *k* элементов, то останется *n* – *k* элементов. Следовательно, каждому сочетанию из *n* элементов по *k* соответствует определенное сочетание из *n* элементов по *n* – *k*. Поэтому число тех и других сочетаний одинаково. Доказательство закончено.

Формула (7) сокращает вычисления, например:

$$C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Заметим, что формулы (4)-(6) допускают более широкое толкование. По определению полагают 0! = 1, $A_n^0 = 1$, $C_n^0 = 1$.

Числа C_n^k также называют *биномиальными коэффициентами, с* их помощью записывается так называемая *формула бинома Ньютона:*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 +$$
$$+ \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Эту формулу можно доказать, например, методом математической индукции. Попробуйте сделать это самостоятельно.

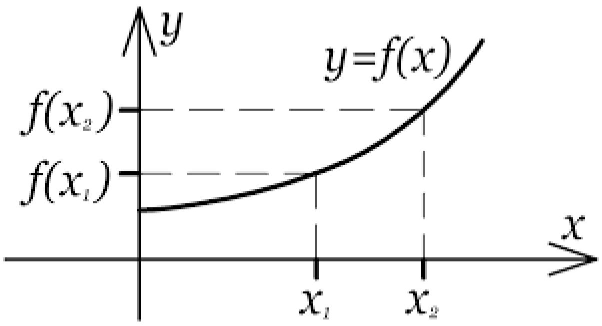
ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех различных способов заполнения анкеты.

2. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а вторая 14. Сколькими способами можно обменять 5 военнопленных?

3. В партии из ста деталей имеется 10 бракованных. Наудачу выбирают 4 детали. Сколькими способами можно это сделать? Сколько будет четверок, не содержащих бракованных деталей? Найдите отношение числа последних к числу первых.

IV Часть. ФУНКЦИИ

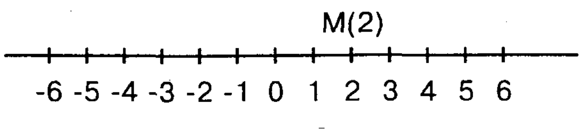


§1. Декартово произведение множеств

Метод координат представляет собой один из наиболее универсальных математических методов и используется для решения самых разнообразных задач. В основе метода лежит понятие *системы координат* на прямой, плоскости и в пространстве.

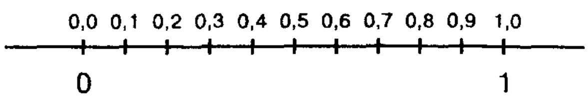
Система координат на прямой возникла в результате осознания математиками того факта, что точек на прямой, образно говоря, столько же, сколько действительных чисел. Точнее, каждую точку на прямой можно соотнести с некоторым действительным числом (единственным!), которое называется *координатой* этой точки.

Проще всего это сделать с помощью так называемой равномерной шкалы (вспомните термометр!):



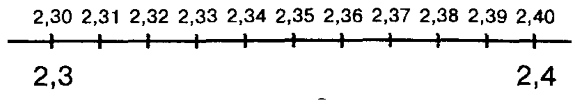
Прямую с отмеченным на ней положительным направлением называют *осью.* Точка О называется *началом координат.* Около каждой точки записывается ее координата.

Разделим, например, отрезок [0,1] на десять равных частей:



Каждой точке деления определим координату как показано на рисунке. Точно так же делим на десять частей любой другой отрезок, концы которого отмечены целыми числами. В результате на шкале появятся точки, отмеченные координатой с одним десятичным знаком после запятой.

Далее каждый новый отрезок делим опять на десять частей, например:



В результате появятся точки, отмеченные координатами с двумя десятичными знаками после запятой. Продолжая эту процедуру, мы получим точки, координатами которых будут дроби с тремя, четырьмя ... десятичными знаками после запятой. При этом, какую бы десятичную дробь мы ни взяли, после некоторого числа шагов мы получим точку, координатой которой является эта десятичная дробь.

Помимо этих точек, на прямой есть также точки, координаты которых являются бесконечными десятичными дробями.

Как описать положение этих точек на прямой? Рассмотрим, например, точку A с координатой $\frac{7}{3}$ = 2,333.... 3

Бесконечная периодическая дробь $\frac{7}{3}$ удовлетворяет бесконечной последовательности неравенств:

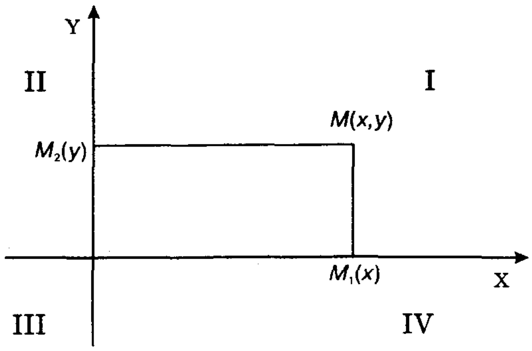
$$2{,}3 < \frac{7}{3} < 2{,}3,\ 2{,}33 < \frac{7}{3} < 2{,}34,\ 2{,}333 < \frac{7}{3} < 2{,}334,...$$

Поэтому точка A (7/3) находится между точками M_1(2,3) и N_1(2,4); между M_2(2,33) и N_2(2,34); между M_3(2,333) и N_3(2,334) и т.д. Расстояние между правой и левой точками все время уменьшается и стремится к нулю, поэтому существует *единственная* точка, удовлетворяющая всем написанным выше неравенствам. Это и есть точка A (7/3).

Расстояние $|MN|$ между точками $M(x)$ и $N(y)$ прямой вычисляется через их координаты x и y по формуле:

$$|MN| = |y - x|. \qquad (1)$$

Самая простая и наиболее распространенная система координат на плоскости называется *декартовой* по имени известного математика и философа Рене Декарта. Декартова система координат образована двумя перпендикулярными осями, осью X и осью Y.



Точка пересечения осей называется *началом* и служит одновременно началом координат на каждой из осей. Масштаб на осях выбирается одинаковый. Система координат нужна для того, чтобы каждой точке плоскости соответствовали две координаты — два действительных числа x и y. Делается это так. Спроектируем точку M на координатные оси, т.е. опустим из нее перпендикуляры на них. Обозначим основания перпендикуляров M_1 и M_2. Тогда x есть координата точки M_1 на оси X, а y есть координата точки M_2 на оси Y. Очевидно, что

если точка M лежит в I квадранте, то $x \geq 0$, $y \geq 0$;

если точка M лежит во II квадранте, то $x \leq 0$, $y \geq 0$;

если точка M лежит в III квадранте, то $x \leq 0$, $y \leq 0$;

если точка M лежит в IV квадранте, то $x \geq 0$, $y \leq 0$;

если точка M лежит на оси X, то $y = 0$;

если точка M лежит на оси Y, то $x = 0$;

начало O имеет координаты (0,0).

ЗАДАНИЯ

1. Если точка M лежит в верхней полуплоскости, т.е. выше оси X, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ;

если точка M лежит в нижней полуплоскости, т.е. ниже оси X, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ;

если точка M лежит в правой полуплоскости, т.е. справа от оси Y, то ее координаты удовлетворяют неравенству ... ;

если точка M лежит в левой полуплоскости, т.е. слева от оси Y, то ее координаты удовлетворяют неравенству ....

2. Постройте точки с координатами (1,1), (-1,1), (1,-1),(-1,-1).

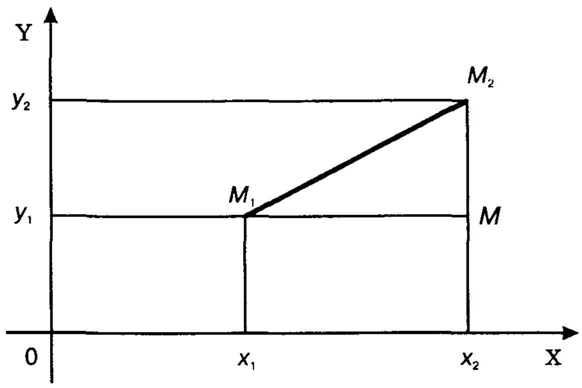
3. Опишите часть плоскости, в которой находятся точки с координатами

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ y > 1; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ y > 1; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ y > 3; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ y < 3; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ y < 3; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ y > 3. \end{cases}$$

В школе Вы доказывали, что расстояние между двумя точками плоскости $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ вычисляется по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (2)$$

Доказательство основано на применении теоремы Пифагора к треугольнику M_1M_2M (см. рис. 10).



ЗАДАЧИ

4. Найдите расстояние между точками $M_1(1,2)$ и $M_2(3,4)$; $M_1(1,-2)$ и $M_2(-3,4)$; $M_1(1,3)$ и $M_2(1,-7)$; $M_1(3,5)$ и $M_2(-1,5)$.

Отметьте эти точки на чертеже.

5. Укажите все точки с целыми координатами, находящиеся внутри круга радиуса 2 с центром в начале координат, и отметьте их на чертеже.

Найдите расстояния от этих точек до начала координат и округлите результаты до 0,01.

§2. Понятие функциональных отношений

Пусть даны множества X и Y. Бинарное отношение x R y является функциональным (функцией), если каждому элементу $x \in X$ соответствует не более одного элемента $y \in Y$. . Из этого определения следует, что одно-многозначные и много-многозначные отношения функциональными быть не могут.

Для обозначения функции используются различные записи:

$f{:}X \to Y$; $f(x)$; $(x, y) \in F$, $y = F(x)$, где $F \subset X \times Y$.

Значение функции $y \in Y$ называют образом элемента $x \in X$, а сам элемент $x \in X$ — прообразом. Множество X — это область определения функции, Y — область значений.

Функция $y = F(x)$ называется всюду определенной, если каждому элементу $x \in X$ соответствует один элемент $y \in Y$. В этом случае функцию называют также отображением (или инъекцией) множества X в множество Y. Функция является недоопределенной (частично определенной), если имеется хотя бы один элемент $x \in X$, которому не соответствует никакой элемент $y \in Y$. Отсюда следует, что недоопределенные функции отображениями не являются.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть даны два множества:

X = {а, б, в, г, д, е}; Y = {1, 2, 3, 4}.

ыделим в множестве X×Y подмножество вида:

F = {(а, 1), (б, 3), (в, 4), (г, 2), (д, 2), (е, 3)}.

Первый элемент каждой пары множества F — это элемент множества X, второй — элемент множества Y. Все первые элементы различны, следовательно, каждому значению $x \in X$ соответствует точно один элемент $y \in Y$. Это значит, что множество F представляет собой функциональное отношение и, следовательно, является отображением множества X в множество Y.

Пример 2. Выделим в декартовом произведении множеств множество вида:

M = {(а, 1), (а, 2), (б, 3), (в, 4), (г, 3), (д, 2), (е, 4)}.

В это множество входят пары (а, 1) и (а, 2), у которых первые элементы одинаковы. Что это значит? Очевидно, то, что элементу $a \in X$ соответствуют два элемента множества Y: $1 \in Y$ и $2 \in Y$. Но по определению функционального отношения каждому элементу множества X может соответствовать не более одного элемента множества Y. Следовательно, отношение, представленное множеством M, не является функцией.

§3. Линейные функции

Переменная величина и *функция* — важнейшие понятия современной математики и физики. Примеры переменных величин и функций поставляет нам природа. Протекающие в ней процессы и закономерности ученые облекают в форму законов физики, математики, химии и т.д. Важнейшая переменная величина — *время* — входит практически во все физические законы, связанные с движением. Например, известный закон прямолинейного и равномерного движения

$$s = v_0 t$$

содержит две переменные величины: пройденное расстояние s (путь) и время t. Форма записи этого закона подчеркивает тот факт, что пройденный путь зависит от времени, а не наоборот. Математики в этом случае говорят, *что переменная величина s является линейной функцией переменной величины, t,* т.е. s — *зависимая переменная,* а t — *независимая переменная.*

Скорость $v = v_0$ при равномерном движении постоянна, т.е. одна и та же в каждый момент времени. Но, выражаясь таким образом, мы, очевидно, считаем, что скорость является функцией времени. Это пример так называемой *постоянной функции.*

Равномерное движение представляет собой математическую абстракцию, т.к. на самом деле в природе таких движений не бывает. Например, на участке Ташкент—Бухара поезд несколько раз изменяет скорость движения, останавливается. Тем не менее, может показаться, что в середине достаточно длинных перегонов скорость постоянна. Однако, так можно считать лишь приближенно. Если бы мы измеряли скорость более точным прибором, то обнаружили бы, что в разные моменты времени она различна. Это различие очень мало, но оно есть.

Когда же электричка, трогаясь с места, только набирает скорость, то последняя (опять же приближенно!) меняется с течением времени так:

$$v = at,$$

где a — некоторая постоянная функция, называемая *ускорением.* Из школьного курса физики нам известно, что линейная зависимость скорости от времени характеризует так называемое *равноускоренное движение,* при котором пройденный путь вычисляется по формуле:

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Предположение, что a — постоянная, тоже математическая абстракция. С помощью точных приборов можно установить, что на самом деле при разгоне электрички скорость меняется по более сложному закону, например,

$$v = at + bt^2,$$

где b — некоторое сравнительно маленькое число. Второе слагаемое, в силу его малости, обычно отбрасывают, и тогда получаются известные формулы равноускоренного движения. Если же его не отбрасывать, то движение нельзя считать равноускоренным, и тогда формула для вычисления пути будет более сложной.

Рассмотрим еще один физический закон — Второй Закон Ньютона, который запишем так:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Будем считать переменными величинами силу F и ускорение a. Тогда равенство (4) отражает следующий физический эксперимент: на тело с массой m действует сила F, которую можно менять; в результате действия этой силы тело получает ускорение a, которое, следовательно, также является переменной величиной — функцией силы F.

С математической точки зрения оба физических закона — это некоторые *линейные функции.* По сравнению с другими функциями, линейные функции устроены наиболее просто, но они являются и наиболее важными.

Общепринятая форма записи произвольной линейной функции такова:

$$y = kx + b,\ k \neq 0,$$

где k и b — некоторые постоянные, $k \neq 0$, а x и y — переменные, причем y зависит от x (или является функцией переменного x).

Всегда важно указать, какие значения может принимать независимая переменная x. Собственно говоря, символом x обозначается произвольный элемент некоторого числового множества, которое называется *областью определения функции.* Например, в законе равномерного прямолинейного движения (3) можно было считать, что $0 \leq t \leq 2$ ч 40 мин. Если же множество не указано, то считается («по умолчанию»), что t может быть любым действительным числом.

С помощью системы координат мы можем каждую функцию изобразить наглядно, в виде *графика.* Построим, например, график линейной функции

$$y = 2x - 3.$$

(Здесь $k = 2$, $b = -3$.) Подставляя вместо x различные числовые значения, найдем соответствующие значения y и составим таблицу:

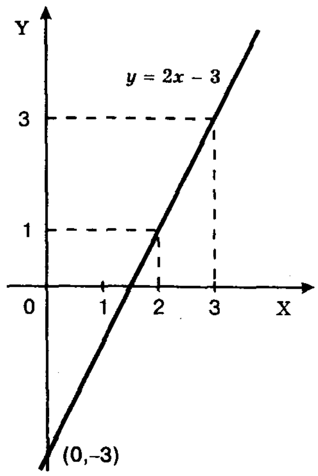
x	0	1	−1	2	3	0,1	−0,1	1,5	…
y	−3	−1	−5	1	3	−2,8	−3,2	0	…

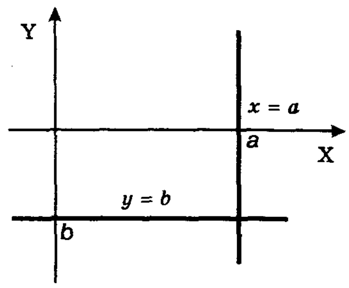
Будем считать, что каждая пара чисел x и y, удовлетворяющих уравнению, служит координатами некоторой точки на плоскости. Множество всех таких точек и будет графиком функции. Некоторые из этих точек мы уже нашли, их координаты записаны в столбцах таблицы. Если построить на плоскости точки с координатами (0,–3), (1,–1), (–1,–5), (2,1) и т.д., то все они окажутся на одной прямой, которая и будет графиком функции.

Соотношение называется *уравнением* построенной прямой, а число $k = 2$ — ее угловым коэффициентом, т.к. $k = \mathrm{tg}\ \alpha$, где α — угол между осью X и прямой.

Если в уравнении положить $k = 0$, то оно примет вид

$$y = b.$$





Это *постоянная функция*: величина y имеет одно и то же значение при любом x, т.е. не зависит от переменной x. Графиком постоянной функции $y = b$ будет прямая, параллельная оси X.

Уравнение

$$x = a$$

также задает постоянную функцию, но здесь мы уже считаем, что переменная x не зависит от переменной y. График этой функции представляет собой прямую, параллельную оси Y.

Если переменная y зависит от переменной x, то и наоборот: переменная x зависит от переменной y. Например, если из уравнения выразить x через y, то получим

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}.$$

Эта функция называется *обратной* по отношению к функции $y = 2x - 3$. Для любой линейной функции всегда существует ей обратная функция, т.к. из уравнения всегда можно выразить x через y:

$$x = \frac{1}{k}\ y - \frac{b}{k}\ .$$

Заметьте, что эта функция также является линейной.

А вот для постоянной функции обратной не существует. Почему?

Итак, графики линейной и постоянной функций представляют собой наклонные, вертикальные и горизонтальные прямые. Их уравнения можно записать в единообразной форме:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B и С — некоторые постоянные, причем A и B не могут быть нулями одновременно. Левая часть уравнения представляет собой *многочлен первой степени относительно переменных x и y.*

Если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то из уравнения можно выразить x или y и мы получим либо уравнение вида, либо уравнение вида. Следовательно, при неравных нулю A и B уравнение определяет линейную функцию.

Если A=0 а $B \neq 0$, то в уравнении (11) остается только переменная y и его можно прописать в виде $y = b$. Следовательно, если в уравнении A= 0 и $B \neq 0$, то оно задает постоянную функцию. Аналогично, при $A \neq 0$ и В = 0 мы получаем постоянную функцию вида $x = a$.

Уравнение называется *общим уравнением прямой.*

Задания

1. Укажите точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одному из следующих соотношений:

$x = 0$, $x > 0$, $x \leq 0$;

$y = 0$, $y \leq 0$, $y \geq 0$;

$x = 2$, $x \geq 2$, $x < 2$;

$y = -3$, $y < -3$, $y > -3$;

$y = x,\ y \geq x,\ y < x$;

$y = x+2,\ y > x+2,\ y < x+2$;

$x+y+1=0,\ x+y+1 \geq 0,\ x+y+1 \leq 0$;

$2x - 5y + 10 = 0,\ 2x - 5y + 10 < 0,\ 2x - 5y + 1 \geq 0$.

7. Постройте следующие пары точек:

(1,2) и (2,1); (1,–3) и (–3,1); (–2,–4) и (–4.–2); *(a,b)* и *(b, a)*. Проверьте их симметричность относительно прямой $y = x$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Указание: перегните чертеж по этой прямой.

Попробуем изобразить график функции $y = kx + b$ и обратной ей функции на одном и том же чертеже. Здесь есть некоторое препятствие. Дело в том, что в нашей записи обратной функции независимой переменной является у (т.е. *x* выражается через *y)*, в то время как у исходной функции независимая переменная обозначена через *x*. Но раз мы решили строить оба графика на одном и том же чертеже, независимую переменную в обоих случаях необходимо обозначить одинаково, например, *x*. Тогда уравнение обратной функции запишется так:

$$y = \frac{x}{k} - \frac{b}{k}$$

или

$$x = ky + b.$$

Это уравнение отличается от уравнения исходной функции (5) заменой переменных $x \leftrightarrow y$. Поэтому, если координаты точки *M(x,y)* удовлетворяют уравнению (5), то координаты точки *M'(y,x)* удовлетворяют уравнению. Но эти точки симметричны относительно прямой $x = y$ — биссектрисы первого и третьего координатных углов. Следовательно, *графики функции и обратной ей функции симметричны относительно прямой* $x = y$ (т.е. они совпадут, если чертеж перегнуть по этой прямой).

Задачи

2. Постройте графики данных функций и функций, им обратных (если они существуют):

а) $y = -\frac{1}{3}x + 4$; б) $y = -1$; в) $x = 3$.

Линейные функции часто используют при обработке результатов наблюдений (экспериментов). Рассмотрим два примера.

Пример 1. В электрической цепи в течение десяти секунд измеряется напряжение U с интервалом в 1 секунду. Результаты приведены в табл. 8.

Таблица 8

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U	12	11	10	9	9	8	8	7	7	6

Из теории известно, что зависимость между U и t *линейная,* т.е.

$$U = kt + b.$$

Здесь k и b — некоторые числа (параметры), которые нужно найти. Если бы измерения были точными, то хватило бы двух замеров, поскольку прямая линия вполне определяется двумя точками. Но практически результаты любого измерения являются приближенными. Если, например, построить точки с координатами t, U по данным табл. 8, то окажется, что они не лежат на одной прямой (рис. 13).

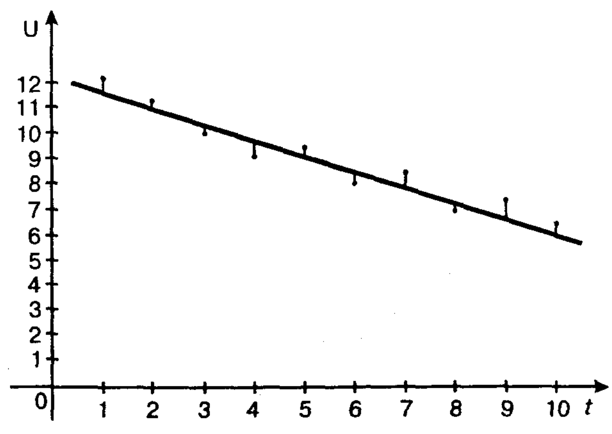


Рис. 13

Возникла проблема: как найти такие параметры k и b, при которых линейная функция $U = kt + b$ достаточно точно отражает результаты эксперимента, приведенные в табл. 8?

Решим эту задачу так называемым *методом наименьших квадратов.* Суть его в следующем: прямая выбирается так, чтобы сумма квадратов вертикальных отклонений экспериментальных точек от искомой прямой (см. рис. 13) была как можно меньше. Это условие приводит к формулам

$$k = \frac{\overline{tU} - \bar{t}\,\overline{U}}{D}, \; b = \overline{U} - k\bar{t}.$$

Здесь $\bar{t}$, $\overline{U}$ и $\overline{tU}$ — средние арифметические значений *t, U* и *tU,* а *D* — дисперсия значений *t*.

Составим таблицу:

Таблица 9

t	U	tU	$t-\bar{t}$	$(t-\bar{t})^2$
1	12	12	–4,5	20,25
2	11	22	–3,5	12,25
3	10	30	–2,5	6,26
4	9	36	–1,5	2,25
5	9	45	–0,5	0,25
6	8	48	0,5	0,25
7	8	56	1,5	2,25
8	7	56	2,5	6,25
9	7	63	3,5	12,25
10	6	60	4,5	20,25
55	87	428	0	82,5

В последней строке записана сумма всех чисел соответствующего столбца. Средние арифметические и дисперсию найдем по формулам:

$$\bar{t} = \frac{55}{10} = 5{,}5; \; \overline{U} = \frac{87}{10} = 8{,}7; \; \overline{tU} = \frac{428}{10} = 42{,}8.$$

Подставив найденные значения в формулы, получим искомые параметры:

$$k = \frac{42{,}8 - 8{,}7 \cdot 5{,}5}{8{,}25} \approx -0{,}61, \; b = 8{,}7 + 5{,}5 \cdot 0{,}61 \approx 12{,}06.$$

Итак, искомая линейная функция имеет вид

$$U = -0{,}61t + 12{,}06.$$

Ее график показан на рис. 13. Проверьте, что он проходит через точку (5,5; 8,7).

Рассмотренный метод применяется и для описания других зависимостей, которые приближенно можно считать линейными.

Задачи

3. В табл. 10 приведены результаты измерения силы звука самолета (она обозначается v и измеряется в децибелах *(дб)* на различных расстояниях от точки взлета (расстояние обозначается, как обычно, через s и измеряется в километрах).

Таблица 10

s	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30
v	115	108	102	98	93	89	87	72	65	60

Используя метод наименьших квадратов, подберите линейную функцию, которая описывает зависимость v от s. Найдите:

а) на каком расстоянии от точки взлета звук становится смертельно опасным для человека (свыше 120 децибел);

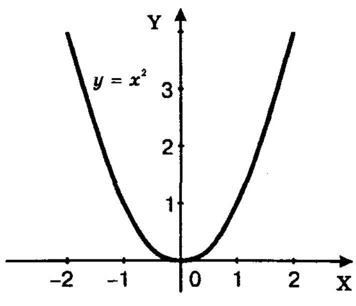
б) на каком расстоянии от аэродрома можно строить жилые помещения (менее 75 децибел), детские учреждения и больницы (60 децибел)?

Указание: Воспользуйтесь формулами.

§4. Нелинейные функции (квадратная, кубическая, логарифмическая и т.д.)

Функция $y = x^2$

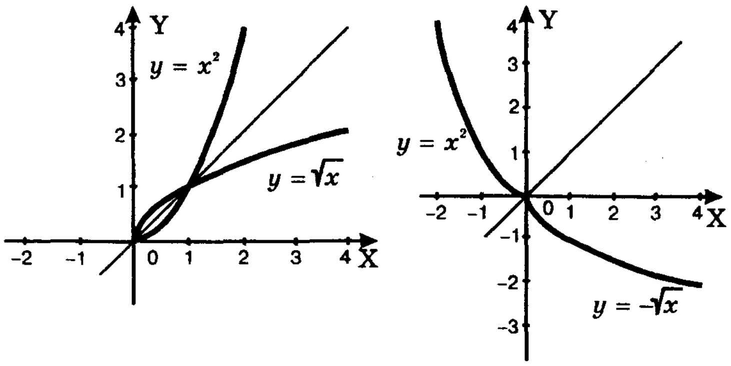
называется *квадратичной,* а ее график называется *параболой*.



Точка *O* называется *вершиной параболы.* Ось Y является *осью симметрии* параболы, т.к. для каждой точки *M(x,y),* лежащей на параболе, симметричная ей относительно оси Y точка *M'(–x,y)* также лежит на параболе. Другими словами, если чертеж перегнуть по оси Y, то левая половина параболы совпадет с правой.

Переменная x, стоящая в правой части уравнения (15), может принимать любые значения. Если x возрастает от $-\infty$ до нуля ($x \in [-\infty,0]$), то $y = x^2$ убывает от $+\infty$ до нуля. Следовательно, на промежутке $(-\infty,0)$ функция (15) убывает. Это хорошо видно на рисунке: левая часть графика идет сверху вниз, если двигаться в направлении возрастания координаты x, т.е. слева направо. Правая часть графика демонстрирует нам тот факт, что функция возрастает на промежутке $[0,+\infty)$.

Найдем теперь график обратной функции, для чего, как и в случае с линейной функцией, поменяем местами переменные x и y а затем выразим y. После замены получим $x = y^2$, откуда $y = \sqrt{x}$ или $y = -\sqrt{x}$. Таким образом, мы получили две функции. Первая ($y = \sqrt{x}$) будет обратной для функции $x = y^2$, $x \geq 0$, графиком которой является правая ветвь параболы; функция $y = -\sqrt{x}$ является обратной для функции $x = y^2$, $x \leq 0$, графиком которой является левая половина параболы (см. рис. 15).



Задания

1. Постройте графики следующих функций и функций, им обратных:

а) $y = 2x^2$; б) $y = -x^2$; в) $y = -2x^2$.

Степенная функция

$$y = x^3$$

называется *кубической*. Ее график называется *кубической параболой*.

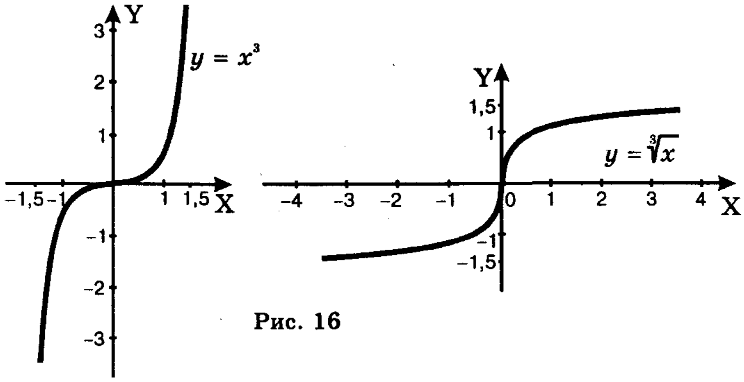


Рис. 16

Обратной к функции (16) будет $x = y^3$ или $y = \sqrt[3]{x}$. Ее график (см. рис. 16) также будет кубической параболой. Обе параболы симметричны относительно начала координат. Действительно, если уравнению удовлетворяют координаты точки $M(x,y)$, то ему же удовлетворяют и координаты точки $M'(-x\ -y)$, которая симметрична M относительно начала координат.

На рис.17 приведены графики степенной функции $y = x^4$ и соответствующих обратных функций.

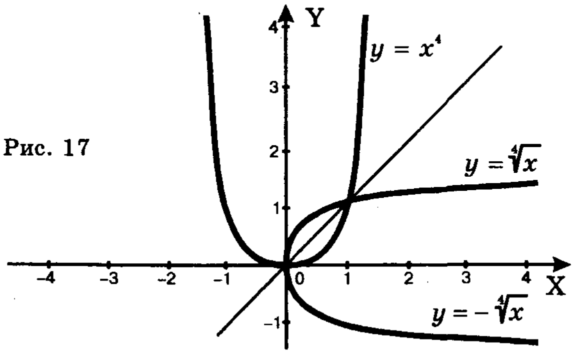


Рис. 17

Задания

2. Постройте графики заданных функций и функций, им обратных:

а) $y = -x^3$; **б)** $y = 2x^3$; **в)** $y = -2x^3$; **г)** $y = -x^4$;
д) $y = 2x^4$; **е)** $y = -2x^4$.

Показательная и логарифмическая функции

Функция

$$y = a^x$$

называется *показательной,* потому что независимая переменная x входит в показатель степени. При $a = 1$ мы получаем $a^x = 1$, т.е. постоянную функцию $y = 1$. Если, например, $a = –3$, то при $x = \frac{1}{2}$ получаем $y = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$. Но такого действительного числа не существует. Поэтому полагают, что $a \neq 1$ и $a > 0$.

Рассмотрим, например, показательную функцию с основанием 2:

$$y = 2^x.$$

Эта функция возрастает на всей числовой оси, т.е. при изменении переменной x от $–\infty$ до ∞. Если x стремится к $–\infty$, то y стремится к нулю. Это видно из следующей таблицы значений функции $y = 2^x$:

x	0	-1	-2	-3	-4	-5	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

График функции $y = 2^x$ изображен на рис. 18.

Найдем теперь функцию, обратную показательной (17). Для этого, как и выше, сделаем замену $x \leftrightarrow y$:

$$x = a^y.$$

Итак, величина y представляет собой показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить x. Это принято записывать следующим образом:

$$y = \log_a x.$$

Выражение справа читают так: «логарифм числа x по основанию a». Функция называется *логарифмической.* Согласно определению,

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1,\ \log_a a^k = k.$$

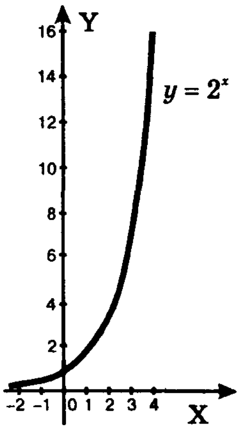


Рис. 18

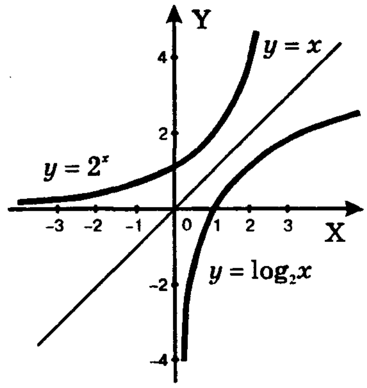


Рис. 19

График логарифмической функций, как и положено, симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$.

На рис. 19 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$. Мы видим, что обе функции — показательная и логарифмическая являются возрастающими. Но это только потому, что основание a больше единицы. Например, в случае $a = \frac{1}{2}$ графики показательной функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и обратной ей логарифмической функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ имеют иной вид (см. рис. 20). Видно, что обе функции являются убывающими.

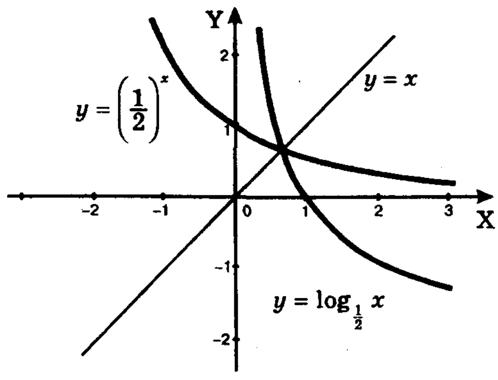


Рис. 20

Для логарифмов по основаниям 10 и e (e — неперово число, см. гл. I, §2) используются специальные обозначения: $\log_{10} x = \lg x$, $\log_e x = \ln x$.

Показательная функция $y = a^x$ играет в математике особую роль. Она называется *экспоненциальной функцией* или, короче, *экспонентной.*

Пример. Степень экологической безопасности мест захоронения радиоактивных отходов зависит от скорости распада радиоактивной массы

m. Известно, что эта скорость в момент времени t пропорциональна массе вещества, что приводит к следующей зависимости:

$$m(t) = m_0\, e^{-kt}.$$

Здесь m_0 — масса отходов в начальный момент, $m(t)$ — масса отходов, оставшаяся к моменту времени t. Параметр k находят опытным путем.

Пользуясь приведенной выше формулой, можно вычислить количество отходов на любой интересующий нас момент времени. Например, для одного из изотопов кобальта $k = 0{,}13$. Найдем массу отходов кобальта, которая останется через 5,2 года, при условии, что исходная масса была 100 граммов. Имеем:

$$m(5{,}2) = 100\, e^{-0{,}13\, \bullet\, 5{,}2} = 100 \bullet e^{-0{,}676} = 50{,}87 \text{ г.}$$

(Напоминаем, что временной промежуток, за который распадается половина массы, называется периодом полураспада.)

Задания

1. Постройте графики функций а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $y = \log_3 x$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

2. Постройте графики функций а) $y = 2^x$; б) $y = 3^x$; в) $y = e^x$.

Указание: учтите, что $2 < e < 3$.

3. Изобразите на одном чертеже графики функций а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_e x \equiv \ln x$.

Логарифмы используют для приближенного вычисления произведений, частных и степеней. Если под рукой нет калькулятора, но имеется таблица десятичных логарифмов, то вычисления проводят так. Найдем, например, число $N = 0{,}9^{50}$. Пользуясь свойствами степеней и логарифмов, находим:

$$\lg N = 50\lg(0{,}9) = 50\left(\lg\frac{9}{10}\right) = 50(\lg 9 - \lg 10) \approx 50(0{,}9542 - 1) = 50(-0{,}0458) = -2{,}29.$$

Итак, $\lg N = -2{,}29$. Следовательно,

$$N = 10^{-2,29} = 10^{-3+0,71} = \frac{10^{0,71}}{1000} = \frac{5,129}{1000} = 0,005125.$$

Значения lg 9 и $10^{0,71}$ найдены с помощью таблиц десятичных логарифмов и антилогарифмов.

Типовое задание

1. С помощью калькулятора постройте график функции

$$y = 2\ e^{-\frac{1}{2}}$$

на отрезке [-4,4].

Указание: разбейте отрезок на 16-20 частей и найдите значения заданной функции в полученных точках. Результаты оформите в виде таблицы:

x	$-1 = 2x$	$e^{-1/2x}$	$y = 2e^{-1/2x}$
. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .

Элементарные функции

Кроме функций, перечисленных в предыдущих параграфах, в школе изучают еще тригонометрические функции — синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс, причем последние четыре просто выражаются через синус и косинус:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

По определению, $\sin x = a$, $\cos x = b$, где (a,b) — координаты точки M, которая лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, а x — угол, образованный вектором OM и осью X (см. рис. 21).

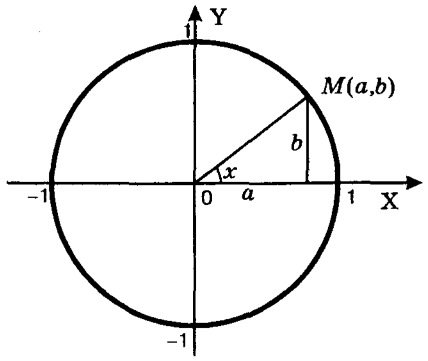


Рис. 21

Если точка M сделает полный оборот и придет в исходное положение, то угол x увеличится на 2π. (Угол здесь и дальше измеряется в радианах. Напоминаем, что полный угол равен 360° или 2π радиан). Но числа a и b в результате этой процедуры не изменятся. Отсюда вытекает, что синус, косинус и все другие тригонометрические функции будут *периодическими функциями с периодом* 2π, т.е. для них

$$\sin x = \sin (x + 2\pi) = \sin (x + 4\pi) = ... = \sin(x + 2\pi k),$$

$$\cos x = \cos (x + 2\pi) = \cos (x + 4\pi) = ... = \cos (x + 2\pi k),$$

где k — любое целое число. *Периодичность* — важнейшее специфическое свойство тригонометрических функций. Другие функции — степенная, показательная и логарифмическая — периодическими не являются. С помощью тригонометрических функций описываются самые разнообразные периодические процессы, происходящие в живой и неживой природе: колебательные и вращательные движения, волновые явления, движение планет, биологические ритмы и т.д.

Корреляционная зависимость

Как мы уже отмечали, понятие функции является одним из самых важных в математике, физике и естественных науках. Следующий пример показывает, что понятия функции недостаточно, чтобы описать всевозможные причинные связи, с которыми жизнь нас сталкивает повседневно.

Совершенно ясно, что между ростом и весом человека существует определенная зависимость. Но столь же ясно, что существует сколько угодно людей с одинаковым ростом, но разным весом. Следовательно, *зависимость веса от роста не является функциональной,* т.к. функции обладают тем свойством, что по заданному значению независимого переменного x можно найти *единственное* значение зависимой переменной y. Таким образом не может быть такой формулы, по которой, зная точный рост, мы находили бы точный вес.

Ага, скажет наш догадливый читатель! Вес зависит не только от роста, но и от размера талии! Несомненно так, ответим мы, но в то же время можно найти сколько угодно людей с одинаковым ростом и одинаковой талией, у которых, тем не менее, вес различный. Следовательно, вес не является функцией только двух переменных — роста и размера талии. Все ясно, скажет читатель: вес зависит от роста, размера талии, объема груди, размера обуви и т.д. и т.п. Вот тут-то мы и подошли к важному выводу: если искомая функциональная зависимость и существует (а пока еще она никем не обнаружена), то она должна быть исключительно сложной. А поскольку нельзя пользоваться тем, чего нет, то проще описывать эту сложную причинную связь между весом, ростом и другими параметрами человека как-то по иному, минуя классическое определение функции.

Вес и рост человека определяются практически одними и теми же факторами, число которых довольно велико (возраст, наследственность, физиологические особенности, социальные условия, экологическая среда и пр.). Поэтому можно считать, что вес человека зависит от ряда случайных величин, среди которых рост является одной из основных. Эту зависимость описывают с помощью понятия вероятности. Например, имеет смысл говорить о вероятности того, что вес молодого человека с ростом 175 см равен 75 кг или заключен в пределах от 70 до 80 кг. Зависимости такого рода называются стохастическими, вероятностными или статистическими. Они существуют между биологическими параметрами человека, животного, растения; между способностями студента и его успехами в учебе; между отношением сообщества к образованию и уровнем преступности; между внешним видом солдат и боеспособностью полка. Подобных примеров можно привести сколько угодно. Важнейшим видом стохастической зависимости является *корреляционная зависимость.* Покажем на примере, как описать корреляционную зависимость по результатам наблюдений.

В таблице приведены данные измерения веса и роста двадцати курсантов школы МВД:

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рост	178	170	181	173	169	178	177	165	187	182
Вес	72	65	92	75	68	79	78	67	80	81

Номер	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Рост	59	182	178	173	176	173	198	187	191	170
Вес	56	82	77	63	80	65	85	89	87	72

Эти результаты можно представить графически, построив точки с соответствующими координатами:

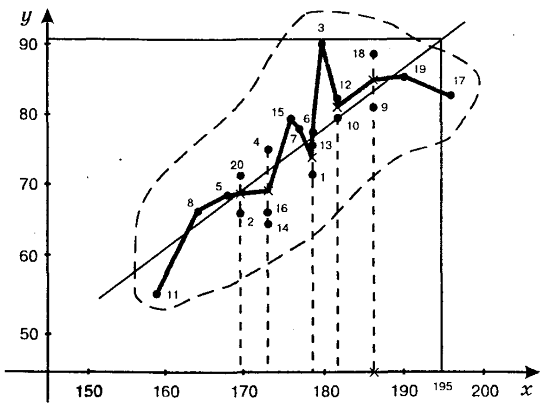


Рис. 25

Полученные точки лежат внутри некоторой области или «облака», которое обозначено пунктирной линией. Хорошо заметно, что облако вытянуто вдоль какой-то наклонной прямой. Этот факт означает, что величины X и Y хорошо скоррелированы, т.е. при увеличении роста вес, как правило, тоже увеличивается. Мы видим, что на некоторых вертикальных прямых внутри облака находится по нескольку точек: 1, 6 и 13; 2 и 20; 4, 14 и 16; 9 и 18; 10 и 12. Для точек 1, 6 и 13 средний вес будет (72 + 79 + 77) : 3 = 76; для точек 2 и 20 средний вес будет 68,5 и т.д. Если на вертикальной прямой находится одна точка, то ее вес и есть средний. Соединив средние точки отрезками, получим ломаную линию, которая называется *эмпирической линией регрессии.* С ее помощью можно приближенно находить средний вес по заданному росту в пределах от 159 см до 198 см. Например, при росте 185 см получаем вес 83,4 кг. Если бы мы провели не 20, а 200 измерений, то точек внутри облака оказалось бы больше, соответствующая линия регрессии была бы по форме ближе к прямой и давала бы более точный средний вес при заданном росте.

Теоретически, каждую точку внутри облака можно считать результатом измерения. При этом допущении линия регрессии, как показывает теория, является прямой. Эта прямая будет графиком некоторой линейной функции, которая называется *регрессией.* Доказано, что *регрессия является наилучшим решением задачи, о которой шла речь в начале этого параграфа — приближенно выразить вес как функцию роста*.

Если бы линия регрессии была нам известна, мы смогли бы ее продолжить за пределы облака и вычислить с ее помощью средний вес человека с ростом, например, 195 см. Однако мы можем с достаточной степенью точности решить эту задачу, имея в своем распоряжении эмпирическую линию регрессии — ломаную, изображенную на рис. 25. Для этого заменим ее прямой, используя приведенный выше метод наименьших квадратов. Уравнение искомой прямой имеет вид

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{D_x},\ b = \bar{y} - k\bar{x}.$$

Здесь $\bar{x}, \bar{y}$ и $\overline{xy}$ — средние значения роста, веса и их попарных произведений, D_x — дисперсия роста. Применяя формулы из второй главы, получаем:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(178 + 170 + \ldots + 170) = 177{,}35;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{20}(72 + 65 + \ldots + 72) = 75{,}65;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{20}(178 \cdot 72 + 170 \cdot 65 + \ldots + 178 \cdot 72) = 13485{,}15;$$

$$D_x = \frac{1}{20}((178 - 177{,}35)^2 + (170 - 177{,}35)^2 + \ldots +$$

$$+ (170 - 177{,}35)^2) = 79{,}1.$$

Подставляя в предыдущие формулы, находим k и b:

$$k = \frac{13485{,}15 - 177{,}35 \cdot 77{,}65}{79{,}1} = 0{,}8675 \approx 0{,}87;$$

$$b = 75{,}65 - 0{,}8675 \cdot 177{,}35 = -78{,}20.$$

Итак, получим следующее уравнение искомой прямой:

$$y = 0{,}87x - 78{,}20.$$

Она называется *эмпирической прямой регрессии.* Подставляя в последнее уравнение $x = 195$, найдем средний вес курсанта с таким ростом — 91 кг.

Теперь мы можем найти вероятность $P(h)$ того, что вес курсанта с ростом x заключен в пределах от y - h до $y + h$. Здесь y — средний рост, найденный по формуле. Вероятность $P(h)$ вычисляют с помощью функции Лапласа **Φ**, определенной по формулам:

$$P(h) = 2\Phi(a),$$

$$a = \frac{h}{S_y\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{\frac{n-2}{n+10}},$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y},$$

где $n = 20$ — число наблюдений. Величины $\bar{x}, \bar{y}$, $\overline{xy}$ и D_x уже найдены выше; вычислим S_x, S_y и r:

$$S_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{79,1} = 8,89;$$

$$D_x = \frac{1}{20}((72 - 75,65)^2 + (65 - 75,65)^2 + \ldots +$$

$$+ (72 - 75,65)^2) = 86,03;$$

$$S_y = \sqrt{86,03} = 9,28;$$

$$r = \frac{13485,15 - 177,35 \cdot 75,65}{8,89 \cdot 9,28} = 0,8318 \approx 0,83.$$

Теперь можно находить *P(h)*. Пусть, например, $h = 5$. Тогда

$$a = \frac{5}{9,28 \cdot \sqrt{0,6919}} \cdot \sqrt{\frac{18}{30}} \approx 0,5.$$

Значение Ф(0,5) находим по таблице, данной в Приложении на с. 219: Ф(0,5) = 0,1915. Подставляя в формулу, получаем $P(5) = 0,383 \approx 0,38$.

Таким образом, вероятность того, что вес курсанта отличается от среднего веса не больше чем на 5 кг, равна 0,38. Например, при росте 195 см средний вес курсанта будет 91 кг, следовательно, 38% курсантов с ростом 195 см имеют вес в пределах от 86 до 96 кг. Заметим, что формула (26) применяется для таких x, которые удовлетворяют условию: $|x - \bar{x}| \le 3S_x$.

Величина r, определенная формулой (27), называется *коэффициентом корреляции* между величинами X и Y. Коэффициент корреляции играет важную роль в вопросах математической статистики. Он обладает следующими свойствами:

1. $-1 \le r \le 1$.

2. Если величины X и Y независимы, то коэффициент корреляции между ними равен нулю.

3. Если величины X и Y связаны линейной зависимостью, то коэффициент корреляции равен 1 или –1. Обратно, если коэффициент корреляции равен 1 или –1, то величины X и Y связаны линейной зависимостью.

При совместном изучении двух случайных величин X и Y прежде всего находят коэффицент корреляции, и если он оказывается близким к единице (по крайней мере большим 0,5), то имеет смысл описывать корреляционную связь тем способом, который мы только что рассмотрели. Проведенные нами расчеты являются приближенными, и их точность зависит от того, насколько близка эмпирическая линия регрессии к теоретической линии регрессии. Точность повышается при увеличением числа наблюдений, т.е. объема выборки.

Задачи

1. Майор Зимин решил сравнить среднее число книг, прочитанных среднестатистическим восьмиклассником за год, с количеством правонарушений, совершенных подростками в его микрорайоне в течение года. Проанализировав данные за 10 лет, он получил следующую таблицу:

X	19	25	24	22	18	38	39	30	35	38
Y	20	20	15	15	10	4	6	10	10	5

Здесь X — среднее число книг прочитанных одним восьмиклассником за год, Y — число правонарушений в течение года.

Изобразите данные графически, найдите коэффициент корреляции, постройте эмпирическую ломаную регрессии, определите параметры эмпирической линейной регрессии, найдите вероятность того, что при $x = 41$ число правонарушений отличается от среднего не более чем на 2.

Мечта майора Зимина — найти число N с таким волшебным свойством: всякий недоросль, прочитавший N книг, становится потенциально образцовым гражданином. Согласно его расчетам, при этом значении N среднее значение y должно равняться нулю, т.е. $N = 50$. Но будьте снисходительны к майору Зимину — он идеализировал математические методы из самых лучших побуждений!

V ЧАСТЬ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ, ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Идею предельного перехода использовал еще Архимед при вычислении площадей и объемов. Эти вычисления совершенствовались два тысячелетия и привели к созданию дифференциального и интегрального исчисления — наиболее мощного и универсального современного математического метода. Этот метод возник в трудах выдающихся ученых Ньютона и Лейбница и развивался усилиями Иоганна I Бернулли, Леонардо Эйлера, Огюстена Коши, Бернгарда Римана, Валле Пуссена, Анри Лебега, Николая Николаевича Лузина, Андрея Николаевича Колмогорова, Александра Яковлевича Хинчина и многих других.

§1. Предел функции

Предел функции — одно из самых тонких понятий математического анализа. Вы сможете заметить это, внимательно прочитав параграф до конца, в особенности то место, где вычисляются замечательные пределы.

Рассмотрим вначале одну из самых простых функций $y = x^2$. Обычно правую часть в аналитической записи функции обозначают через $f(x)$. Итак, у нас

$$y = f(x) = x^2.$$

Заметим, что значение этой функции в точке $x_0 = 2$ будет $y_0 = 4$.

Рассмотрим на оси x бесконечную последовательность точек с координатами

$$x_1 = 2 - 1 = 1;\ x_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ x_3 = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4};\ \ldots$$

Любое из чисел x_1, x_2, x_3 ... меньше 2-х. Как хорошо видно на рис. 26, эти точки скапливаются около точки $x_0 = 2$. Разности

$$2 - x_1 = \frac{1}{1};\ 2 - x_2 = \frac{1}{2};\ 2 - x_3 = \frac{1}{4};\ 2 - x_4 = \frac{1}{8}\ \ldots$$

уменьшаются (в два раза) и могут стать меньше любого наперед заданного малого положительного числа. Поэтому говорят, что бесконечная последовательность чисел x_1, x_2, x_3 ... *стремится* к числу 2 или имеет своим *пределом* число 2.

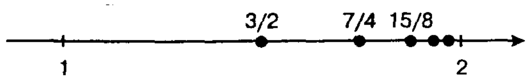


Рис. 26

Как при этом ведет себя функция $y = x^2$? Значения переменного y

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = 1,$$

$$y_2 = f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4},$$

$$y_3 = f(x_3) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k = f(x_k) = f\left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 =$$

$$= 4 - \frac{1}{2^{k-3}} + \frac{1}{2^{2k-2}} \ldots$$

образуют бесконечную последовательность. С увеличением номера k дроби $\frac{1}{2^{k-3}}$ и $\frac{1}{2^{2k-2}}$ стремятся к нулю, поэтому y^k с увеличением номера k стремится к четырем. В этом случае говорят, что предел функции $y = x^2$ при x, стремящемся к двум, равен четырем, и записывают так:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Знак lim есть сокращение от латинского слова *limes*, т.е. граница.

Важное замечание. Математики любят придираться к своим результатам и проверяют их до тех пор, пока придраться уже будет не к чему. Такой подход гарантирует, что полученный результат является полностью достоверным и математически точным, или, как говорят математики, корректным.

Так вот, в наших рассуждениях о пределе имеется существенный пробел. В первом примере мы взяли последовательность

$$2 - 1,\ 2 - \frac{1}{2},\ 2 - \frac{1}{4},\ 2 - \frac{1}{8},\ \ldots$$

Но можно было взять, например, и такую:

$$2 - 1,\ 2 - \frac{1}{10},\ 2 - \frac{1}{100},\ 2 - \frac{1}{1000},\ \ldots$$

которая также имеет своим пределом число 2. Ясно, что таких последовательностей можно указать сколько угодно. Возникает вопрос: зависит ли предел функции от выбора последовательности, т.е. от того, *каким образом* переменная x стремится к заданному значению? Оказывается, что нет, не зависит. Так вот, строгое определение предела функции включает в себя требование независимости от выбора последовательности.

Мы рассмотрели простой пример, когда предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. В этом случае говорят, что функция *непрерывна* в точке x_0. Например, функции $kx + b$, x^2, e^x, $\sin x$ являются непрерывными в каждой точке.

Но ценность столь сложных понятий, как последовательность, предел последовательности и предел функции состоит прежде всего в том, что с их помощью можно описывать поведение функций на границе области определения, т.е. при таких значениях переменного x, в которых функцию определить трудно или невозможно. Рассмотрим, например, функцию

$$y = f(x) = \frac{1}{x},$$

выражающую известный закон обратной пропорциональности. Ее графиком будет гипербола

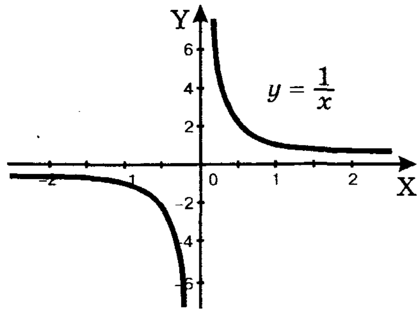


Рис. 27

Таблица значений этой функции

x	1	2	3	4	...
$y = \frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

показывает, что если x стремится к бесконечности ($x \to \infty$), то y стремится к нулю ($y \to 0$). Используя понятие предела, это можно записать так:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Заметим, что выражение «x стремится к бесконечности» означает, что x может принять сколь угодно большое значение, или, как еще говорят, стать больше любого наперед заданного числа.

В то же время, если x уменьшается от единицы до нуля, то получается следующая таблица:

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$y = \frac{1}{x}$	1	2	3	4	...

Согласно нашей терминологии,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Следующий пример показывает, что для нахождения

предела иногда нужно проявить некоторую сообразительность. Найдем предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{x}.$$

Здесь и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности, поэтому сразу неясно, к чему стремится дробь. Однако, если выполнить простейшее преобразование (разделить почленно), то все станет ясно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)$$

Действительно, если x увеличивается, то дробь $\frac{5}{x}$ уменьшается и стремится к нулю, а, следовательно, разность $1-\frac{5}{x}$ стремится к единице. Итак, рассматриваемый предел равен единице.

Еще большую изобретательность нужно проявить, рассматривая предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x-1}.$$

Здесь сложность состоит в том, что при $x = 1$ и числитель и знаменатель обращаются в нуль. Поэтому нельзя найти предел, просто подставив вместо x единицу (как в первом примере). Но заметим, что, поскольку многочлен, стоящий в числителе, обращается в нуль при $x = 1$, то это число будет его корнем. Второй корень равен двум, так что

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

и рассматриваемая функция запишется теперь следующим образом:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1},\ x\neq 1.$$

Сократив на $x - 1$, получим функцию $g(x) = x - 2$, где x может принимать уже любые значения.

Графиком функции $y = x - 2$ будет, как мы уже знаем, прямая. А т.к. во всех точках, кроме $x = 1$, выполняется тождество $f(x) = g(x)$, то и для заданной функции $f(x)$ графиком также будет прямая, но без точки ($x = 1$, $y = -1$):

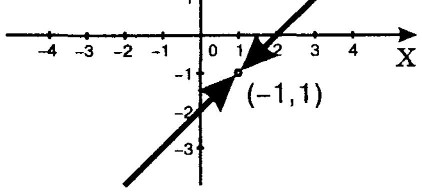


Рис. 28

Поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1.$$

Без доказательства приведем

Правила вычисления пределов

1. *Предел суммы нескольких функций равен сумме пределов этих функций.* Например,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+7}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}+\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^3}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}=1+0+0=1.$$

2. *Предел произведения нескольких функций равен произведению пределов этих функций.* Например,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1\cdot 1\cdot 1=1.$$

Вычисление сложных пределов — занятие весьма непростое, и для каждого из них приходится придумывать свой способ доказательства. Мы рассмотрим только два самых важных, которые называются *замечательными пределами.*

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Чтобы доказать второе из этих равенств, вспомним, прежде всего, что предел не зависит от выбора последовательности значений переменного *x,* стремящегося к бесконечности. Составим эту последовательность из натуральных чисел 1, 2, 3, ... и найдем соответствующие значения функции $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Теперь воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = a^n &+ n \cdot a^{n-1} b + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n-1)!} a b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Подставляя сюда $a = 1$ и $b = \frac{1}{n}$, мы получим следующее:

$$\begin{aligned}f(n) = 2 &+ \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \\ &+ \frac{1}{4!}\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} + \\ &+ \frac{1}{n!}\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}.\end{aligned} \tag{1}$$

Каждая из дробей $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ ... меньше единицы. Поэтому, если в последней сумме эти дроби заменить единицами, то получим число, большее $f(n)$:

$$f(n) < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Заметим, что правая часть этого неравенства есть в точности сумма первых n слагаемых того самого ряда, с помощью которого мы определили в гл. I неперово число:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Поэтому, устремляя в неравенстве (2) n к бесконечности, мы получим:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \le e. \qquad (3)$$

Вернемся теперь снова к сумме (1). В ней все слагаемые — числа положительные, поэтому, если часть последних слагаемых отбросить и оставить только k первых, то сумма уменьшится:

$$2 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \ldots + \\ + \frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n} < f(n). \qquad (4)$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности. Так как каждая из дробей $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ ... стремится при этом к единице, то в результате получится такое неравенство:

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} \le \lim_{n\to\infty} f(n).$$

Из наших рассуждений вытекает, что k — число слагаемых слева — может быть любым, поэтому неравенство сохранится, если k устремить к бесконечности! Но тогда слева снова получится бесконечный ряд, т.е. неперово число e. Таким образом, мы приходим к неравенству

$$e \le \lim_{n\to\infty} f(n). \qquad (5)$$

Из неравенств (3) и (5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = e,$$

что и требовалось доказать.

Первый замечательный предел получается из геометрических соображений. Рассмотрим окружность единичного радиуса и вспомним, что по определению (см. рис. 29) $|AM| = \sin x$, $|BN| = \operatorname{tg} x$, а длина дуги AN в радианах равна x. Для определенности мы считаем, что $\frac{\pi}{2} > x > 0$. В случае, если $x < 0$, рассуждения будут аналогичными.

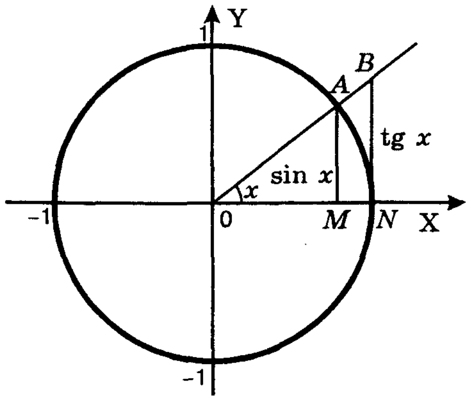


Рис. 29

Рассмотрим очевидное неравенство $|AM| < |AN|$. Так как длина хорды AN меньше длины дуги AN, то $\sin x \le x$. Разделив на x, получим

$$\frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Далее заметим, что площадь сектора OAN меньше площади треугольника OBN. Это приводит к неравенству $\frac{1}{2}R^2x \le \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$ или $x < \operatorname{tg} x$ (равенство достигается при $x = 0$). Разделив на x, получим

$$1 \le \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}.$$

Теперь устремим x к нулю. Так как предел произведения равен произведению пределов, то

$$1 \le \lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to x}\frac{1}{\cos x}.$$

Но

$$\lim_{x\to x}\cos x = 1,$$

поэтому последнее неравенство перепишется так:

$$1 \le \lim_{x\to x}\frac{\sin x}{x}.$$

Сравнивая с неравенством (6), приходим к единственному возможному варианту:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1,$$

что и требовалось доказать.

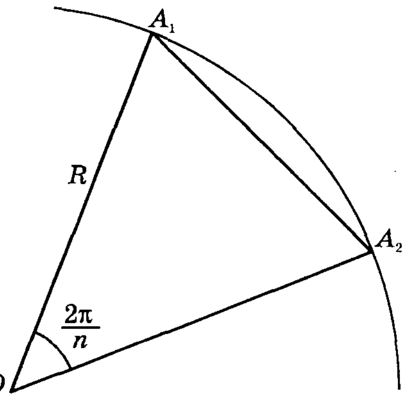


Рис. 30

Пользуясь первым замечательным пределом, выведем формулу для вычисления площади круга. Впишем в круг радиуса R правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$ и найдем его площадь S_n. Как видно из рисунка, $S_n = nS$, где S— площадь треугольника OA_1A_2 . Но

$$S=\frac{1}{2}|OA_1|\cdot|OA_2|\sin\angle A_1OA_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin\tfrac{2\pi}{n}.$$

Поэтому

$$S_n=n\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Площадью S круга называется предел последовательности S_n. Пользуясь первым замечательным пределом, получаем:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}=$$

$$=\pi R^2\lim_{\substack{n\to\infty\\ \frac{2\pi}{n}\to 0}}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right)=\pi R^2.$$

Упражнения

1. Найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+2}{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2+3}{-x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{7}{2}} \frac{2x^2+13x+21}{2x+7}$; д) $\lim\limits_{x \to -0,5} \frac{6x^2-75x-39}{x+0,5}$;

е) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(4-x)^2+(4+x)^2}$; ж) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2-x)^4-(2+x)^4}{(3-x)^4-(3+x)^4}$.

Важное замечание. Теория пределов позволяет уточнить понятие бесконечной десятичной дроби, рассматривая ее как *предел последовательности десятичных приближений.* Например, число $\frac{1}{3}$ является пределом последовательности 0.3, 0.33, 0.333, ..., а число $\sqrt{2}$ есть предел последовательности 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... (см. там же).

§2. Производная

Наиболее естественно к понятию производной мы приходим из кинематических соображений.

Напомним, что скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно, вычисляется по формуле

$$v = \frac{s}{t}.$$

Если тело движется прямолинейно, но не равномерно, то скорость в каждый момент времени, вообще говоря, разная. Скорость тела в момент времени t называют *мгновенной скоростью* в точке t и обозначают $v(t)$.

Предположим теперь, что к моменту времени t тело прошло путь $s(t)$, а к моменту времени $t + h$ (т.е. еще через промежуток времени h) — путь $s(t + h)$. Тогда за время h оно прошло путь $s(t + h) - s(t)$ и средняя скорость на этом участке будет

$$v_{cp} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Предположим теперь, что промежуток h уменьшается и стремится к нулю. Тогда и путь, пройденный за это время, также стремится к нулю, а средняя скорость v_{cp} за промежуток времени h стремится к скорости тела в момент t. Используя определение предела, можно записать:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Эта формула является строгим определением мгновенной скорости и одновременно дает способ для ее вычисления. Предел *v(t)* существует при естественном допущении, что в момент времени *t* не было никаких катаклизмов: поезд не сошел с рельсов, не было столкновения или резкого торможения, не изменился внезапно коэффициент трения, поезд не утащила летающая тарелка и т.п.

Пример 1. При равномерном движении пройденный путь пропорционален времени, т.е. $s(t) = ct$, где c — постоянное число. Используя предыдущую формулу, вычислим мгновенную скорость в момент времени t:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - ct}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ch}{h} = c.$$

Формула для пути теперь запишется известным образом:

$$s = vt.$$

Пример 2. До Галилея считалось, что все тела падают с постоянной скоростью. Проверить это на практике было сложно. Галилей высказал предположение, что все тела падают равноускоренно, т.е. при свободном падении путь пропорционален квадрату времени:

$$s = ct^2.$$

Найдем скорость в момент времени t:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h)^2 - ct^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c(t^2 2th + h^2) - ct^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (2tc + ch) = 2ct.$$

В случае свободного падения тела величина $2c$ найдена опытным путем. Она называется ускорением свободного падения и обозначается буквой g. Приближенно $g = 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Теперь откажемся от физической терминологии и перейдем к стандартным обозначениям. Вместо «путь *s(t)*» будем говорить «функция *f(x)*», а вместо «скорость» говорить «*производная функции f(x) в точке x*».

Будем записывать функцию, как обычно, $y = f(x)$, а производную этой функции в точке x будем обозначать $f'(x)$. Итак, по определению,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

а из примеров 1 и 2 получаем:

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x.$$

Найдем производные от некоторых известных функций.

0. Производная от постоянной функции равна нулю, т.к., если функция не меняется, то ее приращение равно нулю: $f(x+h) - f(x) = 0$.

1. Производная от степенной функции $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Согласно определению производной

$$(x_n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

По формуле бинома Ньютона (см. §1)

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n.$$

Вычтем отсюда x^n, поделим почленно на h и запишем предел суммы как сумму пределов:

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \lim_{h\to 0}\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + \lim_{h\to 0} h^{n-1}.$$

Все пределы, кроме первого, равны нулю, поэтому остается только

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Это правило применимо и для отрицательных степеней:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

2. Производная от синуса.

Пользуясь определением производной, известной тригонометрической формулой «разность синусов» и свойствами предела, получаем:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Первый предел равен единице (первый замечательный предел). Второй, используя непрерывность косинуса (см. с. 113), найдем так:

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{0}{2}\right)=\cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично доказывается, что

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3. Производная от показательной функции $y = a^x$ вычисляется по формуле:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

(напомним, что $\ln a \equiv \log_e a$, где e — неперово число). При $a = e$ получим

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

4. Производная от логарифмической функции $y = \log_a x$ вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}.$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

При вычислении производных пользуются следующими правилами, которые выводятся с помощью правил вычисления пределов (см. гл. VI, §1):

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Производная от сложной функции $f(u(x))$ вычисляется по формуле

$$f(u(x))' = f'(u)u'(x).$$

Например,

$$((2x-1)^2)' = (u^2)'(2x-1)' = 2u(2x)' = (2x-1)2 =$$
$$= (2x-1);$$
$$(\sin 2x)' = (\sin u)'(2x)' = (\cos u)2 = 2\cos 2x;$$
$$(e^{x^2})' = (e^u)'(x^2)' = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2}.$$

Понятие производной имеет широкие приложения. Как мы уже знаем, производная от пути по времени — это скорость. Но понятие скорости возникает не только при движении. Скорость — важнейшая характеристика многих физических, химических, физиологических и других процессов, происходящих в природе, в человеке, на различных производствах и т.д. И всегда скорость представляет собой производную от некоторой функции.

Производная от скорости называется *ускорением,* она характеризует «скорость изменения скорости». При равноускоренном движении ускорение постоянно, при равномерном оно равно нулю. Если же движение (процесс) описывается некоторой произвольной функцией, то ускорение, вообще говоря, не постоянно и представляет собой столь же важную характеристику, как и скорость.

Другое важное приложение производной — задачи на нахождение наибольших и наименьших (экстремальных) значений. Оно основано на следующем простом факте: если функция принимает в некоторой точке экстремальное значение, и производная в этой точке существует, то она (т.е. производная) равна нулю.

Пример. В тюрьме города Инфоландия собрались строить железную камеру для содержания особо опасных преступников. Какое наименьшее количество железа нужно для этой цели, если по санитарным нормам высота камеры должна быть не менее 2,5 м, а ее площадь — не менее 6 м^2?

Решение. Количество железа пропорционально площади поверхности камеры, которая, как и обыкновенная комната, имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Обозначим длину камеры через a, а ширину через b. Тогда пол и потолок имеют площадь ab каждый, две боковые стены по $2{,}5a$, две другие — по $2{,}5b$. Общая площадь получается $S = 2ab + 5a + 5b$. При этом, согласно санитарным нормам, ab = 6. Отсюда выразим b и подставим в выражение для 5:

$$S = 2\cdot 6 + \left(a + \frac{6}{a}\right) = 12 + 5\left(a + \frac{6}{a}\right).$$

Итак, мы учли все данные, но величину а еще можно выбирать произвольно, т.е. она является переменной величиной. Ее нужно выбрать так, чтобы значение S получилось наименьшим. Согласно теории, для минимизации функции $S(a)$ следует приравнять нулю производную $S'(a)$. Пользуясь правилами вычисления производных, находим:

$$S' = 0 + 5\left(a' + \left(\frac{6}{a}\right)'\right) = 5\left(1 - \frac{6}{a^2}\right).$$

Из уравнения

$$1 - \frac{6}{a^2} = 0$$

находим, что $a = \sqrt{6}$. При этом значении a площадь будет наименьшей. Она равна $S = 12 + 10\sqrt{6} \cong 12 + 10 \times 2{,}45 = 36{,}5$.

Есть и другие, не менее важные, приложения производной. Например, в геометрии часто используется тот факт, что прозводная от функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$: $y' = \operatorname{tg}\alpha$ (см. рис. 31).

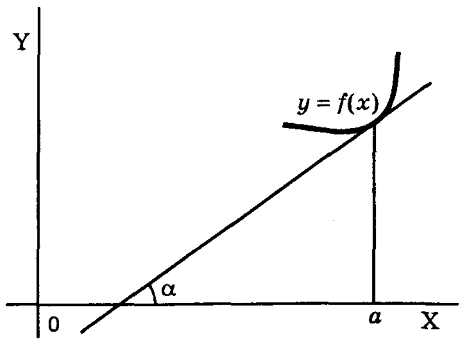


Рис. 31

§3. Интеграл

Одна из самых распространенных практических задач — вычисление длин, площадей, объемов и т.д. Если фигура простая (отрезок прямой, окружность, треугольник, параллелограмм, правильная пирамида и т.д.), то можно воспользоваться простейшими формулами, которые были известны еще математикам древности. В случае же, если фигура достаточно сложная, простыми формулами уже не обойтись. Тогда применяют *интегральное исчисление.*

Различают *определенный* и *неопределенный* интегралы. Любой из вас, прочитавший предыдущий параграф и уже научившийся находить производную от заданной функции, несомненно спросил себя: а как найти функцию, если известна ее производная? Процедура нахождения производной по заданной функции называется *дифференцированием,* а обратная процедура, позволяющая находить по заданной производной исходную функцию, называется *интегрированием.* Результат интегрирования называется *первообразной функцией.* Так как производная от постоянной равна нулю, то

$$(F(x) + c)' = F'(x),$$

где c — любое действительное число. Поэтому, если для заданной функции $f(x)$ существует одна первоообразная $F(x)$, то их существует бесконечно много: $F(x) + c$. Совокупность всех первообразных заданной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и для его записи используют весьма специфическое обозначение:

$$\int f(x)dx.$$

Например,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\text{, т.к. } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c\text{, т.к. } (\sin x + c)' = (\sin x)' = \cos x;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c\text{, т.к. } (-\cos x + c)' = (\sin x)' = \sin x;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c\text{, т.к. } (\ln x + c)' = \frac{1}{x};$$

$$\int e^x dx = e^x + c\text{, т.к. } (e^x + c)' = (e^x)' = e^x.$$

Присутствующая всюду постоянная с называется *постоянной интегрирования.*

К понятию определенного интеграла мы приходим при вычислении длины, площади, объема и т.д. Проиллюстрируем это на простейшем случае — вычислении площади под кривой.

Пусть $y = f(x)$ — некоторая непрерывная функция (см. гл. VI, §1), заданная на промежутке $[a,b]$. Обозначим через S площадь между графиком этой функции и осью X (рис. 32).

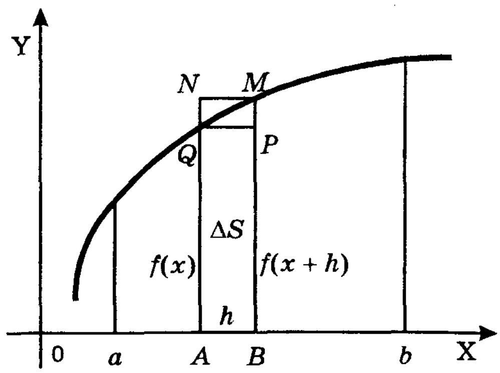


Рис. 32

Чтобы найти S, разобьем отрезок $[a,b]$ на маленькие равные отрезки длиной h и обозначим через ΔS ту часть искомой площади, которая находится над отрезком AB (на рисунке она заштрихована). На рисунке видно, что верхняя граница заштрихованной фигуры находится между отрезками MN и PQ, которые ограничивают прямоугольники $ABMN$ и $ABPQ$. Поэтому площадь заштрихованной фигуры заключена между площадями этих прямоугольников:

$$S_{ABPQ} \le \triangle S \le S_{ABMN}.$$

Так как $AQ = f(x)$, $BM = f(x + h)$, то $S_{ABPQ} = f(x)h$, $S_{ABMN} = f(x + h)h$ и предыдущие неравенства принимают вид

$$f(x)h \le \triangle S \le (x + h)h.$$

Аналогичные неравенства запишем для каждого из отрезков длины h, на которые разбит отрезок $[a,b]$, а затем все такие неравенства сложим. В результате получим неравенства

$$S_1 \le S \le S_2,$$

где через S обозначена сумма всех фигур типа S_{ABPN}, т.е. искомая площадь; буквой S_1 обозначена суммарная площадь всех прямоугольников типа $ABPQ$, а через S_2 — общая площадь всех прямоугольников типа $ABMN$.

Величины S_1 и S_2 являются функциями от переменной h. Если h неограниченно уменьшать ($h \to 0$), то S_1 и S_2 будут меняться, причем S_2 будет уменьшаться, а S_1 — увеличиваться. Обе суммы имеют своим общим пределом число S — площадь рассматриваемой фигуры.

Итак, площадь получается как предел $\lim\limits_{h\to 0} S_1$ (или $\lim\limits_{h\to 0} S_2$, который называется *определенным интегралом* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Связь между неопределенным и определенным интегралами устанавливается формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где через $F(x)$ обозначена первообразная функции $f(x)$. Этой формулой и заканчивается процедура вычисления площади.

Примеры

1. Найдем площадь под параболой $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. Здесь $a = 0$, $b = 1$, поэтому

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Найдем площадь под гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$, $1 \le x \le 2$.

Имеем:

$$S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

3. Найдем площадь под графиком экспоненты $y = e^x$, $x \le 0$. Имеем:

$$S = \int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^0 = e^0 - \lim_{x\to -\infty} e^x = 1 - 0 = 1.$$

В заключение приведем пример неэлементарной функции, которая имеет важные и многочисленные приложения.

Во второй главе мы рассматривали *случайные величины,* т.е. такие переменные величины, значения которых зависят от случая. Например, число дорожных происшествий на улицах города в течение суток; число новорожденных за месяц; число заявлений, поступивших в отделение милиции; скорость молекулы газа при определенной температуре; число метеоритов, падающих на Землю, и т.д. Сейчас мы рассмотрим еще одну величину, которая называется *случайной ошибкой.*

Пример

4. В течение часа проведено 10 измерений уровня радиации одним и тем же прибором (в микрорентгенах в час): 12,0 11,5 11,7 12,2 12,1 10,8 11,6 10,7 12,0 11,4. Результаты измерений получились различными вследствие того, что и сам прибор, и человеческий глаз не являются идеальными орудиями наблюдения. Погрешность не может быть меньше толщины стрелки прибора; стрелка может вибрировать; угол, под которым мы смотрим на стрелку, также меняется. Кроме того, влияние оказывают атмосферные условия, настроение наблюдателя и т.п. Конечно, мы считаем, что исключены всякого рода систематические ошибки, связанные, например, с неисправностью прибора.

В отчете обычно показывают среднее арифметическое всех наблюдений. В нашем примере

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(12 + 11{,}5 + 11{,}7 + 12{,}2 + 12{,}1 + 10{,}8 + 10 + 11{,}6 + 10{,}7 + 12 + 11{,}4 + 11{,}6) = 11{,}6.$$

Но для решения многих экологических проблем важно уметь оценить, насколько найденное среднее отличается от истинного значения радиации, которое нам неизвестно (ведь в нашем распоряжении имеются только показания приборов!). Как быть?

К счастью, математики умеют отвечать на этот вопрос. Назовем *случайной ошибкой* разность между средним значением $\bar{x}$ и истинным значением радиации. Так как истинное значение нам неизвестно, то и случайная ошибка тоже неизвестна. Многолетние наблюдения в различных экспериментах показали, что если число опытов достаточно велико, то случайные ошибки подчиняются некоторым общим закономерностям. Для их описания используется, как правило, так называемая интегральная функция Лапласа:

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Этот интеграл не выражается через элементарные функции. Но его приближенные значения табулированы (см. Приложение на с. 219).

С помощью таблицы значений функции $\Phi(a)$ легко вычислить, например, вероятность того, что случайная ошибка не превосходит заданной величины h. Обозначим через $P(h)$ вероятность того, что истинное значение наблюдаемой величины отличается от найденного среднего значения $\bar{x}$ не более чем на h. Величину $P(h)$ находят по следующей формуле:

$$P(h) = 2\Phi(a), \quad a = \frac{h\sqrt{n-1}}{S}. \qquad (7)$$

Здесь n — число измерений, а S — среднее квадратическое отклонение полученных значений. В нашем примере $n = 10$,

$$D = \frac{1}{10}(0{,}16 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}36 + 0{,}25 + 0{,}64 + 0 +$$
$$+ 0{,}81 + 0{,}16 + 0{,}04) = 0{,}224, \quad S = \sqrt{D} = 0{,}494$$

[см. гл. II, формулы (5), (7)]. Пусть $h = 0{,}3$, тогда

$$a = \frac{3}{10}\frac{3}{0{,}494} = 1{,}83.$$

Пользуясь теперь формулой (7) и Приложением, находим:

$$P(0{,}1) = 2\Phi(1{,}83) = 2 \cdot 0{,}466 \approx 0{,}93.$$

Таким образом, с вероятностью 0,93 истинное значение величины радиации заключено в промежутке от 11,6 – 0,3 = 11,3 до 11,6 + 0,3 = 11,9.

Как понимать полученный результат? Допустим, что радиационный фон в данной местности измеряли параллельно несколько бригад. Их результаты будут, вообще говоря, различными: у каждой бригады получится свое среднее значение $\bar{x}$. Можно гарантировать, что примерно 93% найденных средних отклоняется от истинного значения не более чем на 0,3.

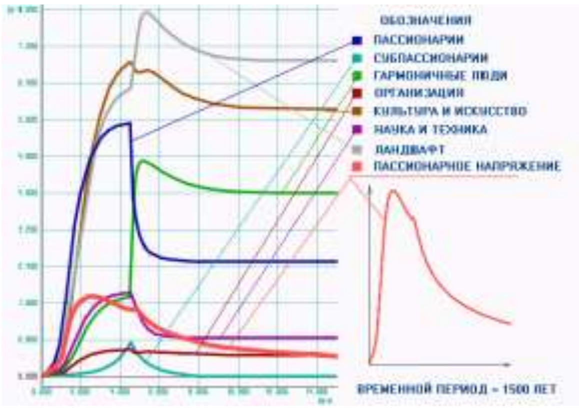
Типовое задание

Проводится измерение уровня загрязненности атмосферы в центре города. Получены следующие значения индекса загрязнения:

27 29 23 30 31 25 30 29 24 29 31 28 28 24 29 26 30 29 28 25 28 30 29 27 25 28 27 32 31 28.

Найдите среднее значение индекса загрязнения и вероятность того, что оно отличается от истинного значения меньше, чем на 2.

VI Часть. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



§1. Понятие математического анализа, модели и моделирования.

В классическом математическом анализе объектами являются прежде всего функции, т.е. переменные величины, зависящие от других переменных величин.

Как возникает потребность к умственной деятельности?

Интерес к числам, к счету, к сложным играм, требующим напряжения ума, проявляется уже с детства. Многим детям интеллектуальные забавы доставляют столько же радости, сколько другому ребенку — игра в мяч или мороженое. При надлежащем воспитании этот интерес развивается и возникает *потребность* в умственной деятельности, требующей логического мышления, применения точных расчетов, поиска закономерностей. Реализовать такую потребность ума человек может в разных сферах деятельности, но в наиболее чистом виде — в математике.

Еще в школе ученик постепенно развивает свою способность к *абстрактному мышлению,* причем не только на уроках математики, но и на уроках физики, химии, биологии. Ведь формулируя очередной закон природы, учитель как бы переводит ученика на новый уровень абстрактного мышления. Очень важное значение в профессии юриста имеет абстракное мышление. Необходимость восстановления событий, умение связать факты с обстоятельствами требует от будущего юриста аналитических способностей и умения логического и системного мышления.

Как думает математик?

Невозможно коротко ответить на вопрос, что отличает математическое мышление или математический склад ума. Для этого нужно глубоко проанализировать процесс математического познания, понять, как математик приходит к открытию. Желающих получить исчерпывающий ответ мы отсылаем к двум замечательным книгам: А. Пункаре «О науке» и Г. Пойа «Математическое открытие».

Стиль мышления прежде всего характеризуется языком, которым пользуется наука.

Математик пользуется специальным языком — языком абстрактных символов. Очищенные от конкретного содержания, символы становятся универсальными и в этом их сила. Но в этом и их слабость! Нематематика, склонного к конкретному мышлению, математические абстракции и специальные знаки повергают в ужас. В своем страхе он фетишизирует символику и полагает, что, выучив значки, он постигнет и математику. В этом корни обывательского страха перед математикой и известного в педагогике явления, называемого «зубрежкой».

Математический стиль мышления формируется у того, кто использует математические методы. Их отличает логическая строгость, универсальность, сочетание индуктивного и дедуктивного подхода, нацеленность на поиск закономерностей, четкость формулировок и определений, использование точных количественных оценок... Именно благодаря этим качествам происходит возрастание роли математики в других науках. Роль математики в естественных науках (в частности, в биологии) и технике общеизвестна. Наш век знаменателен тем, что математические методы начинают использовать в экономике, экологии, медицине, управленческой деятельности и гуманитарных науках — лингвистике, социологии, психологии... Математику начали преподавать на гуманитарных факультетах не случайно. Общество осознало, что математика не только важная составляющая общечеловеческой культуры, но и необходимый инструмент познания в любой отрасли человеческой деятельности.

Еще одно существенное отличие математического стиля мышления состоит в том, что математик мыслит логическими категориями, а нематематик — образами. Попросите, например, филолога определить, что такое «поэтический образ», а математика — что такое функция, и Вы поймете разницу в стиле мышления. Наконец, математики, как никто другой, умеют обобщать свои наблюдения — это тоже отличительная черта математического мышления. По этой причине многие математики становятся хорошими философами, ибо обобщения и составляют предмет изучения философии.

§2. Этапы математического анализа

Математический анализ непосредственно связан с математическим моделированием. Первым этапом математического моделирования является **постановка задачи**, определение объекта и целей исследования, задание критериев (признаков) изучения объектов и управления ими. Неправильная или неполная постановка задачи может свести на нет результаты всех последующих этапов.

Вторым этапом анализа является **выбор типа математической модели**, что является важнейшим моментом, определяющим направление всего исследования. Обычно последовательно строится несколько моделей. Сравнение результатов их исследования с реальностью позволяет установить наилучшую из них. На этапе выбора типа математической модели при помощи анализа данных поискового эксперимента устанавливаются: линейность или нелинейность, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса.

Процесс выбора математической модели объекта заканчивается ее **предварительным контролем**, который также является первым шагом на пути к исследованию модели. При этом осуществляются следующие виды контроля (проверки): размерностей; порядков; характера зависимостей; экстремальных ситуаций; граничных условий; математической замкнутости; физического смысла; устойчивости модели.

Контроль **размерностей** сводится к проверке выполнения правила, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.

Контроль **порядков** величин направлен на упрощение модели. При этом определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются.

Анализ **характера зависимостей** сводится к проверке направления и скорости изменения одних величин при изменении других. Направления и скорость, вытекающие из математического моделирования, должны соответствовать физическому смыслу задачи.

Анализ **экстремальных ситуаций** сводится к проверке наглядного смысла решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.

Контроль **граничных условий** состоит в том, что проверяется соответствие математического моделирования граничным условиям, вытекающим из смысла задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что эта функция на самом деле удовлетворяет таким условиям.

Анализ **математической замкнутости** сводится к проверке того, что математическое моделирование дает однозначное решение.

Анализ **физического смысла** сводится к проверке физического содержания промежуточных соотношений, используемых при построении математического моделирования.

Проверка **устойчивости модели** состоит в проверке того, что варьирование исходных данных в рамках имеющихся данных о реальном объекте не приведет к существенному изменению решения.

Модель в широком смысле – это любой образ, аналог мысленный или установленный изображение, описание, схема, чертеж, карта и т. п. какого либо объема, процесса или явления, используемый в качестве его заменителя или представителя. Сам объект, процесс или явление называется оригиналом данной модели.

Моделирование – это исследование какого либо объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. Это использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов.

На идее моделирования базируется любой метод научного исследования, при этом, в теоретических методах используются различного рода знаковые, абстрактные модели, в экспериментальных – предметные модели.

При исследовании сложное реальное явление заменяется некоторой упрощенной копией или схемой, иногда такая копия служит лишь только для того чтобы запомнить и при следующей встрече узнать нужное явление. Иногда построенная схема отражает какие-то существенные черты, позволяет разобраться в механизме явления, дает возможность предсказать его изменение. Одному и тому же явлению могут соответствовать разные модели.

Задача исследователя – предсказывать характер явления и ход процесса.

Иногда, бывает, что объект доступен, но эксперименты с ним дорогостоящи или привести к серьезным экологическим последствиям. Знания о таких процессах получают с помощью моделей.

Важный момент – сам характер науки предполагает изучение не одного конкретного явления, а широкого класса родственных явлений. Предполагает необходимость формулировки каких-то общих категорических утверждений, которые называются законами. Естественно, что при такой формулировке многими подробностями пренебрегают. Чтобы более четко выявить закономерность сознательно идут на огрубление, идеализацию, схематичность, то есть изучают не само явление, а более или менее точную ее копию или модель. Все законы – это законы о моделях, а поэтому нет ничего удивительного в том, что с течением времени некоторые научные теории признаются непригодными. Это не приводит к краху науки, поскольку одна модель заменилась другой более современной.

Особую роль в науке играют математические модели, строительный материал и инструменты этих моделей – математические понятия. Они накапливались и совершенствовались в течении тысячелетий. Современная математика дает исключительно мощные и универсальные средства исследования. Практически каждое понятие в математике, каждый математический объект, начиная от понятия числа, является математической моделью. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют те его особенности, черты и детали, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие адекватные математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее. Тогда связи и отношения, обнаруженные и предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его деталями и составными частями можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явление, то есть его математическая модель.

Изучение математической модели всегда связанно с некоторыми правилами действия над изучаемыми объектами. Эти правила отражают связи между причинами и следствиями.

Построение математической модели – это центральный этап исследования или проектирования любой системы. От качества модели зависит весь последующий анализ объекта. Построение модели - это процедура не формальная. Сильно зависит от исследователя, его опыта и вкуса, всегда опирается на определенный опытный материал. Модель должна быть достаточно точной, адекватной и должна быть удобна для использования.

§3. Классификация математических моделей

С середины XX в. в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и ЭВМ. Возникли такие новые дисциплины, как «математическая экономика», «математическая химия», «математическая лингвистика» и т. д., изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. **Основная цель моделирования** — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование — это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...» Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако все это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Основные этапы математического моделирования

1) Построение модели. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

2) Решение математической задачи, к которой приводит модель. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

3) Интерпретация полученных следствий из математической модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4) Проверка адекватности модели. На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5) Модификация модели. На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

§4. Создание математической модели на примерах

Сейчас, когда в стране происходит чуть ли не всеобщая компьютеризация, от специалистов различных профессий приходится слышать высказывания: «Вот внедрим у себя ЭВМ, тогда все задачи сразу же будут решены». Эта точка зрения совершенно не верна, сами по себе ЭВМ без математических моделей тех или иных процессов ничего сделать не смогут и о всеобщей компьютеризации можно лишь мечтать.

В подтверждение вышесказанного попытаемся обосновать необходимость моделирования, в том числе математического, раскроем его преимущества в познании и преобразовании человеком внешнего мира, выявим существующие недостатки и перейдем к имитационному моделированию, т.е. моделированию с использованием ЭВМ. Но все по порядку.

Прежде всего, ответим на вопрос: что такое модель?

Модель – это материальный или мысленно представленный объект, который в процессе познания (изучения) замещает оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные свойства.

Хорошо построенная модель доступнее для исследования – нежели реальный объект. Например, недопустимы эксперименты с экономикой страны в познавательных целях, невозможно придумать модель влияния нового закона на дальнейшее развитие общества. Здесь без модели не обойтись.

Резюмируя сказанное можно ответить на вопрос: для чего нужны модели? Для того, чтобы

- понять, как устроен объект (его структура, свойства, законы развития, взаимодействия с окружающим миром);
- научиться управлять объектом (процессом) и определять наилучшие стратегии;
- прогнозировать последствия воздействия на объект.

Что положительного в любой модели? Она позволяет получить новые знания об объекте, но, к сожалению, в той или иной степени не полна.

Модель сформулированная на языке математики с использованием математических методов называется математической моделью.

Исходным пунктом ее построения обычно является некоторая задача, например экономическая. Широко распространены, как дескриптивные, так и оптимизационные математические, характеризующие различные экономические процессы и явления, например: распределение ресурсов, рациональный раскрой, транспортные перевозки, укрупнение предприятий, сетевое планирование и др.

Каким образом происходит построение математической модели?

Во-первых, формулируется цель и предмет исследования.

Во-вторых, выделяются наиболее важные характеристики, соответствующие данной цели.

В-третьих, словесно описываются взаимосвязи между элементами модели.

Далее взаимосвязь формализуется.

И производится расчет по математической модели и анализ полученного решения.

Используя данный алгоритм можно решить любую оптимизационную задачу, в том числе и многокритериальную, т.е. ту в которой преследуется не одна, а несколько целей, в том числе противоречивых.

Приведем пример. Теория массового обслуживания – проблема образования очередей. Нужно уравновесить два фактора – затраты на содержание обслуживающих устройств и затраты на пребывание в очереди. Построив формальное описание модели производят расчеты, используя аналитические и вычислительные методы. Если модель хороша, то ответы найденные с ее помощью адекватны моделирующей системе, если плоха, то подлежит улучшению и замене. Критерием адекватности служит практика.

Оптимизационные модели, в том числе многокритериальные, имеют общее свойство – известна цель(или несколько целей) для достижения которой часто приходится иметь дело со сложными системами, где речь идет не столько о решении оптимизационных задач, сколько об исследовании и прогнозировании состояний в зависимости от избираемых стратегий управления. И здесь мы сталкиваемся с трудностями реализации прежнего плана. Они состоят в следующем:

- сложная система содержит много связей между элементами

- реальная система подвергается влиянию случайных факторов, учет их аналитическим путем невозможен
- возможность сопоставления оригинала с моделью существует лишь в начале и после применения математического аппарата, т.к. промежуточные результаты могут не иметь аналогов в реальной системе.

В связи с перечисленными трудностями, возникающими при изучении сложных систем, практика потребовала более гибкий метод, и этот метод называется имитационным моделированием (simulation modeling).

Обычно под имитационной моделью понимается комплекс программ для ЭВМ, описывающий функционирование отдельных блоков систем и правил взаимодействия между ними. Использование случайных величин делает необходимым многократное проведение экспериментов с имитационной системой (на ЭВМ) и последующий статистический анализ полученных результатов. Весьма распространенным примером использования имитационных моделей является решение задачи массового обслуживания методом МОНТЕ–КАРЛО.

Таким образом, работа с имитационной системой представляет собой эксперимент, осуществляемый на ЭВМ. В чем же заключаются преимущества?

– Большая близость к реальной системе, чем у математических моделей;

– Блочный принцип дает возможность верифицировать каждый блок до его включения в общую систему;

– Использование зависимостей более сложного характера, не описываемых простыми математическими соотношениями.

Перечисленные достоинства определяют недостатки:

– построить имитационную модель дольше, труднее и дороже;

– для работы с имитационной системой необходимо наличие подходящей по классу ЭВМ;

– взаимодействие пользователя и имитационной модели (интерфейс) должно быть не слишком сложным, удобным и хорошо известным;

– построение имитационной модели требует более глубокого изучения реального процесса, нежели математическое моделирование.

Встает вопрос: может ли имитационное моделирование заменить методы оптимизации? Нет, но удобно дополняет их. Имитационная модель – это программа, реализующая некоторый алгоритм, для оптимизации управления которым прежде решается оптимизационная задача.

Итак, ни ЭВМ, ни математическая модель, ни алгоритм для ее исследования порознь не могут решить достаточно сложную задачу. Но вместе они представляют ту силу, которая позволяет познавать окружающий мир, управлять им в интересах человека.

Статическая модель – это как бы одномоментный срез информации по объекту (результат одного обследования).

Динамическая модель – позволяет увидеть изменения объекта во времени (Карточка в поликлинике).

Можно классифицировать модели и по тому, к какой области знаний они принадлежат (биологические, исторические, экологические и т.п.).

Учебные – наглядные пособия, тренажеры,обучающие программы.

Опытные модели – уменьшенные копии (автомобиль в аэродинамической трубе).

Научно-технические – синхрофазотрон, стенд для проверки электронной аппаратуры.

Игровые – экономические, спортивные, деловые игры.

Имитационные – не просто отражают реальность, но имитируют ее (на мышах испытываеется лекарство, в школах проводятся эксперементы и т.п.Такой метод моделирования называется методом проб и ошибок.

Материальные модели – иначе можно назвать предметными. Они воспринимают геометрические и физические свойства оригинала и всегда имеют реальное воплощение

Информационные модели – нельзя потрогать или увидеть. Они строятся только на информации. Информационная модель совокупность информации, характеризующая свойства и состояния объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с внешним миром.

Вербальная модель – информационная модель в мысленной или разговорной форме.

Знаковая модель – информационная модель выраженная знаками,т.е. средствами любого формального языка.

Компьютерная модель – модель, реализованная средствами програмной среды. (Классификация моделей, приведенная в книге "Земля Информатика" (Гейн А.Г.)

«...вот нехитрая на первый взгляд задача: сколько потребуется времени, чтобы пересечь пустыню Каракумы? Ответ, разумеется зависит от способа передвижения. Если путешествовать на верблюдах, то потребуется один срок, другой – если ехать на автомобиле, третий – если лететь самолетом. А самое главное – для планирования путешествия требуются разные модели. Для первого случая требуемую модель можно найти в мемуарах знаменитых исследователей пустынь: ведь здесь не обойтись без информации об оазисах и верблюжьих тропах. Во втором случае незаменимая информация, содержащаяся в атласе автомобильных дорог. В третьем – можно воспользоваться расписанием самолетных рейсов.

Отличаются эти три модели – мемуары, атлас и расписание и характером предьявления информации. В первом случае модель представлена словесным описанием информации (описательная модель), во втором – как бы фотографией с натуры (натурная модель), в третьем – таблицей содержащей условные обозначения: время вылета и прилета, день недели, цена билета (так называемая знаковая модель). Впрочем это деление весьма условно – в мемуарах могут встретиться карты и схемы (элементы натурной модели), на картах имеются условные обозначения (элементы знаковой модели), в расписании приводится расшифровка условных обозначений (элементы описательной модели). Так что эта классификация моделей ... на наш взгляз малопродуктивна»

На мой взгляд этот фрагмент демонстрирует общий для всех книг Гейна описательный (замечательный язык и стиль изложения) и как бы, сократовский стиль обучения (Все считают что это вот так. Я совершенно согласен с вами, но если приглядеться, то ...). В таких книгах достаточно сложно найти четкую систему определений (она и не предполагается автором). В некоторых учебниках демонстрируется другой подход – определения понятий четко выделены и несколько статичны.

Способов классификации необычно много.Приведем лишь некоторые, наиболее известные основания и признаки: дискретность и непрерывность, матричные и скалярные модели, статические и динамические модели, аналитические и информационные модели, предметные и образно-знаковые модели, масштабные и немасштабные...

Каждый признак дает определенное знание о свойствах и модели, и моделируемой реальности. Признак может служить подсказкой о способе выполненного или предстоящего моделирования.

Дискретность и непрерывность. Дискретность – характерный признак именно компьютерных моделей. Ведь компьютер может находиться в конечном, хотя и очень большом количестве состояний. Поэтому даже если объект непрерывен (время), в модели он будет изменяться скачками. Можно считать непрерывность признаком моделей некомпьютерного типа.

Случайность и детерминированность. Неопределенность, случайность изначально противостоит компьютерному миру: Запущенный вновь алгоритм должен повториться и дать те же результаты. Но для имитации случайных процессов используют датчики псевдослучайных чисел. Введение случайности в детерминированные задачи приводит к мощным и интересным моделям (Вычисление площади методом случайных бросаний).

Матричность – скалярность. Наличие параметров у матричной модели говорит о ее большей сложности и, возможно, точности по сравнению со скалярной. Например, если не выделить в населении страны все возрастные группы, рассматривая его изменение как целое, получим скалярную модель (например модель Мальтуса), если выделить, матричную (половозрастную). Именно матричная модель позволила объяснить колебания рождаемости после войны.

Статичность динамичность. Эти свойства модели обычно предопределяются свойствами реального объекта. Здесь нет свободы выбора. Просто статическая модель может быть шагом к динамической, либо часть переменных модели может считаться пока неизменной. Например, спутник движется вокруг Земли, на его движение влияет Луна. Если считать Луну неподвижной за время оборота спутника, получим более простую модель.

Аналитические модели. Описание процессов аналитически, формулами и уравнениями. Но при попытке построить график удобнее иметь таблицы значений функции и аргументов.

Имитационные модели. Имитационные модели появились давно в виде масштабных копий кораблей, мостов и пр. появились давно, но в связи с компьютерами рассматриваются недавно. Зная, как связаны элементы модели аналитически и логически, проще не решать систему неких соотношений и уравнений, а отобразить реальную систему в память компьютера, с учетом связей между элементами памяти.

Информационные модели. Информационные модели принято противополагать математическим, точнее алгоритмическим. Здесь важно соотношение объемов данные/алгоритмы. Если данных больше или они важнее имеем информационную модель, иначе - математичееская.

Предметные модели. Это прежде всего детская модель – игрушка.

Образно-знаковые модели. Это прежде всего модель в уме человека: образная, если преобладают графические образы, и знаковая, если больше слов или (и) чисел. Образно-знаковые модели строятся на компьютере.

Масштабные модели. К масштабным моделям те из предметных или образных моделей, которые повторяют форму объекта (карта).

VII Часть. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Трудно найти такую сферу человеческой деятельности, в которой не использовались бы вероятностно-статистические методы. Они применяются практически во всех областях науки, в экономике, военном деле, технике, медицине, юридической практике, криминалистике и т.д. Эти методы базируются на понятиях *случайного события* и *вероятности.* Решающий вклад в теорию вероятностей внесли такие замечательные математики как Пьер Ферма, Якоб Бернулли, Симон Лаплас, Пафнутий Львович Чебышев, Андрей Николаевич Колмогоров и многие другие.

§1. Определение и основные свойства вероятности

Окружающий нас мир пронизан явлениями, которые носят случайный характер. Мы встречаемся с ними, наблюдая состояние атмосферы, физические эксперименты, производственные процессы, общественно-политические ситуации и т.п. Результаты многих наблюдений нельзя предсказать однозначно. Предположим, в 10 ч в Твери пошел дождь. Утверждение «в 11 ч дождь кончится» может оказаться либо верным, либо нет. То же самое можно сказать о прогнозе на следующий день уровня радиации, курса доллара, популярности мэра, числа разбойных нападений, количества дорожно-транспортных происшествий. Допустим, что, исходя из каких-то соображений, мы прогнозируем на завтра 12 дорожно-транспортных происшествий на улицах нашего города. Это событие может либо произойти, либо нет. Дело в том, что ситуация на дорогах зависит от большого количества факторов и учесть влияние каждого из них заранее невозможно (погода, видимость, направление и сила ветра, самочувствие водителей и пешеходов, количество и расположение транспорта на трассе и т.д.) Поэтому не исключено, что число происшествий окажется не 12, а, например, 10, 8, или 15. Каждый такой факт является *случайным событием.*

Все наблюдаемые при определенных условиях события можно разделить на три вида: *достоверные, невозможные* и *случайные.* Всякий раз, когда указанные условия выполняются, говорят, что происходит *испытание.*

Достоверным называют такое событие, которое происходит при каждом испытании.

Невозможным называют событие, которое не может произойти ни при одном испытании.

Случайным называют событие, которое в данном испытании может произойти, а может и не произойти.

Пример 1. В урне имеются шары только синего и красного цвета. Наугад вынимают один шар. Событие, состоящее в том, что вынут либо синий, либо красный шар — достоверное. Событие, состоящее в том, что вынут шар белого цвета — невозможное. Событие «вынут шар красного цвета» (или событие «вынут шар синего цвета») является случайным.

Пример 2. Стрелок производит один выстрел по мишени, разделенной на 10 зон. Выстрел — это испытание; попадание в определенную зону, например, в «десятку» — событие; событие, состоящее в том, что мишень либо поражена, либо не поражена — достоверное событие; поражение одним выстрелом сразу трех зон — невозможное событие.

Случайные события будем обозначать буквами $A, B, C, \ldots$, достоверное событие — символом Ω (греческая строчная буква омега), невозможное событие — символом $\varnothing$.

Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 3. При одном бросании монеты выпадает либо орел (событие *A*), либо решка (событие *B*). События *A* и *B* несовместны.

В примере 2 обозначим через A_1, A_2, ... , A_{10} события, состоящие, соответственно, в поражении первой, второй, ... , десятой зоны. Так как при попадании в границу двух зон судья всегда делает выбор в пользу какой-нибудь одной из них, то можно считать что события A_1, A_2, ... , A_{10} несовместны.

События A_1, A_2, ... , A_n называются *единственно возможными,* если в результате испытания происходит какое-либо одно и только одно из этих событий.

Пример 4. Игральную кость бросают один раз. События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, состоят, соответственно, в выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти события являются единственно возможными.

В примере 2 события A_1–A_{10} не будут единственно возможными, т.к. стрелок может вообще не попасть в мишень.

Каждое испытание можно описать с помощью событий, которые являются несовместными и единственно возможными. Эти события называются *исходами испытания* или *элементарными событиями.* Совокупность всех исходов испытания называют также *пространством элементарных событий.*

Примеры

5. Из колоды (36 карт) наугад вынимают одну. Это испытание имеет 36 исходов, каждый из которых соответствует выбору определенной карты.

6. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Участник приобретает один билет. Здесь испытанием является выбор одного билета. Таким образом, мы имеем 1000 исходов.

7. Карточка спортлото содержит 49 наименований. Играющий зачеркивает 6 из них. Здесь исходом является набор из шести клеток карточки. Так как порядок зачеркивания не играет никакой роли, то число всевозможных исходов будет равно числу сочетаний из 49 по 6 – C_{49}^{6}.

8. При демографических исследованиях выбирают случайным образом супружеские пары и отмечают их возраст. Исходом каждого такого испытания является *упорядоченная пара чисел* — возраст мужа и возраст жены.

9. В программе экзамена 30 вопросов, студент выбирает 2 из них. Исходом здесь является любая пара вопросов из данных тридцати. Количество исходов будет C_{30}^{2}.

Классическое определение вероятности

В мире случайных явлений, хотя они и случайные, имеются закономерности, которые изучают с помощью понятия *вероятности.* Вероятность представляет собой количественную характеристику возможности наступления некоторого случайного события. Исторически сложились различные подходы к определению вероятности. Классическое определение вероятности сформировалось в XVII в. в результате анализа азартных игр и основано на понятии *равновозможности* событий. Равновозможность событий означает, что нет оснований предпочесть какое-либо одно из них другим. Например, появление орла или решки при одном подбрасывании монеты считают равновозможными событиями; случайный выбор какой-либо карты из колоды — тоже.

Рассмотрим испытание, в результате которого может появиться событие *A*. Каждый исход, при котором осуществляется событие *A,* называется *благоприятным событию A.*

Пусть, например, событие *A* состоит в выпадении четного числа очков при одном бросании игральной кости. Из шести равновозможных исходов (от одного до шести очков) три исхода (2, 4, 6) являются благоприятными событию *A*.

Определение. *Вероятностью* события *A* называется отношение числа исходов, благоприятных событию *A,* к числу всех исходов испытания.

Например, вероятность появления четного числа очков при одном бросании игральной кости равна 1/2, т.к. число всех исходов 6, а число исходов, благоприятных событию *A* — три.

Вероятность события *A* обозначают *P(A);* число исходов, благоприятных событию *A,* через *m(A);* число всех исходов — через *n.* Тогда по определению

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Задачи

1. В урне 10 красных и 8 синих шаров. Наугад вынимают один. Какова вероятность того, что вынут шар красного цвета?

Решение. Это испытание имеет 18 равновозможных исходов. Каждый исход означает выбор одного шара. Пусть событие *A* означает выбор красного шара. Число исходов, благоприятных событию *A,* равно 10. Итак, $m(A) = 10$, $n = 18$ и

$$P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

2. Монета подбрасывается два раза. Найти вероятность того, что выпадут и решка и орел.

Решение. Обозначим событие, состоящее в выпадении орла, буквой О, решки — буквой Р. Испытанием здесь является двукратное подбрасывание монеты. Всего может быть 4 исхода: ОО, РР, ОР, РО, поэтому $n = 4$. Событие *A,* состоящее в выпадении и орла и решки имеет два благоприятных исхода: РО и ОР. Следовательно, $m(A) = 2$, $n = 4$ и $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3. В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Их них 15 выигрывают по 50 000 сум., 25 — по 10 000 сум., 60 — по 5000 сум. Играющий приобрел один билет. Какова вероятность выиграть не менее 10 000 сум.?

Решение. Испытание состоит в выборе наугад одного билета из 1000. Поэтому число всех равновозможных исходов равно n = 1000. Пусть событие A состоит в том, что участник лотереи приобрел билет, который выигрывает либо 5000, либо 10 000 сумлей. Число всех таких билетов равно $m(A)$ = 40. Поэтому

$$P(A) = \frac{40}{100} = 0{,}04$$

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

I. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

II. Вероятность достоверного события равна единице.

III. Вероятность невозможного события равна нулю.

Первое свойство следует из того, что число благоприятных исходов составляет часть от числа всех возможных исходов.

Второе свойство вытекает из того, что достоверное событие происходит при всяком испытании.

Третье свойство вытекает из того, что невозможное событие не имеет благоприятных исходов.

При решении задач на вычисление вероятностей возникают трудности, связанные с определением числа тех или иных исходов испытания. В таких случаях используются комбинаторные формулы, которые мы обсуждали в предыдущей главе.

Задачи

1. Найти вероятность того, что четырехзначный номер случайно встреченного автомобиля состоит из одинаковых цифр.

Решение. Каждая цифра номера может быть одной из десяти: 0, 1, 2, ..., 9. Испытанием является выбор какой-либо четверки цифр. Количество всех возможных номеров, т.е. число всех исходов, равно 10 • 10 • 10 • 10 = 10 000 (см. гл. III). Пусть событие A состоит в том, что все цифры выбранного номера одинаковы. Благоприятных исходов будет 10: 0000, 1111, ..., 9999. Итак, n = 10 000, $m(A)$ = 10 и $P(A) = \frac{10}{10000}$ = 0,001.

2. Во время процедуры опознания двух подозреваемых посадили на скамью вместе с восемью другими лицами. Какова вероятность того, что на скамье между подозреваемыми оказалось ровно 3 человека?

Решение. Занумеруем места на скамье в естественном порядке: 1, 2, ..., 10.

Тогда любое расположение двух подозреваемых описывается парой чисел, причем пары (a,b) и (b,a) считаются различными. Таким образом, испытанием будет выбор упорядоченной пары чисел и число всевозможных исходов равно числу размещений из десяти по два, т.е. A_{10}^2 = 10 • 9 = 90 (см. гл. III). Событие A состоит в том, что разность между числами пары равна 4 или –4 (это и означает, что между подозреваемыми находится 3 человека). Перечислим все исходы, благоприятные событию A: (1,5), (5,1), (2,6), (6,2), (3,7), (7,3), (4,8), (8,4), (5,9), (9,5), (6,10), (10,6).

Всего, как мы видим, получилось 12 пар. Поэтому

$$P(A) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

6. Программа экзамена содержит 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают 2 вопроса, которые выбираются случайным образом. Положительная оценка ставится в том случае, если студент правильно ответил хотя бы на один вопрос. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?

Решение. Рассмотрим испытание, состоящее в выборе двух из тридцати вопросов. Исходом испытания является пара вопросов. Поскольку порядок, в котором выбираются вопросы, несуществен, то число всех n исходов равно числу сочетаний из тридцати по два. Согласно формуле (6) из гл. III, n = $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2}$ = 435. Пусть событие A состоит в том, что студент знает хотя бы один вопрос из двух выбранных. Благоприятные событию A исходы разделим на две группы. В первую включим пары с одним известным студенту вопросом, во вторую — пары с двумя известными ему вопросами. Пары первого типа составляются так: один вопрос выбирается из двадцати знакомых, другой — из десяти незнакомых. По правилу умножения число таких пар равно 20 • 10 = 200. Пары второго типа получаются выбором двух из двадцати знакомых вопросов.

Их число равно $C_{20}^{2} = \dfrac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}$ = 190. Следовательно, число всех благоприятных исходов будет 200 + 190 = 390 и

$P(A) = \dfrac{390}{435} = \dfrac{78}{87}$ = 0,8965...≈ 0,9.

7. Преступник знает, что шифр сейфа составлен из цифр 1, 3, 7, 9, но не знает, в каком порядке их набирать.

1) Какова вероятность того, что первые две цифры он набрал верно?

2) Какова вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки?

Решение.

1) Исходом будем считать упорядоченную пару первых цифр шифра. Число таких пар равно числу размещений из четырех по два, т.е. 4 • 3 = 12. Так как в этом случае только один исход является благоприятным, то искомая вероятность равна 1/12.

2) Исходом испытания является какая-либо перестановка из цифр 1, 3, 7, 9. Согласно формуле (4) из гл. III, число всех исходов равно 4! = 24. Так как только один исход является благоприятным, то вероятность открыть сейф с первой попытки равна $\dfrac{1}{24}$.

Задания

1. Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 11? 7? 8?

2. В партии из 100 деталей имеется 10 бракованных. Для проверки отобрали 5 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется только одна бракованная.

3. В студенческой группе (12 девушек и 8 юношей) разыгрываются 5 засумежных путевок. Какова вероятность того, что путевки получат 3 девушки и 2 юноши?

4. Для включения в избирательный бюллетень нужно выбрать 8 из 10 кандидатов. Какова вероятность того, что в бюллетень попадет интересующий нас кандидат, если все кандидаты имеют одинаковые шансы?

5. Из цифр 3, 5, 9 составлены всевозможные двузначные числа. Какова вероятность того, что выбранное из этой совокупности число делится на три?

§2. Вероятность и её свойства

В теории вероятностей изучаются методы вычисления вероятностей случайных событий. Часто бывает так, что вероятность некоторого события С можно найти, зная вероятности других событий, связанных с событием С. Для этого прежде всего используются правила сложения и умножения вероятностей, о которых мы расскажем в этом и следующем параграфах.

История о находчивом майоре.

В городе Инфоландияе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших Инфоландияоуниверсал-банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:

событие Р — обнаружен преступник Рыков;

событие У — обнаружен преступник Угрюмов;

событие Ф — обнаружен преступник Фомкин;

событие Т — обнаружен преступник Трошкин.

С помощью этих обозначений майор Зимин мог передать любую информацию. Например, сообщение Р + У означало бы, что обнаружен по крайней мере один из двоих преступников, Рыков или Угрюмов; сообщение УФ — обнаружены Угрюмов и Фомкин; сообщение $\overline{\text{Т}}$ — Трошкин не обнаружен.

Вскоре в Центр пришли следующие сообщения: 1) У + Ф; 2) УТ; 3) $\overline{\text{ФР}}$. Там их без труда расшифровали. Согласно первой шифровке, обнаружен кто-то из двоих — Угрюмов или Фомкин, причем не исключено, что и оба. Второе сообщение означало, что обнаружены и Угрюмов и Трошкин. Из третьего сообщения следовало, что Фомкин и Рыков не обнаружены. Таким образом, на первом этапе розыска обнаружили двоих преступников. Дальнейшие шифровки были такими:

4) УТ(Ф + Р); 5) УТФ$\overline{\text{Р}}$; 6) УТФР.

Первая из них означала, что обнаружены Угрюмов, Трошкин и по крайней мере один из двух других преступников. Вторая шифровка: обнаружены все, кроме Рыкова. Третья: обнаружены все четверо.

Упражнения

1. Расшифруйте донесения группы захвата:

1) Т+У; 2) Т$\overline{\text{У}}$; 3) У+Ф; 4) У$\overline{\text{Ф}}$; 5) Р+Ф; 6) У(Ф + Т).

7. Зашифруйте следующие донесения: 1) взят только один из четырех; 2) взят по крайней мере один; 3) взяли не менее двух; 4) взяли только двоих; 5) взяли только троих; 6) взяли всех четверых.

Вы уже поняли, конечно, что майор Зимин изучал теорию вероятностей. Для шифровки донесений он использовал следующие понятия этой теории.

<u>Сумма событий.</u>

Если в некоторой ситуации произошло по крайней мере одно из двух событий *A* или *B,* то говорят, что произошло событие *A* + *B.* Так вводится понятие *суммы событий.* Например, событие Т + Р + Ф означает, что взят по меньшей мере один из трех (Трошкин, Рыков, Фомкин).

<u>Произведение событий.</u>

Если произошли оба события, и A и B, то говорят, что произошло событие AB. Так вводится понятие *произведения событий.* Например, событие РТФ состоит в том, что взяты трое — Рыков, Трошкин и Фомкин.

Если событие A не произошло, то говорят, что произошло событие $\bar{A}$. Так вводится понятие *противоположного* события. Например, событие $\overline{\text{ТФ}}$ означает, что не взяты оба преступника, Трошкин и Фомкин, а событие $\overline{\text{Т}+\text{Ф}}$, противоположное событию Т+Ф, состоит в том, что не произошло по крайней мере одно из событий — Т или Ф.

2. Из колоды карт вынимается одна. Событие A — вынута карта красной масти; событие B — вынут туз. Что означают события: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A + B$, AB?

3. Игральная кость бросается один раз. Событие A — выпало четное число очков; событие B — выпало число очков, кратное трем. Что означает событие $A + \bar{B}$? Запишите событие, состоящее в выпадении шести очков.

4. В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие A состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку; событие B — он сдал экзамен по философии; событие С — получил зачет по физкультуре.

Запишите события:

а) студент не получил зачета;

б) сдал 2 экзамена;

в) сдал по крайней мере один экзамен;

г) получил зачет, но не сдал ни одного экзамена;

д) сдал только один из экзаменов и не получил зачета;

е) не сдал ничего;

ж) сдал все.

Свойства вероятности

Теорема 1. *Если события A и B несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле*

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть число всех исходов равно n. В число исходов, благоприятных событию $A + B$, входят все исходы, благоприятные событию A и все исходы, благоприятные событию B. Так как события A и B несовместны, то среди перечисленных исходов нет одинаковых. Поэтому $m(A + B) = m(A) + m(B)$. Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m(A+B)}{n}=\frac{m(A)}{n}+\frac{m(B)}{n}=P(A)+P(B)$$

что и требовалось доказать.

Задача. В урне 8 белых, 5 синих и 2 красных шара. Какова вероятность того, что вынутый шар будет синего или красного цвета?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что вынут синий шар, а событие B — вынут красный шар. Тогда $P(A) = \frac{5}{15}$, $P(B) = \frac{2}{15}$. Событие $A + B$ означает, что вынут шар синего или красного цвета. Так как события A и B несовместны, то вероятность события $A + B$ вычисляется по формуле (1)

$$P(A+B) = \frac{5}{15}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}.$$

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$P(\bar{A})=1-P(A). \qquad (2)$$

Доказательство. Так как события A и $\bar{A}$ несовместны, то по формуле (1)

$$P(A+\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

С другой стороны, событие $A + \bar{A}$ является достоверным, поэтому по свойству II из §2 имеем $P(A + \bar{A}) = 1$. Следовательно, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, отсюда $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, что и требовалось доказать.

Задача. Один лотерейный билет выигрывает с вероятностью 0,0001. Какова вероятность того, что владелец одного билета ничего не выиграет?

Решение. Пусть событие A означает выигрыш. Тогда $\bar{A}$ означает, что билет не выигрывает. По формуле (2)

$$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999.$$

Замечание. Формулу (1) можно распространить на любое число событий. Методом математической индукции доказывается, что если события A_1, A_2, ..., A_n. попарно несовместны, то вероятность их суммы вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ...+ P(A_n). \qquad (3)$$

Задания

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 выбирают две и составляют двузначное число. Событие A — обе цифры числа четные; событие B — обе цифры нечетные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, $\overline{A+B}$, AB? Найдите вероятности всех перечисленных событий.

2. Из одиннадцати карточек составлено слово

$$\boxed{С}\ \boxed{Л}\ \boxed{Е}\ \boxed{Д}\ \boxed{О}\ \boxed{В}\ \boxed{А}\ \boxed{Т}\ \boxed{Е}\ \boxed{Л}\ \boxed{Ь}.$$

Из них выбирают поочередно четыре карточки и приставляют одну к другой. Какова вероятность того, что получится слово «дело»?

Решение. Введем события Д, Е, Л, О, состоящие в том, что первая выбранная буква — Д, вторая — Е, третья — Л и четвертая — О. Нам нужно найти вероятность произведения этих событий. По формуле (7) имеем:

$$P(ДЕЛО) = P(Д) \cdot P(Е/Д) \cdot P(Л/ДЕ) \cdot P(О/ДЕЛ) =$$
$$= \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{1980}.$$

3. Управление УВД Стукова выделило 3 премии для сотрудников оперативных групп. В фуражку начальника положили 8 фантов с фамилиями всех восьми сотрудников. Какова вероятность того, что первую премию получит следователь Зубов, вторую — оперативник Прокопенко, третью — эксперт Зульфия?

4. В команде по синхронному плаванию Независимого международного университета из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. Для участия в соревновании выбирают четверых. Какова вероятность, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

5. В милицейском колледже города Брюкова экзамены сдают так. Студент выбирает пять вопросов и получает столько баллов, на сколько вопросов он правильно ответил. Студент Громов знает 15 вопросов из 24. Какова вероятность того, что он получит пятерку?

Задания

1. В течение месяца суд вынес 30 приговоров, в том числе 6 — за кражу. В порядке прокурорского надзора проверено 10% дел. Какова вероятность того, что в их числе оказалось два дела по обвинению в краже?

2. Вероятность того, что спортсмен улучшит свой личный рекорд с первой попытки, равна 0,5. Если первая попытка оказалась успешной, то вероятность улучшить этот результат в следующей попытке остается той же. В случае, если первая попытка оказалась безуспешной, вероятность улучшить результат со второй попытки равна 0,4. Найдите вероятность того, что спортсмен улучшит свой результат:

а) в каждой из двух попыток,

б) только в первой попытке,

в) только во второй попытке,

г) хотя бы в одной из двух попыток.

3. Как показывает практика, в среднем в трех автомобилях из каждой тысячи, проходящих таможенный досмотр, обнаруживают наркотики. Какова вероятность того, что наркотики будут обнаружены хотя бы в одной из пятисот проверенных машин?

§3. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторные задачи связаны: а) с выбором из некоторой группы предметов тех, которые обладают заданными свойствами; б) с расположением этих предметов в определенном порядке; в) с расчетом числа возможных комбинаций. Ниже мы приводим примеры таких задач и обсуждаем способы их решения.

Задача 1. *90 дней майора Зимина*

Майор Зимин ежедневно формирует наряд для поддержания общественного порядка в центре города Инфоландия. Наряд состоит из двух человек — старшего наряда и дежурного. В распоряжении майора находится 10 милиционеров. Чтобы избежать длительных контактов милиционеров с нарушителями правопорядка, майор составляет наряд каждый день по-разному. Сколько дней майор Зимин может спать спокойно (т.е. до тех пор, пока какой-нибудь наряд не повторится)?

Решение. Прежде всего, майор занумеровал личный состав числами 1, 2, ... , 10. Далее, поскольку майор был страстным болельщиком, он составил таблицу наподобие той, в которой отмечал результаты футбольного первенства:

дежурный / старший	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

В клетках он проставил даты дежурств. Каждая клетка находится на пересечении некоторого столбца и некоторой строки, номера которых и определяют состав соответствующего наряда.

При этом пары вида (1,7) и (7,1) считаются разными, т.к. хотя в них люди одни и те же, но должности у них разные. Клетки (1,1), (2,2), ... , (10,10) заштрихованы потому, что один и тот же человек не может быть и старшим и дежурным одновременно.

Будучи от природы человеком весьма сообразительным, майор Зимин заметил, что в каждом из десяти столбцов записано 9 вариантов наряда, поэтому 9 • 10 = 90 дней он может спать спокойно.

Задача 2. *Когда следствие ведут знатоки*

В Лапландии происходят два ЧП в день. На место происшествия отправляют оперативную группу из трех человек: следователя, оперативника и эксперта. В УВД несут службу 3 следователя, 2 оперативника и 3 эксперта. График их работы составляется таким образом, чтобы каждая очередная опергруппа отличалась от всех предыдущих (пока это будет возможно). Трое друзей — следователь Зубов, оперативник Прокопенко и эксперт Зульфия всегда добиваются успеха. Как часто эта группа попадает в график?

Решение. Будем перебирать всевозможные составы оперативной группы, учитывая, что следователя можно выбрать тремя способами (C_1, C_2, C_3), оперативника — двумя (O_1 и O_2), а эксперта — тремя способами ($Э_1$, $Э_2$, $Э_3$).

Составим так называемое *дерево*. Проведем из некоторой точки A три отрезка: AC_1, AC_2 и AC_3, каждый из которых символизирует выбор следователя (рис. 5).

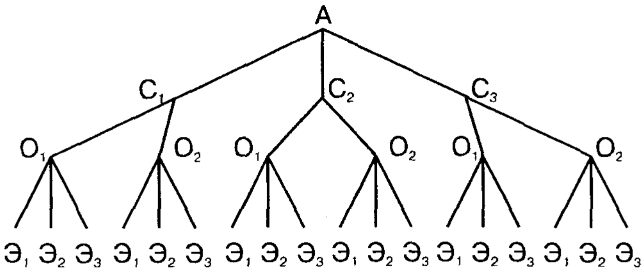


Рис. 5

Из концов этих отрезков проведем по два новых отрезка C_1O_1, C_1O_2, C_2O_1, ... , C_3O_2, каждый из которых показывает, кто из оперативников включен в опергруппу.

Из концов последних отрезков проведем еще три отрезка с концами $Э_1$, $Э_2$, $Э_3$, которые указывают на назначение в группу одного из трех экспертов. Изображенную на рисунке схему и называют деревом. Всякий путь вдоль ветвей этого дерева от его вершины A к какой-либо вершине $Э_1$, $Э_2$ или $Э_3$ изображает состав одной из оперативных групп. Например, путь $AC_2O_1Э_3$ изображает оперативную группу, в которую включены следователь C_2, оперативник O_1 и эксперт $Э_3$.

Чтобы найти число всех путей, перемножим число всех отрезков, выходящих из точки A, на число отрезков с началом в точках C_1, C_2, C_3 и на количество отрезков, проведенных из точек O_1 и O_2. Полученное произведение 3 • 2 • 3 = 18 дает число всевозможных различных оперативных групп. Так как в день выезжают две группы, то через 18 : 2 = 9 дней группы начнут повторяться. Итак, знатоки (Зубов, Прокопенко и Зульфия) встречаются на выездах раз в 9 дней.

Задача 3. *Случай с адвокатом*

У адвоката N из юридической фирмы «Брюковские адвокаты» произошла досадная неприятность с компьютером — сразу после включения оперативная система зависла и на экране монитора появилось сообщение:

«Привет! Я — компьютерный вирус «Загадка Сфинкса». Ты должен ответить на 12 вопросов, которые записаны с помощью дренеегипетских иероглифов. На каждый вопрос можно ответить только «да» или «нет». Если через 10 дней ты не сможешь правильно ответить на мои вопросы или попытаешься выключить компьютер — твой винчестер умрет».

В компьютере содержалась очень важная информация, восстановить, которую, в случае потери, было бы практически невозможно. Но адвокат N не поддался панике, а придумал два способа решения проблемы. Во-первых можно попробовать расшифровать иероглифы с помощью специального словаря. Адвокат выяснил, что такой словарь есть в брюковской библиотеке, но получить его можно будет только через 8 дней. Поэтому он решил действовать вторым способом: перебирать все возможные комбинации ответов «да» и «нет» на 12 непонятных вопросов, пока не обнаружится правильный вариант. Чтобы не сбиться, адвокат решил записывать каждую комбинацию ответов в виде следующей таблички:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
да	да	нет	да	да	да	нет	да	нет	нет	нет	нет

На составление очередной комбинации ответов и ввод ее в компьютер адвокат тратит одну минуту. Успел ли он сделать работу вовремя и спасти винчестер, если работал по 6 ч в сутки, а правильная комбинация оказалась последней?

Решение. Число комбинаций так велико, что составление таблицы (как в задаче 1) или графической схемы (как в задаче 2) было бы слишком трудоемким. Поэтому мы ограничимся только логическими рассуждениями.

Если бы вопрос был один, то на него было бы всего два варианта ответов: «да» и «нет». Если бы вопросов было два, то комбинаций ответов было бы 4: да-да, нет-нет, да-нет, нет-да. Если бы вопросов было три, то число комбинаций ответов было бы 8, т.к. к каждому из предыдущих четырех пришлось добавить либо «да», либо «нет» при ответе на третий вопрос. Таким образом, при добавлении одного вопроса число комбинаций ответов удваивается: четыре вопроса дают $8 \cdot 2 = 16$ комбинаций ответов, на пять вопросов получается $2^4 \cdot 2 = 2^5$ комбинаций и т.д., двенадцать вопросов дадут $2^{12} = 4096$ комбинаций.

Итак последняя — нужная — комбинация ответов появится через 4096 мин работы. Разделив на 60, мы получим 68 ч 16 мин, что при шестичасовом рабочем дне составляет более одиннадцати суток.

Мы обсудили три задачи, в каждой из которых занимались расчетом числа определенных комбинаций. На самом деле, все эти задачи решаются по одной и той же логической схеме. Сейчас мы запишем общие формулы для решения любых задач подобного типа.

В наиболее общем виде решение первой задачи выглядит так.

Пусть требуется выполнить последовательно два действия (например, первое действие — выбор старшего наряда, второе — выбор дежурного). *Если первое действие выполняется m различными способами, а второе — n различными способами, то оба действия можно выполнить $m \cdot n$ различными способами.* Это утверждение называется *правилом умножения.*

Задача 2 обобщается следующим образом: *пусть требуется последовательно выполнить три действия, причем, первое действие может быть выполнено m способами, второе — n способами и третье — k способами. Тогда три действия можно выполнить $m \cdot n \cdot k$ способами*.

Попробуйте сформулировать в общем виде аналогичную задачу для произвольного числа действий. Например, во второй задаче всего 12 действий и каждое из них выполняется двумя способами («да» и «нет»). Поэтому ответ будет 2 • 2 • 2 • ... • 2 — всего 12 сомножителей, т.е. $2^{12} = 4096$.

Таблица и дерево, с помощью которых мы решали первые две задачи, описывают правило умножения в некоторой специфической форме.

Правило умножения — хотя и простой, но важный математический факт. Поэтому его необходимо строго доказать. Это будет сделано в следующем параграфе.

VIII Часть. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Статистика, возможно, знает все, но её знают не все.

Александр Самойленко

§1. Основы математической статистики

Явления, происходящие в природе, в обществе, в человеке и технике очень сложны и разнообразны. Исследователи изучают разные стороны этих явлений, причем каждая наука вырабатывает свои специфические методы исследования. Например, таким важным социальным явлением, как преступность, занимаются не только юристы, но и социологи, психологи, медики и иные специалисты. Есть тут серьезная работа и для математиков. Их задача состоит в том, чтобы подвергнуть математической статистике огромный статистический материал: отчеты органов внутренних дел и другие документы, содержащие различные числовые данные. В этой части мы рассмотрим наиболее существенные сведения о статистических методах обработки информации.

Термин статистика употребляется чаще всего для обозначения двух понятий. Во-первых, статистикой называют набор количественных данных о некотором явлении, совокупности объектов и т.п. Эти данные называют статистическими.

Во-вторых, термином статистика объединяют совокупность методов исследования, основанных на анализе статистических данных.

В каждой области деятельности разработаны свои специфические статистические методы. Существует много разных статистик:

- социально-экономическая,
- демографическая,
- медицинская,
- юридическая,
- звёздная и ряд других.

Поскольку всякая статистика оперирует с числами, то основой всех статистических методов является математика. Совокупность математических методов обработки, систематизации, анализа и использования статистических данных составляет предмет специальной науки – математической статистики. Именно математические методы в силу их объективности позволяют получать наиболее значимые результаты при обработке статистических данных. Глубина и достоверность этих результатов зависит как от мощности применяемых математических методов, так и от правильности их применения. Разумеется, достоверность результатов зависит также от доброкачественнности статистического материала, который подвергается обработке.

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайные явления. Связующим звеном между ними являются предельные теоремы теории вероятностей. При этом теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального процесса, а математическая статистика устанавливает свойства математической модели, исходя из данных наблюдений (говорят «из статистических данных»).

Предметом математической статистики является изучение случайных величин (или случайных событий, процессов) по результатам наблюдений. Полученные в результате наблюдения (опыта, эксперимента) данные сначала надо каким-либо образом обработать: упорядочить, представить в удобном для обозрения и анализа виде. Это первая задача.

Затем, это уже вторая задача, оценить, хотя бы приблизительно, интересующие нас характеристики наблюдаемой случайной величины. Например, дать оценку неизвестной вероятности события, оценку неизвестной функции распределения, оценку математического ожидания, оценку дисперсии случайной величины, оценку параметров распределения, вид которого неизвестен, и т.д.

Следующей, назовем ее условно третьей, задачей является проверка статистических гипотез, т.е. решение вопроса согласования результатов оценивания с опытными данными.

Одной из важнейших задач математической статистики является разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки делать обоснованные выводы о распределении признака изучаемых объектов по всей совокупности.

Среднее арифметическое

Понятие *среднего значения* используется для описания разнообразных явлений природы и общественной жизни. Так, говорят о средней температуре воздуха, средней скорости движения, средней зарплате, средней продолжительности жизни и т.д. В науке и технике на основе взаимоотношений между средними величинами изучают и рассчитывают всевозможные проекты, в экономике — оптимальные планы, в военном деле — возможные стратегии и основанные на них военные доктрины, в общественной жизни — прогнозы общественно-политической ситуации. Например, во время предвыборной кампании службы по изучению общественного мнения составляют прогнозы, в которых оценивают шансы на успех различных кандидатов. Ясно, что провести опрос всех избирателей невозможно, поэтому проводят опрос небольшой части населения. По результатам опроса прогнозируют средние проценты популярности кандидатов у различных социальных групп и в разных регионах. Если обработка результатов опроса проведена математически грамотно, то выводы будут достаточно точно отражать реальную ситуацию.

Средней величиной обычно называют *среднее арифметическое.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа. Их *средним арифметическим* называется число

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \tag{1}$$

Пример 1. По сведениям автоинспекции, количество дорожных происшествий на улицах города Инфоландия в первую декаду октября было таким:

6 8 10 7 6 11 9 8 7 11.

Среднее арифметическое этих чисел

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(6 + 8 + 10 + 7 + 6 + 11 + 9 + 8 + 7 + 11) = 8{,}3$$

показывает среднее число дорожных происшествий в день.

В сводке за следующие 10 дней оказались такие данные:

0 5 7 7 12 11 14 13 7 6.

Их среднее арифметическое будет

$$\overline{y} = \frac{1}{10}(0 + 5 + 7 + 7 + 12 + 11 + 14 + 13 + 7 + 6) = 8{,}2.$$

Мы видим, что средние значения (8,2 и 8,3) отличаются друг от друга значительно меньше, чем число происшествий за каждый день, которое может быть 0, 5, 7, ...14. Поэтому *среднее* число дорожных происшествий можно прогнозировать, причем достаточно точно.

Этот факт подтверждается и отчетами ГАИ за много лет. Из них видно также, что чем больше срок, за который составляется отчетность (декада, месяц, квартал, год, пятилетка), тем средняя величина устойчивее. Иными словами, среднее число происшествий за декаду колеблется меньше, чем число происшествий за каждый день; среднее число происшествий за месяц колеблется еще меньше, и так далее.

Описанное свойство средних представляет собой одно из важнейших проявлений Закона Больших Чисел, открытого знаменитым русским математиком П. Л. Чебышевым.

Если таблица исходных данных содержит несколько десятков чисел, то составляют более сложную таблицу, в которой для каждой из величин указывают, сколько раз она наблюдалась.

Пример 2. УВД города Инфоландия опубликовало сводку о числе правонарушений, совершенных подростками за первые 20 дней сентября: 8 6 13 4 13 13 12 9 7 6 12 14 13 12 17 6 8 12 7 12.

По этим данным составлена следующая таблица:

Таблица 1

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
m_i	1	3	2	2	1	5	4	1	1

Здесь m_i — число дней с одним и тем же количеством правонарушений, $\tilde{x}_i$ — число правонарушений за день. Из таблицы видно, например, что был всего 1 день, в течение которого произошло ровно 4 правонарушения; в течение трех дней было по 6 правонарушений и т.д. Заметьте, что в первой строке числа расположены в порядке возрастания, а если сложить все числа второй строки, то получится общее число дней, т.е. 20.

Согласно приведенным данным, среднее число правонарушений за один день будет

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{20}(4 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 12 + 12 + \\ &\quad + 12 + 12 + 12 + 13 + 13 + 13 + 13 + 14 + 17) = \\ &= \frac{1}{20}(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + \\ &\quad + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 17 \cdot 1) = \frac{1}{20} \cdot 204 = 10{,}2.\end{aligned}$$

Таким образом, формулу (1) для подсчета среднего арифметического можно записать так:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k).$$

Здесь $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_k$ — *различные* среди заданных n чисел, причем значение $\tilde{x}_1$ встречается m_1 раз, значение $\tilde{x}_2$ повторяется m_2 раз, и так далее, наконец, значение $\tilde{x}_k$ встречается m_k раз. При этом

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Табл. 1 можно переписать так, чтобы в ней не содержалась информация о числе дней, в течение которых проводились наблюдения. Заменим в табл. 1 вторую строку на новую, которую составим так: вместо числа дней поставим долю, которую это число составляет от числа всех дней. Эта доля называется *частотой.* Так как число всех дней 20, то 1 заменим на 1/20 = 0,05, 3 — на 3/20 = 0,15 и т.д. В результате табл. 1 примет следующий вид:

Таблица 2

$\tilde{x}_i$	4	6	7	8	9	12	13	14	17
$\tilde{p}_i$	0,05	0,15	0,10	0,10	0,05	0,25	0,20	0,05	0,05

Как и в табл. 1, в первой строке указано число правонарушений за день, а во второй — соответствующая частота. Сумма чисел, стоящих во второй строке, равна единице. Это свойство следует из определения частоты.

Используя понятие частоты, мы можем подсчитать среднее значение x иным способом:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 13 \cdot 4 + 14 \cdot 1 + 17 \cdot 1) = 4 \cdot \frac{1}{20} + 6 \cdot \frac{3}{20} + 7 \cdot \frac{2}{20} + 8 \cdot \frac{2}{20} + 9 \cdot \frac{1}{20} + 12 \cdot \frac{5}{20} + 13 \cdot \frac{1}{20} + 14 \cdot \frac{1}{20} + 17 \cdot \frac{1}{20} = 4 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}15 + 7 \cdot 0{,}10 + 8 \cdot 0{,}10 + 9 \cdot 0{,}05 + 12 \cdot 0{,}25 + 13 \cdot 0{,}20 + 14 \cdot 0{,}05 + 17 \cdot 0{,}05.$$

Таким образом, среднее арифметическое $\overline{x}$ равно сумме произведений чисел, взятых из первой строки табл. 2, на их частоты.

Преобразуем таким же способом формулу (3). Введем частоты

$$\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n}, \quad \tilde{p}_2 = \frac{m_2}{n}, \ldots, \quad \tilde{p}_k = \frac{m_k}{n}.$$

В результате формула (3) для среднего арифметического запишется так:

$$\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k. \tag{4}$$

Преимущество этой формулы, по сравнению с формулой (3), состоит в том, что ей можно пользоваться и в том случае, когда не известны величины $m_1, m_2, ..., m_k$ и n, но известны значения частот.

Пример 3. В городе Инфоландия каждому пассажиру междугородного автобуса вручают страховой полис на 50 000 сум., взимая за это 500 сум. Какова средняя прибыль страховой компании от продажи одного полиса, если несчастные случаи происходят в среднем с одним пассажиром из 10 000? Учтите, что по правилам страховых компаний города Инфоландия страховка выплачивается только в случае гибели пассажира.

Решение. Прибыль может принимать два значения:

500 сум, если несчастного случая не произошло, и –49 500 сум. при автокатастрофе (знак «минус» означает, что компания терпит убыток). Прибыль -49 500 сум. появляется в одном случае из 10 000, следовательно, частота этого значения прибыли равна 0,0001. Частота другого значения — 500 сум. равна 0,9999. Получаем следующую таблицу:

Прибыль	500	–49500
Частота	0,9999	0,0001.

Среднее значение прибыли найдем по формуле (4):

$$\bar{x} = 500 \cdot 0{,}9999 + (-49500) \cdot 0{,}0001 =$$
$$= 499{,}95 - 4{,}95 = 495 \text{ (руб.)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

При описании некоторых явлений среднее арифметическое дает о них примерное представление, вполне удовлетворительное для практических целей. Таково, например, среднее число правонарушений в день, рассмотренное в примере 1 (§2). Однако весьма часто встречаются такие ситуации, для описания которых недостаточно знать только среднее арифметическое.

История первая. Двух студентов юридического факультета послали на практику, одного в город Инфоландия, другого — в город Лапландия.

Практиканты узнали, что в это время года среднесуточная температура в этих городах равна нулю. Тот из них, кто поехал в Лапландию, будучи человеком осторожным, взял с собой только теплые вещи. Другой, более легкомысленный, оделся по-летнему. Оказалось, что в течение всей практики в обоих городах температура была стабильной: в Инфоландии — +2 днем и –2 ночью, в Лапландии — +15 днем и –15 ночью. В результате, несмотря на то, что среднесуточная температура действительно была нулевой, оба студента заболели, так как один постоянно перегревался, а другой — постоянно мерз.

История вторая. Один из торговцев в Инфоландии был очень набожным человеком. Как-то раз, под впечатлением воскресной проповеди о пользе благотворительности, он в первой половине недели сдавал каждому покупателю сдачу на 1000 сум. больше, чем нужно. Но потом действие проповеди ослабело, и нашего торговца одолела природная корысть. В следующие три дня он уже обманывал каждого покупателя, беря со всех на 1000 сум. больше. Поскольку число покупателей в первые и последние три дня недели было одинаковым, то получается, что в среднем размер неправильной сдачи равен нулю, т.е. в среднем покупатели получали сдачу правильно!

Из этих историй видно, что, помимо средней величины, нужно знать еще и то, *как* заданные числа рассеяны около их среднего значения. Для этой цели вводятся *дисперсия* и *среднее квадратическое отклонение.*

Дисперсией величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется число

$$D = \frac{1}{n}\left((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2\right). \qquad (5)$$

Пример 1. На обследование каждого из десяти автомобилей было затрачено следующее время (в мин):

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	25	30	22	22	54	36	41	45	25	40

Здесь символом x_i обозначено время, затраченное на обследование автомобиля с номером i. Найти дисперсию величин x_i.

Решение. Составим таблицу из трех столбцов:

Таблица 4

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
25	–9	81
30	–4	16
22	–12	144
22	–12	144
54	20	400
36	2	4
41	7	49
45	11	121
25	–9	81
40	6	36
340	0	1076

В последней строке первого столбца записано общее время обследования всех автомобилей, т.е. сумма всех чисел x_i — 340. Поделив ее на 10, найдем среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, ..., x_{10}$: $\bar{x} = 34$ (мин).

Во втором столбце записаны разности $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, ... , $x_{10} - \bar{x}$, представляющие собой отклонения величин $x_1, x_2, ..., x_{10}$ от их среднего. *Сумма отклонений всегда равна нулю,* что показано в последней строке второго столбца. Это важнейшее свойство средней величины.

В третьем столбце табл. 4 записаны квадраты отклонений: $(x_1 - \bar{x})^2$, $(x_2 - \bar{x})^2$, ... , $(x_{10} - \bar{x})^2$.

Сумма квадратов, как видно из последней строки, равна 1076. По формуле (5) находим дисперсию D:

$$D = \frac{1}{10} \cdot 1076 = 107{,}6 \text{ (мин}^2\text{)}.$$

Если известны частоты $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, ..., \tilde{p}_k$, то для вычисления дисперсии вместо формулы (5) можно использовать формулу

$$D = (\tilde{x}_1 - \bar{x})^2 \tilde{p}_1 + (\tilde{x}_2 - \bar{x})^2 \tilde{p}_2 + \ldots + (\tilde{x}_k - \bar{x})^2 \tilde{p}_k\ , \qquad (6)$$

где, как и выше, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_k$ суть различные среди заданных чисел $x_1, x_2, ..., x_k$.

Средним квадратическим отклонением величин $x_1, x_2, ..., x_k$ от их среднего значения $\bar{x}$ называется величина

$$S = \sqrt{D} \qquad \textbf{(7)}$$

В примере 1 среднее квадратическое отклонение равно

$$S = \sqrt{107{,}6} = 10{,}373... \approx 10{,}4 \text{ (мин)}.$$

Из формулы (5) видно, что дисперсия представляет собой среднее арифметическое квадратов разностей $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, ... , $x_n - \bar{x}$. Поэтому величину *S* можно рассматривать как среднее отклонение величин $x_1, x_2, ..., x_n$ от их среднего значения $\bar{x}$.

Из определения дисперсии и среднего квадратического отклонения следует, что последнее не превышает наибольшей из величин $|x_i - \bar{x}|$ (абсолютная величина отклонения). Так, в первом примере 10,4 < 20, т.е. *S* существенно меньше максимального отклонения. Зато в историях, которые мы рассказали в начале параграфа, среднее квадратическое отклонение *S* является максимально возможным, так как все отклонения от среднего значения одинаковы по абсолютной величине. Вычислив по формулам (5) и (6) среднее квадратическое отклонение температуры в Инфоландии и Лапландии, мы найдем, что оно равно максимальной температуре (2 и 15 соответственно); во второй истории среднее квадратическое отклонение будет 1000 сум., что также совпадает с величиной максимального отклонения.

Прежде чем двигаться дальше, необходимо ввести весьма важное понятие *переменной величины*. В примере 1 центральную роль играет табл. 3, в которой каждому автомобилю ставится в соответствие время его обследования. Математики в этом случае говорят, что время обследования есть переменная величина *X*, принимающая значения $x_1, x_2, ..., x_n$. В примере 2 из §2 переменной величиной является число правонарушений, в примере 3 — прибыль страховой компании.

Теперь допустим, что нужно обследовать *все* автомобили города Инфоландия. Но число автомобилей так велико, что описать все значения величины X (X — время обследования) практически невозможно. Однако мы можем, не проводя самого обследования, предсказать его результаты приближенно, с помощью примера 1. Предварительно, используя табл. 3, составим другую таблицу, в которой укажем время обследования $\tilde{x}_i$ и соответствующую частоту $\tilde{p}_i$:

Таблица 5

$\tilde{x}_i$	22	25	30	36	40	41	45	54
$\tilde{p}_i$	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Обычно, прогноз содержит следующую информацию о величине X:

1) диапазон значений величины X,

2) среднее значение $\bar{x}$,

3) среднее квадратическое отклонение S,

4) интервал наиболее вероятных значений величины X,

5) долю значений величины X, попадающих в заданный промежуток.

По данным примера 1:

время обследования автомобиля изменяется в пределах от $(22 - x)$ до $(54 - x)$ мин,

среднее время обследования одного автомобиля — $\bar{x} = 34$ мин,

среднее отклонение величины X от ее среднего значения $\bar{x}$ составляет $S = 10{,}4$ мин.

Интервалом наиболее вероятных значений величины X обычно называют интервал, серединой которого является точка $\bar{x}$ — среднее арифметическое, и в который попадает более половины значений величины X. Рассмотрим, например, интервал $(\bar{x} - S;\ \bar{x} + S)$. Имеем: $\bar{x} - S = 23{,}6$ и $\bar{x} + S = 44{,}4$. Из табл. 5 видно, что в интервале 23,6 – 44,4 содержится 5 значений величины X: 25, 30, 36, 40, 41. Их частоты соответственно равны 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1. Суммарная частота будет 0,6. Это число составляет 60% от единицы, т.е. от суммы всех частот. Следовательно, в интервал 23,6 – 44,4 попадает

60% (т.е. большая часть) значений величины X. Таким образом, этот интервал является интервалом наиболее вероятных значений величины X. Доля значений величины X, попавших в какой-либо другой интервал, оценивается так же. Обычно оценивают долю больших и малых значений. В нашем примере доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается меньше 23,6 мин, составляет 20% от общего количества автомобилей (в табл. 5 имеется одно такое значение — 22, и его частота равна 0,2). Доля автомобилей, на обслуживание которых затрачивается больше 44,4 мин, составляет также 20% от общего количества автомобилей.

При обработке статистического материала используется специальная терминология. Совокупность всех рассматриваемых объектов называют *генеральной совокупностью,* а часть объектов, каким-либо способом выбранных для обследования, называют *выборкой.* В нашем примере с автомобилями генеральную совокупность образуют все автомобили города Инфоландия, а выборку — те 10 автомобилей, которые рассматривались в примере 1.

Очень важно сделать выборку правильно. От этого зависит, насколько точными и достоверными будут полученные выводы, результаты прогноза. В математической статистике изучаются способы отбора, позволяющие сделать выборку так, чтобы полученная с ее помощью информация давала достаточно полное и адекватное представление об интересующем нас признаке изучаемой генеральной совокупности. Тогда найденные с помощью выборки среднее арифметическое $\bar{x}$ и D дисперсия будут близки к гипотетическим величинам — среднему арифметическому и дисперсии, которые могли бы быть получены при обработке всей генеральной совокупности.

Интервальный ряд. Гистограмма

При обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого *интервального ряда.*

Пример 1. Средняя месячная зарплата за год каждого из пятидесяти случайно отобранных работников хозяйства такова:

317 304 230 285 290 320 262 274 205 180 234 221 241 270 257 290 258 296 301 150 160 210 235 308 240 370 180 244 365 130 170 250 370 267 288 231 253 315 201 256 279 285 226 367 247 252 320 160 215 350.

Здесь переменной величиной X является средняя месячная зарплата. Как видно из приведенных данных, наименьшее значение величины X равно 130, а наибольшее — 370. Таким образом, диапазон наблюдений представляет собой интервал 130 – 370, длина которого равна 370 – 130 = 240.

Разобьем диапазон наблюдений на части *(разряды)* так, чтобы каждый разряд содержал несколько экспериментальных данных. Например, разделим интервал 130 – 370 на 6 равных частей, тогда длина каждого разряда будет 40. Границами разрядов будут числа 130, 170, 210, 250, 290, 330, 370 (рис. 3).

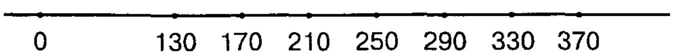


Рис. 3

Подсчитаем число значений, попавших в каждый разряд. Например, в первый разряд попадают следующие числа: 150 (1 раз), 160 (2 раза), 130 (1 раз), 170 (1 раз). Поскольку число 170 находится на границе между первым и вторым разрядами, мы включим его и в первый и во второй разряды, но с кратностью 1/2. Сложив кратности, мы получим *абсолютную частоту первого разряда:*

$$m_1 = 1 + 2 + 1 + 0{,}5 = 4{,}5.$$

Разделив абсолютную частоту на число n всех наблюдений, получим *относительную частоту* $\tilde{p}_1$ попадания величины X в первый разряд:

$$\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{4{,}5}{50} = 0{,}09\,.$$

Проделав вычисления для всех разрядов, мы получим следующую таблицу.

Таблица 6

	130-170	170-210	210-250	250-290	290-330	330-370
m_i	4,5	5	12	14,5	9	5
$\tilde{p}_i$	0,09	0,10	0,24	0,29	0,18	0,10

Здесь m_i — абсолютные частоты, $\tilde{p}_i$ — относительные частоты. Табл. 6 называется *интервальным рядом.*

Сумма всех абсолютных частот равна числу всех приведенных в табл. 6 значений переменной величины:

$$4{,}5 + 5 + 12 + 14{,}5 + 9 + 5 = 50.$$

Это свойство используется для проверки правильности вычислений. Из него следует, что сумма всех относительных частот равна единице:

$$0{,}09 + 0{,}10 + 0{,}24 + 0{,}29 + 0{,}18 + 0{,}10 = 1.$$

Интервальный ряд изображают графически в виде *гистограммы,* которая строится так. Сначала вычисляют плотности частот h_1, h_2, h_3, ... , разделив относительную частоту каждого разряда на его длину:

$$h_1 = \frac{0{,}09}{40} = 0{,}00225,\ \ h_2 = \frac{0{,}10}{40} = 0{,}00250,\ \ h_3 = 0{,}00600$$

$$h_4 = 0{,}00725,\ \ h_5 = 0{,}00450,\ \ h_6 = 0{,}00250.$$

Затем выбирают на плоскости систему координат и откладывают на оси X значения 40, 80, 120, ... , соответствующие границам разрядов. На каждом из отрезков длины 40, как на основании, строят прямоугольник, высота которого равна плотности частоты соответствую щего разряда. Полученная фигура и называется *гистограммой.* Она изображена на рис. 4.

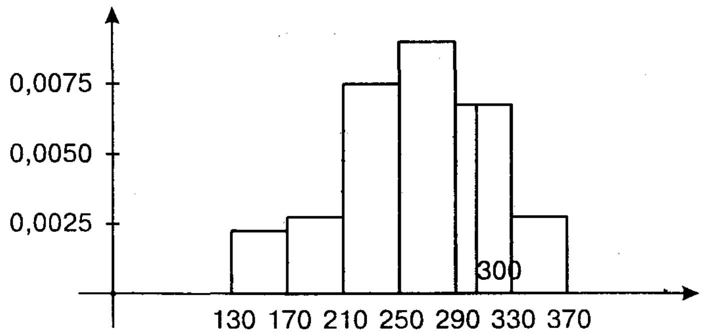


Рис. 4

Заметьте, что высоты h_1, h_2, ... , h_6 прямоугольников, образующих гистограмму, выбраны так, что их площади будут $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, ..., \tilde{p}_6$, т.е. равны соответствующим относительным частотам. Отсюда вытекает такое правило:

Для того, чтобы найти долю тех значений величины. X, которые попадают в некоторый интервал, нужно найти площадь той части гистограммы, основанием которой является данный интервал.

Определим, например, долю значений величины *X*, принадлежащих интервалу 210 – 300. Для этого вычислим площадь фигуры с основанием 210 – 300 (на рисунке она выделена штриховкой). Площади первых двух прямоугольников, составляющих фигуру, равны соответственно $\tilde{p}_3$ = 0,24 и $\tilde{p}_4$ = 0,29; площадь третьего равна 10 • 0,0045 = 0,045. Сумма площадей 0,24 + 0,29 + 0,045 = 0,575 и дает нужное число. Иными словами, 57,5% значений величины *X* находится в границах от 210 до 300.

Как мы заметили в начале параграфа, интервальный ряд составляют при обработке больших массивов информации. В таких случаях, как правило, отдельные значения величины *X* не фиксируются, а подсчитывается количество ее значений, попавших в каждый разряд (т.е. абсолютные частоты). Поэтому исследователь не знает отдельных значений наблюдаемой величины *X* и не может воспользоваться формулами (1), (5) и (7) для вычисления среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Но приближенное значение этих числовых характеристик можно найти с помощью интервального ряда. Для этого сначала находят середины разрядов: $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_k$ (здесь k — число всех разрядов интервального ряда); затем проводят вычисления по следующим формулам:

$$\overline{x} = \tilde{x}_1\tilde{p}_1 + \tilde{x}_2\tilde{p}_2 + \ldots + \tilde{x}_k\tilde{p}_k, \qquad (8)$$

$$D = (\tilde{x}_1 - \overline{x})^2\tilde{p}_1 + (\tilde{x}_2 - \overline{x})^2\tilde{p}_2 + \ldots + (\tilde{x}_k - \overline{x})^2\tilde{p}_k, \qquad (9)$$

$$S = \sqrt{D}. \qquad (10)$$

Результаты расчетов по данным табл. 6 сведены в следующую таблицу:

Таблица 7

i	$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_i\tilde{p}_i$	$\tilde{x}_i - \overline{x}$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2$	$(\tilde{x}_i - \overline{x})^2\tilde{p}_i$
1	150	13,5	–106,8	11406,24	1026,56
2	190	19,0	–66,8	4462,24	446,22
3	230	55,2	–26,8	718,24	172,38
4	270	78,3	13,2	174,24	90,53
5	310	55,8	53,2	2830,24	509,44
6	350	35,0	93,2	8686,24	868,62
		256,8			3113,75

В первом столбце записаны номера разрядов, во втором — числа $\tilde{x}_i$ (середины разрядов), в третьем — произведения $\tilde{x}_i\tilde{p}_i$, и т.д. Таблица заполняется по столбцам. Середину разряда вычисляем как полусумму его границ:

$$\tilde{x}_1 = \frac{130 + 170}{2} = 150, \quad \tilde{x}_2 = \frac{170 + 210}{2} = 190, \text{ и т.д.}$$

Согласно формуле (8), сумма чисел третьего столбца дает среднее арифметическое $\overline{x}$ = 256,8. Оно записано в последней строке этого столбца. Сумма чисел последнего столбца равна дисперсии D = 3113,75 [см. формулу (9)]. Наконец, по формуле (10) определяем среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{3113{,}75}$ = 55,80.

Интервальный ряд, гистограмма и числовые характеристики, найденные по формулам (8)—(10), составляют *математическую модель* средней заработной платы. Она используется при проведении различных социологических исследований, например, при определении уровня жизни работников какой-либо отрасли.

Задания

1. Для проведения демографических исследований выбрали 50 семей и получили следующие данные о количестве членов семьи:

2 5 3 4 1 3 6 2 4 3 4 1 3 5 2 3 4 4 3 3 2 5 3 4 4

3 3 4 4 3 2 5 3 1 4 3 4 2 6 3 2 3 1 6 4 3 3 2 1 7.

Укажите переменную величину; составьте табл. 5; найдите числовые характеристики — среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

2. Управление сельского хозяйства Инфоландийского района представило сводку по пятидесяти хозяйствам. Согласно этой сводке, урожайность пшеницы в них составила (в центнерах с гектара):

17.5 17.8 18.6 18.3 19.1 19.9 20.6 20.1 22 21.4 17.5 18.5 19 20 22 20.6 19.1 18.6 17.9 19.1 22 19 17.5 22 22.6 21 21.4 19 17.8 18.3 19.9 20.1 21.4 18.5 20 20.6 18.6 21.4 21 20 20 18 18 18 17.5 18.6 19.1 20.6 17.5 18.6 .

Постройте интервальный ряд (табл. 6), гистограмму, составьте табл. 7 и по формулам (8)-(10) найдите числовые характеристики — среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

§2. Обработка результатов эксперимента

Вариационный ряд и его характеристики

Ряды распределения – это ряды абсолютных и относительных чисел, которые характеризуют распределение единиц совокупности по качественному или количественному признаку. Примером распределения совокупности по качественному признаку может быть распределение сотрудников милиции (офицеров) по специальному званию: полковников – 1, подполковников – 3, майоров – 8 … всего – 50 человек. Эта же совокупность может быть распределена по количественному признаку, скажем, по возрасту: моложе 20 лет – 2, 20-24 года – 18, 25-29 лет – 10 и т.д. В обоих примерах ряды распределения выражены в абсолютных числах. Последние в подобных случаях называются **частотами ряда распределения**. Они указывают, насколько части повторяется тот или иной вариант (признак). Вариант «майор» имеет частоту 8, а вариант «20-24 года» – 18.

Если значения качественных или количественных признаков выражены в относительных числах (например, в процентах к общему числу), то эти значения именуются **частостями**. В этом случае наши примеры выглядят так: полковников – 2%, подполковников – 6, майоров – 16 … всего 100%; моложе 20 лет – 4%, 20-24 года – 18, 25-29 лет – 10 … всего 100%.

Ряды распределения в таблицах, как правило, имеют и частоты, и частости (табл. 1).

Таблица 1. Распределение сотрудников милиции по званию и возрасту

Звание	Абсолютное число	В % к итогу	Возраст, лет	Абсолютное число	В % к итогу
Полковник	1	2	До 20	2	4
Подполковник	3	6	20-24	18	36
Майор	8	16	25-29	10	20
Капитан	12	24	30-34	10	20
Ст. лейтенант	15	30	35-39	5	10
Лейтенант	10	20	40-49	3	6
Мл. лейтенант	1	2	50 и старше	2	4
Итого	50	100	Итого	50	100

Ряды распределения, построенные по количественному признаку (возраст, стаж, сроки расследования или рассмотрения дел, число судимостей и т.д.), называются **вариационными рядами**. Различия единиц совокупности (до 20 лет, 20-24 года, 25-29 лет и т.д.) количественного признака называется **вариацией**, а сам конкретный признак – вариантой.

Вариация признаков может быть дискретной, или прерывной (20, 21, 22, 23, 24, 25 лет и т.д.), либо непрерывной (до 20 лет, 20-25, 25-30 лет и т.д.). При дискретной вариации величина количественного признака (варианты) может принимать вполне определенные значения, отличающиеся в нашем примере на 1 год (20,21,22 и т.д.). При непрерывной вариации величина количественного признака у единиц совокупности в определенном численном промежутке (интервале) может принимать любые значения, хоть сколько-нибудь отличающиеся друг от друга. Например, в интервале 20-25 лет возраст конкретных сотрудников может быть 20 лет и 2 дня, 21 год и 10 месяцев и т.д.

Вариационные ряды, построенные по дискретно варьирующим признакам, именуют дискретными вариационными рядами, а построенные по непрерывно варьирующим признакам (интервалам) – **интервальными вариационными рядами**. Вариационный ряд всегда состоит из двух основных граф (колонок) цифр.

В первой колонке указываются значения количественного признака в порядке возрастания. В нашем примере интервального вариационного ряда: до 20 лет, 20-24 года, 25-29 лет и т.д. При дискретной вариации 20, 21, 22, 23, 24, 25 лет. Эти значения количественного признака и называют вариантами. В статистической литературе этот термин иногда употребляется как существительное мужского рода (вариант, варианты), а иногда – как существительное женского рода (варианта, варианты).

Во второй колонке указываются числа единиц, которые свойственны той или иной варианте. Их называют частотами, если они выражены в абсолютных числах, т.е. сколько раз в изучаемой совокупности встречается та или иная варианта, или частостями, если они выражены в удельных весах или долях, т.е. в процентах или коэффициентах к итогу.

Интервальный вариационный ряд иногда строится с равными интервалами (20-24, 25-29 лет), а иногда с неравными (14-15, 16-18, 19-20, 21-25 лет) интервалами. В первом случае оба интервала равны 5 годам, а во втором случае – 2, 3, 5 годам. При построении интервального ряда с непрерывной вариацией верхняя граница каждого интервала обычно является нижней границей последующего (20-25, 25-30, 30-35 и т.д.), а в построении интервального ряда по дискретному признаку границы смежных интервалов не повторяются (1-5 дней, 6-10 дней, 11-15 дней и т.д.)

Статистический анализ вариационных рядов требует не только наличия единичных частот (частостей), но и накопленных частот (частостей). Накопленная частота для той или иной варианты представляет собой сумму частот всех предшествующих вариант (интервалов). В нашем примере (табл. 1) для интервала 20-24 года накопленная частота будет равна:

2 + 18 = 20 человек, а накопленная частость 4 + 36 = 40 %, а для интервала 25-29 лет соответственно: 2 + 18 + 10 = 30 человек, или 4 + 36 + 20 = 60 %. Таким образом, от варианты к варианте (от интервала к интервалу) идет накопление (кумуляция) частот и частостей.

Вариационные ряды легко изображаются графически в виде **полигона** или **гистограммы**. Графическое изображение накопленных частот (частостей) воспроизводится в системе прямоугольных координат в виде **кумуляты**, или **кумулятивной кривой**. По оси ординат откладывается величина накопленных частот, а по оси абсцисс – возрастающие значения количественного признака. Накопленные частоты и кумулята – это интегральные показатели плотности распределения в вариационном ряду.

Группировка. Формула Стерджесса.

Провести группировку жителей поселка по доходу с равными интервалами и оптимальным числом групп и представить полученные данные в виде статистического ряда распределения и гистограммы. На основе гистограммы построить полигон, кумуляту и огиву распределения жителей поселка по доходу.

Таблица 1.

№	Доходы	№	Доходы
1	3820	13	6660
2	9470	14	5490
3	3490	15	5980
4	7790	16	6250
5	4210	17	8390
6	3870	18	3630
7	4490	19	6090
8	9620	20	10450
9	6200	21	6800
10	6350	22	6470
11	7430	23	9160
12	7670	24	5110

Определяем число групп по формуле Стерджесса:

$$n = 1 + 3{,}322\lg N = 1 + 3{,}322\lg 24 = 5{,}6$$

принимаем n = 5

Определяем шаг интервала:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = \frac{10450 - 3490}{5} = 1392$$

X_{max}, X_{min} – максимальное и минимальное значение, n – число групп.

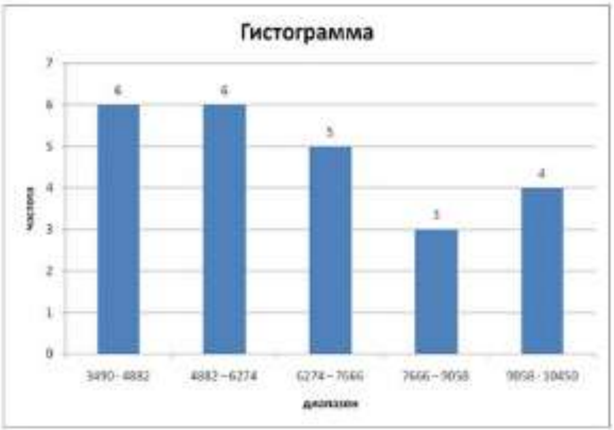
Произведем группировку с равными интервалами

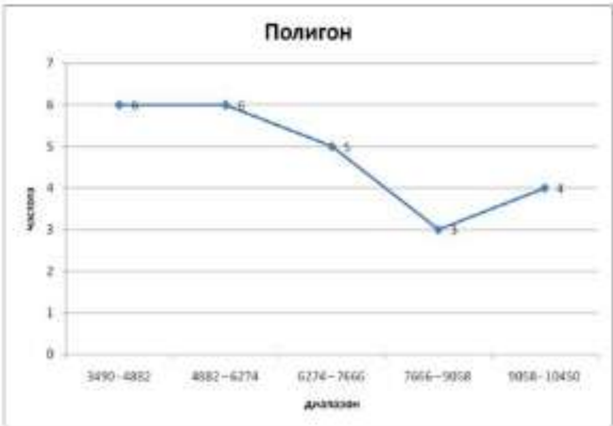
Таблица 2.

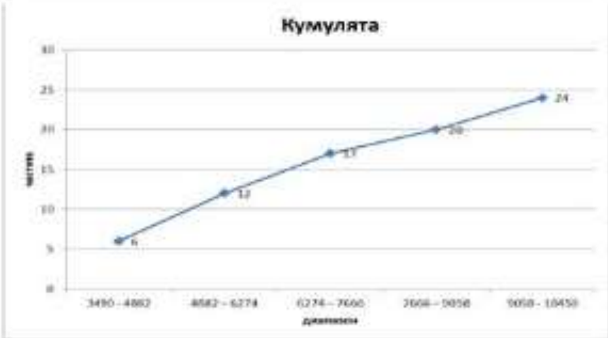
Интервалы	Диапазон	Частота, f	Накопленная частота, f
1	3490 - 4882	6	6
2	4882 - 6274	6	12
3	6274 - 7666	5	17
4	7666 - 9058	3	20
5	9058 - 10450	4	24

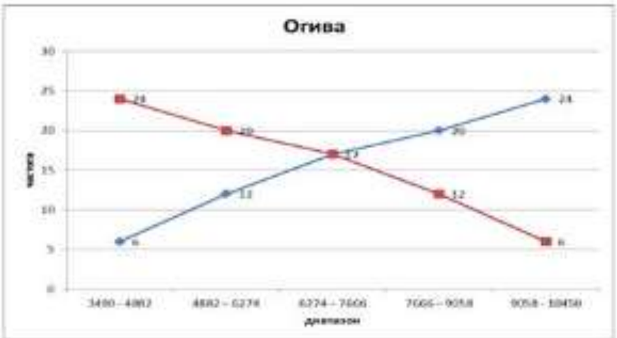
Гистограмма. Полигон. Кумулята. Огива.

С помощью программы Microsoft Excel попробуйте построить графическое представление данных. С помощью графика сделайте анализ данных.









§3. Примеры

Задача 1. Имеются данные о ежедневном количестве краж в течение рабочих дней месяца: 3, 1, 3, 4, 0, 5, 4, 4, 6, 5, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6 ,7, 1, 5, 6, 5. Постройте дискретный и интервальный вариационный ряд (используйте формулу Стерджесса). Подробно опишите ход решения.

Задача 2. Имеются следующие данные об уровне преступности по районам.

Район	Уровень преступности (в %)	Число зарегистрированных преступлений
1	6,2	520
2	8,3	746
3	7,1	438
4	5,8	620

Вычислите средний уровень преступности по районам в целом. Сделайте выводы.

Задача 3. Для выяснения возрастных особенностей кадрового состава отдела было произведено обследование:

Возраст сотрудников, лет	до 30	30-40	40-55	от 55
Число сотрудников	20	40	25	10

Определите: 1) вид ряда распределения; 2) средний возраст сотрудников; 3) модальный и медианный возраст; 4) вариацию возраста в абсолютном и относительном выражении.

Задача 4. Имеются данные о сумме собранных штрафов, млн. сум:

Сумма штрафов	160	170	180	100	150
Число регионов	12	10	4	6	5

1) представьте данные в виде ряда распределения и охарактеризуйте его;

1) найдите среднюю, модальную и медианную величину собранных штрафов;

3) определите среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Сделайте выводы по каждому пункту.

Задача 5. Данные о количестве гражданских дел за 2010-2015 гг. представлены в таблице.

Годы	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Гражданские дела, шт.	344	529	730	917	1100	1200

Рассчитайте: 1) относительные показатели динамики (цепные и базисные); 2) проверьте взаимосвязь цепных и базисных показателей динамики; 3) сделайте выводы о динамике числа гражданских дел.

Задача 6. Сумма собранных штрафов за несколько месяцев составила (в тыс. сум): 250, 255, 320, 175, 180, 250, 300, 300, 370, 350, 320, 320, 175. Постройте дискретный и интервальный вариационный ряд (используйте формулу Стерджесса). Найдите средний размер собранных штрафов за период. Подробно опишите ход решения.

Задача 7. Данные о возрасте задержанных правоохранитель-ными органами представлены в таблице:

Возраст задержанных, лет	до 20	20-24	24-35	свыше 35
Число задержанных, чел.	30	25	35	15

Определите: 1) вид ряда распределения; 2) средний размер, модальное и медианное значение возраста;

3) вариацию возраста в относительном выражении.

Сделайте выводы по каждому пункту.

Задача 7. Количество зарегистрированных преступлений за первый год – выросло в 1,08, за второй – выросло в 1,1, за третий – снизилось на 7%, за четвертый – выросло на 7%, за пятый год – снизилось на 18%. Чему равен общий и среднегодовой темп прироста количества зарегистрированных преступлений?

Задача 8. Число зарегистрированных гражданских дел о разделе жилого имущества по регионам составило: 124, 130, 121, 124, 128, 136, 125, 130, 124, 128, 125, 125, 130, 128, 125, 128. Постройте дискретный и интервальный вариационный ряд (используйте формулу Стерджесса). Подробно опишите ход решения.

130, 121, 124, 128, 136, 125, 130, 124, 128, 125, 125, 130, 128, 125, 128. Постройте дискретный и интервальный вариационный ряд (используйте формулу Стерджесса). Подробно опишите ход решения.

Задача 9. Имеются данные о размерах компенсации морального вреда в денежном выражении, определенных решением судей отдельного района.

Размер компенсации, тыс. сум	52	75	75	50	68	50	70
Число решений	3	5	1	4	5	2	4

Рассчитайте: 1) среднюю, модальную и медианную величину компенсации;

2) коэффициент вариации. Сделайте выводы о том, насколько сильно различаются принимаемые решения (по размеру компенсации).

Задача 10. Средняя величина в совокупности равна 15, среднее квадратическое отклонение равно 10. Чему равен средний квадрат индивидуальных значений этого признака; дисперсия; коэффициент вариации? Сделайте выводы по имеющимся и найденным показателям.

Задача 11. Данные о числе зарегистрированных преступлений по регионам представлены в таблице:

№	**Число зарегистрированных преступлений**	**Число регионов**
1	25	410
2	30	350
3	15	420

Определите среднее, медианное и модальное число преступлений по всем регионам.

Задача 12. Имеются данные о распределении регионов по сумме собранных штрафов.

Сумма штрафов, тыс. сум в год	4-8	8-12	12-16	16-20
Число регионов	7	16	20	7

Определите: 1) стандартное отклонение прибыли; 2) коэффициент вариации. Сделайте выводы.

Задача 13. На сколько процентов ежегодно должна снижаться преступность, чтобы за пять лет произошло ее снижение на 15%? Если за первые два года преступность снизилась на 20%, за следующие два года – выросла на 20%, и за последний год – снизилась на 15%, то будет ли в таком случае общее и среднее изменение равно запланированному общему снижению в 15% и среднему изменению (найденному ранее)?

Задача 14. Имеются данные о ежедневном количестве краж в течение рабочих дней месяца: 3, 1, 3, 4, 0, 5, 4, 4, 6, 5, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6 ,7, 1, 5, 6, 5. Постройте дискретный и интервальный вариационный ряд (используйте формулу Стерджесса). Подробно опишите ход решения.

Задача 15. Имеются следующие данные об уровне преступности по районам.

Район	Уровень преступности (в %)	Число зарегистрированных преступлений
1	6,2	520
2	8,3	746
3	7,1	438
4	5,8	620

Вычислите средний уровень преступности по районам в целом. Сделайте выводы.

Задача 16. Для выяснения возрастных особенностей кадрового состава отдела было произведено обследование:

Возраст сотрудников, лет	до 30	30-40	40-55	от 55
Число сотрудников	20	40	25	10

Определите: 1) вид ряда распределения; 2) средний возраст сотрудников; 3) модальный и медианный возраст; 4) вариацию возраста в абсолютном и относительном выражении.

Сумма штрафов	160	170	180	100	150
Число регионов	12	10	4	6	5

1) представьте данные в виде ряда распределения и охарактеризуйте его;

2) найдите среднюю, модальную и медианную величину собранных штрафов;

3) определите среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Сделайте выводы по каждому пункту.

Расчетные задания

Задание 1. По данным государственной статистики численность населения в 2009 году составила 141,9 млн. человек, в том числе: городского – 103,7 млн. человек и сельского – 38,2 млн. человек. Рассчитайте относительные показатели структуры и координации.

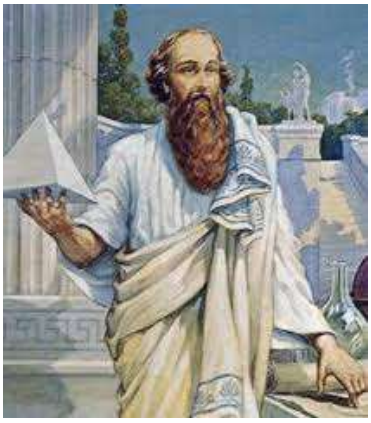
Задание 2. На 1.01.2010 г. коммерческий банк «Альфа» установил в городе N 20 банкоматов. К 1.01.2011г. было запланировано увеличение числа банкоматов на 40%. Фактически к 1.01.2015г. работало 25 банкоматов. Определите относительные показатели плана, выполнения (реализации) плана и динамики.

Задание 3. Предприятие перевыполнило план выпуска продукции на 8%. По сравнению с прошлым годом, прирост выпуска продукции составил 4%. Определите относительный показатель плана.

Задание 4. Автосалоном в базисном периоде было продано 200 автомобилей. На текущий период было запланировано продать 210 автомобилей. Фактически в текущем периоде было продано 215 автомобилей. Определите относительный показатель реализации плана.

Задание 5. По данным государственной статистики в 2008 году численность безработных в определенной области составляла 146,7 тыс. чел., а экономически активного населения – 2227,1 тыс. чел. Определите относительный показатель интенсивности (уровень безработицы).

ВЕЛИКИЕ МАТЕМАТИКИ



Пифагор Самосский родился в период с 530 до 510 г. до н.э. Хотя мы привыкли считать Пифагора прежде всего математиком, для своих современников он был прежде всего религиозным пророком, «выдающимся софистом», как называл его историк Геродот, а некоторые почитали Пифагора как святого.

В эту эпоху греческая математика только зарождалась, и главным ее источником ученые считают математику древнего Египта и Вавилона. Косвенно этот исторический факт подтверждается тем, что между египетской, вавилонской и греческой математикой того периода имеется много точек соприкосновения.

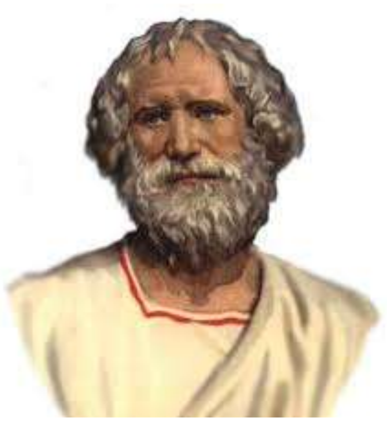
Пифагор был одним из первых, благодаря кому достижения математики предшествующих цивилизаций проникли в древнюю Элладу. По преданию, Пифагор много путешествовал, провел 22 года в Египте и 12 лет в Вавилоне, где он постигал тайны математики, музыки и астрономии. Вернувшись на родину, он основал философскую школу религиозного толка, объединившую группу философов софистов, которые занимались геометрией, арифметикой, астрономией и музыкой (так называемый «квадривий»). Пифагорейцы, как и другие философы, хотели постигнуть гармонию мира, т.е. познать законы природы. Но в отличие от философов других направлений, они полагали, что та логическая гармония, которая имеется в математике, существует неспроста, а отражает свойства мироздания. Поэтому пифагорейцы искали законы природы в свойствах чисел и геометрических фигур и для них математика имела прежде всего мистическое значение. (По-видимому, в душу Пифагора глубоко проникли тот мистицизм и та таинственность, которыми египетские жрецы окружали науку, ревниво оберегая ее от непосвященных.)

Пифагорейцы сделали мало математических открытий. Многое из того, что им приписывается, было известно до них. В частности, известную нам теорему о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника они приписывали Пифагору, хотя доказано, что ее знали уже вавилонские математики. Наиболее существенным достижением пифагорейцев было открытие иррациональных чисел, которые они представляли в виде несоизмеримых отрезков. Например, диагональ квадрата со стороной единица равна корню из двух, т.е. эти отрезки — сторона и диагональ — несоизмеримы. Скорее всего, пифагорейцам было известно то доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$, которое приведено на с. 17.

Пифагорейцы вели активную преподавательскую деятельность (их устав запрещал брать плату за уроки!), и во многом благодаря им математика заняла впоследствии в Греции столь значительное место. Последователи пифагорейцев (неопифагорейцы) сделали уже значительные математические открытия.

Евклид жил, по-видимому, во времена царя Птолемея I. Точные даты его рождения и смерти неизвестны, предполагают, что он родился в период с 365 по 335, а умер в период с 300 по 275 г. до н.э. Птолемей I был одним из полководцев Александра Македонского и после смерти великого завоевателя получил в управление Египет. Греческая цивилизация проникла в Египет и его новая столица Александрия стала одним из научных центров мира. Известно, что Евклид был профессиональным ученым. Самое известное и выдающееся его произведение «Начала» состоит из тринадцати книг. В них Евклид мастерски изложил все имеющиеся к тому времени сведения по геометрии, добавив многие недостающие теоремы и доказательства. «Изложение Евклида построено в виде строгих логических выводов из системы определений, постулатов и аксиом. В первых четырех книгах рассматривается геометрия на плоскости. Исходя из наиболее простых свойств линий и углов, мы приходим здесь к равенству треугольников, равенству площадей, теореме Пифагора, построению квадрата, равновеликого заданному прямоугольнику, к золотому сечению, кругу и правильным многоугольникам...» ([15], с. 69).

Предание гласит, что Евклид так ответил царю Птолемею, пожелавшему изучить геометрию: «К геометрии нет царской дороги».



Архимед (287-212 гг. до н.э.) был самым выдающимся математиком и механиком древности. Он жил в Сиракузах и был советником царя Герона. Об Архимеде осталось много сведений, прежде всего в произведениях писателей древности — Плутарха, Полибия, Цицерона, Витрувия и др. Имея в виду необычную для того времени склонность Архимеда к практическим делам, Плутарх пишет: «Хотя эти изобретения заслужили ему репутацию сверхчеловеческой проницательности, он не снизошел до того, чтобы оставить какое-либо сочинение, написанное по таким вопросам, а, считая низким и недостойным делом механику и искусство любого рода, если оно имеет целью пользу и выгоду, все свои честолюбивые притязания он основывал на тех умозрениях, красота и тонкость которых не запятнаны какой-либо примесью обычных житейских нужд».

В то же время интересной является и характеристика Архимеда, данная современным историком И. Н. Веселовским: «Если придерживаться фактов, то Архимед и начал свою научную деятельность как механик, и закончил ее как механик, и в математических его произведениях механика является могучим средством для получения математических результатов, да и сами эти результаты не являются бесплодно висящими в воздухе, а применяются для обоснования математических теорий».

Основные математические результаты Архимеда связаны с вычислением площадей и объемов различных фигур. Он нашел с помощью правильного 96-угольника (!) очень хорошее приближение для числа π. В его трактате «О плавающих телах» находится названная его именем известная теорема о потере веса телами, погруженными в жидкость. Математикам хорошо известна так называемая аксиома Архимеда, гласящая, что отрезок любой длины можно измерить сколь угодно маленьким отрезком.

Одним из самых удивительных и значительных изобретений Архимеда в астрономии был построенный им планетарий. Это была полая вращающаяся сфера, внутри которой находился механизм, приводящий в движение макеты Луны, Солнца и пяти планет. Вот свидетельство Цицерона, видевшего это устройство: «Как только Галл привел сферу в движение, стало видно, как с каждым оборотом Луна поднималась над земным горизонтом вслед за Солнцем, как это бывает каждый день на небе; а тогда можно было видеть, как затмевалось Солнце, а Луна попадала в теневой конус Земли, когда Солнце как раз напротив...» ([14], с. 293).

На могильной плите Архимеда изображен цилиндр с вписанным в него шаром, а эпитафия гласит об одном из самых замечательных открытий Архимеда: объемы этих тел относятся как 3:2.

Аполлоний Пергский (приблизительно 260-170 гг. до н.э.) был третьим (после Евклида и Архимеда) великим математиком эпохи эллинизма. Его основной труд — «О кониках» — представляет собой трактат из восьми книг о конических сечениях. Напомним, что это эллипсы, гиперболы и параболы (см. сноску на с. 108). Аполлоний настолько подробно исследовал их свойства, что в следующие 18 веков (до Декарта) ничего существенно нового в этом направлении получено не было.

Аполлоний намного опередил свое время. Его результаты о кривых второго порядка нашли применение в законах движения планет Кеплера

(XVII в.). Аполлоний умел, например, при помощи только циркуля и линейки строить окружность, касающуюся трех заданных окружностей. Эта непростая задача (она так и называется: задача Аполлония) до сих пор входит в программу подготовки студентов — будущих учителей математики. Он ввел термины «гипербола», «парабола», «асимптота», которыми мы пользуемся и сейчас. Как и Архимед, он внес существенный вклад в практику вычислений.

Эратосфен Киренский жил приблизительно в 276— 194 гг. до н.э., т.е. был современником Архимеда. Он был знаменит как математик, географ, филолог, историк и поэт. Он составил карту мира в предположении, что Земля — шар. Эратосфен считается основателем хронологии, т.е. науки о точном определении исторических дат. Он вычислил наклон эклиптики, расстояния от Земли до Солнца и Луны, длину экватора.

Самым большим открытием Эратосфена в арифметике было его знаменитое «решето» (решето Эратосфена), позволяющее выделять простые числа (см. гл. I, § 1). Он нашел также простое механическое решение знаменитой задачи древности об удвоении куба,* т.е. о построении куба с объемом в два раза больше данного.

Абу Абдаллах (или Абу Джафар) Мухаммад ибн Муса ал Хорезми (783–850) – среднеазиатский матема-тик, астроном, историк, географ – один из крупнейших ученых средневековья.

Биографических сведений об этом замечательном человеке почти не сохранилось и приведенные выше годы жизни, весьма условны. Из дошедшей до наших дней обрывочной информации известно, что **Мухаммад аль-**Хорезм**и** родился в окрестностях **Бухары** в деревне **Рамл** в конце 8 века.

Из имеющихся сведений следует, что в 809 году ал-Хорезми служил при дворе хорезмшаха **аль-Мамуна**, а в 819 г., сопровождая просвещенного правителя, ставшего к тому времени халифом, перебрался в **Багдад** – столицу арабского халифата, где и прожил в **предместье Каттраббула** до конца жизни.

В Багдаде ученый по указу халифа аль-Мамуна берет на себя бразды правления знаменитым в те годы «**Домом Мудрости**», который позже назовут «**Академией аль-Мамуна**».

По сути, «**Дом Мудрости**» действительно был **Академией Наук**. Там работали многие ученые из различных регионов **Средней Азии** и **арабского Востока**, в их распоряжении была богатейшая библиотека старинных рукописей, а так же большая, специально построенная обсерватория.

Именно в стенах этого храма науки были написаны основные.

Доподлинно известно, что ученый был автором 20 научных трудов, 9 из которых оформились в полноценные фолианты: «Книга об индийском счете», «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы», «Астрономические таблицы» (зидж), «Книга о построении астролябии», «Книга картины Земли», «Книга о действиях с помощью астролябии», «Книга о солнечных часах», «Книга истории», «Трактат об определении эры евреев и их праздниках».

Однако, до наших дней дошло всего 7 книг. Чаще всего это переводы его работ на латынь, реже, комментарии к научным трудам аль-Бируни арабских ученых, и уж совсем мало уцелевших оригинальных рукописей.

Трудно переоценить значение этих работ для развития научной мысли средневековья. Например, его труды по арифметике, изложенные в «Книге об индийском счете» привели к грандиозным последствиям в науке вообще и древней математике в частности.

И хотя оригинальный текст документа утерян, сохранилась копия XII века, переведенная на латинский язык, из которой становится ясно, что в этом труде гениальный ученый впервые дал систематизированное изложение арифметики, как науки, основанной на десятичной системе исчисления.

Перевод манускрипта начинается словами: «**Dixit Algorizmi**» - «**Сказал Алгорезми**», однако, очень скоро имя автора становится нарицательным, а слово «**Algorizm**», сначала обозначает арифметику, а потом и любую систему вычислений, подчиненную определенному правилу. Так в нашу жизнь пришел «**алгоритм**», в последствие незаметно перебравшийся из математики в кибернетику.

В сочинении «**Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы**» ученый представляет шесть основных типов уравнений и предлагает способы их решения. Пользуясь его термином «**ал-джабр**» в латинской транскрипции, европейские ученые и стали определять созданную им науку о решении квадратных и линейных уравнений, со временем трансформировавшуюся в современную алгебру.

И даже географические труды аль – Хорезми тесно связаны с работами по математике и астрономии. Именно он считается первым автором написавшим сочинение по математической географии. Впервые на арабском языке ученым были описаны известные к тому времени обитаемые земли. Работа сопровождалась подробными картами с нанесенными на них реками, морями и океанами, важнейшими населенными пунктами.

Важно, что все координаты в работе были очень точны, ведь написанию географического труда, предшествовала долгая и кропотливая работа по вычислению длины земного меридиана.

Отдавая должное гениальности ученого, известный историк науки Дж. Сартон, так характеризует аль-Хорезми: «…величайший математик своего времени, а если принять во внимание все обстоятельства, и один из величайших ученых всех времен».

Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед Аль-Бируни (973-1048) – великий среднеазиатский ученый-энциклопедист, поэт и философ.

Аль-Бируни – уникальное явление человеческого гения, он овладел почти всеми науками своего времени, его интересы простирались на астрономию и географию, математику и физику, химию и ботанику, геодезию и фармакологию, геологию и минералогию, историю и этнографию, философию и филологию.

Бируни родился 4 сентября 973 года в предместье города Кят – столицы Хорезма. О его родителях не известно ничего, поэтому принято считать, что он был сиротой.

Первые годы жизни малыш провел в приемной семье хорезмшаха Мамуна, где на его способности обратил внимание известный ученый того времени Абу Наср Мансур ибн Али ибн Ирак, взявшийся обучить мальчика. Именно он сумел привить ученику любовь к естественным наукам, главными из которых считал математику и астрономию.

Получив всестороннее домашнее образование, юноша увлекся самостоятельными наблюдениями и расчетами, и уже в 995 году сделал **первый в Средней Азии глобус**, который позволял определить географические координаты населенных пунктов с небывалой для того времени точностью. Тогда же он занялся конструированием различных астрономических инструментов и с легкостью определял координаты различных мест в Хорезме.

Однако, вскоре Кят был завоеван эмиром Гурганджа и столицу перенесли туда. Молодой ученый покинул город и предпринял ряд поездок, с целью пополнения знаний, в такие научные центры как Бухара, Багдад, другие города Афганистана и Хорасана.

Вернувшись в 1004 году на родину, Бируни приезжает в Гургандж. Там его уже ждут при дворе, и он занимает должность визиря (советника), возглавляя при этом вновь созданную «Академию Мамуна».

Поистине, двор хорезмшахов в тот период собрал в своей Академии целое созвездие великих имен: энциклопедисты Аль-Бируний, Ибн Сино, Ибн Ирак; философы Абул Хайир Хамар и Абу Сал Мазихий; поэт Абу Мансур ас-Салибий, и другие.

Умирал аль-Бируни в полном сознании. Попрощавшись со всеми друзьями, он вдруг остановил последнего:

- Скажи, что это ты говорил мне о методах подсчета неправедных прибылей?

- Да как же можно думать об этом в таком состоянии? – невероятно изумился тот.

- Эх ты, поверь, уйти из жизни зная ответ на этот вопрос, гораздо лучше, чем умереть в неведении.

Даже в последний миг своей жизни, пытливый ум исследователя не давал ученому покоя.

Аль-Бируни оставил потомкам весьма обширное научное наследство. Его перу принадлежит около 150 научных работ, охватывающих более 10 областей знаний.

Так самое первое фундаментальное произведение – «Хронология, или памятники минувших поколений» (1000г), посвящено описанию всех известных доисторических календарей, а так же содержит подробную хронологическую таблицу эпох, начиная от библейских патриархов.

Не менее популярна работа «Индия, или Книга, содержащая разъяснение принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых», в которой ученый дает детальное описание быта, религии, культуры и науки индийцев.

До сих пор актуальны: «Минералогия,или Книга сводок для познания драгоценностей» и «Фармакогнозия» - книга о составе лекарств.

Но, конечно, самое большее количество научных работ посвящается любимым предметам – астрономии и математике:

«Канон Маасуда», труд написанный для сына султана Махмуда Газневи и включивший в себя 11 томов, содержащих сведения по математике, астрономии, астрологии, истории и этнографии различных наций, коментарии к научным трудам средневековых ученых и многое другое.

«Об определении хорд в круге при помощи вписанной в него ломаной линии» - работа рассматривающая ряд теорем Архимеда, которые не сохранились в подлиннике.

- Трактат «Тени», освещающий вопросы прикладной математики и многое, многое другое.

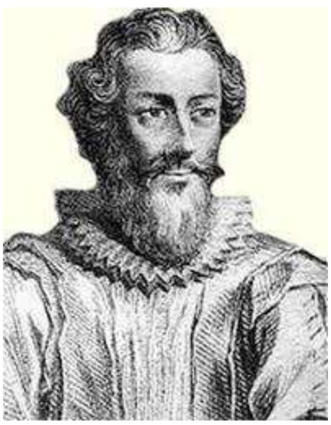
Бируни видел свое предназначение в том, что бы передать знания не ученикам-одиночкам, а всем людям, и его мечты сбылись. Книги, написанные великим ученым востребованы до сих пор.

Джамшид ибн Масуд ибн Махмуд Гияс ад-Дин ал-Каши (1380, Кашан (Иран) — 22 июня 1429) — крупнейший математик и астроном империи Улугбека XV века, сотрудник Улугбека, один из руководителей Самаркандской обсерватории. Опубликовал первое систематическое изложение теории десятичных дробей.

Составленный Ал Каши «Хаканский зидж» (1414) является переработкой «Ильханского зиджа» Насир ад-Дина ат-Туси. В трактате «Лестница небес» (1407) ал-Каши обсуждает расстояния до Луны и Солнца, их объёмы, расстояния до планет и до сферы неподвижных звёзд. В трактате «Объяснение наблюдательных инструментов» (1416) описываются инструменты, используемые в наблюдательной астрономии. В трактате «Услада садов» описывается построенное ал-Каши устройство, с помощью которого можно определять широты и долготы светил, их расстояние до Земли и т. д. Известны также «Трактат об астрономии» и «Трактат о решении предложений о Меркурии».

В трактате «Ключ арифметики» ал-Каши описывает шестидесятеричную систему счисления. (В астрономических трактатах древних греков в шестидесятеричной системе записывалась только дробная часть числа, а целая часть записывалась в традиционной буквенной ионической системе. Ал-Каши предложил записывать в шестидесятеричной системе и целую часть тоже. Тем самым он фактически вернулся к той форме записи, которая была в ходу у древних вавилонян; но он сам вряд ли об этом знал.) В этом же трактате ал-Каши вводит десятичные дроби, формулирует основные правила действия с ними и приводит способы перевода шестидесятеричных дробей в десятичные и обратно.

В «Трактате об окружности» ал-Каши вычисляет длину окружности по рецепту Архимеда — как среднее арифметическое между периметрами вписанного и описанного правильных многоугольников с числом сторон 3 · 228. Это дало ему для 2π приближенние 6,2831853071795865. Это значение, верное во всех 16 десятичных знаках, было получено из вычисленного им ранее в шестидесятеричной системе значения с 9 знаками. Этим он поставил рекорд, продержавшийся до 1596г., когда Людольф ван Цейлен вычислил число π с 35 десятичными знаками. Кроме того, наверняка можно сказать, что эта работа ал-Каши была первым исторически зафиксированным примером переведения дроби из одной системы счисления в другую.



Франсуа Виет (1540-1603) — «отец алгебры» — был по образованию юристом и служил при дворе короля Генриха IV. Интерес к математике возник у Виета вследствие его увлечения астрономией. Он усовершенствовал теорию алгебраических (в частности, кубических) уравнений, открыл связь между корнями уравнения и его коэффициентами (формулы Виета). Виет одним из первых начал использовать буквенные обозначения. Он вычислил число π с девятью точными знаками, улучшив результат Архимеда, и показал, что

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\ldots$$

Про Виета известна такая история. В 1593 г. один бельгийский математик предложил желающим найти корни уравнения

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} + \ldots - 3795x^3 + 45x = A$$

(A — некоторое вещественное число). Виет нашел 23 положительных решения этого уравнения, заметив, что его «страшная» левая часть представляет собой некоторую тригонометрическую формулу.

Во время войны Франции с Испанией, Виет нашел ключ к шифру, который употребляли испанцы, и более того, сумел найти средство следить за последующими изменениями этого шифра.

Дворянин из французского города Турени **Рене Декарт** (1596—1650) служил в армии и имел много времени для философских размышлений и занятий математикой. Семнадцатый век был веком великих открытий в естествознании, и в это время математика, служившая основой физики и механики, становится самой авторитетной и почитаемой наукой — становится царицей наук. Логическая стройность математики давала повод к поиску логики в строении Вселенной, к поиску общих рациональных методов в науке. Заслуга Декарта как математика прежде всего в том, что он применил в геометрии хорошо развитые к этому времени алгебраические методы. Свои идеи Декарт изложил в книге «Геометрия», которая была опубликована в 1637 г.

Пьер Ферма (1601-1665) известен нашим современникам как выдающийся математик. С его именем связаны две знаменитые теоремы из теории чисел («малая теорема Ферма» и «великая теорема Ферма»), принцип

Ферма в оптике; вместе с *Декартом* его считают основоположником координатного метода в геометрии; в переписке Ферма с известным ученым того времени *Блезом Паскалем* (1623-1662) возникли первые теоремы теории вероятностей. Но немногие знают, что по образованию Ферма был юристом и практически всю жизнь проработал в этом качестве советником парламента в Тулузе (Франция). Математикой он занимался на досуге и доказательств, как правило, не писал. После его смерти на полях «Арифметики» Диофанта (III в. н.э.) была найдена его запись о том, что им найдено «поистине удивительное доказательство» известной проблемы из теории чисел: уравнение

$$x^n + y^n = z^n,$$

где n — натуральное число, не имеет целых положительных решений при $n > 2$. Но ни доказательство самого Ферма, ни какое-либо иное доказательство этого утверждения не найдено до сих пор.

Исаак Ньютон (1643-1727) — один из величайших математиков в истории человечества — родился в Линкольншире (Англия), в семье землевладельца. Он учился в Кембридже, где позже стал профессором. В 1696 г. он занял весьма высокий и ответственный пост начальника монетного двора.

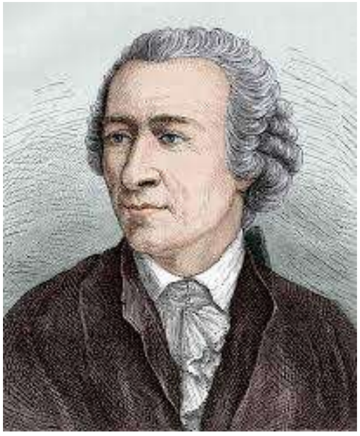
Ньютон первым открыл производные, названные им флюксиями. Последние появились в его книге «Математические принципы натуральной философии», где он (также впервые) изложил открытый им Закон Всемирного Тяготения. Из него Ньютон вывел законы движения планет, открытые Кеплером, объяснил явление приливов, сделал ряд других важных открытий. Кроме того, Ньютон придумал способ приближенного решения алгебраических уравнений и классифицировал кривые третьего порядка на плоскости.

Ньютон был крайне требователен к своим результатам и публиковал их через много лет после открытия.

Готтфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) был необычайно разносторонним и талантливым ученым. Юрист по образованию, он с большим успехом занимался также философией, математикой, историей, теологией, биологией, геологией, лингвистикой, состоял на дипломатической службе при дворе Майнцского курфюрста. К тому же Лейбниц был талантливым изобретателем. Он придумал одну из первых счетных машин, сконструировал ветряной двигатель для откачивания воды из шахт. Его счетная машина выполняла все действия арифметики, извлекала квадратные и кубические корни. Лейбниц совершенствовал свою машину в течение всей жизни, так что в некотором смысле его можно считать основоположником машинной математики.

Но с наибольшей силой способности Лейбница проявились в математике. Чуть позже Ньютона он открыл дифференциальное исчисление, причем в более общей форме и почти в современной терминологии. Лейбниц ввел много математических обозначений и придумал много новых терминов, которыми мы пользуемся до сих пор: dx и dy, знак интеграла, термины «функция», «координаты», «дифференциальное и интегральное исчисление», «дифференциальное уравнение», «абсцисса», «ордината», «координата», «алгоритм». Он записал в современной форме правила дифференцирования, ввел логическую символику и т.д.

Лейбниц родился в Лейпциге, большую часть жизни прожил в Ганновере, исполняя должность библиотекаря и историографа при дворе ганноверского герцога, и был очень верующим человеком.



Леонард Эйлер (1707-1783) — величайший ученый XVIII в., оставивший яркий след почти во всех областях математики, механики, физики, астрономии, навигации и т.д. Ему принадлежит более 850 научных работ, многие из которых посвящены труднейшим проблемам математики и ее приложений. В 19-летнем возрасте его пригласили работать в Петербургскую академию наук, где он проработал большую часть своей жизни. Он оказал существенное влияние на формирование математической школы и развитие математического образования в России. Известно, что Эйлер поддержал молодого Ломоносова во время его конфликта с академиками.

В последние годы жизни от напряженной работы Эйлер потерял зрение, но продолжал работать столь же целеустремленно и плодотворно. За несколько дней до смерти он занимался расчетом полета аэростата, который в то время казался чудом.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827) родился в семье небогатого землевладельца. Он получил очень хорошее образование, прекрасно знал древние языки, литературу и искусство. Но мы знаем его как выдающегося математика и физика. Ему принадлежат фундаментальные результаты в математике, математической физике и небесной механике, он справедливо считается одним из основоположников теории вероятностей. Лаплас занимался теорией теплопроводности, теорией капиллярности и электродинамикой; доказал, что кольцо Сатурна не может быть сплошным; разработал теорию движения спутников Юпитера; предложил новый метод вычисления орбит небесных тел и т.д.

Любопытно, что Лаплас придавал мало значения политике и религии. Хотя он учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев, однако богословием не занимался, а увлекшись математикой, вообще стал атеистом. Он ладил как с Наполеоном, так и с Людовиком XVIII, принимая знаки уважения от обоих. Основные результаты своих исследований Лаплас опубликовал в двух книгах: «Небесная механика» и «Аналитическая теория вероятностей».

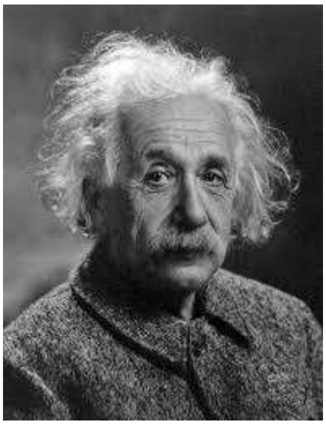
Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) — «король математиков» — считается величайшим математиком всех времен и народов. Он получил выдающиеся результаты в теории чисел, алгебре, дифференциальной и неевклидовой геометрии, астрономии и геодезии, электродинамике и теории магнетизма. Вот слова Феликса Клейна, одного из самых больших знатоков научного наследия Гаусса: «Гаусс напоминает мне образ высочайшей вершины баварского хребта, какой она предстает перед глазами наблюдателя, смотрящего с севера. В этой горной цепи в направлении с востока на запад отдельные вершины поднимаются все выше и выше, достигая предельной высоты в могучем, высящемся в центре великане; круто обрываясь, этот горный исполин сменяется низменностью новой формации, в которую на много десятков километров далеко проникают его отроги, и стекающие с него потоки несут влагу и жизнь».

Карл Фридрих Гаусс родился в Брауншвейге. Его математические способности проявились уже в третьем классе: прямо на уроке он подсчитал сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, едва только учитель кончил диктовать эту задачу. Сам Гаусс говорил, что он научился считать раньше, чем говорить. По словам Феликса Клейна, любовь Гаусса к счету сформировала его как математика: «Он непрерывно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличается всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, каким навряд ли обладал кто-либо до или после него. Путем наблюдения над своими числами, стало быть, индуктивным, «экспериментальным» путем он уже рано постигает общие соотношения и законы».

Мы не можем перечислить здесь все математические открытия Гаусса. Расскажем об одном из них. Еще математикам древней Греции было известно, что при помощи только циркуля и линейки можно строить правильные многоугольники с тремя, пятью и пятнадцатью сторонами, а также такие, которые получаются из перечисленных выше удвоением числа сторон: правильные шестиугольники, десятиугольники, двенадцатиугольники, и т.д. И с тех пор ничего принципиально нового в этой области до Гаусса сделано не было. В 1796 г. Гаусс доказал, что если n есть простое число вида $2^{2^k}+1$, то правильный n-угольник можно построить с помощью только циркуля и линейки. В частности, при $k = 2$ получается $n = 17$, при $k = 3$ — простое число 257.

Гаусс прекрасно знал классические языки и в молодости колебался, чем ему заняться — математикой или филологией. Вместе с известным физиком Вебером они изобрели электромагнитный телеграф. Гаусс знал о существовании неевклидовой геометрии еще до того, как познакомился с работой Лобачевского. Гаусс вел дневник, из которого (после его смерти) узнали, что он открыл в математике гораздо больше, чем опубликовал.

Гаусс был очень замкнутым человеком. Всю свою жизнь он проработал в Геттингенском университете (в том самом, в котором учился) в качестве профессора и директора астрономической обсерватории.



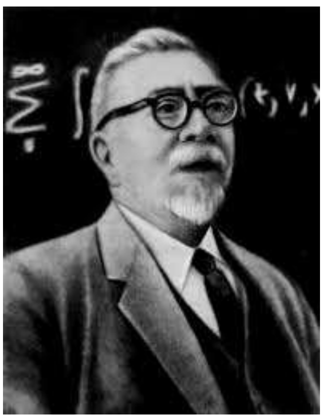
Альберт Эйнштейн (1879-1955), самый знаменитый ученый XX в., родился в г. Ульме (Германия). Окончив политехникум в Цюрихе, он сначала работал учителем, затем служащим федерального патентного бюро в Берне. Начиная с 1911 г., Эйнштейн преподает в Цюрихском, Пражском и Берлинском университетах, а после 1932 г., вследствие усиления фашизма в Германии, он был вынужден переехать в Принстон (США).

Главной заслугой Эйнштейна является, как известно, открытие *специальной и общей теории относительности,* которая изменила взгляды ученых на пространство, время и тяготение, помогла создать общую картину физического мира, существенно продвинула вперед науку, прежде всего — физику.

Энштейн получил выдающиеся результаты в различных разделах физики. За работы в области теоретической физики и открытие фотоэффекта ему присудили в 1921 г. Нобелевскую премию. Он создал квантовую теорию света, внес существенный вклад в теорию броуновского движения и т.д.

Работы Эйнштейна имеют и глубокое философское значение. Осмысление в целом той картины мира, которую дает нам теория относительности, продолжается до сих пор.

Энштейн был выдающимся пацифистом, активным участником антифашисткого движения.



Норберт Винер (1894-1964) — американский ученый, «отец кибернетики», один из самых известных математиков нашего века. Исследуя аналогии между процессами, происходящими, с одной стороны, в электрических и электронных системах, а с другой — в живых организмах, он создал новую науку —науку об управлении, которую назвал кибернетикой (1948).

Широко известны его книги «Бывший вундеркинд», «Я — математик», «Кибернетика и общество». Он знал 10 языков, но его отец знал 30 языков.

Сиражиддинов Сагды Хасанович (1920–1989).

Ученый математик. Доктор физико-математических наук (1953).Профессор (1956).Академик АН УзССР (1966).Заслуженный деятель науки УзССР(1971).Сагды Хасанович Сираждинов родился в Коканде, УзССР в семье ремесленника. В 1942 г. он окончил физико-математический факультет Среднеазиатского государственного университета. Аспирантуру проходил под руководством академика АН Уз ССР В. И. Романовского в Институте математики АН УзССР в 1945-1947 гг.

Первые исследования С.Х.Сираждинова были связаны с вопросами классического анализа, имеющими отношение к теории вероятностей и математической статистике. Он изучал полноту многомерных полиномов и функций Эрмита, символические соотношения и различные неравенства для них. Особенно значительные и глубокие результаты С. Х. Сиражидинов получил, переключившись на исследования по предельным теоремам для однородных цепей Маркова. Им уточнены и продолжены исследования А. Н. Колмогорова о многомерных локальных теоремах, впервые получены точные оценки в предельных теоремах для сумм случайных величин, связанных по схеме цепей Маркова, и асимптотические разложения в одномерной и многомерной теоремах. Эти достижения сделали его одним из ведущих исследователей теории цепей Маркова, которая была традиционным направлением исследований для ташкентской школы теории вероятностей и математической статистики. Интерес к этой тематике пронизывает все творчество С.Х.Сираждинова. В последующем он совместно со своими учениками получил асимптотические разложения в предельных теоремах для цепей Маркова с произвольным множеством состояний, уточнил локальные предельные теоремы, установил равномерные и неравномерные оценки в многомерных теоремах для этой схемы. По результатам исследований по однородным цепям Маркова С.Х.Сираждинов опубликовал две монографии: «Предельные теоремы для однородных цепей Маркова» (1955) и «Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова» (1979, совместо с Ш. К. Формановым). Эти исследования С. Х. Сираждинова нашли широкий отклик среди специалистов и были продолжены в работах московских, вильнюсских, ташкентских и других математиков. С середины 50-х годов С.Х.Сираждинов начал уделять большое внимание проблематике предельных теорем для сумм независимых случайных величин, которая также являлась традиционной для ташкентской школы теории вероятностей. Исследования С.Х.Сираждинова и его учеников в этом направлении выделяются широтой диапазона рассматриваемых вопросов, при этом были установлены первоклассные результаты. Так, получены интересные результаты по глобальным, интегральным и локальным теоремам, по оценке вероятностей больших уклонений, по теоремам для случайных сумм и т. д. Удалось найти главный член асимптотического разложения в теореме о сходимости в среднем для плотностей, а также получить ряд других результатов об оценках в глобальных теоремах с весом, как для функций распределений, так и для плотностей. Изучены суммы случайного числа случайных величин и установлены предельные теоремы для них с указанием достаточно хороших оценок погрешности. Так, например, получены равномерные оценки приближения в теоремах Г. Роббинса. Полученные результаты и методы предельных теорем успешно применялись С.Х.Сираждиновым и его учениками к различным задачам теории случайных блужданий, теории массового обслуживания, теории надежности, статистического приемочного контроля. Привлекая вероятностные методы к изучению аддитивных задач теории чисел с растущим числом слагаемых, С.Х.Сираждинов получил окончательные теоремы, улучшающие результаты А.Г.Постникова и Р.Рэнкина. Исследования в этом направлении нашли отражение в монографии С.Х.Сираждинова «Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых» (1975, совместно с Т. А. Азларовым и Т. М. Зупаровым). Продолжая применение вероятностных методов к задачам классического анализа, С.Х.Сираждинов дал уточнение асимптотической формулы С.Л.Соболева для корней многочленов Эйлера и установил асимптотическое распределение для корней многочленов и чисел Эйлера. Предложенный им метод позволяет охватить также широкий класс известных комбинаторных чисел. Работы С.Х.Сираждинова, посвященные математической статистике, относятся, главным образом, к статистическим методам приемочного контроля качества продукции. Идея А.Н.Колмогорова о систематическом использовании несмещенных оценок в задачах контроля оказалась весьма плодотворной. В работах С.Х.Сираждинова дается ряд практических удобных формул для подсчета несмещенных оценок для функций от доли предъявленного брака в случаях, когда они существуют. Для малых выборок, когда несмещенные оценки отсутствуют, им предложены оценки с минимальным возможным смещением. Совместно с другими сотрудниками Института математики АН УзССР им подготовлены и переданы рекомендации по практическому использованию указанных выше исследований. На некоторых предприятиях страны они были приняты. Ряд работ С. Х. Сираждинова и его учеников посвящены рассмотрению различных процедур контроля и нахождению экономически оптимальных планов с указанием асимптотики оптимального объема выборки. Под руководством С.Х.Сираждинова и при его активном участии с 1960 г. велись широкие исследования по истории математики в Средней Азии, которые получили признание специалистов в Советском Союзе и за рубежом. Благодаря его усилиям в настоящее время Ташкент стал одним из ведущих центров историко-математических исследований.

Литература

1. **Болтянский В. Г., Ефремович В. А.** *Очерк основных идей топологии //* Математическое просвещение. 1957. № 2; 1958. № 3, 4; 1961. № 6. (К гл. VIII).

2. **Ван-дер-Варден Б. Л.** *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* М.: Физ.-мат. ГИЗ, 1959. (К гл. X).

3. **Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.** *Алгебра и математический анализ.* М.: Просвещение, 1994. (К гл. III-VI).

4. **Вильямс Дж. Д.** *Совершенный стратег или букварь по теории стратегических игр.* М., 1960. (К гл. IX).

5. **Гарднер М.** *Теория относительности для миллионов.* М.: Атомиздат, 1979. (К гл. VII).

6. **Гладкий А. В.** *Арифметика.* М.: Изд-во РГГУ, 1992. (К гл. I).

7. **Гмурман В. Е.** *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Высш. шк., 1972. (К гл. II, IV).

8. **Гнеденко Б. В.** *Математика и математическое образование в современном мире.* М., 1985. (К гл. VII).

9. **Гнеденко Б. В.** *Очерки по истории математики в России.* М.; Л., 1946. (К гл. X).

10. **Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.** *Элементарное введение в теорию вероятностей.* М.: Наука, 1964. (К гл. IV).

11. **Грешилов А. А.** *Как принять наилучшее решение в реальных условиях.* М.: Радио и связь, 1991. (К гл. IX).

12. **Лаптев Б. Л.** *Николай Иванович Лобачевский.* Казань: Изд-во Казан, ун-та, 1976. (К гл. VII, X).

13. *Математика в современном мире.* М.: Мир, 1967. (К гл. VII).

14. **Пойа Г.** *Математическое открытие.* М.: Наука, 1976. (К гл. VII).

15. **Пуанкаре А.** *О науке.* М.: Наука, 1983. (К гл. VII).

16. **Румшиский Л. 3.** *Математическая обработка результатов эксперимента.* М.: Наука, 1971. (К гл. II).

17. **Саати Т.** *Принятие решений. Метод анализа иерархий.* М., 1993. (К гл. IX).

18. **Стройк Д. Я.** *Краткий курс истории математики.* М.: Наука, 1978. (К гл. X).

19. **Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф.** *Элементы высшей математики для школьников.* М.: Наука, 1987. (К гл. III-VI, VIII).

20. **Фрид Э.** *Элементарное введение в абстрактную алгебру.* М.: Мир, 1979. (К гл. VIII).

21. **Хинчин А. Я.** *Педагогические статьи.* М.: изд. АПН, 1963. С. 128-160. (К гл. VII).

22. **Хлебопрос Р. Г., Охонин В. А., Фет А. И.** *Природа и общество. Математическое моделирование катастроф.* М., 1998.

23. *Хрестоматия по истории математики* / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1977. (К гл. X).