ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ҳ.Тўраев

МАТЕМАТИКА

ўқув қўлланма

Ўзбекистон Республикаси олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги педагогика университетлари мактабгача таълим йўналиши талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

Тошкент - 2020

У.Ў.К:
КБК:
Р

Тўраев Ҳ. Математика: Ўқув қўлланма. – Т.: «Низомий номидаги ТДПУ Термиз филиали», 2020, - 139 бет.

Ушбу қўлланмада тўпламлар назарияси, математик мантиқ элементлари, аналитик геометрия, дифференциал ва интеграл ҳисоб, комбинаторика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементлари асосий тушунчалари содда, қисқача ва тушунарли тилда баён қилинган. Ҳар бир бобдаги тушунчалар тушунарли бўлиши учун типик мисоллар ечиб кўрсатилган ҳамда ҳар бир бобнинг охирида ўз-ўзини текшириб кўриш учун етарлича оғзаки саволлар ва мустақил ечиш учун мисоллар берилган.

Қўлланма педагогика университетларининг (педагогика институтларининг ҳам) 5111800 – мактабгача таълим йўналиши талабалари учун қабул қилинган ДТС талабларига мос равишда ёзилган бўлиб, у 5 та боб 18 та параграфни ўз ичига олади.

Шунингдек, қўлланмадан математика ихтисослиги бўлмаган олий ўқув юртларининг талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

***

В этом руководстве описаны простые понятия теории множеств, элементы математической логики, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики на простом, лаконичном и понятном языке. Типичные примеры приведены для того, чтобы прояснить концепции каждой главы, и в конце каждой главы достаточно устных вопросов для самостоятельного изучения и примеров для самостоятельного решения.

Пособие написано в соответствии с требованиями ГОС для студентов педагогических вузов (в том числе педагогических институтов) 5111800 - дошкольное образование, состоящее из 5 глав и 18 абзацев.

Пособие также доступно для студентов нематематических вузов.

***

This handbook describes the basic concepts of set theory, elements of mathematical logic, analytic geometry, differential and integral calculus, combinatorics, probability theory, and mathematical statistics in simple, concise, and understandable language. Typical examples are provided to make the concepts in each chapter clear, and at the end of each chapter there are enough oral questions for self-examination and examples for independent solution.

The manual is written in accordance with the requirements of the state educational standards for students of pedagogical universities (including pedagogical institutes) 5111800 - preschool education, which consists of 5 chapters and 18 paragraphs.

The manual is also available to non-mathematical university students.

Тақизчилар:

Мирсабуров М.М. – Термиз давлат университети «Математик таҳлил» кафедраси мудири, ф.м.ф.д., профессор;

Аллаков И. - Термиз давлат университети «Алгебра ва геометрия» кафедраси мудири, ф.м.ф.д., доцент.

ИСБН:

Кириш

Ушбу китоб педагогика йўналишидаги олий ўқув юртларида мактабгача таълим йўналиши мутахассислиги бўйича таълим олаётган талабалар учун намунавий дастур асосида ёзилган бўлиб, у талабаларни олий математиканинг тўпламлар назарияси, текисликдаги аналитик геометрия, чизиқли алгебра элементлари, дифференциал ва интеграл ҳисоб, комбинаторика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўлимларининг бошланғич тушунчалари билан таништириш ҳамда касбий фаолиятларида фойдалана олиш малака ва кўникмаларини ҳосил қилишга қаратилган.

Математиканинг фан сифатидаги шаклланиши кўпгина мамлакатларда яшаб ижод қилган олимларнинг кўп йиллар давомидаги меҳнатларининг самарасидир.

783-850 йилларда яшаб ўтган Ўрта осиёлик машҳур математик олим Муҳаммад Мусо ал Хоразмий биринчилардан бўлиб алгебранинг тўла мазмунини аниқлаб берди. Унинг “Ал-жабр вал-муқобала” асари математика фанига алгебра номининг киритилишига сабаб бўлди. Шундан кейин, IX-XII асрларда турли тенгламаларни ечиш усулларини Ўрта осиёлик математик олим Абу Райхон Беруний ва Умар Ҳайём кашф қилдилар.

XVI асрга келиб, математикага ҳарфий белгилашлар киритилди, шу туфайли функция тушунчасининг тараққиётига яна бир қадам қўйилди.

Француз файласуфи ва математиги Рене Декарт (1596-1650) алгебра ва геометрия фанларининг ўзаро боғланишда эканликларини ва ўзгарувчи миқдорнинг аҳамияти ҳақидаги қимматли фикрларни олға сурди. Ўша даврда Декарт яратган янгиликлар математикада бурилиш нуқтаси бўлди. Шундай қилиб математиканинг қонуниятларини ифодаловчи тенгламалар яратилишига йўл очилди.

XII асрдан элементар математика соҳасидаги яратилган билимлар давр тараққиётининг талаб ва эҳтиёжларига жавоб беролмай қолди. Шундан кейин, математика тараққиётида янги давр - ўзгарувчи миқдорларни ўрганиш даври бошланди. Бу даврга келиб, биринчи марта Декарт ва бошқа математикларнинг ишларида функция тушунчаси киритила бошланди.

Шундай қилиб, XVII асрнинг охирида машҳур немис математиги Г.Лейбниц (1646-1716) ва унинг шогирдлари математикага “функция” терминини киритдилар.

Иоганн Бернулли (1667-1748) функция таърифини фанга қуйидагича киритади: “Ўзгарувчи миқдор ва ўзгармаслардан турли усуллар билан ҳосил қилинган миқдорга ўзгарувчининг функцияси дейилади.” Бернуллининг бу таърифидан кейин фақат Лейбниц ишларигагина эмас, балки машҳур инглиз математиги ва физиги Исаак Ньютон (1643-1727) нинг ишларига ҳам асос солинди. Ниҳоят машҳур рус геометри Н.И.Лобачевский (1792-1856) функция ҳақидаги турли мулоҳозаларни якунлаб, функция тушунчасига қўйидагича таъриф берди: “Агар *х* миқдорнинг ҳар бир қийматига *у* миқдорнинг маълум бир қиймати мос келса, у ҳолда *у* миқдор *х* миқдорнинг функцияси дейилади.”

Шундай қилиб, Ньютон ва Лейбниц бир вақтнинг ўзида мустақил равишда дифференциал ва интеграл ҳисобнинг асосий тушунчаларини математикага олиб кирдилар. Натижада ҳозирги даврга келиб, мактаб математика дастурига фақат функция ҳақида бошланғич тушунчалар эмас, балки асосий элементар функциялар синфи, уларни дифференциал ҳисоб ёрдамида ўрганиш, интеграл ҳисобнинг бошланғич тушунчалари ҳам киритилди. Бу эса ўз навбатида математика фани ютуқларининг халқ хўжалигининг турли соҳаларига тадбиқ этилиши, табиат ва жамиятнинг янада тезкор тараққий этишига сабаб бўлди. Шундай қилиб, математика фани ишлаб чиқаришнинг турли соҳаларига, хусусан, техника,иқтисодиёт, тиббиёт ва қишлоқ хўжалиги соҳаларига кириб борди. Алалхусус,ҳозирга келиб эса математика фани педагогика, психология, мактабгача таълим йўналишларига ҳам мутахассисликка яқин фан сифатида ўқитилмоқда. Шунинг учун ҳам, бўлажак тарбиячи олий математиканинг бошланғич тушунчалари билан қуролланган бўлишини давр тақозо этмоқда. Бу эса ўз навбатида энг биринчи мактабгача таълим муассасаси тарбиячилари ва мактаб математика ўқитувчиларининг зиммасига катта масъулият юклайди.

Ушбу қўлланма олий математикадан мактабгача таълим йўналиши соҳасидаги яратилаётган илк қўлланмалардандир. Шунинг учун ҳам қўлланма айрим камчиликлардан холи эмас. Қўлланма тўғрисида ўз фикр ва мулоҳазаларини юборган ўқувчиларга, мутахассисларга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

I БОБ. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§ . Математика фанининг предмети. Тўпламлар ҳақида бошланғич тушунчалар

Математика ($\mu\alpha\tau\varepsilon\mu\alpha$) сўзи юнонча сўз бўлиб, фан, билим сўзларининг бирикмасидан ҳосил бўлган. Математика фани ҳаётда учрайдиган шакллар, сонлар ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишларни ўрганади. Математика фани эрамиздан аввалги VI-V асрлардан бошлаб шакллана бошлаган. Бу даврга келиб математика фани асосан арифметика ва геометрия бўлимларини ўз ичига олган. Тўплам тушунчаси математикада бошланғич тушунчалардан бири бўлиб, у энг муҳим тушунчалардан бири ҳисобланади. Тўплам деганда маълум белгиларига асосланган нарсаларнинг мажмуаси тушунилади. Бунга мисол қилиб, бирор майдонда тўпланган одамлар тўплами, осмондаги юлдузлар тўплами, берилган айланада ётувчи нуқталар тўпламларини кетиришимиз мумкин. Шундай қилиб, тўпламни берилган деймиз, агар тўпламни ташкил этган ҳар бир элемент(нарса)нинг шу тўпламга тегишли ёки тегишли эмас эканлиги аниқланган бўлса.Берилган тўпламга тегишли бўлган нарсаларни тўпламнинг элементлари деб атаймиз. Бирор а элементнинг шу тўпламга тегишлилик белгисини $a \in A$ каби ёзамиз. Агар а элемент А тўпламга тегишли бўлмаса, уни $a \notin Q$ каби ёзамиз.

Одатда тўплам лотин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади. Масалан, *A, B, C, ... E, F, ...;* эдементлари эса *a, b, c, ... e, f, ...* каби белгиланади. Агар тўплам *a, b, ...* элементлардан тузилган бўлса,уни *A={ a, b, ... }* каби ёзамиз.Масалан, N_1 тўплам нолдан катта ва бешдан кичик бутун сонлардан тузилган бўлсин. Бу тўплам $N_1 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ каби ёзилади. Бу тўпламни $N = \{2, 3, 1, 4 \} = \{ 3, 4, 1, 2 \} = \{ 3, 4, 2, 1 \}$ ва ҳоказо кўринишларда ёзса ҳам бўлади. Чунки бизни фақат тўпламнинг элементлари қизиқтиради, уларнинг тартиби эмас. N_2 тўплам n дан катта бўлмаган натурал сонлардан тузилган бўлсин, уни $N_2 = \{1, 2, 3, \dots , n \}$ каби ёзамиз. Бу тўпламни бошқача $N_2 = \{ n, n\text{-}1, \dots , 3, 2, 1\}$ каби ёзса ҳам бўлади. Одатда барча натурал сонлар тўплами $N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ каби ёзилади. Математикада тўпламларнинг бошқача усулда ёзилиши ҳам қўлланилади, яъни, масалан, a ва b сонлар орасидаги барча ҳақиқий сонлар тўплами R қуйидагича ёзилиши ҳам мумкин: $R = \{ x \in R |\ a < x < b \}$.

Тўплам чекли тўплам ёки чексиз тўплам бўлиши мумкин. Элементларининг сонини бир нечта натурал сон билан аниқлаш мумкин бўлган тўплам чекли тўплам дейилади. Масалан, библиотекадаги китоблар тўплами, бирор синфдаги ўқувчилар тўплами, $2x–4 = 8$ тенгламанинг ечимлари тўплами каби тўпламлар чекли тўпламларга мисол бўла олади.

Маълумки, асосан, математикада кўпинча чекли бўлмаган тўпламлар, яъни чексиз тўпламлар қаралади. Масалан, барча натурал сонлар тўплами, текисликнинг барча нуқталари тўплами, барча рационал сонлар тўплами, барча иррационал сонлар тўплами ва ҳоказолар.

Тўпламларнинг тенглиги ва қисми тўғрисидаги тушунчаларни ҳам киритиш мумкин.

Фараз қилайлик, A тўплам бирор мактабдаги ўқувчилар тўплами бўлсин. B тўплам эса шу мактабдаги бирор синфдаги (масалан, 10-а) ўқувчилар тўплами бўлсин. Кўриниб турибдики, B тўпламнинг элементлари A тўпламнинг ҳам элементлари бўлади. Бундай ҳолда B тўпламни A тўпламнинг қисми ёки қисм тўплами деб атаймиз ва $B \subset A$ каби ёзамиз. A ва B тўпламлар бир хил элементлардан тузилиши ҳам мумкин. Бундай ҳолда A ва B тўпламларни тенг тўпламлар деймиз ва $A = B$ каби ёзамиз. Тўплам битта ҳам элементга эга бўлмаслиги мумкин. Бундай ҳолда тўпламни бўш тўплам деб атаймиз ва $A = \{\emptyset\}$ каби ёзамиз. Масалан, барча ҳақиқий сонлар тўпламида $x^2 + 1 = 0$ тенглама бирорта ҳам ечимга эга эмас. Шундай қилиб, тўплам берилди деган сўз, унинг ҳар бир элементига нисбатан шу элемент тўпламга тегишлими ёки тегишли эмасми деган тасдиқ берилиши керак.Дарҳақиқат, бу тенгламанинг ҳақиқий сонлардан тузилган ечимлар тўплами бўш тўпламдан иборатдир. Демак, юқоридаги тушунчаларга нисбатан қуйидагича аниқ таърифларни беришимиз мумкин.

1 – Таъриф. Агар A ва B тўпламлар бир хил элементлардан тузилган бўлиб, A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, аксинча, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса, бошқача айтганда A тўплам B тўпламнинг қисми, B тўплам A тўпламнинг қисми бўлса, яъни $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабат бажарилса, A ва B тўпламлар тенг дейилади. Тўпламларнинг тенглиги $A = B$ каби ёзилади.

Масалан, A тўплам 2 ва 3 сонлардан тузилган бўлса, B тўплам эса $x^2–5x+6=0$ квадрат тенгламанинг ечимларидан тузилган тўплам бўлса, бу тўпламлар тенг бўлади, яъни $A = B$ муносабатни ёза оламиз.

2 – Таъриф. Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса, у вақтда B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами дейилади ва $B\subset A$ каби ёзилади. Агар, бундан ташқари, $B\neq A$, яъни A тўпламда B тўпламга тегишли бўлмаган элементлар бўлса, у вақтда B тўплам A тўпламнинг хос қисми дейилади. Масалан, барча жуфт сонлар тўплами барча бутун сонлар тўпламининг хос қисми бўлади.

Агар A тўплам 1, 2 ва 3 сонлардан тузилган, яъни $A = \{ 1, 2, 3 \}$; B тўплам эса 2, 3 ва 4 сонлардан тузилган, яъни $B = \{ 2, 3, 4 \}$ бўлса, у вақтда $A \subset B$ муносабат ҳам, $B \subset A$ муносабат ҳам ўринли бўлмайди.

Қисмлилик ($\subset$) муносабатнинг баъзи бир хоссаларини келтирайлик:

1. A тўплам қандай бўлмасин, $A \subset A$ муносабат ўринли бўлади.
2. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабатлар ўринли бўлса, $A = B$ бўлади.
3. Агар $A \subset B$ ва $B \subset C$ муносабатлар ўринли бўлса, $A \subset C$ бўлади.

Тўпламларнинг бу хоссалари тўғридан-тўғри таърифдан келиб чиқади.

2-§. Тўпламлар устида амаллар

Фараз қилайлик, бирор A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

3-Таъриф. A ва B тўпламларнинг бирлашмаси (йиғиндиси) деб, шу тўпламларнинг барча элементларини ўз ичига олиб, булардан бошқа элементларга эга бўлмаган C тўпламга айтилади ва у қуйидагича ёзилади:

$A \cup B = C$ ёки $A \cup B = \{ x | \, x \in A$ ёки $x \in B \}$.

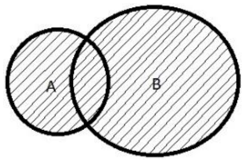
Масалан, барча бутун сонлар тўплами барча жуфт ва тоқ сонлар тўпламларининг йиғиндисига тенг; $A = \{ 1, 3, 5 \}$ ва $B = \{ 2, 3, 4 \}$ тўпламлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ тўпламдан иборат бўлади.

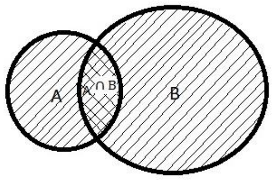
4-Таъриф. A ва B тўпламларнинг кесишмаси (кўпайтмаси) деб,шу тўпламларнинг умумий элементларидан тузилган тўпламга айтилади ва у қуйидагича ёзилади: $A \cap B = C$ ёки $A \cap B = \{ x | \, x \in A$ ва $x \in B \}$.

Масалан, 6 га бўлинувчи барча сонлардан тузилган сонлар тўплами барча жуфт сонлар тўплами ва 3 сонига бўлинувчи барча сонлар тўпламларининг кесишмасига тенг; $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ ва $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ тўпламлар берилган бўлса, уларнинг кесишмаси $A \cap B = \{ 2, 4, 6 \}$ тўпламдан иборат бўлади.

Изоҳ. Бўш тўплам тушунчасининг киритилиши кесишма амалининг ҳамма вақт ҳам бажарилишини таъминламайди. Хусусий ҳолда, умумий элементга эга бўлмаган тўпламларнинг кесишмаси тўғрисида ҳам гапиришимиз мумкин. Масалан, $A = \{ x \in R | \, x > 0 \}$ ва, $B = \{ x \in R | \, x < 0 \}$ кесишмаси бўш тўпламдан иборат, яъни : $A \cap B = \{ \emptyset \}$.

Тўпламлар устидаги амалларни кўргазмали равишда ифодалаш учун одатда Эйлер доиралари деб номланган доирачалардан фойдаланилади. Масалан, 1- ва 2-расмларда мос равишда A ва B тўпламларнинг бирлашмаси (барча штрихланган соҳа) ва кесишмаси (икки марта штрихланган соҳа) тасвирланган.





1-расм 2-расм

5 -Таъриф. A ва B тўпламларнинг айирмаси деб, A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган C тўпламга айтилади ва у $A \setminus B = C$ каби белгиланади. Масалан, $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ва $D = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ тўпламлар берилган бўлса,уларнинг айирмаси $A \setminus B = \{ 1, 3, 5 \}$ тўпламдан иборат бўлади.

6 -Таъриф. Агар $B \subset A$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B$ айирма B тўпламнинг A тўпламгача бўлган тўлдирувчиси дейилади ва у $C_A B$ орқали белгиланади. Масалан, $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ 1,3, 5 \}$ тўпламлар берилган бўлса,
$A \setminus B = \{ 2, 4 \}$ бўлишидан $C_A B = A \setminus B = \{ 2, 4 \}$ муносабатни ёзишимиз мумкин.

7 - Таъриф. А тўпламнинг В тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ва В тўпламнинг А тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам А ва В тўпламларнинг симметрик айирмаси дейилади ва у $A \Delta B$ каби белгиланади.Масалан, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$ тўпламлар берилган бўлса, уларнинг симметрик айирмаси $A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9 \}$ тўпламдан иборат бўлади.

Тўпламлар устидаги асосий амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cup A = A$.
4. $A \cap A = A$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$.
6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
7. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Математикада асосан сонли тўпламлар устида иш олиб борилади. Шунинг учун ҳам биз бундан кейин асосан элементлари сонлардан иборат тўпламларни қараймиз. Бу тўпламларни $a < x < b$, $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$, $x < b$, $x \le b$, $x > a$, $x \ge a$, $-\infty < x < +\infty$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи тўпламлар сифатида қараймиз.

Барча натурал сонлар тўплами – $N = \{ 1, 2, 3, \dots , n, \dots \}$, барча рационал сонлар тўплами Q, яъни p/q (p, $q \ne 0$, – бутун сонлар) каср кўринишидаги сонлар тўплами, барча иррационал сонлар (даврий бўлмаган чексиз ўнли каср сонлар,яъни $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π =3,14..., e=2,718... каби) биргаликда барча ҳақиқий сонлар тўпламини ташкил этади.

3-§. Комплекс сонлар тўплами. Комплекс сонлар устида амаллар

Биз барча натурал сонлар тўплами – N, барча бутун сонлар тўплами – Z, барча рационал сонлар тўплами – Q ва барча иррационал сонлар тўпламини ўз ичига олувчи ҳақиқий сонлар тўплами – R билан танишиб чиқдик. Математикада шундай масалалар учрайдики, бу масалаларни юқоридаги санаб ўтган сонлар системалари ёрдамида ҳал қилиб бўлмайди. Масалан, айтайлик, текисликнинг нуқталари билан ўз аро бир қийматли мослик ўрнатиш масаласини олайлик. Ҳақиқатан ҳам бу масалани фақат ҳақиқий сонлар ёрдамида ҳал қилиб бўлмайди. Бундай масалаларни ечиш учун мавжуд бўлган сонлар системасини кенгайтириш керак бўлиб қолади. Шунинг учун бундай масалаларни ечишда буюк математик олимлар томонидан комплекс сонлар деб аталмиш янги сонлар киритилган. Буни қуйидагича изоҳлашимиз мумкин. Текисликда бирор декарт координаталар системасини танлайлик.Маълумки, текисликдаги бирор A нуқта ўзининг координаталари билан тўлиқ аниқланади, яъни A нуқтанинг текисликдаги ўрни *(a, b)* ҳақиқий сонлар жуфтлиги билан тўлиқ ифодаланади.Бу ерда а сони А нуқтанинг абсциссаси, в сони эса ординатаси дейилади. Шунга ўхшаш яна бир масала, яъни боши координаталар бошида бўлган ихтиёрий OA вектор ҳам текисликдаги A нуқтанинг ўрнини аниқлайди. Ана шу *A(a,b)* нуқта комплекс соннинг геометрик тасвири деб қабул қилинади.Бу сонни кўпинча боши координаталар бошида ва охири *A(a,b)* нуқтада бўлган вектор сифатида ҳам талқин қилинади.

Шундай қилиб, биз келажакда ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий *(a,b)* жуфтлиги ёки бошланғич нуқтаси координаталар бошида бўлган ихтиёрий OA вектор тушунчалари асосида комплекс сонлар тушунчасига келамиз.

8-Таъриф. Ҳақиқий $a \in R,\ b \in R$ сонларининг *(a,b)* жуфтлигига комплекс сон деб атаймиз ва уни $z = (a,b)$ каби белгилаймиз ёки буни бошқача қилиб $z = a+bi$ каби кўринишда ҳам ёзамиз. Барча комплекс сонларни, яъни комплекс сонлар тўпламини $C = \{ (a,b) | a \in R, b \in R \}$ каби ёзамиз.

Комплекс сонларни, кўпинча a+íb кўринишда ёзамиз. Комплекс соннинг бундай шакли комплекс соннинг алгебраик шакли дейилади.Бунда биз a ҳақиқий сонини абсцисса ўқида жойлаштирамиз ва Ox ўқини ҳақиқий ўқ деб атаймиз, b сонини эса Oy ўқда жойлаштирамиз ва Oy ўқни мавҳум ўқ деб атаймиз, i белгини эса мавҳум бирлик сони сифатида қабул қиламиз. Бу мавҳум бирликни қуйидагича аниқлаб оламиз. Шу муносабат билан $x^2+1 = 0$ чала квадрат тенгламани одатдагидай ечиб, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$ ечимни ҳосил қиламиз, лекин бу ерда $\sqrt{-1}$ мавҳум сон, шунинг учун бу сонни i деб белгилаб олсак чала квадрат тенгламамиз $x_{1,2} = \pm i$ ечимга эга бўлади. Демак, бу ердан $i = \sqrt{-1}$ ва бундан эса $i^2 = -1$ муносабатга келамиз.

Қулайлик учун комплекс сонларни қисқача z сони билан белгилаймиз. Масалан, иккита комплекс сон берилган бўлса, биз уларни $z_1 = a+ib, z_2 = c+id$ каби ёзишимиз мумкин.

Комплекс сонлар устида тўртта арифметик амал – қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажарайлик.

Қўшиш:

Иккита комплекс сонни қўшиш учун бу комплекс сонларнинг ҳақиқий қисми ҳақиқий қисмига мавъум қисми мавҳум қисмига қўшилиб ёзилади, яъни иккита $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ комплекс сонлари берилган бўлсин, улар

$$z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

қоида бўйича қўшилади.

1 - мисол. $(2-3i)+(-5+2i)=(2-5)+(-3+2)i = -3 - i$.

Айириш:

$z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ комплекс сонларининг айирмаси деб эса шундай $z = x+iy$ комплекс сонига айтиладики, у сон $z_1 = z_2 + z$ тенгликни қаноатлантиради, яъни юқоридаги қўшиш амалига асосан

$$a+ib = (c+x) + i(d+y),$$

бу тенгликдан $c+x=a$, $d+y=b$ системага эга бўламиз, бу системани ечиб эса $x=a-c$, $y=b-d$ тенгликларга келамиз. Демак,

$$z_1 - z_2 = x + iy \text{ ёки } z_1 - z_2 = (a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$$

2-мисол. $(4+3i) - (-2+5i) = (4-(-2)) + (3-5)i = 6 - 2i$.

Кўпайтириш: $z_1=a+ib$, $z_2=c+id$ иккита комплекс сонларининг кўпайтмаси қуйидаги қоида бўйича аниқланган ифодага айтилади, яъни

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

комплекс сонига айтилади. Бу формулани чиқаришда кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш қоидасидан фойдаланамиз ва зарур ихчамлаштириш амалларини бажарамиз, натижада кутилган мақсадга эришамиз, яъни:

$$(a+ib)(c+id) = ac+iad+idc+i^2bd = (ac-bd)+i(ad+bc),$$

бу ерда биз $i^2 = -1$ тенгликдан фойдаландик.

3-мисол. $(1-2i)(3-4i) = 13 + 24i^2 – 14i -23i = 3+8(-1)-4i-6i = 3-8-10i = -5 -10i.$
Бундан кейин қўшма комплекс сон деган тушунча ишлатилади, у қуйидагича аниқланади: $z= a+ib$ сонига қўшма комплекс сон деб, $\bar{z} =a- ib$ кўринишидаги сонга айтилади. Қўшма комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳар доим ҳақиқий сонлардан иборат бўлади,яъни

$$(a+ib)+ (a-ib)= 2a\ , (a+ib)(a-ib) = a^2 -(ib)^2=a^2- i^2b^2 = a^2 +b^2.$$

Бу тушунчани киритгандан кейин комплекс сонни комплекс сонига бўлиш амалига таъриф беришимиз мумкин.
Бўлиш:
Берилган иккита $z_1 = a + ib,$ $z_2= c+id$ комплекс сонларининг $z_1{:}z_2$ бўлинмаси деб,

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(\text{c}-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(b\text{c}-ad)}{c^2\ +d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

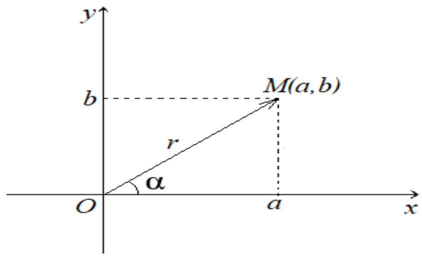
ифода билан аниқланадиган сонга айтилади.Бунда каср шаклида берилган бўлинманинг сурат ва махражини махраждаги турган ифоданинг қўшмасига кўпайтирамиз. Бу амалларни бажаришни мустақил иш сифатида ўқувчининг ўзига топширамиз.

4-мисол. $\frac{2+i}{3+4i}=\frac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{10-5i}{25}=0{,}4-0{,}2i$

Юқоридагилардан кўриниб турибдики, бўлиш амалидаги c ва d сонларининг бир вақтда нолга тенг бўлиши мумкин эмас, яъни $c = d = 0$ бўлганда бўлиш амалини бажариб бўлмайди, чунки нолга бўлиш мумкин эмас. Одатда, $z = a+ib$ шаклидаги комплекс сонни комплекс соннинг алгебраик шакли деб атаймиз.

Кўп ҳолларда масалалар ечишда комплекс соннинг тригонаметрик шаклидан фойдаланилади. Шу боис комлекс соннинг тригонаметрик шакли билан қисқача танишиб ўтайлик.

Фараз қилайлик текисликда тўғри бурчакли декарт координаталар системаси ўрнатилган ва унда *M(a,b)* нуқта, координаталар боши билан *M(a,b)* нуқтани туташтирувчи $\overrightarrow{OM}$ вектор берилган бўлсин (3-расм).



3-расм

3-расмдан кўриниб турибдики, Пифагор теоремасига асосан

$$a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha\ ,\ |z| = |a+ib| = r = \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \arg z=\alpha,\ \alpha=tg\frac{b}{a} \qquad (*)$$

тенгликларга эга бўламиз.

(*) муносабатлардан кўриниб турибдики, z комплекс сонга мос бўлган векторга биргина узунлик ва чексиз кўп бурчаклар мос келар экан. (*) формулаларга асосан $z = a+ib$ комплекс сонни тригонометрик шаклда қуйидагича ёзишимиз мумкинлиги келиб чиқади, яъни

$$z = a+ib = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ .$$

Ҳосил қилинган бу формула z комплекс сонининг тригонометрик шаклини беради. Бу формуладаги r сони AB векторнинг узунлигини, яъни модулини билдирса, α эса $z = a+bi$ комплекс сонининг аргументи деб аталади.

Мисол. 1+ί комплекс сонини тригонометрик шаклда ёзиш керак бўсин.

Ечиш. Биринчидан бу мисолда $a=1$, $b=1$ эканини аниқлаймиз. Шу сонларга асосан

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\ ,$$

Демак, бу маълумотларга кўра, $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ натижага эга бўламиз. Бу эса биздан сўралган комплекс соннинг тригонометрик шаклидир.

4-§. Математик мантиқ элементлари. Мулоҳазалар ва улар устида амаллар

Математик мантиқ элементлари, умуман, математик теоремаларни тузишда ва исботлашда, турли механизм ва машиналарни (схемаларни) проектлашда фойдаланилади. Масалан, у телефон линиялари системасини тузишда, электр контакт схемаларини тузишда, автоматик ҳисоблаш машиналари учун программа тузишда ва ҳоказоларда ишлатилади.

Мантиқий мулоҳазалар, бошқа ҳар қандай математик назариялар каби, баъзи бир асосий тушунчалардан – объектларнинг баъзи синфлари, хоссалари, муносабатлари ва шулар устида бажариладиган амаллардан тузилади. Бу асосий тушунчалар бошланғич тушунчалар, шу назарияда бирор аниқланишни, таърифланишни талаб қилмайдиган тушунчалар деб қаралади. Шу билан бирга бу тушунчалар қаралаётган назарий тавсифлаши керак бўлган математик бўлмаган мазмунга мос келадиган қилиб танланади. Фикр-мулоҳазалар мантиқининг ўрганадиган асосий объектларидан бири содда фикр (мулоҳаза)лардир.

Қуйида бир неча хил фикрларни кўздан кечирайлик:

1) 6 – жуфт сон;
2) Амударё орол денгизига қуйилади;
3) Сирдарё шимолга қараб оқади;
4) Олти бешдан кичик (6<5);
5) 0,6 – бутун сон.

Бу жумлаларнинг ҳар бири содда дарак гап бўлиб, бирор фактни тасдиқлайди. Бундай ҳар бир жумланинг рост ёки ёлғонлигини айтиш мумкин.Масалан, 1-,2- ва 3-фикрлар рост, 4- ва 5- фикрлар ёлғон. Энди бошқа хилдаги содда жумлаларни таҳлил қилиб кўрайлик:

1) Ассалому алайкум, отажон !
2) Математика нима?
3) 0,0001 – жуда кичик сон.

Кўряпмизки, бу фикрларнинг рост ёки ёлғонлиги ҳақида ҳеч нарса дея олмаймиз.

Фикр-мулоҳазалар мантиқида рост ёки ёлғонлигини айтиш мумкин бўлган ҳар бир содда жумла содда фикр дейилади.

Содда фикр бир вақтнинг ўзида рост ҳам, ёлғон ҳам бўлиши мумкин эмас.

Агар жумланинг рост ёки ёлғонлиги ҳақида бир маъноли жавобга келолмасак , унда бундай жумла мураккаб фикр бўлади.

Фикр тушунчаси математик мантиқ учун асосий тушунчадир. Математик мантиқ одатда фикрларнинг мазмунига эътибор қилмай, унинг ростлик қиймати билан қизиқади.

Бундай қилиш ўз навбатида белгилашлардан фойдаланиб, фикрлар билан муомала қилишни осонлаштиради.Фикрлар асосан лотин алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади: A, B, C, ...Ҳар бир фикрга унинг ростлик қийматини мос келтирамиз, бунда қиймат рост бўлса “Р” ҳарфи билан, қиймат ёлғон бўлса , “Ё” ҳарфи билан белгилаймиз:

$$|A| = \begin{cases} P, & \text{агар А — рост бўлса,} \\ Ё, & \text{агар А — ёлғон бўлса.} \end{cases}$$

Математик мантиқ асосан бешта амал асосида қурилади. Бу амаллар: инкор – инверсия, конъюнкция (бу амал “ва” боғловчисига тўғри келади), дизъюнкция (бу амал “ёки” боғловчисига тўғри келади), импликация, эквивалентлик.

Инкор қилиш амали. Бирор А фикр берилган бўлсин. Бу фикрни инкор этиб “А тўғри эмас” деган фикрни ҳосил қилиш мумкин, биз уни $\bar{A}$ каби белгилаймиз. “$-$” белги инкор амалини билдиради.Масалан, А фикр: “9 сони 3 га бўлинади”, деган фикрдан иборат бўлсин, А фикрга қарама-қарши бўлган фикр, яъни $\bar{A}$ фикр бундай бўлади: “9 сони 3 га бўлинмайди.

Берилган фикр ростлик қийматининг қандай бўлишига қараб, инкор қилиш билан ҳосил қилинган фикр тескари қийматга эга бўлади, яъни:
агар А рост бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ ёлғон бўлади;
агар А ёлғон бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ рост бўлади.
Демак, инкор қилиш амалининг ростлик жадвали бундай бўлади:

A	$\bar{A}$
Р	Ё
Ё	Р

Конъюнкция амали. Бу амал “ва” боғловчисига тўғри келади**.** Содда фикрларни қарайлик:

1) 6 сони 3 га бўлинади - рост (Р);
2) 10 сони 5 дан катта - рост (Р);
3) 3 сони 5 га бўлинади - ёлғон (Ё);
4) 3 сони 5 сонидан катта - ёлғон (Ё).

Масалан, “ва” боғловчисининг мазмунига кўра “6 сони 3 га бўлинади ва 10 сони 5 дан катта” деган мураккаб фикр рост, “6 сони 3 га бўлинади ва 3 сони 5 дан катта”,”3 сони 5 га бўлинади ва 10 сони 5 дан катта”, “3 сони 5 га бўлинади ва 3 сони 5 дан катта” деган мураккаб фикрларнинг ёлғон бўлиши табиий.

Шундай қилиб, “ва” боғловчиси билан боғланган иккита содда фикр мураккаб фикр ҳосил қилади. Бу фикрларнинг иккаласи ҳам рост бўлгандагина мураккаб фикр рост бўлади.

А,В фикрларнинг конъюнкцияси деб, шундай фикрни айтамизки, бу фикр А ва В фикрларнинг ҳар бири рост бўлсагина рост бўлади. А , В фикрларнинг конъюнкцияси “$A \wedge B$”каби белгиланади.

Бу амалларнинг ростлик жадвали эса таърифга кўра бундай тузилади:

A	B	A∧B
Р	Р	Р
Р	Ё	Ё
Ё	Р	Ё
Ё	Ё	Ё

Дизъюнкция амали. Дизъюнкция амали “ёки” боғловчисига тўғри келади. Бу ерда олдиндан шуни айтиш керакки, “ёки” боғловчиси улардан ақалли биттаси маъносида ишлатилади. Дизъюнкция амалини конъюнкция амалида кўрилган мисолларда кўрайлик:

1) “6 сони 3 га бўлинади ёки 10 сони 5 сонидан катта”,
2) “6 сони 3 га бўлиниди ёки 3 сони 5 сонидан катта”,
3) “3 сони 5 га бўлинади ёки 10 сони 5 сонидан катта”,
4) “3 сони 5 га бўлинади ёки 3 сони 5 дан катта.

Юқорида айтилганига кўра “ёки” боғловчисининг мазмунидан бу мураккаб фикрларнинг ростлик қийматлари бундай бўлиши табиийдир:

1) Рост,
2) Рост,
3) Рост,
4) Ёлғон.

Бу натижалар моҳиятига кўра мазмундан келиб чиқиб мантиқ амалининг дизъюнкция амали аниқланади.

А, В фикрларнинг дизъюнкцияси деб шундай фикрни айтамизки, бу фикр “А” ва ”В” фикрларнинг камида биттаси рост бўлса, рост бўлади. А, В фикрларнинг дизъюнкцияси $A \vee B$ каби белгиланади ва “ А ёки В “ деб ўқилади. Айтилганларга кўра дизъюнкциянинг ростлик жадвали қуйидагича бўлади:

A	B	A∨B
Р	Р	Р
Р	Ё	Р
Ё	Р	Р
Ё	Ё	Ё

Импликация амали.

Математик мантиқ амалларининг яна бири импликация амалидир. Импликация амали ⇒ белги билан ифодаланади. Айтайлик А ва В фикрлар берилган бўлсин. Бу фикрларнинг импликацияси деб шундай фикрга айтиладики, бу фикр фақат А – рост, В – ёлғон бўлгандагина ёлғон бўлади.

$A \Rightarrow B$ ёзув: “ А импликация В” деб ўқилади. Импликациянинг ростлик жадвали бундай бўлади.

А	В	$A \Rightarrow B$
Р	Р	Р
Р	Ё	Ё
Ё	Р	Р
Ё	Ё	Р

Эквивалентлик амали.

А ва В фикрларнинг эквивалентлиги деб, А ва В фикрларнинг, $\Leftrightarrow$ белги орқали боғланишидан ҳосил бўлган мураккаб фикрга айтилади ва у $A \Leftrightarrow B$ каби белгиланади.

Эквивалентликнинг , яъни $A \Leftrightarrow B$ фикрнинг ростлиги қуйидаги жадвал билан аниқланади.

А	В	$A \Leftrightarrow B$
Р Р Ё Ё	Р Ё Р Ё	Р Ё Ё Р

Берилган амалларнинг ростлик қийматлари жадвалларидан фойдаланиб қуйидаги мисолларни ечайлик.

1-мисол. А, В, С, Д фикрлар берилган бўлсин.Ушбу ҳолни, яъни А – рост, В – рост, С – ёлғон, Д – рост фикрлар бўлсин. Ушбу $[(A \vee B) \wedge (B \vee C)] \Rightarrow Д$ мураккаб фикрнинг ростлик қийматини топинг.

Юқоридаги қаралган жадвалларга асосан қуйидагига эга бўламиз:

$A \vee B = рост(Р)$,

$B \vee C = рост(Р)$,

$(A \vee B) \wedge (B \vee C) = рост(Р)$,

$[(A \vee B) \wedge (B \vee C)] \Rightarrow Д = рост(Р)$.

Ҳисоблашнинг содда кўринишга эга бўлиши учун юқоридагиларни қуйидагича ёзамиз:

$[(A \vee B) \wedge (B \vee C)] \Rightarrow Д$

$[(Р \vee Р) \wedge (Р \vee Ё)] \Rightarrow Р$

$(Р \wedge Р) \Rightarrow Р$,

$P \Rightarrow P$,

Демак, бу мураккаб фикрнинг ростлик қиймати рост эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

2-мисол. А – рост, В – ёлғон, С – ёлғон, Д – рост бўлсин.

Мураккаб фикрларнинг ростлик қийматини топишга қуйидагича киришамиз:

$[(A \Rightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C)] \wedge [(B \vee Д) \wedge (\overline{A \vee C})]$,

$[(Р \Rightarrow Ё) \wedge (Р \Leftrightarrow Ё)] \wedge [(Р \vee Р) \wedge (\overline{Р \vee Ё})]$,

$(Ё \wedge Ё) \wedge (Р \wedge Ё)$,

$Ё \wedge (Р \wedge Ё)$,

$Ё \wedge Ё$.

Демак, бу мураккаб фикрнинг ростлик қиймати ёлғон эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, бу мураккаб фикрнинг ростлик қиймати ёлғон эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Биз юқорида $-$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ белгилар (амаллар)нинг комбинацияларидан фойдаланиб, содда фикрлардан мураккаб фикрлар ҳосил қилдик.

I бобга доир ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қайси даврдан бошлаб математика фан сифатида ўрганила бошланди?
2. Тўплам нима? Тўплам таърифланадиган тушунчами?
3. Арифметик амалларни сананг.
4. Тўпламлар устида қандай арифметик амалларни бажариш мумкин?
5. Сонли тўпламларга доир мисоллар келтиринг.
6. “ оралиқ “ , “ ярим оралиқ “ ва “ кесма “лар тўғрисида тушунча беринг.
7. Иррационал соннинг таърифини айтинг ва тушунтиринг.
8. $\sqrt{2}$ қандай сон?
9. Рационал сон деб қандай сонларга айтилади.
10. Рационал сонлар тўплами қандай хоссаларга эга.
11. Импликация нима? Тушунтириб беринг.
12. Дизъюнкция нима? Тушунтириб беринг.
13. Конъюнкция нима? Тушунтириб беринг.
14. $x^2+1=0$ тенглама ҳақиқий сонлар соҳасида ечимга эгами?
15. Комплекс соннинг таърифини айтинг.
16. Комплекс сони неча хил шаклга эга.

17. Комплекс соннинг шаклларини тушунтириб беринг.
18. Комплекс соннинг модули деб нимага айтилади.
19. Комплекс соннинг аргументи деб нимага айтилади.
20. Комлекс сон билан ҳақиқий соннинг нима фарқи бор.
21. Комплекс сонлар тўпламини математикада қандай ҳарф билан белгилайди
22. Ҳақиқий сонни комплекс сон десак бўладими.
23. Комплекс сонларга мисоллар келтиринг.

I бобга доир машқлар

1. Агар $A \cup B = A$ ва $A \cap B = A$, бўлса $A = B$ эканлигини исботланг.
2. $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ тенгликларнинг тўғри эканлигини кўрсатинг.
3. $A \cup B = B \cup A$ тенгликнинг тўғри эканлигини кўрсатинг.
4. $A \cap B = B \cap A$ тенгликнинг тўғри эканлигини кўрсатинг.
5. $A \subset B$ муносабатдан $A \cap B = A$ муносабатнинг келиб чиқишини кўрсатинг.
6. $A \subset B$ муносабатдан $A \cup B = B$ муносабатнинг келиб чиқишини кўрсатинг.
7. $A \cap B = A$ муносабатдан $A \subset B$ муносабатнинг келиб чиқишини кўрсатинг.
8. $A \cup B = B$ муносабатдан $A \subset B$ муносатнинг келиб чиқишини кўрсатинг.
9. Сонлар ўқида $-5 \le x < 7, 2 \le x \le 5, \mathrm{x} < 1,\ x > 1, -\mathrm{a} < x < \mathrm{a},\ 0 \le x < +\infty$ муносабатни қаноатлантирувчи тўпламни кўрсатинг.
10. Комплекс сонларнинг йиғиндисини топинг.

a) $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -2 + 3i;$
b) $z_1 = 5 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 5 - \sqrt{3}i;$
c) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -2 + 4i;$
d) $z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = -3 - 3i;$
e) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i,\ z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3}i;$
g) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{7}i;$
l) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{5}i,\ z_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{7}i;$
m) $z_1 = \frac{5}{7} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{7}i;$
n) $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4}i;$
k) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i,\ z_2 = 2 - \sqrt{5}i;$

Комплекс сонларнинг айирмасини топинг.

a) $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -2 + 3i;$
b) $z_1 = 5 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 5 - \sqrt{3}i;$
c) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -2 + 4i;$
d) $z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = -3 - 3i;$
e) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i,\ z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3}i;$
g) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{7}i;$
l) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{5}i,\ z_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{7}i;$

m) $z_1 = \frac{5}{7} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{7}i;$
n) $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4}i;$
k) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i,\ z_2 = 2 - \sqrt{5}i;$

11. Комплекс сонларнинг кўпайтмасини топинг:
a) $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -2 + 3i;$
b) $z_1 = 5 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 5 - \sqrt{3}i;$
c) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -2 + 4i;$
d) $z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = -3 - 3i;$
e) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i,\ z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3}i;$
g) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{7}i;$
l) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{5}i,\ z_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{7}i;$
m) $z_1 = \frac{5}{7} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{7}i;$
n) $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4}i;$
k) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i,\ z_2 = 2 - \sqrt{5}i;$

12. Комплекс сонларнинг бўлинмасини топинг.
a) $z_1 = 5 + 4i,\ z_2 = -2 + 3i;$
b) $z_1 = 5 + \sqrt{3}i,\ z_2 = 5 - \sqrt{3}i;$
c) $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -2 + 4i;$
d) $z_1 = -1 + 4i,\ z_2 = -3 - 3i;$
e) $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i,\ z_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3}i;$
g) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{7}i;$
l) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{5}i,\ z_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{7}i;$
m) $z_1 = \frac{5}{7} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = -\frac{1}{5} - \frac{4}{7}i;$
n) $z_1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i,\ z_2 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4}i;$
k) $z_1 = 2 + \sqrt{5}i,\ z_2 = 2 - \sqrt{5}i;$

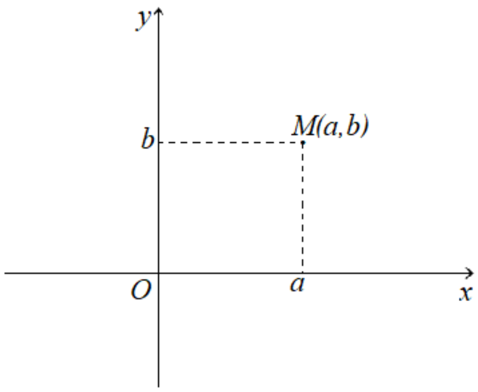
13. Ҳисобланг:
a) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i};$
b) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2;$
c) $i^2 + i^3 + i^4 + i^5.$

II БОБ. АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ОЛИЙ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§ . Текисликда аналитик геометрия масалалари

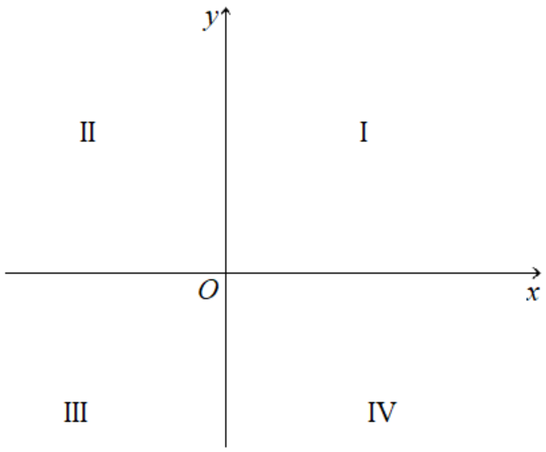
Текисликда тўғри чизиқли декарт координаталар системаси

Текисликда иккита ўзаро перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказайлик ва бу тўғри чизиқларга ўнг томонига стерелка қўйиб йўналишни белгилаб олайлик. Бу ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси *O* ҳарфини (координаталар боши), горизонтал жойлашган тўғри чизиқни *Ox* – абсциссалар ўқи, вертикал жойлашган тўғри чизиқни *Oy* – ординаталар ўқи деб атаймиз. Ҳар бир ўқ координаталар бошида, яъни *O* нуқтада иккига бўлинади. Ҳар иккала ўқнинг ҳам бўлиниш нуқтасидан ўнг томонида мусбат сонларни, чап томонида эса манфий сонларни ўсиш тартибида жойлаштирамиз. Текисликнинг ҳар бир *M* нуқтасига бир жуфт сонни мос қўямиз. Бу сонларнинг биринчисини, яъни *a* ни нуқтанинг абсциссаси, иккинчиси *b* ни эса нуқтанинг ординатаси деб атаймиз. *M* нуқтадан *Oy* ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказайлик. Бу тўғри чизиқнинг *Ox* ўқ билан кесишиш нуқтасини *a* билан белгилайлик. *M* нуқтанинг абсциссаси деб, *O* нуқтадан *a* нуқтагача бўлган масофага тенг *a* соннинг абсолют қийматини белгилаймиз. Бу *a* сони мусбат сон бўлади, агар *a* сон мусбат ярим ўқда жойлашган бўлса, манфий бўлади, агар *a* сони манфий ярим ўқда жойлашган бўлса. Агар *a* сони координаталар боши билан устма-уст жойлашса, у вақтда *a* сонини нолга тенг деб биламиз. *M* нуқтанинг *b* координатаси ҳам худди шунга ўхшаш аниқланади. *M* нуқтани координаталари билан биргаликда *M(a,b)* каби ёзамиз. Текисликдаги бундай расм тўғри бурчакли декарт координаталар системасини ташкил этади дейилади. (4-расм).



4-расм

Координата ўқлари 5-расмда кўрсатилгани каби текисликни тўртта тўғри бурчакли қисмга ажратади. Биринчи қисмни – I (биринчи) квадрант, иккинчи қисмни – II (иккинчи) квадрант, учинчи қисмни – III (учинчи) квадрант, тўртинчи қисмни – IV (тўртинчи) квадрант деб атаймиз. Ҳар бир квадрантдаги нуқтанинг координадалари жадвалда кўрсатилгани каби ишораларга эга бўлади.



M	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

5-расм

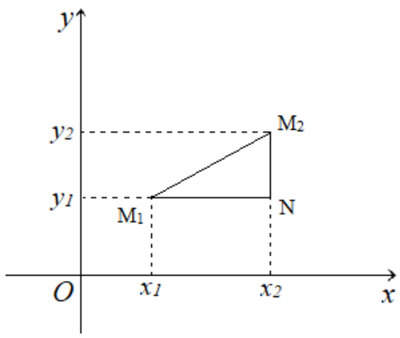
Ox ўқнинг ҳар бир нуқтаси нолга тенг бўлган ординатага, *Oy* ўқнинг ҳар бир нуқтаси эса нолга тенг бўлган абсциссага эга бўлади. Координаталар боши *O* нуқтанинг абсциссаси ҳам, ординатаси ҳам нолга тенг бўлади.

Юқорида кўрсатилган тартибда аниқланган текисликни *Oxy* (баъзан *xy*) текислиги деб атаймиз. Кўриниб турибдики, текисликнинг ҳар бир нуқтасига бир жуфт ҳақиқий сон мос келар экан.

Текисликдаги икки нуқта орасидаги масофа

$M_1(x_1,y_2)$, $M_2(x_2,y_2)$ нуқталар берилган бўлиб, $d=M_1M_2$

$M_1(x_1,y_2)$, $M_2(x_2,y_2)$ нуқталарни тўғри бурчакли декарт координаталар ситстемасида ўринларини белгилаб, уларни туташтирайлик (6-расм).



6-расм.

Пифагор теоремасига кўра, икки нуқта орасидаги масофа формуласига эга бўламиз:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(M_1N)^2 + (M_2N)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.1)$$

(2.1)-икки нуқта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласи дейилади.

Кесмани берилган нисбатда бўлиш

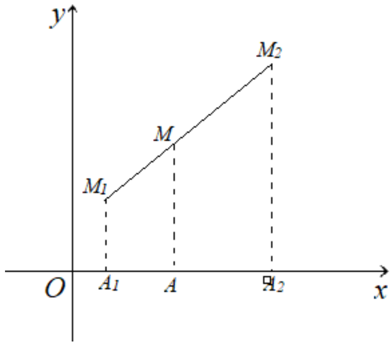
Энди $M_1(x_1,y_2)$, $M_2(x_2,y_2)$ нуқталар берилган бўлиб, M_1, M_2 нуқталарда шундай $M(x,y)$ нуқтани топиш керакки,

$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \lambda$$

шарт бажарилсин(7-расм).

Элементар математикадан маълумки,

$$\frac{|M_1M|}{|M_2M|} = \frac{|A_1A|}{|A_2A|} \Rightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$



7-расм.

Демак,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Агар (2.2) да, $\lambda = 1$ десак,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y = \frac{y_1+y_2}{2} \end{cases} \qquad (2.3)$$

кесма ўртасининг координаталарини ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз.

Мисол. Учлари $A(-5;\ 3)$, $B(2;\ -4)$ нуқталарда бўлган AB кесма берилган. $C(x;y)$ нуқта кесмани 1/4 нисбатда бўлади. $C(x;y)$ нуқта координаталари билан AB кесма узунлигини топинг.

Ечилиши. Қуйидагиларни ёзиб оламиз:

$$\frac{AC}{CB}=\lambda=\frac{1}{4},\quad x_1=-5,\quad y_1=3,\quad x_2=2,\quad y_2=-4.$$

(2.2) формуладан фойдаланиб *C(x;y)* нуқтанинг координаталарини топамиз.

$$x=\frac{-5+\frac{1}{4}\cdot 2}{1+\frac{1}{4}}=-3{,}6;\qquad y=\frac{3+\frac{1}{4}\cdot(-4)}{1+\frac{1}{4}}=1{,}6.\qquad C(-3{,}6;\ 1{,}6)$$

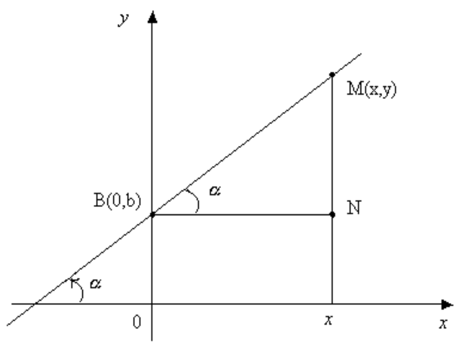
AB кесма узунлигини (2.1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$AB=d=\sqrt{(2+5)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}.$$

Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

Оxy текисликни ҳамда унда ётган тўғри чизиқни қараймиз. Тўғри чизиқ координата ўқларининг ҳеч бирига параллел бўлмасин. Oy ўқ билан $B(0;b)$ нуқтада кесишсин ва *Ох* ўқнинг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этсин (8-расм). Шу тўғри чизиқнинг тўғри бурчакли,яъни декарт координаталар системасидаги тенгламасини топамиз, бу дегани x ва y декарт координаталарини боғловчи шундай тенгламани топиш керакки, тўғри чизиқнинг барча нуқталарининг координаталари шу тенгламани қаноатлантирсин.Тўғри чизиқда ётмайдиган нуқталарнинг координаталари эса, албатта, бу тенгламани қаноатлантирмайди.

Фараз қилайлик, $M(x;y)$ нуқта тўғри чизиқнинг $B(0;b)$ нуқтасидан фарқли исталган нуқтаси бўлсин. 8-расмдаги ΔBNM дан $\frac{MN}{BN}=tg\alpha$ ёки $MN=tg\alpha\cdot BN$ тенгликка эга бўламиз. $MN=y-b,\ \ BN=x$ эканлигини ҳисобга олсак, $y-b=tg\alpha\ .\ x$ тенглик келиб чиқади $k=tg\alpha$ деб белгиласак, $y=kx+b$ (2.4) тенглама ҳосил бўлади.



8-расм.

Бу тенглама берилган тўғри чизиқнинг тенгламасидир. Чунки уни тўғри чизиқ устида ётувчи исталган $M(x;y)$ нуқтасининг координаталари қаноатлантиришини кўрдик. Тўғри чизиқда ётмайдиган ҳеч бир нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантирмаслигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

$k = tg\alpha$ сон тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти деб аталади, B сони эса тўғри чизиқнинг бошланғич ординатаси дейилади.

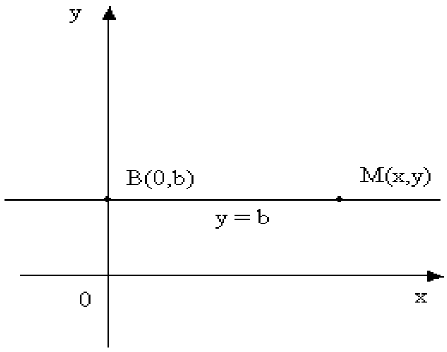
Тўғри чизиқнинг (2.4) тенгламаси унинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

Фараз қилайлик, тўғри чизиқ *Ox* ўққа параллел бўлсин (9-расм).
Бу ҳолда $\alpha = 0,\ k = tg0 = 0$ бўлгани учун тўғри чизиқ тенгламаси

$$y=b \qquad (2.5)$$

кўринишга эга бўлади.

(2.5) тенглама *Ox* ўққа параллел тўғри чизиқ тенгламасини беради. Хусусий ҳолда *y=0* *Ox* ўқнинг тенгламасини беради.



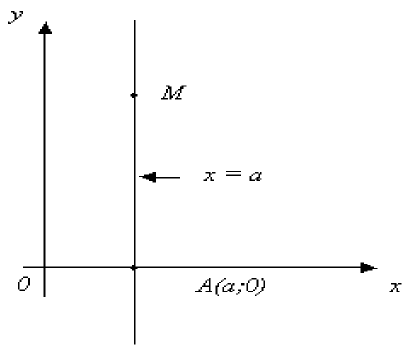
9 –расм.

Тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтсин. У ҳолда b=0 бўлиб, координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$y = kx \qquad (2.6)$$

ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, тўғри чизиқ *M(a;0)* нуқтадан ўтиб, *Oy* ўққа параллел бўлсин. (10-расм). Бу ҳолда тўғри чизиқ *Ox* ўқ билан 90^0 бурчак ҳосил қилиб, $k = tg90^0$ мавжуд бўлмаганлиги учун унинг тенгламасини (2.6) кўринишда ёзиб бўлмайди. Тўғри чизиқнинг барча нуқталари a абсциссага эга бўлганлиги учун унинг тенгламаси



10-расм

$$x=a$$

Кўринишга эга бўлади. Хусусий ҳолда *x=0* *Oy* ўқнинг тенгламасининг ўзи бўлади.

Изоҳ. Бундан буён тўғри чизиқ берилган ёки тўғри чизиқ топилсин дейилганда тўғри чизиқнинг тенгламаси берилганини ёки тўғри чизиқнинг тенгламасини топиш кераклиги тушунилади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси.

Текисликда декарт координаталар системасида берилган ихтиёрий тўғри чизиқ ушбу

$$Ax + By + C = 0 \quad (2.4)$$

тенглама ёрдамида аниқланади ва аксинча.

Бу ерда A, B, C лар ўзгармас коэффицентлар бўлиб A ва B лардан ҳеч бўлмаса бири нолдан фарқли деб қаралади.

Шунинг учун ҳам (2.4) тенгламага тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси деб аталади.

A, B, C ўзгармас коэффицентлар турли қийматларга тенг бўлганда турли тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Демак, тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти шу A, B, C сонлар билан тўлиқ аниқланади.

Юқорида тўғри чизиқ тенгламаси декарт координаталари x ва y га нисбатан биринчи даражали тенглама бўлишини кўрдик. Энди тескарисини исботлаймиз.

Теорема. Декарт координаталари x ва y ларга нисбатан биринчи даражали ҳар қандай тенглама тўғри чизиқ тенгламасидир.

Таъриф. $Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$ (2.7)

Тенглама тўғри чизиқнинг умумий кўринишдаги тенгламаси деб аталади.

Энди тўғри чизиқнинг умумий кўринишдаги тенгламаси билан батафсилроқ танишайлик.

1) $y=0$ бўлсин. У ҳолда тенглама

$$x = -\frac{C}{A}$$

кўринишни олади. Агар $C \neq 0$ бўлса тўғри чизиқ Oy ўққа параллел бўлади. $C=0$ бўлса тенглама $x=0$ кўринишга эга бўлиб, бу ҳолда тўғри чизиқ Oy ўқда ётади.

2) $A=0$ бўлсин. У ҳолда $B \neq 0$ ва тўғри чизиқ тенгламаси $y = -\frac{C}{B}$ кўринишга эга бўлади. Бу тенглама Ox ўққа параллел тўғри чизиқ тенгламасидир. $C=0$ бўлганда бундан $y=0$, яъни Оx ўқнинг тенгламаси ҳосил бўлади.

3) $C=0$ бўлсин. У ҳолда (2.7) тенглама $Ax+By=0$ ёки $y = -\frac{A}{B}x$ кўринишига эга бўлади. Бу охирги тенглама координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси эканини биламиз. Демак, $C=0$ бўлганда тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтар экан.

Изоҳ. Тўғри чизиқ тенгламаси умумий кўринишда берилганда тенгламадан y топилса тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси ҳосил бўлади.

Шунинг учун вазиятга қараб тўғри чизиқнинг у ёки бу тенгламаларидан фойдаланамиз.

Берилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Айтайлик, $M(x_1, y_1)$ нуқта берилган бўлиб, шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топиш талаб қилинсин.

$y = kx + b$ кўринишда қидирамиз. Тўғри чизиқ $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтганлиги учун $y_1 = k_1x + b_1$ бўлади. Натижада

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (2.5)$$

изланаётган тенгламага эга бўламиз.

Агар $M(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар берилган бўлса, бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ушбу

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2.6)$$

тенгликдан топилади.

Тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси

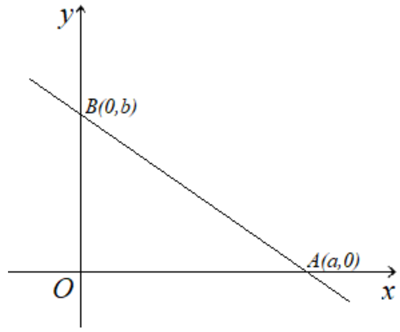
Фараз қилайлик тўғри чизиқ координата ўқларининг ҳеч бирига параллел бўлмасдан у Ox ўқдан $OA=a$, Oy ўқдан $OB=b$ кесмалар ажратсин.

У ҳолда тўғри чизиқ $A(a;0)$ ва $B(0;b)$ нуқталардан ўтиши равшан. Шунинг учун икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (2.15) дан фойдаланамиз, натижада

$x_1 = a,\ y_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = b$ бўлгани учун

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \text{ ёки } \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.16)$$

келиб чиқади.



11-расм

Бу тенглама тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси деб аталади. 11-расмда координата ўқларини *A(a;0)* ва *B(0;b)* нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг тасвири берилган. Бу тасвир учлари *A(a;0), B(0;b)* ва *O(0;0)* нуқталарда бўлган тўғри бурчакли учбурчак шаклини беради.

Мисол. x-y+3=0 тўғри чизиқ ва коордтната ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи топилсин.

Ечиш. Изланаётган шаклнинг юзасини S деб олайлик.Берилган тўғри чизиқнинг тенгламасини кесмалардаги тўғри чизиқ кўринишида ёзиб олайлик. Бунинг учун берилган тенгламанинг ҳар бир ҳадини -3 сонига бўлиб олиб, ҳосил бўлган ифода устида ихчамлаштириш ишларини олиб борайлик. Натижада берилган тўғри чизиқ тенгламасининг кесмаларда берилган шаклига эга бўламиз, яъни:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, a=-3, b=3, учбурчакнинг юзи формуласи - $S=\frac{|ab|}{2}$ га асосан S=$\frac{9}{2}$ кв.бир. натижага эга бўламиз.

Чизиқ ва унинг тенгламаси

Текисликнинг нуқталари ва бир жуфт сонлар орасидаги мослик текисликдаги чизиқларни уларнинг аналитик формулалари орқали ўрганишга олиб келади.

Ҳар қандай чизиқ (эгри чизиқ ҳам, тўғри чизиқ ҳам) маълум бир шартларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида қаралади.Масалан,айлана – марказ деб аталувчи бирор нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик урнини ташкил этади.

Тўғри бурчакли координаталар системасида ҳар бир М нуқтанинг ўрни унинг бир жуфт (x,y) координаталари орқали аниқланади.Бирор қоида ёки қонунга бўйсунувчи бундай нуқталар орасидаги муносабатни

$$F(x,y) = 0 \qquad (2.17)$$

тенглама кўринишида ёзамиз.

Агар $M(x_0,y_0)$ берилган чизиққа тегишли бўлса, у вақтда бу нуқтанинг координаталарини (2.17) тенгламани қаноатлантиради деймиз,яъни $x = x_0$, $y = y_0$ сонларни (2.17) тенгламанинг ўнг томонига қўйганимизда тенгликнинг ўнг томонида ноль сони ҳосил бўлиши керак. Бундай ҳолда бу нуқтанинг координаталарини (2.17) тенгламани қаноатлантиради деймиз. Агар $M_0(x_0,y_0)$ нуқтанинг координаталари берилган чизиққа тегишли бўлмаса, у вақтда бу нуқтанинг координаталари (2.17) тенгламани қаноатлантирмайди деймиз.

Таъриф. Агар бирор чизиқнинг барча нуқталарининг координаталари $F(x,y) = 0$ тенгламани қаноатлантирса, бу тенгламани берилган чизиқнинг тенгламаси деб атаймиз.

Ушбу

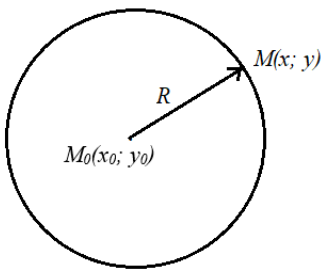
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2.10)$$

(2.10)-тенглама ёрдамида аниқланадиган чизиққа иккинчи тартибли чизиқ деб аталади. Улар жумласига математикада муҳим роль ўйнайдиган айлана, эллипс, гипербола ва параболалар киради.

Айлана. Марказ деб аталадиган нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнига айлана дейилади. $M_0(x_0; y_0)$

$M_0M=R$ $\forall M(x,y)$ учун айлананинг каноник тенгламаси қуйидагича:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad \text{(12-расм)} \qquad (2.11)$$



12-расм

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар – эллипс, гипербола ва параболаларнинг каноник тенгламасини ўрганиш бизнинг дастуримизга кирмасада улар билан мустақил равишда танишишни ўқувчиларга тавсия этамиз.

Юқорида келтирилган таърифга асосан қуйидаги масалани қарайлик. Масала: Радиуси R га тенг бўлган айлана тенгламасини топинг.

Ечиш. Бу масалани ечиш учун дастлаб текисликда тўғри бурчакли координаталар системасини ясаб оламиз.Фараз қилайлик берилган айлананинг маркази $N(a,b)$ нуқтада бўлсин. $M(x,y)$ нуқта эса радиуси R га тенг бўлган шу айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Айлананинг таърифига асосан $|MN| = R$ муносабатга эга бўламиз. Тўғри бурчакли координаталар системасидаги икки нуқта орасидаги формулага, яъни

$$|MN| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

формулага асосан айлананинг тенгламасини

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

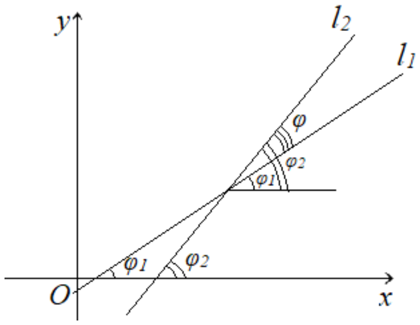
кўринишида ҳосил қиламиз. Агар бу тенгликнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтарсак, олдинги тенгламага тенг кучли бўлган, лекин соддароқ кўринишга эга бўлган

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2.18)$$

кўринишидаги маркази (a,b) нуқтада бўлган, радиуси R га тенг айлананинг тенгламасига эга бўламиз.

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Фараз қилайлик, l_1: $y=k_1x+b_1$ ва l_2: $y=k_2x+b_2$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. $tg\varphi_1 = k_1, tg\varphi_2 = k_2$ $\varphi = (l_1 \wedge l_2) = \varphi_2 - \varphi_1$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ (13-расм), φ_1



13-расм

13-чизмадан кўриниб турибдики,

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \Rightarrow tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \qquad (2.8)$$

(2.8) формулани икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласи деб юритилади.

Агар иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак $\varphi = 0$ бўлса, равшанки, бу тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади ёки устма-уст тушади. Бу ҳолда $k_1 = k_2$ бўлиши келиб чиқади.

Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шарти. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси

Агар иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, унда тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади, яъни $k_1 k_2 = -1$.
Шундай қилиб икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти

$$k_1 = k_2 \ ; \qquad (2.9)$$

перпендикулярлик шарти эса

$$k_1 k_2 = -1 \ . \qquad (2.10)$$

Бу формулалар мос равишда икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари дейилади.

Берилган нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани қуйидаги формуладан фойдаланиб топилади: фараз қилайлик, l тўғри чизиқнинг

$$l: Ax + By + C = 0$$

умумий тенгламаси берилган бўлсин ва бу тўғри чизиқнинг ташқарисида берилган бирор $M(x_0,y_0)$ нуқтасидан тўғри чизиққача бўлган масофани қуйидаги формула орқали ҳисоблаймиз:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (2.9)$$

Масала. Учларининг координаталари $A\ (1;-1)$, $B\ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $C(0,0)$ бўлган ABC учбурчак учун қуйидагиларни аниқланг:

1. AB томонининг узунлигини ҳисобланг;
2. ABC учбурчакнинг AB, BC, CA томонларининг тенгламасини тузинг ;

3. C учидан ўтказилган баландликнинг тенгламасини тузинг;
4. B учидан AC томонгача бўлган масофани ҳисобланг;

Ечиш.

1.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

2. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

формуласидан фойдаланиб қуйидагиларни топамиз:

$$AB:\ 2x + y - 1 = 0$$

$$AC: x + y = 0$$

$$BC:\ -x + y = 0$$

3. *C(0,0)* нуқтадан $2x + y - 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз.

AB тўғри чизиқнинг бурчак коэффиценти $k_1 = -2$ ($y = -2x + 1$ дан) га тенг. Перпендикулярлик шартидан $k_2 = \frac{1}{2}$ эканини топамиз.

$y - y_C = k(x - x_C)$ дан қидираётган тенгламамиз $y = \frac{1}{2}x$ эканини топамиз.

4. Берилган нуқтадан тўғри чизиққача масофа $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ формуласи ва

AC томоннинг топилган тенгламасидан фойдаланиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$AC:\ x+y=0;\quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);\ d = \frac{1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2-§ Матрица ва улар устида амаллар

Ўринлари аниқланган тўққизта сондан тузилган, мисол учун, қуйидаги тўғри бурчакли тўртбурчак шаклидаги жадвал(матрица)ни қарайлик:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бу жадвал ҳақиқий сонлардан тузилган.Бу ердаги ҳар бир сон матрицанинг битта элементини билдиради. Бу жадвалдаги горизантал жойлашган 2, 3, 0 сонлар матрицанинг биринчи қатори(сатри); -1, 4, 5 сонлар матрицанинг иккинчи қатори(сатри); 1, -1, 1 сонлар эса матрицанинг учинчи қатори(сатри)ни билдиради. Худди шундай вертикал жойлашган 2,-1, 1 сонлар матрицанинг биринчи устуни; 3, 4, -1 сонлар матрицанинг иккинчи устуни; 0, 5, 1 сонлар матрицанинг учинчи устуни деб аталади. Агар умумийликни сақлаган ҳолда ҳар бир қатордаги сонлар ўрнига индексида икки хоналик сон билан номерланган параметр сон қўйиб чиқсак, у ҳолда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

кўринишдаги жадвалга эга бўламиз. Бундай кўринишдаги жадвални уч ўлчовли квадрат матрица деб атаймиз. Демак, матрицага қуйидагича таъриф беришимиз мумкин.

Таъриф. Элементлари маълум бир тартибда жойлаштирилган тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлган жадвалга матрица деб аталади. Баъзи адабиётларда матрицаларни белгилашда қавснинг ўрнига иккита жуфт-жуфт параллел тўғри чизиқлардан ҳам фойдаланилади. Масалан,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

жадвални ҳам матрица деб тушунамиз. Матрицаларда сатрлар сони билан устунлар сони тенг бўлмаслиги мумкин. Матрицаларнинг сатрлари ва устунлари сонига қараб унинг ўлчови белгиланади. Масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг биринчисида иккита сатр иккита устун бор, шунинг учун бу матрицани 2×2 ўлчовли, иккинчи матрицада эса иккита сатр учта устун бор, шунинг учун бу матрицани 2×3 ўлчовли матрица деб атаймиз. Агар матрицада сатрлар сони билан устунлар сони тенг бўлса бундай матрицани квадрат матрица деб атаймиз. Масалан, юқорида кўриб ўтган

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрицалар мос равишда 2×2 ва 3×3 ўлчовли квадрат матрицалардир.

Баъзи ҳолларда фақат битта сатрга ёки битта устунга эга бўлган матрицалар ҳам учраши мумкин. Бундай матрицаларни мос равишда сатр матрица ёки устун матрица деб атаймиз.Масалан, $(\ 1\ \ 3\ \ 5\ )$, $\binom{2}{4}$ матрицаларнинг биринчиси 1×3 ўлчовли сатр матрица, иккинчиси эса 2×1 ўлчовли устун матрицалардир.

Умуман олганда, агар, $m\times n$ ўлчовли матрицани қарайдиган бўлсак, уни

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

Иккита $m\times n$ ўлчовли *A* ва *B* матрицаларнинг мос элементлари тенг , яъни $a_{ij} = b_{ij}$ (*i=1,2,…,m ; j=1,2,…,n*) бўлса, бундай матрицалар тенг дейилади ва *A=B* каби ёзилади. Масалан,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{9} & \frac{1}{2} \\ 4 & \sqrt[3]{27} & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} \sqrt{4} & 3 & \frac{1}{\sqrt{4}} \\ 2^2 & 3 & 5 \\ 1 & \sqrt{9} & \sqrt{36} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицалар берилган булсин. Юқорида келтирилган таърифга асосан бу матрицалар тенг матрицалардир.

Матрицалар устида “катта” ёки “кичик” муносабатлари маънога эга эмас. Шунингдек, ҳар хил ўлчовли матрицалар учун “тенглик” муносабати маънога эга эмас.

Матрицани матрицага қўшиш. Ҳар хил ўлчовли матрицалар учун қўшиш амали аниқланмаган. Бир хил ўлчовли иккита *A* ва *B* матрицаларнинг йиғиндиси деб, элементлари *A* ва *B* матрицаларнинг мос элементлари йиғиндисидан иборат бўлган учинчи бир *C* матрицага айтилади ва *A+B=C* каби ёзилади. Кўриниб турибдики *C* матрицанинг ўлчови *A* ва *B* матрицаларнинг ўлчовига тенг бўлади.

Мисол. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ матрицаларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+(-2) \\ 7+3 & -2+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}=C.$

Барча элементлари нол сонларидан иборат бўлган матрица ноль матрица дейилади. Кўриниб турибдики, ҳар қандай матрицага ноль матрицани қўшсак яна шу матрицанинг ўзи ҳосил бўлади, яъни *A+O=A*.

Ҳар қандай *A* матрицанинг ҳар бир элементини шу элементнинг қарама-қаршисига алмаштирсак, А матрицага қарама-қарши бўлган –*A* матрица ҳосил

бўлади. Қарама-қарши матрицаларни қўшсак ноль матрица ҳосил бўлади, яъни: $A+(-A)=O$.
Матрицалар йиғиндиси қуйидаги хоссаларга эга:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(A+C)$

Бунда A, B ва C матрицалар бир хил ўлчовли матрицалардир. Ҳамма элементлари нўллардан иборат бўлган матрицани нол матрица деб атаймиз ва уни O каби белгилаймиз. Матрицаларни қўшишда нол-матрица сонларни қўшишдаги каби вазифани бажаради, яъни $A+O=A$.

Матрицаларни айириш. Иккита бир хил ўлчовли A ва B матрицалар берилган бўлсин. A матрицадан B матрицанинг айирмаси деб, шундай C матрицага айтиладики, C матрицага B матрицани қўшганда A матрица ҳосил бўлсин, яъни $C+B=A$ муносабат ўринли бўлсин.

Бу таърифдан кўринадики, C матрицанинг элементлари мос A ва B матрицалар мос элементларининг айирмасидан иборат бўлади. A ва B матрицалар айирмаси $C=A-B$ ёки каби ёзилади.

Мисол. $C=A \setminus B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 \\ 1-3 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицани сонга кўпайтириш.Матрицанинг бирор сонга кўпайтмаси деб, берилган матрицанинг барча элементларини шу сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган матрицага айтилади.

Мисол тариқасида тушунарли бўлиши учун иккинчи тартибли матрицани олсак, бу матрицани бирор k сонига кўпайтириш натижаси таърифга асосан

$$k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

ифодадан иборат бўлади.

Мисол. $$7\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot(-1) & 7\cdot 2 \\ 7\cdot 4 & 7\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 14 \\ 28 & 35 \end{pmatrix}.$$

Матрицани сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга:

1). $a(A+B)=aA+aB$;
2). $(a+b)A=aA+bA$;
3). $(a\ \ b)A=a(bA)$;

4). *A-B =A +(-B)* .

5) Агар A $n\times n$ ўлчовли квадратик матрица бўлса, у ҳолда

$$|aA| = a^n|A|.$$

Матрицани матрицага кўпайтириш. Матрицани матрицага кўпайтириш амалини қараб чиқайлик. Тушунарли бўлиши учун олдин хусусий ҳоллардан бошлайлик.

1×3 ўлчовли $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$ сатр матрица, 3×1 ўлчовли $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ устун матрица берилган бўлсин. Бу матрицаларнинг кўпайтмаси деб, шу матрицалар мос элементлари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг 1×1 ўлчовли матрицага айтилади, яъни:

$$AB = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Мисол. $A = (4 \;\; -5 \;\; 2)$ матрицани $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ матрицага кўпайтиринг.

Ечиш. Кўриниб турибдики, А матрица 1×3 ўлчовли, В матрица эса 3×1 ўлчовли матрицадир. Юқоридаги формулага асосан

$$(4 \quad -5 \;\; 2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 7 + \; 2 \cdot 1 \; = \; -4 - \; 35 \; + \; 2 \; = \; -37.$$

$m \times k$ ўлчовли A матрица ва $k \times n$ ўлчовли B матрицалар берилган бўлсин. Кўриниб турибдики, устунлари сони В матрицанинг сатрлар сонига тенг. Бундай ҳолда бу матрицаларни кўпайтириш мумкин. Мана шу матрицаларнинг кўпайтмаси деб, ҳар бир c_{ij} элементи биринчи кўпайтувчининг i-сатрининг элементларини иккинчи кўпайтувчи j-устунининг мос элементларига кўпайтириб қўшишдан ҳосил бўладиган m*x*n ўлчовли *C=AB* матрицага айтилади.

1-мисол. $A=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $B=(7\ \ 5\ \ 4)$ матрицалар берилган. AB ва BA матрицаларни топинг.

Ечиш.

$$AB=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot(7\ \ 5\ \ 4)=\begin{pmatrix}2\cdot7 & 2\cdot5 & 2\cdot4\\1\cdot7 & 1\cdot5 & 1\cdot4\\3\cdot7 & 3\cdot5 & 3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 10 & 8\\7 & 5 & 4\\21 & 15 & 12\end{pmatrix},$$

$$BA=(7\ \ 5\ \ 4)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=7\cdot2+5\cdot1+4\cdot3=14+10+12=36.$$

2-мисол. $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}$ кўпайтмани топинг.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix}.$$

3-мисол.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 2\\5 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\\1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot5\\2\cdot2+1\cdot3+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot4+2\cdot5\\5\cdot2+3\cdot3+4\cdot1 & 5\cdot1+3\cdot4+4\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 24\\9 & 16\\23 & 37\end{pmatrix}.$$

mxn ўлчовли матрицани $k\times p$ ўлчовли матрицага $n\neq k$,бўлганда кўпайтириш амали маънога эга бўлмайди.

Матрицани матрицага бўлиш амали мавжуд эмас.

Матрицаларни кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1. (AB) C=A(BC).
2. (A+B)C = AC+BC.
3. A(B+C) =AB+AC.
4. Умуман олганда матрицани матрицага кўпайтириш амали ўрин алмаштириш хоссасига эга эмас, яъни $AB\neq BA$. Баъзи хусусий ҳоллардагина $AB=BA$ тенглик ўринли бўлиши мумкин(бунда A ва B матрицалар ўзаро коммутатив бўлиши, яъни ўрин алмаштирувчи матрицалар бўлиши керак).

Матрицаларнинг кўриб ўтилган бу хусусиятлари чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишда қўлланилади.

3-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари

Математикада ҳар хил масалаларни ечишда баъзан тўртта a, b, c, d сонлар устида $ad - cb$ айирмани топишга тўғри келади. Бу сонлар қуйидагича квадрат жадвал(матрица) шаклида жойлаштирилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$ad - cb$ айирмага тенг сонни

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш қабул қилинган ва уни иккинчи тартибли детерминант деб атаймиз. Демак,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Бу ерда a, b, c, d сонлар детерминантнинг элементлари дейилади. a ва $в$ сонлар кетма-келиги детерминантнинг биринчи сатри, c ва d сонлар кетма-кетлиги эса дерминантнинг иккинчи сатри дейилади. Худди шунингдек, a ва c сонлар кетма-кетлиги детерминантнинг биринчи устуни, b ва d сонлар кетма-кетлиги эса дерминантнинг иккинчи устуни дейилади.

a ва d элементлар детерминантнинг бош диогонали, c ва b элементлар эса детерминантнинг ён диогонали деб аталади.

Кўриниб турибдики, (2) формулага асосан, детерминант бош диогоналда турган сонлар кўпайтмасидан ён диоганалида турган сонлар кўпайтмасининг айирмасига тенг экан.

Мисоллар: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5,\quad \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22$

Иккинчи тартибли детерминант қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар детерминантнинг сатрларини устунлар қилиб алмаштирсак детерминантнинг қиймати ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \quad .$$

Ҳақиқатан ҳам, ҳар иккала детерминантни ҳисобласак, бир хил сонга эга бўламиз.

2. Агар детерминантнинг иккита сатри ёки устунларининг ўринларини алмаштирсак, детерминант ишорасини ўзгартиради,яъни

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонида турган детерминантни ҳисобласак бир хил сон келиб чиқади.Бу эса иккинчи хоссанинг тўғрилигини исботлайди.

3. Агар детерминантда иккита сатр ёки устун бир хил бўлса, у вақтда нолга тенг бўлади.

   Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

4. Детерминантнинг бирор сатри ёки устунининг барча элементларини к сонига кўпайтириш дегани детерминантни шу сонга кўпайтириш деганидир, яъни

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгликнинг ўнг ва чап томонларини ҳисобласак бир хил сонга эга бўламиз, яъни: $k(ad - cb)$.

5. Агар детерминантнинг бирор сатри(устуни)нинг элементлари шу сатр(устун)га параллел бўлган сатри(устуни)нинг элементларига пропорционал бўлса, у вақтда бундай детерминант нолга тенг бўлади,яъни:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$$

Бу тенгликнинг тўғрилиги чап томонининг ҳисобланишидан келиб чиқади.

6. Агар детерминантнинг бирор сатри ёки устунининг бирча элементларини бир хил сонга кўпайтириб, бошқа бир сатр ёки устуннинг мос элементларига қўшсак, у вақтда детерминантнинг қиймати ўзгармайди, яъни:

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ҳақиқатан ҳам бу тенгликнинг чап томонида турган детерминантни ҳисобласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$(a + kc)d - c(b + kd) = ad + kcd - bc - kcd = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Ўринлари аниқланган тўққизта сондан тузилган қуйидаги квадрат жадвал(матрица)ни қарайлик:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бу жадвал аниқ сонлардан тузилган.Бу ердаги ҳар бир сон матрицанинг битта элементини билдиради. 2, 3, 0 сонлар матрицанинг биринчи қатори; -1, 4, 5 сонлар матрицанинг иккинчи қатори; 1, -1, 1 сонлар эса матрицанинг учинчи қаторини билдиради.Агар умумийликни сақлаган ҳолда ҳар бир қатордаги сонлар ўрнига индексида икки хоналик сон билан номерланган параметр сон қўйиб чиқсак,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

кўринишдаги жадвалга эга бўламиз. Бундай кўринишдаги жадвални 3× 3 ўлчовли матрица деб атаймиз. Бу учинчи тартибли матрица қуйидагича кўринишга эга бўлган учинчи тартибли детерминантни аниқлайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу ерда a_{ij}, *i=1,2,3;* *j=1,2,3* лар учинчи тартибли детерминантнинг элементлари, жами тўққизта. Индексдаги i сон қатор (сатр) номерини билдиради, j сони эса устун номерини билдиради. Демак, учинчи тартибли детерминантда учта қатор, учта устун бўлар экан. Янада тушунарли бўлиши учун, демак, биринчи қаторни(сатрни) - a_{11} a_{12} a_{13}; иккинчи қаторни(сатрни) - a_{21} a_{22} a_{23}; учинчи қаторни(сатрни) - a_{31} a_{32} a_{33} деб тушунамиз. Худди шундай $a_{11}\, a_{21}\, a_{31}$ ни биринчи устун, $a_{12}\, a_{22}\, a_{32}$ ни иккинчи устун, $a_{13}\, a_{23}\, a_{33}$ ни учинчи устун деб тушунамиз.

Бу матрицани ҳисоблаш қуйидаги формула ёрдамида амалга оширилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Бу формулани эсда сақлаш учун учбурчак қоидаси деб аталган ушбу қоидани эсда сақлаш керак бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Мисол. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 30 + 16 - 12 - 4 - 10 = 21$.

Агар учинчи тартибли детерминантнинг битта сатри ва битта устунини ўчирсак, қолган тўртта элемент иккинчи тартибли детерминантни ташкил қилади. Бу иккинчи тартибли детерминант шу сатр ва устуннинг кесишиш нуқтасида турган элементнинг минори дейилади.

Масалан, a_{11} элементнинг минори

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантдан, a_{12} элементнинг минори

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантдан иборат бўлади.
Детерминантлар назариясида алгебраик тўлдирувчи деган яна бир муҳим тушунча ҳам бор. Шу тушунчага таъриф берайлик:

Таъриф. Детерминантнинг бирор элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб, шу элементга мос минорнинг $(-1)^k$ сонга кўпайтмасига айтилади. Бу ердаги k сони шу элемент турган сатр ва устуннинг номерлари йиғиндисини билдиради.

a_{11} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини A_{11}, a_{12} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини A_{12} , a_{13} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини A_{13} каби белгилаймиз ва ҳоказо.

Масалан, a_{11}, a_{12}, a_{13} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини мос равишда қуйидагича ёзамиз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Алгебраик тўлдирувчилар детерминантнинг тартибини биттага пасайтириб детерминантни ҳисоблашни енгиллаштириш имконини беради. Бу масалада қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. Учинчи тартибли детерминант ихтиёрий сатр элементларини уларга мос алгераик тўлдирувчилар кўпайтмаларидан тузилган йиғиндига тенг, яъни:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Учинчи тартибли детерминантлар ҳам худди юқорида санаб ўтганимиздек, иккинчи тартибли детерминантлар эга бўлган хоссаларга эга бўлади ва ҳоказо.

4-§. Иккинчи ва учинчи тартибли чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули ёрдамида ечиш

Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер усули содда усул бўлиб,унда детерминантлардан фойдаланилади. Тушунарли бўлиш учун олдин икки номаълумли иккита чизиқли, ундан кейин эса уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули ёрдамида ечишни кетма-кет равишда кўриб чиқайлик:

Икки номаълумлм чизиқли иккита тенгламалар системаси берилган бўлсин, яъни

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Бу ерда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар ҳақиқий сонлардан иборат бўлиб, номаълумлар олдидаги коэффициентлар; ҳар иккала тенгликнинг ўнг томонида жойлашган b_1 , b_2 сонлар ҳам ҳақиқий сонлардан иборат бўлиб, озод ҳадлар дейилади.

Номаълумлар олдида турган коэффициентлардан тузилган детерминантни

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (2)$$

каби ёзиб бу детерминантни (1) системанинг асосий детерминанти деб атаймиз. Агар бу детерминантдаги биринчи, иккинчи устун элементлари ўрнига мос равишда озод ҳадларни қўйсак, қуйидаги

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \;,\; \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ёрдамчи детерминантларни ҳосил қиламиз.

Бу ерда учта ҳол бўлиши мумкин:

1^0. $\Delta \neq 0$ бўлса, бу система ягона

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \qquad (4)$$

ечимга эга.

2^0. $\Delta = 0$, бўлиб,$\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, бўлса, бу система ечимга эга эмас;

3^0. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ бўлса, бу система чексиз кўп ечимга эга.

Энди эса (4) формулани уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси учун ҳам юқоридагига ўхшаш ҳолда ёзиб қўйишимиз мумкин, яъни, агар уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (5)$$

берилган бўлса, (4) формулаларга ўхшаш (5) системанинг ечимини ҳам

$$x_1 = \Delta x_1 / \Delta , \qquad x_2 = \Delta x_2 / \Delta , \quad x_3 = \Delta x_3 / \Delta \qquad (6)$$

кўринишида ёзиб қўямиз.

Бу ерда ҳам номаълумлар олдида турган коэффициентлар, яъни $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ сонлар ва озод ҳадлар деб аталувчи b_1, b_2, b_3 сонлар ҳақиқий сонлардир.Бу ерда ҳам юқоридаги (1) системанинг ечимлари ҳақидаги учта ҳол бўлади.

(4), (6) формулалар мос равишда икки номаълумли иккита чизиқли ва уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер формулалари деб аталади.

Крамер формуласи ўринли бўлиши учун, умуман олганда, исталган сондаги номаълумли чизиқли тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли бўлиши керак.

II боб бўйича ўз-ўзини текшириш учун саволлар:

1. Сонлар ўқи деб нимага айтилади. Тушунтириб беринг.
2. Текисликдаги тўғри бурчакли декарт координаталар системасини тушунтириб беринг.
3. Текисликдаги нуқтанинг нечта координатаси бўлади. A(-2;3) нуқтани ясанг.
4. Текисликдаги нуқтанинг қутб координаталари тўғрисида тушунча беринг.
5. Текисликдаги кесишувчи иккита перпендикуляр тўғри чизиқ текисликни нечта қисмга ажратади.
6. Текисликдаги нуқтанинг нечта координатаси бўлади.
7. Текисликдаги нуқта қандай ясалади.
8. Текисликдаги икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласини тушунтиринг.
9. Кесмани берилдган нисбатда бўлиш формуласини тушунтириб беринг.
10. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини тушунтириб беринг.
11. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини тушунтиринг

12. Берилган нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасини тушунтиринг.
13. Тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламасини тушунтиринг.
14. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласини тушунтиринг.
15. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик шартини тушунтиринг.
16. Икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартини тушунтиринг.
17. Текисликдаги тўғри чизиқнинг турларини гапириб беринг.
18. Текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг турларини гапириб беринг.
19. Айлана формуласини тушунтиринг.
20. Матрица нима у? Тушунтириб беринг.
21. Матрицалар устида нечта арифметик амал бажариш мумкин.
22. Матрицанинг тадбиқларидан бирини тушунтириб беринг.
23. Детерминант тўғрисида тушунча беринг.
24. Детерминантнинг тартиби деб нимага айтилади.
25. Икки ўзгарувчили иккита чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қандай усуллар билан ечиш мумкин.
26. Крамер қоидасини тушунтириб беринг.

II бобга доир машқлар:

1. Қуйидаги тенгламалар қандай чизиқни аниқлайди (уларнинг расмсини чизинг).

a) x-y=0; b) x+y=0;
c) x+3=0; d) y+5=0;
e) $x^2 - y^2 = 0$; g) xy=0;
l) $y^2 - 9 = 0$; m) y=|x|;
n) y+|x|=0; k) y=|x+2|.

2. Қуйидаги чизиқлардан қайси бирлари координаталар бошидан ўтади:

a) 2x+y=0; b) $x^2 + y^2 - 25 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 3x - 5y - 7 = 0$;

3. Қуйидаги чизиқларнинг *Ox* ва *Oy* ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг:

a) $x^2 + y^2 = 36$; b) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$;
c) $x^2 + 2y^2 - 5x + 3y + 11 = 0$.

4. Иккита чизиқнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг:

a) $x^2 + y^2 = 9$ ва x-y=0;
b) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18$ ва x+y=0.

5. Қуйидаги икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

a) $M_1(-1; 5)$ ва $M_2(-3; -2)$;
b) $O(0;0)$ ва $N(4;-3)$.

6. y= -$\frac{3}{4}x$ +7 тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламасини ёзинг.

7. 2x-9y=7 тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламасини ёзинг.

8. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг ва бу тўғри чизиқларни ясанг:

a) 2x-3y-12=0;

b) 4x-6y+12=0.

9) 4x+3y-12=0 тўғри чизиқ ва координата ўқлари билан ҳосил қилинган учбурчакнинг юзини топинг.

10) Қуйидаги 3x-4y+5=0 ва x-y=0 тўғри чизиқлардан қайси бири ордината ўқидан каттароқ кесма ажратади.

11.Қуйидаги тўғри чизиқларнинг умумий тенгламасини ёзинг:

a) $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}$;

b) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$;

c)$-\frac{1}{2}(x+7)+3\left(y-\frac{4}{5}\right)=0$.

12. Қуйидагит бир жуфт-бир жуфт тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг:

a) 3x-2y-1=0 ва 4x+y-11=0;

b) x-y-7=0 ва 3x-3y+5=0.

13. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: x-y+4=0, 4x+2y-19=0, 5x+6y+9=0. Учбурчак учларининг координаталари топилсин.

14. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин:

a) $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-3\sqrt{3}}$ ва $\frac{x+5}{-3}=\frac{y-1}{-3\sqrt{3}}$;

b) $\frac{x+5}{24}=\frac{y-4}{7}$ ва $\frac{x-2}{-15}=\frac{y+\frac{7}{8}}{8}$;

c) $x+5y+9=0$ ва $2x-3y+1=0$;

d)$2x+y-5=0$ ва $3x-y+4=0$;

e) $y=-2x+7$ ва $y=3x+4$.

15. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидан қайси тўғри чизиқлар параллел ёки қайсилари перпендикуляр эканликларини кўрсатинг:

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{5}$ ва $\frac{x-9}{4}=\frac{y+3}{10}$;

b) $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{3}$ ва $\frac{x+1}{3}=\frac{y+9}{-2}$;

c) $2x-3y-7=0$ ва $4x-6y+5=0$;

d) $2x+y-3=0$ ва $3x-y+5=0$.

16. $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$ тўғри чизиқ берилган. Координаталар бошидан шу тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

17. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофани топинг:

a) $M(\frac{3}{2};\ 9)$, $4x+3y-8=0$;

b) $M(-\frac{3}{2};\ -9),\ 4x+3y-17=0.$

18.Қуйидаги иккинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 174 & 8 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 6 & -30 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$.

19. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 147 & 294 & 147 \\ 10 & 20 & 10 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix}$.

20. Системани Крамер қоидасидан фойдаланиб ечинг:

a) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x-y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y=-3, \\ x+3y=21; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=16, \\ x+2y=1; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 4x-8y=5; \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ x-0{,}5y=1; \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x+3y=-2, \\ 2x-6y=-1; \end{cases}$ i) $\begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{5}{7}=\frac{23}{168}, \\ 2x+6y=\frac{31}{165}; \end{cases}$

j) $\begin{cases} x-y=1, \\ 3y-3x=-3; \end{cases}$ k) $\begin{cases} 3x-5y=0, \\ -15x+25y=0; \end{cases}$

21. Системани Крамер қоидасидан фойдаланиб ечинг:

a) $\begin{cases} -x+2y+3z=0, \\ x-4y-13z=0, \\ -3x+5y+4z=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+3z=1, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2; \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1; \end{cases}$

III БОБ. ФУНКЦИЯ

1 - §. Функция ва унинг берилиш усуллари ва хоссалари

Математикада асосан иккита миқдор, яъни ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар ўрганилади.

Ўзгармас миқдор деб шундай миқдорга айтиладики, берилган бирор бир текширишда у ўзининг сонли қийматини ўзгартирмайди.

Ўзгарувчи миқдор деб шундай миқдорга айтиладики, берилган бирор бир текширишда у ўзининг сонли қийматини ўзгартиради, яъни турли сон қийматлар қабул қилади.

Одатда ўзгармас миқдор ўзгарувчи миқдорнинг хусусий ҳоли бўлиб ҳисобланади, яъни ўзгармас миқдорни шундай миқдор дуб тушуниш мумкинки, унинг барча сонли қийматлари бир-бирига тенг бўлади. Масалан, иккита учи фиксирланган ва учинчи учи бирор k чизиқ бўйлаб ўзгариб турадиган ABC учбурчакнинг юзи ўзгарувчи миқдордир. Агар k чизиқ сифатида учбурчакнинг AC томонига параллел тўғри чиқ оладиган бўлсак, у вақтда учбурчакнинг юзи ўзгармас миқдор бўлиб қолади ($S_{\Delta AB_1C} = S_{\Delta AB_2C} = \cdots$). Бу мисолни биз ўзгармас миқдор ўзгарувчи миқдорнинг хусусий ҳоли эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун келтирдик.

Функция тушунчаси математика фанининг асосий тушунчаларидан бири бўлиб ҳисобланади. Ҳозирги замонда функция тушунчасига таъриф бериш учун асосан тўпламларни акслантириш тушунчаси орқали таъриф берилади, яъни тўпламларни акслантириш тушунчаси функция тушунчасига олиб келади. Шунинг учун акслантириш тўғрисида қисқача маълумот бериб ўтайлик.

Айтайлик, ихтиёрий иккита X ва Y тўпламлари берилган бўлсин.

Таъриф. Агар X тўпламдан олинган ҳар бир x элементга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдаги битта y элемент мос қўйилган бўлса, y ҳолда X тўпламни Y тўпламга акслантириш берилган дейилади ва бу қонун қоидани

$$f:\ X \to Y$$

каби ёзилади.

Мисол. Агар ҳар бир натурал сон n га $\frac{1}{n}$ сонини мос қўйсак $N = \{ 1, 2 , 3, \ldots, n, \ldots\}$ тўплам билан $N = \{\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\mathrm{n}} \ldots \}$ тўпламлар орасидаги мослик, яъни

$f: X \to Y$ мослик $n \to \frac{1}{n}$ каби ёзилади.

Таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга мувофиқ Y тўпламдаги битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда Y функция берилган дейилади ва у

$$y = f(x)$$

каби ёзилади. Бу ерда x – эркли ўзгарувчи, y эса эрксиз ўзгарувчи миқдор деб аталади. X тўпламни функциянинг аниқланиш соҳаси, Y тўпламни эса функциянинг ўзгариш соҳаси деб атаймиз. f эса мослик қонунини ёки x эркли ўзгарувчи устида бажарилиши керак бўлган амаллар мажмуасини билдиради. Кўпинча f ни акслантириш деб ҳам аташади. Функцияларга жуда кўп мисоллар келтиришимиз мумкин. Масалан:

1. X ва Y тўпламлар бутун сонлар тўплами. X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўплам элементининг абсолют қиймати мос келтирилсин. Бундай ҳолда

$$y = |x|$$

функция берилган дейилади.

2. X тўплам барча ҳақиқий сонлар тўплами, У тўплам эса ҳар бир ҳақиқий соннинг квадратларидан тузилган тўплам бўлсин. f мослик эса ҳар бир ҳақиқий сонга унинг квадратини мос қўйишлик бўлсин. У вақтда

$$y = x^2$$

функция берилган дейилади.

3. Маълумки, r радиусли доиранинг юзи $s = \pi r^2$ формула билан ифодаланади. Бу формула ёрдамида r радиуснинг ҳар бир қийматига s юзанинг аниқ битта қийматини мос қўйиш мумкин. Кўриниб турибдики, бу формула манфий бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўпламини шу тўпламнинг ўзига акслантиришдан иборат. Демак, бу акслантириш

$$S = \pi r^2$$

функцияни аниқлайди.

4.Айланага ички чизилган тўғри кўпбурчак S ва унинг томонлари сони x билан боғланиши

$$S = \frac{x}{2} R^2 sin\frac{2\pi}{x}$$

формула ёрдамида ифодаланади.Бу ерда x ўзгарувчи натурал сонлар тўпламидан 2 дан катта бўлган қийматлар қабул қилади, R эса айлана радиуси.

Демак, бу

$$S = f(x)$$

ёки

$$S=f(r),$$

бу ерда r доиранинг радиуси, боғланиш ҳам функцияни ифодалайди.

Бирор $x \in X$ ўзгарувчи миқдорнинг тўпламини қарайлик. Бу тўплам ҳар хил қийматлардан тузилган бўлиши мумкин.Масалан, x ўзгарувчи миқдор барча бутун мусбат сонлардан тузилган бўлиши, битта оралиқдан ёки алоҳида-алоҳида олинган бир нечта оралиқлардан,шунингдек кесма ёки ярим оралиқлардан тузилган бўлиши мумкин.

X тўпламдан олинган x нинг ҳар бир қийматига бошқа бир y миқдорнинг битта қиймати мос қўйилган бўлса, у вақтда y миқдорни x миқдорнинг X тўпламда аниқланган функцияси деб атаймиз. Бу тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Юқоридаги таърифга асосан x ўзгарувчи миқдорни эркли, y ўзгарувчи миқдорни эса эрксиз ўзгарувчи миқдор миқдор деб атаймиз. Юқоридагилардан келиб чиққан ҳолда, функциянинг қиймати бирор формула ёрдамида x нинг қийматига асосан топилади. Масалан:

1. Доиранинг юзи $S=\pi r^2$, бу ерда r-доиранинг радиуси. Демак, S ўзгарувчи миқдор r ўзгарувчи миқдорнинг функцияси бўлади. Бу ерда r ўзгарувчи миқдор ҳар қандай мусбат қийматни қабул қилади.

2. Кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $\pi(n\text{-}2)$ ифода ёрдамида ўлчанади,айтайлик,кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндисини Q билан белгиласак, n кўпбурчак томонларининг сонини билдиради. Шунинг учун ҳам S ўзгарувчи миқдор n ўзгарувчи миқдорнинг функцияси бўлади. Бу ерда n эркли ўзгарувчи миқдор учдан бошланган барча бутун қийматларни қабул қилади.

Агар функция бир ёки бир нечта формулалар ёрдамида берилган бўлса,у вақтда функцияни аналитик берилган дейилади.

Агар $y=f(x)$ формула берилган бўлиб,функциянинг аниқланиш соҳаси кўрсатилмаган бўлса, у вақтда бу функциянинг аниқланиш соҳаси $f(x)$ ифоданинг маънога эга бўладиган x аргументнинг барча қийматларидан иборат бўлади.

Бир нечта мисоллар қарайлик:

1) y=$\sqrt{1-x}$ функция (-∞, 1] ярим оралиқда аниқланган. Негаки, функция мавжуд бўлиши учун $1-x \geq 0, -\infty < x \leq 1$ муносабатнинг бажарилиши зарур.

2) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ функция иккита [-1,0) ва (0,1] ярим оралиқда аниқланган. Негаки, $\sqrt{1-x^2}$ ифода $1-x^2 \geq 0 , -1 \leq x \leq 1$ муносабат бажарилганда маънога эга бўлади. Демак, функциянинг мавжуд бўлиши учун бу муносабатлардан ташқари $x \neq 0$ бўлиши функциянинг берилишидан кўриниб турибди.

3) у=$\sqrt{x-1}$+ $\sqrt{1-x}$ функция фақатгина $x=1$ да аниқланган. Негаки, $\sqrt{x-1}$ ифода $x \geq 1$ муносабат бажарилганда маънога эга, $\sqrt{1-x}$ ифода эса x≤ 1 муносабат бажарилганда маънога эга. Демак, юқоридагилардан келиб чиқадаки, берилган функция фақатгина x=1 бўлганда маънога эга бўлади.

4) у=$\sqrt{x-1}+\sqrt{-x}$ x эркли ўзгарувчининг бирорта ҳам қийматида аниқланмаган. Негаки, $\sqrt{x-1}$ ифода x≥ 1 қийматларда аниқланган, $\sqrt{-x}$ ифода эса х эркли ўзгарувчининг бирорта ҳам қийматида аниқланмаган.Демак, булардан келиб чиқаджики, берилган функция x эркли ўзгарувчининг бирорта ҳам қийматида аниқланмаган.

5) y=x^2+x функция (-∞, +∞) оралиқда аниқланган,x ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир қийматига функциянинг тўла аниқланган қиймати мос келади. Масалан, x=*-2* қийматда функция y=2 қийматни, x=0 да функция y=0 қийматни, x=2 да функция y=6 қийматни қабул қилади.

Юқорида қаралган мисолларда биз аналитик кўринишда берилган функцияларнинг табиий аниқланиш соҳасини топдик, яъни x аргументнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларда берилган қоида бўйича *y=f(x)* функциянинг тўла акниқланган ва ягона қийматларини топдик.

Гарчи мактабгача таълим йўналиши талабалари учун математика дастурига киритилмаган бўлсада талабаларнинг функциялар тўғрисида тўла тушунчага эга бўлишлари учун бўлакли-аналитик ва ошкормас функциялар тўғрисида ҳам тушунча беришни лозим топдим.

Функциялар эркли ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида битта формула ёрдамида эмас, балки бир нечта формулалар ёрдамида ҳам берилиши мумкин. Тушунарли бўлиши учун бунга бир нечта мисоллар келтирайлик.

1-мисол. (-∞, +∞) оралиқда аниқланган *f(x)* функцияни қарайлик. Бу функция шу оралиқда қуйидагича берилган бўлсин:

f(x) = 1, агар |x|> 1 (яъни, агар $x< -1$ ёки $x > 1$),
f(x) = - 1, агар |x| > 1), (яъни, агар -1< x < 1),

$f(x) = 0$, агар $x = \pm 1$.

ёки буларни қисқачароқ қилиб қуйидагича кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар} \quad |x| > 1 \quad (\text{яъни, агар } x < -1 \text{ ёки } x > 1), \\ -1, & \text{агар} \quad |x| > 1 \quad (\text{яъни, агар } -1 < x < 1), \\ 0, & \text{агар} \quad x = \pm 1. \end{cases}$$

Бу функциянинг таърифидан, масалан, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f(-2) = f(-\sqrt{3}) = f(1{,}1) = f(\sqrt{2}) = 1,$$

$$f(-0{,}9) = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) = -1,$$

$f(1) = 0$ ва $f(-1) = 0$.

2-Мисол. Дирихле функцияси $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган ва у қуйидагича берилади:

$$\begin{cases} \chi = 1, & \text{агар } x \text{ рационал бўлса,} \\ \chi = 0, & \text{агар } x \text{ иррационал бўлса.} \end{cases}$$

Шундай экан, масалан,

$\chi(-2) = \chi(-1{,}5) = \chi(0) = \chi(0{,}3) = \chi(17) = 1$,

$\chi(-\sqrt{15}) = \chi(-\pi) = \chi(\sqrt{3}) = \chi(\pi) = 0$.

3-мисол. x сонининг (аргументининг) бутун қисми (бутун қисми), y функциянинг қабул қиладиган қиймати x сонидан ошиб кетмайдиган энг катта бутун сон бўлади.Бу функция $y = [x]$ формула ёрдамида берилади.Масалан:

$$[-3{,}7] = -4, \quad [\tfrac{1}{3}] = 0, \quad [\sqrt{7}] = 2, \quad [5] = 5.$$

Бу функция ҳам $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган. Функциянинг ўзи эса $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ қийматларни қабул қилади.

4-мисол. $y=\{x\}$ функция x соннинг каср қисми деб аталади.Бу функция ҳам $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган ва қуйидагича берилади:

$$y = x - [x].$$

Масалан: $\left\{-\frac{5}{2}\right\} = \left\{-3 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$, $\left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, $\{\pi\} = \{3{,}14 \dots\} = 0{,}14$.

5-мисол. $y = \pi(x)$ – x дан катта бўлмаган туб сонлар. Масалан: $\pi(1) = 1, \pi(2) = 1, \pi\left(\frac{5}{2}\right) = 1,$

$= \pi(5) = 3, \pi(10) = 4.$

6-мисол. *y=signx* (“сигнум икс” деб ўқилади, лотинча “signum”- бу “белги”) функцияни қарайлик. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган ва қуйидагича формула ёрдамида ёзилади:

$$y = sign\, x = \begin{cases} sign(x) = 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ sign(x) = 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ sign(x) = -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функция ўзи бор-у йўғи учтагина қийматни қабул қилади: 1, 0.-1. $y = sign\ x$ функция $x = 0$ бўлганда қуйидаги формула ёрдамида берилиши мумкин:

$y = \frac{x}{|x|}$ ёки $y = \frac{|x|}{x}$ формула ёрдамида ҳам берилиши мумкин.

Ошкормас функциялар

Юқорида кўрилган мисолларда функциялар эркли ўзгарувчи билан функциянинг қийматларини боғловчи формулалар ёрдамида берилган, яъни тенгликнинг ўнг томонида доимо y функция, чап томонида эса x га боғлиқ бўлган ифода кўринишида ёзилган.

Бундай функцияларга мсоллар қилиб: y= x^2, y=$\frac{x+1}{x}$ функцияларни кўрсатсак бўлади.

Функционал боғланиш функцияга нисбатан ечилмаган тенглама ёрдамида ҳам берилиши мумкин. Бундай функцияларни ошкормас функциялар деб атаймиз.

Ошкормас функцияларга мисол қилиб қуйидаги функцияларни келтиришимиз мумкин: 1) xy-x+1=0, 2) $x^2+y^2 = 1\ (y > 0)$, 3) $x^2+y^2 = 1\ \ (y < 0)$.

Яна шу нарсани таъкидлаб ўтишимиз зарур. Негаки, шундай функциялар учрайдики,унинг аниқланиш соҳасини ўзгартириш билан қийматлар соҳасини ҳам ўзгартирган бўламиз. Масалан, айтайлик,

$$f_1 = x^2,\ x \in R = (-\infty, +\infty) \text{ ва } f_2 = x^2,\ x \in (0, +\infty).$$

Бу функцияларнинг кўриниши бир хил бўлгани билан улар ҳар хил функциялардан иборатдир. Бу функцияларнинг биринчиси сонлар ўқининг барча нуқталарида аниқланган, иккинчиси эса ярим ўқда, яъни $(0, +\infty)$ оралиқда аниқланган. Бу функциялар ҳар хил хоссаларга эга(масалан, бу функциялардан иккинчиси тескари функцияга эга, биринчиси эса тескари функцияга эга эмас).

Шуни эсдан чиқармаслик керакки, *f(x)* сон бўлиб, у *f* функциянинг *x* нуқтадаги қийматидан иборат. Масалан, агар *f* функция *x* сонни $\frac{1}{1+x^2}$ сонга мос қўювчи функция бўлса, у вақтда *f(1)* *f* функциянинг *x*=1 даги қийматини билдиради. Хусусан, *x*=1 да $f(1) = \frac{1}{2}$; *x*=0 да *f(0) = 1; x=2* да $f(2) = \frac{1}{5}$ ва ҳоказо.

Функциянинг қийматлар соҳаси

Баъзан функцияларни текширишда унинг аниқланиш соҳасини топиш билан биргаликда функциянинг қийматлар соҳасини билиш ҳам аҳамият касб этади. Масалан:

1) $y=arcsin\, x$ функция таърифга асосан фақат

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

шартни қаноатлантирувчи қийматларни қабул қилиши мумкин.

2) $y = \sin x \cdot \cos x$ функция фақатгина

$$-0,5 \leq y \leq 0,5$$

шартни қаноатлантирувчи қийматларни қабул қилиши мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам,

$y = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,

бу ерда

$|sin 2x| \leq 1$, яъни $-1 \leq \sin 2x \leq 1$,

бундан эса

$$-0,5 \leq 0,5\, sin\, 2x \leq 0,5\ , -1 \leq sin\, 2x \leq 1\,.$$

3) $Y=\frac{2x-1}{x+1}$ функция фақатгина

$-\infty < y < 2,\ 2 < y < +\infty$
шартларни қаноатлантирувчи қийматларни қабул қилади.
Ҳақиқатдан ҳам берилган функциянинг берилишини тенглама деб фараз қилиб ва бу тенгламани x га нисбатан ечиб,

$$x = \frac{y+1}{2-y}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ердан кўриниб турибдики, $y \neq 2$. Шундай қилиб, ҳар қандай $y \neq 2$ га мос x қийматни топишимиз мумкин бўлади. Бундан эса, инчунин,

$$-\infty < y < 2, \qquad 2 < y < +\infty$$

муносабатга эга бўламиз.

Функциянинг берилиш усуллари

Функциялар асосан уч хил усулда берилиши мумкин, яъни: аналитик усул, график усул ва жадвал усулларда.

Аналитик усул. Агар мослик қонуни бирор математик формула ёрдамида берилган бўлса, функция аналитик усулда берилган дейилади. Бу усулда x эркли ўзгарувчи устида қайси амалларни қандай тартибда бажарилиши кўрсатилган бўлади. Демак, бу усулда функция

$$y=f(x)$$

формула ёрдамида берилади.Функциянинг аналитик усулда берилишига кўплаб мисоллар келтириш мумкин. Масалан,

$$y=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}, \quad y = 3x^2+2x+1, \quad y = \sqrt{\frac{5x-2}{3+4x}},$$

$$y = \sin 2x, \quad \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса}, \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса}. \end{cases},$$

$$y = \cos(2x-1), \quad y = 2^x, \ y = lg(3x+5)$$

ва ҳоказо

функциялар аналитик усулда берилган функциялардир. Бу функцияларнинг ҳар қайсининг аниқланиш ва ўзгариш (қийматлар) соҳалари мавжуд.Масалан,

$$у = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси махражда турган ифоданинг нолга айланмайдиган ҳолдаги x ўзгарувчинигнг қийматлар тўпламидан иборат бўлади : $x^2-5x+6 \neq 0,\ \beta x_1 \neq\ 2,\ x_2 \neq 3$, яъни X = (-∞,2]∪[3,+∞) тўплам берилган функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

Изоҳ. Функциянинг аналитик усулда берилишида функциянинг параметрик шаклда ва қутб координаталар системасида берилишларини ҳам эслатиб ўтамиз, яъни функция

параметрик шаклда $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, бу ерда $t -$ параметр $(\alpha \leq t \leq \beta\ )$ кўринишда ва қутб координаталар системасида $r = \varphi(\Theta)$ кўринишида (бу ерда r – радиус вектор узунлигини билдиради, Θ эса қутб бурчакни билдиради) берилиши мумкин.

Жадвал усули. Баъзи ҳолларда функция жадвал усулида берилиши мумкин. Масалан, x эркли ўзгарувчининг баъзи бир қийматларига мос келадиган функция қийматлари кўрсатилган жадвал берилади. Масалан кун давомида ҳаво ҳароратини ўлчаб борганимизда қуйидаги жадвални ҳосил қилишимиз мумкин:

Вақт: *t*	t_1	t_2	t_3	...	t_r
Ҳарорат: *T*	T_1	T_2	T_3	...	T_r

Бу жадвалда *t* вақт билан *T* ҳаво ҳарорати орасидаги функционал боғланиш берилган. Бунда t (аргумент) эркли ўзгарувчи, *T* эса функциянинг қийматларини билдиради. Функциянинг жадвал усулида берилишига логарифмлар жадвалини ҳам мисол тариқасида кетирса бўлади.

График усул. Баъзи ҳолларда функция ўзининг графиги ёрдамида ҳам берилиши мумкин (14-расм). Текисликдаги нуқталарнинг ҳар қандай тўплами ҳам функциянинг графигини беравермайди .

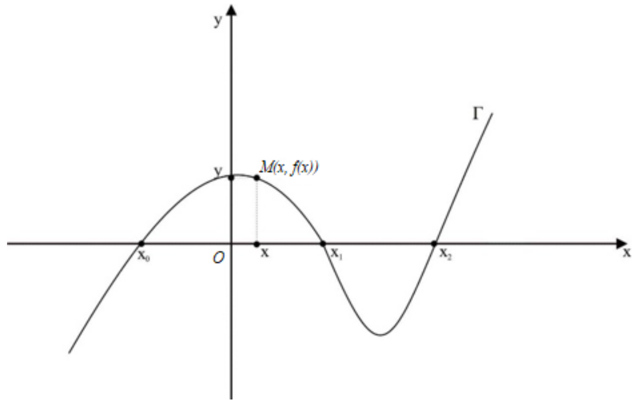
Oxy декарт координаталар системаси киритилган бирор текисликни қарайлик.

Яна шуни ҳам таъкидлашимиз мумкинки, текисликдаги ҳар қандай нуқталарнинг геометрик ўрни бирор бир функциянинг графигини беравермайди.

XOY тўғри бурчакли координаталар системаси киритилган текисликни қарайлик. Бундай ҳолда текисликнинг ҳар бир нуқтаси сифатида иккита ҳақиқий соннинг жуфтлигини қарашимиз мумкин. Аксинча,ҳар бир иккита ҳақиқий соннинг жуфтлигига бирор текисликнинг нуқталарини мос қўйишимиз мумкин.

f бирор сонли функция бўлсин. *X* тўплам эса шу функциянинг аниқланиш соҳаси бўлсин.

f функциянинг графиги деб, текисликдаги шундай нуқталарнинг Г тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг координаталари *(x, f(x))* кўринишга эга бўлади (14- расм).



14-расм

Оғзаки усул. Баъзан шундай функциялар учрайдики, бундай функцияларни аналитик усулда ҳам, жадвал усулда ҳам, график усулда ҳам бериб бўлмайди. Бундай ҳолларда функияни оғзаки усулда, яъни сўзлар ёрдамида бериш мумкин.

Мисол. *X* ҳақиқий сонни чексиз ўнли касрга ёйилик ва вергулдан кейин неча марта 5 сонининг келишини санайлик. Ҳосил қилинган натижада биз *x* сонига мосликни кўрамиз. Шундай қилиб, бизда $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган f функцияга эга бўламиз. Функция оғзаки берилишига қарамай бу функциянинг қийматларини ҳисоблаш имкониятига ва хоссаларига эга бўламиз. Кўриниб турибдики, масалан, $f(0) = 0, f(\pi) = 2$ $(\pi = 3{,}1415926536 \ldots), f(\frac{1}{8}) = 1$ $(\frac{1}{8} = 0{,}125000 \ldots)$ ва ҳоказо. Бу функция даври 1 га тенг бўлган даврий функция эканлиги *(f(x+1)=f(x))* ва жуфт функция *(f(-x)=f(x))* эканлиги таърифдан кўриниб турибди.

Функциялар устида амаллар

X_1 соҳада аниқланган $f_1(x)$ функция, X_2 соҳада аниқланган $f_2(x)$ функция берилган бўлсин.

Таъриф. $X\ =X_1\cap X_2$ тўпламда аниқланган $f_1(x)+f_2(x)$ йиғинди функция $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг йиғиндиси дейилади ва у (f_1+f_2) каби белгиланади.

Функциялар йиғиндиси қуйидаги хоссаларга эга:·

1. $D(f_1+f_2)=D(f_1)\cap D(f_2)$, 2) ихтиёрий $x\in D(f_1+f_2)$ эканлигидан $(f_1+f_2)(x)==f_1(x)+\ f_2(x)$ эканлиги келиб чиқади.

Мисол. $D(f_1)=(-\infty,\ 1]$ соҳада аниқланган $f_1(x)=\sqrt{1-x}$ функция, $D(f_2)=[-1;1]$ соҳада аниқланган $f_2(x)=arcsin\,x$ функцияларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. $f_1(x)+f_2(x)=\sqrt{1-x}+arcsin\,x$ йиғинди функция [-1;1] кесмада аниқланган.

2. Таъриф. X_1 соҳада аниқланган $f_1(x)$ функция, X_2 соҳада аниқланган $f_2(x)$ функцияларнинг кўпайтмаси деб, $x\in D(f_1\cdot f_2)$ қийматлар учун $(f_1\cdot f_2)(x)=f_1(x)\cdot\ f_2(x)$ функцияга айтилади.

Худди шунга ўхшаш бўлинмага ҳам таъриф берсак бўлади,яъни $x\in D(f_1\cdot f_2)$ қийматлар учун аниқланган $(\frac{f_2(x)}{f_2(x)})(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ функцияга айтилади.

Мисол. $D(f_1)=(-\infty,\ 1]$ соҳада аниқланган $f_1(x)=\sqrt{1-x}$ функция, $D(f_2)=[-1;1]$ соҳада аниқланган $f_2(x)=arcsin\,x$ функцияларнинг йиғиндисини топинг.

Ечиш. Таърифга асосан [-1;1] да аниқланган $\sqrt{1-x}\cdot arcsin\,x$ кўпайтма функцияга эга бўламиз.

Мураккаб функция

$y=f(x)$ функциянинг x аргументи бошқа бир t ўзгарувчининг функцияси бўлса, y ўзгарувчи t ўзгарувчининг мураккаб функцияси бўлади. Бошқача қилиб айтганда, f ва φ функциялардан тузилган

$$y=f(\varphi(t))\ \text{ёки}\ \ y=\varphi(f(x))$$

кўринишидаги функцияга мураккаб функция деб атаймиз. Масалан, у $=cos(3x-2)$ функция $t=3x-2$ ва у $=cost$ функциялардан тузилган мураккаб функцияни ташкил этади.

Таъриф. Агар х $=\varphi(t)$ функция бирор E соҳада ва $y=f(x)$ фунуция D соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $y=f(\varphi(t))$ функцияни Eтўпламда аниқланган мураккаб функция ёки f билан φ нинг композицияси дейилади.Композицияни $f\circ\varphi$ каби белгилаймиз, яъни

$$(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(t)),\qquad x\in E.$$

Мисоллар: 1) $y=f(x)$ ва $x=\sqrt{t}$ функциялар берилган. $E(t)=[0,+\infty).\,y=sin\sqrt{t}$ функция

$[0, +\infty)$ оралиқда аниқланган мураккаб функциядир.

1) $y=\sqrt{x}$ ва $x = 1 - t$. Демак, $y=\sqrt{1-t}$ функция $(-\infty; 1]$ оралиқда аниқланган мураккаб функциядир.

Функциянинг чегараланганлиги

X тўпламда аниқланган $y=f(x)$ функция берилган бўлсин.

Таъриф. Агар шундай M сони мавжуд бўлиб, $y=f(x)$, функция x нинг барча қийматларида, яъни $x \in X$ бўлганда

$$| f(x) | \le M \qquad (1)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, $y=f(x)$ функция чегараланган дейилади. Акс ҳолда функция чегараланмаган дейилади. (1) Шартни шартнинг геометрик маъноси қуйидагича: $y=f(x)$ функциянинг графиги координаталар текислигида $-M \le y \le M$ полосада жойлашган бўлади. 67–расмда $y=x-[x]$, $x\in$ X тасвирланган, бу график бутунича $0\le y \le 1$ горизонтал полосада жойлашган. Шунинг учун бу функция чегараланган функция бўлади. 68-графикда эса чегараланмаган $y = \frac{1}{x^2}$ чегараланмаган функциянинг графиги берилган.

Функциянинг жуфт ва тоқлиги

Таъриф.Агар ихтиёрий x ҳақиқий сон учун $x \in E$ муносабатдан $-x \in E$ муносабат келиб чиқса, у ҳолда E тўплам симметрик тўплам дейилади. Масалан, $E=[-2, 2]$, $R=(-\infty, +\infty)$ тўпламлар симметрик тўпламлардир.

y=f(x) функция $[-a , a]$ ёки $(-a, a)$ симметрик тўпламда берилган бўлсин.

Таъриф. Агар ихтиёрий $x \in (-a , a)$ қийматлар учун $f(-x)=f(x)$ муносабат ўринли бўлса, $f(x)$ функция жуфт функция; агар ихтиёрий $x\in (-a, a)$ қийматлар учун $f(-x) = - f(x)$ муносбат ўринли бўлса, $f(x)$ функция тоқ функция дейилади.

Масалан, $y=x^2$, $y=x^4$, $y=\cos x$ функциялар жуфт функциялар; $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$ функциялар эса тоқ функциялардир.Тушунарли бўлиши учун булардан баъзи бирларини, мисол учун, $y=x^2$ ва $y=x^3$ функцияларни таърифга асосан текшириб кўришимиз мумкин. Ҳақиқатдан ҳам: $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$, демак, $y=x^2$ функция жуфт ;

$(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$, демак, $y=x^3$ функция тоқ ;

Қолган функцияларни жуфт-тоқликка текшириб кўришни ўқувчиларга қолдирамиз. Яна шуни нарсани таъкидлаб ўтамизки, шундай функциялар учрайдики у тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас. Бунга мисол қилиб, $y=2x+5$, $y=x^2+x^3$, $y=\sin x+\cos x$ функцияларни келтириб ўтамиз.

Жуфт, тоқ функцияларнинг графиклари ажойиб хоссаларга эга. Масалан, айтайлик,

y=f(x) функция бирор E симметрик тўпламда жуфт функция бўлсин, у ҳолда бу фунцияда x ўзгарувчининг ўрнига $-x$ ни қўйсак функциянинг қиймати ўзгармасдан қолади, яъни жуфт функциянинг графиги ордината ўқига нисбатан симметрик жойлашади.Шунинг учун жуфт функцияларнинг графикларини чизишда графикнинг $x \geq 0$ ёки $x< 0$ бўлганда графикнинг бир қисмини чизиш етарли бўлади, қолган қисмлари эса Оy ўқига нисбатан симметрик равишда кўчириб қўйилади.

Тоқ функцияларнинг бундай хоссаларини текширишни ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Монотон функция

Бирор X тўпламда аниқланган f(x) функцияни қарайлик.

Таъриф. Агар эркли ўзгарувчи x нинг $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $\mathrm{f}(x_1) \leq f(x_2)$ муносабат ўринли бўлса, у вақтда $f(x)$ функцияни ўсувчи функция деймиз.

Таъриф. Агар эркли ўзгарувчи x нинг $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $f(x_1) \geq f(x_2)$ муносабат ўринли бўлса, у вақтда $f(x)$ функцияни камаювчи функция деймиз.

Таъриф. Агар эркли ўзгарувчи x нинг $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $f(x_1) < f(x_2)$ муносабат ўринли бўлса, у вақтда $f(x)$ функцияни қатъий ўсувчи функция деймиз.

Таъриф. Агар эркли ўзгарувчи x нинг $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $f(x_1) > f(x_2)$ муносабат ўринли бўлса, у вақтда $f(x)$ функцияни қатъий камаювчи функция деймиз.

Ўсувчи ва камаювчи, қатъий ўсувчи ва қатъий камаювчи функцияларни монотон функциялар деб атаймиз. Қатъий ўсувчи ва қатъий камаювчи функцияларни қатъий монотон функциялар ҳам деб атаймиз.

Мисол. $f(x)=x^3$, $x \in R$ функциянинг қатъий ўсувчи функция эканлигини исботланг.

Исбот. Фараз қилайлик, $x_1 < x_2$ бўлсин. У вақтда

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2).$$

Кўриниб турибдики, ҳар қандай x_1 ва

$x_2 \neq x_1$ қийматлар учун $x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 > 0$, у вақтда $f(x_2) - f(x_1) > 0$, яъни

$f(x_2) > f(x_1)$. Демак, ҳақиқатан ҳам $f(x)=x^3$, $x \in R$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида ўсувчи экан.

Худди шунга ўхшаш, $y=[x]$, $x\in R$ функциянинг ўсувчи эканлиги, $y=-x^3$, $x\in R$ функциянинг қатъий камаювчи эканлиги, $y = -[x]$, $x\in R$ функциянинг камаювчи эканлиги исбот қилинади. $y= x-[x]$, $x\in R$ функция эса монотонлик хоссасига эга эмас.

Бу масалаларни текшириб кўришни ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Функциянинг даврийлиги

Агар $y=f(x)$ функция учун шундай $T>0$ сон мавжуд ва функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар бир x учун $x+T$ ва $x-T$ лар аниқланиш соҳасига тегишли бўлиб,

$f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда функция даврий функция деб ·аталади. Т сонларнинг энг кичиги функциянинг $f(x)$ даври дейилади. $y=sinx$, $y=cosx$, $y=tgx$, $y=x-[x]$ функциялар даврий функциялардир. Бу функциялардан биринчи иккитаси $T=2\pi$ даврга, учинчиси эса $T=\pi$ даврга эга,тўртинчиси эса 1 даврга эга, яъни:

$$sin(x-2\pi)=sin\,x\,cos2\pi-sin2\pi\,cos\,x=sin\,x\cdot\ 1+0\ \cdot cos\,x=sinx$$

$$cos(x-2\pi)\ =\ cos\,x\ \cdot\ cos2\pi+sinx\,sin2\pi=$$

$$=cos\,x\ \cdot 1\ +\ sin\,x\ \cdot\ 0\ =\ cos\,x\ ,$$

$x-[x]=x+1-E(x+1)=\ x+1-\ E(x)-\ 1\ =\ x-E(x)=x-[x],$ бу ерда

$E(x) = [x]$ ифода x нинг бутун қисмини билдиради. Масалан, $[x]$=n (n$\leq x \leq n+1$) n-бутун

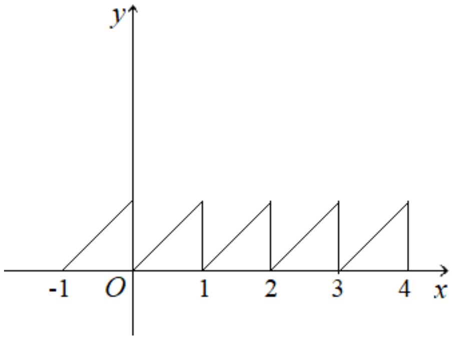
сон. Демак, ҳар қандай бутун сон ҳам давр бўлади (15-расм).

Теорема. Даврий функция ҳеч қачон қатъий монотон бўла олмайди.

Исбот. Фараз қилайлик, X тўпламда аниқланган $f(x)$ функция T даврга эга бўлган (аниқлик учун $T>0$ деб олайлик) функция бўлсин. X тўпламдан ихтиёрий x элемент олайлик, яъни $x\in X$. У вақтда $f(x)=f(x+T)$. Биз $T>0$ бўлѓани учун $x\ >\ x+T$ муносабатга эгамиз. Қатъий монотон функциянинг таърифига асосан

$$f(x)<f(x+T)$$

муносабатга эга бўламиз. Бу эса теореманинг шартига зид. Теорема исбот бўлди.



15-расм

Теорема. Даврий монотон функция ўзгармасдир.

Исбот. *y= f(x)* функция *X* тўпламда аниқланган даврий монотон функция бўлсин.

Фараз қилайлик, бу функция ўзгармас бўлсин ва *X* тўпламдан шундай x_1, x_2 элементларни топамизки,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad (1)$$

бўлсин. Аниқлик учун яна шу нарсани фараз қиламизки, $f(x)$ ўсувчи бўлсин ва, демак, $x_1 > x_2$. У вақтда теореманинг шартига асосан $f(x_1) \geq f(x_2)$. Бу ерда (1) шартдан фойдаланиб, $f(x_1) > f(x_2)$ муносабатга эга бўламиз. Маълумки, T сони $f(x)$ функциянинг даври, у вақтда nT (бу ерда n сони ихтиёрий нолга тенг бўлмаган бутун сон) ҳам унинг даври бўлади. n сонини шундай танлаб оламизки, $x_2 + nT > x_1$, бўлсин. Даврий функциянинг таърифига асосан $x_2 + nT \in X$. У вақтда монотонликка асосан $f(x_2 + nT) \geq f(x_1)$ муносабатга эга бўламиз. Бу ердан эса $f(x_2 + nT) = f(x_2)$ ва $f(x_2) \neq f(x_1)$ муносабатларни ҳисобга олиб $f(x_2) > f(x_1)$ муносабатга эга бўламиз. Биз бу ерда қарама-қаршиликка келдик. Теорема исбот бўлди.

2-§. Функциянинг лимити ва улар ҳақидаги теоремалар. Функциянинг узлуксизлиги

Бу мавзуга киришдан аввал монотон ва чегараланган кетма-кетликлар тушунчасига тўхталиб ўтайлик.

Таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликда ҳар қандай n номер учун $x_n \geq x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, бундай кетма-кетликни камаювчи (ўсмайдиган) кетма-кетлик дейилади.

Таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликда ҳар қандай n номер учун $x_n \leq x_{n+1}$ тенгсизлик ўринли бўлса, бундай кетма-кетликни ўсувчи (камаймайдиган) кетма-кетлик дейилади.

Таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликда ҳар қандай n номер учун $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$) тенгсизлик ўринли бўлса, бундай кетма-кетликни қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

Таъриф. Камаймайдиган, ўсмайдиган, қатъий камаювчи ва қатъий ўсувчи кетма-кетликларни умумий ҳолда монотон кетма-кетлик дейилади.

Масалан:

1,2,3,...,n,... қатъий ўсувчи;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ қатъий камаювчи;

0,0,0,1,1,1,2,2,2, ... , n, n ,n, ... Ўсувчи (камаймайдиган);

$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots, 0, \frac{1}{n}, \dots$ камаювчи (ўсмайдиган) каби кетма-кетликларни монотон кетма-кетликларга мисол тариқасида келтириб ўтамиз.

Таъриф. Агар шундай M сони мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун ихтиёрий n натурал сон олинганда ҳам

$$x_n \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, бу кетма-кетлик юқоридан чегараланган дейилади.

Масалан, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ кетма-кетлик юқоридан , мисол учун, 1 сони билан чегараланган.

Таъриф. Агар шундай m сони мавжуд бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун ихтиёрий n натурал сон олинганда ҳам

$$x_n \geq m$$

тенгсизлик ўринли бўлса, бу кетма-кетлик қуйидан чегараланган дейилади.

Масалан, *1,2,3,...,n,...* кетма-кетлик қуйидан *1* сони билан чегараланган

Таъриф. Агар шундай мусбат $M > 0$ мавжуд бўлиб, ҳар қандай n номер учун

$$|x_n| \leq \text{M}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик дейилади.

Бу тушунчалардан келиб чиққан ҳолда энди кетма-кетлик лимитининг қатъий таърифини берса бўлади.

Таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, бундай кетма-кетлик чегараланган кетма-кетлик дейилади.

Таъриф.Агар ихтиёрий мусбат ε сон қандай бўлмасин, шундай натурал N сони мавжуд бўлсаки, $n \geq N$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса а сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва у қуйидагича ёзилади: $lim\, x_n = a$ ёки $x_n \to a$.

Мисол тариқасида, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ... , $\frac{1}{n}$, ... кетма-кетлик лимити 0 га тенг эканлигини кўрсатайлик.

Фараз қилайлик, ε сони ихтиёрий нолдан катта сон бўлсин, яъни $\varepsilon > 0$.

У вақтда:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon ,$$

бу тенгсизликдан эса N сони сифатида $\frac{1}{\varepsilon}$ каср соннинг бутун қисмини олиш кераклиги келиб чиқади, яъни $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Шундай қилиб,

$$lim\,\frac{1}{n} = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

Функциянинг лимити. Юқорида функциянинг хусусий ҳоли бўлган сонли кетма-кетликларнинг лимити тушунчаси қаралди. Энди бу тушунчаларни ихтийрий функциялар учун умумлаштирамиз.

Таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ мавжуд бўлиб,

$$0<|x-a|<\delta$$

Тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлса, x сони a сонига интилганда *f(x)* функция A сонига интилади дейилади ва $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ёки $x \to a$ да *f(x)*→*A* каби ёзилади.

Бошқача айтганда, A сони *f(x)* функциянинг $x=a$ нуқтаги лимити дегани, a сонидан фарқли ва унга етарлича яқин барча x лар учун (албатта, $f(x)$ функция аниқланган х қийматлар учун) $f(x)$ функциянинг мос қийматлари A сонига етарлича яқин бўлади, деганидир.

1-мисол. $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ тенгликнинг тўғри эканлигини исбот қилинг.

Исбот. Фараз қилайлик, ε ихтиёрий мусбат сон бўлсин. δ ни ε га тенг қилиб танлаб олиб, $0<|x-1|<\delta$ бўлганда $|x-1|< \varepsilon$ муносабатга эга бўламиз. Бундан эса таърифга асосан $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ муносабатга эга бўламиз.

2-мисол. $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ муносабатнинг тўғри эканлигини кўрсатинг.

Исбот. Фараз қилайлик , ε ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Барча ε лар учун $0 < |x-1| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи δ>0 ни топамизки, $|x^2 - 1| < \varepsilon$ муносабат ўринли бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $|x-1|<\delta$ бўлса, у вақтда $|x+1| = |(x-1)+2| \leq |x-1| + 2 < \delta + 2$, бўлади. Демак, $|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < \delta(\delta+2)$.

$|x^2 - 1| < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши учун $\delta(\delta+2) = \varepsilon$ деб олишимиз етарли бўлади, яъни $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0$. Бу ердан $\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$ ни оламиз (δ>0 бўлгани учун $\delta=-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ ни олмаймиз). Юқоридаги мулоҳазалардан функция лимитининг таърифига асосан $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ тенгликнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди функциянинг лимити таърифини $x\to\infty$ бўлган ҳолда кўриб ўтайлик.

Таъриф. A сони $x \to +\infty$ да $f(x)$ функциянинг лимити дейилади, агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ сони учун, шундай мусбат $N=N(\varepsilon)$ сонини топиш мумкин бўлсаки, $|x|>N$ тенгсизликни қаноатлантиручи барча x лар учун $|f(x) - A|< \varepsilon$ муносабат ўринли бўлса.Бундай ҳолда қуйидагича ёзамиз: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Энди $x \to +\infty$ ва $x \to -\infty$ бўлган ҳолларни алоҳида-алоҳида қарайлик: Бу ҳолларда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ лимитга ўхшаш топилади, бунда фақат мос равишда $|x| > N$ нинг ўрнига $x>N$, $x<-N$ ифодалар қўйилади.

Мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$ эканлигини кўрсатинг. Ҳақиқатдан ҳам $\delta = -\log_2 \varepsilon$ деб олсак, $x>\delta$ да $x > -\log_2 x$, $-x < \log_2 x$, $2^{-x} < 2^{\log_2 \varepsilon} = \varepsilon$, , $2^{-\varepsilon} < \varepsilon$ ва ниҳоят $|2^{-x} - 0| < \varepsilon$ муносабатга эга бўламиз. Бу эса

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$$

тенгликнинг тўғри эканлигини исботлайди.

Бир томонлама лимитлар. *f(x)* функциянинг $x>a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг барча қийматлари бўйича $x=a$ нуқтадаги лимити *f(x)* функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити дейилади ва $\lim_{x\to a} f(x) = f(a+0)$ каби ёзилади. Худди шунга ўхшаш функциянинг чап лимити ҳам аниқланади, яъни *f(x)* функциянинг $x<a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг барча қийматлари бўйича $x=a$ нуқтадаги лимити *f(x)* функциянинг a нуқтадаги чап лимити дейилади ва $\lim_{x\to a} f(x) = f(a-0)$ каби ёзилади.

f(x) функциянинг $x>a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари бўйича $x=a$ нуқтадаги лимити *f(x)* функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити дейилади ва $\lim_{x\to a} f(x) = f(a+0)$ каби ёзилади. Худди шунга ўхшаш функциянинг чап лимити ҳам аниқланади, яъни *f(x)* функциянинг $x>a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматлари бўйича $x=a$ нуқтадаги лимити *f(x)* функциянинг a нуқтадаги ўнг лимити дейилади ва $\lim_{x\to a} f(x) = f(a+0)$ каби ёзилади. Худди шунга ўхшаш функциянинг чап лимити ҳам аниқланади, яъни *f(x)* функциянинг ўнг ва чап лимитлари бу функциянинг бир томонлама лимитлари дейилади.

Умуман олганда *f(x)* функциянинг $x=a$ нуқтадаги лимити мавжуд бўлиши учун

$$f(a+0) = f(a-0)$$

муносабат ўринли бўлиши керак.

Мисол. $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x\neq 0$ функциянинг x нолга интилгандаги лимити мавжудми, мавжуд бўлса уни топинг.

Ечиш. Лимити нолга интилувчи қуйидаги иккита кетма-кетликни қарайлик:

$$\{x_n'\} : x_n' \to 0 \quad (x_n' > 0,\ n=1,2,3,...)$$
$$\{x_n''\} : x_n'' \to 0 \quad (x_n'' < 0,\ n = 1,2,3, ...).$$

Бу кетма-кетликлар учун

$$f(x_n') = \frac{x_n'}{x_n'} = 1 \to 1, \quad f(x_n'') = \frac{x_n''}{-x_n''} = -1 \to -1$$

формулаларга эга бўламиз. Демак, юқоридагиларга асосан

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|} = 1, \qquad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|} = -1,$$

муносабатларга эга бўламиз. Бундан эса қаралаётган функциянинг $x\to 0$ даги лимитининг мавжуд эмаслиги келиб чиқади.

Лимитлар ҳақидаги теоремалар. Биз уларни исботсиз келтирамиз:

1-теорема. Агар $x = a$ нуқтада $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ функциянинг ҳам лимити мавжуд бўлади ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

тенглик ўринли бўлади.

2- теорема. Агар $x = a$ нуқтада $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар чекли лимитга эга бўлса,у ҳолда $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ функциянинг ҳам лимити мавжуд бўлади ва

$$f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$$

функциянинг ҳам лимити мавжуд бўлади ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)$$

Тенглик ўринли бўлади.

Натижалар: 1. Агар лимитга эга бўлган $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар берилган бўлса, улар учун ҳам

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\lim_{x\to a} f_n(x)$$

муносабат ўринли ва бу муносабатдан $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x)$ бўлганда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

муносабат келиб чиқади.

2. *f(x)* = *const* = *c* бўлганда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$ бўлади. Шунинг учун

$$\lim_{x\to a}[\,cg(x)] = c\lim_{x\to a} g(x)\ ,$$

яъни ўзгармас сонни лимит ишораси остидан ташқарига чиқариш мумкин деган хулосага келамиз.

Функциянинг узлуксизлиги

Функциянинг узлуксизлиги тушунчаси математика фанининг муҳим тушунчаларидан бири бўлиб, у функция лимити тушунчаси билан бевосита боғлиқ тушунчадир. Биз дастур доирасида фақатгина функция узлуксизлиги таърифи билангина чегараланамиз

Таъриф. Агар

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X}} f(x) = f(a)$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда *f(x)* функция *X* тўпламнинг $x=a$ нуқтасида узлуксиз деб аталади.

Дарҳақиқат, *f(x)* функциянинг $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун қуйидаги уч шарт бажарилиши керак:

1. *f(x)* функция $x=a$ нуқтада аниқланган.
2. $x=a$ нуқтада *f(x)* функциянинг лимити мавжуд.
3. Функциянинг $x=a$ нуқтадаги қиймати *f(a)* унинг шу нуқтадаги лимитига тенг.

Бундай ҳолда $x=a$ нуқта функциянинг узлуксизлик нуқтаси дейилади. Акс ҳолда *f(x)* функция $x=a$ нуқтада узилишга эга ва $x=a$ нуқта унинг узилиш нуқтаси дейилади.

f(x) функция бирор ораликда аниқланган бўлсин. x_0 ва x эркли ўзгарувчининг шу ораликдан олинган ихтиёрий иккита қиймати бўлсин. Қуйидагича белгилаш киритамиз: $x - x_0 = \Delta x$, Δx –эркли ўзгарувчи орттирмаси, бу ердан х= $x_0 - \Delta x$ ни топамиз. Худди шунга ўхшаш эрксиз ўзгарувчи миқдор у ҳам $y\ =\ y_0 - \Delta y$ каби кўринишни олади. Бу ердан

$$\Delta y = y_0 - y$$

ёки

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ифодага, яъни функция орттирмасининг ифодасига эга бўламиз, масалан,

$y = x^3$ функция

$$y = (x_0 + \Delta x)^3 - {x_0}^3 = 3{x_0}^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

орттирмага эга.

Таъриф. Агар эркли ўзгарувчининг чексиз кичик орттирмасига эрксиз ўзгарувчининг чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

муносабат ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Мисол. $y=x$ функция эркли ўзгарувчининг ҳар қандай $x=x_0$ қийматида узлуксиздир.

Ҳақиқатан ҳам таърифга асосан

$$\Delta y = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$$

ва, демак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

III бобга доир ўз-ўзини текшириш учун саволлар:

1. Икки ўзгарувчи орасидаги қандай боғланиш функция тушунчасига олиб келади?
2. Функциянинг аниқланиш соҳаси деганда нимани тушунасиз.
3. Функция қачон берилган дейилади.
4. Функция неча хил усулда берилиши мумкин.
5. Тўпламнинг лимит нуқтаси таърифини айтиб беринг.

6. Чекли тўпламлар ҳам лимит нуқтага эга бўладими?

7. Ҳар қандай чексиз тўплами албатта лимит нуқтага эга бўладими?

8. Функциянинг нуқтадаги лимитига таъриф беринг

9. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлигини таърифланг.

10 .Узлуксизликни эркли ўзгарувчи(аргумент) ва функция орттирмалари орқали таърифланг.

11. Функция таърифини беринг ва тушунтиринг.

12. Функция неча хил усулда берилиши мумкин.

13. Асосий элементар функцияларни санаб беринг.

14. Даврий функция деб қандай функцияга айтилади?

15. Жуфт ва тоқ функция деб қандай функцияга айтилади?

16. Монотон функция деб қандай функцияга айтилади?

III бобга доир машқлар:

1. Қуйида берилган функцияларнинг $f(3), f(-1), f(\frac{1}{2}), f(-2)$ қийматларини топинг:

а) $f(x) = x^2$; в) $f(x)$ =$3x^2$;

c) $f(x)$ =$2x^3 + 1$; d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-4}$;

e) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

2. Қуйидаги формулалар билан берилган функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

a) $f(x) = x^3 - x$; b) $f(x) = \sqrt{x-1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; d) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

3. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг:

a) $y = x^2 - 4$; b) $y = 3x$;

c) $y = 5x - 3$; d) y=$x^2 - 2x + 3$;

e) y=$|x$-2|; f) y=$\frac{1}{x-3}$.

4. Қуйидаги функцияларнинг жуфт-тоқлигини аниқланг:

a) $y=x^3-5$; *b)* $y=x+6$;

c) $y=x^4+x^2$; *d)* $y=\sin x$;

e) y=cosx; *f) y=tgx.*

5.Қуйидаги функциялар даврий бўла оладими?

a) *y=6*; b) *y=sinx*;

c) *y=cosx*; d) *y=tgx*.

6. $lim \frac{4n-8}{2n} = 2$ эканлигини исботланг.

7. Қуйидаги лимитларни топинг:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-3}{7-8n}$; *b))* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-n}{3n+1}$; *d)y=* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+2}{1-7n^2}$;

e) y= $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n-3n^3}{(3n+1)^3}$; *f) y=* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+5}{4n^2+6n-7}$;

l) $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1})$;

8.Қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исбот қилинг:

a) $\lim\limits_{n\to 9}(2x) = 18$; b) $\lim\limits_{n\to \frac{1}{2}}(2 - 8x) = -2$;

c) $\lim\limits_{n\to 9}(2x^2 - 3) = -1$;

9. Қуйидаги лимитларни топинг:

a) $\lim\limits_{n\to \frac{1}{2}}(x^4 - 2x + 5)$; b) $\lim\limits_{n\to -1} \frac{x^3+x^2-11}{8x^2+5}$;

c) $\lim\limits_{n\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$; d) $\lim\limits_{n\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;

4-боб. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ

1-§. Функция ҳосиласининг таърифи, унинг геометрик ва механик маъноси. Дифференциаллаш қоидалари. Ҳосиланинг амалий масалаларни ечишга тадбиқи ҳақидаги теоремалар

Ҳосила тушунчасига кириш учун қуйидаги икки масалани кўриб чиқайлик.

1-масала. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатининг

$$S=f(t)$$

қонунига кўра унинг $t=t_0$ пайтдаги тезлигини(оний тезликни) топиш талаб қилинсин.

Кўриниб турибдики, нуқтанинг t_0 ва $t_0 + \Delta t\ (\Delta t\neq 0)$ вақтлар орасида босиб ўтган йўли

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

Бўлгани учун унинг шу вақт оралиғидаги ўртача тезлиги

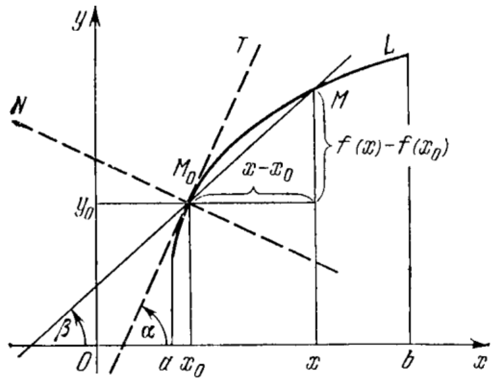
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 - \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

ифода билан аниқланади. Бу ифодадаги Δt қанча кичик бўлса, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбат (ўртача тезлик) нуқтанинг t_0 пайтдаги тезлигига шунча яқин бўлиши кўриниб турибди.. Шунинг учун ҳаракат текис бўлмаган пайтда нуқтанинг t_0 пайтдаги тезлиги, яъни оний тезлик

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

лимитдан иборат бўлади.

2-масала. $y=f(x)$ функция (a,b) да аниқланган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада узлуксиз бўлсин. Шу функция графигининг $M(x_0, f(x_0))$ нуқтасига ўтказилган уринма тенгламасини тузиш талаб қилинади (16-расм).



16–расм

M_0 уриниш нуқтаси берилган. Изланаётган уринма тенгламасини тузиш учун унинг бурчак коэффициентини, яъни $k = tg\varphi$ ни топиш етарли бўлади. Бунинг учун график устида M_0 дан бошқа яна бирор $M(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ $(x_0+\Delta x \in (a,b))$ нуқта олиб, M_0M кесувчи ўтказамиз. Равшанки, агар М нуқта график бўйлаб M_0 нуқтага интилса, M_0M кесувчининг лимит вазияти уринмадан иборат бўлади. Бу эса $\Delta x \to 0$ да рўй беради. Бу тасдиқ 16-расмдан ҳам кўриниб турибди, яъни

$$tg\alpha = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x},\ \Delta x \to 0 \text{ да } \alpha \to \varphi \text{ ва } \lim_{\alpha\to\varphi} tg\alpha = tg\varphi.$$

Демак, агар

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

лимит мавжуд бўлса, уни уринманинг бурчак коэффициенти деб қабул қилиш мумкинлиги келиб чиқади.

Дарҳақиқат, функция ҳосиласининг механик ва геометрик маъноси тўғрисида шундай хулосага келишимиз мумкин экан: 1) S йўлдан, яъни $S=f(t)$ функциядан ($t=t_0$ нуқтада) t вақт бўйича олинган ҳосила ҳаракат текис бўлмаганда $t = t_0$ вақтдаги оний тезликни берар экан, яъни

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\ .$$

2) $f'(x_0)$ ҳосиланинг қиймати бу функция графигига $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентига тенг, яъни

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Юқоридагилардан келиб чиқиб яна шундай хулосага келишимиз мумкин.Маълумки, тезликдан олинган биринчи тартибли ҳосила ҳам вақтга боғлиқ, яъни вақтнинг функциясидан иборат бўлади. Демак, тезликдан олинган биринчи тартибли ҳосиланинг тезланишни беришини англаб олиш унчалик қийин эмас.

Қаралган иккала масалада ҳам изланаётган миқдорни ҳисоблаш функция орттирмасини эркли ўзгарувчи (аргумент) орттирмасига бўлган нисбатнинг эркли ўзгарувчи (аргумент) орттирмаси нолга интилгандаги лимитини ҳисоблашга келтирилди.

Ечимини топиш масаласи худди шундай типдаги лимитларни ҳисоблашга келтириладиган масалаларни кўплаб келтириш мумкин. Энди биз умумий ҳолга эътибор қаратайлик.

Бирор оралиқда аниқланган ихтиёрий Y=f(x) функция берилган бўлсин. Фараз қилайлик x_0 шу оралиқнинг нуқтаси бўлсин. x_0 нуқтага Δх орттирма бериб ва шу орттирмага мос функция орттирмасини ифодаловчи

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

формулага эга бўламиз. Бу формула функция орттирмасининг формуласи дейилади. Энди бу орттирманинг аргумент орттирмасига нисбатини тузайлик, яъни

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Бу нисбат $y=f(x)$ функция ўзгаришининг $[x_0,\ x_0 + \Delta x]$ кесмадаги ўртача тезлигини билдиради. Функция ўзгаришининг аниқ характеристикасига эга бўлиш учун $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини қарайлик. Агар бу лимит мавжуд бўлса, у вақтда бу лимит $x=x_0$ нуқтадаги функция ўзгаришининг тезлигини беради.Бундай йўл билан топилган лимитга берилган $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ нуқтадаги ҳосиласи дейилади.

Шундай қилиб қуйидаги таърифга келамиз.

Таъриф. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб, функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг аргумент орттирмаси нолга интилгандаги

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

лимитга айтилади. Ҳосилани y' ёки $f'(x)$, шунингдек, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, каби белгилашлар ҳам киритилган.

Функциядан ҳосила олиш амалини функцияни дифференциаллаш амали деб атаймиз. x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияни эса x_0 нуқтада дифференциалланувчи функция деб атаймиз. Агар функция бирор оралиқнинг ҳамма нуқталарида ҳосилага эга бўлса, бундай функцияни оралиқда дифференциалланувчи функция деб атаймиз.

Агар x_0 нинг бирор қийматида

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \qquad \text{ёки} \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

шартлар бажарилса, у ҳолда x_0 нуқтада мос равишда $+\infty$, $-\infty$ ҳосила мавжуд дейилади.

Шуни эътиборга олиш кераккки, юқоридаги келтириб чиқарилган

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

формулани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

бу ерда $x=x_0+\Delta x$. Ҳақиқатан ҳам, агар юқоридаги формулага $x=x_0+\Delta x$ ифодани қўйсак, яъни:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x_0+\Delta x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x\to x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

дастлабки формула келиб чиқади. Айтилганларга доир мисоллар қарайлик.

Мисоллар.

1) $f(x) = C$ функция берилган бўлсин, бу ерда $C=const$ – бирор ўзгармас сон. Маълумки, бу функция $x\in(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган. У вақтда ҳар қандай x_0 нуқта учун

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0,$$

яъни ҳар қандай ўзгармас соннинг лимити нолга тенг экан.

2) *f(x) = x* функцияни қарайлик. У вақтда

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0} = = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

3) $f(x) = x^2$ функция берилган. $f'(x_0)$ ҳосилани топиш талаб этилади. Ҳақиқатан ҳам

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

4) $f(x) = x^3$ функция берилган. $f'(x_0)$ ҳосилани топиш талаб этилади. Ҳақиқатан ҳам

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2) = 3x_0^2\,.$$

Энди ихтиёрий нуқтада ҳосила олишнинг умумий қоидаси билан танишиб чиқайлик. Аниқланиш соҳасидаги ихтиёрий x учун f(*x*) функциядан ҳосила олиш, айтилганларга кўра, қуйидаги формула орқали амалга оширилади:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

f(x) функциядан ҳосила олиш учун қуйидаги тартибга амал қилиш керак:

1) *x* нинг бирор қийматини танлаб, унга Δx орттирма берилади ва функциянинг $f(x+\Delta x)$ қиймати топилади;

2) Функциянинг Δx орттирмага мос

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

орттирмаси топилади;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат топилади ва, агар мумкин бўлса бу нисбат соддалаштирилади;

4) Юқоридаги мисоллардагига ўхшаш $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ лимит ҳисобланади.

Функцияни дифференциаллаш қоидалари. Маълумки, берилган функциянинг ҳосиласини топиш амали дифференциаллаш дейилади. Функцияни дифференциаллашнинг асосий мазмуни ҳосила ёрдамида функцияларни ўрганишдан иборат

Функция ҳосиласининг таърифидан келиб чиқиб, қуйидаги дифференциаллаш (ҳосила олиш) қоидаларига эга бўламиз:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Ушбу қоидаларни сўз билан ифода этишни (ёзишни) ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Асосий элементар функциялар ҳосилаларининг жадвали:

1^0. $[x^{\mu}]' = \mu x^{\mu-1}$, $(x > 0)$;

2^0. $[(a)^x]' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;

3^0. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$ $(x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$;

4^0. $(\sin x)' = \cos x$;

5^0 $(\cos x)' = -\sin x$;

6^0. $(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

7^0. $(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $(x \neq k\pi;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

8^0. $(arsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(-1 < x < 1)$;

9^0. $(arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2;}}}$ $(-1 < x < 1)$;

10^0. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11^0. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Ҳосиланинг амалий масалаларни ечишга тадбиқи ҳақидаги теоремалар:

Француз математиги Пьер Ферма(1601-1665**) теоремаси**. *f(x)* функция бирор *X* оралиқда аниқланган ва шу оралиқнинг бирор ички *x=c* нуқтасида энг катта (энг кичик) қийматга эга бўлса ва шу нуқтада чекли $f'(c)$ ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда $f'(c)=0$ бўлиши зарурдир.

Исбот.Аниқлик учун *f(c)* ни функциянинг энг катта қиймати бўлсин, яъни $f(x) \le f(c)$,

$x \in X$. Ҳосиланинг таърифига кўра

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Бу лимит *x* нинг *c* га ўнгдан ва чапдан интилишига боғлиқ эмас. Лекин x> c да

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0,$$

яъни

$$f'(c+0) \le 0.$$

Агар $x < c$ бўлса,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0,$$

яъни

$$f'(c-0) \ge 0 .$$

Демак, $f'(c+0) \le 0$ ва $f'(c-0) \ge 0$ тенгсизликлардан сўралган $f'(c) = 0$ тенглик ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

Француз математиги Ролль (1652-1719) **теоремаси**. *f(x)* функция [*a*,*b*] кесмада аниқланган, узлуксиз ва *(a,b)* оралиқда дифференциалланувчи бўлиб, *f(a)=f(b)* бўлса, *(a,b)* оралиқда унинг ҳосиласи нолга тенг бўладиган камида битта нуқта мавжуд бўлади, яъни

$$f'(c) = 0, \ \ a < c < b.$$

Француз математиги Лагранж (1736-1813) **теоремаси**. *f(x)* функция [*a*,*b*] кесмада аниқланган, узлуксиз ва *(a,b)* оралиқда дифференциалланувчи бўлса, (a,b) ораликда камида битта шундай c нуқта мавжуд бўладики, ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$f(b) - f(a) = (b-a)\cdot f'(c), \quad a < c < b.$$

Юқорида келтирилган теоремалар дифференциал ҳисоб курсининг асоссий теоремалари бўлиб ҳисобланади. Бу теоремаланинг исботи бизнинг дастуримизга кирмаганлиги учун келтирмадик (Ферма теоремасидан ташқари). Шунинг учун Ролль, Лагранж теоремаларининг исботларини бажариб қўйишни қизиқувчи талабаларнинг ўзларига ҳавола этамиз.

2- §. Бошланғич функция. Аниқмас интеграл таърифи, хоссалари. Интеграллаш жадвали. Интеграллаш усуллари

Бошланғич функция. Маълумки, дифференциал ҳисобнинг асосий масаласи берилган функциянинг ҳосиласини (ёки дифференциалини) топишдан иборат.

Интеграл ҳисобнинг асосий масаласи эса функцияни унинг берилган ҳосиласи (ёки дифференциали) бўйича топишдан иборатдир. Қуйидаги масала механикада тез-тез учраб туради. Бу масала қуйидагича: Вақтнинг ихтиёрий t моментида ҳаракатланаётган бирор жисмнинг (ёки моддий нуқтанинг) оний тезлиги $v = v(t)$ маълум. Бу жисмнинг ҳаракатланиш қонунини, яъни s йўл билан t вақт орасидаги s=$s(t)$ қонунни топишни талаб қилинади.

Фараз қилайлик, масалан, тезлик $v = at$ кўринишда берилган бўлсин. Бу ерда a сони ўзгармас сон. Тезликнинг $v = \frac{ds}{dt}$ формуласи бизга маълум бўлса, ҳосиласи at бўлган s=$s(t)$ функцияни топиш масаласи олдимизда турибди. Бундай функциялардан бири $\frac{at^2}{2}$ бўлади. Буни билан масала тўлиқ ечилди дегани эмас, чунки бу масалани қаноатлантирувчи $s = \frac{at^2}{2}$ функциядан бошқа, масалан,

$$s = \frac{at^2}{2} + c, \qquad (*)$$

бу ерда c – ихтиёрий ўзгармас сон.

Шундай қилиб, ечиш талаб қилинган бу масала чексиз кўп ечимга эга экан, чунки бу масаланинг ечими ихтиёрий ўзгармас c сонига боҳлиқ эканлиги юқоридаги формуладан кўриниб турибди.

Тўла аниқланган ечимни топиш учун бошланғич масала қўйилган бўлиши керак. Бизнинг мисолимизда t вақтнинг бошланғич моментида s йўлнинг миқдорини кўрсатиш етарли бўлади. $t = 0$ да $s = 0$ бўлсин. Бу қийматларни (*) ифодага қўйиб, $b = 0$ эканлигини топамиз. Буни (*) га қўйиб,

$$s = \frac{at^2}{2}$$

охирги натижага келамиз. Кўриниб турибдики, агар бошланғич шартлар $t = t_0$ да $s = s_0$ бўлса, изланаётган ечим

$$s = \frac{at^2}{2} + [s_0 - \frac{at_0^2}{2}]$$

кўринишни олади. Буни текшириб кўришни мустақил иш сифатида ўқувчиларнинг ўзларига топширамиз.

Умуман олганда, берилган ҳосила ёрдамида номаълум функцияни топиш масаласи қуйитдагича тузилади: фараз қилайлик, бирор кесмада $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Берилган кесманинг ихтиёрий нуқтасида

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad \text{ёки} \quad dF = f(x)dx$$

тенгликни қаноатлантирувчи $F(x)$ функцияни топиш масаласи талаб қилинади.

Таъриф. Агар бирор чекли ёки чексиз оралиқда $f(x)$ функция шу оралиқда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига тенг бўлса, яъни

$$F'(x) = f(x)$$

тенглик ўринли бўлса, *F(x)* функция шу оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади. Агар *F(x)* функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, яъни $F'(x) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у вақтда, *F(x) +C, C* – ихтиёрий ўзгармас сон,функция ҳам $\mathrm{f}(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини кўриш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг, яъни $\mathrm{C}' = 0$ бўлгани учун

$$[F(x) + C]' = F'(x) + \mathrm{C}' = f(x)$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функция *F(x)* бошланғич функцияга эга бўлса, у вақтда $f(x)$ функция *F(x)* функция билан биргаликда бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қиладиган чексиз кўп бошланғич функция, яъни

$$F(x) + C$$

кўринишдаги бошланғич функцияга эга бўлади.

Энди, агар *F(x)* функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у вақтда

$$F(x) + C$$

кўринишдаги функциялар тўплами барча бошланғич функцияларни ўз ичига олишини исбот қилайлик, яъни $\mathrm{f}(x)$ функция учун исталган бошланғич функция $F(x) + C$ кўринишидаги функциялар орасидан топилишини кўрсатайлик.

Фараз қилайлик *F(x)* ва *Ф(x)* функциялар *f(x)* функциянинг бошланғич функциялари бўлсин, яъни

$$F'(x) = f(x),$$

$$\Phi'(x) = f(x)$$

тенгликлар бажарилсин. *Ф(х)-F(x)* айирмани қарайлик. Бу айирманинг ҳосиласи нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам,

$$[\Phi(x)-F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Биламизки, функция аниқланган оралиқнинг ҳамма нуқталарида ҳосиланинг нолга тенг бўлиши функциянинг шу оралиқда ўзгармас бўлишининг етарли шартидир.Демак,

$$\Phi(x) - F(x) = C \quad \text{ёки} \quad \Phi(x) = F(x) + C,$$

бу ерда С сони ихтиёрий ўзгармас сон.

Шундай қилиб, f(x) функциянинг исталган бошланғич функцияси

F(x) + С кўринишга эга экан.

Мисоллар.

1. $y = \sin x$ функция $y = \cos x$ функция учун $(-\infty, +\infty)$ оралиқда бошланғич функция ҳисобланади, чунки

2.

$$(\sin x)' = \cos x.$$

2.Y $=\sqrt{1-x^2}$ функция у = $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функция учун ($-1 < x < 1$) оралиқда бошланғич функция ҳисобланади, чунки

$$(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аниқмас интеграл. Бошланғич функцияни аниқмас интеграл деб ҳам атаймиз ва уни

$$\int f(x)dx$$

каби ёзамиз. Бошланғич функциянинг таърифига асосан, агар C ихтиёрий ўзгармас сон бўлса, у вақтда

$$[F(x)+C]' = F'(x) + C' = f(x)$$

Шундай қилиб, $F(x) + C$ ифода ҳам $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли бўлар экан.Шунинг учун

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Шундай қилиб, битта бошланғич функцияни билган ҳолда бу бошланғич функцияга ихтиёрий ўзгармас сонни қўшиш билан бошланғич функцияларнинг ҳаммасини топамиз. Энди қандай функциялар аниқмас интегралга эга бўлади, деган савол туғилади. Бунга шундай деб жавоб беришимиз мумкин: Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда шу кесмада унинг аниқмас интеграли мавжуд бўлади. Ушбу жавобни тушунтириб беришни ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Аниқмас интегралнинг баъзи бир хоссалари:

1-хосса. Фараз қилайлик (a,b) оралиқда

$$\int f(x)dx = F(x), \quad \int \varphi(x)dx = \Phi(x)$$

интеграллар мавжуд бўлсин ва

$$\frac{d[F(x) \pm \Phi(x)]}{dx} = f(x) \pm \varphi(x)$$

муносабат ўринли бўлсин, у вақтда

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = F(x) \pm \Phi(x),$$

Яъни

$$\int[f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

муносабат ўринли бўлади.

2-хосса. Ихтиёрий ўзгармас сон k учун

$$\frac{d[kF(x)]}{dx} = k\frac{dF(x)}{dx} = kf(x)$$

муносабатнинг ўринли бўлишидан

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

муносабат келиб чиқади.

Юқорида келтирилгантаърифга кўра қуйидаги икки хосса келиб чиқади:

3-хосса. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ ёки$(\int f(x)dx)' = f(x)$);

4- хосса. $\int dF(x) = F(x) + C$ Бу хоссаларнинг сўзлар ёрдамидаги ифодасини ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Мисоллар.

1-мисол. $\int(3x^2 - 2x + 7)dx = \int 3x^2dx - \int 2xdx + \int 7dx = 3\int x^2dx - 2\int xdx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\frac{1}{2}x^2 + 7\cdot x + C = x^3 - x^2 + 7x + C.$

2-мисол. $\int\frac{x^2-x^3+1}{x^5} = \int\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right)dx = \int x^{-3}dx - \int x^{-2}dx + \int x^{-5}dx = \frac{1}{-2}x^{-2} - \quad - \frac{1}{-1}x^{-1} + \frac{1}{-4}x^{-4} + C = \frac{-2x^2+4x^3-1}{4x^4} + C.$

3-мисол. $\int(5\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=5\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{5}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$ $5\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}--3\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}-2\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{10}{3}\sqrt{x^3}$ - $\frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8}$ - $4\sqrt{x}+C$

Асосий интеграллар жадвали. Таблица тўғридан-тўғри дифференциаллаш ёрдамида осонгина текшириладиган формулаларни ўз ичига олади.

1. $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ *(м ≠ -1)* .
2. $\int\frac{dx}{x}=ln|x|+C.$
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{lna}+C$.
4. $\int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}+C$.
5. $\int sinaxdx=-\frac{1}{a}cosax+C$.
6. $\int cosaxdx=\frac{1}{a}sinax+C$.
7. $\int\frac{dx}{cos^2ax}=\frac{1}{a}tgax+c$.
8. $\int\frac{1}{sin^2ax}=-\frac{1}{a}tgax+c$.
9. $\int\frac{xdx}{x^2+a}=\frac{1}{2}ln|x^2+a\,|+c.$
10. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c.$
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\frac{x}{a}+c$.
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=ln\,|x+\sqrt{x^2+a}|$ +*C*.
13. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$.

Интеграллаш усуллари. Асосан уч хил интеграллаш усули мавжуд, улар қуйидагилардир:

***I*. Бевосита интеграллаш усули**. Бу усулда берилган интеграл асосий интеграллар жадвалида бўлмаслиги мумкин, лекин баъзи айний ўзгартиришлар натижасида жадвалдаги интеграллардан бирига келтириш мумкин.

Мисоллар.

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c.$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = arcsin\frac{x}{a} + c.$

3) $\int tgx dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{dcosx}{cosx} = -ln|cosx| + c.$

4) $\int ctgx dx = \int \frac{cosx}{sinx} = \int \frac{dsinx}{sinx} = ln|sinx| + c.$

5) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}(\int \frac{dx}{x-a} + \int \frac{dx}{x+a}) = \frac{1}{2a}(ln|x-a| - ln|x+a| + c = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c,$ чунки $[ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c]' =$ $= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$

***II*. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули**. Кўпгина ҳолларда $\int f(x)dx$ интегрални ҳисоблаш учун ўзгарувчиларни алмаштириш усули қўлланилади.Бунда x ўзгарувчини t ўзгарувчига $x = \varphi(t)$ функция ёрдамида ўтилади. Бунинг учун $x = \varphi(t)$ функциянинг $\varphi'(t)$ узлуксиз ҳосиласи ва *t=ψ(x)* тескари функциясининг мавжуд бўлиши талаб қилинади.Айтилганларга асосан

$$x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \qquad (t = \psi(x))$$

ифодаларни $\int f(x)dx$ ифодага қўямиз:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

Бу формуладан фойдаланиш $\varphi(t)$ функцияни танлашга боғлиқ . Агар $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири *Ф(t)* бўлса, қаралаётган интегрални

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \Phi(t) + c = \Phi(\varphi(x)) + C$$

Каби ҳисоблаймиз. Баъзи ҳолларда ўзгарувчини $t = \varphi(x)$ формула орқали киритиш фойда беради.

Мисоллар. 1) $\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$ (a=*const*) интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу интегралда ўзгарувчи x ни $x^2 + a^2 = t$ формула ёрдамида алмаштирамиз.Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини дифференциаллаб

$2xdx = dt$ ифодага эга бўламиз. Бу ҳосил қилинганларни берилган интегралга қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| + C$$

Энди бу формуладаги t нинг ўрнига $x^2 + a^2$ ифодасини қўйиб,

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| + C = \frac{1}{2}ln(x^2 + a^2) + C,$$

охирги натижага эга бўламиз.

2) $\int x^2(3 + 2x^3)\mathrm{d}x$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш.Бу интегралда $3 + 2x^3 = t$ алмаштириш бажарамиз.Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини дифференциаллаб: $6x^2dx = dt$ ифодага эга бўламиз.Бу ифодадан $x^2dx = \frac{1}{6}dt$ муносабатга эга бўламиз. Топилганлани берилган интегралга қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int x^2(3 + 2x^3)dx = \int t\frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}\int tdt = \frac{1}{6}t^2 + \mathrm{C}$$

энди бу ердан эски ўзгарувчига қайтсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int x^2(3+2x^3)dx=\int t\frac{1}{6}dt = \frac{1}{6}\int tdt = \frac{1}{6}t^2 + \mathrm{C} = \frac{1}{6}(3+2x^3)^2 + C$$

Изланаётган натижага эга бўламиз.

3) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $x = t^2$ алмаштириш бажарамиз. У вақтда *dx = 2tdt* ифодага эга бўлиб, бу икки ифодани берилган интегралга қўйиб:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

***III*. Бўлаклаб интеграллаш усули**. Фараз қилайлик, *u* ва *v* функциялар *x* ўзгарувчининг функциялари бўлиб, бирор (*a*,*b*) оралиқда узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функциялар бўлсин. У вақтда

$$(uv)' = uv' + vu'$$

ёки

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

ҳосил қилинган бу тенгликнинг ҳар иккала томонидан аниқмас интеграл олсак

қуйидагига эга бўламиз:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Бу формуладаги ҳар иккала интегралнинг ҳам мавжудлиги талаб қилинади. Ҳосил қилинган бу формулани дифференциаллардан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Бўлаклаб интеграллашдан мақсад шуки, $\int f(x)dx$ интегрални ҳисоблаш учун *f(x)dx* ни *u(x)* ва *v(x)dx* ларнинг кўпайтмаси шаклига шундай келтириш керакки, натижада $\int vdu$ интеграл берилган интегралга қараганда соддароқ ва осонроқ ҳисобланадиган бўлсин.

Мисоллар. 1) $\int xe^x dx$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу интегрални ҳисоблаш учун қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = e^x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Бу ҳосил қилинганлардан фойдаланиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига асосан берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2) $\int lnxdx$ интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Худди юқоридаги мисолдагидек қуйидагича ишларни бажарамиз:

$$u = lnx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx, \quad v = \int dx = x.$$

демак,

$$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + C.$$

3) $\int xcosxdx$ интеграл ҳисоблансин.
Ечиш.Одатдагидай қуйидаги ишларни амалга оширамиз:
$u = x$, $dv = cosxdx$, $du = dx$, $v = sinx$. У ҳолда

$$\int xcosxdx = xsinx - \int sinxdx = xsinx - (-cosx) + C = xsinx + cosx + C.$$

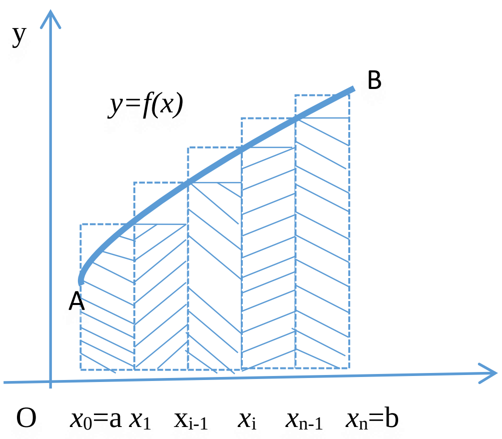
3- §. Аниқ интеграл, унинг геометрик маъноси, хоссалари. Ньютон – Лейбниц формуласи. Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Аниқ интегралнинг тадбиқлари

Эгри чизиқли трапеция юзини топиш. *f(x)* ≥ 0 функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг графиги, *Ox* ўқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган текис фигура эгри чизиқли трапеция деб аталади. –расмда *aABb* эгри чизиқли трапеция тасвирланган. 30–расмда тасвирланган *aABb* эгри чизиқли трапеция юзини топиш масалаи қўйилган бўлсин. Бу юзани топиш масаласига қуйидагича киришамиз: Бунинг учун $[a,b]$ кесмани

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўлиб ва бўлиниш нуқталаридан Оу ўққа параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, *aABb* эгри чизиқли трапецияни n та кичик эгри чизиқли трапециячаларга бўламиз (17-расм). Энди ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ ихтиёрий ξ_k нуқта оламиз. Ҳар бир эгри чизиқли трапецияда асоси $[x_{k-1}, x_k]$, баланлиги $f(\xi_k)$ бўлган тўғри тўртбурчак чизамиз.



17-расм

Бу тўғри тўртбурчакчаларнинг юзлари

$$f(\xi_k)(\xi_{k-1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

формула билан ифодаланади. Бунда $[x_{k-1}, x_k]$ сегментчанинг узунлигини қисқача

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

орқали белгилаймиз, n та тўғри тўртбурчакчалар юзларининг йиғиндиси эса

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

ифодани беради. Бу ифодани қисқача

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_n$$

каби ёзамиз. $[x_{k-1}, x_k]$ сегментчалар узунликларининг энг каттасини $\lambda = \max_{1 \le x \le n} \Delta x_k$ орқали белгилаймиз. $\lambda \to 0$ да (яъни $[a,b]$ кесмани майда бўлакларга бўлиниш сони n чексиз ўсганда) S_n ифода эгри чизиқли трапеция юзига тобора яқинлаша боради. Шунинг учун эгри чизиқли трапеция юзининг формуласи сифатида

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

формулани қабул қилиш табиийдир.

Аниқ интегралнинг таърифи. Эгри чизиқли трапеция юзасини топиш масаласида биз

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ифодани ҳосил қилдик.

Агар бу ифоданинг лимити мавжуд бўлиб, бу лимит $[a,b]$ кесманинг бўлиниш усулига ва ξ_k нуқтанинг танланишига боғлиқ бўлмаса, у вақтда бу лимит f(x) функциядан $[a,b]$ кесмада олинган аниқ интеграл дейилади ва у

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

каби белгиланади.

Бундай ҳолда *f(x)* функцияни [a,b] кесмада интегралланувчи функция деб атаймиз.Бунда *f(x)* функцияни интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ ни интеграл остидаги ифода, a сонини интегралнинг қуйи чегараси, b сонини интегралнинг юқори чегараси,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

йиғиндини эса интеграл йиғинди деб атаймиз.

Кўриниб турибдики, агар *f(x)* функция[a,b] кесмада интегралланувчи бўлса, у вақтда бу функция [a,b] кесмада чегараланган бўлади.

Қуйидаги теоремани исботсиз қабул қиламиз(бу теорема математик анализ фанининг тўла курсларида исбот қилинади) :

Теорема. агар f(x) функция[a,b] кесмада узлуксиз бўлса, у вақтда бу функция [a,b] кесмада интегралланувчи дейилади.

Аниқ интеграл тушунчасига олиб келадиган қуйидаги масалаларни келтириб ўтайлик:

1. S йўл моддий нуқтанинг T - t_0 вақтда v=v(t) тезлик билан босиб ўтган йўли бўлсин (v(t) функция $[t_0, T]$ кесмада узлуксиз). Бу йўл v(t) функциядан $[t_0, T]$ кесма бўйича олинган интегралга тенг бўлади, яъни
2.

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)dt \,.$$

2.Агар ўзгарувчи куч *F = f(x)* *Ox* ўқининг мусбат йўналиши бўйича таъсир этаётган бўлса, (*f(x)* функция [a,b] кесмада узлуксиз), у вақтда бу кучнинг *Ox* ўқнинг [a,b] кесмасда бажарган иши

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

интегралга тенг бўлади.

Масалалар ечишда баъзан

$$F = kx$$

формула билан ифодаланадиган Гук қонунидан фойдаланилади. Бу ерда F – куч, x – куч таъсир этгандаги чўзилиш ёки сиқилиш миқдори, k эса пропорционаллик коэффициенти.

3. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва манфий бўлмаса, у вақтда

$$\int_a^b f(x)dx$$

интеграл геометрик нуқтаи назардан юқоридан $y = f(x)$ функция графиги, қуйидан Ox ўқнинг $[a,b]$ кесмаси ва ён томонлардан $x = a$, $x= b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини билдиради.

Аниқ интегралнинг асосий хоссалари. Қуйида биз $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлган функцияларни қараймиз. Таърифга асосан аниқ интегралнинг қуйи ва юқори чегаралари бир-бирига тенг бўлганда унинг қийматини нолга тенг деб олинади, яъни

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \ .$$

1. Ўзгармас кўпайтувчини интеграл ишораси остидан чиқариш мумкин:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

бу ерда $c=const$ ўзгармас сон.
Ҳақиқатан ҳам, аниқ интегралнинг таърифига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx.$$

2. Йиғиндидан олинган аниқ интеграл ҳар бир қўшилувчидан олинган аниқ интеграллар йиғиндисига тенг:

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Бу формула чекли сондаги функциялар йиғиндиси учун ҳам тўғри бўлишини кўрсатиш мумкин.

3. Чегараларини алмаштириш билан аниқ интеграл ўзининг ишорасини тескарисига алмаштиради:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ушбу тенгликни исбот қилайлик. Фараз қилайлик, $a<b$ бўлсин. $[a,b]$ кесманинг Т бўлинишини олайлик. Маълумки, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ва

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = -\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_{k-1} - x_k) = -\int_a^b f(x)dx.$$

4. Агар *f(x)* функция учун $\int_a^b f(x)dx,$ $\int_a^c f(x)dx,$ $\int_c^b f(x)dx$ интеграллар мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

5.Агар *[a,b]* кесмада $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар интегралланувчи бўлиб,

$f(x) \leq \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

муносабат ҳам ўринли бўлади.

Ньютон-Лейбниц формуласи. Кўрдикки, агар $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлган функциянинг бошланғич функцияси мавжуд бўлади. Энди аниқ интеграл билан аниқмас интегнрал орасида қандай боғланиш мавжудлигини кўрайлик.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва шу кесмада $F(x)$ функция унинг бошланич функцияси бўлса, у вақтда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \qquad (*)$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. $[a,b]$ кесмани

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

кўринишида *n* та бўлакчаларга бўламиз. Лагранжнинг

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

формуласи ва $F'(x) = f(x)$ тенгликка асосан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\Delta x_1, \quad a < c_1 < x_1,$$
$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2, \quad x_1 < c_2 < x_2,$$
$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n, \quad x_{n-1} < c_n < b.$$

Бу тенгликларни қўшиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (**)$$

f(x) функция [*a*,*b*] кесмада узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Шунинг учун, (**) тенгликда λ→0 да лимитга ўтиб, (*) формулани, яъни Ньютон-Лейбниц формуласини ҳосил қиламиз.

Бу формулани буюк инглиз олими Ньютон ва машҳур немис олими Лейбниц бир-биридан бехабар ҳолда бир вақтда кашф қилганлари учун Ньютон-Лейбниц формуласи деб аталган. Бу формула аниқ интегрални ҳисоблашда қулай формуладир. Бундан ташқари, бу формула аниқ интеграл билан аниқмас интеграл орасидаги боғланишни ифодалайди.

1-мисол. $\int_0^1 2xdx = x^2|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$.

2-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = sinx|_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1 - 0 = 1.$

3-мисол. $\int_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx = 3\int_1^2 x^4dx + 2\int_1^2 x^2dx - 5\int_1^2 1dx = \frac{3}{5}x^5|_1^2 + \frac{2}{3}x^3|_1^2 - 5x|_1^2 = \frac{3}{5}(2^5 - 1) + \frac{2}{3}(2^3 - 1) - 5(2 - 1) = \frac{274}{15}$.

4-мисол. $\int_1^e lnxdx$ интеграл ҳисоблансин. Бу интегрални ҳисоблашда олдин бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланамиз, яъни $u = lnx$, $dv = dx$ деб олсак, бундан $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Шунинг учун

$$\int_1^e lnxdx = xlnx|_1^n - \int_1^e dx = (e - 0) - (e - 1) = 1$$

Аниқ интегрални ҳисоблаш усуллари. Аниқ интегрални ҳисоблашда ҳам худди аниқмас интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш каби усул қўлланилади, бунда фақат Ньютон-Лейбниц формуласига асосан чегаралар қўйилади. Фарқи аниқмас интегрални ҳисоблашда натажада бошланғич функция ҳосил бўлса, аниқ интегрални ҳисоблашда натижада сон ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлсин; $x=\varphi(t)$ функция эса $[\alpha,\beta]$ узлуксиз ҳосилага эга бўлсин, бунда $a \le \varphi(t) \le b$ ва $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

$F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлсин. У вақтда

$$F'(x) = f(x)$$

ва мураккаб функциянинг ҳосиласига асосан

$$\left(F\left(\varphi(t)\right)\right)' = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t).$$

Энди Ньютон-Лейбниц формуласини икки марта қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = F\left(\varphi(\beta)\right) - F\left(\varphi(\alpha)\right) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Шундай қилиб, аниқмас интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи исбот қилинди:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\,.$$

Мисоллар:

1-мисол. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $8-x = t$ формула ёрдамида ўгарувчини алмаштирамиз.Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини дифференциаллаб $-dx = dt$ тенгликка келамиз, бундан

$dx = -dt$ тенгликка эга бўламиз. Интегралнинг янги чегералари α ва β $8-x = t$ тенгликдан x нинг ўрнига a ва b сонларни қўйиш билан топилади. Бизнинг мисолимизда $a = 0$ ва $b=7$

Шунинг учун α = 8 – 0 = 8, β = 8 – 7 = 1.Шундай қилиб,

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int_1^8 t^{\frac{-2}{3}} dt = 3t^{\frac{1}{3}}\,|_1^8 = 3\sqrt[3]{t}\ \ |_1^8 = 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1})$$
$$= 3(2-1) = 3.$$

2-мисол. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinx\mathrm{d}x}{(1-\cos x)^2}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Қуйидагича алмаштириш ишларини бажарамиз: 1-*cosx* = *t*, у вақтда *sinxdx* = *dt*

$\alpha = 1 - cos\frac{\pi}{2} = 1$, $\beta\ = 1 - cos\pi\ = 1 - (-1)\ = 1 + 1 = 2.$ Демак,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinxdx}{(1-cosx)^2} = 2\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2\int_1^2 t^{-2}dt = -2t^{-1}|_1^2 = -\frac{2}{t}|_1^2 = -1 + 2 = 1$$

Аниқ интегрални бўлаклаб интеграллаш. [*a*,*b*] кесмада узлуксиз дифференциалланувчи $u\ =\ u(x)$ ва $v\ =\ v(x)$ функциялар берилган бўлсин. Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b (\,u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b\ (u(x)v(x)' + v(x)u'(x))dx =$$
$$\int_a^b u(x)v(x)'dx + \int_a^b v(x)u'(x))dx,$$

Бу ердан

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (\ u(x)v(x))|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

ёки бу тенгликни яна ҳам компакт кўринишда ёзиш учун $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$ тенгликларни эътиборга олиб

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

тенгликка келамиз.

Мисоллар: 1-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinxdx$ интегрални ҳисобланг.,

Ечиш. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinxdx = |x = u, dx = du, sinxdx = dv| = -xcosx|_0^{\frac{\pi}{2}} +$
$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = 0 + sinx|_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} = 1$

Кўриниб турибдики, бу мисолни ечишда сўзсиз ва қулай усулни танладик.Мисоллар ечишда бу усул қулайлик туғдиради.

2-мисол. $\int_1^2 xe^x \mathrm{d}x$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Юқоридаги мисолдагидек киришамиз:

$$\int_1^2 xe^x dx = |u{=}x,\ du{=}dx, e^x dx = dv| {=} xe^x|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (2e^2 - e) - e^x|_1^2 =$$
$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

Аниқ интегралнинг тадбиқлари :

I. **Текис фигура юзини ҳисоблаш**. Аниқ интеграл ёрдамида текис фигура юзини ҳисоблаш мумкин.Бунинг учун қуйидаги ҳолларни қарайлик:

1^0. Текис шакл $[a,b]$ кесмада мусбат қийматлар қабул қиладиган узлуксиз *f(x)* функция графиги, Оx ўқ ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлсин.

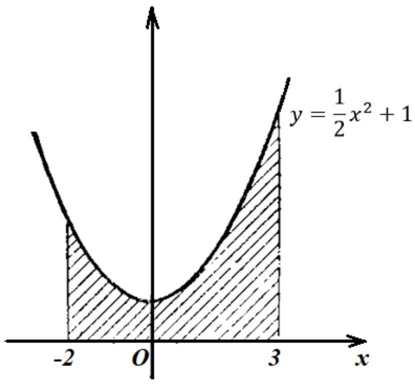
Бу ҳолда аниқ интегралнинг геометрик маъносига асосан S юзанинг сон қиймати

$$\int_a^b f(x)dx$$

Интеграл билан ифодаланадиган: f(x) функция графиги, Ox ўқ ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегераланган юзага тенг бўлади, яъни

$$S=\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (1)$$

1-мисол. у $=\frac{1}{2}x^2 + 1,\ y = 0,\ \ x = -2,\ x = 3$ чизиқлар билан чегараланган шакл юзини топинг (18-расм).



18-расм

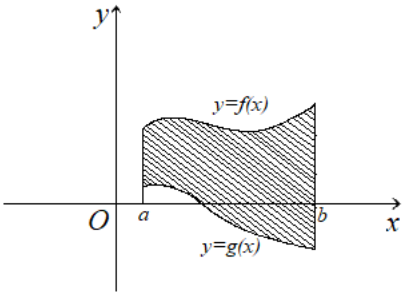
Ечиш. Тўғри бурчакли координаталар системасида ушбу шаклни чизамиз(31-расм).

(1) формулани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S=\int_{-2}^{3}(\frac{1}{2}x^2+1)dx=\left(\frac{1}{6}x^3\right)|_{-2}^{3}=\left(\frac{1}{6}\cdot 3^3+3\right)-(\frac{1}{6}((-2)^3-2)=11\frac{5}{6}\ .$$

2^0.Текис шакл $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлган *f(x)*, $g(x)$ функциялар ва $x=a,\ x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган.Бу ерда *f(x)* ва *g(x)* функциялар $[a,b]$ кесмада $f(x) \geq g(x)$ муносабатни қаноатлантиради (32-расм).

Бу ҳолда S юза (19-расм)

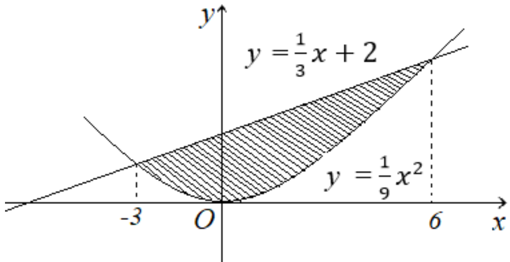


19-расм

$$S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

2-мисол. $y = \frac{1}{3}x + 2$ ва $y = \frac{1}{9}x^2$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин (20-расм).



20-расм

Ечиш. a ва b интеграллаш чегараларини

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = \frac{1}{9}x^2 \end{cases}$$

системани ечиб топамиз. Бу системадан кўриниб турибдики,

$\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{9}x^2 \leftrightarrow 3x + 18 = x^2 \rightarrow x = -3$ ва $x = 6$

Кўриниб турибдики, [-3;6] кесмада $f_1(x) = \frac{1}{3}x + 2$, $f_2(x) = \frac{1}{9}x^2$ функциялар учун $f_1(x) \geq f_2(x)$ муносабат ўринли. Демак, юқорида келтирилган

$$S = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^b (f_1(x) - f_1(x))\, dx$$

формулага асосан

$$S = \int_{-3}^{6} ((\frac{1}{3}x + 2) - \frac{1}{9}x^2)\ dx = \left(\frac{1}{6}x^2 + 2x - \frac{1}{27}x^3\right)|_{-3}^{6} = 13{,}5$$

3-мисол. Эллипснинг юзи топилсин.

Учиш.$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}$ эллипснинг параметрик тенгламаси бўлиб, бу ерда

$0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi$.

Ечиш.Эллипснинг чорак юзини топиб уни тўртга кўпайтирсак бутун эллипснинг юзи келиб чиқади:

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} bsint(-asint)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2tdt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt =$$

$$\frac{ab}{2}\left(t-\frac{sin2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

Демак,чорак қисми

$$\frac{\mathrm{S}}{4}=\frac{\mathrm{\pi ab}}{4}\ ,\mathrm{S}=\mathrm{\pi ab}\ ,$$

яъни $S=\pi ab$ га тенг экан. Бундан эса эллипснинг тўла юзи $4\pi ab$ ни ҳосил қиламиз.

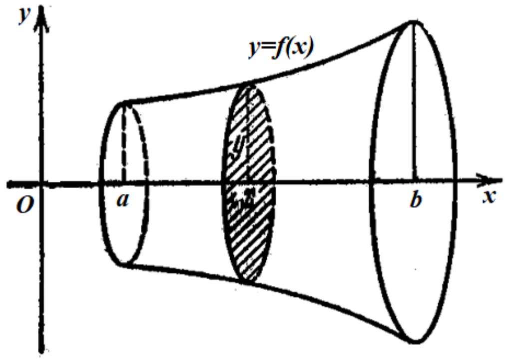
4-мисол.Текис шакл y=sin$x$, y=0, x=-$\frac{\pi}{2}$, x= π чизиқлар билан чегараланган

текис фигуранинг юзи топилсин.

Ечиш. Кўриниб турибдики $x\in[-\frac{\pi}{2},0]$ кесмада sin$x\leq 0$, $x\in[0,\pi]$ кесмада эса sin$x\geq 0$ муносабатлар ўринли бўлади. Шунинг учун,

S=-$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinxdx+\int_{0}^{\pi} sinxdx = cosx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - cosx|_{0}^{\pi} = \left(cos0-cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - (cos\pi - cos0) = (1-0)-(-1-1)=3$

II. **Айланиш жисмининг ҳажми ҳисоблаш**.Фараз қилайлик *f(x)* функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. *y=f(x)* функция,*y=0*,*x=a*,*x=b* чизиқлар билан чегараланган шаклнинг Оx ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг V ҳажмини топиш талаб этилган бўлсин (21-расм).



21-расм

Шундай қилиб, бу жисмнинг ҳар қандай кўндаланг кесими доирани ташкил этади. Бу доиранинг радиуси $|y|$ га тенг. У вақтда кесим юзаси

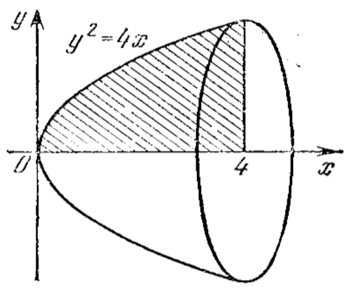
$$S(x)= \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Демак, $V=\int_a^b S(x)dx$ формулага асосан

$$V=\pi \int_a^b y^2 = \pi a \int_a^b f^2(x)dx \qquad (2)$$

формулага эга бўламиз.

1-мисол. $y^2 = 4x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 4$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин (22 -расм).

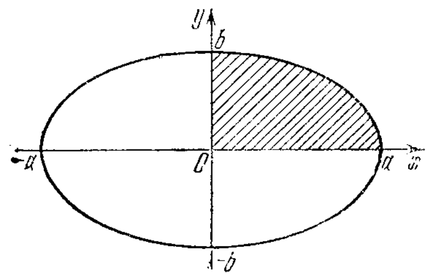


22-расм

Ечиш. Бундай жисм айланиш параболоиди деб аталади. (2) формулани тадбиқ этиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$V= \pi \int_0^4 4xdx = 2\pi x^2|_0^4 = 2\pi(16-0) = 32\pi.$$

2-мисол. Эллипсни *Ox* ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм – эллипсоиднинг ҳажмини топинг (23 -расм).



23-расм

Ечиш. Эллипснинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

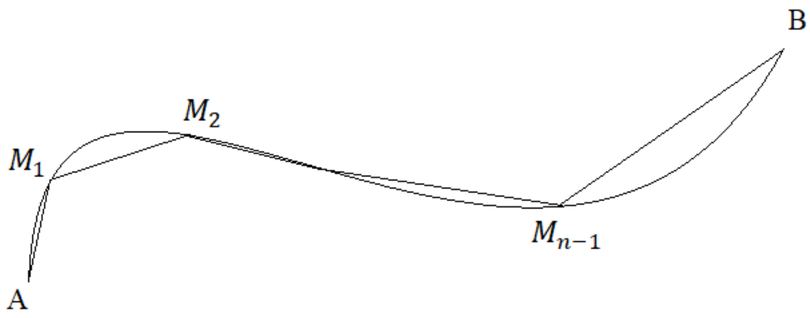
формуладан фойдаланамиз. Бу тенглама *Ox* ўқини x = - a, x = a нуқталарда кесади. Эллипснинг тенгламасидан $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ ни топамиз. Эллипснинг *OY* ўққа нисбатан симметрик эканлигидан ҳажмни o ва a орасида ҳисоблаймиз ва ҳосил бўлган сонни иккилантириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$V=2\pi a\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^{2)}dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)|_0^a=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2\ .$$

III. **Эгри чизиқнинг узунлигини ҳисоблаш**. Фараз қилайлик, *AB* силлиқ эгри чизиқ берилган бўлсин. Ёй узунлиги тушунчасини киритайлик.Унинг учун уни n та қисмга ажратайлик:

$$A=M_0,M_1,M_2,\dots\ ,M_{n-1},M_n=B.$$

Ажратилган нуқталарни ватарлар билан туташтирайлик, натижада эгри чизиқнинг ички қисмига чизилган *AB* синиқ чизиқни ҳосил қиламиз (24- расм).



24 - расм

P_n билан бу синиқ чизиқ периметрини, δ билан эса синиқ чизиқ бўлакчалари узунликларининг энг каттасини белгилаб олайлик.

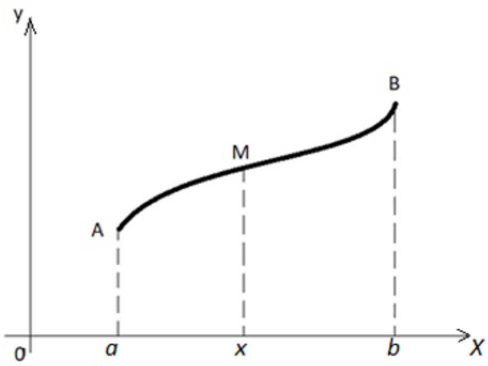
Таъриф. AB ёйнинг L узунлиги деб, синиқ чизиқ бўлакчалари сони n ни чексиз ошириб ($n\to\infty$) борганимиздаги P_n периметрнинг ҳосил қилинган ҳолатига ёки лимитига айтилади. Бунда бўлакчаларнинг энг катта узунлиги δ нолга интилади, яъни

$$L=\lim_{\delta\to 0} P_n$$

Бунда қаралаётган лимитни мавжуд ва M_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ бўлиниш нуқталарининг танланишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади .

Чекли узунликка эга бўлган эгри чизиқни тўғриланувчи эгри чизиқ деб аталади.

Фараз қилайлик, AB силлиқ эгри чизиқ $[a,b]$ кесмада аниқланган $y=f(x)$ функциянинг графиги бўлсин ва бу функция шу кесмада узлуксиз ҳосилага эга бўлсин, $[a,b]$ кесмада AB ёй тўғриланувчи ва унинг узунлиги L бўлсин. Агар бу ёй $[a,b]$ кесмада тўғриланувчи бўлса, у ҳолда бу ёй ҳар қандай $[a,x]$ $(a\leq x \leq b)$ кесмада ҳам тўғриланувчи бўлади. Бунда ҳар бир $x\in[a,b]$ қийматга AB эгри чизиқда $M(x,f(x))$ нуқта мос келади (25-расм).



25-расм

Кўриниб турибдики, AM ёйнинг узунлиги x ўзгарувчининг функцияси бўлади; уни $l(x)$, $x\in[a,b]$, орқали белгилаймиз. Математик анализ курсида $l(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (\frac{dl}{dx})^2} \qquad (*)$$

формула ёрдамида хисобланади.
(*) формуладан ёй дифференциалининг формуласини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x \qquad (**)$$

ёки

$$\mathrm{d}l = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ . \qquad (***)$$

$l(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлгани учун у шу кесмада интегралланувчи бўлади. (**) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x.$$

Ньютон-Лейбниц формуласига асосан

$$\int_a^b dl = l(x)|_a^b = l(b) - l(a).$$

Лекин $l(a)$=0 ва $l(b)$=L бўлгани учун

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\ .$$

Мисол. $y = x^2 + 2$ параболанинг O(0;0) ва A(2;6) нуқталари орасидаги ёйи узунлигини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y = (x^2+2)' = (x^2)' + 2' = 2x + 0 = 2x\ .$$

Охирги формулани қўллаб қуйидагига эга бўламиз:

$$L=\int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}dx = 2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} + \frac{1}{8}ln\,|\,x + \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}|\right)\Big|_0^2 = 2\left(\sqrt{\frac{17}{4}} + + \frac{1}{8}ln\left(2+\sqrt{\frac{17}{4}}\right) - \frac{1}{8}ln\frac{1}{2}\right) = \sqrt{17} + \frac{1}{4}ln(4+\sqrt{17}) \approx 5{,}22.$$

Агар AB эгри чизиқ параметрик тенгламалар ёрдамида берилган бўлса,яъни

x $= \varphi(t)$, $y=\psi$(t), бу ерда t – параметр у $t=t_0$ бўлганда A нуқтага мос келади; t=T бўлганда эса B нуқтага мос келади. Бу ҳолда қуйидаги формула ҳосил қилинади:

$$L=\int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Агар AB эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координаталар системасида берилган бўлса, яъни $r=r(\varphi)$, бу ерда $\varphi=\alpha$ A нуқтага мос келади; $\varphi=\beta$ эса B нуқтага мос келади. У вақтда юқорида ҳосил қилган формуладаги $(x'(t))^2 + (y'(t))^2$ ифода $t=\varphi,$ бўлганда қуйидаги кўринишни олади:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (r(\varphi)^2 + (r'(t))^2.$$

Қаралаётган ёйнинг узунлиги L эса

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi)^2 + (r'(t))^2 d\varphi$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Ушбу ҳолларга мисол ечишни ўқувчиларнинг ўзларига қолдирамиз.

Мисол. Ярим кубик парабола y=$x^{\frac{3}{2}}$ нинг координаталар бошидан абсциссаси x=5 га тенг нуқтасигача бўлган ёйининг узунлигини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз: $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. У вақтда

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x} \quad \text{ва} \quad L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

формулага асосан

$$L = \frac{1}{2}\int_0^5 \sqrt{4+9x}dx = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{9}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\,|_0^5 = (49^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{335}{27}.$$

IV боб бўйича ўз-ўзини текшириш учун саволлар:

1. Функциянинг нуқтада узлуксизлигидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчилиги келиб чиқадими?

2. Функциянинг нуқтада дифференциалланувчилигидан унинг шу нуқтада узлуксизлиги келиб чиқадими? Тушунтириб беринг.

3. Функциянинг дифференциали билан унинг орттирмаси орасида қандай фарқ бор?

4. Қандай функция дифференциалланувчи функция дейилади?

5. Функциянинг нуқтада узлуксизлигидан унинг шу нуқтада дифференциалланувчилиги келиб чиқадими?

6. Функциянинг нуқтада дифференциалланувчилигидан унинг шу нуқтада узлуксизлиги келиб чиқадими? Тушунтириб беринг.

7. Функциянинг дифференциали билан унинг орттирмаси орасида қандай фарқ бор?

8. Қандай функция дифференциалланувчи функция дейилади?

9. Аниқмас интеграл нима, сонми, функциями ёки функциялар тўпламими?

10. $F'(x) = f(x)$ тенглик нимани билдиради?

11. Аниқмас интегралнинг ҳосиласи нимага тенг?

12. Аниқмас интегралнинг дифференциали нимага тенг?

13. Қандай функциялар учун аниқмас интеграл мавжуд бўлади.

14. Аниқмас интегрални ҳисоблаш усуллари нимага керак?

15. Аниқмас интегрални ҳисоблашнинг қандай усулларини биласиз?

16. Аниқмас интеграл билан аниқ интегралнинг фарқи нимада?

17. Интеграл йиғинди нима у. Тушинтириб беринг?

18. Қандай функциялар учун аниқ интеграл мавжэуд бўлади?

19. Ньютон-Лейбниц формуласини ким кашф қилган?

20. Аниқ интегралнинг тадбиқига доир бир-иккита мисол келтиринг?

IV бобга доир машқлар:

Қуйидаги аниқмас интегралларни топинг ва дифференциаллаш ёрдамида текширинг:

1) $\int 1dx;$

2) $\int xdx;$

3) $\int x^2dx;$

4) $\int x^3dx;$

5) $\int 3xdx;$

6) $\int 4x^2dx;$

7) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx;$

8) $\int 5x^{\frac{1}{15}}\,dx;$

9) $\int \sqrt{x}dx;$

10) $\int \sqrt[3]{x^2}dx;$

11) $\int \sqrt[5]{x^4}dx;$

12) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx;$

13) $\int (x+1)dx;$

14) $\int (x^2-5)dx;$

15) $\int (x^4+5x^3-3x^2+6x-1)dx;$

16) $\int \frac{x^2-16}{x+4}dx;$

17) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx;$

18) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}};$

19; $\int 3x^2(x+2)dx;$

20) $\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx.$

21) $\int (x^2-2sinx+3e^x)dx$

22) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;$

23) $\int \sqrt[3]{5x-2}\,dx;$

24) $\int (3x+4)^{40}dx;$

25) $\int xsinxdx;$

26) $\int e^x cosxdx;$

27) $\int xe^x dx;$

28) $\int x^2 cosxdx;$

29) $\int (x^2+3)e^{-2x}dx;$

30) $\int xcosxdx.$

Қуйидаги аниқ интегралларни ҳисобланг.

31) $\int_0^3 x^2 dx;$

32) $\int_0^2 2^x dx;$

33) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx;$

34) $\int_0^{\pi} sinxdx;$

35) $\int_{-2}^{3}(2x^3+x^2-5)dx;$

36) $\int_{-2}^{2}(x^3+4x)dx;$

37) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx;$

38) $\int_0^1 \sqrt{1+t}dt;$

39) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{cos^2x};$

40) $\int_1^e lnxdx;$

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг:

41) Координаталар ўқи.x=3 тўғри чизиқ ва у=x^2+1 парабола билан;

42) Ордината ўқи,y=-2, y=3 тўғри чизиқлар ва x=$\frac{1}{2}$y^2 парабола билан;

43) y=x^2 ва $x=y^2$ параболалар билан;

44) y=x^2+1,y=$\frac{1}{2}x^2$ параболалар ва y=5 тўғри чизиқ билан;

45) $x^2+y^2=4$ доира юзини топинг.

46) $y^2=(x-1)^3$ эгри чизиқнинг A(2;-1) ва B(5;-8) нуқталари орасидапги ёйи узунлигини топинг.

47) Тенгламалари x=a(t-sint), y=a(1-cost) параметрик кўринишда берилган циклоианинг е параметр 0 дан 2π гача ўзгаргандаги ёйи узунлигини топинг.

48) x=y^2,x=1,y=0 чизиқлар билан ҳосил қилинган шаклни Оx ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

49) xy=4,x=1,x=2 ва Оx ўқи билан ҳосил қилинган шаклни Оy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган жисмнинг ҳажмини топинг.

50) y=sin$x$ функция графигининг координаталар бошидан ўнг томонда жойлашган биринчи аркининг ярмини ва у=0 тўғри чизиқ атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган жисмнинг ҳажмини топинг.

5-БОБ. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Комбинаторика элементлари

Фараз қилайлик n та ҳар хил элементдан тузилган $A=\{a_1, a_2 \dots\ a_n\}$ тўплам берилган бўлсин.

Таъриф. Ҳар хил нарсалардан тузилган ва бир-биридан шу нарсаларнинг тартиби ёки ўзи билан фарқ қилувчи тўпламлар (бирлашмалар) комбинатарика дейилади.

Биз бундан кейин комбинаторика сўзининг ўрнига унинг ўзбекча номи бўлган бирлашма сўзини ишлатамиз. Бирлашмаларни ташкил этадиган нарсалар унинг элементлари деб аталади, ва уларни $a_1, a_2 \dots\ a_n \dots$ каби белгилаймиз. Бирлашмалар уч хил бўлади, яъни ўринлаштириш, ўрин алмаштириш, группалаш.

Таъриф. n та элементдан r тадан ўринлаштириш деб шундай бирлашмаларга айтиладики, уларнинг ҳар бирида берилган n та элементдан r элемент олинган бўлиб, улар бир-биридан элементлари ёки элементларининг тартиби билан фарқ қилади ва уни биз A_n^r каби белгилаймиз (ўринлаштириш – “arrahgument” деган французча сўздан олинган). n та $a_1, a_2 \dots\ a_n$ элементлар берилган бўлсин. Биттадан тузилган ·

$$A_n^1 = 1$$

каби ёзилади. Иккита элементдан , яъни a_1, a_2 элементлардан ўринлаштиришлар ҳосил қилиш учун a_1 нинг ёнига қолган $n-1$ та элемент бирлаштирилади ва

$$A_n^2 = n(n-1)$$

каби ҳисобланади; худди шунга ўхшаш $a_1, a_2\ a_3$ элементлардан тузилган ўринлаштиришларни

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2)$$

каби ҳисоблаймиз ва ҳоказо n элементдан r тадан олинган ўринлаштиришларни эса юқоридаги кўриниб қолган қонуниятга асосан

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(r-1)] = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$$

формула ёрдамида ҳисоблаймиз.

Мисол. a, b, c элементлардан 2 тадан ўринлаштиришлар сонини топинг.

Ечиш. Таърифга асосан бу ўринлаштиришлар: ab, ac, bc, ca, ba, cb бўлади, 6 га тенг экан. $A_n^2 = n(n-1)$ формулага асосан ҳам худди шу сон ҳосил қилинади, яъни

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6 .$$

Таъриф. Фақат элементларининг тартиби билангина фарқ қилувчи (r=n) ўринлаштиришлар ўрин алмаштириш дейилади.

n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонини P_n билан белгилаймиз (ўрин алмаштириш – “permutation” деган французча сўздан олинган). n та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сони

$$p_n = n\cdot(n\text{-}1)(n\text{-}2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = n!$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Бу формулани ўрин алмаштиришлар сонини топиш формуласи дейилади.

Изоҳ. *n!* 1 дан n гача бўлган натурал сонлар кўпайтмаси бўлиб,”эн факториал” деб ўқилади.

Мисол. 8 кишини неча хил усул билан ўринларини алмаштириб жойлаштириш мумкин.

Ечиш. Ўрин алмаштиришлар сонини топиш формуласига асосан

$$P_8 = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320 ,$$

Яъни, 8 кишини 40320 усул билан ўринларини алмаштириб жойлаштириш мумкин.

Таъриф. Группалашлар деб n та элементдан r тадан тузилган ва бир-биридан энг камида битта элемаент билан фарқ қиладиган ўринлаштиришларга айтилади.

Группа-группа қилиб ўринлаштиришлар сони

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{n!}$$

формула ёрдамида топилади.

Мисол. Ҳеч бир учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган 10 та нуқтадан нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Ечиш. Ўринлаштиришлар формуласига асосан

$$C_{10}^2 = \frac{10\cdot9}{2} = 45.$$

2-§. Тажриба ва ҳодисалар ҳақида қисқача маълумот

Тасодифий ҳодисалар ва улар тўғрисидаги қонунларни ўрганиш эҳтимоллар назариясининг предмети бўлиб ҳисобланади. Тажриба ва ҳодисалар эҳтимоллар назариясининг предмети бўлиб ҳисобланади.

Бирор бир ҳодисанинг рўй бериши учун керак бўладиган шартлар мажмуасига тажриба деб атаймиз. Юқоридаги айтилганларни мисолларда кўрайлик:

1-мисол. Танга ташлаш масаласида танга ташлаш тажриба бўлса, танга ташланганда танганинг герб ёки рақам томионининг тушиши ҳодиса бўлади.

2-мисол. Мишенга ўқ отилди – бу ҳодиса, ўқнинг мишенга тегиш ёки тегмаслиги эса ҳодиса бўлади.

3- мисол. Қопда рангли шарлар бор. Қопдан битта шар олинди. Қопдан шарнинг олиниши – тажриба. Қандай рангдаги шарнинг чиқиши – ҳодиса.

Тасодифий ҳодиса деб, тажриба давомида рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳодисага айтилади. Биз бундан кейин “тасодифий ҳодиса” деган иборани қисқача қилиб ҳодиса деб талаффуз қиламиз.

4-мисол. Ҳар бир томонига олтигача бўлган рақам ёзилган кубик ташланди. Масалан, тўрт рақамининг (тўрт очко) чиқиши тасодифий ҳодиса ҳисобланади.

5-мисол. Қопда оқ ва қора шарлар бор. Қопдан бир уринишда иккита шар олинди. Бу шарларнинг оқ чиқиши тасодифий ҳодиса ҳисобланади.
Ишончли ҳодиса ёки рўй бериши мумкин бўлган ҳодиса деб, амалга оширилган тажрибада албатта рўй берадиган ходисага айтилади.

6-мисол. 4-мисолдаги кубик ташланди дейлик. Олти очкодан кўп бўлмаган рақамларнинг чиқиши ишончли ҳодиса бўлади.

Рўй бериши мумкин бўлмайдиган ҳодиса деб, ўтказилган тажрибада рўй бермайдиган ҳодисага айтилади.

7-мисол. Томонларига олтигача рақам ёзилган кубик ташланди. Ўн рақам (очко)нинг чиқиш ҳодисаси рўй бермайдиган ҳодиса бўлади.

8-мисол. Тош осмонга отилди. Бу тошнинг ерга қайтиб тушмаслик ҳодисаси рўй бериши мумкин бўлмайдиган ҳодисадир.

Тасодифий ҳодисалар лотин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, ...ҳарфларнинг бири билан белгиланади.Масалан, мишенга қарата ўқ отишда ўқнинг мишенга тегиш ҳодисасини A ҳодиса деб белгилашимиз мумкин. Тангани ташлаганда герб томоннинг тушиши ҳодисасини B ҳодиса деб белгилашитмиз мумкин.

Рўй бериши мумкин бўлган ҳодисаларни U ҳарфи билан, рўй бермайдиган ҳодисаларни эса V ҳарфи билан белгилаймиз.

Шу нарсани қайд этишимиз мумкинки, ҳар қандай тасодифий ҳодиса бир нечта сабабларнинг натижаси бўлиши мумкин. Масалан, танга ташлагандаги герб ёки рақамнинг тушиш ҳодисаси бир нечта сабабларга боғлиқ бўлади, яъни танганинг шаклига, сирғанувчанлиги ва шунга ўхшаш кўпгина сабабларга боғлиқ бўлади. Ўқ отишда ўқнинг мишенга тегиш ёки тегмаслиги мишен орасидаги масофага, ўқнинг оғирлигига, йўналишига ҳамда шамолнинг қаршилигига ва шунга ўхшаш бир нечта сабабларга боғлиқ бўлади. Шу муносабат билан ягона ҳодисанинг олдиндан рўй бериш ёки рўй бермаслигини олдиндан айтиб бўлмайди. Акс ҳолда кўп марта такрорланадиган ҳодисаларни қарашга тўғри келади. Эҳтимоллар назарияси фанида шу нарса аниқланганки, бир жинсли тасодифий ҳодисалар маълум бир аниқланган қонуниятларга бўйсунар экан. Бундай қонуниятлар билан эҳтимоллар назарияси фани шуғулланади.

3-§. Тасодифий ҳодисаларнинг турлари

Бизни ўраб турган осмонимиз, Ер ва табиатда турли хил ҳодисалар рўй бериб туради.

Биз эса бу ҳодисалар ичра бу жараёнда иштирок этамиз. Табиийки, онгли жонзот – одам бўлганимиз учун рўй бераётган ҳодисаларни кузатамиз ва ўз муносабатимизни билдирамиз.

Табиатда ёки, айтайлик, ишлаб чиқаришда шундай ҳодисалар бўладики, унинг рўй беришини олдиндан айтиб беришимиз мумкин.Масалан, об-ҳавонинг 10 кун ичида қандай бўлишини олдиндан айтиб беришимиз мумкин ва ҳоказо. Лекин бизни ўраб турган оламда – табиатда шундай ҳодисалар бўладики, биз уни олдиндан айтиб бера олмаймиз.Шунинг учун биз бундай ҳодисаларни тасодифан рўй берадиган ҳодисалар – тасодифий ҳодисалар деб атаймиз. Масалан, лотерия ўйинида ютуқ чиқиши, бир марта отилган ўқнинг нишонга тегиш ёки тегмаслиги каби кўплаб тасодифий ҳодисаларни кузатишимиз мумкин. Ҳодисалар жуда кўп. Шу нуқтаи назаридан алоҳида олинган ҳодиса эмас,етарлича кўп оммавий характерга эга ҳодисаларнинг умумий қонуниятларини ўрганиш муҳим. Масалан, бирор бир ишлаб чиқариш корхонаси учун битта-иккита буюм эмас, балки кўплаб тайёрланган буюмлардан қанчаси яроқли, қанчаси яроқсиз бўлишини, катта-катта майдонлардаги экилган уруғларнинг бир ёки бир нечтаси эмас, балки экиннинг қанча қисми
Униб чиқишини билиш муҳим.

Юқорида кўрсатилганидек, аниқ бир шартлар қўйилиб, сифатини текшириш,содир бўлиш-бўлмаслигини синаб ҳисоблаб кўриш, ўйин ўтказиш, ўқ отиш ва ҳоказолар қисқача тажриба ўтказилди, синаб кўрилди дейилади. Демак, тажриба натижаси ҳодиса дейилади.Катта ҳажмдаги масалаларни ечишда маълум шартлар қўйилиб,бир хил тажриба, синашлар ўтказилади ва уларнинг натижалари ўрганилади. Ўтказиладиган тажрибалар сони мумкин қадар кўпроқ бўлиши керак. Шундай бўлгандагина олинган натижаларнинг ўртача қиймати ҳақиқатга яқин бўлади.

Ҳодисалар уч хил бўлади: рўй бериши мумкин бўлган,яъни муқаррар бўлган ҳодиса, рўй бермайдиган ҳодиса ва тасодифий ҳодисалар. Келинглар танга ташлаш масаласини кўриб чиқайлик: тангани бир марта ташлаганда унинг бир томони билан тушиши аниқ, бир вақтда ҳам рақамли, ҳам гербли тарафининг тушиши рўй бермайдиган ҳодиса бўлади. Қайси томони билан тушишини эса олдиндан айтиб бўлмайди, негаки, тасодифан гербли томони билан тушиши мумкин. Бу ҳол ҳам тасодифий. Физика фани курсидан маълумки, одатдаги атмосфера босими 760 мм симоб устунига тенг.Ана шундай шароитда 100^0 C иссиқликда(бу шарт) сув қайнайди(бу ҳодиса). Агарда сувга турли хил аралашмалар қўшилган бўлса, у вақтда кўрсатилган шартларда сув қайнамаслиги мумкин. Математика фанининг тасодифий ҳодисаларни ўрганадиган қисми эҳтимолллар назарияси деб аталади.

Фараз қилайлик бир нечта тажрибалар ўтказилган бўлсин ва бу тажрибаларнинг ўтказилиши давомида A_1 , A_2 , ... , A_n ҳодисаларнинг рўй бериши мумкин бўлсин.

A_1 , A_2 , ... , A_n ҳодисаларни биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб атаймиз, агар битта ҳодисанинг рўй бериши иккинчи бир ҳодисанинг рўй беришини инкор этса.

1-мисол. Қутида бир нечта стандарт ва стандарт бўлмаган детальлар бор. Қутидан битта детал олайлик. A_1 – ҳодисада “стандарт детал чиққан бўлсин”, A_2 – ҳодисада эса “стандарт бўлмаган детал чиққан бўлсин”.Бу ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлади.

2-мисол. Ўйин суяги ташланган бўлсин. A_1 – ҳодиса “икки очко чиқиш ҳодисаси”, A_2 – ҳодиса эса “жуфт очко чиқиш ҳодисаси” бўлсин. Бу ҳодисалар биргаликдаги ҳодисалар бўлади, чунки A_1 ҳодисанинг рўй бериши A_2 ҳодисанинг рўй беришини инкор этмайди.

A_1 , A_2 ... A_n ҳодисалар тенг ҳуқуқли рўй бериши мумкин бўлган ҳодисалар дейилади, агар ҳар бир тажрибага қўйиладиган шартлар ҳар бирининг рўй бериши учун бир хил имконият туғдирса.

3-мисол. Ўйин суягини ташлаганда бу ёки у очконинг чиқиши тенг ҳуқуқли ҳодисалар бўлади, чунки ўйин суяги бир жинсли материаллардан тайёрланган ва қатъий симметрик формага эга қилиб тайёрланади.

4-мисол. Симметрик тангани ҳавода айлантириб ташлаганда рақам ёки герб томонининг тушиши тенг ҳуқуқли ҳодиса бўлади.

A_1 , A_2 , ... , A_n ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади деймиз, агар ўтказилган тажриба натижасида ҳодисаларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси рўй берса.

5-мисол. Халтада 1,2,3 рақамлари билан номерланган учта оқ шар ва 1,2,3,4,5 рақамлари билан номерланган бешта шар бор.Халтачадан битта шар олинди:

A_1 - “1 рақамли шарнинг чиқиши”,

A_2 - “2 рақамли шарнинг чиқиши”,

A_3 - “3 рақамли шарнинг чиқиши”,

A_4 - “4 рақамли шарнинг чиқиши”,

A_5 - “5 рақамли шарнинг чиқиши”

Ҳодисалари ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади.

Биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группаси мухим роль ўйнайди, яъни бундай ҳодисаларнинг группасида берилган тажрибалар натижасида группанинг албатта битта ва фақат битта ҳодисаси рўй беради.

6-мисол. Ўйин суягини ташлаганда қуйидаги ҳодисаларнинг чиқиши мумкин:

A_1 - “битта очконинг чиқиши”,

A_2 - “икки очконинг чиқиши”,

A_3 - “уч очконинг чиқиши”,

A_4 - “тўрт очконинг чиқиши”,

A_5 - “беш очконинг чиқиши”,

A_6 - “олти очконинг чиқиши”.

Бу ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади.

Иккита тасодифий ҳодисани бир-бирига қарама-қарши ҳодиса деймиз, агар улардан бири фақат ва фақат бошқаси рўй бермаганда рўй берса.

A ҳодисага қарама-қарши ҳодисани $\bar{A}$ билан белгилаймиз ва $\bar{A}$ ни A эмас деб ўқиймиз

7-мисол. Мишенга қараб ўқ отганда ўқнинг нишонга тегиш ёки тегмаслиги қарама-қарши ҳодисалар бўлади. Агар A нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, $\bar{A}$, ҳодиса A ҳодисага қарама-қарши ҳодиса бўлади.

8-мисол. Ўйин суягини ташлаганда жуфт очконинг чиқиши ҳодисаси тоқ очко чиқиш ҳодисасига қарама-қарши ҳодиса бўлади.

Кўриниб турибдики, қарама-қарши ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади.

Шу нарсани қайд қилишимиз керакки, ҳар қандай тасодифий ҳодиса бирор тўплам кўринишида ифодаланиши мумкин. Бу тушунчани аниқ мисолларда қуйидагича тушунтиришимиз мумкин.

9-мисол. Ўйин суягини ташлашда узлуксиз равишда қуйидаги A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 ҳодисалар рўй берсин.Бу ҳодисаларнинг ҳар бирини элементар ҳодиса деб атаймиз. Бу A_i (i=1,2,3,4,5,6) элементар ҳодисалар элементар ҳодисаларнинг тўпламини ташкил этади дейилади ва у $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ каби ёзилади.

Кўриниб турибдики, агар:

1) B ҳодиса деб, “жуфт очколарнинг пайдо бўлиши”;
2) C ҳодиса деб, “уч очкодан катта бўлмаган очколарнинг пайдо бўлиши”;
3) D ҳодиса деб, “учга бўлинадиган рақамли очколарнинг пайдо бўлиши” деб

олсак, мос равишда , бу тўпламларни мос равишда $B = \{A_2, A_4, A_6\}$, $C = \{A_1, A_2, A_3\}$, $D = \{A_3, A_6\}$ каби ифодалаймиз ва ҳоказо.

Бу ерда B, C ва D тўпламларнинг A элементар ҳодисалар тўпламининг қисм тўпламлари эканлигини кўришимиз қийин эмас.Шундай қилиб, ҳар қандай тасодифий ҳодиса барча элементар ҳодисалар тўпламининг қисм тўплами сифатида ифодаланиши мумкин.

Энди эҳтимолликни бевосита ҳисоблаш формуласини кўриб чиқайлик: Тажриба ўтказилаётган жараёнда рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар сони n та, рўй бериши мумкин бўлган A ҳодиса m марта рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (4.2.1)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Мисол. Куб бир марта ташланса , у тасодифан фақат бир ёғи билан тушади, икки ёғи билан ҳеч қачон тушмайди, яъни A_k, k=1,2,3,4,5,6 элементар ҳодисалар жуфт-жуфти билан биргаликда рўй бермайди, яъни $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Демак,

$$U = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6,$$

яъни U тўплам ё и A_1, ё A_2, ё A_3, ё A_4, ё A_5, ё A_6 рўй бериши мумкиг бўлган жами n=6 та тенг имкониятли ҳодисалар тўпламидан иборат. Ҳар бир элементар ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги бир хил, яъни

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6} \; .$$

Эҳтимоллар назарияси фан сифатида XVII аср ўрталаридан бошлаб юзага келди. Бу фаннинг ривож топишида дунёвий олимлардан Г.Гюйгенс, Б.Паскаль, Ферма, Якоб Бернулли, Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон, П.Г.Чебешев, А.Н.Колмогоров, шулар қаторида , Ўзбекистонлик буюк олим С.Ҳ.Сирожиддиновларнинг хизматлари ҳам жуда каттадир.

4-§. Эҳтимолликлар устида амаллар

Эҳтимолликларни қўшиш. Иккита биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

(1) Формула чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир, яъни

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (2)$$

Натижа. А ҳодиса билан А ҳодисага қарама-қарўлган $\overline{\mathrm{A}}$ ҳодиса эҳтимолликлари йиғиндиси бирга тенг, яъни

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad (3)$$

Мисол. Қопда 10 та шар бор. Улардан 3 таси қизил, 5 таси кўк, 2 таси оқ. Қопдан битта шар олганда бу шарнинг рангли чиқишининг эҳтимоллиги нечага тенг?

Ечиш. Қизил шарнинг чиқиш эҳтимоллиги $P(A)=\frac{3}{10}$ га тенг, кўк шарнинг чиқиш эҳтимоллиги $\mathrm{P(B)} = \frac{5}{10}$ га тенг. А ва В ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлганлиги учун юқоридаги таърифга асосан

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Эҳтимолликларни кўпайтириш.

Таъриф. А ва В ҳодисалар берилган бўлсин. Бу ҳодисаларнинг ҳар бирининг рўй бериши бошқа бир ҳодисанинг рўй беришига ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса А ва В ҳодисаларни боғлиқмас ҳодисалар деймиз. Акс ҳолда бу ҳодисалар боғлиқ ҳодисалар дейилади. Худди шундай бир нечта $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots \mathrm{A}_k$ ҳодисаларнинг мажмуаси боғлиқмас ҳодисалар мажмуасини ташкил этади дейилади, агар бу ҳодисалардан ихтиёрий бирининг рўй бериш эҳтимоллиги бошқа бир ҳодисанинг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса.

1-мисол. Қопда иккита оқ ва иккита қора шар бор. Қопдан шар олганда А ҳодиса оқ шар чиқиш ҳодисаси бўлсин. Демак кўриниб турибдики, $P(A)=\frac{1}{2}$. Бу биринчи тажрибадан кейин қопдан олинган шар қайтариб қопга солиб қўйилди ҳамда қопнинг оғзини бир неча марта пастга ва юқорига қаратиб шарлар аралаштирилди ва яна қопдан битта шар олинди. Иккинчи тажрибада олинган шар яна оқ чиқди, бунинг ҳам эҳтимоллиги $P(B)=\frac{1}{2}$, яъни А ва В ҳодисалар боғлиқмас ҳодисалардир.

Энди биринчи тажрида қопдан олинган оқ шар қайта қопга солинмасин. У вақтда агар А ҳодиса рўй берса, яъни биринчи тажрибада оқ шар чиққан бўлса, у вақтда В ҳодисанинг эҳтимоллиги камаяди – $P(B)=\frac{1}{3}$; агар биринчи тажрибада қора шар чиққан бўлсин, у вақтда В ҳодисанинг эҳтимоллиги ошади – $P(B)=\frac{2}{3}$.Бу ҳолда В ҳодисанинг эҳтимоллиги А ҳодисанинг рўй беришига ёки рўй бермаслигига боғлиқ, A ва B ҳодисалар боғлиқ ҳодисалардир.

Энди эса А ва В ҳодисалар боғлиқ ҳодисалар бўлган ҳолни қарайлик.

Таъриф. В ҳодисанинг шартли эҳтимоллиги деб, А ҳодисанинг рўй бериши бошланди деган шартда ҳисобланадиган эҳтимолига айтилади ва уни $\mathrm{P_A(B)}$ ёки Р(В/А) каби белгиланади. Шундай қилиб, 1-мисолда $\mathrm{P_A(B)} = \frac{1}{3}$ экани маълум бўлди. Демак, юқоридагилардан келиб чиққан ҳолда, агар А ва В ҳодисалар боғлиқмас ҳодисалар бўлса,

$$P_A(B) = P(B)$$

муносабатнинг ўринли эканлигини англаб етамиз.

Таъриф. Бир-бирига боғлиқ бўлган иккита A ва B ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги деб, бу ҳодисалардан бирининг эҳтимоллигини иккинчисининг шартли эҳтимоллигига кўпаймасига айтилади, яъни

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B)\,. \qquad (4)$$

Изоҳ. (4) формулани BA ҳодисага тадбиқ этиб,

$$P(BA) = P(B)P_B(A)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Чунки АВ=ВА муносабатнинг тўғри эканлигидан қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)\quad . \qquad (5)$$

2-мисол. 1-мисолдаги биринчи тажрибада олинган шарнинг қайтариб қопга солинмайдиган ҳолни қарайлик. Қуйидагича навбатдаги саволни қўяйлик: қопдан икки марта шар олганимизда ҳам ҳар сафар оқ шар чиқишининг эҳтимоллиги нечага тенг?

(4) формулага асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$P(AB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Таъриф. Иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган A ва B ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимолдлиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \qquad (6)$$

Иккита биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш. *А* ва *В* биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги *А* ва *В* ҳодисалар эҳтимолликлари йиғиндисидан бу иккита ҳодиса кўпайтмасининг эҳтимоллигининг айрилганига тенг, яъни

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB) . \qquad (7)$$

Изоҳ. Агар *А* ва *В* ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлса, у вақтда бук ҳодисаларнинг *АВ* кўпайтмаси мумкин бўлмайдиган ҳодиса бўлади, демак, $P(AB)=0$, яъни (1) формула (7) формуланинг хусусий ҳолига айланиб қолади.

Мисол. Иккита қурол мишенга ўқ отилмоқда.Биринчи қуролдан отилган ўқнинг мишенга тегиш эҳтимоли $P(A)=0,7$ га тенг, иккинчи қуролдан отилган ўқнинг мишенга тегиш эҳтимоли $P(B)=0,8$ га тенг. Бир вақтда иккита қуролдан ҳам ўқ отилганда . Ҳеч бўлмаганда битта қуролдан отилган ўқнинг мишенга тегиш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Кўриниб турибдики, *А* ва *В* ҳодисалар биргаликдаги ҳодисалар шунинг билан биргаликда боғлиқ бўлмаган ҳодисалардир. Шунинг учун

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB) = 0,7+0,8 - 0,7 \cdot 0,8=0,94 .$$

Тўла эҳтимоллик формуласи. Жуфт-жуфти билан тўла группа ҳосил қиладиган биргаликда бўлмаган n та $B_1, B_2, \dots , B_n$ ҳодисалардан бир жуфти рўй беради деган шартда А ҳодиса рўй берсин. $B_1, B_2, \dots , B_n$ ҳодисаларни А ҳодиса учун гипотеза деб атаймиз. У вақтда

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \cdots + P(B_n)P_{B_n}(A). \qquad (8)$$

Бу формула тўла эҳтимоллик формуласи дейилади.

Ҳақиқатда $B_1, B_2, \dots , B_n$ ҳодисалардан бири рўй бера бошлагандагина деган шартда А ҳодиса рўй бериши мумкин, яъни $A = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA$

$$A = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA$$

Бу ерда $B_1, B_2, \dots , B_n$; $B_1A, B_2A, \dots, B_nA$ ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалардир. Шунинг учун эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш қоидаларига асосан қуйидагича амалларни бажариб (8) формулага келамиз:

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\cdots+P(B_nA)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\cdots+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

бу ерда

$$P(B_1)+P(B_2)+\cdots+P(B_n)=1.$$

Мисол. Ўқитувчи имтиҳон қабул қилиши учун 50 та масалани тайёрлади: 20 та масала дифференциал ҳисобдан, 30 та масала интеграл ҳисобдан. Талаба масалалардан таваккалига олган биринчи масалани ечиши керак. Агар талаба дифференциал ҳисобдан 18 та масалани, интеграл ҳисобдан 15 та масалани еча олса, биринчи олган масаласини ечиш эҳтимоллиги нечага тенг?

Ечиш. Дифференциал ҳисобдан (B_1 ҳодиса) олинган масалани ечиш эҳтимоли

$P(B_1)=0{,}4$; интеграл ҳисобдан (B_2 ҳодиса) олинган масалани ечиш эҳтимоли

$P(B_2)=0{,}6$. Агар А ҳодиса масаланинг ечилганлигини билдирса, у вақтда

$B_1(A)=0{,}9; P_{B_2}(A)=0{,}5$. Энди эса (8) формулага асосан қуйидагини топамиз:

$P(A)=0{,}4\cdot0{,}9+0{,}6\cdot0{,}5=0{,}66$.

Байес формуласи. Фараз қилайлик, А ҳодиса ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этадиган, биргаликда бўлмаган $B_1, B_2, \dots, B_n$ ҳодисаларнинг(гипотезаларнинг) бири рўй бериши шартидагина рўй бериши мумкин бўлсин. Агар А ҳодиса рўй берган бўлса, у ҳолда гипотезаларнинг эҳтимолларини ушбу Бейес формулалари ёрдамида қайта ҳисоблаш мумкин:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}\ , i=1,2,\dots,n,$$

бу ерда

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\cdots+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Мисол. Иккита завод бир хил детальлар ишлаб чиқаради, бу деталлар кейин умумий конвейерга ўтади. Биринчи заводнинг унумдорлиги иккинчи заводнинг унумдорлигидан икки марта кўп. Биринчи завод ўрта ҳисобда детальларнинг 60 фоизини, иккинчи завод эса ўртача ҳисобда детальларнинг 84 фоизини аъло сифат билан ишлаб чиқаради. Конвейердан таваккалига олинган деталь аъло сифатли бўлиб чиқди. Бу детальни биринчи завод ишлаб чиқарганлиги эҳтимолини топинг.

Ечиш. А орқали деталь аъло сифатли бўлиши ҳодисасини белгилаймиз. Бу ерда иккита тахмин (гипотеза) қилиш мумкин: B_1 детальни биринчи завод ишлаб чиқарган ва, демак,

$$P(B_1)=\frac{2}{3}$$

(чунки биринчи завод иккинчи заводга қараганда икки марта кўп деталь ишлаб читқаради);

B_2 детални иккинчи завод ишлаб чиқарган ва, демак,

$$P(B_2)=\frac{1}{3}.$$

Агар детальни биринчи завод ишлаб чиқарган бўлса, деталь аъло сифатли деталь бўлиши учун А ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P_{B_1}(A)=0{,}6\ .$$

Агар детальни иккинчи завод ишлаб чиқарган бўлса, деталь аъло сифатли бўлиши учун А ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P_{B_2}(A)=0{,}84.$$

Таваккалига олинган деталнинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли тўла эҳтимол формуласига кўра

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Олинган аъло сифатли детални биринчи завод ишлаб чиқарган бўлиш эҳтимоли Байес формуласига кўра

$$P_A(B) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Энди эҳтимолликнинг геометрик таърифини кўриб чиқайлик. Мисол учун квадратга ташланган нуқтанинг унга ички чизилган доирага тасодифан тушиш эҳтимоллигини топиш масаласини қарайлик. Бундай ҳолларда масалани ечиш учун эҳтимолликнинг геометрик таърифидан фойдаланилади. Уни қуйидагича таърифлаймиз: бирор кесмага ёки юзага ёки ҳажмга эга бўлган бирор геометрик шакл ичига нуқта тасодифан ташланган бўлсин. Шу нуқтқ кесманинг (геометрик шаклнинг) бирор қисмига тушиш эҳтимоллиги деб, қисм узунлигининг (юзининг, ҳажмининг) кесма узунлигига (шакл юзига, ҳажмига) нисбатига айтилади. Агар қисм бир неча бўлаклардан иборат бўлса, бу бўлаклар узунликларининг (юзларининг, ҳажмларининг) йиғиндиси олинади. Масалан: 1) Нуқтанинг берилган геометрик шакли ичига тушиш эҳтимоллиги 1 га тенг, унинг қисми учун эса бу эҳтимоллик 1 дан кичик бўлади. 2) Агар X ва Y қисмлар умумий нуқталарга эга бўлмаса (кесишмаса), $P(X \cup Y) = P(X) \cup P(Y)$ бўлади. Шунингдек, қўшиш ва кўпайтириш, тўла эҳтимоллик ва Байес формулалари геометрик эҳтимоллик учун ҳам ўринли бўлади.

Мисол. Радиуси R бўлган доира ичига радиуси r, бўлган кичик доира чизилган. Катта доирага тасодифан ташланган нуқтанинг кичик доирага тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A – “тасодифан танланган нуқта кичик доирага тушди” ҳодисасининг эҳтимоллиги кичик ва катта доиралар юзлари нисбатига тенг:

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 .$$

5-§. Математик статистика элементлари

Бошланич тушунчалар. Математик статистика – бу математиканинг шундай бўлимидирки, унда илмий асосланган натижалар ва ечимларни ҳосил қилиш учун статистик маълумотларни қайта ишлаш ва синфларга ажратишнинг умумий методлари ўрганилади. “Статистика” сўзи лотинчадан олинган бўлиб, status – ҳолат деган маънони билдиради.

Табиатда кузатиш, тажриба ёки синаш натижасида бирор текширилаётган объект ҳақида кўпгина маълумотлар йиғиш мумкин. Лекин эришилган бу маълумотлар рўй бераётган ҳодисаларда қатнашаётган объектнинг табиатини тўла очиб бера олмайди.Шунинг учун бир хил шароит ва шартларда кўплаб такрор-такрор тажрибалар ўтказилиши мақсадга мувофиқ бўлади. Шундан кейин эса топилган натижаларнинг ўртача қиймати ҳисобланади. Бу ўртача қийматнинг ҳақиқатга қанчалик яқин эканлигини аниқлаш учун объектдаги айрим белгиларнинг боғлиқлик ва ўзгарувчанлик даражаси ҳисобга олинади.

Математик статистика фанидан физика, техника, кимё, биология, астрономия, иқтисодиёт, муҳандислик каби кўплаб соҳаларда мавжуд миқдорий боғланишларнинг ифодаларини тузишда фойдаланилади. Бунда математик статистика фанининг қўйилган масалани ечиш жараёнидаги ҳисоблашларда эҳтимоллар назарияси кенг қўлланилади.

Бош ва танланма тўпламлар. x ўзгарувчи миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари тўплами бош тўплам дейилади.Бош тўпламдан ихтиёрий тартибда ажратиб олинган n та қийматдан иборат тўпламни эса танланма тўплам деб аталади.

Кўпгина тажрибаларда олинган маълумотларнинг бош тўплами ва танланманинг ўртача арифметик қиймати ҳақиқатда бир хил бўлади.

Математик статистиканинг асосий масалаларидан бири мос параметрларни танлаш ёрдамида тасодифий миқдорлар бош тўпламидаги параметрларни баҳолашдир.

Танланманинг статистик тақсимоти. Танланманинг статистик тақсимоти деб, вариацион қаторнинг x_i вариантлари ва уларга мос n_i частоталар (барча частоталар йиғиндиси танланманинг ҳажми n га тенг) ёки w_i нисбий частоталар рўйхатига (барча нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг) айтилади.

X (белгининг) бош тўпламнинг миқдорий хусусиятини ўрганиш учун ундан n ҳажмли $x_1, x_2, \dots, x_n$ танланма олинган бўлсин. Бу кетма-кетлик бош тўпламнинг вариантaлари дейилади. Агар бу қатор, яъни варианта ўсиб бориш тартибидаги варианта бўлса, бу кетма-кетликни вариацион қатор деймиз.

Танланманинг статистик оралиқлар кетма-кетлиги ва уларга мос частоталар кўринишида ҳам берилиши мумкин (оралиқнинг частотаси сифатида бу оралиққа тушган вариантaларнинг частоталари йиғиндиси олинади).

1-мисол. Танланма

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

частоталар тақсимоти кўринишида берилган.Нисбий частоталар тақсимотини топинг.

Ечиш. Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n = 1+3+6 = 10 .$$

Нисбий частоталар тақсимотини ёзайлик:

$$w_1=\frac{1}{10}=0{,}1;\ w_2=\frac{3}{10}=0{,}3;\ w_3=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

Изланаётган нисбий частоталар тақсимотини ёзамиз:

x_i	2	5	7
w_i	0,1	0,3	0,6

Текшириш: $w_1 + w_2 + w_3$= 0,1+0,3+0,6=1.

Танланманинг тақсимот функцияси. Танланманинг тақсимот функцияси деб, ҳар бир x қиймат учун $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайдиган $F^*(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n},$$

бу ерда n_x - x дан кичик вариантлар сони, n - танланма ҳажми.

Танланма функцияси қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Тақсимот функциянинг қийматлари [0,1] кесмага тегишли бўлади.

2-хосса. $F^*(x)$ тақсимот функцияси камаймайдиган функция.

3-хосса. Агар x_1 энг кичик варианта ,x_k энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x \le x_1$ бўлганда $F^*(x)$=0, $x > x_k$ бўлганда $F^*(x)$=1.

2-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича унинг тақсимот функциясини топинг ва графигини чизинг. Берилган:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Ечиш. Танланманинг ҳажмини топамиз:

$$n = 10 + 15 + 25 = 50.$$

Энг кичик варианта бирга тенг, демак, $x \le 1$ бўлганда $F^*(x)$=0. $X < x$ қиймат 10 марта кузатилган, демак $1 < x \le 4$ бўлганда

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2 .$$

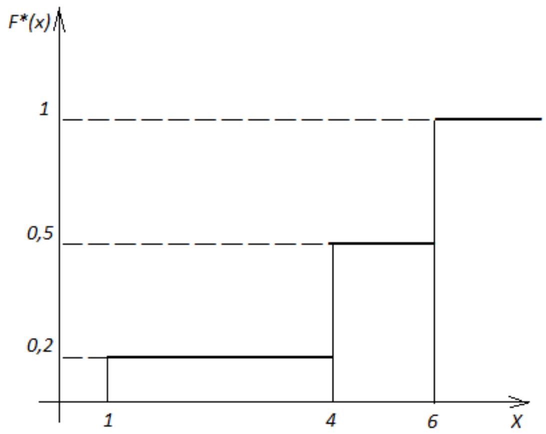
бўлганда, $x_1 = 1$ ва $x = 4$ қийматлар 10+15=25 марта кузатилган, демак, $4 < x \leq 6$ бўлганда

$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5 .$$

$x = 6$ энг катта варианта бўлгани учун $x > 6$ бўлганда $F^*(x)$=1. Энди изланаётган функцияни қуйидагича ёзамиз:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 0{,}2, \text{агар бўлса, } 1 < x \leq 4 \\ 0{,}5, \text{агар } 4 < x \leq 6 \\ 1, \text{агар } x > 6 \text{ , бўлса.} \end{cases}$$

Энди бу функциянинг графигини чизайлик (26-расм)



26-расм

Полигон ва гистограмма. Частоталар полигони деб, кесмалари (x_1, n_1), $(x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади. Бу ерда x_i - танланманинг варианталари ва n_i - уларга мос частоталар.

Нисбий частоталар полигони деб, кесмалари (x_1, w_1),$(x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Бу ерда x_i - танланманинг варианталари, w_i – уларга мос нисбий частоталар.

X тўплам узлуксиз тақсимланганда унинг барча кузатилган қийматлари ётган оралиқ узунлиги h бўлган қатор қисмий оралиқларга бўлинади ва i-оралиққа тушган варианталарнинг частоталари йиғиндиси n_i топилади.

Частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги оралиқлар, баландликлари эса $\frac{n_i}{h}$ частоталар зичлигига тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. i-қисмий тўртбурчакнинг юзи

$$h\frac{n_i}{h} = n_i.$$

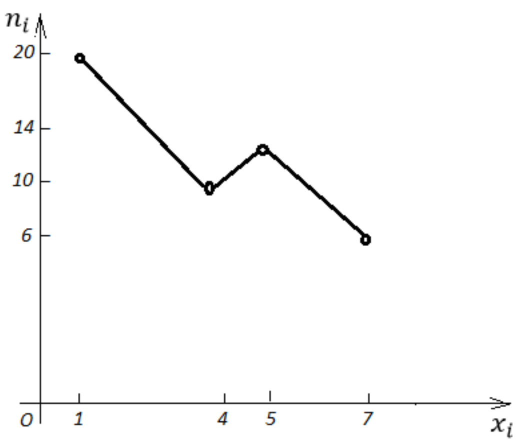
i-оралиққа тушган варианталарнинг частоталари йиғиндисига тенг. Гистограмманинг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажми n га тенг.

Нисбий частоталар гистогграммаси деб, асослари h узунликдаги оралиқлар, баландликлари $\frac{w_i}{h}$ нисбатга (нисбий частота зичлиги) га тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади. i-қисмий тўғри тўртбурчакнинг юзи $h\frac{w_i}{h} = w_i$ га, яъни i-оралиққа тушган варианталарнинг нисбий частоталари йиғиндисига тенг. Нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига тенг, яъни бирга тенг.

3-мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича частоталар полигонини ясанг. Берилган:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

Ечиш.Абсциссалар ўқида x_i варианталарни, ординаталар ўқида эса уларга мос n_i – частоталарни қўямиз. (x_i, n_i) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, изланаётган частоталар полигонини ҳосил қиламиз(27-расм).



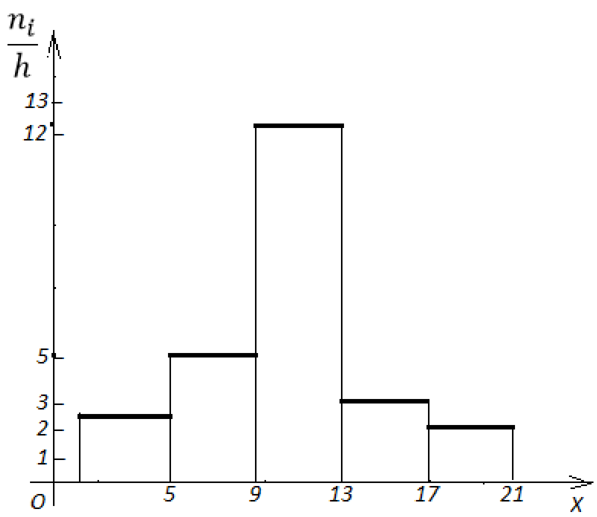
27-расм

4-мисол. *n=100* ҳажмли танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича гистограммасини ясанг.

Оралиқ номери	*Қисмий оралиқ*	*Интервалдаги варианталар частоталари йиғиндиси*	*Частота зичлиги*
i	$x_i - x_{i-1}$	n_i	n_i/h

1 *2* *3* *4* *5*	*1 – 5* *5 – 9* *9 – 13* *13 – 17* *17 - 21*	*10* *20* *50* *12* *8*	*2,5* *5* *12,5* *3* *2*

Ечиш. Абсциссалар ўқида h=*4* узунликдаги берилган оралиқларни ясаймиз. Бу оралиқларнинг устида абсциссалар ўқига параллел ва ундан тегишли частота зичликлари $\frac{n_i}{h}$ га тенг масофада бўлган кесмалар ўтказамиз. Масалан, (1, 5) оралиқнинг устида абсциссалар ўқига параллел қилиб, $\frac{n_i}{h}=\frac{10}{4}=$ 2,5 масофада кесма ясаймиз. Қолган кесмалар ҳам шунга ўхшаш ясалади (28-расм) .



28-расм

Энди математик статистиканинг асосий масалалари тўғрисида қисқачагина тўхталиб ўтайлик:

1-масала. *X* тўплам бош тўплам бўлсин. Бу тўпламнинг танланма кузатилган

$$x_1, x_2, \ldots , x_n$$

қийматлар кетма-кетлигидан фойдаланиб, бош тўпламнинг номаълум тақсимот функциясини топиш ва баҳолаш (нопараметрик баҳолаш).

2-масала. *X* бош тўпламнинг тақсимот функцияси k та номаълум параметрга боғлиқ бўлсин. $x_1, x_2, \ldots , x_n$ танланманинг кузатилган қийматларидан фойдаланиб, k номаълум параметрни баҳолаш.Бу масалани математик статистиканинг параметрик баҳолаш назарияси деб ҳам аталади.

3-масала. Баъзи мулоҳазаларга асосланиб $F^*(x)$ функцияни X бош тўпламнинг тақсимот функцияси деб ҳисоблаш мумкин бўлсин. Шу $F^*(x)$ функцияни ҳақиқатан ҳам X бош тўпламнинг тақсимот функциясими ёки йўқми деган саволга жавоб топиш. Бу масалала математик статистиканинг статистик гипотеза масаласи дейилади. Бу масаланинг моҳияти шундан иборатки, гипотезани текшириш учун танланманинг кузатилган $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларидан фойдаланиб олинган маълумотлар ҳақиқатан ҳам кутилган маълумотлар билан мос келса, у вақтда бу маълумотлар фараз қилинган гипотезани қабул қилиш учун асос бўлади, акс ҳолда гипотезани қабул қилишга асос бўлмайди. Математик статистиканинг бу масалани ечиш билан шуғулланувчи бўлими статистик гипотезалар назарияси дейилади.

IV боб бўйича ўз-ўзини текшириш учун саволлар:

1. Ҳодиса деганда нимани тушунасиз?
2. Қандай ҳодисага муқаррар ҳодиса дейилади?
3. Қандай ҳодисага мумкин бўлмаган ҳодиса дейилади?
4. Қарама-қарши ҳодисалар деб, қандай ҳодисаларга айтилади?
5. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади?
6. Қарама-қарши ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўладими?
7. Биргаликда бўлмаган ҳодисаларга мисоллар келтиринг?
8. Элементар ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади?
9. Эҳтимолликнинг классик таърифини айтинг?
10. Бирор А ҳодисанинг маълум эҳтимоли бўйича $\overline{A}$ қарама-қарши ҳодисанинг эҳтимоли қандай топилади?
11. Шартли эҳтимол деб нимага айтилади?
12. Қандай ҳодисалар эркли ҳодисалар дейилади?
13. Қандай ҳодисалар эрксиз ҳодисалар дейилади?
14. Тўла эҳтимол деб нимага айтилади?

IV бобга доир машқлар

1. Яшикда ўлчамлари ва оғирлиги бир хил бўлган учта кўк, саккизта қизил ва тўққизта оқ шар бор. Яшикдаги шарлар яхшилаб аралаштирилди. Яшикдан бир марта шар олинганда, кўк, қизил ва оқ шар чиқишининг эҳтимоли қанча?
2. Иккита танга бир вақтда ташланган. m (m=1,2,3) марта гербли томон тушиш эҳтимоли қанча?

3. Нишонга “аъло” баҳода ўқ узиш эҳтимоли 0,3 га, “яхши” баҳода ўқ узиш эҳтимоли эса 0,4 га тенг. Отилган ўқ учун “яхши” баҳодан кам баҳо олмаслик эҳтимоли қанча?
4. Ичида n та оқ, қизил ва қора шар бўлган яшикда k та оқ ва l та қизил шар бор. Яшикдан ранги қора бўлмаган шар олиш эҳтимоли қанча?
5. Пул буюм лотереясида 1000 та билетли ҳар бир серияга 120 та пул ютуқ ва 80 та буюм ютуқ тўғри келади. Битта лотерея билетига бирор ютуқ чиқиш эҳтимоли қанча?
6. Корхона маҳсулотининг 96 фоизи яроқли (А ҳодиса) деб тан олинади. Ҳар 100 та яроқли маҳсулотдан 75 таси биринчи сортли (В ҳодиса) бўлар экан. Тасодифан олинган маҳсулотнинг биринчи сортли бўлиш эҳтимолини аниқланг.
7. Айрим ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш (А ҳодиса) эҳтимоли 0,2 га тенг.Агар портлагичларнинг 2 фоизи портламай қолса (яъни 2 фоиз ҳолда ўқ узилмай қолади), ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли қанча?
8. Лотереяда жами n та билет бор бўлиб, улардан m таси ютуқли. k та билети бор кишига ҳеч бўлмаганда битта ютуқ чиқиш эҳтимолини топинг.
9. Юзта деталдан иборат партияда 30 та брак деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинади. Олинган деталлар орасида роса битта брак деталь бўлиш эҳтимоли қанча?
10. Пачкадаги 12 та умумий дафтарнинг 7 таси катак дафтар, 5 таси чизиқли дафтар. Таваккалига 6 та дафтар олинган. Олинган дафтарлар орасида катак дафтарлар сони ва чизиқли дафтарлар сони бир хил бўлиш эҳтимоли қанча?

11. Танланма

x_i :	4	7	8	12
n_i :	5	2	3	10

Частоталар кўринишида берилган. Нисбий частоталар тақсимотини топинг.
12. Танланманинг қуйида берилган ушбу тақсимоти бўйича унинг тақсимот функциясини топинг.Берилган:

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3 .

13. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича бўйича частоталар гистограммасини ясанг:

Оралиқ номери	*Қисмий оралиқ*	*Интервалдаги вариантлар частоталари йиғиндиси*	*Частота зичлиги*
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h
1	*2 – 7*	*5*	

2 *3* *4* *5*	*7 – 12* *12 – 17* *17 – 22* *22 - 27*	*10* *25* *6* *4*	

14. 1, 2, 3 рақамлари ёрдамида мумкин бўлган икки хонали сонлардан тузилган барча ўринлаштиришлар сонини топинг?
15. Синфда 10 та фан ўқитилади ва ҳар куни 5 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс жадвали неча турли усул билан тақсчимлаб қўйилиши мумкин?
16. Бутун сонларнинг ҳар бири 3 та ҳар хил қийматли рақам билан ифода қилинадиган бўлса, қанча бутун сон тузиш мумкин?
17. Ҳар хил қийматли тўққизта рақам билан нечта тўққиз хонали сон ёзиш мумкин.
18. 1, 2, 3, 4, 5 рақамларидан шу рақамлар такрорланмайдиган қилиб нечта беш хонали сон ёзиш мумкин.

Глоссарий:

Арифметика	математика фанининг сонлар устидаги тўртта амални ўрганадиган бўлими.
Геометрия	математика фанининг ҳар хил шакллар ва уларнинг ўлчамлари орасидаги муносабатларни ўрганадиган бўлими.
N	барча натурал сонлар тўплами.
Z	элементлари барча манфий бутун, ноль ва барча мусбат бутун сонлардан иборат бўлган тўплам.
Q	элементлари махражи нолдан фарқли бўлган барча каср сонлардан тузилган тўплам.
Иррационал сон	рационал бўлмаган, яъни барча даврий бўлмаган чексиз ўнли каср сонлар.
R	ҳақиқий сонлар тўплами, яъни барча рационал сонлар ва иррационал сонларни ўз ичига олувчи сонлар тўплами.
$\cup$	Тўпламларнинг бирлашмаси (қўшиш) амали белгиси.
$\cap$	Тўпламларнинг кесишмаси (кўпайтириш) амали белгиси.
$\setminus$	Тўпламларни айириш амали белгиси.
Δ	Тўпламларнинг симметрик айирмаси белгиси.
Комплекс сонлар тўплами	(белгиси – C) – ҳар бир сони ҳақиқий сон бўлган барча (a,b) кўринишидаги жуфтликлардан иборат бўлган сонлар тўплами.

i	мавҳум бирлик комплекс сон.
Пифагор	Греция (қадимги юнонистон) да яшаб ижод этган буюк математик.
Вектор	йўналишга эга бўлган кесма.
Модуль	комплекс сонга мос вектор узунлиги.
Аргумент	комплекс сонга мос вектор билан абсцисса ўқи орасидаги бурчак.
Декарт	машҳур француз математиги.
Мантиқ	арабча сўз бўлиб, логика сўзига мос келади.
Контакт	контакт лотинча сўз бўлиб, Contactus “touch” сўзидан олинган, маъноси – нарсанинг алоқа юзаси; ўзаро таъсир, алоқа, ҳамкорлик.
Конъюнкция	бирлашма (лотинча. Conjunctio - "бирлашма, алоқа") - мантиқий операция, "ва" бирлашмасига имкон қадар яқин ма'нони англатади.
Дизъюнкция	ишдан чиқиш (лотинча disjunctio – “ажратиш”), “ёки”, “бу, ёки бу, ёки иккаласи ҳам” маъноларини билдиради.
Импликация	амалийлик (лотинча implicatio – “алоқа”), “агар...кейин” маъносида ишлатилади.
Эквиваленция	мантиқий эквивалентлик, икки томонлама мантиқий амал у, одатда, ≡ ёки ↔ велгиси билан кўрсатилади.
Координаталар боши	координата ўқларининг кесишиш нуқтаси.

Горизонтал тўғри чизиқ	кесишувчи иккита перпендикуляр тўғри чизиқдан бири бўлиб, у кўндаланг равишда йўналган бўлади.
Вертикал тўғри чизиқ	кесишувчи иккита перпендикуляр тўғри чизиқдан бири бўлиб, у тик равишда йўналган бўлади.
Квадрант	чорак.
Абсцисса	горизонтал ўқда жойлашган нуқтанинг ўрни.
Ордината	вертикал ўқда жойлашган нуқтанинг ўрни.
Матрица	матрица (лотинча лотинча сўз бўлиб, “асосий сабаб”деган маънони билдиради) сонлардан тузилган жадвал.
Чизиқли алгебра	математиканинг чизиқли тенгламалар системасини ечишни ўрганадиган бўлими.
Детерминант	сон қийматдан иборат бўлиб, чизиқли алгебрада квадратик матрица.
Крамер	1704-1752 йилларда яшаб ижод этган швейцариялик машҳур математик олим.
Фиксирланган	маҳкамланган, белгиланган.
***y = f(x)* функциянинг аниқланиш соҳаси**	эркли ўзгарувчи *x* нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, одатда у лотинча катта *X* ҳарфи билан белгиланади.
***y = f(x)* функциянинг ўзгариш соҳаси**	эркли ўзгарувчи у нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, одатда у лотинча катта *Y* ҳарфи билан белгиланади.
f	*x* ёки *y* ўзгарувчилар устида бажарилиши керак бўлган амаллар мажмуи.
Аналитик усул	функциянинг формулалар кўринишида берилиш усули.

Монотон	монотон функция – бу қийматлари доимий равишда пасаймайдиган ёки кўпаймайдиган функция.
Композиция	таркибий (лотинча Compositio – боғлаш, қўшиш, уланиш) қисмларнинг боғланиши.
Симметрия	текисликда ётган шаклни бирор ўқ бўйича буклаганимизда бу шакл тенг иккига бўлиниб устма-уст тушиш ҳолати.
Константа	доимий ўзгармас қиймат.
Лимит	чеклов; математиканинг асосий тушунчаларидан бири. Функция чегарасини фарқлаш. Лимит тушунчаси XVII асрнинг иккинчи ярмида Ньютон, шунингдек, Эйлер ва Лагранж каби XVIII аср математиклари томонидан интиутив равишда ишлатилган.Лимитнинг қатъий математик таърифи 1816 йилда Больцано ва 1821 йилда Коши томонидан берилган.
Теорема	математикада теорема бу - илгари тузилган баёнотлар асосида исботланган гап: бошқа теоремалар ва умуман қабул қилинган иборалар, аксиомалар. Теорема исботи кўпинча теорема баёни ҳақиқатининг исботи сифатида талқин қилинади.
Дифференциал	функция орттирмасининг (ўсишининг) чизиқли бош қисми.
Интеграл	интеграл математик таҳлилнинг энг муҳим тушунчаларидан бири бўлиб, у функцияни ўз ҳосиласига кўра тиклаш деган маънони билдиради.
Моддий нуқта (заррача)	бу - массаси, ҳажми, шакли, айланиши ва ички тузилиши бўлган жисм.
Оний тезлик	бир лаҳзали тезлик**.**
Бошланғич функция	ҳақиқий ўзгарувчини математик таҳлил қилишнинг энг муҳим тушунчаларидан

	бири бўлиб, $F'(x) = f(x)$ тенгликни қаноатлантирувчи $F(x)$ функцияга $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.
Аниқмас интеграл	берилган функциянинг барча бошланғич функциялар тўплами.
Узлуксиз функция	аргументдаги кичик ўзгаришлар функция қийматининг кичик ўзгаришларига олиб келадиган функция. Аниқ интеграл – математик таҳлилнинг асосий тушунчаларидан бири, интеграл турларидан бири.
Параметр	қийматлар баъзи элементларни ажратиш учун хизмат қиладиган қиймат. Параметр бу маълум бир ҳодиса ёки топшириқ ичидаги доимий қийматдир, аммо бошқа ҳодиса ёки вазифага ўтишда у ўз қийматини ўзгартириши мумкин. Баьзан параметрлар бошқа миқдорларга (ўзгарувчига) нисбатан жуда секин ўзгариб турадиган миқдорлар деб ҳам аталади.
Силлиқ эгри чизиқ	Ҳар бир нуқтасида унинма мавжуд бўлган эгри чизиқ.
Силлиқ функция	доимий равишда фарқланадиган функция - бу бутун таърифлар тўпламида доимий ҳосилага эга бўлган функция. Кўпинча, силлиқ функциялар деганда барча буюртмаларнинг доимий ҳосилалари бўлган функциялар тушунилади.
Сирт	асосий геометрик тушунчалардан бири, маълум шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами.
Уринма сирт	Силлиқ юзадаги бир нуқтада жойлашган тангенс текислиги - бу нуқтада сирт билан максимал алоқа қилиш тартибига эга текислик.

Периметр	шакл чегарасининг умумий узунлиги.
Комбинаторика	бу дискрет объектлар, тўпламлар (комбинациялар, пермутациялар, элементларнинг жойлашиши ва рўйхати) ва улар орасидаги муносабатларни (масалан, қисман буюртмани) ўрганадиган математиканинг бир соҳаси.
Факториал	бу манфий бўлмаган бутун сонлар тўпламида аниқланган функция.
Эҳтимоллик	бу маълум бир воқеа содир бўлиши эҳтимолининг даражаси (нисбий ўлчов, миқдорий баҳолаш).
Тажриба	воқеликни амалий жиҳатдан ҳиссий эмпирик билиш жараёни.
Деталь	бу маҳсулот, машина ёки бошқа бирон бир маҳсулотнинг бир қисми бўлган ишлаб чиқарилган, ишлаб чиқарилган ёки ишлаб чиқариладиган маҳсулот.
Мишень	ўқ отиш полигонларида ва отиш майдонларида машқ қилиш ва отиш мусобақаларида сунъий нишон.
Статистика	бу оммавий статистик маълумотларни тўплаш, ўлчаш, кузатиш ва таҳлил қилишнинг умумий масалаларини ёритадиган билимлар соҳаси.
Гипотеза	тахмин ёки далилларни ўз ичига олган баён, аксиомалардан фарқли ўлароқ, исбот талаб қилмайдиган постулатлар.
Бейес	Томас Байес 1702 - 1761 йилларда яшаб ижод этган, инглиз математиги.
Частота	бирлик вақтида такрорланиш ёки ҳодисалар (жараёнлар) нинг сонига тенг

бўлган физик миқдор, даврий жараённинг характеристикаси.

Полигон махсус ажратилган майдон ва жиҳозланган майдон, ҳаво ёки денгиз юзаси (қуруқлик, осмон ёки денгиз). ҳар хил турдаги қурол ва ҳарбий техникани (қурол, ҳарбий техника ва бошқалар) синаш учун, шунингдек, қўшин ва кучларнинг жанговар тайёргарлиги учун мўлжалланган майдон.

Гистограмма жадвал маълумотларини график шаклда тақдим этиш усули.

Тақсимот функция бу тасодифий ўзгарувчи ёки тасодифий векторнинг тарқалишини тавсифловчи функция; X тасодифий ўзгарувчининг ўзгариши x дан кам ёки унга тенг қийматни олиш эҳтимоли, бу эрда x - ихтиёрий ҳақиқий сон.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

А. Асосий адабиётлар

1. Abdullayeva B.S., Rajabov F., Masharipova S. Oliy matematika asoslari. Darslik. T.: Iqtisod-Moliya,2011.392 b.
2. N.M. Jabborov. Oliy matematika. 1-jild, -Toshkent:”Universitet”, 2017, 304 б.
3. N.M. Jabborov. Oliy matematika. 2-jild, -Toshkent:”Universitet”, 2017, 280 б.
4. N.M. Jabborov. Oliy matematika va uningtatbiqlariga doir masalalar to’plami. 1-qism, 3-jild, -Toshkent:”Universitet”, 2017, 284 б.
5. N.M. Jabborov. Oliy matematika va uningtatbiqlariga doir masalalar to’plami. 1-qism, 3-jild, -Toshkent:”Universitet”, 2017, 268 б.
6. Hamedova. N.A, Sadikova A.V., LaktaevaI.SH. “Matematiкa” – gumanitar yo`nalishlar talabalari uchun o`quv qo`llanma.Toshkent, “Jahon – Print”, 2007, 200 b.
7. Харин В.Т., Голицина М.Г., Калашникова Е.С., Новикова И.С. Математика. Москва: МГУНГ им. Губкина, 2003.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика (учебное пособие) Москва, Высщая школа, 2003. 480 с.
9. David B. Surwski. Advanced High-School Mathematics. Shanghai American School, 2011
10. Herbert Gintis. Mathematical Literacy for Humanist, Printed in the United States of America, 2010.

В. Қўшимча адабиётлар

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз.Тошкент,”Ўзбекистон”, 2017 , 488 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Қонун устиворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш –юрт тараққиёти ва халқ фаравонлигининг гарови. Тошкент, “Ўзбекистон”, 2017, 48 б.
3. SH.Alimov, R.Ashurov. Matематік аналіз. 1-qism, Toshkent. “Mumtoz so`z” mas`uliyati cheklangan jamiyati nashriyoti, 2018, 584 b.
4. Toshmetov O`., Turgunbaev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matематік analiz 1-qisм. Toshкent, “Extremum-Press”, 2015, 408 b.
5. Toshmetov O`., Turgunbayev R. Matematік analizdan мisol va masalalar to`plami. 1-qism, TDPU, 2006, 140 b.
6. А.Ғ.Ҳикматов,Т.Т.Турдиев. Математик анализ. 1-қисм, Тошкент, ”Ўқитувчи”, 1990, 256 б.
7. Т.Азларов, Х.Мансуров. Метематик анализ. 1-қисм, Тошкент, “Ўқитувчи”, 1986, 408 б.
8. Стефан Банах. Дифференциальное и интегральное исчисление. Москва, “Наука”, 1966, 436 с.
9. А.Худайбергенов. Математика.Тошкент, “Ўқитувчи”, 1973, 296 б

10. О.Н.Цубербеллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Москва,”Наука”, 1970,336 с.
11. И.И.Лихолетов, И.П.Мацкевич. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск, “Вышейщая школа”, 1969, 456 с.
12. Р.С.Гутер, Б.В.Овчинский. Эҳтимоллар назарияси асослари. Тошкент,”Ўқитувчи”, 1978, 168 б.
13. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма.Тошкент,”Ўқитувчи”, 1980, 368 б.

C. Интернет ресурслари

1. www.ziyonet.uz – Ziyonet ахборот-таълим ресурслари портал.
2. www.tdpu.uz
3. www.pedagog.uz
4. www.edu.uz

Мундарижа

Содержание