

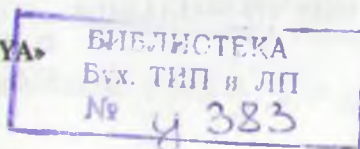


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

A. BOYDEDAEV
P. HABIBULLAEV

KVANT STATISTIK FIZIKA

Toshkent
«IQTISOD-MOLIYA»
2007



Taqrizchilar: A.Abdumalikov, O'zMU professori, fizika-matematika fanlari doktori;

I.Ismoilov, Nizomiy nomidagi TDPU dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

Boydedaev A.

Kvant statistik fizika. Oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma / A. Boydedaev, P. Habibullaev; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. — T.: Iqtisod-moliya, 2007. — 200 b. Habibullaev P.

Kvant statistik fizikasida — kvant tizimi (sistema)larining muvozanatli holatlari, ularning Boze-Enshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari asosida tavsiflanishi, muvozanatli holatlarni o'rganishdan nomuvozanatli holatni o'rganishga o'tishda muhim bosqich hisoblanadigan fluktuatsiya nazariyasi bayon etilgan.

O'quv qo'llanma pedagogika institutlari va universitetlarining fizika mutaxassisligi bo'yicha yo'qori kurslar talabalariga mo'ljallangan.

Qo'kyozmaga oid qimmatli maslahatlari uchun professorlar A.A. Abdumalikov, E.Z. Imomov va dotsent R.Mamatqulovlarga o'z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Mualliflar

BBK 22.317я73

ISBN 978-9943-13-041-8

© «IQTISOD-MOLIYA», 2007

© A.BOYDEDAEV, P.HABIBULLAEV, 2007

I b o b. KVANT STATISTIKA

1-§. Kirish

Zarralari kvant mexanika qonunlariga bo'ysunadigan sistema kvant sistema deyiladi. Kvant sistemaning xossalari o'rganadigan statistik fizikaning bo'limi — kvant statistikadir.

Ko'p zarrali kvant sistemaning xossalari umumiy holda aniq qarash bir qancha prinsipial qiyinchiliklarga duch keltiradi.

Sistemani tashkil etgan zarralar yetarli darajada siyrak bo'lganda masalani qarash soddalashadi. Bu holda bitta zarraning holatlarini kvant mexanika asosida aniqlab, so'ng shu holatlar bo'yicha zarralarning taqsimlanishi qonunini ko'rish mumkin. Masalani bunday soddalashtirib qarashni kvant statistikada bir zarraviy metod deyiladi. Bir zarraviy metod bilan masalalar kvant statistika asosida qaralganda zarralarning o'zaro ta'siri e'tiborga olinmaydi, faqatgina har bir holatdagi zarralar uchun almashinuv effekt e'tiborga olinadi.

Almashinuv effekt — aynan bir xil zarralarning o'rin almashtirishlarida namoyon bo'ladigan, sistemaning simmetriyaviy xossalari aks ettiradigan, klassik o'xshashligi bo'lmagan kvant korrelyatsion hodisadir.

Temperatura kamayib, $p \sim \sqrt{T}$ de Broyl to'lqin uzunligi $\lambda = h/p$ zarralar orasidagi masofa tartibida yoki undan katta bo'la boshlaganda, zarralar orasidagi o'zaro ta'sir potensialidan tashqari, kvant korrelatsiyasiga oid almashinuv o'zaro ta'sir namoyon bo'ladi.

Bu kvant korrelatsiya zarralar harakatiga, ularning sistemasi xossasiga muhim ta'sir ko'rsatadi. Bu ta'sir temperatura kamayishi bilan kuchayib boradi. Kvant korrelatsiya nafaqat zarralar harakati qonunlarini, balki klassik statistikani ham qayta qarash zaruriyatini keltirib chiqardi.

Shu munosabat bilan kvant mexanikaning muhim prinsiplaridan Pauli prinsipi katta rol o'ynaydi: bu prinsipga asosan, sistema aynish temperaturasidan pastda bo'lsa, har bir bizzarraviy holatda bittadan ortiq fermion bo'la olmaydi. Bu prinsip bozonlarga taalluqli emas. Demak,

sistema temperaturasi T aynish temperaturasi $T^* = a \left(\frac{h^2}{mk} \right)^{2/3} n^{2/3}$ dan kichik

bo'lganda fermionlar statistikasi bozonlar statistikasidan mutlaqo farqlanadilar (q.10-§, I bob).

Nazariy jihatdan qat'iy aytiladigan bo'lsa, kvant statistikaning bu metodlari — postulatlarini ishchi gipotezasifatida qaralib, ularning o'rinli ekanligi ular natijalarining eksperimentlar natijalariga mos kelishi bilan isbot qilinadi. Haqiqatan ham, bir zarraviy metodga asoslangan kvant statistika natijalari tajribada olingan natijalarga ko'p hollarda mos (muvofig) keladi. Shunday bo'lsa-da, bunday qarash, umumnazariy nuqtai nazardan, tabiiyki, to'la qoniqarli emas, chunki bunday postulatlar qaralayotgan sistemaning kvant xossalariidan, ya'ni fundamental kvant mexanika postulatlaridan kelib chiqishi lozim edi. Ammo bunday keltirib chiqarish hozirgi vaqtda qilinmagan.

Biz quyidagi kvant statistikaning masalalarini bir zarraviy metodga asoslanib qaraymiz.

2-§. Sistema holati

1. Makroskopik holat. Juda ko'p zarralardan (atomlar, molekularlar va boshqalar) tashkil topgan sistemaning dinamik erkinlik darajalari juda ko'p bo'ladi. Ammo sistemaning holatini aniqlash uchun odatda uning temperaturasini, bosimini, zichligini va boshqa makroskopik parametrlarini o'lchaydilar. *Sistemaning bunday makroskopik (termodinamik) parametrlar bilan aniqlanadigan holatini makroskopik holat deyiladi.*

2. Dinamik mikroskopik holat. Sistemani tashkil etgan zarralarning (molekularlar, atomlar, elektronlar va boshqalar) dinamik erkinlik darajalari orqali ulardan har birining holatini klassik mexanika yoki kvant mexanika asosida (sistema gamiltonianiga asoslangan tenglamalar orqali) aniqlash mumkin. Sistemaning ana shunday dinamik erkinlik darajalari (ya'ni undagi zarralardan har birining dinamik holatini aniqlash bilan) orqali aniqlangan holatini dinamik **mikroskopik holat** deb ataymiz. Nazariy jihatdan har bir zarraning harakat tenglamasini (masalan, Nyuton tenglamasi yoki Shredinger tenglamasi) yechib, sistemaning dinamik mikroskopik holatini aniqlash mumkin. Ammo zarralar soni nihoyatda ko'p bo'lganligi uchun sistemaning holatini bunday usul bilan amalda aniqlash mumkin emas.

3. Statistik mikroskopik holat. Sistemaning mikroskopik holatini amalda aniqlash iloji bo'lmagani uchun (agar bunday mikroholat ma'lum bo'lsa ham zarralar harakati va o'zaro to'qnashishlari sababli u shunday tez o'zgarib turadiki, undan amalda foydalanish yaroqsiz bo'lib qoladi) uning mikroskopik holatini tavsiflash uchun yangi metod, tushuncha kiritish zarur bo'lib qoladi. Shunday yangi tushuncha (metod) birinchi marta

Gibbs tomonidan kiritilgan statistik ansambl tushunchasidir. Bu tushunchaga asosan, qaralayotgan bitta real sistema o'rniga, unga dinamik jihatdan ekvivalent bo'lgan, ya'ni bir xil gamiltonianga ega bo'lgan, ammo boshlang'ich shartlari bilan farqlanadigan ekvivalent sistemalar to'plami (ansambli) qaraladi. *Real sistemaga moslashtirilgan bu to'plamni shu sistemaning statistik ansambli deyiladi.*

Statistik ansambl tushunchasiga asosan, biz ta'rif bo'yicha, sistemaning dinamik umumlashgan koordinatalari $q(t)$ va umumlashgan impuls-lari $p(t)$ ni vaqtga bog'liq bo'lmagan tasodifiy kattaliklar bilan almashtiramiz, ya'ni q va p ni tasodifiy kattaliklar deb qaraymiz. Tasodifiy kattaliklar q va p ning qiymatlari (kvant mexanikada q yoki p ning qiymatlari) real sistemaning ehtimoliy mikroskopik holatini aniqlaydi. Bunday aniqlangan holatni **statistik mikroskopik holat** deb ataymiz. Statistik mikroholatlar to'plami statistik ansamblga ekvivalentdir. Shuningdek, yuqoridagi ta'rifga asosan, dinamik mikroholatlar to'plamiga ham ekvivalentdir.

Statistik fizikaning asosiy postulati. Statistik mikroholatlar to'plami dinamik mikroholatlar to'plamiga ekvivalentdir (yoki unga tengdir, yoki o'sha to'plamning o'zidir!). Klassik statistik fizikada (shuningdek, kvant statistikada) q va p lar demak bular bilan aniqlangan statistik mikroholatning realizatsiyasi, namoyon bo'lishi ehtimolini aniqlash statistik fizikada asosiy — markaziy masaladir.

Statistik mikroholatlar to'plami klassik statistik fizikada fazaviy fazoning qismini, kvant statistik fizikada sistemaning kvant holatlari to'plamini ifodalaydi. Muvozanatli statistik fizikani qurish uchun quyidagi ikkinchi asosiy postulatni qabul qilamiz: apriori (a priori) statistik mikroholatlar teng ehtimolli (tekis taqsimlangan) deb qabul qilinadi. Demak, statistik mikroholatlar soni (statistik ansambl elementlari soni) N_A ga teng bo'lsa, statistik mikroholatlar ehtimoli bu postulatga asosan. $1/N_A$ ga teng bo'ladi. Bu yerda maxsus eslatamiz: an'anaviy usulda mikroholatlarning teng ehtimolligi (tekis taqsimlanganligi) haqidagi bunday postulat yakka-langan sistema uchungina o'rinli deb qabul qilingan edi. Kuzatiladigan kattalik (masalan, energiya) qiymatlari bilan farqlanuvchi ba'zi mikroholatlarda sistema ko'proq (kattaroq ehtimol bilan), ba'zi mikroholatlarda sistema kamroq (kichikroq ehtimol bilan) bo'ladi.

Mikroholatning ehtimoli uni tashkil etgan statistik mikroholatlar soniga — statistik vaznga bog'liq. Mikroholatlarning ehtimollari taqsimoti funksiyasi klassik statistik mexanikada $f(q, p)$ va kvant statistik mexanikada $f(E_i)$ funksiyalar bilan aniqlanadi. Masalan, biror dinamik A kattalikni tajribada aniqlaydigan (ansambl bo'yicha) o'rtacha qiymati klassik holda

$$\bar{A} = \int A(p, q) f(p, q) dp dq,$$

kvant holda

$$\bar{A} = \sum_l A_l f(l)$$

ifodalar bilan aniqlanadilar.

Bunda A_l kvant mexanikadagi A kattalikning o'rtachasi:

$$A_l = \int \psi_l^* \hat{A} \psi_l d\tau$$

bunda $\hat{A}$ operator, ψ_l - l -kvant holatining to'liq funksiyasi.

4. Ideal gaz. Faraz qilaylik: ko'rilayotgan sistema N ta zarradan iborat bo'lsin; ular orasida o'zaro ta'sir bo'lmasin yoki uni hisobga olmaslik darajada kichik bo'lsin. Bunday holda sistemaning — ideal gazning zarralari bitta zarraning statistik ansambli elementlaridan iborat bo'ladi deb qaralishi mumkin.

5. Bir zarraviy metod. Ideal gaz statistik ansambli uni tashkil etgan real molekullar, atomlar, umuman zarralar ansambli (to'plami)dan iborat bo'ladi. Shu nuqtai nazardan sistemaning (ideal gazning) statistik mikroholati bitta zarraning (atom, molekulaning) mikroholati bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, klassik statistika $\bar{p}$ va $\bar{q}$ kattaliklar qiymatlari $\bar{q}$, $\bar{q} + d\bar{q}$ va $\bar{p}$, $\bar{p} + d\bar{p}$ intervallarda bo'lishi ehtimoli $dW(\bar{p}, \bar{q}) = f(\bar{p}, \bar{q}) d\bar{p} d\bar{q}$ bilan aniqlanadi; bunda ehtimollar zichligi $f(\bar{p}, \bar{q})$ ni bir zarraviy taqsimot funksiyasi deyiladi.

Kvant statistikada zarraning kvant holatlarda bo'lish ehtimolini aniqlash muhimdir. Siyrak kvant gaz holatlari bir zarraviy taqsimot funksiyasi orqali tavsiflanadi. Biz quyida kvant sistemani qaraymiz.

N ta bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'lmagan zarralar sistemasi holatining to'liq funksiyasi

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) \quad (1)$$

bilan aniqlangan bo'lsin.

Bunda gamiltonian

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \quad (2)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + U_i(x_i) \quad (3)$$

ifodalar bilan aniqlangan bo'lsin; x_i bilan $\bar{p}$ yoki $\bar{q}$ larni belgiladik.

Statsionar holat uchun to'liqin funksiya (I) Shredinger tenglamasi

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (4)$$

dan topiladi; bunda

$$\sum_i \hat{H} \psi = E \psi \quad (5)$$

Ideal gaz uchun $\psi = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)...\psi_N(x_N)$ va $E = E_1 + E_2 + ... + E_N$ deb qarash mumkin. Bu holda (5) dan

$$\hat{H}_i \psi_i(x_i) = E_i \psi_i(x_i) \quad (6)$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani yechib, har bir i zarraning to'liq funksiyalari va energiya sathlarini topamiz. Har bir birzarraviy holat funksiyasi $\psi_i(x_i)$ ni aniqlovchi kvant sonlarni (atomdagi elektron uchun kvant conlar n, l, m, m_z) bitta harf n bilan belgilaylik. Bu holda

$$E_{n_1 n_2 \dots n_N} = E_{n_1} + \dots + E_{n_N} \quad (7)$$

$$\Psi_{n_1 n_2 \dots n_N} = \Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2) \dots \Psi_{n_N}(x_N) \quad (8)$$

Bunda sistema energiyasi yig'indi (7) dan, sistema holati funksiyasi bir zarraviy funksiyalar ko'paytmasi (8) dan iborat.

Bu yerda shuni ta'kidlaymizki, bir-biri bilan o'zaro ta'sirlashuvchi zarralardan tashkil topgan sistema holati funksiyasini, ko'p hollarda, bir zarraviy holat funksiyalari ko'paytmalari bo'yicha qatorga yoyilmasi sifatida qarash mumkin.

Agar sistema zarralari bir xil bo'lsa (biz statistikada shunday holni qaraymiz), ularning hammasi uchun tenglama (6) bir xil bo'ladi; ularning holatlari va energiya sathlari ham bir xil bo'ladi. N zarradan iborat sistemaning kvant holati N ta bir zarraviy holatlarning har xil kombinatsiyalaridan olinishi mumkin. Sistemaning bunday holatlari cheksiz ko'p bir zarraviy holatlar to'plamidan N – saylash (tanlash) orqali aniqlanadi.

	$\mathcal{E}_1$
3	$\mathcal{E}_1$
2	$\mathcal{E}_2$
1	$\mathcal{E}_1$

1.1-rasm.

Dinamik nuqtai nazardan ixtiyoriy bitta zarraga tegishli (6) Shredinger tenglamasini yechib, holatlar $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$ va bularga mos energetik sathlar, masalan, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ aniqlanadi. Bu bitta zarra uchun aniqlangan energiya sathlari sonini zarralar soni N ga nisbatan juda katta deb qarab (bu ideal kvant gaz bo'lishlik sharti), shu energiya sathlarida N ta zarraning taqsimlanish qonunini aniqlash bir zarraviy metodning vazifasidir (1.1-rasm). Dinamik nuqtayi nazardan bitta zarraga tegishli masalani yechib, energiya sathlari bo'yicha ko'p zarralarning taqsimotini tadqiq qilish — bu bir zarraviy metoddir.

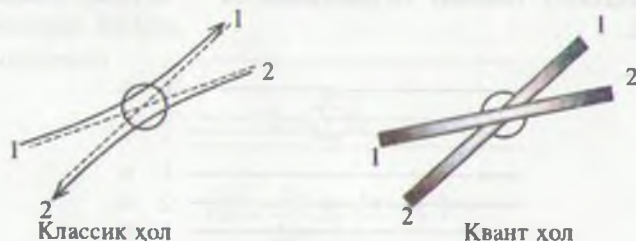
Zarralar o'zlarining holat funksiyalari — to'lqin funksiyalarining xarakteriga qarab ikki turga: bozonlar va fermionlarga bo'linadi. Biz shularga qisqacha to'xtaylik.

3-§. Aynanlik prinsipi

Agar ikki zarraga klassik fizika nuqtai nazaridan qaralsa, ular uzluksiz harakatlanayotganligini kuzatish mumkin, ya'ni ularni prinsipial jihatdan alohida kuzatish va demak, ajratish, farqlash mumkin. Kvant mexanikada mikrozarralarning holatlari diskret o'zgaradi. Bir turga tegishli ikki zarra bir xil holatda bo'lsa, ularning xarakteristikalarini bir xil bo'ladi. Bu esa ularning aynan bir xilligiga, ularni farqlash mumkin emasligiga olib keladi.

Klassik zarralar to'qnashganda (1.2-rasm), har doim qaysi biri qaysi tomonga ketganini aniqlash (ko'rish, bilish) mumkin.

Kvant zarralarda trayektoriyalar yo'q, shu sababli ma'lum "trubka"ning ichida to'lqin paket harakatlanayotir deb qarash mumkin. Agar "trubka"lar to'qnashsa (yoki yaqinlashsa) qaysi zarra qaysi joyda ekanligini aniq bilish mumkin emas. Shu sababli, bir zarra bir tomonga, ikkinchi zarra ikkinchi tomonga ketganligini (impulsning saqlanish qonuni asosida) aniqlash mumkin (q. 1.2-rasm). Shunday qilib, kvant mexanikada postulat sifatida aynanlik prinsipi qabul qilinadi.



1.2-rasm.

Bir turdagi zarralarning bir-biridan farqlanmasligi, aynanligi sababli sistemadagi ixtiyoriy ikkita zarra o'rinlarining almashtirishlari sistemaning fizik holatini o'zgartirmaydi.

Bir xil massa, spin, zaryadlarga ega va boshqa bir xil ichki xossalar bilan xarakterlanuvchi, tavsiflanuvchi zarralarni kvant mexanikada aynan bir xil zarralar deyiladi. Boshqacha aytganda, masalan, bir elektronni ikkinchi elektrondan farqlash prinsipial mumkin emas; barcha elektronlar aynan bir xil zarralardir. Aynan bir xil zarralar kvant mexanikadagi fundamental prinsip — aynanlik prinsipiga bo'ysunadi.

Aynanlik prinsipiga asosan, zarralar sistemasidagi zarralarning o'rinlari almashinishi tufayli hosil bo'lgan holatlarni hech qanday real eksperiment yordamida farqlash (ajratish) mumkin emas. Shu sababli, bunday o'rin almashinishlardan hosil bo'lgan holatlarga sistemaning bitta fizik holati deb qaralishi kerak.

Aynanlik prinsipi kvant mexanikaning klassik mexanikadan farqlovchi asosiy prinsiplardan biri, ya'ni klassik mexanikada har bir zarraning harakatini, trayektoriyasini prinsip jihatidan kuzatish mumkin deb qaralsa, kvant mexanikada esa bunday qarash o'z ma'nosini yo'qotadi, har bir zarraning o'z individualligi yo'qolad.

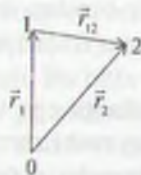
Ma'lumki, kvant mexanikada zarra holati to'liqin funksiya bilan tavsiflanadi. Yuqorida aytilganlarga asosan, ikki aynan bir xil zarralarning to'liqin funksiyalari fazoda qisman (o'zaro qoplashuvga) o'zaro yopuvga ega bo'lsa, u holda, to'liqin funksiyalar aniqlangan sohaning biror elementar hajmida zarralardan qaysi biri turibdi, degan savol mutlaqo ma'noga ega emas; bu ikki zarradan birining bu elementar hajmda bo'lish ehtimoli haqida gapirish ma'noga egadir.

Tabiatdagi aynan bir xil zarralar ikki turga: holatlari simmetrik to'liqin funksiyalar bilan tavsiflanuvchi bozonlarga va antisimmetrik to'liqin funksiyalar bilan tavsiflanuvchi fermionlarga bo'linadi.

Aynanlik prinsipidan kelib chiqadigan to'liqin funksiyalarning bu simmetriklik xossalari, klassik mexanikada o'xshashligi bo'lmagan, kvant effekt — almashinuv o'zaro ta'sir mavjudligiga olib keladi.

4-§. Simmetrik va antisimmetrik to'liqin funksiyalar

Spinlari e'tiborga olinmagandagi 2 ta bir xil zarradan iborat sistemaning kvant holati to'liqin funksiya $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ bilan tavsiflanadi; $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ -zarralar koordinatalarining funksiyasi (q. 1.3 rasm)



1.3-rasm.

Zarralarning o'rinlarini (koordinatalarini) almashtiraylik, ya'ni 1 ning o'rniga 2 va 2ning o'rniga 1 zarra joylashsin. U holda radius - vektor $\vec{r}_{12}$ ning yo'nalishi o'zgarib $\vec{r}_{21}$ dan iborat bo'ladi (q.1.3-rasm)

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \quad (9)$$

Zarralarning bunday o'rin almashtirishlari sistemaning holatini o'zgartirmaydi, chunki zarralar bir xil. Bunday (9) o'rin almashtirishni **akslantirish** deb ataladi.

Akslantirish operatori $\hat{P}$ ni (*uni o'rin almashtirish operatori ham deyiladi*) to'liqin funksiya $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(1, 2)$ ga ta'sir etkizaylik:

$$\hat{P}\psi(1, 2) = \psi(2, 1) \quad (10)$$

Bu (10) ga yana bir bor $\hat{P}$ ni ta'sir etkizsak, ravshanki, yana avvalgi holat hosil bo'ladi, ya'ni

$$\hat{P}(\hat{P}\psi(1, 2)) = \psi(1, 2) \quad (11)$$

Kvant mexanikaning umumiy prinsipiga asosan, operatorning to'liqin funksiyasiga ta'siri to'liqin funksiyani ma'lum songa o'zgartadi, ya'ni

$$\hat{P}\psi(1, 2) = P\psi(2, 1) \quad (12)$$

bunda ma'lum son P - shu - $\hat{P}$ operatorning xususiy qiymati. (10) ifodaga $\hat{P}$ operatorni yana ta'sir ettiraylik.

$$\hat{P}(\hat{P}\psi(1, 2)) = P(P\psi(1, 2)) = P\hat{P}\psi(1, 2) = P^2\psi(1, 2) \quad (13)$$

Ikkinchi tomondan, ikki marta almashtirishdan $\psi(1, 2)$ kelib chiqqanligini e'tiborga olsak,

$$P^2\psi(1, 2) = \psi(1, 2)$$

va bundan

$$P^2 = 1, P = \pm 1 \quad (14)$$

natijani olamiz.

Boshqacha usul: aynanlik prinsipiga asosan, zarralarning o'rin almashtirishi uning fizik holatini o'zgartirmaydi. Shu sababli, bu o'rin almashtirishida to'liq funksiyasining fazasi o'zgaradi, ya'ni $\psi(2,1) = e^{i\alpha}\psi(1,2)$ yana bir marta o'rin almashtirilsa, $\psi(1,2) = e^{i2\alpha}\psi(1,2)$; bundan $e^{i2\alpha} = 1$ yoki $e^{i\alpha} = \pm 1$.

(12) va (14) dan ko'rinadiki, akslantirilganda (o'rin almashtirilganda) to'liq funksiyaning ishorasi o'zgarmasligi mumkin ($P = +1$ hol). Bunday to'liq funksiyalarni *simmetrik to'liq funksiyalar* deyiladi; *simmetrik to'liq funksiyalar bilan holati tavsiflanadigan zarralarni, yuqorida aytgandek, boze zarralar yoki bozonlar* deyiladi.

Akslantirilganda to'liq funksiyaning ishorasi o'zgarishi mumkin ($P = -1$ hol). Bunday to'liq funksiyalar *antisimmetrik to'liq funksiyalar* deyiladi; *antisimmetrik to'liq funksiyalar bilan holati tavsiflanadigan zarralarni, yuqorida aytilgandek, fermi zarralar yoki fermionlar* deyiladi.

N zarradan iborat sistema holatining to'liq funksiyasi $\psi(\dots x_i, x_k \dots)$ bo'lsin. Aynanlik prinsipiga asosan, to'liq funksiyaning argumentlari o'rin almashtirsa, fizik holat o'zgarmagani sababli, fizik holatga tegishli bo'lmagan fazaviy o'zgarish bo'ladi, ya'ni $\psi(\dots x_k, x_i, \dots) = e^{i\alpha}\psi(\dots x_i, x_k \dots)$ bunda α — ixtiyoriy haqiqiy kattalik; yana ikkinchi marta o'rin almashtirilsa, avvalgi to'liq funksiyaga kelinadi: $\psi(\dots x_i, x_i \dots) = e^{i2\alpha}\psi(\dots x_i, x_k \dots)$. Bundan $e^{i2\alpha} = 1$, $e^{i\alpha} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ kelib chiqadi. Demak, yuqorida xususiy hol uchun aytganimizdek, sistemada ikki zarra o'rin almashganda uning to'liq funksiyasining ishorasi o'zgaradi ($e^{i\alpha} = -1$ hol) yoki o'zgarmaydi ($e^{i\alpha} = 1$ hol). Ishorasi o'zgarmasa simmetrik, o'zgarsa antisimmetrik to'liq funksiyalar bo'lib, bu o'zgarish yoki o'zgarmaslik zarralarning spinlariga bog'liq ekanligi V. Pauli (1924 — 1925 yillar) tomonidan ko'rsatildi.

Yarimli spinga ega zarralar (masalan, elektron, pozitron, neytrino, proton, neytron va shu kabilar) hamda toq sondagi fermionlardan iborat murakkab zarralar (masalan, tritiy yadrosi: bu yadro 1 ta proton va 2 ta neytrondan iborat; geliy —3 yadrosi: bu yadro 2 ta proton va 1 neytrondan iborat va shunga o'xshashlar) fermionlardan iborat bo'ladi. Fermionlardan tashkil topgan sistemani fermi—sistema deyiladi.

Spinning yo'nalishi ham e'tiborga olingan aniq kvant holatda, Pauli prinsipiga asosan, bittadan ortiq fermion bo'lishi mumkin emas, ya'ni

$$n_i = 0, 1 \quad (15)$$

Spinlari nol yoki butun songa teng bo'lgan hamda juft sondagi fermionlardan tashkil topgan murakkab zarralar — bozonlardan iborat

bo'ladi. (Misol foton, mezonlar, geliy — 4 yadrosi, deytriy yadrosi va shu kabilar). Bozonlardan tashkil topgan sistemani boze—sistema deyiladi. Bozonlar har bir kvant holatda ixtiyoriy sonda bo'lishi mumkin, ya'ni

$$n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

5-§. Almashuv o'zaro ta'sir. Pauli prinsipi

Kvant mexanikaning postulatlaridan biri — Paul prinsipidir. To'liq funksiyaning simmetrik yoki antisimmetrikligi uning fazoviy va spinlari o'zgaruvchilarining almashtirilgandagi xususiyatiga bog'liq.

Agar zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchlari zarralar spinlariga bog'liq bo'lmasa, sistemaning to'liq funksiyasini faqat koordinatalarga va faqat spinlarga bog'liq funksiyalar ko'paytmasi ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N; m_{s1}, m_{s2}, \dots, m_{sN}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) U(m_{s1}, m_{s2}, \dots, m_{sN})$$

Demak, bunday zarralar, agar bozonlardan iborat bo'lsa, u xolda koordinatalar va spinlar funksiyalari bir xil simmetriyalarga ega bo'lishlari shart, ya'ni $\varphi_{\epsilon} U_{\epsilon}$ yoki $\varphi_A U_A$ (bunda indeks "S" simmetrik, "A" esa antisimmetriklikni ko'rsatadi); agar fermionlardan iborat bo'lsa, $\varphi_A U_{\epsilon}$ yoki $\varphi_{\epsilon} U_A$ dan iborat bo'lishi kerak.

Boshqacha aytganda, aynanlik prinsipiga asosan, aynan bir xil zarralarning fazodagi holatini tavsiflovchi to'liq funksiyaning simmetriklik xossasi spin to'liq funksiyaning simmetriklik xossasiga bog'liqdir. Bu esa zarralarning fazodagi harakatida bir—biri bilan ma'lum muvofiqlashish, kvantoviy korrelatsiya (hatto zarralar orasidagi o'zaro ta'sir kuchi bo'lmagan holda ham) mavjudligini ko'rsatadi. Aynan bir xil zarralarning fazodagi holatida (spinlar simmetriyasiga bog'liq ravishda) bunday muvofiqlashishlar kvantoviy korrelatsiyalar sistemaning energiyasi qiymatida o'z aksini topadi. *Bu kvantoviy korrelatsiya bilan bog'liq energiya o'zaro ta'sir almashuv energiyasi deyiladi.* Almashuv ta'sir energiyasi alohida zarralar to'liq funksiyalarining yopuv (qoplashuv) darajasiga bog'liq; bu yopuv sohasi qancha katta bo'lsa, almashuv energiya shuncha katta bo'ladi.

Shuni ta'kidlaymizki, zarralar orasidagi o'zaro ta'sir bo'lmaganda ham, ya'ni aynan bir xil zarralardan tashkil topgan ideal gazda ham, aynanlik prinsipi tufayli almashuv o'zaro ta'sir kelib chiqadi. Almashuv o'zaro ta'sir — kvantoviy korrelatsiya zarralar orasidagi o'rtacha masofa de Broyl to'liq uzunliginnig o'rtacha qiymati tartibida yoki undan kichik

bo'lganda effektiv namoyon bo'ladi. Bunda almashuv o'zaro ta'sirini xarakteri fermionlar va bezonlar uchun har xil bo'ladi. Fermionlar uchun $\psi_A = \varphi_A U_C$ to'liq funksiyada spinlar parallel ekanligidan zarralarning yaqinlashuvida itarish kuchlari namoyon bo'ladi; bu itarish kuchlarini aks ettiruvchi Pauli prinsipi ikki va undan ortiq zarralarning bir holatda bo'lishiga qarshilik (to'sqinlik) qiladi. Bozonlar uchun almashuv o'zaro ta'sir esa, spinlarning antiparallelligidan zarralarning o'zaro tortishish kuchi sodir bo'lishligidir. Shu sababli, bozonlar bir holatda bo'la olishlari mumkin.

O'zaro ta'sirlashuvchi aynan bir xil zarralarning tashqi maydondagi energiyasiga ham kvantoviy korrelatsiya mavjudligi ta'sir ko'rsatadi. Ammo bu ta'sir zarralarning o'rin almashishlaridagi ta'sirga nisbatan ishorasi, odatda, teskari bo'lganligi uchun bu ta'sirlarning hissalarini bir-biriga nisbatan katta yoki kichikligiga qarab, sistemaning umumiy energiyasi ortishi yoki kamayishi mumkin, ya'ni sistema holatining qulayligi spinlarning parallelligida (masalan, ferromagnetizm) yoki antiparallelligida (masalan H_2, O_2 molekullarida) sodir bo'lishi mumkin.

Bir-biriga bog'liq bo'lmagan N ta zarralar sistemasi holatlari uchun

$$\Psi_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \psi_{n_1} \psi_{n_2} \dots \psi_{n_N} \quad (17)$$

funksiya kiritgan edik. Ammo u simmetriklik xossasiga ega bo'lmagani uchun sistema holatini tavsiflashga yaramaydi. Sistemaning holatini tavsiflash uchun (17) ning chiziqli kombinatsiyasidan simmetrik yoki antisimmetrik funksiyalarni olish kerak.

Masalan, ikkita bir zarraviy funksiyalar $\varphi_{n_1}(x)$ va $\varphi_{n_2}(x)$ berilgan bo'lsa, undan simmetriklikka ega bo'lgan holat funksiyalarini hosil qilishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{n_1}(x_1) \varphi_{n_2}(x_2) + \varphi_{n_1}(x_2) \varphi_{n_2}(x_1)] \\ \varphi_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{n_1}(x_1) \varphi_{n_2}(x_2) - \varphi_{n_1}(x_2) \varphi_{n_2}(x_1)] \end{aligned} \quad (18)$$

(18) ifodadan ko'rinadiki, $n_1 = n_2$ yoki $x_1 = x_2$ bo'lganda $\varphi_A = 0$ bo'ladi; ya'ni, antisimmetrik to'liq funksiya bilan tavsiflanuvchi ikki bir xil zarralar (fermionlar) bir holatda yoki bir joyda bo'lishi mumkin emas.

Bu (18) ifodani N ta bir-biri bilan o'zaro ta'sirlashmaydigan zarralar sistemasi uchun umumlashtiraylik:

Shredinger tenglamasi (6) ($H\psi_i = E_i\psi_i$) asosida aniqlanadi; ψ_i - to'liq funksiyalar, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_i, \dots$ - energiya sathlari; ε_i - zarraning i holatdagi energiyasi.

Sistema N ta ideal kvant zarralardan iborat bo'lsin. Bunday sistemani bir zarraviy metod asosida qaraladi¹.

Bu sistema bir zarra uchun statistik ansamblidir. Qaralayotgan zarra nusxalari N energiya sathlariga nisbatan oz (kichik) bo'lsin. Bu holda N ta zarralarning energiya sathlari bo'yicha taqsimlanishi qonunini aniqlaylik.

Faraz qilaylik, N ta zarralar bir zarraviy holatlar bo'yicha quyidagicha taqsimlangan bo'lsin $n_1, n_2, \dots, n_i$, (1.4-rasm)

i	_____	ε_i	n_i
$\vdots$	_____	$\vdots$	$\vdots$
3	_____	ε_3	n_3
2	_____	ε_2	n_2
1	_____	ε_1	n_1

1.4-rasm.

Bunda i ichi holatdagi n_i zarralarning energiyasi $E_i = n_i \varepsilon_i$ dan iborat. Demak, I holatdagi sistema energiyasi $E_I = \sum_i n_i \varepsilon_i$; zarralar soni $N = \sum_i n_i$.

Shuni aytish lozimki, sistemaning kvant holatini aniqlaydigan I , energetik sathlardagi zarralar sonlari to'plami bilan beriladi, ya'ni $I = (n_1, n_2, \dots, n_i, \dots)$ I - energetik sathdagi n_i zarralar ochiq sistemani tashkil qiladi, ya'ni unda n_i o'zgarishi mumkin. Berilgan n_i zarralardan iborat sistemacha uchun (umumiy sistemaning qismi uchun) taqsimot funksiyasini quyidagicha

$$f(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu_0)} \quad (21)$$

yozamiz. Bunda Z i -sistemachaga tegishli statistik yig'indi,

¹ Zarralar orasida o'zaro ta'sir kuchli bo'lganda sistemani kvant mexanika asosida tavsiflash mumkin. Ammo bu masala murakkab va qiyindir. Ko'p zarralarni tadqiqot qiladigan fizikaning bo'limini ko'p zarralar fizikasi deyiladi. Bu bir zarraviy metodni bu'zan mos ravishda o'zgartirib, zarralari orasidagi kuchli o'zaro ta'sir bo'lgan sistemani tavsiflash uchun qo'llab yaxshi natijalar olindi.

$$\beta = \frac{1}{KT} \quad (22)$$

Termodinamik potentsional Φ_i

$$\Phi_i = n_i \mu_i \quad (23)$$

μ kimyoviy potentsial.

Muvozanatli holatda fazalar muvozanati uchun yozilgan

$$T_1 = T_2 = \dots T, \quad P_1 = P_2 = \dots P, \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_i = \mu \quad (24)$$

dan va

$$E_i = n_i \varepsilon_i \quad (25)$$

ifodadan foydalanib, taqsimot qonuni uchun

$$f(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta n_i (\varepsilon_i - \mu)} \quad (26)$$

ifodani olamiz; bunda statistik yig'indi

$$Z = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i (\varepsilon_i - \mu)} \quad (27)$$

normalash sharti

$$\sum_{n_i} f(E_i) = 1 \quad (28)$$

asosida topiladi.

Taqsimot funksiyasi (26) kvant sistema xossasini tavsiflash uchun asos bo'ladi.

7-§. Kvant statistikaning taqsimot funksiyasi

Fizika nuqtai nazardan, har bir energetik holatda zarralar sonining o'rtacha qiymati muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun taqsimot funksiyasi (26) asosida i holatdagi zarralarning o'rtacha soni $\langle n_i \rangle$ ni topaylik.

Umumiy qoidaga asosan, zarralar sonining o'rtachasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i f(E_i)$$

(26) va (27) ifodalarni nazarda tutib, $\langle n_i \rangle$ ni

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\beta Z} \cdot \frac{dZ}{d\mu} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d \ln Z}{d\mu}$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\langle n_i \rangle \equiv f(\epsilon_i)$ belgilash kiritib, oxirgi ifodani yozamiz.

$$f(\epsilon_i) = \frac{d \ln Z}{\beta d\epsilon_i} \quad (29)$$

$f(\epsilon_i)$ ni kvant statistikaning taqsimot funksiyasi deyiladi. Shunday qilib, $f(\epsilon_i)$ ni, ya'ni zarralar soni o'rtachasini aniqlash uchun statistik yig'indi Z ni bilish zarur.

Bizga ma'lumki, yarim spinli zarralar — Pauli prinsipiga bo'ysundigan zarralar — fermionlar bir zarraviy holatda bittadan ortiq bo'la olmaydi, ya'ni $n_i=0,1$.

Butun spinli yoki nol spinga ega bo'lgan zarralar — bozonlar bir zarraviy holatda ixtiyoriy sonda bo'lishi mumkin, ya'ni $n_i=0,1,2,\dots$

Shu sababli, fermionlar (elektronlar, protonlar, neytronlar, pozitronlar va boshqalar), bozonlar (fotonlar, fononlar, mezonlar va juft sonda fermionlardan iborat murakkab zarralar) taqsimot funksiyalarini alohida-alohida qarash lozim bo'ladi.

8-§. Boze-Eynshteyn statistikasi

Bozonlarning bir zarraviy holatlardagi taqsimot qonunini ko'raylik. Bu holda, $n_i=0,1,2,\dots$ Statistik yig'indi

$$Z = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i (\epsilon_i - \mu)} \quad (30)$$

bozonlar uchun $\mu \leq 0$ shart bajarilishi zarur. Aks holda $f(\epsilon_i)$ funksiya $\mu > \epsilon_i$ va $n_i \rightarrow \infty$ da chegaralanmagan va demak fizik ma'noga ega bo'lmagan funksiyaga aylanadi. $\mu \leq 0$ bo'lganda (30) ifoda kamayuvchi geometrik progressiyadan iboratdir. Uning yig'indisi

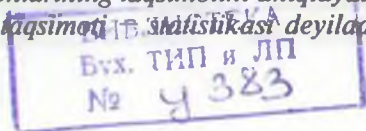
$$Z = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}} \quad (31)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Statistik yig'indi (31) ning ifodasidan foydalanib, $f(\epsilon_i)$ uchun (29) asosida quyidagi ifodani olamiz.

$$\langle n_i \rangle \equiv f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (32)$$

Holatlarda bo'yicha zarralar o'rtacha sonlarining taqsimotini aniqlaydigan (32) ifodani Boze-Eynshteyn yoki Boze taqsimoti taqsimot funksiyasi deyiladi.



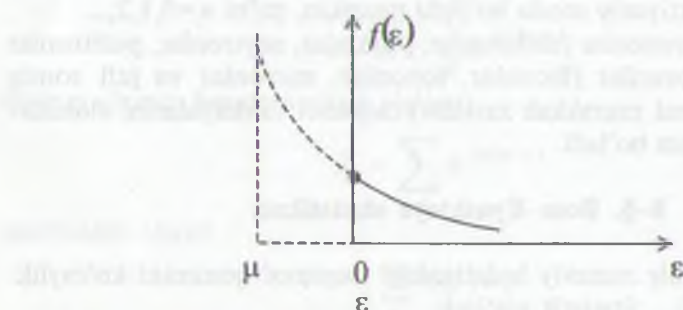
Bozonlarning umumiy soni N va ixtiyoriy holatdagi o'rtacha soni $\langle n_i \rangle$ o'zlarining ma'nolariga ko'ra musbat kattaliklar $N > 0$ va $\langle n_i \rangle > 0$ bo'ladi. Shuning uchun (32) dan $\beta(\epsilon_i - \mu) > 0$ yoki umuman $-\beta\mu \geq 0$ kelib chiqadi. Bundan, $\beta > 0$ ekanligini nazarda tutsak, $\mu \leq 0$ kelib chiqadi.

O'zgaruvchi sonli bozonlar (zarralar), xususan fotonlar, fononlar uchun kimyoviy potensial $\mu = 0$. Umuman bozonlar uchun kimyoviy potensial

$$\mu \leq 0 \quad (33)$$

shartga bo'ysunadi.

Bozonlar uchun $\epsilon \rightarrow \mu$ bo'lganda, Boze taqsimot $\langle n_i \rangle = f(\epsilon_i) \rightarrow \infty$ bo'ladi, $\epsilon = 0$ bo'lganda esa (q.1.5-rasm).



1.5-rasm.

$$f(0) = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \mu < 0 \quad (34)$$

ifoda olinadi.

Umumiy holda kimyoviy potensial μ ni zarralarning umumiy soni ifodasi

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad (35)$$

asosida aniqlanadi. Agar energiya qiymatlari uzluksiz o'zgaradi deb qaralsa,

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (36)$$

ifodadan aniqlanadi. Bunda $g(\epsilon)$ birlik energiya intervaliga to'g'ri kelgan holatlar soni — holatlar zichligidir.

9-§. Fermi-Dirak statistikasi

Fermionlarning bir zarraviy holatlardagi taqsimotida $n_i=0,1$ bo'lganligi uchun, bu holdagi statistik yig'indi Z ifodasi

$$Z = \sum_{n_i} e^{\beta n_i (\mu - \epsilon_i)} = 1 + e^{\beta (\mu - \epsilon_i)} \quad (37)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bir zarraviy holatdagi fermionlarning o'rtacha soni $\langle n_i \rangle$ uchun (29) dan foydalanib olamiz.

$$\langle n_i \rangle \equiv f(\epsilon_i) = \frac{d \ln Z}{\beta d\mu} = \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (38)$$

Fermionlar o'rtacha sonining $\langle n_i \rangle$ bir zarraviy holatlar bo'yicha taqsimoti (38) ni Fermi-Dirak yoki Fermi taqsimoti – statistikasi deyiladi. Qulaylik uchun Fermi-Dirak va Boze-Eynsheyin taqsimotlarini

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_i - \mu)} \pm 1} \quad (39)$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda musbat ishorali ifoda Fermi – Dirak, manfiy ishorali ifoda Boze – Eynshteyn taqsimotlariga tegishli.

Fermi sistema temperaturasi $T=0$ da $\epsilon \leq \mu$ bo'lgan hamma bir zarraviy holatlar (energetik sathlar) zarralar bilan to'lgan bo'ladi; $\epsilon_i > \mu$ sathlarning esa hammasi bo'sh bo'ladi. (q.1.6-rasm).

Temperatura noldan farqli $T>0$ bo'lganda taqsimot funksiya punktir chiziqli bilan ko'rsatilgan (q.1.6-rasm).

Fermionlarning kimyoviy potentsiali μ ni Fermi sathi yoki Fermi potentsiali deyiladi, ba'zan uni Fermi energiyasi deyiladi.

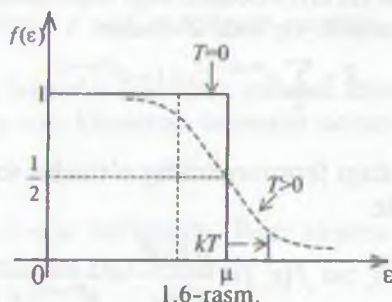
Shuni ta'kidlaymizki, $T>0$ bo'lgandagi Fermi taqsimotining $T=0$ dagi taqsimotdan farqi, asosan Fermi sathining atrofida, kT intervalda bo'ladi. Boshqacha aytganda, $T>0$ da $\epsilon_i > \mu$ energiyali fermionlar asosan Fermi sathi yaqinida bo'ladilar (q.1.6-rasm), ya'ni ular Fermi sathi yaqinidagi sathlardan "bug'lanib" Fermi sathi yuqorisidagi bo'sh sathlarga o'tadilar.

Fermi potentsialini (energiyasi μ ni) zarralarning umumiy soni ifodasidan, ya'ni quyidagi ifodadan

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta (\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (40)$$

aniqlanadi. Agar energiyaning qiymatlari uzluksiz o'zgaradi, deb qaralsa, (40) ning o'rniga quyidagi ifoda

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (41)$$



olinadi; bu (41) ifodadan μ aniqlanadi.

Bunda $g(\epsilon)$ birlik energiya intervaliga to'g'ri kelgan holatlar soni — holatlar zichligidir.

Tarixiy ma'lumot. Boze-Eynshteyn statistikasi 1924 yilda hind fizigi SH. Boze tomonidan fotonlarni tavsiflash uchun kashf etilgan. Shu yili A. Eynshteyn ideal gazlarni tavsiflash uchun ham qo'llagan.

1926 yilda italiyalik olim E. Fermi fermionlarni tavsiflash uchun Fermi-Dirak statistikasini kashf etadi, shu yili ingliz olimi P. Dirak bu statistikaning kvant xossasini tushuntirdi. 1940 yilda shveytsariyalik olim V. Pauli statistika turlari zarralarning spinlariga bog'liq ekanligini ko'rsatdi.

10-§. Klassik statistika — kvant statistikaning xususiy holi. Aynish temperaturasi

Boze va Fermi taqsimotlarini yozaylik:

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1}, \quad (42)$$

bu taqsimotlarda

$$e^{-\beta\mu} \gg 1 \quad (43)$$

shart bajarilsa, maxrajdagi 1 ni e'tiborga olmasdan taqriban yozish mumkin:

$$f(\epsilon_i) \approx \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}} = e^{\beta\mu} \cdot e^{-\beta\epsilon_i} = A e^{-\beta\epsilon_i}, \quad (44)$$

bunda $\beta = 1/kT$, ϵ_i — zarraning to'la energiyasi.

Demak, (43) shart bajarilganda kvant statistikalari Maksvell — Bolsman taqsimotiga, klassik statistikaga o'tadi.

Klassik va kvant statistiklarni umumiy ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + \delta} \quad (45)$$

Bunda

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{klassik zarralar uchun} \\ +1 & \text{fermionlar uchun} \\ -1 & \text{bozonlar uchun} \end{cases}$$

Kvant statistikadan klassik statistikaga o'tishdagi (43) shartni klassik ideal gaz misolida ko'raylik.

(44) ni energiya sathlari bo'yicha yig'ishtiraylik

$$\sum_i f(\varepsilon_i) = \sum_i \langle n_i \rangle = e^{\beta\mu} \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} \quad (46)$$

Hozir ma'lum

$$\begin{aligned} \sum_i \langle n_i \rangle &= N \\ Z_1 &= \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} \end{aligned} \quad (47)$$

uzluksiz hol uchun esa

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (48)$$

bu (47) va (48) ifodalardan foydalanib, (46) ni o'zgartirib yozamiz

$$N = e^{\beta\mu} Z_1$$

yoki

$$e^{-\beta\mu} = \frac{Z_1}{N} = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (49)$$

Demak, (43) ga binoan

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \gg 1 \quad (50)$$

yoki

$$\left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \gg \frac{N}{V} \quad (51)$$

shart bajarilganda kvant statistikasi klassik statistikaga o'tadi. (48) yoki (49) dan ko'rinadiki, bu shart zichlik $n=N/V$, temperatura T va zarra

(molekula, atom) massasi m ga bog'liq, ya'ni sistema yetarli darajada siyrak va yuqori temperaturada bo'lsa, kvant statistikaning o'rniga klassik statistikadan foydalanish mumkin, ammo (50) bajarilmasa, ya'ni

$$\frac{N}{V} \approx \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (52)$$

yoki

$$\frac{N}{V} > \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (53)$$

bo'lsa, sistema xossalarini tavsiflash uchun kvant statistikadan foydalanish zarur.

(49) tenglik asosida $e^{-\beta\mu}$ ni bir necha misollarda baholaylik; bunda $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg /grad $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ erg sek.

A) Vodorod atomlari sistemasini uchun $\exp(-\beta\mu)$ ni baholaymiz; vodorod atom massasi $m \approx 10^{-24}$ g. Bu holda

$$e^{-\beta\mu} \approx 1,89 \cdot 10^{20} \cdot T^{3/2} \frac{V}{N}$$

Agar zichlik $N/V = 1,89 \cdot 10^{20} \text{ sm}^{-3}$ bo'lsa, (bu zichlik $p \approx 7$ atm. $t = 0^\circ \text{C}$ ga to'g'ri keladi). Bu holda

$$e^{-\mu/kT} = T^{3/2}$$

Agar $T \approx 10K$ bo'lsa, $T^{3/2} \approx 31,6K$ bo'ladi.

Demak, $T \approx 10K$ dagi vodorod atomlari sistemasini uchun

$$e^{-\mu/kT} \approx 31,6 \gg 1$$

Hatto shunday past temperaturada ham vodorod atomlari sistemasini klassik statistika asosida qarash mumkin ekan. Bunday, umuman atomlar, molekullarni klassik statistika asosida qarash, tadqiq qilish mumkin. Nihoyatda past temperatura bundan istisno!

b) Elektron uchun ($m_e \approx 10^{-27}$ gr)

$$e^{-\mu/kT} = 2,42 \cdot 10^{15} T^{3/2} \frac{V}{N}$$

ifodani olamiz. $N/V \approx 2,42 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ — bu metallardagi erkin elektronlar zichligiga taxminan teng. Bu holda

$$e^{-\mu/kT} = 10^{-7} T^{3/2}$$

Bundan $T \approx 10000K$ bo'lganda ham, $e^{-\mu/kT} \approx 0,1$ bo'ladi, ya'ni

$$e^{-\mu/kT} \ll 1$$

bo'ladi.

Demak, metallardagi elektronlarni kvant statistika asosida qarash kerak. Yarim o'tkazgichlarda erkin elektronlar zichligi

$$\frac{N}{V} \sim \frac{(10^9 - 10^{17})}{sm^3}$$

tartibda bo'ladi. Agar temperatura $T=400 K$ bo'lsa,

$$e^{-\beta\mu} \sim (80 \div 8 \cdot 10^9) \gg 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, yarim o'tkazgichlardagi elektronlarni (tuhuningdek, kovaklarni) tavsiflashda kvaziklassik statistikani qo'llash o'rinli bo'ladi.

(52) ifodan temperatura T ni topaylik

$$T = T^* = \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi mk} = \alpha \frac{h^2}{mk} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (54)$$

bunda $\alpha = 2\pi$.

Bu temperatura T^* ni aynish temperaturasi deyiladi.

(54) ifodada yacheykalar (holatlar) soni sathlar soniga teng deb qabul qilingan. Ammo past temperaturalarda kvant mexanik xossalar namoyon bo'la boshlaydi. Shu tufayli zarralarning aynanlik prinsipini e'tiborga olish natijasida holatning aynish karrasini hisobga olish lozim. Boshqacha aytganda, holatlar soniga moslashtirilgan N ning o'rniga sathlar sonini olish uchun, (54) ifodada N ning o'rniga N/g ni yozish lozim.

U holda aynish temperaturasi

$$T^* = a \frac{h^2}{mk} \left(\frac{N}{gV} \right)^{2/3}. \quad (55)$$

Ifoda bilan aniqlanadi, bunda $a = 2\pi$. klassik ideal zarralar uchun. Boze va Fermi taqsimotlari asosida kvant ideal zarralar uchun aniq hisoblash ko'rsatadiki,

$$\alpha = \begin{cases} 3,3/\xi^{2/3} & \text{ideal boze-gaz uchun} \\ 0,5(6\pi/\xi)^{2/3} & \text{ideal fermi-gaz uchun} \end{cases}$$

$\xi = 2S + 1$ uchun spinlar (oriyentatsiyalari) vaziyatlari e'tiborga olingandagi faktor (omil).

Misol He^4 uchun $T^* \sim 3K$; metallardagi elektronlar uchun $T^* \sim 10^4 K$. Aynish temperaturasidan pastda gaz zarralarining (molekulalar, atomlarning) aynanlik prinsipi namoyon bo'la boshlaydi. Boze-gaz uchun aynish temperaturasidan past temperaturada Boze-Eynshteyn kondensatsiyasi hodisasi sodir bo'la boshlaydi.

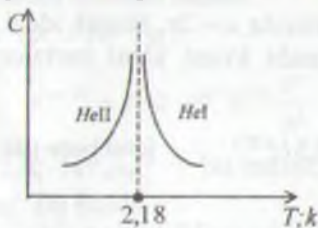
Fermi-gaz uchun aynish temperaturasi Boze-gaz kabi fazaviy o'tishlar bilan bog'langan emas, bu temperatura Fermi energiyasi bilan aniqlanadi (masalan, μ/k bilan aynish temperaturasi aniqlanadi). Elektronlar sistemasi uchun $T^* \approx 10^4 K$ tartibda.

Temperaturaning bu $T \leq T^*$ qiymatlarida aynanlik prinsipi namoyon bo'lganligi uchun, gazning xossalari klassik gaz xossasidan farqli bo'ladi. Shu sababli, masalan, issiqlik sig'im, bosimning temperaturaga bog'liqligi klassik gazdagidan farqli bo'ladi.

Temperatura pasayishi bilan, agar zarralar orasidagi o'rtacha masofa r ,

zarraning de Broyl to'lqin uzunligini $\bar{\lambda} = \frac{h}{mv}$ dan kichik bo'la boshlasa, ya'ni $\bar{\lambda} > r$ bo'lgan holda aynanlik prinsipi kuchliroq (muhimroq) namoyon bo'la boradi. Bu yerda shuni ta'kidlaymizki, real gaz va suyuqliklardan faqat geliy atomlari uchun $T < T^*$ shart bajariladi. Qolgan atomlar sistemasi aynish temperaturasi T^* ga qadar, ya'ni ulardagi kvant xossalari namoyon bo'lgunga qadar qattiq agregat holatlariga o'tib ulguradilar. Geliy He^4 suyuqlik uchun esa bir tomondan atom massasi kichik, ikkinchi tomondan geliy suyuqlikning massa zichligi yetarli darajada katta.

Geliy gaz 4,2 K da geliy suyuqlikka aylanadi; temperatura yanada pasaytirilsa, 2,18 K da geliy I suyuqlikdan geliy II suyuqlikka o'tadi, ya'ni bu temperaturada fazaviy o'tish bo'ladi (1.7-rasm). Kvant holatdagi geliy II suyuqlik o'ta oquvchanlik xossasiga ega bo'ladi, u yopishqoqlikka ega bo'lmaydi, ya'ni uning yopishqoqlik koeffitsiyenti nolga teng bo'ladi. 2,18 K temperaturada issiqlik sig'im C ning o'zgarishi λ ko'rinishda bo'ladi.



1.7-rasm.

11-§. Holatlar zichligi

Bir zarraviy metodga asosan, kvant sistema zarralarning umumiy soni

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i 1/(e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1), \quad (57)$$

Umumiy energiyasi E

$$E = \sum_i E_i = \sum_i \epsilon_i n_i = \sum_i \langle \epsilon_i n_i \rangle = \sum_i \frac{\epsilon_i}{(e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1)} \quad (58)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. Bunda

$$f(\epsilon_i) \equiv \langle n_i \rangle = \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1)}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (59)$$

Bu ifodalarda “+” ishora Fermi taqsimotiga, “-” ishora Boze taqsimotiga tegishlidir.

Faraz qilaylik, energiya sathlari bir-biriga juda yaqin, zich joylashgan bo'lsin. Bunday hol sistemaning hajmi V yetarli darajada katta bo'lganda

sodir bo'ladi, chunki energiya $E \sim \frac{1}{V}$ bo'lganligi uchun bir zarraviy holatlar zichligi kattalashib, diskretlik xarakteri kamayib, sathlar bir-biriga yaqinlashadi. Bu holda diskret holatlar o'rniga energiya uzluksiz qiymatlarni qabul qiladi deb hisoblash mumkin. Bu shart bajarilganda, (57), (58) ifodalarda yig'indi ishorasini integrallash bilan almashtirish mumkin bo'ladi. Buning uchun $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ intervalda $g(\epsilon)d\epsilon$ holatlar (energiya sathlari) mavjud deb qaraylik. Energiyaning qiymatlari uzluksiz o'zgargan bu holda (57) va (58) ifodalarni

$$N = \int \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1)}, \quad (60)$$

$$E = \int \frac{\epsilon g(\epsilon)d\epsilon}{(e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1)}, \quad (61)$$

ko'rinishda yozish mumkin: bunda $g(\epsilon)$ holatlar zichligi.

Bir zarraviy holatlar zichligi $g(\epsilon)$ ni aniqlaylik, $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ intervaldagi holatlar soni quyidagicha aniqlanadi:

$$dn(\epsilon) = g(\epsilon)d\epsilon = \frac{d\Gamma(\epsilon)}{h^3} \quad (62)$$

$$d\Gamma(\epsilon) = \left[\int dx dy dz \right] \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right] p^2 dp = V \cdot 4\pi p^2 dp = 4\pi V \cdot p^2 dp \quad (63)$$

Zarra spini vektorining fazodagi oriyentatsiyalari (vaziyatlari) soni ξ ni e'tiborga olinsa, holatlar soni

$$dn(\varepsilon) = \frac{4\pi V \xi}{h^3} p^2 dp \quad (64)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunda oriyentatsiyalar soni $\xi = 2S + 1$; S – kvant son. $S = 1/2$ spinli fermionlar (elektron, proton, neytron va boshqalar) uchun $\xi = 2$; $S = 1$ spinli bozonlar uchun $\xi = 3$ (ammo foton uchun $\xi = 2$). Umumiy holda ε bilan p orasidagi bog'lanish $\varepsilon(p)$ murakkab. Ammo ideal gaz uchun, ya'ni zarraning erkin harakati uchun

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad (65)$$

ifoda o'rinli. Erkin zarra uchun (65) dan foydalanib holatlar soni (zichligi) (64) ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz.

$$dn(\varepsilon) = g(\varepsilon) d\varepsilon = 2\pi V \xi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (66)$$

bunda holatlar zichligi

$$g(\varepsilon) = a V \varepsilon^{1/2} \quad (67)$$

$$a = 2\pi \xi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \quad (68)$$

Shunday qilib, zarralarning umumiy soni N va energiyasi E uchun

$$N = aV \int \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1)}, \quad (69)$$

$$E = aV \int \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1)}, \quad (70)$$

ifodalarni olamiz. Bu ifodalardan β va μ larni aniqlash mumkin.

II b o b. BOZE-EYNSHTEYN STATISTIKASINING TATBIQI

1-§. Kirish

Boze – taqsimoti $f(\varepsilon_i)$, , zarralar soni N va energiya E

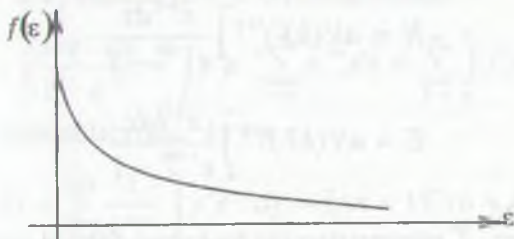
$$f(\varepsilon_i) \equiv \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1},$$

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \langle n_i \rangle$$

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum_i \varepsilon_i \langle n_i \rangle$$

ifodalar bilan aniqlanadi; bunda $f(\varepsilon_i)$ i holatdagi bozonlarning o'rtacha soni.

Bir zarraviy metodda energiya sathi ε , sistemaning hajmi V ga teskari proporsional bo'lgani sababli, hajm kattalashgan sari sathlar bir-biriga yaqinlashib boradi. Hajm yetarli darajada katta bo'lganda, diskret energiya sathlari o'rniga ular hosil qilgan zonani qarash mumkin bo'ladi, ya'ni ε ni uzluksiz o'zgaradi deb qabul qilinsa bo'ladi (2.1 rasm).



2.1-rasm.

Biz yuqorida $\varepsilon \geq 0$ bo'lgani holda μ musbat qiymat qabul qilishi mumkin emasligini, ya'ni $\mu \leq 0$ ekanligini aytgan edik. Agar aks hol bo'lsa, $\varepsilon = \mu$ bo'lganda N va E cheksiz qiymatlar qabul qiladi. Bu esa real holda mumkin emas, u tajribaga ziddir.

Agar $\frac{|\mu|}{kT} \gg 1$ shart bajarilsa, sistema klassik sistemaga o'tishini yuqorida biz ko'rdik. Boze-gaz, agar $|\mu| \sim kT$ bo'lsa, qisman aynigan holatga o'tadi.

2-§. Aynilgan boze — gaz. Boze — kondensatsiya

Bozonlar soni N va energiyasi E ni uzluksiz holatlar uchun yozaylik. $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ intervaldagi holatlar sonini $g(\epsilon)d\epsilon$ bilan belgilasak, (2) va (3) ni quyidagicha yozish mumkin.

$$N = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \quad (4)$$

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\epsilon g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \quad (5)$$

Erkin bozonlar uchun $g(\epsilon)d\epsilon = a V \epsilon^{1/2} d\epsilon$ ekanligidan

$$N = aV \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon - \beta\mu} - 1} \quad (6)$$

$$E = aV \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\beta\epsilon - \beta\mu} - 1}, a = 2\pi(2m/h^2)^{3/2} \quad (7)$$

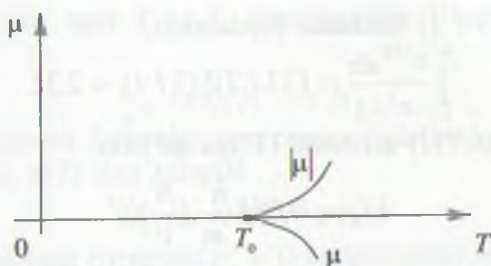
(6) va (7) larda $\beta\epsilon = \epsilon / kT = x$ belgilash kiritaylik. U holda

$$N = aV(kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta\mu} - 1} \quad (8)$$

$$E = aV(kT)^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^{x-\beta\mu} - 1} \quad (9)$$

(8) asosida μ ni $\frac{N}{V}, T$ parametrlarning funksiyasi sifatida aniqlash mumkin.

(6) ifodadan ko'rinadiki, agar temperatura pasayib borsa, unga mos $|\mu|$ ham shunday kamayib borishi kerakki, natijada integral ishorasi ostidagi ifoda qiymati va demak bozonlar soni N o'zgarmasin (2.2 rasm). Temperatura kamayib borishi bilan $|\mu|$ kamayib borib (μ ortib borib) ma'lum temperatura T_0 da $\mu = 0$ qiymatni qabul qiladi. Temperaturaning yanada kamayishi bilan, ya'ni $T \leq T_0$ sohada $\mu = 0$ bo'lib qolaveradi. Bu $T \leq T_0$ sohada $\mu = 0$ bo'lgani uchun temperatura T o'zgarganda (6) yoki (8) ning o'ng tomoni o'zgaradi, ammo ularning chap tomonidagi zarralar soni N esa o'zgarmasligi kerak edi. Bu ziddiyatni Eynshteyn paradoksi deyiladi.



2.2-rasm.

$\mu = 0$ bo'lgandagi temperatura T_0 ni (8) asosida quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$N = aV(kT_0)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} \quad (10)$$

Misol. (8) va (9) ifodalardagi

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{x-\alpha} - 1}, \alpha = \beta\mu \leq 0, \mu \leq 0 \quad (1)$$

Integralni $T \leq T_0$ sohasida aniqlang. $T \leq T_0$ sohada $\mu = 0$.

Yechish. $T \leq T_0$ sohada $\mu = 0$ Shuning uchun

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^n e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^\infty x^n e^{-x} \sum_{k=0}^\infty e^{-kx} dx = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty x^n e^{-kx} dx, \quad (2)$$

O'zgaruvchini almashtiraylik: $kx = y$

$$I_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}} \int_0^\infty y^n e^{-y} dy = \xi(n+1) \Gamma(n+1) \quad (3)$$

Bunda zeta – funksiya $\xi(n)$ va gamma-funksiya $\Gamma(n)$

$$\xi(n) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^n}; \Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy$$

$$1) \quad n = 1/2, \Gamma(1/2 + 1) \xi(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2,612 \approx 2,31$$

$$2) \quad n = 3/2, \Gamma(3/2 + 1) \xi(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \xi(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot 1,341 \approx 1,78$$

$I_n = \Gamma(n+1)\xi(n+1)$ ifodadan foydalanib,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = \Gamma(3/2)\xi(3/2) = 2,31 \quad (11)$$

qiymatni topamiz. (11) qiymatni (10)ga qo'yilsa,

$$kT_0 = 0,084 \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (12)$$

ifoda topiladi.

Yana ta'kidlaymizki, $T \leq T_0$ sohada $\mu = 0$ va temperatura kamayganda integral ifoda (6) yoki (8) ham kamayadi. Ammo (6) ning chap tomoni N esa o'zgarmasligi kerak. Bu paradoksni quyidagicha hal etiladi. (6) integral ifoda quyidagi

$$N = \sum_i < n_i > \quad (13)$$

ifodadagi yig'indi integral bilan almashtirish orqali olingan. (13) ni asosiy holatdagi ($\varepsilon = 0$) zarralar soni N_0 va uyg'ongan holatdagi zarralar soni N^* dan iborat deb qaraylik:

$$N = N_0 + N^*, \quad (14)$$

bunda

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, N^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \quad (15)$$

Asosiy holatdagi zarralar soni N_0 temperatura kamayishi bilan, uning ifodasidan ko'rinadiki, ortib boradi va $\mu = 0$ bo'lganda hamma zarralar shu $\varepsilon_0 = 0$ asosiy holatga o'tadilar. Shu sababli, $\varepsilon_0 = 0$ energiyali asosiy holatni $\mu = 0$ bo'lgan $T \leq T_0$ sohada maxsus qaraladi. Uyg'ongan holatlardagi zarralar N^* uchun yig'indi ifodani yana integral ifoda bilan almashtiriladi:

$$N^* = aV \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \approx aV(kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x - \beta\mu} - 1}, \quad (16)$$

bunda integralning quyi chegarasi nol bilan almashtiriladi (bu unchalik muhim xato emas).

Endi $T \leq T_0$ soha uchun ($\mu = 0$) (10) va (16) ifodalardan asosiy holatdagi zarralar sonini aniqlaymiz:

$$N_0 = N - N^* = N\left(1 - \frac{N^*}{N}\right) = N\left[1 - (T/T_0)^{3/2}\right] \quad (17)$$

(17) dan ko'rinadiki, agar $T \rightarrow T_0$ (temperatura T kritik temperatura N_0 ga intilsa)

$$N_0 \rightarrow 0, N^* \rightarrow N \quad (18)$$

bo'ladi, ya'ni hamma bozonlar uyg'ongan holatlarda bo'ladi. Agar $T \rightarrow 0^\circ K$ bo'lsa, (17) dan olinadi:

$$N_0 \rightarrow N, N^* \rightarrow 0 \quad (19)$$

bu holda hamma zarralar energiyasi $\epsilon_0 = 0$ bo'lgan asosiy holatda bo'ladi.

Shunday qilib, $T \leq T_0$ da temperaturaning kamayishi bilan uyg'ongan holatlardan zarralar asosiy holatga o'ta boshlaydilar. *Bu hodisani Boze-Kynshteyn kondensatsiyasi deyiladi.* (Bu hodisa bug'ning suyuqlikka aylanishiga o'xshaydi. Ammo bu tashqi ko'rinishdagina o'xshashlik, xolos) Yuqorida keltirilgan paradoks (Eynshteyn paradoksi) ana shunday hal etiladi.

$T \leq T_0$ bo'lganda boze-gazning to'la energiyasi E ni (8) dan

$$E = aV(kT)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1}, \quad (20)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunda

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} = \Gamma(5/2) \zeta(5/2) = 1,78 \quad (21)$$

Demak,

$$U \equiv E = aV(kT)^{5/2} \Gamma(5/2) \zeta(5/2), \quad (22)$$

bunda

$$aV = 2\pi \xi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} V \quad (23)$$

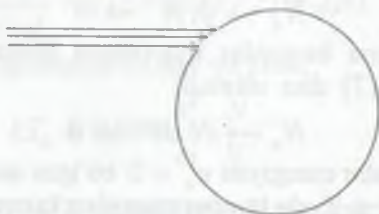
Temperatura $T < T_0$ bo'lganda, (22) dan foydalanib, bosim P , issiqlik sig'imi C_V va entropiya S ni quyidagi munosabatlardan topish mumkin:

$$P = \frac{2}{3} U, C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}, S = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N} \quad (24)$$

3-§. Muvozanatli nurlanish. Foton gaz

V hajmli idishning tirqishidan elektromagnit to'lqinlar kirib, T temperaturali idish devori bilan termodinamik muvozanatli holatga kelgan bo'lsin (2.3-rasm). Bu nurlanish idishga kirib, qaytib chiqmaganligi uchun

qora jism nurlanishi deb yuritiladi. Bu muvozanatli nurlanishning chastota qiymatlari bo'yicha taqsimlanishi qonunini aniqlaylik.



2.3-rasm.

Idish ichida muvozanatli holatdagi elektromagnit — bu turg'un to'liqlardir. Turg'un elektromagnit to'liqlarni (modalarni) umumiy tasavvurga ko'ra idish ichida bir-biriga bog'liq bo'lmagan ossillyatorlar (fotonlar)dan iborat deb qaraladi. Shunday qilib, muvozanatli nurlanishning chastotalar bo'yicha taqsimlanishi qonunini aniqlash — bu (foton gazda) fotonlarning (ossillyatorlarning) energiyalar (chastotalar) bo'yicha taqsimlanishini topishdan iborat. $\omega, \omega + d\omega$ chastota intervaliga to'g'ri kelgan ossillyatorlar sonini

$$Vg(\omega)d\omega \quad (25)$$

bilan belgilaylik. Bu holda birlik hajmga to'g'ri kelgan bunday ossillyatorlar soni

$$g(\omega)d\omega \quad (26)$$

bilan aniqlanadi.

Ossillyatorning qabul qilishi mumkin bo'lgan energiyalari, kvant mexanikada ko'rsatiladiki, $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Bu qiymatlarning o'rtachasi esa

$$\langle \epsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n f(\epsilon_n) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (27)$$

ekanligini aniqlagan edik (q. 9-§, VI bob 1-qism).

4-§. Plank formulasi

$\omega, \omega + d\omega$ intervalga to'g'ri kelgan nurlanish energiyasi $dU(\omega, T)$ (26) ga (27) ifodalar asosida quyidagicha yoziladi.

$$dU(\omega, T) = \langle \epsilon(\omega) \rangle g(\omega)d\omega \quad (28)$$

Ikkinchi tomondan, berilgan temperaturada differensial $dU(\omega, T)$ ni yozish mumkin.

$$dU(\omega, T) = \left(\frac{\partial U(\omega, T)}{\partial \omega} \right) d\omega = \rho(\omega, T) d\omega \quad (29)$$

birlik chastota intervaliga to'g'ri kelgan nurlanish energiyasi zichligi $\rho(\omega, T)$ uchun (28) va (29) ni solishtirib,

$$\rho(\omega, T) = \epsilon(\omega) > g(\omega) \quad (30)$$

ifodani olamiz.

Birlik chastota intervaliga to'g'ri kelgan ossillyatorlar (holatlar) soni $g(\omega)$ ni aniqlaylik.

$\omega, \omega + d\omega$ intervaldagi holatlar sonini (yoki shu intervaldagi modalar sonini) quyidagicha topamiz.

$dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ fazaviy fazo elementida holatlar soni

$$\frac{d\bar{r} d\bar{p}}{h^3} = \frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (31)$$

ga teng. V hajmdagi holatlar sonini topish uchun (31) ni integrallab

$$\frac{V d\bar{p}}{h^3} = \frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3} \quad (32)$$

ifodani olamiz.

Biz qarayotgan masalada yo'nalishlardan qat'i nazar, faqat chastotalar (energiya yoki impuls) qiymatlari intervali muhimligi uchun (32) da sferik koordinatalar sistemasiga o'tib, so'ng burchaklar bo'yicha integrallash kerak, ya'ni

$$\frac{V d\bar{p}}{h^3} \rightarrow \frac{V}{h^3} p^2 dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \quad (33)$$

Yorug'lik nazariyasida $\bar{p} = \hbar k$; bunda

$$p = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{c} \quad (34)$$

(34) ni (33) ga qo'yib

$$\frac{4\pi V \hbar^3}{h^3} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega = \frac{V \omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega, \quad (h = 2\pi \hbar) \quad (35)$$

ifodani olamiz. Elektromagnit to'lqinlar ko'ndalang to'lqin bo'lgani uchun ikki qutblanish (ikki tekislikda $\vec{E}$ vektor tebranishi) mumkin, shu sababli (35) ni ikkiga ko'paytirib, izlanayotgan holatlar (ossillyatorlar, modalar) sonini topamiz ($V = 1 \text{ m}^3$ deb olaylik).

$$g(\omega)d\omega = 2 \cdot \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} d\omega \quad (36)$$

bunda c — elektromagnit to'liqin tezligi.

Birlik hajm, birlik chastota intervaliga to'g'ri kelgan nurlanish energiyasi (elektromagnit energiyasi) ifodasi (30) ni aniqlaymiz:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (37)$$

Eslatma: Agar ossillyatorning asosiy holati e'tiborga olinmasa, uning energiyasi $\epsilon_n = n\hbar\omega$, huddi shunday ifoda Plank tomonidan qabul qilingan edi, statistik yig'indi.

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \quad x = \hbar\omega / kT; \quad \langle n \rangle = \frac{1}{e^x - 1}$$

o'rtacha energiya

$$\langle \epsilon(\omega) \rangle = \langle n\hbar\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} \quad (38)$$

va nurlanish energiyasi zichligi Plank gipotezasiga asosan,

$$\rho_n(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right) \quad (39)$$

ifodalar bilan aniqlanadi.

(37) ifodani o'zgartirib yozaylik

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right) \quad (40)$$

(39) va (40) dan ko'rinadiki, (40) da qavs ichidagi birinchi had asosiy holatning energiyasi $\hbar\omega / 2$ tufayli paydo bo'lgan. (Vakuum fluktuatsiya foni $\hbar\omega / 2$).

Adabiyotlarda, odatda sanoq sistemasining boshi asosiy holatga ko'chiriladi (yoki boshqacha aytganda, asosiy holat hisobga olinmaydi) deb, nurlanish energiyasining chastota qiymatlari bo'yicha taqsimot uchun Plank formulasi (39) qabul qilinadi.

Eng muhim taqsimot funksiyasi

$$f(\epsilon_n) = \frac{e^{-\beta\epsilon_n}}{\sum_n e^{-\beta\epsilon_n}} = \frac{e^{-x/2} e^{-nx}}{e^{-x/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} \quad (41)$$

ifodasida asosiy holatning ishtiroki bo'lmaydi. Shu sababli, nurlanishning spektral taqsimoti Plank formulasi (39) bilan tavsiflanadi.

1. Plank formulasini quyidagicha yozaylik

$$\rho_*(\omega, T) = \frac{(kT)^2}{\pi^2 c^3 \hbar^2} \frac{x^3}{e^x - 1} = A\rho(x), \quad (42)$$

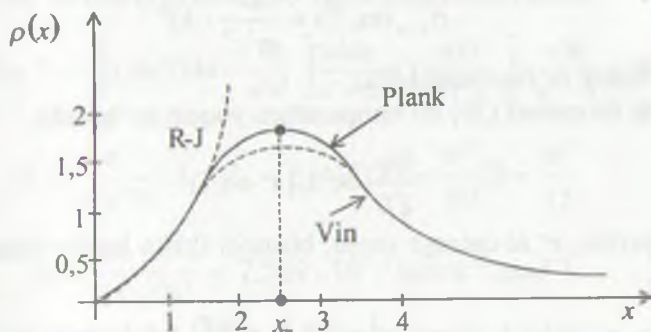
bunda

$$A = (kT)^3 / (\pi \hbar)^2 c^3, \rho(x) = x^3 / (e^x - 1)$$

(42) ni geometrik nuqtai nazardan tahlil qilish uchun uning grafigini chizaylik (q.2.4-rasm).

2. 2.4-rasmdan ko'rinadiki, $x = \hbar\omega / kT$ ning (ya'ni chastotaning) ma'lum qiymati x_m da $\rho(x)$ (ya'ni $\rho(\omega, T)$) maksimumdan o'tadi. Ekstremum sharti

$$\frac{\partial \rho(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_m} = \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \quad (43)$$



2.4-rasm.

Bu (43) tenglamaning taqribiy ildizi $x_m \approx 2,5$ dan ortiqroq. Bunda

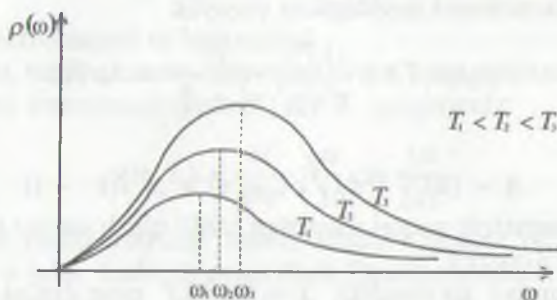
$$\omega_m = \frac{2,5}{\hbar} kT = aT \quad (44)$$

ekanligi kelib chiqadi; $\omega = 2\pi c / \lambda$ ni e'tiborga olib, (44) dan

$$\lambda_m \cdot T = b \quad (b = 2\pi c / a) \quad (45)$$

ifodani olamiz; a, b lar belgilashlardan ko'rinadiki, ω, T larga bog'liq bo'lmagan doimiylar. (44) yoki (45) ni Vinning siljish qonuni deyiladi.

Temperatura ortishi bilan chastotaning ω_m qiymati o'ng tomonga (to'liq uzunligining λ_m qiymati esa chap tomonga) siljib boradi (2.5-rasm).



2.5-rasm.

3. Reley-Jins qonuni. Ossillyator energiyasining o'rtacha qiymati uchun klassik ifoda $\langle \epsilon \rangle_{cl} = kT$ qiymat olib, spektral zichlik uchun

$$\rho_{r-x}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot kT \quad (46)$$

ifodani Reley va Jins aniqladilar.

Plank formulasi (39) da temperatura yuqori bo'lganda

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1, (x \ll 1)$$

shart bajarilsa, e^x ni qatorga yoyib, birinchi ikkita hadlar bilan cheklanib qolamiz

$$\frac{1}{e^x - 1} \approx \frac{1}{x} = \frac{kT}{\hbar\omega}$$

Demak, yuqori temperaturada (klassik hol) Plank formulasidan:

$$\rho_n(\omega, T) \approx \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\hbar\omega} kT = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$$

Reley-Jins qonuni (46) kelib chiqadi.

Yuqori temperaturada klassik fizika o'rinli sohada Reley-Jins qonuni tajribadan olingan natijaga yaqin keladi (2.4 rasm). Ammo Reley-Jins qonuni katta chastotalarda, past temperaturalarda tajribadan keskin farq qiladi.

4. Yuqori chastotalarda, past temperaturada ossillyatorning $\langle \epsilon(\omega) \rangle$ energiyasi uchun Bolsman taqsimotidan foydalanib, Vin quyidagini yozdi

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle_B = \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \quad (47)$$

(47) ni e'tiborga olsak, nurlanish spektral qonuni $\rho(\omega, T)$ uchun

$$\rho_B(\omega, T) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \quad (48)$$

Vinning qonunini olamiz. YUqori chastotalarda Vin qonuni tajribadan olingan natijalarga mos kelib, past (kichik) chastotalarda undan farqlanadi (2.4 rasm).

$\hbar\omega \gg kT$ bo'lganda

$$\frac{1}{e^x - 1} \approx e^{-x}$$

deb olinsa, Plank formulasidan Vin qonuni (48) kelib chiqadi.

5. Plank formulasi asosida V hajmdagi nurlanishning to'la energiyasi $U(T)$ ni hisoblash mumkin. Buning uchun $dU(\omega, T) = \rho(\omega, T)d\omega$ ni chastotalarning barcha qiymatlari bo'yicha integrallash kerak.

$$U(T) = V \int dU(\omega, T) = \int_0^\infty \rho_B(\omega, T)d\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^x - 1} = V \frac{(kT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = V\sigma T^4 \quad (49)$$

$$\sigma = \frac{\kappa^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} J_3; \quad J_3 = \xi(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{90} 3! = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2}{15} \frac{\kappa^4}{c^3 \hbar^3} = 7,569 \cdot 10^{-16} \text{ эргсм}^{-3} \text{ град}^{-4} \quad (50)$$

(49) ifodani (formulani) Stefan — Bolsman qonuni deyiladi; σ ni Stefan-Bolsman doimiysi deyiladi.

Izoh. Fotonlar — bu bozonlar. Bozonlar uchun taqsimot qonuni

$$f(\varepsilon_i) = \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \quad (1)$$

Fotonlar uchun $\mu = 0$ Fotonlarning o'rtacha energiyasi

$$\langle E_i \rangle = \varepsilon_i \langle n_i \rangle = \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \quad (2)$$

Fotonlar uchun $\varepsilon_i = \hbar\omega$ ekanligini nazarda tutsak, (2) asosida Plank formulasi (39) ni olamiz, ya'ni Boze statistikasini fotonlar uchun qo'llab $\mu = 0$ ekanligini nazarda tutib,

$$\rho_n(\omega, T) = g(\omega) \cdot \langle E \rangle$$

ifodadan Plank formulasi osonlik bilan olinadi.

Tarixiy ma'lumot. Vinning nurlanish qonuni nemis olimi V. Vin tomonidan 1893-yilda kashf etilib, 1896-yilda u qonun yanada aniqlashtirildi. Vinning siljish qonuni $\lambda T = b$ shu Vinning nurlanish qonunidan 1893-yilda keltirib chiqarilgan.

Qora jism nurlanishi qonuni (46) ingliz olimi Reley tomonidan 1900-yilda energiyaning teng taqsimlanish haqidagi klassik tasavvurlar asosida keltirib chiqarilgan. Ingliz olimi J. Jins 1905-yillarda klassik statistika asosida shu nurlanish qonunini qayta ochadi.

1879-yilda avstriyalik fizik I. Stefan qora jism nurlanishi uchun tajriba asosida nurlanish energiyasi temperaturaning to'rtinchi darajasiga proporsional ekanligini kashf etdi. 1884-yilda avstriyalik olim L. Bolsman nazariy jihatdan bu qonunni termodinamika qonunlariga tayanib asosladi. Ammo nurlanishning Plank nazariyasi yaratilgandan keyingina Stefan-Bolsman doimiysini hisoblash imkoni tug'ildi.

XIX asrning oxiriga borib, klassik fizikaning asosiy uchta bo'limi: klassik mexanika, klassik elektrodinamika, termodinamika mukammal ishlangan edi. Ammo bu bo'limlarning issiqlik nurlanishi muammosining qarashda kuchli va kuchsiz (zaif) tamonlari yaqqol ko'rina boshladi. Xuddi shu davrda, 1900-yilda nemis fizigi M. Plank bu nurlanish muammosini hal etish uchun nihoyatda dadil favqulodda g'oya aytadi: nurlanishda energiya diskret porsiyalar – kvantlar bilan sodir bo'ladi. Shu gipoteza munosabati bilan hozirgi zamon mikro fizikasida muhim rol o'ynaydigan Plank doimiysi $h = 6,63 \cdot 10^{-27}$ ergsek ($\hbar = h / 2\pi = 1,054 \cdot 10^{-27}$ ergsek) kiritildi.

5- §. Qattiq jisn issiqlik sig'imining nazariyasi

1. Kristall qattiq jism. Faraz qilaylik, kristall qattiq jismda atomlar regular joylashgan bo'lsin (yacheykalar qa'tiy ravishda takrorlanib joylashgan bo'lsin) bunday joylashishlar to'plami kristallik panjarani hosil qiladi. *Kristall panjaraning har bir tugunida atom joylashgan. Bu ideal kristall modelidir.*

Kristalning aniq nazariyasi elektronlar va atomlar (yadrolar)ning o'zaro ta'siri e'tiborga olingan tenglamani yechishga asoslangan bo'lishi zarur. Bunday aniq tenglama asosida olingan energiya sathlaridan statistik yig'indi (integral) aniqlanishi, so'ng undan termodinamik kattaliklar aniqlanishi lozim. Ammo bu yo'l amalda bajarilishi mumkin bo'lmagan qiyinchilikka

olib boradi. Shu sababli, masalani soddalashtiruvchi qo'yidagi ikki asosiy yaqinlashuvlar — adiabatik va garmonik yaqinlashuvlar qabul qilinadi.

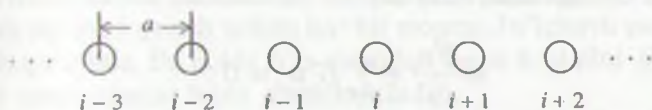
Ma'lumki, elektronning massasi yadroning massasiga nisbatan juda kichik. Shu sababli yadro siljiganda elektronlar tezda (yadro siljishiga ketgan vaqtga nisbatan tezda) yadroga «muvofiglanib» oladi. Boshqacha aytganda, yadro tebranishi davri elektronlarning relaksatsiya vaqtiga nisbatan juda katta bo'lgani uchun yadro harakatiga qaraganda elektronlar harakatini alohida ajratib qarash mumkin, ya'ni elektronlar bir onda (juda tez) yadroga muvofiglashishga ulgurganliklari sababli elektronlarning holati yadroning berilgan vaqtdagi (ondagi) koordinatalari bilan aniqlanadi. Mana shunday usul bilan qarash-adiabatik yaqinlashishdan iborat.

Adiabatik yaqinlashishda kristall atomlarining (ionlarining) tebranishi deyilganda, yadrolarning tebranishlari tushuniladi. Bunday qarash (tasavvur) kristall uchun faqat yadrolarning koordinatalariga bog'liq bo'lgan potensial energiya kiritilishiga imkon beradi.

Agar kristall atomlarining tebranish amplitudalari kristall panjarasi qadamiga nisbatan katta bo'lmaganda, kristall potensial energiyasini qatorga yoyib, uning kvadratik hadi bilan cheklanish mumkin. Bu holda kristallning atomlarini garmonik ossillyatorlar to'plamidan iborat deb qarash mumkin bo'ladi. Bu usul — garmonik yaqinlashishdir. Bu model, ayniqsa, kristallning issiqlik sig'imini qarashda qulaydir. Boshqa, ba'zi masalalarni, jumladan, issiqlikdan kengayishini qarashda bu modelni takomillashtirish talab etiladi: ba'zan esa boshqa model bilan to'ldirish talab etiladi.

2. *Bir o'lchovli kristall panjara.* Garmonik yaqinlashishni ko'raylik.

Atomning siljishini u_i bilan belgilaylik. Kristall mexanik muvozanatda bo'lganda, atomlar orasidagi masofa a ga teng bo'lsin (2.6-rasm).



2.6-rasm.

N ta atomdan iborat bu bir o'lchovli kristallning potensial energiyasi V ni qatorga yoyaylik:

$$V(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}) = V_0 + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial u_i} \right)_{u_i=0} u_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} G_{ij} u_i u_j + \dots \quad (51)$$

bunda V_0 kristallning muvozanat holatidagi minimal potensial energiya; uni nolga teng deb qabul qilinadi; ikkinchi hadda $(\partial V / \partial u_i)_0$ energiyadan

olingan hosila muvozanatli holatda potensial minimum bo'lgani uchun $(\partial V / \partial u_i)_n$ nolga teng;

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}$$

muvozanatli holatdagi (ya'ni $u_i=0$ dagi) potensial V dan olingan ikkinchi tartibli hosilalar; ular faqat i va j atomlar orasidagi masofaga bog'liq musbat kattaliklardir.

Kristallning garmonik modeliga asosan, (51) qatorning $\frac{1}{2} \sum_{ij} G_{ij} u_i u_j$ hadlari bilan chegaralanadi, ya'ni atom siljishlari kichik bo'lganda qolgan boshqa yuqori tartibli hadlar juda kichik ekanligi sababli, ular hisobga olinmaydi. Demak,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} G_{ij} u_i u_j \quad (52)$$

i atomning harakat tenglamasini yozaylik. Unga ta'sir etayotgan kuch

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i} = -\sum_j G_{ij} u_j \quad (53)$$

Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan

$$-\frac{\partial V}{\partial u_i} = m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

yoki buni e'tiborga olib, (53) ni

$$m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \sum_j G_{ij} u_j = 0 \quad (54)$$

ko'rinishda yozamiz.

Umumiy holda u_i vaqt t va atomning koordinatasi $x_i = a i$ ning funksiyasidir. u_i ni quyidagicha almashtiraylik:

$$u_i = \sum_k \xi_k(t) e^{ix_k} \quad (55)$$

(55) ni (54) ga qo'yamiz

$$m \sum_i \xi_k(t) e^{ix_k} + \sum_{jk} C_{ij} \xi_k(t) e^{ix_k} = 0$$

yoki

$$\sum_i \left[m \ddot{\xi}_i + \sum_j C_{ij} e^{i(\xi_j - \xi_i)} \xi_i \right] = 0 \quad (56)$$

Kuch doimiylar C_{ij} faqat atomlar orasidagi masofa $|l - j|$ ga bog'liq bo'lib, l va j larning alohida qiymatlariga bog'liq emas. Shu sababli, (56) dagi yig'indi shu $|l - j|$ bo'yicha olinadi shularga asosan

$$m \omega_k^2 = \sum_j C_{ij} e^{i(\xi_j - \xi_i)} \quad (57)$$

belgilash kiritamiz va buni nazarda tutib, (56) ni qayta yozamiz

$$\sum_k (\xi_k + \omega_k^2 \xi_k) = 0 \quad (58)$$

ξ_k erkin o'zgaruvchilar bo'lgani sababli (58) dagi yig'indi nolga teng bo'lishi uchun har bir had nolga teng bo'lishi shart, ya'ni

$$(\xi_k + \omega_k^2 \xi_k) = 0 \quad (59)$$

Shunday qilib, (55) almashtirish orqali kristall panjarasi atomlari harakatini ifodalovchi dinamik masala, ossilyatorlar to'plamini qarash masalasiga keltirildi (3 o'lchovli holda ham masala shunday hal qilinadi).

Ibu tabiiy koordinatalar u_i ni normal koordinatalar (tebranishlar, modalar) ξ_k bilan almashtirilishi deyiladi. Bu juda muhim natija bo'lib, erkin garmonik ossilyatorning energiya sathlarini aniqlashga imkon beradi. Undagi chastota ω yuqoridagi belgilash (57) asosida topiladi. Sistemaning energiya sathlari esa qanday koordinatalar sistemasida aniqlanishiga bog'liq emas. Energiya sathlari aniqlangandan keyin, statistik yig'indi (integral) topilib va u orqali barcha termodinamik parametrlar aniqlanishi mumkin.

Issqlik sig'imni qarash uchun har bir atomni 3 o'lchovli ossilyatordan iborat deb qaraymiz. Bu holda N ta atomdan iborat kristallni $3N$ ta chiziqli garmonik ossilyatorlar bilan almashtiriladi¹.

Har bir ossilyatorning o'rtacha energiyasi $\langle \varepsilon(\omega) \rangle$ bo'lsa, bu modelga asosan N ta atomdan iborat kristallning ichki energiyasi

$$U = 3N \langle \varepsilon(\omega) \rangle \quad (60)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Hajm V o'zgarmas bo'lganda qattiq jism issqlik sig'imi

$$C \equiv C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v \quad (61)$$

¹ Tabiiy koordinatalardan normal koordinatalarga o'tib, shunday ossilyatorlar to'plami olinishi mumkinligini yo'qorida ko'rdik.

ifoda bilan aniqlanadi. (60) ifodaga asosan

$$C = 3N \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} \quad (62)$$

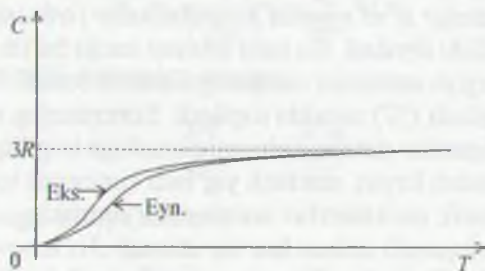
Klassik hol. Agar temperatura yetarli darajada yuqori bo'lsa, ossillyatorning o'rtacha energiyasi $\langle \epsilon \rangle = kT$ ekanligi ma'lum. Bu holda kristallning issiqlik sig'imi

$$C = 3Nk \quad (63)$$

yoki 1 mol uchun, $N = N_A$; $k = R / N_A$ ekanligidan

$$C = 3R \quad (64)$$

bo'ladi, bunda N_A Avogadro soni. (64) ni *Dyulong-Pti qonuni deyiladi*. (63) yoki (64) dan ko'rinadiki, qattiq jismning issiqlik sig'imi uning xossasiga ham, temperaturasiga ham bog'liq emas. Issiqlik sig'im C ning qattiq jism xossasiga bog'liq emasligi nihoyatda ajablanarli! Haqiqatan ham tajriba, yuqori temperaturalarda Dyulong-Pti qonuni o'rinli ekanligini tasdiqlaydi. (2.7-rasm). Ammo past temperaturadagi qattiq jismning issiqlik sig'imi Dyulong-Pti qonunidan keskin farq qiladi va temperatura kamayishi bilan u ham kamayib boradi (2.7-rasm).



2.7-rasm.

6-§ Issiqlik sig'imning Eynshteyn nazariyasi

Issiqlik sig'imning past temperaturalarda temperaturaga bog'liq ekanligini ko'rsatish uchun Eynshteyn ossillyatorlarni kvant statistika asosida qaradi.

Ma'lumki, kvant mexanika asosida chiziqli garmonik ossillyatorning energiyasi $\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ qiymatlar qabul qiladi. Uning o'rtacha energiyasi

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (65)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

(62) asosida issiqlik sig'iminin topishda (65) dan foydalanamiz.

Bunda:

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dT}; \quad x = \beta\hbar\omega; \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (66)$$

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x} = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \right) = -Z^2 \hbar\omega; \quad (67)$$

bunda $1/Z = e^{x/2} - e^{-x/2}$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \hbar\omega, \quad \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{k}{(kT)^2} \quad (68)$$

(66) ga (67) va (68) ni qo'yib, bitta ossillyatorga to'g'ri kelgan issiqlik sig'im uchun

$$\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T} = k(xZ)^2 \quad (69)$$

ifodani topamiz.

(69) ni (62) ga qo'yib, qattiq jism issiqlik sig'imi uchun

$$C = 3Nk(xZ)^2 \quad (70)$$

Eynshteyn formulasini olamiz. Bunda $x = \hbar\omega / kT = \frac{T_2}{T}$; $T_2 = \hbar\omega / k$; T_2 ni xarakteristik temperatura deyiladi.

Masala 2.1. Eynshteyn nazariyasidagi $(xZ)^2$ ni yuqori temperatura ($T_2 / T = x \ll 1$) uchun x^2 gacha aniqlik bilan ifodasini toping.

Yechish.

$$(xZ)^2 = \frac{x^2}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} = \frac{x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \quad (1)$$

Bunda

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}; \quad e^{-x} = \sum_n (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Hulardan foydalanib, (1) ning maxrajini yozamiz:

$$e^x + e^{-x} - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - 2 \approx$$

$$\approx 2 \left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} \right] = x^2 \left[1 + \frac{x^2}{12} \right] \quad (2)$$

Demak,

$$(xZ)^2 = \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{x^2}{12} + \dots \right)} \approx 1 - \frac{x^2}{12}; \quad T \gg T_k \quad (3)$$

a) klassik hol $x \ll 1$, ya'ni yuqori temperaturali hol $kT \gg \hbar\omega$; $T \gg T_k$, bu holda Z ifodasidagi eksponentni darajalari bo'yicha qatorga yoyib, birinchi ikkita had bilan chegaralanish (cheklanish) yetarli:

$$\frac{1}{Z} = e^{x/2} - e^{-x/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{2} \approx x$$

Demak, (70) ifodadan

$$C_k \approx 3Nk$$

Dyulong-Pti qonuni kelib chiqadi.

b) kvant hol $x \gg 1$. Bu holda $kT \ll \hbar\omega$; $T \ll T_k$, ya'ni temperatura past, diskretlik omili (fakti) nazarda tutilgan holda,

$$\frac{1}{Z} = e^{x/2} - e^{-x/2} \approx e^{x/2}$$

Bu ifodani (70) ga qo'yib, past temperaturalardagi kristallning issiqlik sig'imi uchun

$$C_{kB} \approx 3Nkx^2 e^{-x} \quad (71)$$

ifodani olamiz. Bunda $T \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ bo'lganda, $C(T)$ temperaturaga bog'liq bo'lib, u nolga intiladi. (2.7-rasmga qarang). Eynshteyn formulasi (71) past temperaturalardagi issiqlik sig'imining temperaturaga bog'liq ekanligini tavsiflasa-da, ammo, miqdoriy tomonidan eksperiment bilan solishtirganda tafovut (farq) borligi aniqlandi (2.7-rasm). Shu sababli Eynshteyn 1906-yilda yaratgan nazariyani takomillashtirish lozim bo'lib qoldi.

7 - §. Issiqlik sig'imning Debay nazariyasi

Eynshteyn qaragan modelda qattiq jismning har bir atomi bir xil chastota bilan tebranadi. Shu sababli, $k(xZ)^2$ ni ossillyatorlar soni $3N$ ga ko'paytirib, issiqlik sig'imning Eynshteyn formulasi aniqlangan edi.

Agar har bir atom (yoki ossillyator) o'zining hususiy chastotasi ω , bilan tebransa, u holda (70) dan $k[x(\omega)Z(\omega)]^2$ ni $3N$ ga ko'paytirish o'rniga $3N$ hadlarni yig'ishtirish zarur bo'ladi, ya'ni

$$C = \sum_{i=1}^{3N} C(\omega_i) = k \sum_{i=1}^{3N} [x(\omega_i)Z(\omega_i)]^2 \quad (72)$$

Bu ifodani ixchamlab, amalda foydalaniladigan sodda ko'rinishga keltirish uchun yig'indi integral bilan almashtiriladi.

Buning uchun Debay modelida kristallni uzluksiz (yaxlit) muhit deb qarab, unda elastik to'lqinlar tarqalyapti deyiladi.

Bu iborani boshqacha tushuntirish mumkin: Tabiiy tebrangichlar (atomlarning) tabiiy koordinatalar orqali yozilgan harakat tenglamalaridan normal koordinatalar orqali yozilgan tenglamalarga o'tilsa, (ma'lum almashtirishlar orqali) har bir normal koordinata tenglamasi chiziqli harmonik ossillyator harakat tenglamasidan iborat bo'ladi, ya'ni atomlarning tabiiy koordinatalardan normal koordinatalarga o'tilganda atomlarning harakat tenglamalari $3N$ ta ossillyatorlarning tenglamalaridan iborat bo'lib qoladi.

Ossillyatorning energiyasi

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

bo'lib, uning o'rtacha qiymati $\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \cdot \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$ ifodadan iborat. Bunda

ω — elastik to'lqin — tovush to'lqinining chastotasi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ energiyalar qat'iy to'lqin kvantlari — fononlarning energiyalari (xuddi elektromagnit to'lqinining kvantlari — fotonlar bo'lgani kabi).

Endi asosiy masala ω , $\omega + d\omega$, intervaldagi holatlar soni — ossillyatorlar soni $g(\omega)d\omega$ ni aniqlashdan iborat. Berilgan chastota qiymatiga

$$C(\omega)g(\omega)d\omega = k(xZ)^2 g(\omega)d\omega$$

issiqlik sig'im mos kelgani uchun ω , $\omega + d\omega$, chastota intervaliga to'g'ri kelgan qattiq jismning issiqlik sig'imi

$$C = \int_0^{\omega_D} C(\omega)g(\omega)d\omega = k \int_0^{\omega_D} (xZ)^2 g(\omega)d\omega \quad (73)$$

dan iborat. Agar $(0, \omega_D)$ intervalga to'g'ri kelgan issiqlik sig'imni aniqlamoqchi bo'lsak, (73) ni shu intervalda integrallash lozim bo'ladi, ya'ni

$$C = \int_0^{\omega_D} C(\omega)g(\omega)d\omega = k \int_0^{\omega_D} (xZ)^2 g(\omega)d\omega \quad (74)$$

Endi $g(\omega)d\omega$ ni aniqlaylik. Kristall qattiq jismda ko'ndalang va bo'ylama to'lqinlar tarqaladi. Ularning har biriga ω , $\omega + d\omega$, intervalga mos kelgan

holatlar sonlari (ossillyatorlar soni) $\left(2 \cdot \frac{\omega^2}{2\pi^2 v_s^3} + \frac{\omega^2}{2\pi^2 v_l^3}\right) d\omega$ yig'indidan iboratdir. (Bu holatlar sonini hisoblash Plank formulasini isbot qilishda hisoblanganday bo'ladi. Faqat bunda fononlar tezliklari v_s va v_l lar olingan).

Bunda v_s va v_l mos ravishda ko'ndalang va bo'ylama to'lqinlar tezliklari, birinchi hadda «2» koeffitsiyent ko'ndalang to'lqinning 2 ta qutblanishi tufayli kiritildi. Demak,

$$g(\omega)d\omega = \left(2 \cdot \frac{\omega^2}{2\pi^2 v_s^3} + \frac{\omega^2}{2\pi^2 v_l^3}\right) d\omega = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 v^3} d\omega \quad (75)$$

Bunda

$$\frac{3}{v^3} = \frac{2}{v_s^3} + \frac{1}{v_l^3} \quad (76)$$

belgilash kiritildi. Umumiy holda tezliklar v_s va v_l chastota ω ga bog'liq: $v_s(\omega)$, $v_l(\omega)$ va demak, v^3 ham chastotaga bog'liq, ya'ni dispersiya hodisasi mavjud. Ammo bu dispersiya hodisasi e'tiborga olinmasa, v^3 ni integral ishorasi ostidan tashqariga chaqirish mumkin. Bu holda (74) ni

$$C = \frac{3k}{2\pi^2 v^3} \int_0^{\omega_D} (xZ)^2 \omega^2 d\omega \quad (77)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda integral yuqori chegarasi (Debay chastotasi ω_D) aniqlanishi lozim. Buning uchun $x = \frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$ bo'lganda,

ya'ni temperatura yetarli darajada yuqori bo'lganda, issiqlik sig'im C Dyulong — Pti qonuniga asosan $3Nk$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$C = k \int_0^{\omega_D} (xZ)^2 g(\omega) d\omega \approx 3Nk$$

Bu holda $xZ \approx 1$ ekanligidan

$$\int_0^{\omega_D} (xZ)^2 g(\omega) d\omega \approx \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = 3N \quad (78)$$

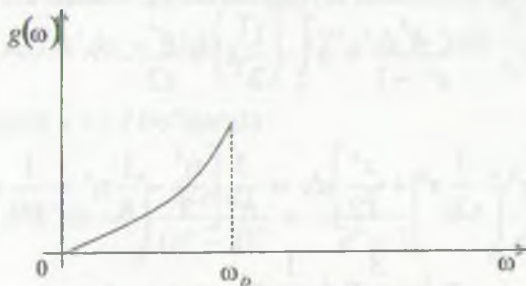
Demak, holatlar «yig'indisi» ossillyatorlar yig'indisiga teng. (78) ni Debay sharti deyiladi. $g(\omega)$ ning (75) dan qiymatini (78) ga qo'yib olamiz

$$\frac{3}{2\pi^2 v^3} \int_0^{\omega_D} \omega^2 d\omega = \frac{\omega_D^3}{2\pi^2 v^3} = 3N$$

Hundan noma'lum ω_D ni topamiz:

$$\omega_D^3 = 6\pi^2 N v^3 \quad (79)$$

Holatlar zichligi $g(\omega)$ ning (75) ifodasini ω_D orqali quyidagicha yozamiz (2.8 rasm):



2.8-rasm.

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{9N\omega^2}{\omega_D^3} & \omega \leq \omega_D \\ 0 & \omega > \omega_D \end{cases} \quad (80)$$

$T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$ ni Debay temperaturasi deyiladi.

Birlik hajmdagi ichki energiya U ning ifodasini yozaylik:

$$U = \int_0^{\infty} \langle \varepsilon \rangle g(\omega) d\omega = \frac{9N}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} \omega^2 d\omega = \frac{9NkT^4}{\omega_D^3 \hbar^3} \int_0^{\eta} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{9NkT}{x_D^3} \int_0^{\eta} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^{\eta} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (81)$$

bunda

$$x_D = \hbar\omega_D / kT = T_D / T \equiv \eta.$$

$D(\eta)$ ni Debay funksiyasi deyiladi. Demak, kristallning ichki energiyasi uchun

$$U = 3NkTD(\eta) \quad (82)$$

ifodani olamiz. Bu (82) ifodadan kristallning fonon modeli asosidagi issiqlik sig'imi ifodasini olamiz:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3NkD(\eta) + 3nK\eta \frac{\partial D}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} \quad (83)$$

1. Yuqori temperaturali holni qaraylik. Bunda $T \gg T_D$ ($x \ll 1$) shart bajarilsin.

Bu holda quyidagi yoyishdan foydalanamiz (q. Masala 2.2)

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12} - \dots \quad (84)$$

Bu holda

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta} \int_0^{\eta} \left[x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12} \right] dx = \frac{3}{\eta^3} \left[\frac{\eta^3}{3} - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{60}\eta^5 - \dots \right] =$$

$$= 1 - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{20}\eta^2 - \dots \quad (85)$$

Demak, bu holda

$$U = 3NkT \left[1 - \frac{3T_D}{8T} + \frac{1}{20} \left(\frac{T_D}{T} \right) - \dots \right] \quad (86)$$

Bundan

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{T_D}{T} \right)^2 + \dots \right] \quad (87)$$

2. Past temperaturali holni qaraylik. Bunda $T_D \gg T$ shart bajarilsin. Bu $\eta \rightarrow \infty$ holda

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{3}{\eta^3} \xi(4) \Gamma(4) = \frac{3}{\eta^3} \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! = \frac{\pi^4}{5\eta^3}$$

$$D(\infty) = \frac{\pi^4}{5\eta^3} \quad (88)$$

Demak,

$$U = 3NkTD(\infty) = 3NkT \frac{\pi^4}{5\eta^3} = \frac{3NkT^4 \pi^4}{5T_D^3} \quad (89)$$

Bunda,

$$C = \frac{\partial U}{\partial N} = \frac{12\pi^4 Nk}{5T_D^3} T^3 = \frac{12\pi^4 Nk}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \quad (90)$$

(90) ifoda kristall qattiq jism issiqlik sig'imi uchun (1912-yilda olingan) Debay qonunidir.

Izoh. Issiqlik sig'imi ifodasi (77) dan $T \ll T_D$ bo'lganda Debay qonunini bevosita olish mumkin. Xaqiqatan ham

$$C \approx \frac{3k}{2\pi^2 v^3} \int_0^{T_D} (xZ)^2 \omega^2 d\omega = 9Nk \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^1 Z^2 x^4 dx = 3Nk \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta Z^2 x^4 dx \quad (91)$$

Bunda integral $x \gg 1$ bo'lganda

$$J = \int_0^\infty Z^2 x^4 dx = \int_0^\infty \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} = -\frac{x^4}{e^x - 1} \Big|_0^\infty + 4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} =$$

$$= 4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 4\xi(4)\Gamma(4) = \frac{4\pi^4}{15} \quad (92)$$

okantligidan foydalanib, yana Debay qonuni

$$C = \frac{12\pi^4 Nk}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3$$

olinadi.

Integral uchun

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s e^{-x} dx}{(e^x - 1)^2} = S! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = S! \xi(S) = 3! \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

ifoda olinadi; bu yerda $\xi(S)$ – zeta funksiyaning qiymatlari jadvalda beriladi.

$$\xi\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612; \quad \xi(2) = \frac{\pi^2}{6}; \quad \xi\left(\frac{5}{2}\right) = 1,341; \quad \xi(3) = 1,202; \quad \xi(4) = \frac{\pi^4}{90};$$

$$\xi(5) = 1,037; \quad \xi(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

Bir necha qattiq jismlarning Debay temperaturasi T_D ni quyidagi jadvalda keltiramiz.

Jadval

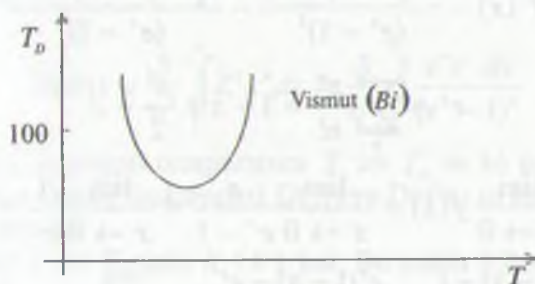
Qattiq jismlarning Debay temperaturasi.

Kristall Temperatura $T_D^\circ K$	
Qo'rg'oshin	88
Yod	106
Benzol	150
Kaliy	100
Natriy	172
Osh tuzi	281
Mis	315
Temir	453
Berilley	1000
Olmos	1860

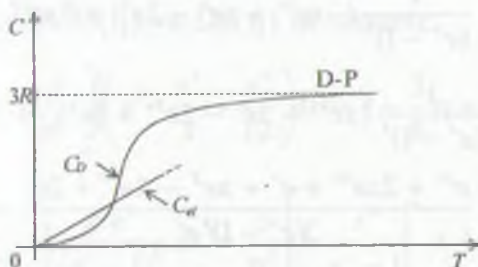
Shunday qilib, Debay qonuniga ko'ra $T \rightarrow 0$ bo'lganda issiqlik sig'im $C \sim T^3$ qonun bo'yicha nolga intiladi. Past temperaturalarda eksperimentda shunday qonuniyat kuzatiladi.

Ammo bir qator hollarda, Debay temperaturasi T_D temperaturaga bog'liq bo'lgani uchun (2.9-rasm), issiqlik sig'imning temperaturaga

bog'liqligi Debay qonunidan chetlanadi. Buning sababi shuki, o'zining real kristall panjaralariga ega bo'lgan real kristall uzluksiz (yaxlit) muhit (kontinuum) bilan almashtirilishi va uning uchun maksimum chastota ω_D qabul qilinishidir. Bunday almashtirish nisbatan kichik chastotalar (katta to'lqin uzunliklar) uchun yaxshi natija beradi, chunki bu holda bunday to'lqin uchun kristallning atom tuzilishi unchalik katta ahamiyatga ega emas. Chastota ortishi bilan kristallning strukturasi (atomlararo masofa) rol o'ynay boshlaydi va demak, issiqlik sig'imining temperaturaga bog'liqligi Debay qonunidan chetlana boshlaydi. 1 K atrofida tajriba natijalarining Debay qonunidan chetlanishi kutatiladi; bu sohada kristallning elektron strukturasi (elektronlar sistemasi issiqlik sig'imi) fonon strukturasi bilan ustunlik qilishi sabablidir (2.10-rasm).



2.9-rasm.



2.10-rasm.

Masala 2.2. Debay funksiyaqidagi

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12}$$

yo'lllmaning yuqori temperaturada o'rinli ekanligini isbot qiling.

Yechish. Yordamchi funksiya

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad (1)$$

kiritib, uni $x=0$ atrofida Teylor qatoriga yoyaylik:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2} \quad (3)$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1 - x) - e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{2[e^{2x}(1 - x) - e^x]}{(e^x - 1)^3} \quad (4)$$

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2} \rightarrow \frac{e^x(1 - x) - e^x}{2(e^x - 1)e^x} = \frac{-x}{2(e^x - 1)} \rightarrow \frac{-1}{2e^x} = -\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^2} = \frac{1}{(e^x - 1)^3} (-xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2xe^{2x} + 2e^x) =$$

$$\frac{1}{(e^x - 1)^3} (xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{2x} + 2xe^{2x} + e^x + xe^x - 4e^{2x} + 2e^x}{3(e^x - 1)^2 e^x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-3e^x + 2e^x + 2xe^x + 1}{6(e^x - 1)e^x} \rightarrow \frac{-1e^x + 2xe^x + 2e^x}{6e^x(e^x - 1) + 6e^{2x}} \rightarrow \frac{1}{6} \quad (8)$$

Demak, (6), (7) va (8) ni (2) ga qiyib topamiz.

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} \dots \quad (9)$$

(9) ni x^2 ga ko'paytirib, asosiy matndagi yoyilma (84) ni olamiz, ya'ni

$$x^2 f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12}$$

Masala 2.3. Debay modeliga asosan kristallning ichki energiyasi U va issiqlik sig'imi C quyidagi ifodalar bilan aniqlanadi:

$$U = 3NkTD(\eta), \quad (1)$$

$$C = 3NkD_c(\eta), \quad (2)$$

bularda

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (3)$$

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta x^2 \frac{x^4 dx}{(e^x - 1)^2} = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} \quad (4)$$

Kristallning a) yuqori temperatura $T \gg T_D$ va b) past temperatura $T \ll T_D$ uchun Debay funksiyalari $D(\eta)$ va $D_c(\eta)$ ni aniqlang. Olingan natijalarni izohlang.

Yechish. a) $T \gg T_D$ yoki $X \ll 1$ hol. Bu holda 2.2 masaladagi

$$\frac{x}{e^x - 1} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} \quad (5)$$

ifodadan foydalanib, $D(\eta)$ va $D_c(\eta)$ ni topamiz:

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} \right) dx = 1 - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{20}\eta^2 \quad (6)$$

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{3}{\eta^3} \left[-\frac{x^4}{e^x - 1} \Big|_0^\eta + 4 \int_0^\eta \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right] =$$

$$= -\frac{3\eta}{e^\eta - 1} + \frac{3}{\eta^3} \left(x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{12} \right)_{x=0}^\eta + 4D(\eta) =$$

$$= -\frac{3\eta}{e^\eta - 1} + 4\left(1 - \frac{3}{8} + \frac{1}{20}\eta^2\right) \approx -\frac{3\eta}{\eta} + 4 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{5}\eta^2 =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{5}\eta^2 \quad (7)$$

Demak, yuqori temperaturalarda

$$U = 3NkT \left(1 - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{20}\eta^2 \right) \quad T \gg T_D \quad (8)$$

$$C = 3Nk \left(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{5}\eta^2 \right), T \gg T_D \quad (9)$$

Izoh. 1. Agar

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta x^2 E(x) dx \quad \text{da} \quad E(x) = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \quad \text{ni}$$

$$e^x = \sum_n x^n / n! \quad e^{-x} = \sum_n (-1)^n x^n / n!$$

dan foydalanib, taqribiy ifodasi

$$E(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{12}} \approx 1 - \frac{x^2}{12} \quad (10)$$

olinishi mumkin. Bu holda $D_c(\eta)$ ning ifodasi

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^\eta x^2 \left(1 - \frac{x^2}{12} \right) dx = 1 - \frac{1}{20}\eta^2 \quad (11)$$

bo'ladi. Bu holda

$$C = 3Nk \left(1 - \frac{1}{20}\eta^2 \right) \quad (12)$$

Har xil taqribiyliklardan foydalanilgani uchun C ning (9) va (12) natijalari har xil. Ammo (9) natija aniqroqdir.

Izoh 2. Ichki energiya U va issiqlik sig'im C ning (8) (9) va (12) ifodalaridan ko'rinadiki, yuqori temperaturada ($x \ll 1$, $T \gg T_D$) Debay nazariyasi klassik fizika natijalariga, ya'ni ossillyatorning o'rtacha energiyasi kT va issiqlik sig'imi $3Nk$ ga (Dyulong-Pti qonuniga) olib keladi.

b) Past temperaturalarda $T \ll T_D$, $x \gg 1$) $D(\eta)$ va $D_c(\eta)$ ifodalarni aniqlaylik.

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3} \int_0^{\eta} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

dagi integral ifodani yozaylik

$$\int_0^{\eta} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \int_{\eta}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (13)$$

(13) dan

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (14)$$

Past temperaturada $x \gg 1$ bo'lgani uchun $e^x \gg 1$ shu sababli

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_{\eta}^{\infty} x^3 e^{-x} dx = e^{-\eta}(\eta^3 + 3\eta^2 + 6\eta + 6) \approx e^{-\eta}\eta^3 \quad (15)$$

Demak,

$$D(\eta) \approx \frac{3}{\eta^3} \left[\frac{\pi^4}{15} - \eta^3 e^{-\eta} \right] = \frac{\pi^4}{5\eta^3} - 3e^{-\eta} \quad \eta \gg 1, \quad T \ll T_D$$

(16)

$D(\eta)$ ni qaraylik:

$$\int_0^{\eta} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} - \int_{\eta}^{\infty} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} \quad (17)$$

Hurda

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} = -\frac{x^4}{e^x - 1} \Big|_0^{\infty} + 4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0 + 4 \cdot \frac{\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{15} \quad (18)$$

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{x^4 e^x dx}{e^{2x}} = \int_{\eta}^{\infty} x^4 e^{-x} dx \approx \eta^4 e^{-\eta} \quad (19)$$

Demak,

$$Dc(\eta) = \frac{4\pi^4}{5\eta^3} - 3\eta e^{-\eta}, \quad T \ll T_D \quad (20)$$

Past temperaturalarda ($T \ll T_D$) Debay modeliga asosan kristallning ichki energiyasi U va issiqlik sig'imi C quyidagicha aniqlanadi:

$$U = 3NkT \left[\frac{\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 - 3e^{-\frac{T_D}{T}} \right], \quad T \ll T_D \quad (21)$$

$$C = 3Nk \left[\frac{4\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 - 3 \frac{T_D}{T} e^{-\frac{T_D}{T}} \right], \quad T \ll T_D \quad (22)$$

Izoh 3. Agar ichki energiyaning temperaturaga bog'liqligiga kristall panjalarining faqat tebranishigina sabab deb qaralsa, ichki energiya U va demak, issiqlik sig'im ifodalari o'rinli bo'ladi.

Kristalda fazaviy o'tishlar, «erkin elektronlar» va boshqa omillar e'tiborga olinsa, bu omillarning yuqoridagi ifodalarga hisssalarini alohida qarash lozim bo'ladi.

Izoh 4. Issiqlik sig'imni tajribada o'lchash yordamida va

$$C_v = 3NkD_v(\eta)$$

formula asosida Debay temperaturasi T_D ni aniqlash mumkin. Debay temperaturasi T_D ni kristalldagi bo'ylama va ko'ndalang tovushlarning tarqalishi tezliklari v_l va v_s ni o'lchash orqali

$$\omega_D^3 = 6\pi^2 N \vartheta^3$$

formula asosida aniqlash mumkin; bunda

$$T_D = \frac{\hbar \omega_D}{k}; \quad \frac{3}{\vartheta^3} = \frac{2}{\vartheta_s^3} + \frac{1}{\vartheta_l^3}$$

Har xil metod bilan olingan Debay temperaturalarini bir-biri bilan taqqoslab, Debay nazariyasi kristalni qanchalik aniq tavsiflashi haqida ma'lumot olish mumkin. Quyidagi jadvalda ikki xil metod bilan olingan Debay temperaturalarini keltiramiz.

Element	TD	
	Tovush tezligi	Issiqlik sig'imi
Al	399	394
Fe	467	420
Cu	329	315
Ag	212	215

Indvaldan ko'rinadiki, ikki xil metod bilan olingan Debay temperaturalarasi orasidagi farq 5% va bundan kamdir.

Masala 2.4. Fotonlar va fononlar gazlari uchun kimyoviy potensial μ nolga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. a) Idish ichidagi fotonlar soni doimiy emas, ya'ni fotonlar to'la soni fiksatsiyalanmagan (aniq bir qiymatni qabul qilmaydi) $dN \neq 0$.

Buning sababi: idish ichidagi fotonlar idish devorlari tomonidan nurlanishi hamda yutilib turishi mumkin. Shu sababli, muvozanatli nurlanishning (fotonlar gazining) termodinamikasida μdN ifoda (dN o'zgaruvchi bo'lgani uchun ishtirok etishi mumkin emas, aks holda termodinamik parametrlar o'zgaruvchan bo'lib qoladi. Bu esa muvozanatli holat ta'rifiga ziddir. μdN ifoda ishtirok etmasligi uchun $\mu = 0$ bo'lishi talab etiladi (yoki boshqacha aytganda, shunday xulosa kelib chiqadi).

b) fotonlar kabi fononlar to'la soni doimiy emas. Ular kristall panjara tomonidan nurlanib hamda yutilib turiladi. Shu sababli fononlar gazi uchun, sistema muvozanatli holatda bo'lganda $\mu = 0$ bo'lishligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, fotonlar va fononlar gazi uchun Boze-Eynshteyn statistikasi

$$f(\epsilon_i) = \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \epsilon_i) - 1} \quad (1)$$

yoki

$$f(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} \quad (2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi; bunda $\epsilon = \hbar \omega(n + 1/2)$, $\beta = 1/kT$.

Masala 2.5. Foton gazning ichki energiyasi U , bosimi P aniqlansin.

Yechish. Idishdagi elektromagnit to'liqlarni normal tebranishlar superpozitsiyasi deb qarash mumkin. i ichi normal tebranishning siklik chastotasi ω_i va kvant soni n_i bo'lsin. Normal tebranishni esa kvant ossilyator deb qaralishi mumkin. Bu holda kvant ossilyatorning energiyasi ϵ_i , kvant mexanikadan ma'lumki,

$$\epsilon_i = \hbar \omega_i(n + 1/2), \quad (1)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Kvant ideal gaz – foton gazning energiyasi E

$$E(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots) = \sum_i \hbar \omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

ifoda bilan aniqlanadi; bunda n_i energiyasi $\hbar \omega_i$ ga teng bo'lgan fotonlar soni.

Har 3 ta normal tebranish fazodagi ideal kvant tebrangich tufayli hosil bo'layotgan deb qaralishi mumkin. Bunday tebrangichlar (ideal kvant zarralar) soni N ta bo'lsin. Bu holda bunday N ta sistemaning gamiltoniani kvant mexanikada $3N$ ta (klassik mexanikada $6N$ ta) o'zgaruvchilarga bog'liq. Demak,

$$\nu = 3N \quad (3)$$

Bunday sistemaning ($3N$ ta ossillyatorlar sistemasi) ichki energiyasi U bizga ma'lum

$$U = V\sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3} = 7,569 \cdot 10^{-15} \text{ erg}^3 \text{ grad}^{-4} \quad (4)$$

σ - Stefan - Bolsman doimiysi. Demak,

$$\theta = \frac{U}{\nu} = \frac{U}{3N} = \frac{u \cdot V}{3N} \quad (5)$$

Ideal gaz uchun

$$P = n\theta \quad (6)$$

holat tenglamasi o'rinli; $n = \frac{N}{V}$ Kvant ideal zarralarning bosimi uchun

$$P = \frac{NuV}{V3N} = \frac{u}{3} \quad (7)$$

ifodani olamiz; u elektromagnit to'liqlarining ichki energiyasi zichligi.

Masala 2.6. Qattiq jism N ta yacheykalar va har bir yacheykada r ta atom bo'lsin. Elementar yacheyka regulyar qaytarilsa, bu ideal kristallni tashkil etadi. Yacheykadagi har bir atomni erish temperaturasidan uzoqdagi temperaturada 3 ta chiziqli garmonik ossillyator deb tasavvur etish mumkin. Bu holda kristallni $3Nr$ ta ossillyatorlardan va ularga mos $3Nr$ erkinlik darajalaridan iborat deb qarash mumkin.

Har bir erkinlik darajasiga (ossillyatorga) $\vec{k}$ to'liqin vektorli va s qutblanishli tebranish (moda) mos keladi; $\vec{k}$ to'liqin vektor N qiymatlarni qabul qilishi, $3r$ ta qiymatlarni s qabul qilishi mumkin.

1. Ossillyatorming kvant soni $n(\vec{k}, s)$ ning o'rtacha qiymati $\langle n \rangle$ aniqlansin.

2. Ideal kristallning ichki energiyasi U aniqlansin va a) temperatura $T=0$ dagi uning qiymati tahlil etilsin; b) $\vec{k}$ uzluksiz bo'lgandagi hol uchun U ning qiymati aniqlansin.

Ko'rsatma. U ning ifodasidagi yig'indini integral bilan almashtirish kerak.

Yechish. 1. Ossilyator kvant soni n ning o'rtacha qiymati, statistik fizikaning umumiy metodiga asosan

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n f(\varepsilon_n), \quad (1)$$

bunda

$$f(\varepsilon_n) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \varepsilon_n}, \quad (2)$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon_n}, \quad \beta = 1/kT \quad (3)$$

Ossilyatorning energiyasi ε_n , kvant mexanikadan ma'lum

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad (4)$$

Demak,

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (5)$$

bunda $x = \beta\hbar\omega = \hbar\omega / kT$.

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (6)$$

(6) dan foydalanib, (5) ni yozamiz:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

Demak, o'rtacha kvant son

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (7)$$

2. $3Nr$ ta ossilyatorlarning umumiy energiyasi ossilyator energiyalarining yig'indisidan iborat:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\vec{k}, s} \varepsilon_n = \sum_{\vec{k}, s} \hbar\omega(\vec{k}, s) [n(\vec{k}, s) + 1/2] = \\ &= \sum_{\vec{k}, s} \frac{1}{2} \hbar\omega(\vec{k}, s) + \sum_{\vec{k}, s} \hbar\omega(\vec{k}, s) n(\vec{k}, s) = E_0 + E, \end{aligned} \quad (8)$$

bunda

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, s} \hbar \omega(\vec{k}, s) \quad (9)$$

$$E = \sum_{\vec{k}, s} \hbar \omega n(\vec{k}, \vec{s}) = \sum_{\vec{k}, s} \hbar \omega \langle n \rangle \quad (10)$$

yoki

$$\begin{aligned} E &= kT \sum_{\vec{k}, s} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{V}{(2\pi)^3} kT \sum_s \int \frac{x}{e^x - 1} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{VkT}{(2\pi)^3} \sum_s \int \frac{x}{e^x - 1} k^2 dk d\varphi \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

Bunda ω chastota $\vec{k}, \vec{s}$ ga, ya'ni k, θ, φ, s o'zgaruvchilarga bog'liq; $V/(2\pi)^3$ kattalik $\vec{k}$, fazodagi birlik hajmdagi to'liq son.

Masala 2.7. Chastota ω bilan to'liqin vektori $\vec{k}$, orasidagi dispersiya munosabati

$$\omega = a(s, \theta, \varphi) k', \quad t > 0$$

bo'lganda issiqlik sig'im G_v aniqlansin.

Yechish.

$$x = \beta \hbar \omega = \beta \hbar a k'; \quad k' = \frac{x}{\beta \hbar a}; \quad k^2 dk = \left(\frac{kT}{\hbar a} \right)^{3/t} x^{3/t-1} \left(\frac{1}{t} \right) dx$$

Demak,

$$E = \frac{kTV}{8\pi^3 t} \left(\frac{kT}{\hbar a} \right)^{3/t} \sum_s \int \frac{d\Omega}{a^{3/t}} \int \frac{x^{3/t} dx}{e^x - 1}$$

Bundan

$$G_v = \frac{\partial E}{\partial T} = AT^{3/t} \quad (12)$$

qonuniyat kelib chiqadi.

Izoh. Agar $t=1$ bo'lsa, (12) dan

$$G_v = AT^3$$

Debay qonuni kelib chiqadi.

III b o b. FERMI-DIRAK STATISTIKASINING TATBIQI

1-§. Kirish

Bizga ma'lumki, kvant statistikasining qo'llanish sohasida

$$T \leq T^* = \alpha \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3} \quad (1)$$

shart bajariladi; sistemaning kvant xossalari katta zichlik va past temperatura-
larda namoyon bo'ladi.

Zarralar orasidagi o'rtacha masofa $r_0 \sim \frac{1}{n^{1/3}}$ va de Broyl to'lqin

uzunligining o'rtachasi $\bar{\lambda} = h / \bar{p}$ va $\bar{p} \sim \sqrt{mkT}$ ekanligini nazarda tutib, (1) shartni boshqacha tushuntirish ham mumkin. Zarralarning orasidagi o'rtacha masofa r de Broyl to'lqin uzunligi λ yoki undan kichik bo'lsa, ular orasida odatdagi o'zaro ta'sir kuchidan tashqari kvantoviy korrelatsiya mavjud bo'ladi. Shu sababli zarralarning harakati maxsus kvant tabiatga ega bo'ladi. Bu sohada, albatta, kvant statistikadan foydalanish zarur bo'ladi. Boshqacha aytganda, temperaturaning kamayishi tabiiy ravishda de Broyl to'lqin uzunligining ortishiga olib borganligi, shu sababli zarralarda kvant korrelatsiya almashuv o'zaro ta'sir namoyon bo'lishi na faqat alohida zarrani kvant mexanika qonuni asosida qarashga majbur etadi, balkim zarralar sistemasini qarashni ham muhim o'zgartirishga olib kelishini biz yuqorida ta'kidlagan edik.

Bu sohada muhim rolni Pauli prinsipi o'ynaydi.

Ma'lumki, bu prinsipga ko'ra, bir holatda bittadan ortiq fermion bo'lishi mumkin emas. Shu sababli fermionlar sistemasi boze-sistemadan muhim farqlidir. Bu farq sistemaning aynish temperaturasidan past bo'lgandagina namoyon bo'ladi. Bu yerda shuni yana ta'kidlash lozimki, aynish temperaturasi $T^* \sim \hbar^2$ bo'lganligidan, u (tabiiyki) kvant tushunchadir va $T \leq T^*$ sohada zarralar orasidagi o'rtacha masofa $r_0 \sim \lambda$ ekanligidan Geyzenberg noaniqlik prinsipi $r_0 \bar{p} \sim \hbar$ muhim rol o'ynay boshlaydi.

Tabiatda (kvant) aynigan fermi sistemalarga metallardagi elektronlar sistemasi, oq mitti yulduzlar, neytron yulduzlar misol bo'ladi.

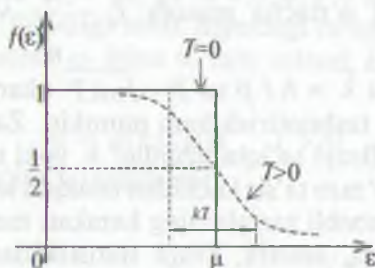
Yana shuni ta'kidlash lozimki, odatdagi gazlar, suyuqliklarning aynish temperaturasi shunchalik pastki, odatdagi sharoitda ular klassik statistik fizika bilan to'la tavsiflanadilar.

Biz yuqorida ko'rdikki, Fermi taqsimoti quyidagicha:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (2)$$

Bu funksiya $f(\epsilon)$ temperatura $T \rightarrow 0 (\beta = 1/kT \rightarrow \infty)$ bo'lganda «pog'onali» funksiyaga aylanadi, ya'ni $\epsilon < \mu$ bo'lganda $f(\epsilon) = 1$; $\epsilon \geq \mu$ bo'lganda $f(\epsilon) = 0$ bo'ladi (q. 3.1 rasm).

Agar $T > 0$ bo'lsa, «pog'onali» funksiyaning $\epsilon = \mu$ dagi qiymati atrofida kT sohada Fermi taqsimot «yemirilgan» bo'ladi. U punktir chiziq bilan 3.1-rasmda ko'rsatilgan.



3.1-rasm.

Bir zarraviy holatdagi energiya $\epsilon_p \sim \frac{1}{V}$ bo'lganligi uchun hajm V ortishi bilan sathlar bir-biriga yaqinlashib, zichlashib boraveradi.

Hajm yetarli darajada katta bo'lganda, bir zarraviy holatlarni uzluksiz deb qarab, $\epsilon, \epsilon \rightarrow d\epsilon$ intervaldagi holatlar soni uchun $g(\epsilon)d\epsilon$ ifodani yozishimiz mumkin; bunda $g(\epsilon)$ — holatlar zichligi. Bu uzluksiz holda $g(\epsilon)d\epsilon$ yordamida sistema zarralari soni N va energiyasi E uchun

$$N = \int f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon \quad (3)$$

$$E = \int \epsilon f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon \quad (4)$$

ifodalarni yozish mumkin; bunda $f(\epsilon)$ (2) ifoda bilan aniqlanadi.

Temperatura $T=0K$ bo'lganda, $f(\epsilon)=(1)$ va energiya ϵ ning qiymati $\mu = \mu_0$ gacha o'zgaradi. ϵ ning eng kichik qiymati ϵ_0 (xususiyl holda $\epsilon_0=0$) bo'lsa, (3) va (4) ifodalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$N = \int_{\epsilon_0}^{\mu_0} g(\epsilon) d\epsilon \quad (5)$$

$$E = \int_{\epsilon_0}^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon, \quad (6)$$

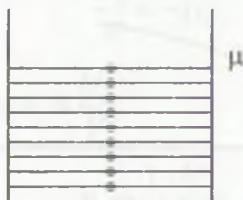
(5) ifodadan, agar holatlar zichligi $g(\epsilon)$ aniqlangan bo'lsa, μ_0 ni, so'ng (6) dan to'la energiya E ni aniqlash mumkin.

2. Agar $T>0K$ bo'lsa, μ ni va energiya E ni aniqlash uchun (3) va (4) dan foydalaniladi; bunda $f(\epsilon) \neq 1$ va u (2) bilan aniqlanadi.

2-§. Qattiq jismlardagi elektronlar sistemasi

1. Zonalar. Avval $T=0K$ ($\beta \rightarrow \infty$) bo'lgan holni qaraylik:

a) $\epsilon < \mu$ bo'lsin. Bu holda (2) dan ko'rinadiki $f(\epsilon) = 1$ ya'ni ϵ ni μ ga teng. Demak, $(0, \mu)$ intervaldagi energiya sathlari hammasi bittadan fermionlar bilan to'lgan (band) (3.2-rasm).



3.2-rasm.

b) $\epsilon > \mu$ bo'lsin. Bu holda $f(\epsilon) = 0$ ya'ni, Demak, $T=0K$ bo'lganda $\epsilon = \mu$ sathidan yuqoridagi energiya sathlari bo'sh, unda fermionlar (elektronlar) bo'lmaydi.

Fermi taqsimot pog'onali grafikdan iborat bo'ladi (3.1 rasm).

2. Temperatura noldan farqli bo'lsin, ya'ni $T>0K$. Bu holda $\epsilon = \mu$ bo'lganda taqsimot funksiya $f = f(\mu) = 1/2$ qiymatni qabul qiladi. (3.1-rasm). Bu holda $f(\epsilon)$ silliq egri chiziqdan iborat bo'ladi. Boshqacha aytganda, $\epsilon = \mu$ Fermi sathiga yaqin elektronlar $T>0K$ bo'lganda

yuqoridagi bo'sh sathlarga o'tadi («bug'lanadi»). $T=0K$ da to'lgan sathlarni valentli zona, undan yuqoridagi sathlarni o'tkazuvchanlik zonasini deyiladi. Demak, $T>0K$ da valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasiga (metallarda elektronlar o'tadi).

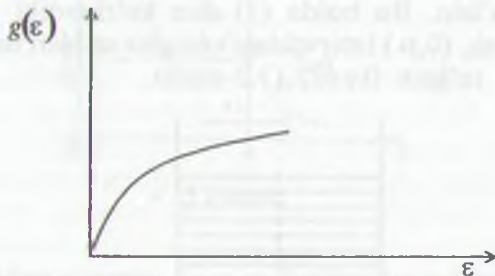
Bir zarraviy holatlar energiyasi sistemaning hajmi V ga (yoki L^3 ga) teskari proporsional, ya'ni $E_f \sim 1/V$ bo'lgani uchun sistema hajmi ortib borsa (kattalashsa), energiya sathlari quyuqlashib (bir-biriga yaqinlashib) boradi. Bu holda $\epsilon, \epsilon + d\epsilon$ intervaldagi holatlar soni $g(\epsilon)d\epsilon$ dagi $g(\epsilon)$ ni uzluksiz o'zgaruvchan deb hisoblash mumkin. Bir zarraviy holatlar uchun

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} \quad (7)$$

ekanligi bizga ma'lum (q.10 – §, I bob), bunda $g(\epsilon)$ – bir zarraviy holatlar zichligi. Agar zarralar erkin harakatlanayotir deb hisoblansa, $\epsilon = p^2 / 2m$ ifodadan foydalanib

$$g(\epsilon)d\epsilon = aV\epsilon^{1/2}d\epsilon, a = 2\pi(2m/h^2)^{3/2} \quad (8)$$

ifodani olamiz (3.3 rasm)



3.3-rasm.

Bu holda

$$N = \int f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon = aV \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon^{1/2}d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (9)$$

$$E = \int f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon = aV \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2}d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (10)$$

3-§. Absolut nol temperaturali Fermi-gaz

Erkin zarralar fermi – sistemasini qarash uchun (9) va (10) ning N/aV va E/aV ifodalaridagi

$$I_n = \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{\epsilon^n d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (11)$$

integralni aniqlash zarur. Bu integral $T=0K$ da, $f(\epsilon)=1$ bo'lgani uchun, quyidagi

$$I_n = \int_0^{\mu_0} \epsilon^n d\epsilon$$

sodda ko'rinishga keladi. Avval shu sodda holni ko'raylik. $T=0K$ bo'lsin. $T=0K$ da fermi-gazning termodinamik parametrlarini aniqlaylik. ($\epsilon_0=0$ bo'lsin).

$$N = aV \int_0^{\mu} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{2}{3} aV \mu_0^{3/2}; \mu_0 = \left(\frac{3N}{2aV} \right)^{2/3} \quad (12)$$

$$U_0 \equiv E \simeq aV \int_0^{\mu} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{2}{5} \mu_0^{5/2} aV \quad (13)$$

(12) va (13) dan

$$\frac{U_0}{N} = \frac{3}{5} \mu_0 \quad (14)$$

Hundan energiya zichligi $u_0 = \frac{U_0}{V}$

$$u_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{N}{V} \mu_0 \quad (15)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Ideal gaz ifodasi $P = \frac{2u}{3}$ dan foydalanib, *to'la aynigan fermi – gaz* bosimi P_0 ni aniqlaymiz

$$P_0 = \frac{2N}{5V} \mu_0 \quad (16)$$

Demak, bosim P_0 zichlik $n=N/V$ ga quyidagicha bog'liq:

$$P \sim (N/V)^{5/3} = n^{5/3}$$

Temperaturaga esa bog'liq emas! ($T=0^{\circ}K$ da).

Ideal klassik gaz uchun $P=nkT$ ekanligini eslatamiz.

Shunday qilib, $T=0$ da ideal fermi – gazning bosimi noldan farqli bo'lib, elektronlar uchun baholanganda $P \sim (10^4-10^5)$ atm atrofida bo'ladi.

Metallardagi elektron sistemaning aynish temperaturasi

$$T^* = \mu_0 / k = \varepsilon_F / k \sim 10^4 K$$

Demak, metallardagi elektron sistemani aynigan gaz deb, kvant statistika asosida qarash zarur. $10^4 K$ da jism qattiq agregat holida qolmaydi. To'la aynigan fermi-sistemaning boshqa termodinamik parametrlarni P_0 , U_0 , μ_0 asosida aniqlash mumkin.

4-§. Past temperaturali Fermi-gaz termodinamikasi

Past temperaturadagi fermi-gazning ichki energiyasi U va zarralarning soni N ni aniqlaylik. Buning uchun (11) dagi I_n ning taqribiy ifodasi

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \approx \frac{\mu^{n+1}}{n+1} \left[1 + \frac{n(n+1)}{6} \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 \right] \quad (17)$$

dan foydalanamiz, bunda $(\pi kT / \mu_0)^2$ gacha aniqlik bilan topiladi.

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{N}{aV} = \frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi kT}{\mu} \right)^2 \right] \quad (18)$$

Agar $T=0K$ bo'lsa, yana avvalgi natijani olamiz

$$\mu = \mu_0 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{N}{aV} \right)^{2/3} \quad (19)$$

(18) va (19) dan

$$\mu_0^{3/2} = \mu^{3/2} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right] \quad (20)$$

Kichik hadda μ ni μ_0 bilan almashtirildi. (20) dan

$$\mu_0^{3/2} = \mu_0^{3/2} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right] \quad (21)$$

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}} \approx \mu_0 \left[1 - \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \frac{1}{12} \right] \quad (22)$$

$I_{3/2}$ ni yozaylik:

$$I_{3/2} = \frac{U}{aV} = \frac{2}{5} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \quad (23)$$

(18) va (23) ifodalardan ushbu nisbatni olamiz:

$$\frac{U}{N} = \frac{I_{3/2}}{I_{1/2}} = \frac{3}{5} \mu \frac{1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu} \right)^2}{1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k T}{\mu} \right)^2}$$

Bundan

$$U = \frac{3}{5} \mu N \frac{1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu} \right)^2}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu} \right)^2}$$

Ifodani olamiz. (21) dan foydalanib, quyidagi taqribiy ifodani olamiz:

$$U = \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}} \frac{1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{5}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \approx \quad (24)$$

$$\approx \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \approx \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] = b + \frac{a}{2} T^2$$

Bundan elektron gazning issiqlik sig'imi S_e ni aniqlaymiz:

$$S_e = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2 Nk}{2} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)$$

Yoki

$$S_e = aT \quad (25)$$

bunda

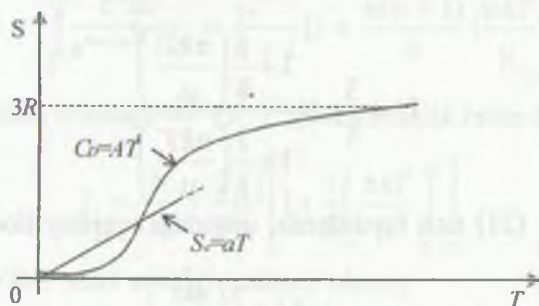
$$a = \frac{\pi^2 Nk^2}{2\mu_0}$$

temperaturaga bog'liq bo'lmagan doimiy kattalik.

Elektron issiqlik sig'im C_e juda past temperaturada chiziqli qonun $C_e = aT$ ga bo'ysunadi. Bu esa tajribadan olingan natijaga mos keladi. Juda past temperaturada kristall qattiq jismning to'la issiqlik sig'imi

$$C = aT + AT^3$$

ifoda bilan aniqlanadi; bunda $A = 12\pi^4 kN / 5T_D^3$. Bu temperaturada elektron issiqlik sig'imi S_e fonon issiqlik sig'imidan ustunlik qiladi (3.4-rasm).



3.4-rasm.

Past temperaturada elektron gazning bosimi va entropiyasini aniqlaylik.

$$P = \frac{2u}{3} = \frac{2N}{5V} \mu_0 \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right] \quad (26)$$

Bizga ma'lum

$$U_0 = \frac{3}{5} N\mu_0; \quad P_0 = \frac{2}{3} N\mu_0$$

Bulardan foydalanib, bosim uchun (past temperaturada)

$$P = P_0 \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right] \quad (27)$$

ifodani olamiz; bunda bosim P temperaturaning kvadratiga proporsional.
Solishtirma entropiyani aniqlaymiz: entropiya S ni

$$S = \int_0^T (C_v / T) dT$$

ifodadan aniqlash mumkin.

$$S = \frac{\pi^2 N k}{2} \left(\frac{k T}{\mu_0} \right) \quad (28)$$

Erkin energiya F ni $F = U - ST$ ifoda orqali aniqlaymiz:

$$F = \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 - \frac{5}{12} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right]$$

Shunday qilib, asosiy termodinamik parametrlarni absolut nol temperaturadagi Fermi sathi energiyasi μ_0 orqali ifodaladik. Qolgan termodinamik parametrlarni esa shu aniqlangan asosiy termodinamik parametrlar orqali ifodalash mumkin. Jumladan

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

Yoki ideal gaz formulasi $PV = \frac{2}{3} U$ dagi yana (26)

$$P = \frac{2 N \mu_0}{5 V} \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi k T}{\mu_0} \right)^2 \right]$$

ifoda olindi.

Oxirida kvant mexanika va kvant statistika yaratilganga qadar issiqlik sig'imga tegishli klassik statistikadagi ziddiyatga va uning kvant statistikada hal etilishiga qisqacha to'xtalaylik.

Birinchidan: metallarda elektr o'tkazuvchanlik, issiqlik o'tkazuvchanlikni elektronlar modelidan foydalanib, (massani effektiv massa bilan

almashtirib) tushuntirish mumkin. Klassik statistikadagi bu fikrga (modelga) asosan metallarning issiqlik sig'imi izolatorlarnikidan taxminan 2 marta ortiq bo'lishi kerak. Chunki har bir zarraga (elektronga) klassik statistik fizikaga asosan, $3kT/2$ energiya to'g'ri keladi. Ma'lumki, dielektrlarda (izolatorlarda) erkin elektronlar yo'q deb qaraladi. Ammo tajriba ko'rsatadiki, metallar va izolatorlarning issiqlik sig'imi yuqori temperaturada taxminan bir xil va ular Dyulong-Pti qonuniga bo'ysunadi. Bu ziddiyat kvant statistikasida osonlikcha hal etiladi.

Ko'pgina metallarda Fermi sathi energiyasi $\mu_0 \approx 2 \text{ eV}$ bilan 10 eV orasida bo'ladi. Bu holda agar temperatura $T=300 \text{ K}$ bo'lsa,

$$C_v = \frac{\pi^2 Nk}{2} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)$$

ifodadagi (kT / μ_0) uchun

$$\frac{kT}{\mu} \approx \frac{300k}{2 \cdot 10^4} = \frac{3k}{200} = 0,015k$$

$$\frac{kT}{\mu} \approx \frac{300k}{10 \cdot 10^4} = 0,003k$$

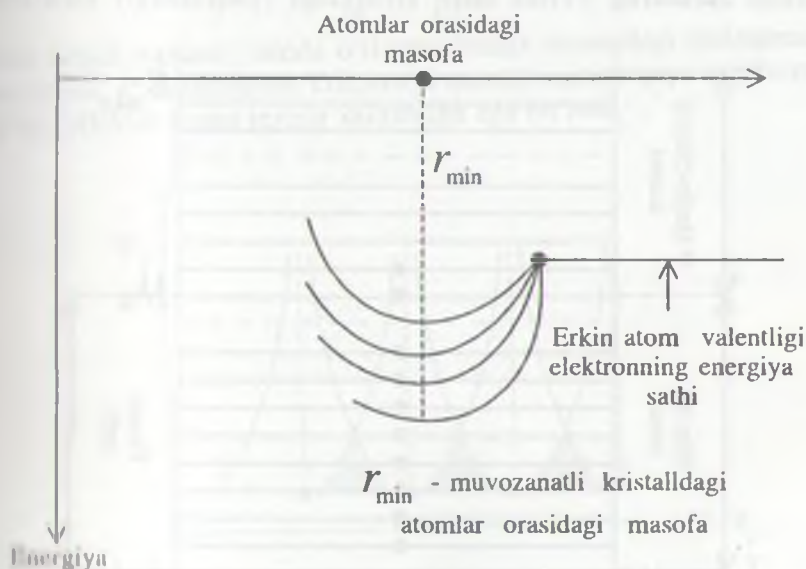
qiymatlar olinadi. $\pi^2 / 2 \approx 5$ bo'lganda, bu qiymatlardan elektron issiqlik sig'imi umumiy issiqlik sig'imiga 0,075 va 0,015 hissa yoki 1,5%—7,5% hissa qo'shishi kelib chiqadi. Amalda elektronlar kristall issiqlik sig'imiga 2%—8% hissa qo'shadilar.

5-§. Kristallardagi energetik zonalar

1. Kirish. Qattiq jismlardagi elektronlarning holatlari erkin atomlardagi elektronlar holatlariga ko'p jihatdan o'xshaydi, chunki kristalldagi qo'shni atomlar elektronlarining o'zaro ta'siri atom tuzilishini, strukturasini to'la buzib yubora olmaydi. Ammo shu bilan birga bu elektronlarning o'zaro ta'siri tufayli erkin atomlardagi energiya sathlari shunchalik kuchli ta'sir oladi va g'alayonlikka uchraydiki, natijada kristallarda bir qator uning o'ziga xos yangi hodisa va effektlar paydo bo'ladi. Bu yangi hodisalardan eng muhimi — erkin atomlardagi valent elektronlar energiya sathlarining deyarli uzluksiz sathlarga — energetik zonalar yoyilib ketishidir. Bu energetik zonalar esa qattiq jismning elektr, magnit va optik xossalari bilan sodir bo'lishiga sababchilik qiladilar.

2. **Energetik zonalar.** Energiya zonalarining paydo bo'lishini quyidagicha tushuntirish mumkin. Faraz qilaylik, N ta erkin atomlar mavjud bo'lsin. Har bir atomning biror energiya sathi, masalan, i - sathi g karrali aynish darajasiga ega bo'lsin. Ammo atomlar bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'lmagani uchun N ta zarralardan iborat bo'lgan bu sistemada i - energetik sath N_g karrali aynish darajasiga ega bo'ladi. Endi atomlar bir-biriga yaqinlashib, kristall panjara hosil qilsin. Bu holda atomlarning o'zaro ta'sirlari tufayli erkin atomning N karrali holatlari o'zgaradi. Boshqacha aytganda, o'zaro ta'sir bo'lmagan holdagi N_g ekvivalent (simmetrik) holatlar o'zaro ta'sir tufayli buziladi va ular bir-biriga juda yaqin bo'lgani uchun energetik sathlar dastasi deyarli uzluksiz energiya zonasini hosil qiladi. Bu o'zaro ta'sir tufayli birinchidan, energiya sathlarining pastga siljishi yuz beradi, chunki atomlar orasida bog'lanish hosil bo'ladi (molekuladagi atomlar bog'lanishi kabi); ikkinchidan, bu o'zaro ta'sirga, tabiiyki, atomdagi yadrodan uzoqdagi valentli elektronlar duch keladilar (ta'sirga chalinadilar), chunki ular qo'shni atomlarga eng yaqin joylashgan bo'ladilar;

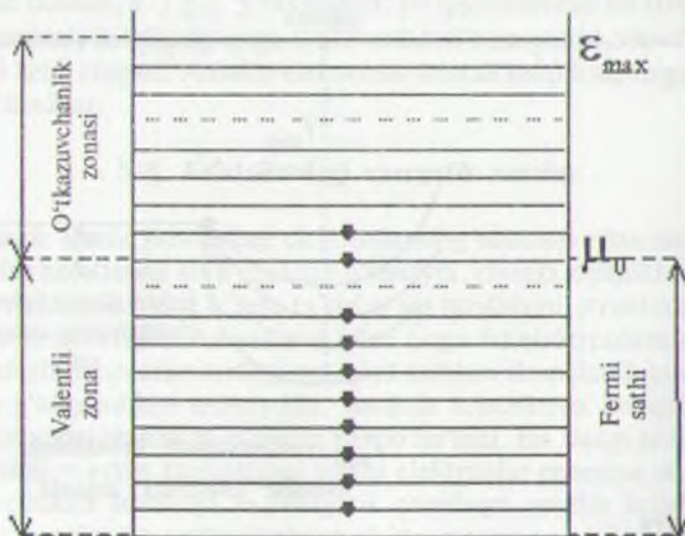
uchinchidan, atomlar orasidagi muvozanat holatiga to'g'ri kelgan masofa energiyaning minimum qiymatiga mos kelishi lozim. Yanada atomlarning yaqinlashuvida ular orasidagi itarish kuchi tufayli energiya ortib boradi (3.5-rasm).



3.5-rasm.

to'rtinchidan, atomlar erkin bo'lgandagi energiya sathlari N ular yaqinlashib o'zaro ta'sirda bo'lganda deformatsiyalanib, o'zgarsalar-da, ularning soni N o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, s — zonada har bir atomga to'g'ri keluvchi 2 ta elektron, p — zonada har bir atomga to'g'ri keluvchi 6 ta elektron bo'la olishi mumkin, ya'ni S — zonada $2N$ ta, P — zonada $6N$ ta bir-biriga juda yaqin joylashgan energetik sathlar (o'rinlar) mavjud bo'ladi, ya'ni zonalarining yuqori chegarasi mavjud bo'ladi. Masalan, S holatda bittadan elektron bo'lsin — atomlardagi valentli elektronlar N ta, S zonadagi holatlar (energetik sathlar) soni $2N$ ta. Demak, masalan, $T=0K$ da shu S zonaning yarmi Pauli prinsipiga asosan, elektronlar bilan to'lgan (uni valentli zona deyiladi), qolgan yarmi bo'sh (uni o'tkazuvchanlik zonasi deyiladi) zonadan iboratdir (3.6-rasm). Agar S holatda 2 ta elektron bo'lsa (masalan, kaliy), S — zona elektronlar bilan to'lgan bo'ladi. Ammo S — zona P — zona bir-birini o'zaro yopgan bo'lsa, ular ham metallar hosil qiladi. Ba'zi qattiq jismlarda (yarim o'tkazgich va dielektrlarda) valentli zona bilan o'tkazuvchanlik zonasi orasida taqiqlangan Δ energiya kenglikka ega bo'lgan zona mavjud bo'ladi (bu haqda keyinroq to'xtalamiz).

Agar qattiq jism temperaturasi $T>0$ bo'lsa, yuqorida aytganimizday, valentli zonaning Fermi sathi atrofidagi (yaqinidagi) elektronlar



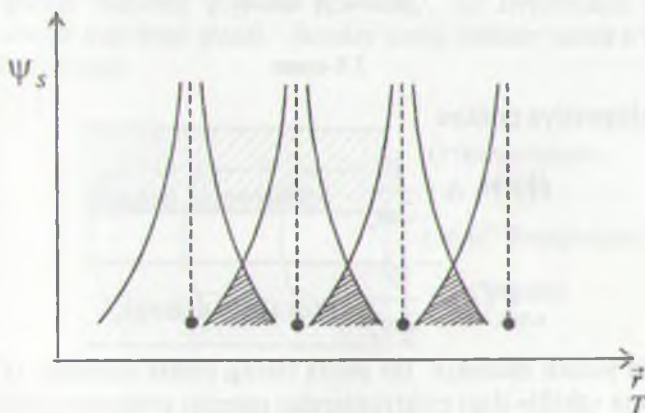
3.6-rasm.

o'tkazuvchanlik zonasiga issiqlik fluktuatsiyalar tufayli o'tadilar. Bu elektronlar, endi har bir atomga tegishli bo'lmasdan kristalldagi barcha atomlarga tegishli deb qaralishi mumkin. Bu fikrni shunday tushuntirish mumkin: erkin atomlardagi valentli elektronlarning to'lqin funksiyalari, atomlar yaqinlashib, kristall hosil qilganda, bir-birini qisman yopib ketishadi. Shu sababli bir atomga tegishli elektron, ikkinchisiga ma'lum ehtimol bilan o'tishi mumkin. Shunday qilib, elektron butun kristall bo'yicha migratsiya qilib yurishi mumkin.

3.7-rasmda S holat funksiyalarini bir-biri bilan qisman umumiy-lashishi, yopishi ko'rsatilgan. O'tkazuvchanlik zonasidagi bunday elektron atomlarga ozmi-ko'pmi bog'liq bo'lganligi uchun unga tashqi elektr maydon ta'sir etsa, uning harakati erkin elektronlar harakatidan farqlanadi. Ammo uni effektiv massa m^* bilan erkin harakatlanayotgan zaryadli zarra deb qaralishi mumkin, ya'ni $e\vec{E} = m^*\vec{a}$. *O'tkazuvchanlik zonasidagi bu m^* massali zarra erkin harakatlanayotgan elektrondan farqli bo'lganligi sababli (uni, zarrani) kvazielektron deyiladi.* Oddiy hollarda kvazizarraning (fonon, polyaron va shu kabilarning) massasini topish uchun dispersiya qonuni $E(p)$ berilgan bo'lsa,

$$\frac{1}{m^*} = \frac{\partial^2 E(p)}{\partial P^2}$$

ifoda orqali topiladi; bunda o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronning E energiyasi, $\vec{P}$ kvazimpulsi. Dispersiya qonuni anizotropiya xarakterga ega bo'lsa, effektiv massa tenzor xarakterga ega bo'ladi.



3.7-rasm.

Kristall qattiq jismdagi o'tkazuvchanlik zonasida harakatlanayotgan elektron uchun effektiv massa m^* aniqlangan bo'lsa, u holda

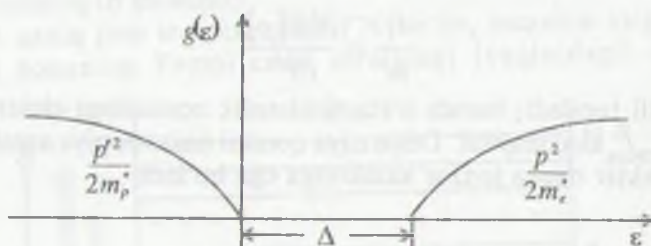
$$E(p) = \frac{p^2}{2m^*}$$

o'rinli bo'ladi, bu holda holatlar zichligi

$$g(\epsilon) = a\epsilon^{1/2}, a = 2\pi \left(\frac{2m^*}{h^2} \right)^{3/2}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Umumiy holda o'tkazuvchanlik zonasidagi elektron va valentli zonadagi teshik (kovak) energiyalari impuls bilan murakkab bog'lanishda bo'ladi. Ammo amalda o'tkazuvchanlik zonasini tubi yaqinidagi elektronlar va valentli zona yuqorisidagi teshiklar (kovaklar) bilan ish ko'riladi. Bunday elektronlarni effektiv m_e^* massali kvazielektronlar va effektiv m_p^* massali $|e|$ - zaryadli kvazipozitronlar deb qaralishi mumkin. Bu holda holat zichligi funksiyasi erkin elektronlardagi kabi parabola iborat bo'ladi (q. 3.8 rasm).



3.8-rasm.

Bu holda dispersiya qonuni

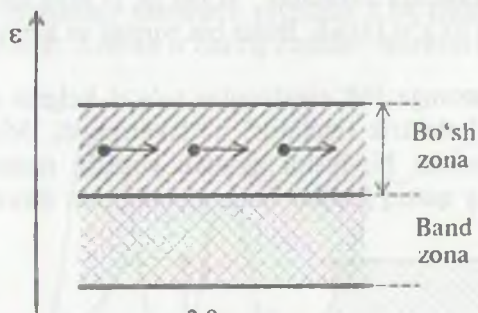
$$\epsilon(\bar{p}) = \Delta + \frac{\bar{p}^2}{2m_e^*} \quad (\text{elektronlar uchun}),$$

$$\epsilon'(\bar{p}) = \frac{\bar{p}^2}{2m_p^*} \quad (\text{kovaklar uchun}),$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda tashqi elektr maydon ta'siri tufayli valentli zona «shifti» dagi elektronlardan qisman o'tkazuvchanlik zonasiga o'tishi mumkinligini ham nazarda tutmoq kerak.

6-§. Holatlar zichligi. Qattiq jismlar turlari

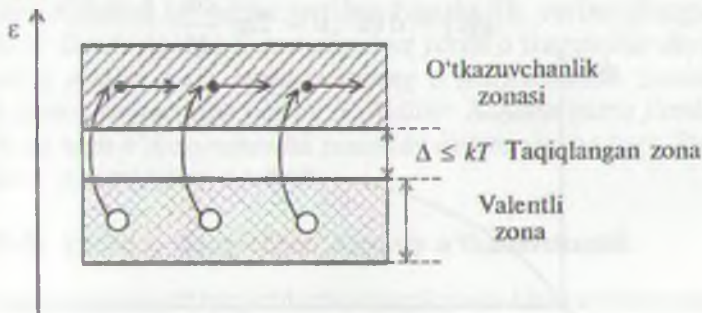
Zonalar tasavvurlariga asosan qattiq jismlarni turlarga bo'lish juda qulay. Agar zonaning bir qismi to'lgan bo'lib, qolgan qismi bo'sh bo'lsa yoki to'lgan zona bilan yuqori zona ma'lum darajada bir-birini yopsa, bunday qattiq jismlar metallardan iboratdir (3.9-rasm).



3.9-rasm.

Agar to'lgan zonadan keyin energiya tirqishi Δ bo'lsa, ya'ni taqiqlangan zona bo'lsa, bunday qattiq jismlarni dielektrik (izolator) yoki yarim o'tkazgichlar deyiladi. Agar energiya tirqishi kT dan yetarli darajada katta bo'lsa, ya'ni $\Delta > kT$ shart bajarilsa, valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasiga elektronlar amalda o'tmaydi va demak elektr tok hosil qiluvchi elektronlar bo'lmagani uchun bunday qattiq jismlar izolatorlar (dielektriklar) deyiladi.

Agar taqiqlangan zona kengligi Δ uncha katta bo'lmay, kT ga teng yoki undan kichik bo'lsa, ya'ni $\Delta \leq kT$ bo'lsa T temperaturada valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasiga fluktuatsiyalar tufayli talaygina elektronlar o'tishi mumkin. Elektr maydon qo'yilsa (kiritilsa), bu serharakat «chaqqon» elektronlar elektr toki hosil qiladi. Bunday qattiq jismlar yarim o'tkazgichlar deyiladi (3.10-rasm).



3.10-rasm. Yarimo'tkazgich

Energetik sathlar va valentli elektronlar sonlariga qarab, qattiq jismning qaysi turga tegishli ekanligini aytish mumkin. Masalan:

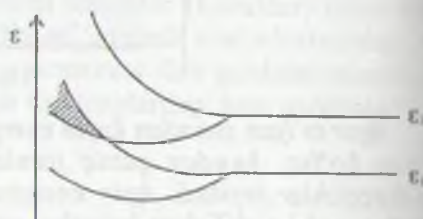
1. Bir valentli elektronga ega qattiq jismlar metallardir (ishqoriy metallar: *Na, K, Rb, Cu, Ag, Au*). Bulardagi valentli zonaning yarmisi to'lgan bo'ladi.

2. Har bir yacheykaga toq sondagi elektronlar to'g'ri kelgan qattiq jismlar ham metallardir. Masalan, *Al, Ga, In, Tl* ning har bir atomiga 3 ta valentli elektron to'g'ri keladi. Bular bir zonani va keyingi zonani qisman to'ldiradilar.

3. Har bir atomga juft elektronlar to'g'ri kelgan qattiq jismlarning hammasi ham dielektrik (izolator) bo'lavermaydi. Masalan, quyi zona bilan yuqori zonalar bir-birini qisman yopishi mumkin (3.11, 3.12-rasmlar); bunday qattiq jismlar ham metallardan iborat bo'ladi.



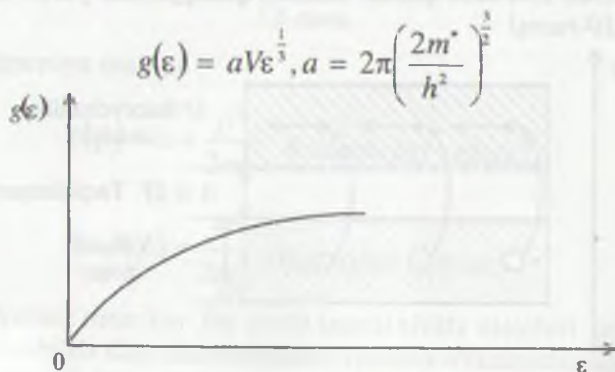
3.11-rasm.



3.12-rasm.

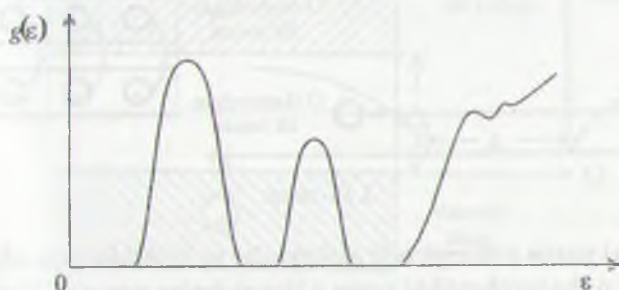
3.11 va 3.12-rasmlarda sathlarning bir-biri bilan qisman yopilishi, umumiy lashuvi ko'rsatilgan.

Yuqorida erkin zarra modelida $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ yoki $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m^*}$ ko'rinishdan foydalanib, holatlar zichligi (soni) uchun



3.13-rasm.

va uning grafigi ko'rsatilgan edi (q. 3.13 rasmda). Umumiy holda, kristall qattiq jismdagi elektronlar davriy maydonda murakkab harakat qiladilar. Shu sababli, uning holatlar zichligi $g(\epsilon) = aV\epsilon^{1/2}$ ga nisbatan murakkab funksiya bilan tavsiflanadi. Natijada holatlar zichligi $g(\epsilon)$ bir necha qismlanlarga bo'linib ketadi. Kristalldagi elektronlar energiyasi spektrining zonalar tarkibi (strukturasi) sxematik ravishda 3.14-rasmda ko'rsatilgan. Albatta, har bir konkret kristall o'zining zonalar strukturasi ega bo'ladi.



3.14-rasm.

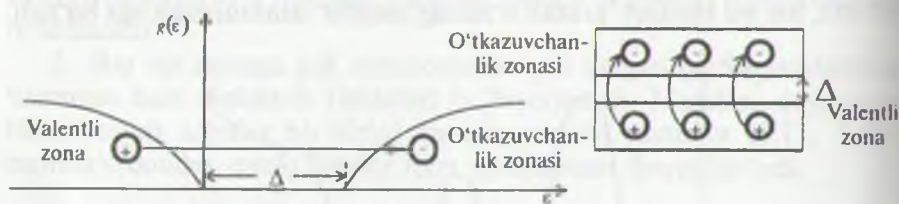
Shunday qilib, yakkalangan (erkin) atomdagi energiya sathlari diskret sarakterga ega. Kristall hosil bo'lishda atomlar bir-biriga yaqin kelishib, ularning energetik sathlari o'zaro ta'sir natijasida ma'lum siljishlarga ega bo'ladi. Shu bilan birga valentli elektron esa o'zining atomiga taalluqli bo'lishidan tashqari, u ma'lum darajada erkin deb ham hisoblanadi. Buning natijasida kristallda energiya zonalar hosil bo'ladi.

Metallardagi energetik kenglik $\Delta=0$ va yarimo'tkazgichlar va dielektrlarda $\Delta \neq 0$ bo'lishi bilan tanishdik. Shunday tipdagi qattiq jismlar borki, ularda $\Delta=0$ bo'lsa-da o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar, metallardagiga nisbatan bir necha tartibga kam bo'lib, yarimo'tkazgichlar tipiga kiradilar. Bunday qattiq jismni tirqishsiz yarim o'tkazgichlar deyiladi. Shunday qattiq jismlar ham borki, ularning o'tkazuvchanlik zonasining tubi valentli zonasi yuqorisidan pastda bo'ladilar. Bundan qattiq jismlarda, hatto $T=0$ K da ham o'tkazuvchanlik zonasida elektronlar bo'ladi. Bunday qattiq jismlarni polumetallar deyiladi.

7-§. Yarim o'tkazgichlar. Xususiy o'tkazuvchanlik

Dielektrik yoki yarim o'tkazgichlarda valentli zona bilan o'tkazuvchanlik zonasida energiya kengligi Δ , ya'ni ta'qiqlangan zona mavjud bo'ladi. $T=0$ K da bunday qattiq jismlarning hammasi, ravshanki, dielektrik (izolator)

bo'ladi. Ammo temperatura noldan farqli bo'lganda $kT > \Delta$ shart bajarilsa, valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasiga o'tgan elektronlar valentli zonadagi teshiklar (kovaklar) elektr o'tkazuvchanlikni keltirib chiqaradi. Natijada $T=0K$ dagi dielektrik bunday temperaturada yarim o'tkazgichga aylanadi, o'tadi. Elektr o'tkazuvchanlik paydo bo'ladigan temperatura, albatta taqiqlangan zona kengligi Δ ga bevosita bog'liqdir (3.15-rasm).



3.15-rasm.

Sof (toza) yarim o'tkazgichda elektronlar va teshiklar (kovaklar) tufayli hosil bo'lgan o'tkazuvchanlikni yarim o'tkazgichning xususiy o'tkazuvchanligi deyiladi.

Yarim o'tkazgichning o'tkazuvchanligi o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar zichligi n_e va valentli zonasidagi teshiklar (kovaklar) zichligi n_p ga, bog'liq. Effektiv massa metodidan foydalanib (q. 5-§), Fermi – Dirak statistikasi asosida n_e va n_p ni aniqlaylik. Energiya valentli zona yuqorisidan boshlab hisoblanadi.

Elektronlarning to'la soni N

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} + \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1} \quad (29)$$

ifoda bilan aniqlanadi; bunda ϵ_i va ϵ_j o'tkazuvchanlik va valentli zonalaridagi energiya sathlari. Valentli zonadagi elektronlar bilan to'la sathlari soni

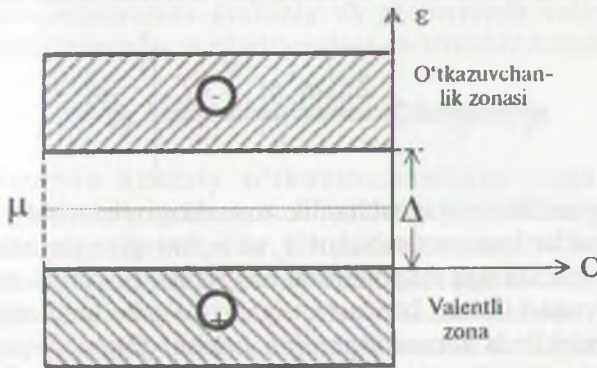
$\sum_i I_i$ elektronlar soni N ga teng. Bu tenglikdan foydalanib, (29) ifodani qayta yozamiz:

$$\sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_j \left[1 - \frac{1}{(e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1)} \right] = \sum_j \frac{1}{[e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1]} \quad (30)$$

Bu tengliklar chap tomondagi ifoda o'tkazuvchanlik zonasida elektronlar sonini ko'satadi. Xususiy o'tkazuvchanlikda ular teshiklar (kovaklar) soniga teng;

$$n_e = n_p \quad (31)$$

ya'ni o'ng tomondagi ifoda kovaklar sonini ifodalaydi. Quyidagi taqribiy ifodalardan foydalanaylik (3.16 rasm).



3.16-rasm.

$$\epsilon_c = \Delta + \frac{p^2}{2m_e^*}, \epsilon_v = -\frac{p^2}{2m_p^*} \quad (32)$$

m_e^* va m_p^* elektron va kovakning effektiv massalari. Zarralar sonlari n_e va n_p uchun (32) dan foydalanib,

$$n_e = 2 \frac{1}{h^3} \int \frac{d\vec{p}}{e^{\beta\left(\Delta + \frac{p^2}{2m_e^*} - \mu\right)} + 1} \quad (33)$$

$$n_p = 2 \frac{1}{h^3} \int \frac{d\vec{p}}{e^{\beta\left(-\frac{p^2}{2m_p^*} - \mu\right)} + 1} \quad (34)$$

ifodani yozishimiz mumkin. "2" spin tufayli kiritildi. $T=0K$ da $n_e = n_p = 0$ bo'ladi. $T>0K$ da, faraz qilaylik $\Delta - \mu \gg kT$, $\mu \gg kT$, bo'lsin. Bu holda elektronlar va kovaklarni aynimagan deb qarash mumkin. Bu holda (33) va (34) dan zichliklar n_e va n_p uchun

$$n_e \approx \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta\left(\Delta + \frac{p^2}{2m_e^*} - \mu\right)} d\vec{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-(\Delta - \mu)/kT} \quad (35)$$

$$n_p \approx \frac{2}{h^3} \int e^{-\left(\frac{p^2}{2m_p^*} + \mu\right)} d\vec{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\mu/\beta} \quad (36)$$

ifodalarni olamiz. Demak, $n_e = n_p$ ekanligini nazarda tutib, olamiz:

$$n_e = n_p = 2 \left[\frac{2\pi (m_e^* m_p^*)^{\frac{1}{2}} kT}{h^2} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\Delta}{2}} \quad (37)$$

(37) dan ko'rinadiki, o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar va valentli zonadagi kovaklar konsentratsiyalari n_e va n_p energiya tirqishi kengligi Δ ga hamda temperaturaga eksponensial bog'liqdir; tirqish kichik bo'lsa va temperatura yuqori bo'lsa, konsentratsiyalar ko'p bo'ladi; shunday qilib, yarim o'tkazgichlarda temperaturaning oshishi bilan konsentratsiyalar ortib boradi va demak elektr o'tkazuvchanlik ortib boradi. Tabiiyki, temperatura ortishi bilan panjaradagi issiqlik tebranishi ortishi bilan qarshilik ortadi. Ammo bu effekt yarimo'tkazgichlarda konsentratsiyalar ortishiga nisbatan kichikdir. Metallarda konsentratsiyalar temperatura ortishi bilan o'zgarmaydi, elektr qarshilik esa tebranishlar tufayli ortib boradi.

Xususiyl o'tkazuvchanli yarim o'tkazgichning kimyoviy potentsiali μ ni (36) ning (35) ga nisbatini olib, osonlikcha aniqlash mumkin:

$$e^{\beta\mu} = (m_p^* / m_e^*)^{3/4} e^{\beta\Delta/2} \quad (38)$$

(38) ifodani logarifmlab, olamiz

$$\beta\mu = \beta \frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_p^*}{m_e^*} \quad (39)$$

yoki

$$\mu = \frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p^*}{m_e^*}$$

Izoh: $m_e^* \approx m_p^*$ bo'lganda Fermi sathi μ ta'qiqlangan zonaning o'rtasi yaqinida bo'ladi. (q 3.16 rasm).

Misol. $\Delta = 0,7 \text{ eV}$ da $\Delta/k \approx 0,81 \cdot 10^4 \text{ K}$ bo'ladi. Bunda $\Delta/k \gg T$ va $\mu \gg kT$, $\mu \gg kT$ shartlari bajariladi; odatdagi temperaturalarda $T = 300^\circ \text{ K}$ va $m_e^* = m_p^* = m$ bo'lganda $n_e = n_p = 4,83 \cdot 10^{15} \cdot 300^{3/2} e^{-0,411 \cdot 10^4 / 300} \approx 1,6 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ qiymatni olamiz.

Ta'qiqlangan zona kengligiga misollar: olmos $6\div 7\text{eV}$; kremniy $1,1\text{eV}$, germaniy $0,72\text{eV}$, kulrang qalay $0,1\text{eV}$.

Bular $T=0\text{K}$ da dielektriklar.

Olmos xona temperaturasida ham dielektrik (izolator)dir.

Xona temperaturasida kremniy va germaniyda valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasiga sezilari sondagi elektronlar o'tgan bo'ladi.

8-§. Aralashmali yarim o'tkazgichlar

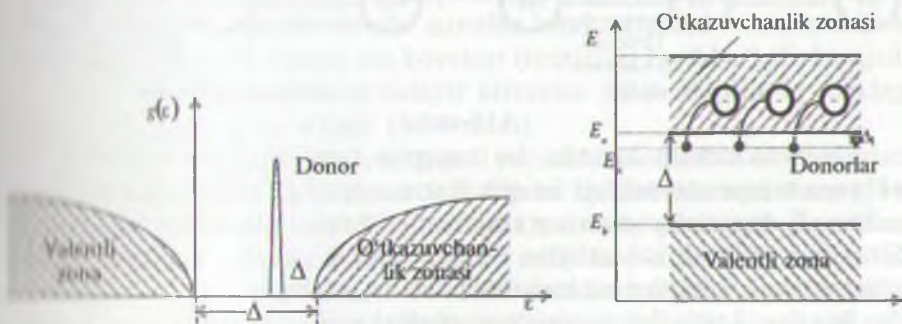
Biz yuqorida xususiy o'tkazuvchanlikka ega toza (sof) yarimo'tkazgichlarni ko'rdik. Ammo amaldagi yarimo'tkazgichlar odatda mo'lum aralashmaga ega bo'ladilar. Haqiqatan ham amalda foydalaniladigan ko'pchilik yarimo'tkazgichlarga aralashma kiritilgan bo'ladi.

Toza kristallarda valentli zona bilan o'tkazuvchanlik zonasi orasida ta'qiqlangan zona kengligi Δ berilgan temperaturada anchagina keng bo'lsa-da, ya'ni $\Delta > kT$ shart bajarilsa-da, biroz aralashma kiritilishi tufayli ularda o'tkazuvchanlik xossasi paydo bo'ladi. Bunday bo'lishiga sabab, shu ta'qiqlangan zonada lokal (diskret) energetik sathlarning paydo bo'lishidir.

Yarim o'tkazgichlarning elektr o'tkazuvchanligi aralashmaga juda kuchli bog'liq bo'lgani sababli, aralashmaning yarim o'tkazgichdagi energiya sathlari taqsimotiga ta'sirini qarash zarurdir.

Aralashma tufayli hosil bo'ladigan o'tkazuvchanlikning ikki turi mavjud.

n - tipdagi yarim o'tkazuvchanlik. Bu xildagi aralashmali o'tkazgichlarda temperatura $T=0\text{K}$ da ta'qiqlangan zonada hosil bo'lgan energiya sathlari elektronlar bilan to'la bo'ladi. Lokal sathlar bilan o'tkazuvchanlik zonasi orasidagi energiya tirqishi (kengligi) Δ_1 berilgan $T>0$ temperaturada $\Delta_1 < kT$ shartga bo'ysunadi (3.17 rasm). Bu holda,



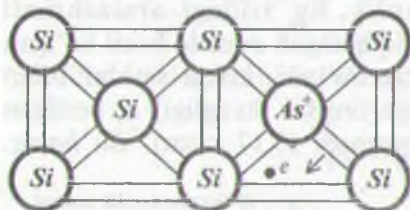
3.17-rasm.

temperatura noldan farqli bo'lganda, hosil bo'lgan lokal sathlardan elektronlar, issiqlik fluktuatsiyasi kT sababli, o'tkazuvchanlik zonasiga o'tadilar va elektronlar bilan bog'liq o'tkazuvchanlikni hosil etadilar. Hosil bo'lgan bunday lokal sathlar **donorlar** deyiladi.

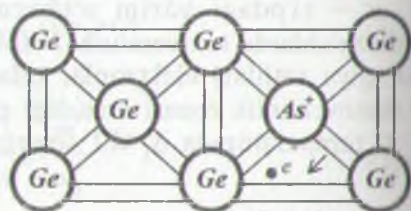
Misol. To'rt valentli atomli kristalldagi (masalan, $_{32}\text{Ge}$ germaniyda) bitta atomni besh valentli atom (masalan, $_{15}\text{P}$ fosfor yoki $_{33}\text{As}$ margimush) bilan almashtirilsin. 5 ta valentli elektronlardan 4 tasi kimyoviy bog'lanishda (kovealentli bog'lanishda) ishtirok etadi. $T=0$ da 5-elektron aralashma musbat ion yaqinida ushlanib turadi (3.18-rasm). Buni kristall ichida joylashgan vodorod atomiga o'xshatish mumkin. Uning ionizatsiyasini vodorod atomining ionizatsiyasini hisoblagan kabi hisoblash mumkin, ya'ni (eV da)

$$E_s = \frac{13,6}{\chi^2} \quad (1)$$

χ — dielektrik koeffitsiyent yarimo'tkazgichlar uchun 3.9 (kremniy), 16, 1 (germaniy) atrofida bo'ladi. Bulardan ionizatsiya energiyasi E_s uchun 0,05eV dan 0,10eV gacha qiymatlar olamiz. Demak, aralashma atomining ionizatsiyasi bo'lishida beshinchi elektron o'tkazuvchanlik zonasiga o'tadi. Boshqacha aytganda, aralashma atom bilan bog'liq energiya sathi E_d o'tkazuvchanlik zonasi tubi E_d dan $(0,05 \div 0,10)$ eV quyida joylashgan bo'ladi (3.17-rasm).



Ortiqcha
5-elektron
n-tipdagi kremniy



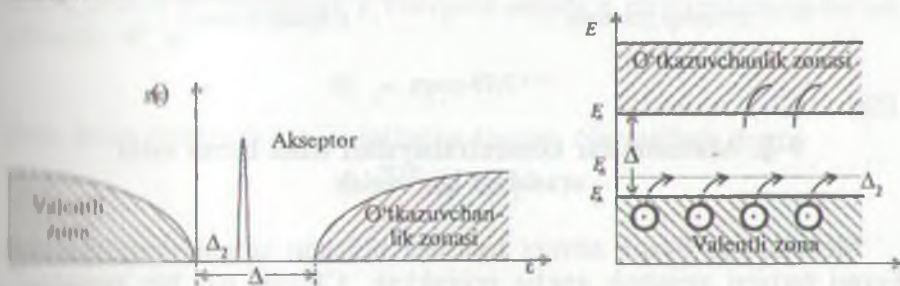
Ortiqcha
5-elektron
n-tipdagi germaniy

3.18-rasm.

Shuni ta'kidlash lozimki, bu energiya farqi $E_s - E_d = \Delta_i = (0,05 \div 0,10)$ eV xona temperaturasidagi issiqlik fluktuatsiyasi kT dan kichik bo'lgani uchun, E_d dagi elektronlarning aksariyati o'tkazuvchanlik zonasiga o'tadi. Shunday qilib, lokal sathlar — donorlar E_d yarim o'tkazgichning o'tkazuvchan zonasini elektronlar bilan ta'minlaydi.

Bunday kristallni *n-tipdagi aralashmali yarimo'tkazuvchanlik yarimo'tkazgich* deyiladi.

p - tipdagi yarimo'tkazgich. Bu tipdagi aralashmali yarimo'tkazgichda to'liqlangan zonada hosil bo'lgan lokal energiya sathlari valentli zonaga yaqin bo'lib, ular orasidagi energiya tirqishi $\Delta_2 < kT$ shartiga bo'ysunadi, ular bo'sh bo'ladi. Temperatura noldan yuqori bo'lsa, valentli zonadan bu lokal energiya sathlariga elektronlar o'tadi va valentli zonada teshiklar (kovaklar) hosil bo'lib, elektr maydoni kiritish bilan elektronlarning harakati tufayli kovaklar musbat zaryad tashuvchi zarralar kabi harakatga keladilar va elektr tok hosil qiladilar. Hosil bo'lgan bunday lokal sathlar akseptorlar deyiladi (3.19-rasm).



3.19-rasm.

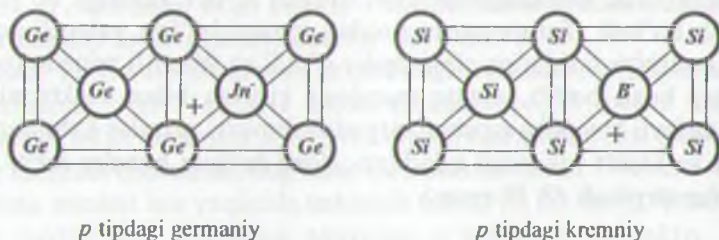
Bunday xildagi aralashmali yarimo'tkazgich *p* tipdagi yarimo'tkazgich deyiladi.

p tipdagi yarimo'tkazgichga misollar: $_{32}\text{Ge}$ da $_{13}\text{Al}$ (alyumin) yoki $_{5}\text{B}$ (bor) yoki $_{49}\text{In}$ (indiy) 3 valentli elementlar aralashmasi tufayli *p* tipdagi yarimo'tkazgich hosil bo'ladi.

Agar germaniy kristallga indiy atomi (yoki $_{5}\text{B}$, $_{13}\text{Al}$ atomlari) kiritilsa, u holda kristall strukturasi buzilmagan holda kristalldagi atomlar bog'lanishida to'la to'yinish bo'lmay qoladi, indiy atomi germaniydagi valentli zonadan elektronni o'ziga qabul qilib olishi mumkin. Elektronlarni valentli zonadan ushlab oluvchi atomlar lokal sathlarni — akseptorlarni hosil qiladi. Valentli zonada esa kovaklar (teshiklar) hosil bo'ladi. Natijada bunday aralashma kiritilishi tufayli kovaklar bilan bog'liq *p* tipdagi yarimo'tkazgich hosil etiladi (3.20-rasm).

3 valentli aralashma atom o'rniga 3 valentli aralashma atom (masalan, $_{13}\text{Al}$) kiritilsa, kimyoviy kovalent bog'lanish bo'lishi uchun aralashma atom to'rtinchi elektronni valentli zonadan (masalan, germaniy atomidan) oladi (3.20-rasm). Bunda valentli zonada erkin kovak (teshik) hosil bo'ladi (3.19-rasm). Bunday ionizatsiya bo'lishi uchun ham (0,05-0,1) eV energiya zarur bo'ladi. Demak, bunda aralashma atom elektronning energiyasi sathi valentli zona shifidan yuqorida bo'ladi. Issiqlik fluktuatsiyalari kT sababli

elektronlar E_A sathlarga — akseptrlarga o'tadilar. Shunday qilib, p tipdagi aralashmali o'tkazuvchanlikli yarimo'tkazgich hosil qilinadi.



3.20-rasm.

9-§. Aralashmalar konsentratsiyalari bilan Fermi sathi orasidagi bog'lanish

Metallardagi Fermi sathini topishga nisbatan yarimo'tkazgichlarda Fermi sathini aniqlash ancha murakkab. Chunki har bir zonadagi elektronlar soni har xil energiya sathlari hamda donor va akseptorlar aralashmalar konsentratsiyalariga bog'liq.

Kristallning elektrneytralligiga asosan, donorli yarimo'tkazgichning o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar soni n_e ionlashgan donor atomlar soni n_d ga valentli zonadagi kovaklar soni n_p qo'shilganiga teng, ya'ni

$$n_e = n_d + n_p \quad (40)$$

Temperatura juda katta bo'lmagan holda, ya'ni $\Delta \gg kT$ shart bajarilganda kristallning elektrneytralligiga asosan aralashmali o'tkazuvchanlikka ega bo'lgan donorli yarimo'tkazgichlar uchun

$$n_e \approx n_d \quad (41)$$

akseptorli yarimo'tkazgichlar uchun

$$n_p \approx n_A \quad (42)$$

tengliklar o'rinlidir. Bular da valentli zonadan o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlar o'tishi va shu sababli kovaklar paydo bo'lishi hisobga olinmadi. Bu (41) va (42) tengliklardan foydalanib, aralashmali yarimo'tkazgichlarning kimyoviy potensialini aniqlash mumkin.

Biz n_e va n_p uchun (35) va (36) ifodalarga egamiz. Bular da energiya valentli zona yuqori chegarasidan hisoblangan. Agar energiyani o'tkazuvchanlik zonasining tubidan (tagidan) hisoblansa, taqiqlangan zona kengligi Δ ni ayirish lozim bo'ladi. Buni nazarda tutib, (35) va (36) ifodalarni qayta yozamiz.

$$n_e = 2 \left(\frac{2\pi k T m_e^*}{h^2} \right)^{3/2} e^{\beta\mu} = a_e e^{\beta\mu} \quad (43)$$

$$n_p = 2 \left(\frac{2\pi k T m_p^*}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\beta(\mu + \Delta)} = a_p e^{-\beta(\mu + \Delta)} \quad (44)$$

Donor sathlardagi kovaklar soni n_d va akseptor sathlardagi elektronlar soni n_a ni aniqlash kerak. Bularni topish uchun Bolsman taqsimot funksiyasidan foydalanamiz. ϵ_r energetik sathda n_r elektronlarning bo'lish ehtimoli W_r ni

$$W_r = c g_r e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)n_r} \quad (45)$$

ifoda bilan aniqlaymiz; g_r – sathning karrasi. Normallash sharti

$$\sum_r W_r = 1$$

dan c ni topamiz:

$$c = \frac{1}{\sum_r g_r e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)n_r}} \quad (46)$$

Elektronlarning o'rtacha soni

$$\bar{n}_e = \sum_r W_r n_r$$

uchun

$$\bar{n}_e = \frac{\sum_r n_r g_r \exp[-\beta(\epsilon_r - \mu)n_r]}{\sum_r g_r \exp[-\beta(\epsilon_r - \mu)n_r]} \quad (47)$$

ifoda o'rinli.

Elektronlar uchun, Pauli prinsipiga asosan, $n_r = 0, 1$. Shu sababli

$$\frac{n_{ed}}{N_d} = \bar{n}_e = \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\beta(\epsilon_d - \mu)} + 1} \quad (48)$$

Bo'lish donor sathlarning karrasi birga teng, ya'ni $g_0 = 1$; elektron bilan band donor sathning karrasi 2 ga teng (elektron spinning 2 yo'nalishi sababli), ya'ni $g_1 = 2$. Demak, ϵ_d sathdan o'tgan elektronlar konsentratsiyasi uchun

$$\frac{n_{ed}}{N_d} \equiv \bar{n}_e = \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\beta(\epsilon_d - \mu)} + 1} \quad (49)$$

N_d – donorli atomlar (konsentratsiyasi) soni; elektronlari o'tkazuvchanlik zonasiga o'tgan donorlar soni n_d ; konsentratsiya n_d/N_d esa (49) dan aniqlanadi:

$$\frac{n_d}{N_d} = 1 - \frac{n_{ed}}{N_d} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\beta(\epsilon_d - \mu)} + 1} = \frac{1}{2e^{-\beta(\epsilon_d - \mu)} + 1} \quad (50)$$

(43) va (50) ni nazarda tutib, (41) tenglikni yozamiz

$$a_e e^{\beta\mu} = \frac{N_d}{2e^{-\beta(\epsilon_d - \mu)} + 1} \quad (51)$$

Bundan

$$e^{\beta\mu} = \frac{1}{4} e^{-\beta|\epsilon_d|} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{8N_d}{a_e} e^{\beta|\epsilon_d|}} \right] \quad (52)$$

Bunda $\epsilon_d = -|\epsilon_d|$ (donor sath o'tkazuvchanlik zonasi tubidan pastda), $T \rightarrow 0$ da ($\beta \rightarrow \infty$ da) (52) dan

$$e^{\beta\mu} \approx \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{8N_d}{a_e} e^{-\beta|\epsilon_d|/2}} \quad (53)$$

bundan

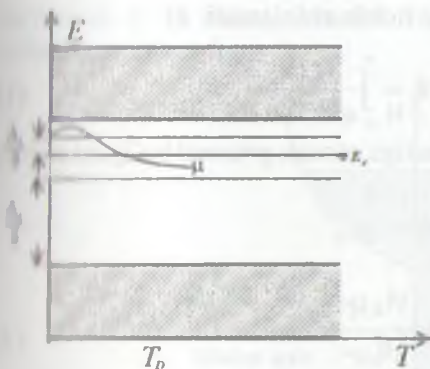
$$\mu = -\frac{1}{2} |\epsilon_d| + kT \ln \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{8N_d}{a_e}} \approx -\frac{1}{2} |\epsilon_d| \quad (54)$$

Demak, $T \rightarrow 0$ da donorlik aralashmali yarimo'tkazgichning kimyoviy potensial μ donor sathi bilan o'tkazuvchanlik zonasi tubi o'rtasiga yaqin bo'ladi (q. 3.21-rasm).

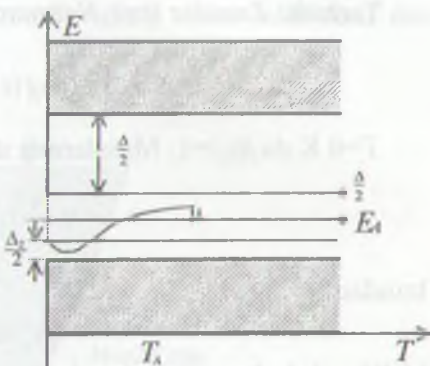
Aniqroq hisoblash ko'rsatadiki, temperatura ortishi bilan donorli yarimo'tkazgichning kimyoviy potentsiali o'zgaradi (q. 3.21-rasm).

Avval μ biroz ortib, so'ng taqiqlangan zona o'rtasidagi sathgacha kamayib boradi.

Akseptorli yarimo'tkazgich uchun yuqoridagi kabi hisobni qilib ko'rsatish mumkin: uning kimyoviy potentsiali $T \rightarrow 0$ da



3.21-rasm.



3.22-rasm.

$$\mu \approx -\Delta + \frac{|\epsilon_A|}{2} \quad (55)$$

bo'ladi.

Demak $T \rightarrow 0$ da ($\beta \rightarrow \infty$) p tipdagi yarimo'tkazgichning kimyoviy potentsiali valentli zona yuqorisi (shifti) bilan akseptor sath o'rtasida bo'ladi. Aniq hisoblash ko'rsatadiki, temperatura ortishi bilan akseptorli yarim o'tkazgichning kimyoviy potentsiali $\mu(T)$ o'zgaradi va yuqori temperaturada to'liqlangan zona o'rtasidagi sathga yaqinlashadi (q. 3.22-rasm).

Tarixiy ma'lumot. Metallarning klassik elektron nazariyasi asosini nemis olimi P. Drude (1863-1906) va gollandiyali olim X.A. Lorens (1853-1928) yaratganlar. Bu nazariya bo'yicha metallardagi elektronlar ikki xildan (tipdan): bog'langan va erkin elektronlardan iborat deb qaraladi. Bu nazariyada kiritilgan erkin elektronlar tasavvuri metallarning elektr o'tkazuvchanlik va issiqlik o'tkazuvchanligini yaxshi tushuntirib bera oldi. Bunday erkin elektronlar, klassik statistik fizikaning erkinlik darajalari bo'yicha energiyani teng taqsimlashi qonuniga asosan, qattiq jismning issiqlik sig'imiga $3n_e k/2$ hissa qo'shishlari kerak edi (bunda n_e erkin elektronlar soni). Ammo bu esa qattiq jismlar issiqlik sig'imining Dyulong-Pi qonuniga ziddir. Bu ziddiyatni Fermi-Dirak statistikasi asosida nemis olimi A. Zommerfeld (1868-1951) bartaraf etdi.

Masala 3.1. Elektronlarning to'la soni N ga teng. Elektronlar holatlari zichligi

$$g(\epsilon) = \text{const} \quad \epsilon \geq 0$$

$$g(\epsilon) = 0 \quad \epsilon < 0$$

bo'lsin, a) 0 K da Fermi energiyasi μ_0 ni aniqlang; b) sistemaning klassik holga o'tish sharti (aynimaganlik sharti) aniqlansin.

Yechish. Zarralar soni N umumiy holda aniqlanadi: a)

$$N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{g d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \quad (1)$$

$T=0$ K da $f(\varepsilon)=1$, Masalaning shartiga asosan $g=const$ bo'lgani uchun

$$N = \int_0^{\mu_0} g d\varepsilon = g \mu_0$$

bundan

$$\mu_0 = N / g \quad (2)$$

b) Klassik holga o'tish sharti

$$e^{-\beta\mu} \gg 1 \quad (3)$$

Bu shart bajarilganda, (1) asosida olamiz:

$$\frac{N}{g} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} d\varepsilon = \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \quad (4)$$

(3) va (4)

$$\frac{N\beta}{g} \ll 1, \frac{N}{kTg} \ll 1 \quad (5)$$

(5) shart bajarilsa, sistema aynimagan bo'ladi. (5) ni

$$kTg \gg N$$

ko'rinishda yozaylik; Bu tengsizlikning ma'nosi: kT intervaldagi holatlar soni zarralar soni N dan juda katta.

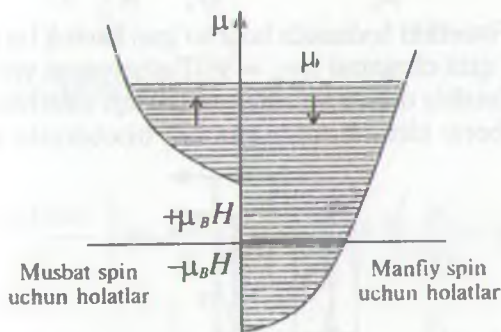
Masala 3.2. Magnit maydondagi elektronning energiyasi maydon yo'nalishigaspinning parallel yoki antiparaleligigaqarab $\pm \mu_B H$ ga teng $T=0$ K dagi erkin elektronlarning paramagnit qabul qiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Elektron energiyasi

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H \quad (1)$$

0 K da elektronlar Fermi sathigacha energiya sathlarini band qiladilar. Bu esa musbat spinli (maydon yo'nalishiga parallel spinli) elektronlarning kinetik energiyasi $\frac{p^2}{2m}$ nol qiymatdan $\mu_0 - \mu_B H$ gacha o'zgarishi, manliy spinli elektronning kinetik energiyasi noldan $\mu_0 + \mu_B H$ gacha o'zgarishini

ko'rsatadi (3.23 rasm). Musbat va manfiy spinli elektronlar soni mos ravishda aniqlanadi:



3.23-rasm.

$$N_+ = \frac{4\pi V}{3h^3} P_+^3 \quad \left(\frac{1}{2m} P_+^2 = \mu_0 - \mu_B H \right)$$

$$N_- = \frac{4\pi V}{3h^3} P_-^3 \quad \left(\frac{1}{2m} P_-^2 = \mu_0 + \mu_B H \right)$$

Elektronlarning to'la magnet momenti M

$$M = -\mu_B (N_+ - N_-) = \frac{4\pi V}{3h^3} \mu_B (P_-^3 - P_+^3) = \mu_B \frac{4\pi V}{3h^3} \left\{ [2m(\mu_0 + \mu_B H)]^{\frac{3}{2}} - [2m(\mu_0 - \mu_B H)]^{\frac{3}{2}} \right\}$$

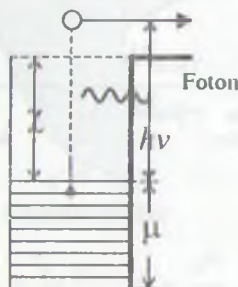
$\mu_0 \gg \mu_B H$ bo'lgan hol uchun

$$M = 3H\mu_B^2 \cdot \frac{4\pi V(2m\mu_0)^{\frac{3}{2}}}{3h^3\mu_0} + \dots \approx \frac{3\mu_B^2 N}{2\mu_0} H \quad (2)$$

Birlik hajmda magnetlanish $M = \chi H$ $N = 2 \cdot 4\pi \left(\frac{2m}{\mu_0} \right)^{\frac{3}{2}} / 3h^3$ dan foydalaniladi. $M = \chi H$ bilan (2) ni solishtirib, olamiz:

$$\lambda = \frac{(3/2)\pi\mu_B^2}{\mu_0} = \frac{3/2 \cdot N\mu_B^2}{kT_0}, \mu_0 \approx kT_0$$

Masala 3.3. Fotoeffekt hodisasida hosil bo'lgan fototok Ini aniqlang. Fotoeffekt hodisasining qizil chegarasi $h\nu_0 = \chi$, Tushayotgan yorug'likning chastotasi $\nu > \nu_0$. Metallda o'tkazuvchanlik zonasidagi elektronlarni m^* massali elektronlardan iborat ideal fermi – gaz deb hisoblansin (q. 3.24-rasm).



3.24-rasm.

Ko'rsatma. Elektron fotonni yutganda uning faqat metallga perpendikulyar bo'lgan impulsi proyeksiyasi o'zgaradi deb hisoblansin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra, agar

$$h\nu + \frac{p_z^2}{2m^*} > \chi + \mu$$

shart bajarilsa, metalldan elektron $h\nu$ energiyali fotonni yutgandan keyin chiqadi, μ - Fermi sathi. Bundan

$$p_z > \sqrt{2m^* (\chi + \mu - h\nu)} = p_0 \quad (1)$$

Metallning birlik sirtiga, birlik vaqtda (1) shartga bo'ysungan, p_z impulsi tushayotgan elektronlar soni, ya'ni elektronlar oqimi S quyidagi

$$S = \frac{2}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p_z}{m^*} dp_z \int \int dp_x dp_y e^{\beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m^* - \mu}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Qutb koordinatalar sistemasiga o'taylik:

$$\beta \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m^*} = \beta u^2 / 2m^* \quad dp_x dp_y = u d\phi du$$

$$S = \frac{4\pi}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p_z}{m^*} dp_z \int_0^{\infty} u du \int_0^{2\pi} d\phi \left\{ e^{\beta(u^2 + p_z^2)/2m^* - \mu} + 1 \right\}^{-1} =$$

$$= \frac{2\pi}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p_z}{m^*} dp_z \int_0^{\infty} du^2 \left\{ e^{u^2 + p_z^2 / (2m^* - \mu)} + 1 \right\}^{-1}$$

o'zgaruvchini o'zgartiraylik: $\frac{\beta u^2}{2m^*} \rightarrow u$

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\pi k T m^*}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \int_0^{\infty} du \left\{ \exp \left[u + \beta \left(\frac{p_z^2}{2m^*} - \mu \right) \right] + 1 \right\}^{-1} = \\ &= \frac{4\pi k T m^*}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \left\{ -\ln \left[1 + \exp \left(-u - \frac{\frac{p_z^2}{2m^*} - \mu}{kT} \right) \right] \right\} \Bigg|_{u=0}^{\infty} = \\ &= \frac{4\pi k T m^*}{h^3} \int_{p_0}^{\infty} dp_z \frac{p_z}{m^*} \ln \left\{ 1 + \exp \frac{\mu - \frac{p_z^2}{2m^*}}{kT} \right\} \end{aligned}$$

O'zgaruvchini quyidagicha o'zgartiraylik:

$$y = [p_z^2 / 2m^* - \mu - \lambda + h\nu] / kT$$

$$S = \frac{4\pi m^* (kT)^2}{h^3} \int_{0_{\infty}}^{\infty} dy \ln \left\{ 1 + \exp \left[\frac{h(\nu - \nu_0)}{kT} - y \right] \right\} = AT^2 \varphi(\delta) \quad (2)$$

Har bir elektronning metalldan chiqish ehtimolini α bilan belgilaylik. Bu holda (2) ni elektron zaryadi e ga α ga ko'paytirib, hosil bo'layotgan fototok I ni aniqlaymiz:

$$I = -e\alpha S = -e\alpha T^2 \varphi(\delta) \quad (3)$$

$$\delta = h(\nu - \nu_0) / kT \quad (4)$$

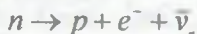
Olingan natija eksperimentga yaxshi mos keladi.

IV b o b. O'TA YUQORI TEMPERATURALI VA ZICHLIKLI MODDA HOLATLARI

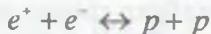
1-§. Kirish

Faraz qilaylik, zichlik juda katta bo'lmagan holda, modda temperaturasi ortib borsin. Agar modda qattiq agregat holatda bo'lsa, u suyuq holatga, undan keyin esa gazsimon holatga o'tadi. Temperatura bir necha ming gradusga ko'tarilganda termik dissotsiatsiya sodir bo'ladi, ya'ni molekulalarning atomlari orasidagi kimyoviy bog'lanish (ular 10^{-1} eV tartibda) uziladi, molekulalar atomlarga ajraladi. Bu holatdagi gazlar atomlardan tashkil topadilar. Agar temperatura yanada ortib 10^4 K dan ortsa, atom yadrolari bilan elektronlar orasidagi bog'lanishlar (ular bir necha elektron – volt tartibida; $1 \text{ eV} \div 10^4 \text{ K}$) uzilib, atomlarda ionlashish hodisasi yuz bera boshlaydi; temperatura 10^7 K da modda to'la ionlashgan bo'lib, u ionlar (yadrolar) va elektronlardan iborat plazma holatida bo'ladi.

Temperaturaning yana ortishi bilan yadroviy reaksiyalar boshlanadi va 10^9 K da yadrolar parchalana boshlaydi; (yadroda bog'lanish energiyasi mln eV tartibda bo'ladi); temperatura 10^{11} K bo'lganda modda proton va elektronlardan iborat bo'ladi; neytron



reaksiya asosida proton va elektronga aylanadi va antineytrino hosil bo'ladi. Temperatura 10^{13} K dan (energiya $E=10^9 \text{ eV}$ dan) yuqori bo'lganda nuklonlarning tug'ilishi va ularning boshqa elementar zarralarga aylanishi ushbu



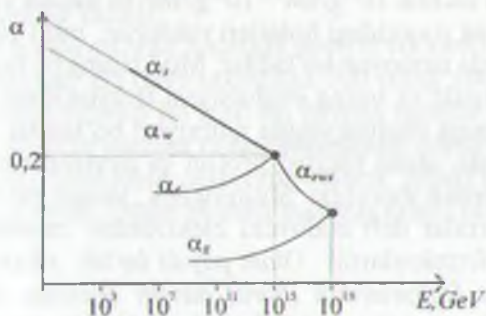
sxemalar bo'yicha sodir bo'lishi mumkin. Temperatura orta borib, 10^{14} K (ya'ni energiya $E=10^2 \text{ GeV}$) ga yetganda elementlar zarralarining bir-biriga aylanishi kuchayadi. Shu bilan bu holda zarralar orasidagi elektromagnit o'zaro ta'sir va zaif (kuchsiz) o'zaro ta'sir birlashib, bir umumiy o'zaro ta'sirni (uni elza o'zaro ta'sir deb atadik) sodir qiladilar.

Temperaturaning $T=10^{28} \text{ K}$ (Energiyaning $E=10^{15} \text{ GeV}$) qiymatlarida adronlar (barionlar va mezonlar) o'z tarkiblari – kvarklariga ajralib

ketadilar, bunda kvarklar va leptonlar orasida o'zaro o'tishlar va aylanishlarda (masalan, $uu \leftrightarrow X \leftrightarrow e^+ d$, $ud \leftrightarrow Y \leftrightarrow \nu, d$ o'zaro aylanishlarda), barion zaradi saqlanishining buzilishini nazariy jihatdan ko'rsatish mumkin (bu yerda u, d -kvarklar). Buyuk birlashuv nazariyasiga ko'ra, bu holatda elza va kuchli o'zaro ta'sirlar, bir umumiy o'zaro ta'sirni sodir etadilar. Uni biz elzakuch o'zaro ta'sir deb atadik.

Nihoyat, chegaraviy o'ta yuqori temperatura $T \approx 10^{32} K$ da (energiya $E \approx 10^{16} GeV$ bo'lganda) hozirgi zamon tasavvurlariga ko'ra, zarralar orasida elzakuch va gravitatsiya o'zaro ta'sirlar birligini sodir qiluvchi —yagona o'zaro ta'sir mavjud bo'ladi. Bu holatda materiya bir ongina, ya'ni $\sim 10^{-44}$ sekundgina "yashaydi".

Energiyaning yuqori qiymatlarida (yuqori temperaturalarda) elektromagnit o'zaro ta'sirni tavsiflovchi konstantalar α_e kuchli va zaif (kuchsiz) o'zaro ta'sirlarni xarakterlovchi konstantalar α_s va α_w hamda gravitatsiya doimiysi α_g umuman aytganda, o'zgaradilar. Ular sxematik ravishda 4.1-rasmda ko'rsatilgan.



4.1-rasm.

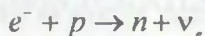
Endi biz zichlik ortgandagi modda holatlari bilan tanishaylik. Moddalar o'zlarining kimyoviy tarkiblariga ko'ra, normal sharoitda juda xilma-xil bo'lalar-da, moddalar xossalari bu xilma-xilligi bosim ortishi bilan kamayib, «silliqlanib» boradi.

Huning sababi shuki, bosim orta borib, 10^8 atm. tartibida bo'lganda kimyoviy sossalarning har xilligiga sababchi bo'lgan atomlarning yuqori qobig'idagi elektronlar o'z atomlaridan ajralib chiqadilar; ichki qobiqdagilari esa, aksincha, zichlasha boradilar.

Bosim ortib 10^{12} atm. tartibida bo'lganda elektronlarning yadro bilan o'zaro ta'siri muhim rol o'ynaydi. Bu holda moddani, asosan, aynigan elektron-gaz deb hisoblash mumkin.

Bosim 10^{18} atm. (zichlik $\rho \approx 10^6$ g/sm³) bo'lganda, aynigan gaz relyativistik xarakterga ega bo'ladi, ya'ni elektronning tezligi yorug'lik tezligiga yaqin bo'ladi.

Bosimning yana ortishi (zichlikning kattalashishi) tufayli elektronlar bilan yadrolardagi protonlar orasida



yadro reaksiyalari boshlanadi va bosim ortib, 10^{24} atm (zichlik $\rho \approx 10^{11}$ g/sm³) tartibga yetganda neytronlashish jarayoni tufayli modda holatida neytronlar ustunlik qiladi va bosim yana ortib 10^{25} atm, zichlik $\rho \approx 10^{12}$ g/sm³ qiymatga erishganda, yadrolar beqaror bo'lib, parchalanib ketadi va bunda modda asosan neytronlardan iborat Fermi-gaz holatga o'tadi. Bosim 10^{27} atm bo'lganda bu Fermi-sistemaning zichligi yadro zichligi $\rho \approx 10^{14}$ g/sm³ ga teng bo'ladi.

Hozirgi zamon tasavvuriga ko'ra, zichlikning yanada ortishi tufayli neytronlar ham parchalanib, kvarklardan iborat modda holati sodir bo'la boshlaydi. Bunda zichlik 10^{15} g/sm³— 10^{26} g/sm³ va undan yuqori tartiblarda bo'ladi. Moddaning yuqoridagi holatlari yulduzlar, mitti yulduzlar, neytron va kvark yulduzlarda namoyon bo'ladilar. Moddaning bu holatlari Olamning paydo bo'lgan paytda va uning evolutsiyasi jarayonidagi eralarda hamda yulduzlar va ularning evolutsiyasida namoyon bo'ladilar.

Bizga ma'lumki, atom yadrosi proton va neytronlardan, ular esa o'z navbatida kvarklardan iboratdir. Shuningdek, yengil zarralar — leptonlar yoki nuqtaviy zarralar deb ataluvchi elektronlar, myuonlar, taonlar va neytrinolar ham fermionlardir. *Olam paydo bo'lib, «Katta portlash» dan keyin u kvark va leptonlardan iborat davrni boshdan kechiradi.* Olam evolutsiyasining keyingi davrlarida hamda yulduzlar o'z evolutsiyalarida yuqori temperaturali va bosimli holatlarda bo'lganlar. Endi, Olam, yulduzlar va ularning evolutsiyalari bilan qisqacha tanishaylik.

2-§. Olamning avvalgi eralari

Hozirgi zamon tasavvurlariga ko'ra, Olam fizik vakuumdan kvant fluktuatsiya natijasida $5,2 \cdot 10^{-45}$ sekund davomidan paydo bo'lgan. So'ng, Plank erasida, Olamning yoshi $1,3 \cdot 10^{-43}$ sekund bo'lganda «Katta portlash» yuz bergan¹.

¹ Muallifning g'oyasiga asosan, vakuumdan ikki zarra — plankeon va anti plankeon paydo bo'ladi. So'ng ular Plank erasida annigilyatsiyalanadi, ya'ni «Katta portlash» sodir etadi.

Bunda Olamning fizik parametrlari $T \approx 10^{32} \text{ K}$ va $\rho \approx 10^{94} \text{ g/sm}^3$ qiymatlarni qabul qiladi. Keyin Olamning *kvark-lepton erasi* $10^{-43} - 10^{-36}$ sekund davom etib, bu davrda uning parametrlari: temperaturasi $T=10^{28} \text{ K}$, zichligi $\rho \approx 10^{80} \text{ g/sm}^3$, energiyasi $E \approx 10^{15} \text{ GeV}$ tartibda bo'lgan. Olamning yoshi 10^{-4} sekund bo'lganda, erkin kvarklar davri tugab, ular adron quopiga (uni konfaynment hodisasi — asirga tushish deyiladi) tushganlar va barionlar va mezonlarni hosil qilganlar. Bunda Olam parametrlari, $T=10^{12} \text{ K}$, $\rho \approx 1,5 \cdot 10^{15} \text{ g/sm}^3$, $E \approx 300 \text{ MeV}$ dan iborat bo'lgan.

Olam paydo bo'lgandan keyin, 200 sekundlarcha vaqt davomida, uning jo'shqin davri tugab, temperatura 1 mlrdga tushadi. Bu davrda, 200 sekund yoshli Olamda vodorod va geliy atomlarining yadrolari mos ravishda taxminan 70 va 30 foizlarni tashkil etadi. So'ng, Olamning *proton, geliy yadrolari elektronlar hamda neytrino va fotonlardan iborat plazma davri* boshlangan davr 300 ming yilcha davom etgan. Bu davrning oxirida Olam temperaturasi $T \approx 4000 \text{ K}$ ($E \approx 0,4 \text{ eV}$), zichligi esa $\rho \approx 3,5 \cdot 10^{-18} \text{ g/sm}^3$ atrofida bo'lib, vodorod va geliy yadrolari bilan elektronlar rekombinatsiyasi uchun sharoit vujudga keladi.

Olamning bu temperaturali holatida neytral vodorod va geliy atomlari paydo bo'la boshlaydi. Bu davr taxminan 700 ming yilcha davom etadi. Kosmologiya uchun muhim bo'lgan bu davrda modda va nurlanish bir-biridan ajraladi. *Mazkur plazma rekombinatsiyasi erasining oxirida, Olam 1 mln yoshga kiradi.* Shu bilan olamning "tinch" davri boshlanadi va u 1 mlrd yilcha davom etadi. Olam evolutsiyasidagi eralar quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Olam evolutsiyasi

Olam eralari	Vaqt	Olam holati
Olam paydo bo'lishi (tug'ilishi)	Tug'ilish jarayoni davomiligi $\chi=5,2 \cdot 10^{-45} \text{ sek}$ (vaqt kvanti xronon)	Fizik vakuumda kvant fluktuatsiya tufayli Olam tug'ilishi jarayoni. Kosmologiya singulyarligi; lokalon $t_0=1,6 \cdot 10^{-34} \text{ sm}$.
Planck erasi	$t_p=8\pi\chi \approx 1,3 \cdot 10^{-43} \text{ sek}$	Katta portlash. Plankeon-anti-plankeon jufti annigilyatsiyasi.
Kvark-lepton erasi	$(1,3 \cdot 10^{-43} - 10^{-36}) \text{ sek}$	Kvarklar va leptonlar bir-biriga aylana oladilar. Barion zaradining saqlanishi qonuni buziladi.
Kvarklar, leptonlar plazmasi erasi	$(10^{-36} - 10^{-4}) \text{ sek}$	Kvarklardan barionlar va mezonlar hosil bo'la boradi. Eraning oxirida erkin kvarklar tugaydi.

Olam eralari	Vaqt	Olam holati
Leptonlar erasi	$(10^{-4} - 10^{-1}) \text{ sek}$	Nuklonlar, leptonlar, fotonlar.
Yengil yadrolar sintezi; radiatsiya erasi	$(1 - 200) \text{ sek}$	H^2, H^3, He^3, He^4
Yuqori temperaturali plazma	$200 \text{ sek} - 300000 \text{ yil}$	Ionlashgan vodorod ($\approx 70\%$), geliy ($\approx 30\%$), elektronlar va fotonlar.
Plazma rekombinatsiyasi	$3 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ yil}$	Plazmaning neytral atomlardan tuzilgan muxitga aylanishi.
Atamar Olam	$10^6 - 10^9 \text{ yil}$	Olamning fotonlar uchun shaffof bo'lishi.
Yulduzlar, galaktikalar olami	$10^9 - 2 \cdot 10^{10} \text{ yil}$	Yulduzlar va galaktikalarining paydo bo'lishi. Yulduzlarda nuklonlar sintezi. O'tayangi, mitti, neytron va kvark yulduzlar, qora teshiklar, Quyosh sistemasining paydo bo'lishi.

3-§. Yulduzlarda elementlar sintezi

1-jadvaldan ko'rinadigan, Olam yoshi 1 mlrd yil bo'lganda, uning «tinch» davri tugab, katta masshtabdagi kosmik qurilishlar davri boshlanadi. Bu davrda asosan qurilish materiali — vodorod va geliydan birlamchi yulduzlar paydo bo'la boshlaydi. (I. Kantning (1724-1804) gipotezasiga ko'ra, Olamni to'ldirgan xaos holatidagi materiyadan tortilish va itarish kuchlari tufayli Olamning katta masshtabdagi obyektlari paydo bo'lgan). Gravitatsiya tortilish kuchi natijasida modda siqiladi, u qiziydi va termoyadro reaksiyalarining borishiga imkon tug'iladi. Bu yerda shuni ta'kidlash joizki, Olamni tashkil etgan modda massasining 99 foizini barionlar (vodorod va geliy), 1 foizga yaqinini fotonlar, elektronlar esa juda kam qismini tashkil etadi. Boshqacha aytganda, galaktikalararo tortilish kuchini, yulduzlar holati va ularning evolutsiyasini asosan barionlar (fermionlar) aniqlaydi. Demak, yulduzlar tarkibini tushunish uchun, jumladan elementlarning paydo bo'lishini bilish uchun, yadro moddasi tarkibini bilish lozim bo'ladi.

Yadro proton va neytronlardan iborat; proton va neytron-nuklonning ikki holatdagi ko'rinishlaridir. Bu holda yadroning holati uning nuklonlari bilan aniqlanadi. Ammo temperatura va zichlik orta borib, $T \geq 10^{12} \text{ K}$ va $\rho \geq 1,5 \cdot 10^{15} \text{ g/sm}^3$ qiymatlarga erishganda nuklonlar (proton, neytron) kvarklarga ajraladi: kvark-glyuon plazma hosil bo'ladi; kvarklar o'zlarining

adron «qoplari»dan «ozod» bo'ladilar. Bu holda yadroni ko'p kvarkli sistema deb qarab, uni tadqiq etish lozim bo'ladi.

Past temperaturada ($T=0K$, ρ_0 da) yadro moddasi «suyuqlik» fazasida bo'lsa, temperatura ortgan sari u gazsimon fazaga (nuklonlar alohida-alohida holda) o'tadi. Temperatura ortishi bilan barionlar va og'ir barionlar paydo bo'lishi mumkin. Temperaturaning yanada ortishi bilan barionlar parchalanib, kvarklar kvark-glyuon (glyuon-kvarklar orasidagi kuchli o'zaro ta'sir maydonning kvantlari) holatiga o'tadi.

Har bir kvark nuklon (yoki mezon) tarkibida kvark-antikvark hamda glyuon bulutlarga o'ralgan bo'ladi, ya'ni «shuba»ga ega bo'ladi.

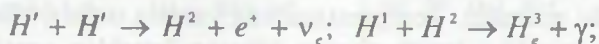
Hozirgi vaqtda 3 ta avlodga tegishli $u, d; s, c; b, t$ kvarklar bizga ma'lum. Ular Olamning paydo bo'lgan birinchi onlarida uni tashkil etgan dastlabki zarralardir.

Olamning yoshi 10^{-10} sek bo'lganda, adron davri boshlanishida birinchi avlod u, d kvarklardan proton va neytron (nuklonlar) paydo bo'la boshlaydi. Olam yoshi 10^{-4} bo'lganda erkin u, d kvarklar adronlarga «kondensatsiyalanib» bo'ladi. Bu yerda shuni aytish joizki, 2-va 3-avlod kvarklar Olam qurilishida ishtirok etmaydilar. Olam evolutsiyasida nuklonlar paydo bo'lishi davri 10^{-10} - 10^{-4} sekund juda muhim davrlardan hisoblanadi. So'ng, 1 sek–200 sek vaqt davomida Olamdagi hosil bo'lgan proton-neytronlardan iborat plazmada yadro reaksiyalari (nukleosintez) davom etib, kosmik strukturani – galaktika va yulduzlarning tarkibini hosil qiluvchi $H^2, H, He^3, He^4, Li^6, Li^7$ lardan iborat gaz hosil bo'ladi: bu hosil bo'lgan gaz, asosan, vodorod yadrosi (proton) va geliy yadrosi He^4 , dan iborat; qolgan yadrolar juda oz qismni tashkil etadi; masalan, H^2 - 10^{-3} - 10^{-4} va He^3 - 10^{-5} - 10^{-6} temperaturaning tushishi, plazmaning zichligi kamayishi tufayli hamda neytronning yemirilishi sababli bu birlamchi nukleosintez tezda, Olamning yoshi 200 sek bo'lganda tugaydi.

Proton (=70%), geliy yadrosi (=30%), foton, elektron, neytrino va boshqalardan iborat yuqori temperaturali plazma davri uzoq vaqt, 300 ming yil davom etadi. So'ng, 700 ming yil rekombinatsiya davrida neytral rangli atomlar hosil bo'ladi. Shunda Olam yoshi 1 mln. yil bo'ladi. Shundan so'ng birlamchi yulduzlar paydo bo'la boshlaydi va bu jarayon 1 mlrd yilga davom etadi; birlamchi yulduzlar paydo bo'lishi hozirda ham sodir bo'lmoqda. Bu birlamchi yulduzlardagi termoyadro reaksiyalari tufayli boshqa elementlarning, jumladan og'ir elementlarning yadrolari hosil bo'lgan. Bu jarayonlar Olam yoshi 1 mlrd. yilga yetgandan keyin boshlangan.

Hozirgi vaqtda yetarli darajada ma'lumki, massasi M Quyosh massasi M_0 dan katta yoki unga teng, ya'ni $M \geq M_0$ massali birlamchi yulduzlarda 4 bosqichdan iborat termoyadro sintezi kechadi.

1. Quyosh massasiga teng yoki undan kichik massali yulduzlarda, asosan, proton — proton sikli

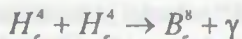


orqali vodorod yonib, geliyga aylanadi. Yulduzlardagi bu sikl $T=10^7 K$ da boshlanib, juda uzoq vaqt davom etadi. (Quyoshda ham shunday termoyadro reaksiyalari davom etyapti. Quyosh birlamchi yulduz emasligini eslatamiz).

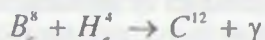
2. Vodorod, asosan, yonib bo'lgandan keyin, yulduz yadrosi siqila boshlaydi. Uning temperaturasi $T=10^8 K$ bo'lganda.



yadro reaksiyasi (**Solpiter reaksiyasi**) bo'yicha geliy yona boshlaydi. Yulduzning tashqi qobig'i esa kengaya boradi: bu qizil gigant yulduzdir. Bunday yulduzning massasi $M > M_0$ bo'ladi. Solpiter reaksiyasini quyidagicha tushunish mumkin: dastlab



yadro reaksiya yuz beradi. Bunda B_e^8 ning yashash vaqti nihoyatda kichik, 10^{-15} sekund tartibda. Shu vaqtda uchinchi yadro He^4 u bilan to'qnashib



reaksiya sodir bo'lishi mumkin.

Umuman $B_e^8 + H_e^4 \rightarrow C^{12} + \gamma$ reaksiyada $7,7 meV$ energiya ajraladi. Nazariy hisoblash ko'rsatadiki, ma'lum sharoitda ($T \approx 10^7 K$, $\rho \approx 10^2 g/sm^3$) bu reaksiya effektiv ravishda borib, uglerod C^{12} ning Olamdagi tarqalganligini ta'minlash uchun C^{12} da $7,7 meV$ energiyali sath mavjud bo'lishi zarur. Hayratlanarlisi shundaki, xuddi shunday rezonans sath C^{12} da haqiqatdan ham mavjud ekan; buning natijasida reaksiya katta ehtimol bilan borishi ta'minlangan. Xuddi shu holatdagina yadro C^{12} ning uchta H_e^4 ga yemirilishi sekinlashadi, ya'ni ehtimoli kichik bo'ladi va $C^{12} + H'$ va $C^{12} + H$ reaksiyalar borishiga imkon tug'ilib, yulduzlarda termoyadro reaksiyalar zanjiri davom etishiga yo'l ochiladi va og'ir yadrolar hosil bo'lishi ta'minlanadi.

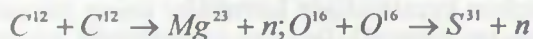
Demak, barcha og'ir yadrolarning hosil bo'lishiga (yaratilishiga) olib beradigan bittagina yo'l — bu C^{12} ning $7,7 meV$ energiyali sathidir. Jannatga kiradigan (o'tadigan) bittagina ko'pri bo'lgani kabi, organik va noorganik dunyoga o'tadigan va binobarin Olamda hayotning paydo bo'lishini (uning

yaratilishini) ta'minlaydigan yo'lga o'tadigan ko'prik — bu C^{12} ning shu 1.7 MeV energiyali sathidir.

Hisoblashlarga asosan, yulduzlardagi proton — proton siklida yulduzning yonishi uchun bir necha o'n mlrd yil talab etilsa, geliyning yonishi uchun esa atigi taxminan o'n mln yil vaqt talab etiladi.

3. Yulduzdagi temperatura $T \approx 10^9 K$ bo'lganda C^{12} va O^{16} yadrolar yona boshlaydi, buning natijasida neon Ne^{20} , natriy Na^{23} , magniy Mg^{24} , kremniy Si^{28} va boshqa yadrolar paydo bo'ladi. Bu reaksiyalar bir necha ming yilcha davom etdi.

4. Birlamchi yulduzlarda temperatura $T \approx 3 \cdot 10^9 K$ va bundan ortiq bo'lganda H yadrosi yona boshlaydi va natijada yadro reaksiyalari tufayli, eng katta bog'lanish energiyasiga ega bo'lgan Ni va Fe gacha yadrolar paydo bo'ladi. Shu bilan yulduzlardagi termoyadro reaksiyalarida og'ir yadrolarning paydo bo'lishi tugaydi. Keyingi og'ir elementlar paydo bo'lishi uchun s -protsess (slow — sekin) sodir bo'lishi zarur; ya'ni neytronni yadro ushlashi, uning β — yemirilishiga duchor bo'lishi kerak. Neytronlar oqimi (dastasi) esa massasi $M > 2M_0$ bo'lgan massiv yulduzlardagi



yadro reaksiyalari tufayli yuz beradi. Natijada s -protsess borishi uchun imkon tug'iladi.

s -prosessda Z yadro tomonidan neytronlarning ikki ketma-ket ushlanishi uchun ketgan vaqt, hosil bo'lgan Z yadroning β — yemirilishi vaqtidan katta bo'ladi, ya'ni yadro neytronni ushlagandan (zabt etgandan) keyin β — yemirilishga ulguradi va natijada $Z+1$ yadro hosil bo'ladi. s — protsessning sodir bo'lishi uchun bir sekundda 10^{15} – 10^{16} ta neytronlar oqimi kerak. Bu holda tabiatda uchraydigan og'ir elementlarning olinishi uchun bir necha ming yil zarur bo'ladi.

r -prosessda Bi^{209} gacha bo'lgan og'ir yadrolar olinishida mumkin. Lekin undan og'irroq yadrolar olinishi mumkin emas, chunki ularning yashash vaqti davomida β — yemirilishi bilan birga yadrodan proton ajralib chiqish reaksiyasi sodir bo'ladi, bunday yadrolar navbatdagi ikkinchi neytronni zabt etgunga qadar parchalanib ketadi. Demak, Bi^{209} dan og'ir yadrolarning tabiatda uchrashini tushuntirish uchun boshqa protsesslar zarurligi taqozo etiladi.

Yadro tomonidan ko'p neytronlarni ketma-ket ushlab olinish vaqti, hosil bo'lgan yadro yashash vaqtidan kichik bo'lgan protsesslarni r -prosessi (rapid — tez) deyiladi. Bi^{209} dan og'ir yadrolar olinishi uchun r -prosess ishtiroki zarur bo'ladi. Bu r -prosess esa sekundiga 10^{27} – 10^{40} ta neytronlar oqimi

bo'lishini taqozo etadi. Neytronlarning bunday katta oqimi o'ta yangi yulduzlar portlashida, galaktika yadrosi portlashida hosil bo'lishi mumkin. Bu oqimlar (ya'ni r -protssellar) 0,1 sekunddan bir necha o'n sekundgacha bo'lgan qisqa muddatda sodir bo'ladi.

Shunday qilib, s -protssess bir necha ming yil, r -protssess bir necha daqiqa davom etadi va natijada har xil og'ir yadrolar hosil bo'ladi. Keyin esa, milliard yillar davom etadigan yulduzlardagi nukleosintez Olamda har xil kimyoviy elementlarning paydo bo'lishiga, shuningdek, hamma organik va noorganik moddalarning, jumladan, hayotning paydo bo'lishiga olib keladi.

4-§. Yulduz holatlari

Moddaning yuqori temperaturali yuqori bosimi (katta zichlikli) holatlari yulduzlarda namoyon bo'ladi. Yulduzlarning tipik vakili Quyoshdir. Quyosh asosan vodorod va geliydan iborat plazmadir. Bunday yulduzni shar shaklidagi vodoroddan iborat plazma deb, unga ideal gaz holat tenglamasini qo'llab, uning markazidagi bosim va temperautrani baholash mumkin.

Yulduzlar uchun kuzatiladigan kattaliklar uning massasi M va radiusi R ekanligini nazarda tutib, bosim uchun o'lchamlik nuqtai nazardan

$$[P] = [G][M]^2[R]^3$$

tenglik o'rinli bo'lganidan, quyidagi

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4} \quad (1)$$

munosabat osonlikcha olinadi. (1) asosida Quyosh markazidagi bosimni baholash mumkin ($M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$):

$$P_{\odot} \sim 1,1 \cdot 10^{15} \text{ Pa} = 10^{10} \text{ atm} \quad (2)$$

Gravitatsiya kuchi tufayli siqilish natijasida yulduz markazida hosil bo'lgan bosim $P(1)$, statsionar yulduzlar uchun issiqlik tufayli xaotik harakat natijasida hosil bo'lgan gazning bosimi P_g ga teng bo'ladi

$$P = P_T \quad (3)$$

P_T ni aniqlash uchun ideal gaz holati tenglamasi

$$P_T V = \frac{m}{\mu} RT \quad (4)$$

(R – gaz doimiysi, μ - molyar massa) ifodasidan foydalanib, so'ng (1) va (3) asosida Quyosh markazidagi temperaturani baholash uchun

$$T_0 \sim G \frac{M_s \mu}{R_0^4 R} \quad (5)$$

ifodani olamiz. Bundan $T_0 \approx 2 \cdot 10^7 \text{ K}$ qiymati olinadi. Quyosh sirtidagi temperatura T ni aniqlash uchun Vinning siljish qonuni

$$\lambda_{\max} T = 0,29 \text{ sm grad}$$

ifodasidan foydalaniladi. Bunda spektrning maksimumi sariq-yashil spektr qismiga to'g'ri keladi, ya'ni $\lambda_{\max} T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ sm}$. Bu holda Quyosh sirti uchun $T = 5800$ qiymati olinadi. Quyoshning (shunga o'xshash yulduzlarning) markazidagi $2 \cdot 10^7 \text{ K}$ va sirtidagi $6 \cdot 10^3 \text{ K}$ temperaturalar farqi tufayli unda issiqlik o'tkazuvchanlik, konveksiya va nurlanish protsesslari orqali intensiv ravishda issiqlik almashinuvi sodir bo'ladi.

Nurlanuvchi sirt (qatlam)ning temperaturasini bilganimiz holda uning intensivligini Stefan-Bolsman qonuni $u = \sigma T^4$ asosida aniqlash mumkin. Yulduz nurlanishining umumiy quvvati U ni yulduz sirti $4\pi R^2$ ga ko'paytirish orqali aniqlanadi:

$$U = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (6)$$

U ni yulduzning yoritilganligi deyiladi. Quyoshning yorituvchanligi

$$\begin{aligned} U_{\odot} &= 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 = 4 \cdot 3,14 (7 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} (5,8 \cdot 10^3)^4 \text{ BT} = \\ &= 3,86 \cdot 10^{26} \text{ BT} = 3,86 \cdot 10^{33} \text{ erg/sek} \end{aligned}$$

Shunday qilib, yuqoridagi aytganlardan ko'rinadiki, yorituvchanlik U bilan spektr maksimumi (rang) orasida (Vin qonuniga binoan) o'zaro bog'lanish mavjud. Shuningdek, ko'rsatish mumkin, yulduz massasi M bilan uning yorituvchanligi U orasida mashhur quyidagi massa — yorituvchanlik munosabati mavjud

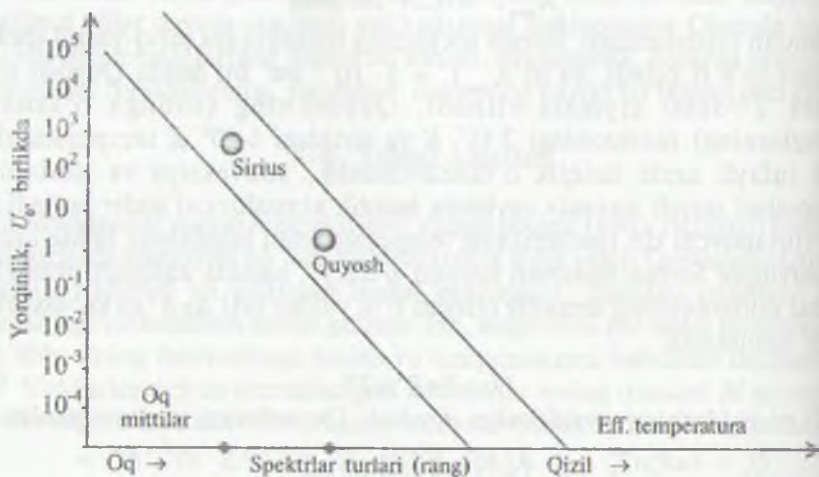
$$U_{\odot} \sim M_{\odot}^3 \quad (7)$$

Bu munosabat juda ko'p yulduzlar uchun o'rinli ekanligi aniqlangan. Spektr — yorqinlik diagrammasini Gersshprung—Ressel diagrammasi ham deyiladi (q. 4,2-rasm. Gersshprung—Ressel diagrammasi).

Astronomik kuzatishlar yulduzlarning ravshanligi (yorug'lik darajasi) ularning rangiga proporsional ekanligini ko'rsatdilar. Proporsionallik koeffitsienti hamma yulduzlar uchun taxminan bir xil. Bu proporsionallik ba'zida tushirilsa, ular Gersshprung—Ressel diagrammasiga tushadi, ya'ni ba'zida yulduzlar egri chiziqli bir yo'lakka joylashadilar; uni bosh ketma-ketlik deyiladi. Ammo bu yo'lakka tushmaydigan yulduzlar ham bor. Bular, yorqinliklari o'z qizil rangiga mos kelmaydigan, juda ravshan qizil yulduzlar;

bularni qizil gigant yulduzlar deyiladi. Shuningdek, o'zining rangiga mos kelmagan xira "oq mitti" kichik yulduzlar mavjud. Bu oq mitti yulduzlar — aynigan fermi — gazlardir.

Yulduzlarning yorituvchanliklari bilan spektr sinflari orasida bog'lanish bo'lganligi sababli, ular yo'lakda ma'lum ketma-ketlik bilan joylashadilar (4.2-rasm).



4.2-rasm.

Yulduzlarning juda ko'plari bosh ketma-ketlik deb ataluvchi yo'lakda bo'ladilar. Gigant yulduzlar (qizil gigant, o'ta gigant) o'ng tomonda yuqorida: mitti oq yulduzlar esa chap tomonda pastda joylashganlar.

Masala 4.1. Quyoshning gravitatsiya maydonining potensial energiyasini hisoblang va faqat shu energiya Quyosh nurlanishi uchun manba bo'lganda edi, u necha yilga yetgan bo'lar edi? Olingan natijani sharhlang.

Yechish. Quyoshning (yulduzning) potensial energiyasi

$$V_n = G \frac{M_o^2}{R_o} \quad (1)$$

Demak,

$$V_n = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} J \sim 4 \cdot 10^{41} J \quad (2)$$

Bizga ma'lum, Quyoshning yorituvchanligi

$$U_o \approx 3,86 \cdot 10^{26} BT \quad (3)$$

(2) ni (3) ga bo'lib, V_n qancha vaqtga yetishini baholaymiz:

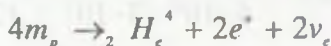
$$\frac{V_s}{U_0} \approx \frac{4 \cdot 10^{41} j}{3,86 \cdot 10^{26} BT} \approx 10^{15} \text{ sek} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ yil} \quad (4)$$

(1 yil $\approx 3 \cdot 10^7$ sekund)

Izoh. Quyosh 5 mlrd. yilcha nur sohib turibdi. Shu sababli nurlanish energiyasi uchun gravitatsiya siqilish tufayli ajraladigan energiya Quyosh nurlanishi energiyasi manbai bo'la olmaydi.

Masala 4.2. Quyoshda termoyadro reaksiyasi tufayli protonlar geliy yadrosiga aylanadi. Quyoshdagi 70 foiz vodorodning hammasi geliyga aylan-ganda ajralib chiqadigan energiyani aniqlang. Berilgan: 1 *mab* = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, proton massasi $m_p = 1,00813$ *mab*, geliy yadrosi massasi $m_{He} = 4,00389$ *mab*.

Yechish. 4 ta protondan bitta geliy yadrosi hosil bo'ladi:



Hunda massa defekti

$$\Delta m = 4m_p - m_{He} = (4,03252 - 4,00389) \text{ mab} = 0,02863 \text{ mab}$$

Demak, umumiy massaning

$$\frac{\Delta m}{4m_p} = \frac{0,02863}{4,03252} \approx 0,007$$

qismi energiyaga aylanadi. Demak, Quyoshning yadro energiyasi zaxirasi

$$\Delta E \approx M_{\odot} \frac{7}{10} \cdot 0,007c^2 = 2 \cdot 10^{30} \cdot 0,7 \cdot 0,007(3 \cdot 10^8)^2 J = 8,78 \cdot 10^{43} J$$

Bu qiymat $8,78 \cdot 10^{43} J$ ni Quyosh yorituvchanligi U_0 ga bo'lib, energiya zaxirasi qancha vaqtga yetishini topamiz.

$$\frac{M_{\odot} 0,7 \cdot 0,007c^2}{U_0} \approx 2,31 \cdot 10^{17} \text{ see} = \frac{2,31 \cdot 10^{17}}{3 \cdot 10^7} = 7,7 \cdot 10^9 \text{ yil} = 7,7 \text{ mld yil}$$

Izoh 1. Quyosh massasining yarmi qolgunga qadar (ya'ni 35 foiz vodorod qolguncha) statsionar holatda nur sohib turadi, deb faraz qilsak, 7,7 mlrd yilni 2 ga bo'lib, Quyoshning shunday holatda yana 4 mlrd yilga barqaror turishini aniqlaymiz.

Quyosh shu vaqtgacha 4,5-5 mlrd yil «umr» ko'rdi, deb hisoblanadi.

Izoh 2. 70% protonlar soni uchun

$$0,7 \cdot \frac{M_0}{m_p} = 0,7 \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{2 \cdot 10^{27} \text{ kg}} = 0,7 \cdot 10^{57} = 7 \cdot 10^{56}$$

qiymatni olamiz.

Hisoblash ko'rsatadiki, proton bilan proton tunnel effekti tufayli bir-biriga «to'qnashib» yadro reaksiyasi hosil qilishi uchun 10^{10} yil tartibda vaqt kerak. 4 ta protondan bir geliy yadrosi hosil bo'lishi uchun bungi nisbatan 4 martagacha ko'proq vaqt kerak. 4 ta protondan 1 geliy yadrosi hosil bo'lishini 1 sikl desak, Quyoshda 1 sekunddagi sikllarning sonini qo'yidagicha topamiz:

$$\text{Sikllar soni} = \frac{7 \cdot 10^{56}}{4 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7} \approx \frac{7}{12} 10^{39} \approx$$

$$\frac{\text{sikllar soni}}{\text{sek}} \approx 6 \cdot 10^{38} \text{ sikllar/sek.}$$

Har bir siklda 26,7 MeV energiya ajralib chiqishini bilsak, Quyoshda 1 sekundda ajralayotgan energiya ΔE ni topamiz

$$\Delta E \approx 25,7 \text{ MeV} \cdot 6 \cdot 10^{38} = 160,2 \cdot 10^{38} \text{ MeV} = 160,2 \cdot 10^{38} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ BT} = 2,56 \cdot 10^{27} \text{ Vm}$$

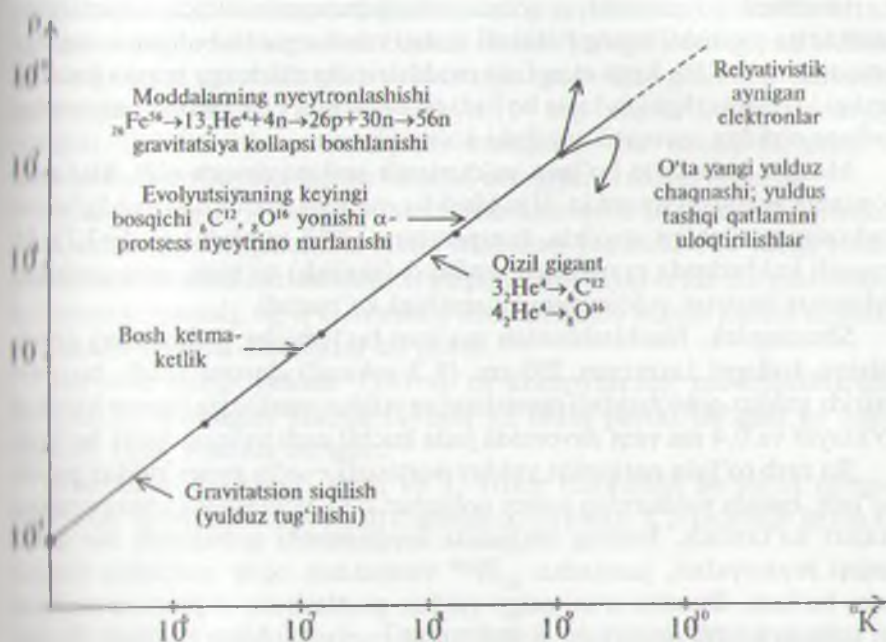
Quyoshning kuzatilishidan olingan yorituvchanlik $4 \cdot 10^{26} \text{ Vm}$ bu ΔE energiyaning 15 foizini tashkil etadi.

Yulduzlar evolutsiyasining oxiri oq mitti yulduzlar (fermi-gaz) neytron va kvark yulduzlar (fermi-suyuqlik) hamda qora teshiklar bilan tugaladi. (14-16) milliard (mlrd) yildan bo'yon Olam kengayishi davomida uning gorizonti (chegarasi) $\sim 2 \cdot 10^{28} \text{ sm}$ uzoqlashdi; massa zichligi $\rho t^2 \approx 3 \cdot 10^6 \text{ gr.sek}^2/\text{sm}^3$ dan $\rho \approx 10^{-30} \text{ g/sm}^3$ gacha kamaydi (kuzatishlar 10^{-31} g/sm^3 qiymatni ko'rsatadi).

Quyidagi 4.3-rasmda $M=10M_0$ massali yulduz holatini vaqt bo'yicha o'zgarishi davomida, uning markazidagi temperatura T_M va zichlik ρ , orasida o'zaro bog'lanish sifat jihatidan ko'rsatilgan (q. «Fizika kosmosa» kitobi, 227-bet).

Bosh ketma-ketlikdagi $M=15M_0$, $M=5M_0$ va $M=M_0$ massali yulduzlarning yashash vaqti mos ravishda 10 mln yil, 70 mln yil va 10 mlrd yil atrofida.

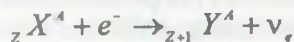
Xulosa qilib aytganda, har bir yulduzning tarixi-bu gravitatsiya kuchi va gaz bosimi orasidagi million va million yillar davom etgan «kurashi» dan iborat bo'lib, nihoyat gravitatsiya kuchining g'olib kelishi bilan tugallanadigan dramadan iborat.



4.3-rasm.

5-§. O'ta yangi yulduzlar

Yulduz markazidagi termoyadro yoqilg'i tugab, undagi energiyani neytrino nurlanishi tashqariga olib chiqqandan keyin, markaz temperaturasi pasaya boradi. Natijada yulduzdagi dinamik muvozat buzilib, gravitatsiya tortishi kuchi tufayli yulduz siqila boshlaydi (kollapslanadi). Tortishish kuchi aynigan elektron gaz bosimini yengish uchun markaziy yadro massasi M Chandrasekar chegarasi bo'lishi zarur. Bu muvozanat buzilgani sababli, yulduzning temir qobig'i juda tez, sekundning ma'lum qismida qisiladi va shu sababli gravitatsiya tortishish kuchi hisobiga temperatura ko'tarilib, bu qobiqdagi temir "yonboshlaydi" (4.4-rasm). Temir qobiq yonishi ikki protsess tufayli tezlashadi:



Bu har ikki protsess ham elektron – gaz bosimining kamayishiga olib boradi uchun kollaps yanada tezlashadi.

Hisoblash ko'rsatadiki, gravitatsion kollaps tugashi oldida kobiqlarning markaziga yiqilishi, uning harakati tezligi markazgacha bo'lgan masofaga proporsional bo'lib, katta masofada moddalarning markazga tomon harakati tezligi tovush tezligidan katta bo'ladi (4.4-rasmda CH 1987 A yulduzning kollaps oldidan sxematik tuzilishi ko'rsatilgan).

Massasi juda katta bo'lgan yulduzlarda kollaps davom etib, ular qora o'ralarga aylanishi mumkin. Hisoblashlar ma'lum sharoitda (zichligi atom yadrosining zichligi atrofida, temperatura $10^{10} K$ tartibda) ($1,4-2,7$) M_0 massali yulduzlarda gravitatsiya kollapsi (siqilish) to'xtab, qora teshikka aylanmas neytron yulduzlarga aylanishini ko'rsatadi.

Shuningdek, hisoblashlardan ma'lum bo'lishicha, yulduzning gravitatsion kollapsi taxminan 200 ms (0,2 sekund) davom etadi, bu davr oxirida yulduz qobiqlaridagi massalarning yulduz markaziga tomon harakati to'xtaydi va 0,4 ms vaqt davomida juda kuchli zarb to'liqini hosil bo'ladi.

Bu zarb to'liqin natijasida yulduz portlaydi — o'ta yangi yulduz paydo bo'ladi, bunda yulduzning tashqi qobiqlari o'ta zichlashadi, temperatura yuqori ko'tariladi. Buning natijasida kengayuvchi qobiqlarda bir qator yadro reaksiyalari, jumladan $^{83}_{Br}^{209}$ vismutdan og'ir nuklidlar sintezi ham bo'ladi. Bunday o'ta yangi yulduz portlashida, r -protsess imkoni bo'ladigan kuchli neytronlar oqimi kuchli nurlanish bilan kechadi. Bunda yulduzlarning tashqi qobiqlar ($0,3 M_0$ tartibdagi massali) juda katta tezlik (taxminan 15000 km/sek) bilan yulduzlararo fazoga tarqalib ketadi. O'ta yangi yulduz portlashi bir necha hafta davom etadi. Qo'shni, Katta Magellan Buluti deb nomlanuvchi, Galaktikada chaqnagan (1987-y.) o'ta yangi yulduz 1987 A ni tadqiq qilish ko'rsatdiki, portlash natijasida taxminan $0,1 M_0$ miqdorda radioaktiv $^{28}_{Ni}^{56}$ sintez bo'lgan va undan β^- -yemirilish tufayli $^{27}_{Co}^{56}$ va bundan $^{26}_{Fe}^{56}$ elementlar hosil bo'lgan.

O'ta yangi yulduzlar — tabiatning buyuk hodisasi bo'libgina qolmay, ular yulduzlar evolutsiyasida, va demak Olam evolutsiyasida ma'lum burilish, bosqich rolini o'ynaydigan juda muhim jarayon hamdir. Haqiqatan ham o'ta yangi yulduz portlaganda, yulduzlar evolutsiyasida yangi bosqichdagi davr boshlanishiga unikal, noyob imkoniyat yaratiladi (tug'iladi). Bu yangi davrda tabiatdagi barcha kimyoviy elementlar: stabil (turg'un) va nostabil izotoplar, jumladan, siyrak, kam tarqalgan elementlar paydo bo'lishiga imkon tug'iladi; yulduzlararo, galaktikalararo muhitdagi kimyoviy elementlar tarkibi keskin o'zgaradi: ma'lum temperaturalarda portlash natijasida hosil bo'lgan elementlardan molekulalar va ulardan murakkab molekulalar zanjiri hamda jonli tabiatning yanada murakkab qurilish «g'isht» chalari paydo bo'lishi uchun dastlabki shart-sharoitlar vujudga keladi.

O'ta yangi yulduzlar portlaganda, uning yorituvchanligi keskin ortadi, ko'ngra nisbatan sekin u so'nib boradi. Bunda yorug'lik energiyasi o'zining quvvatiga ko'ra yuz milliardlab yulduzlariga ega bo'lgan galaktika nurlanishi quvvatiga tenglashadi; portlash tufayli 10^{53} erg miqdor tartibda energiya ajraladi. Solishtirish uchun aytish mumkinki, bir necha 10 mlrd yil davomida ham Quyosh fazoga buncha energiyani tarqata olmaydi.

1987 yilning 23 fevraliga o'tar kechasi kanadalik astronom YA.Shelton tomonidan qo'shni galaktika Katta Magellan Bulutida o'ta yangi yulduz portlashini kuzatish astronomiyada haqiqiy sensatsiya bo'ldi. Bu gravitatsion kollapsni o'rganish, og'ir elementlar sintezi hamda bunda kuchli neytrino nurlanishi mavjud ekanligini ko'rsatdi.

Bu o'ta yangi yulduz 1987 A ni kompyuterda modellashirilish ko'rsatdiki, portlagan yulduz 11 mln yil oldin paydo bo'lgan va uning massasi $18M_0$ atrofida bo'lgan.

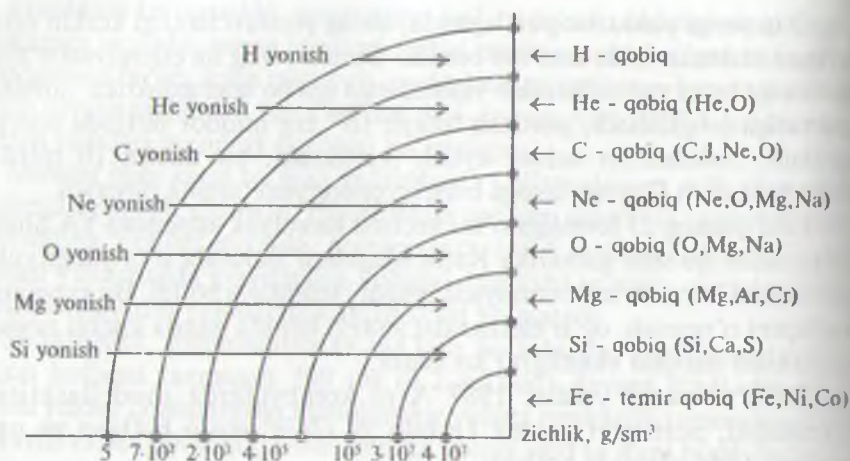
Amerikalik fiziklar S.Vusli va T. Uiver hisoblashi bo'yicha olingan yulduzlar qobiqlarining yonish dinamikasi quyidagi 4.2-jadvalda berilgan.

4.2 jadval

Termoyadro reaksiyasi	Temperatura K	Yonish (reaksiya) vaqti
$H \rightarrow He$	$4 \cdot 10^6$	10^7 yil
$He \rightarrow C, O$	$1,9 \cdot 10^6$	10^6 yil
$C \rightarrow Ne, Mg, Na$	$7 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^4$ yil
$Ne \rightarrow Si$	$1,6 \cdot 10^9$	12 yil
$O \rightarrow S$	$3,1 \cdot 10^9$	4 yil
$Si, S \rightarrow Ni, Fe$	$3,4 \cdot 10^9$	1 hafta

Quyidagi rasmda 1987 A o'ta yangi yulduzning portlash oldidagi tuzilishi sxematik ko'rsatilgan

Devosita kollaps bo'lishi oldida $18M_0$ massali CH 1987 A yulduzning tuzilishi sxematik ko'rsatilgan. Yulduzning tashqi qobig'ining radiusi $110^4 km$ ga, kremniy qobig'i radiusi $1000 km$ ga yaqin. Kollaps tufayli paydo bo'ladigan kuchli zarb to'lqini qobiqlarning yadrodan zarb bilan uchib ketishiga olib keladi va shu bilan bir vaqtda ularda qo'shimcha termoyadro reaksiyalari sodir bo'lib, og'ir yadrolar sinteziga sabab bo'ladi.



4.4-rasm.

6-§. Oq mitti yulduzlar

1. *Astrofizika galaktikadagi tipik yulduzlarning tarkibini, ularning evolutsiyasini o'rganadi. Quyosh ham shu yulduzlar safiga kiradi.*

Odatdagi yulduzlarning, jumladan, Quyoshning markaziy qismida termoyadro reaksiyalar jarayonlari borib, bunda yuqori temperatura tufayli katta gaz bosimi P_T va nurlanish bosimi P_n yulduz moddalarini kengaytirishga harakat qiladi. Ammo yulduz moddalarining o'zaro gravitatsiya kuchlari tufayli hosil bo'lgan bosim P_g yulduzlar moddasining kengayishiga imkon bermaydi. Shunday qilib, yulduzlarda dinamik muvozanat holati sodir bo'ladi.

Bunday holatlardagi yulduzlarni xarakterlaydigan (tavsiflaydigan) parametrlar, masalan, nurlanish, bosim, zichlik va boshqalar, o'zaro bir-biriga muvofiqlashgan bo'ladi. Shularga qarab, yulduzlarning parametrlarini ma'lum aniqlik bilan hisoblash mumkin. Masalan, Quyosh markazida massa zichligi $\rho \approx 160 \text{ gr/sm}^3$, temperatura $T \approx 1,6 \cdot 10^7 \text{ grad}$. Quyosh radiusi $R_\odot \approx 6,96 \cdot 10^{10} \text{ sm}$ Yer shari radiusidan 109 marta katta, Quyosh massasi $M_\odot \approx 1,99 \cdot 10^{33} \text{ gr}$ Yer massasidan 333000 marta katta. Erkin tushishi tezlanishi $g = GM_\odot / R_\odot^2 \approx 2,74 \cdot 10^4 \text{ sm/sek}^2$; nurlanish quvvati $3,86 \cdot 10^{33} \text{ erg/sek}$.

Vaqt o'tishi bilan yulduzlardagi yadro yoqilg'i zaxirasi vodorod kamaya boradi. Masalan, Quyosh har sekundda nurlanishi tufayli o'zining 4,5 mln tonnaga yaqin massasini yo'qotadi. Umuman yadro yoqilg'i kamaya borishi tufayli (bu milliard yillar davom etadigan jarayon) temperatura kamayishi

va demak gaz bosimi, nurlanish bosimi kamayishi sababli muvozanatli holat buzila boradi va gravitatsion siqilish kuchaya boradi.

Yulduzning tashqi qobig'ida esa hali proton — proton siklli termoyadro reaksiyalari davom etishi tufayli yulduz kengaya borib Quyosh sistemasi tartibidagi o'lchamga tenglashadi. Yerdagi harorat 700-1000K tartibda bo'ladi, ya'ni yulduz qizil gigantga aylanadi. *Qizil gigantning sovishi natijasida tashqi qobig'i fazoga sochilib ketadi; uning geliydan iborat qolgan ich yadrosi oq mitti yulduz deyiladi.* Bu $10^5 K$ temperaturali oq mitti yulduzlar (Quyosh ham shu tipdagi yulduz) issiqlik zaxirasi va gravitatsion siqilish hisobiga nurlanadilar va natijada 10^8 yillar davomida sovub boradilar. Yulduzlar boshidan kechadigan bu evolyutsion jarayonda, o'z massalarining kichik yoki kattaligiga qarab, oq mitti (karlik) yulduzga (fermi-gaz) yoki neytron yulduzga (fermi-suyuqlik) yoki kvark yulduzga (fermi-gaz) yoki qora teshikka aylanadilar.

Shunday qilib, yulduzlarning bu evolyutsion etapidagi holatini o'rganish uchun ularni xarakterlaydigan parametrlar (masalan, bosim, temperatura va boshqalar) ni aniqlash uchun kvant statistikaga, jumladan, fermi statistikasiga asoslanish zarur bo'ladi.

Agar yulduz massasi $M \approx 1,4 M_{\odot}$ ga teng va bundan kichik bo'lsa, gravitatsion siqilish tufayli u oq mitti yulduzga aylanadi. Bu jarayonda modda (elektronlar) fermi-gaz hossasini ola boradi. Bunday oq mitti yulduzlarda zichlik taxminan $1,5 \cdot 10^6 \text{ gr/sm}^3$ (Van Maanen yulduzida) bo'lganda gaz (fermi-gaz) bosimi bilan gravitatsiya siqilishi natijasidagi bosim tenglashib, oq mittida dinamik muvozanatli holat sodir bo'ladi, uning o'lchami Yer radiusi ($R \sim 10^4 \text{ km}$) bilan solishtirarli darajada kichik bo'ladi.

Dinamik muvozanat buzilgandan keyin, ba'zan gravitatsiya siqilishi juda tez sodir bo'lishi mumkin. Bunda issiqlik ajralib chiqishi, muvozanatli holatdagiga nisbatan kechikishi natijasida kuchli zarb to'liqin hosil bo'lib, u yulduzning ma'lum qismini (ba'zan katta qismini) fazoga uloqtirib tarqatib yuboradi. Bu holda juda yuqori temperaturadagi siqilgan gazda termoyadro reaksiyalari tufayli juda katta nurlanish (chaqnash) sodir bo'ladi va o'ta yangi yulduz paydo bo'ladi.

Oq mitti yulduzlarni o'rganish shuni ko'rsatdiki, uning xira rangli ekanligi yulduzlardagi energiyaning asosiy manbai bo'lgan vodorodning yonib tamom bo'lgani va demak, ularning tarkibi asosan geliydan iborat bo'lganligidandir. Undagi xira ravshanlik asosan issiqlik energiya zaxirasi hisobidan nurlanishi sababli hamda bu yulduzlarning sekin-asta siqilishi tufayli gravitatsiya energiyasining ajralib chiqshidandir. Hozirgi zamon tasavvuriga binoan, bu oq mitti yulduzlar yulduzlar evolutsiyasining oxirgi bosqichini boshidan kechirayotgan bo'ladi.

Oq mittilardan bizga eng yaqini Siriusning yo'ldoshi hisoblanadi. U Quyosh sistemasidan 8 yorug'lik yili masofada. Bu xira yulduzni qurollanmagan ko'z ko'ra olmaydi. Bunday oq mittilarning ichki temperaturasi $T \approx 10^7 K$ atrofida. Bunday temperaturada geliy to'la ionlashgan bo'ladi. Boshqacha aytganda, bunday yulduzlar geliy yadrolari va elektronlardan iborat. Bunday model asosan oq mittilarning parametrlarini aniqlashi mumkin. Hisobiash ko'rsatadiki, oq mitti yulduzning massasi M Quyosh $M_\odot$ atrofida bo'lib, uning yuqori chegarasi (Chandrasekar chegarasi 1931 y aniqlangan) $M_v = 1,4 M_\odot$ ga teng. Binobarin, oq mittilarning massalari $1,4 M_\odot$ dan katta bo'lmaydi. Demak, $M_\odot$ massali yoki shunga yaqin massali yulduzlar, jumladan, bizning Quyoshimiz ham «umri»ning oxirida oq mitti yulduzga aylanadi.

Agar yulduz massasi juda katta bo'lib, gravitatsion siqilish davom etib, yadro moddasi zichligi $10^{14} g/sm^3$ gacha borsa, u holda neytronlanish hodisasi yuz beradi va natijada o'ta yangi yulduz o'rnida asosan neytronlardan iborat neytron yulduz hosil bo'ladi. Bunda zichlik oq mitti yulduz zichligidan bir necha million marta katta bo'ladi. Oq mitti bir necha ming kilometr radiusga ega bo'lsa, neytron yulduz atigi bir necha kilometrli radiusga ega bo'ladi.

Bu yerda shuni ta'kidlash lozimki, yulduzdagi proton va elektron neytronni hosil qilishi uchun qo'shimcha energiya — gravitatsiya siqish kuchi hisobidan olinadi. Natijada proton va elektron neytronga aylanadi va yulduz asosan neytronlardan iborat bo'lib qoladi.

Umuman oq mittilarda fermi-gaz (elektronlar) bosimi gradiyenti gravitatsion siqilish kuchi bilan muvozanatda bo'ladi. Neytron yulduzlarda esa aynigan gaz neytronlar bosimi gradiyenti bilan gravitatsiya siqilish kuchi muvozanatda bo'ladi.

Oq mittilarning radiusi Quyosh radiusiga nisbatan yuz martacha kichik. Demak, $\rho \sim 1/R^3$ bo'lganidan oq mittilardagi massa zichligi Quyoshdagi zichlikdan ($\rho \approx 1,41 gr/sm^3$) million marta katta. *Bunday zichlikda oq mitti yulduzlardagi bosimni aynigan elektronlar bosimi tashkil etadi. Shu sababli ham oq mitti yulduzlarni aynigan yulduzlar ham deb ataladi.*

Shunday qilib, ma'lum massadan ortiq bo'lmagan massali normal yulduzlar, ularda termoyadro yoqilg'isi amalda qolmagandan keyin gravitatsion siqilish natijasida hamda tashqi qobig'idan qutilgandan keyin oq mitti yulduzlarga aylanadi. Bunda avval temperatura yuqori bo'lib u $2 \cdot 10^5 K$ atrofida bo'ladi, so'ng oq mitti sovib boradi. Ularning nurlanishidagi energiya manbai asosan ionlarning issiqlik energiyasidir. Hisoblashga ko'ra, galaktikadagi yulduzlarning 3-10 foizini oq mitti yulduzlar tashkil etadi.

Endi siqilishga qarshi fermionlarning ko'rsatayotgan bosimini ko'raylik. Pauli prinsipiga ko'ra, har bir kvant holatda bittadan ortiq fermion bo'la olmaydi. Birlik hajmdagi $p, p+dp$ impuls intervalidagi kvant holatlar soni $(2s+1)4\pi p^2 dp / h^3$ ifoda bilan aniqlanadi. Fermionlar uchun spin $s=1/2$ bo'lgani uchun $(2s+1)=2$.

Juda past temperaturada ($T=0K$) har bir kvant holatda bittadan fermion bo'ladi. Demak, birlik hajmdagi zarralar soni n ni topish uchun kvant holatlar sonini topish kerak. Buning uchun, ma'lumki, yuqoridagi ifodani $(0, p_F)$ intervalda integrallash lozim; bunda p_F Fermi sathidagi fermion impuls:

$$n = \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad (8)$$

Hundan impuls p_F ni aniqlaymiz

$$p_F = (3/8\pi)^{1/3} h n^{1/3} \quad (9)$$

Fermi sathidagi zarra energiyasi ϵ_F norelyativistik holda

$$\epsilon_F = p_F^2 / 2m = (1/2m)(3/8\pi)^{2/3} h^2 n^{2/3} \quad (10)$$

relativistik holda esa

$$\epsilon_F = cp_F = hc(3/8\pi)^{1/3} n^{1/3} \quad (11)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. Aynish temperaturasi $T = \epsilon_F / k$ munosabatdan topiladi; bosim P (elektronlar uchun)

$$P = \frac{2u}{3} = \frac{2n\epsilon_F}{3} \quad (12)$$

ifoda orqali topiladi. (12) dan norelyativistik hol uchun

$$P_e = 2,3 \cdot 10^{27} n^{5/3} \text{ dn/sm}^2 \quad (13)$$

relativistik holat uchun

$$P_e = 2,7 \cdot 10^{-17} n^{4/3} \text{ dn/sm}^2 \quad (14)$$

natijani olamiz.

Bu yerda shuni ta'kidlash joizki, zichlik ortishi bilan elektronlarning tezligi ortib, yorug'lik tezligiga yaqinlasha boradi. Bu holda (14) ga asosan bosim $P \sim \rho^{4/3}$ qonun asosida ortib, oq mittilarda dinamik muvozanatni ta'minlashga imkon yaratiladi.

$$P_u = \frac{2u}{3} = \frac{2}{3} n\epsilon_F = \frac{2n}{3} hc(3/8\pi)^{1/3} n^{1/3} \quad (15)$$

Ikkinchi tomondan gravitatsion siqilish tufayli hosil bo'lgan yulduzdagi bosim

$$P_{\text{g}} = aGM^2/R^4 \quad (16)$$

ifoda bilan aniqlanadi ($a \approx 1$). Agar $P_{\text{g}} > P_{\text{H}}$ bo'lsa, yulduz siqilishi davom etadi. Statsionar yulduzlar uchun $P_{\text{g}} \approx P_{\text{H}}$ shart bajariladi. (15) va (16) ni o'zaro tenglashtirib

$$\frac{2hc}{3G} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} = \frac{M^2}{R^2} \quad (17)$$

tenglikni olamiz. Bundan $n = M/mV$ va $V \sim R^3$ ni nazarda tutib, oq mitti yulduzning massasi uchun Chandrasekar chegarasi

$$M \approx \frac{m_p^3}{m_N^2} \approx 1,4 M_{\odot} \quad (18)$$

qiymatni olamiz: m_N — nuklon (proton) massasi, m_p — plankeon massasi. (18) ifodadan Quyosh massasi uchun

$$M_{\odot} = \frac{5m_p^3}{7m_N^2} \quad (19)$$

ifoda o'rinli ekanligi ko'rinadi.

Agar siqilish kuchi katta bo'lib, yulduzda turg'unlik (muvozanatli holat) buzilsa, ya'ni $P_{\text{g}} > P_{\text{N}}$ bajarilsa, siqilish davom etadi, neytronlashish hodisasi yuz beradi, umuman yulduz kollapslanib, neytron yulduz paydo bo'ladi.

7-§ Neytron yulduzlar

Yulduzlar massalariga qarab, har xil evolyutsion jarayonlarni boshdan kecharadilar. Termoyadro yoqilg'i zaxirasi tugagandan keyin, massasi Quyosh massasi tartibidagi yulduzlar portlash natijasida (yoki tinch yo'l bilan) oq mitti yulduzlarga aylanadilar, massiv yulduzlar portlash natijasida (yoki tinch yo'l bilan) neytron (yoki kvark) yulduzlarga aylanadi, bulardan ham katta massali yulduzlar portlasa, ular qora teshiklarga aylanishi mumkin. Yulduzlarning tinch yo'l bilan kollapslanishi jarayoni sekundlarda, xatto sekundning ulushi davomida sodir bo'lishi mumkin va bunda neytron yulduzning massasi $1,4 M_{\odot}$ dan ortiq bo'ladi. Neytron yulduz o'ta yangi yulduzning portlash yo'li bilan paydo bo'lsa, uning massasi $M < 1,4 M_{\odot}$ bo'lishi lozim.

Shuni ta'kidlaymizki, oq mitti yulduzlar va neytron yulduzlar massalarining yuqori chegaralari — Chandrasekar chegaralari mavjud. Magnitsiz aylanishga ega bo'lmagan (sovuq) yulduzlarning massalari M

va ularning markaziy qismidagi zichliklari ρ_m orasidagi bog'lanish 4.4-rasmda keltirilgan.

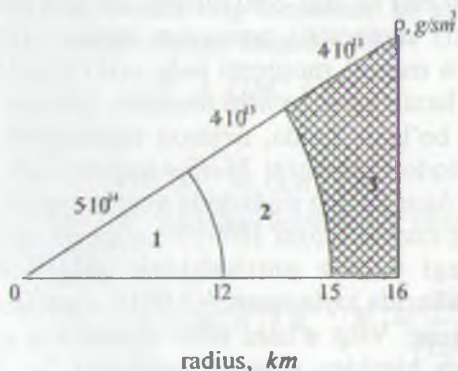
O'ta katta zichlikka $\rho = (2 \cdot 10^{15} - 10^{16}) \text{ gr/sm}^3$ ega neytron yulduzning maksimal massasi uchun Chandrasekar chegarasi $M_{\max} \approx (1,4 - 2,7) M_\odot$ qiymat olinadi. Odatda maksimum uchun $M_{\max} \approx 2 M_\odot$, minimum uchun $M_{\min} \approx 0,1 M_\odot$ qiymatlarni, zichlik uchun esa $\rho \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ gr/sm}^3$ qiymat qabul qilingan. Umumiy nisbiylik nazariyasi effekti hisobga olinmaganda, neytron yulduz uchun Chandrasekar chegarasi $M_{\max} \approx 5,73 M_\odot$ dan iborat.

$M_{\max} \approx 1,3 M_\odot$ massali neytron yulduzning asosiy parametrlari quyidagi jadvalda berilgan.

4.3-jadval

Radius	$R \approx 18 - 10 \text{ km}$
Gravitatsion radius	$r_p \approx 4 \text{ km}$
Markaziy zichlik	$\rho_M \approx 3 \cdot 10^{14} - 2 \cdot 10^{15} \text{ -gr/sm}^3$
Aylanishning minemal davri	$\tau_{\min} \approx (8 - 3) \cdot 10^{-4} \text{ sek}$
Massaning gravitatsion effekti	$\Delta M \approx (0,1 - 0,4) m$
	$\Delta M \cdot c^2 = (1,8 - 7,2) \cdot 10^{53} \text{ erg}$

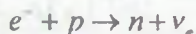
4.5-rasmda: neytron yulduzning sxematik kesimi ko'rsatilgan. Unda 1. Aynigan neytronlardan iborat suyuq yadro: bunda kam sondagi aynigan protonlar va elektronlar mavjud. 2. Neytronlar bilan boyigan atom yadrolari; bunda aynigan kam sondagi erkin neytronlar va elektronlar mavjud; 3. Fe^{56} yadrolar kristall panjarasidan iborat tashqi qatlam: bunda aynigan elektronlar mavjud.



4.5-rasm.

Shunday qilib, massiv yulduzlarda termoyadro yoqilg'i zaxirasi tamom bo'lgandan keyin, gravitatsiya ta'sirida hosil bo'ladigan og'irlik kuchi va unga qarshi bosim orasida dinamik muvozanat buziladi va yulduz gravitatsiya kuchi ta'siri ostida siqila boshlaydi. Bu muvozanat buzilishi natijasida siqilish jarayoni — gravitatsiya kollaps 1 sekund, hatto sekundning qismi davomida yuz berib, massa zichligi, yadro moddasi zichligi, $2,8 \cdot 10^{14} \text{ g/sm}^3$ gacha ortada. Bu vaqt davomida bir tomondan neytronlashish jarayoni borsa, ikkinchi tomondan kuchli zarb to'lqin hosil bo'lib, buning natijasida yulduzdagi kobiq (talaygina yulduz massasi) fazoga tarqalib (sochilib) ketadi. Bu holda zarb to'lqin tufayli qobiqlar temperaturasining ko'tarilishi va shu sababli termoyadro reaksiyalari sodir bo'lib, kuchli nurlanishi yuz beradi. Bu jarayonlarda o'ta yangi yulduz paydo bo'lib, kuchli chaqnash sodir bo'ladi.

Gravitatsion kollaps — siqilish jarayonida modda zichligi ortib boradi; elektron gaz, aynigan fermi-gaz elektronning energiyasi shu qadar ortadiki, uning energiyasi energetik to'siqni o'tib, proton tomonidan ushlab neytronga aylanadi, ya'ni quyidagi reaksiya sodir bo'ldi:



Boshqacha aytganda, β -protsessga teskari bo'lgan protsess boradi va bunda neytronnurlanishi hosil bo'ladi. Yulduzlar evolutsiyasidagi bu stadiyani neytronlashish deyiladi.

Ana shu neytronlashish hodisasi tufayli o'ta yangi yulduz o'rnida, uning markaziy yadrosini tashkil etgan juda katta zichlikli ($\rho \geq 10^{14} \text{ gr/sm}^3$) neytron yulduz paydo bo'ladi. Gravitatsiya ta'sirida juda kuchli siqilish natijasida aylanuvchi yulduz neytron yulduzga aylanganda uning radiusi juda kichik ($r_H \approx 10 \text{ km}$) bo'ladi. Shu sababli, xarakat miqdori momenti (va magnit momenti) saqlanishi qonuniga asosan, neytron yulduzning aylanish tezligi va magnit momenti juda ortib ketadi. Aylanish davri 1 sekund va undan ham kichik bo'lishi mumkin. Masalan, normal yulduzlar uchun $R \sim 10^{11} \text{ sm}$ bo'lgani holda, neytron yulduzlarda $R \sim 10^6 \text{ sm}$ bo'lgani uchun harakat miqdori momenti $M \sim R^2 \varphi$ saqlanganda aylanish davri 10^{10} marta kamayadi. Agar yulduz siqilishida magnit oqimi ham saqlanadi deb hisoblansa, uning magnit oqimi $10^{12} - 10^{13}$ martaga ortadi. Masalan, 1054 yildagi o'ta yangi yulduz portlashidan qolgan qisqichbaqasimon tumanlikning markazida joylashgan NP 0531 — pulsarning aylanish davri 0,033 sekundga teng. Vaqt o'tishi bilan pulsarning aylanish davri ortib boradi. Nurlanish hisobiga neytron yulduzlar bir necha ming yillar davomida sovib boradi. Radiopulsarlarning nurlanish quvvati bir necha

o' n MBt/sm^2 , Quyoshning nurlanish quvvati $7000Bt/sm^2$. Statistik baholash ko'rsatadiki, galaktikada o'rtacha har 10 yilda bitta neytron yulduz paydo bo'ladi. Bu holda galaktikada milliard neytron yulduzlar — pulsarlar bo'lishi lozim edi. Ammo astronomik kuzatishlarga ko'ra, hozircha 400 ga yaqin pulsarlar qayd (kashf) etilgan.

Birinci marta neytron yulduzni — radionurlanish manbai — pulsarni ingliz olimi E.Xyuish o'zining xodimlari bilan 1967-yilda kuzatgan. Rentgen nurlanishli pulsar 1971-yilda kuzatilgan. Gamma chaqnash ham neytron yulduz evolutsiyasidagi bir davr bo'lishi mumkin.

1. Gravitatsiya tufayli hosil bo'lgan bosim P_g nurlanish bosimi P_H dan katta bo'lganda, yulduzda siqilish davom etadi. Yuqorida aytilgandek zichlik $\rho \approx 10^{10} gr/sm^3$ bo'lganda neytronlashish hodisasi elektronlarning yadroga "bosib tushirilishi" natijasida $e^- + p \rightarrow n + \nu$, reaksiya asosida elektron va proton neytronga aylanishi jarayoni kechadi. Neytronlarning ko'payishi tufayli hamda neytronning energiyani olib chiqishi tufayli yadro energiyasi bog'lanishi susaya boradi, yulduz markazi yanada (sovishi tufayli) tezroq siqila boradi. Natijada yulduz markazi tomon siqilish tezlasha boradi va yadrolar yemirilib, oqibatda neytronlardan iborat modda holati sodir bo'ladi. Bu katta «atom yadrosi» ning zichligi $\rho \sim 10^{14} g/sm^3$ atrofida, ya'ni yadro materiyasi zichligi tartibida bo'ladi. Boshqacha aytganda, bu neytronlar aynigan fermi sistemani tashkil etadi. Uning bosimi norelyativistik holda

$$P \sim \frac{\hbar^2}{m_n} \left(\frac{N_n}{V} \right)^{5/3} \sim \frac{\hbar^2}{m_n} \left(\frac{\rho}{m_n} \right)^{5/3} \approx 10^4 \rho^{5/3} (Cu da) \quad (20)$$

Hosil bo'lgan neytron yulduzning statsionar bo'lishi uchun bu bosim gravitatsion siqilish tufayli yuzaga kelgan bosim

$$P_g \approx GM_n^2 / R_n^4 \quad (21)$$

bilan teng bo'lishi lozim:

$$10^4 \rho^{5/3} \approx GM_n^2 / R_n^4 \quad (22)$$

Zichlik uchun $\rho \approx M_n / R_n^3$ ifodadan foydalanib, neytron yulduz radiusini (22) asosida baholaymiz:

$$10^4 M_n^{5/3} \approx GM_n^2 R_n^5 / R_n^4 \quad R_n \approx \frac{10^4 \kappa M}{GM_n^{1/3}} \quad (23)$$

Agar yulduz massasi $M_n \approx M_\odot$ bo'lsa, (23) asosida $R_n \approx 10 km$ qiymat olinadi.

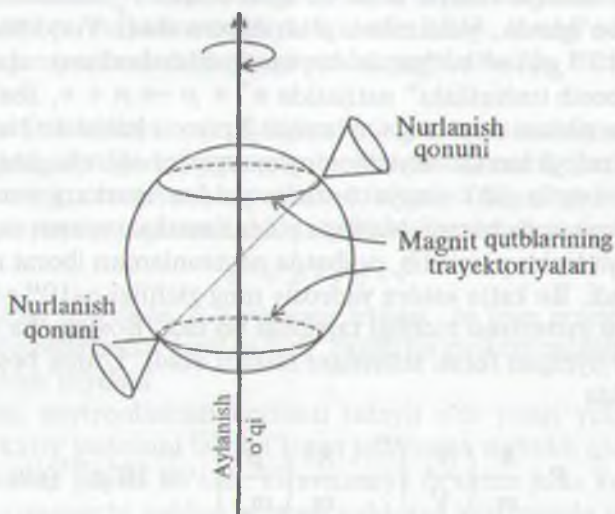
Yulduzlar o'z gravitatsiya maydonida siqilishida uning impulsi momenti saqlanadi:

$$M\omega R^2 = \text{const}$$

Demak,

$$M\omega R^2 = M_n\omega_n R_n^2 \quad (24)$$

bundan Quyosh uchun $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $\omega_\odot \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ rad/sek}$, $R_\odot \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ ekanligini nazarda tutib, Quyosh tipidagi yulduzlar, neytron yulduzlarga aylanganda, aylanish chastotasi ortishi quyidagicha bo'ladi:



4.6-rasm.

$$\omega_n = \omega_\odot \left(\frac{R_\odot}{R_n}\right)^2, \quad \omega_n \approx 10^4 \text{ rad/sek} \quad (25)$$

aylanish davri esa $t_n \sim 0,001 \text{ sek}$ atrofida. Shuningdek, neytron yulduz hosil bo'lishida magnit maydonning oqimi ham saqlanadi, ya'ni $H R^2 = \text{const}$ yoki bundan

$$H_n = H \left(\frac{R}{R_n}\right)^2 \quad (26)$$

Odatda neytron yulduzlarning magnit momentlari $\vec{P}_m$ aylanish chastotasi yo'nalishi bilan bir xil bo'lmagani sababli, magnit momentlar

lazoda neytron yulduzning aylanishida konik sirt hosil qiladi (4.6-rasm.) Neytron yulduzlarda umumiy elektr zarad bo'lmagani va sferik — simmetrik bo'lganidan undan magnitodipol nurlanishi sodir bo'ladi. Bu nurlanish J , o'lchamlar nuqtai nazaridan qaraganda, magnit momenti P_m ga, aylanish chastotasi ω ga va doimiy c ga quyidagicha bog'lanishda bo'ladi:

$$I = \frac{a}{c^3} P_m^2 \omega^4 \dots \quad (27)$$

(a — bir tartibidagi o'lchamsiz doimiylik, anig'i $a=2/3$). Agar $P_m \sim H_n R_n^3$ ni e'tiborga olsak,

$$J \approx \frac{a}{c^3} H_n^2 R_n^6 \omega^4$$

ifodani olamiz; neytron yulduz uchun

$$H_n \approx 10^{10} \text{ E}, R_n \approx 10^6 \text{ sm}, \omega \approx 10^4 / \text{sek}$$

qiymatlarni quyib, magnit-dipol nurlanishi quvvati J uchun ushbu taqribiy qiymatni topamiz:

$$J \sim 10^{40} \text{ erg/sek} = 10^{33} \text{ Vt} \quad (28)$$

Bu bir necha o'n million quyoshlar nurlanishiga teng!

Neytron yulduzning nurlanishi magnit momenti vektori $\vec{P}$ bo'yicha bo'lgan bo'ladi. Shu sababli, neytron yulduz yerdagi kuzatuvchi tomonidan "aylanuvchi mayak-mash'al" kabi bo'ladi, ya'ni undan kelayotgan nurlanishning alohida impulslari kuzatiladi. Shu sababli neytron yulduzlar pulsarlar deyiladi.

Masala 4.3. Neytron yulduzning aylanma harakati energiyasi $E = \frac{I\omega^2}{2}$

ni baholang va olingan natijani izohlang.

Yechish. $I = MR^2, E \sim M_n \omega_n^2 R_n^2 \sim 10^{30} \cdot (10^4)^2 \cdot (10^4)^2 \sim 10^{46} \text{ J}$

Izoh. Bu qiymatni (28) ga bo'lib, aylanma harakat energiyasi qancha vaqtga yetishini baholaymiz:

$$\frac{E}{J} \approx \frac{10^{46}}{10^{33}} \approx 10^{13} \text{ sek} \sim 10^6 \text{ yil}$$

Demak, pulsarning nurlanish davri taqriban million yil atrofida bo'ladi.

Masala 4.4. Quyosh tipidagi pulsarning zichligini baholang.

Yechish. $\rho_n \approx \frac{M_n}{V_n} \approx \frac{3M_n}{4\pi R_n^3}; M_n \approx M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, R_n \approx 10^4 \text{ m}$

Bularni nazarda tutib, olamiz $\rho_n \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3 = 5 \cdot 10^{14} \text{ g/sm}^3$. Bu yadro materiyasi (moddasi) zichligidir.

Masala 4.5. Neytron yulduzlar kvant statistika obyekti ekanligini isbotlang.

Yechish. Bizga ma'lumki, zarralar orasidagi o'rtacha masofa $\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$ de Broyl to'liqin uzunligi λ_D tartibida bo'lsa, bunday sistema kvant statistikasi asosida qaralishi lozim. Baholaylik: neytron massasi $m_n \sim 10^{-24} \text{ gr}$.

$\left(\frac{N}{V}\right) \sim \frac{\rho}{m_n} \approx \left(\frac{10^{14}}{10^{-24}}\right) \text{ neytronlar/sm}^3 = 10^{38} \text{ neytronlar/sm}^3$. Demak, bundan

$\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{10}{10^{39}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ sm} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ sm}$. Endi λ_D ni baholaylik: Relyativistik holda $p_n = m_n c$ bo'lgani uchun

$$\lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n c} \sim \frac{6 \cdot 10^{-27}}{10^{-24} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \text{ sm} \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ sm}$$

Demak, neytron yulduzlar holatlari aniq tavsiflanishi uchun kvant statistika

asosida qaralishi lozim, chunki ular uchun $\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \lambda_D$ shart bajariladi.

Izoh. Neytronlar yarim spinli bo'lgani uchun neytron yulduz — pulsar fermi-sistemadir. Pulsarlarda spinlari qarama-qarshi yo'nalgan neytron juftlari — bozonlar paydo bo'lishi ham mumkin. Bu holda neytron yulduzda o'ta oquvchan boze — suyuqlik mavjud bo'lishi mumkin.

Shuningdek, neytron yulduzdagi protonlar va elektronlar aralashmasi mavjud. Protonlar spinlari qarama-qarshi yo'nalgan juftlar — boze zarralar hosil qilib, unda o'ta o'tkazuvchanlik holatini hosil qilish mumkin.

Neytron yulduzning gravitatsiya maydonini qaraylik. Bir jinsli gravitatsiya maydonidagi jism harakati $v = gt, h = \frac{gt^2}{2}$ bilan yoki bundan $v^2 = 2gh$ (h — *баланс*) ifodalar bilan xarakterlanadi. Ikkinchi tomondan $F = mg$ da g — tezlanish, shu bilan birga birlik massaga to'g'ri

keluvchi maydon kuchlanganligi (Kulon maydonidagi $\vec{F} = q\vec{E}$ kabiday; bunda $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, φ – potensial). Agar gravitatsiya maydoni uchun potensial φ tushunchasini kiritsak, ayonki, uni

$$g = \frac{|\varphi|}{h}$$

ko'rinishda olinadi, yoki

$$g^2 \approx 2 \left(\frac{\varphi}{h} \right) \cdot h \approx 2|\varphi|$$

bu ifodani c^2 ga bo'lib, yozamiz:

$$\frac{g^2}{c^2} = 2 \frac{|\varphi|}{c^2}$$

bu ma'lumki, $\frac{g^2}{c^2} \ll 1$ bo'lganda Nyuton nazariyasi o'rinlidir. Bunda gravitatsiya maydoni uchun

$$|\varphi| \ll c^2$$

shart bajariladi va kuchsiz deb hisoblanadi.

Masala 4.6. Gravitatsiya maydoni uchun $\frac{|\varphi|}{c^2}$ ni a) Yer uchun, b)

Quyosh sirti uchun, v) Mitti yulduz sirti uchun, g) Neytron yulduz uchun baholang.

a) javob $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-10}$

b) javob $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-6}$

v) javob $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-1}$

g) javob $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 0,3$

Ko'rsatma: $\frac{2|\varphi|}{c^2} = 2 \left(\frac{G}{c^2} \right) \frac{M}{R}$ formuladan foydalaning.

Neytron yulduz uchun $|\varphi| \sim c^2$ ekanligidan uning gravitatsiya maydoni kuchlidir va uning sirtidagi zarralar tezligi v , yorug'lik tezligi c ga yaqin bo'ladi. Olingan $|\varphi| \sim c^2$ ga ko'ra, pulsarlarning gravitatsiya xossalari, kuchli maydon bo'lgani uchun, Eynshteynning umumiy nisbiylik nazariyasi asosida qarash lozim bo'ladi. Bu nazariyaga ko'ra, neytron yulduz atrofi yaqinida fazo xossasi Riman geometriyasi asosida tavsiflanadi, u fazoning o'zi egrilikka ega bo'ladi; soatlarning yurishi, vaqtning o'tishi kuchli gravitatsiya maydoni tufayli sezilarli darajada sekinlashadi.

Neytron yulduzlarning tug'ilishida kuchli neytrinolar oqimi hosil bo'ladi. Shu sababli, neytrino astrofizika fanining rivojlanishi tadqiqotchilar qo'liga yulduzlarni o'rganish uchun kuchli qurol bergan bo'lar edi.

Tarixiy ma'lumot. 1932 yilda neytron kashf etilishi bilan oq (Kopengagenga Kembrijdan neytron kashf etilgani haqida xabar kelgan kuni, kechqurun N.Bor, L.Rozenfeld (belgiyalik fizik) va L.Landau muhokama qilish chog'ida) Landau neytron yulduz haqidagi g'oyani bildiradi. Ikki yildan keyin V.Baade va F.Svikki bu g'oyani rivojlantirdilar. Ular yuqori temperaturali, zichlikli va kichik o'lchamdagi bunday kosmik obyektlar o'ta yangi yulduzlar portlashidan hosil bo'lib, massiv yulduzlar evolutsiyasining oxirgi stadiyasi ekanligini aytadilar.

Amnio, 1967 yilda pulsar kashf etilgandan keyin va neytron yulduzlar nurlanishi nazariyasi rivojlantirilgandan keyingina bunday obyektlar hamma tomonidan tan olingan fizik reallik bo'lib qoldi. Angliyadagi Kembrij universitetining Myullard radioastronomiya observatoriyasida prof. Entoni Xyuish boshchiligidagi 3,7 m radioto'lqinni qabul qiluvchi antennali, yuqori sezgirli radioteleskopda osmonni 1967-yil iyundan boshlab muntazam kuzatish boshladilar. Kuzatish boshlangandan 1 oy o'tgandan keyin aspirantka Jokelin Bell osmondan davriy ravishda kelayotgan (paydo bo'layotgan) radioimpulslarni sezib qoldi. Bu birinchi marta kosmosdan kelayotgan radionurlanish manbainining kuzatilishi edi. Oktabrda Xyuish ilgari noma'lum bo'lgan yangi hodisa kuzatilayotganiga ishonch hosil qildi. Noyabrda Xyuish va uning xodimlari birinchi marta osmondagi manbadan muntazam ravishda kelayotgan impulslarni aniqladilar. Bu regular signallar qayerdan kelayotganini aniqlash lozim edi. Hatto ularni Yerdan tashqaridagi sivilizatsiya ("kichkina yashil odamlar") yuborayotgan bo'lsa kerak degan taxminlar ham yo'q emas edi. Bu muammoni hal qilish uchun yana ikki oy qattiq tadqiqot ishlari olib borishdi va nihoyat 1968-yil fevralda "Neycher" jurnalida bu kashfiyot haqidagi maqola e'lon qilindi (Hewich A, Bell S.J va boshqalar. Nature, London., 217,709,1968. Russ.

tarjima «sb "Pulsar»» nashriyot. Mir . M.1971, bet 27). Bu maqolada signal manbai neytron yulduz bo'lishi mumkinligi aytilgan edi. O'sha 1968-yilda F.Pachini va T.Gold pulsarlar aylanuvchi neytron yulduzlar ekanligini nazariy jihatdan asoslادilar. Keyingi paytda bunday radio, rentgen, gamma nurlanishlarning manbalari bo'lgan pulsarlar ko'plab kuzatildi; hozirgi vaqtda ular 400 taga yaqin.

Umuman, prof. E.Xyuish va aspirant J.Bell tomonidan 1967-yilda pulsarlarning kashf etilishi, relikt nurlanishning kashf etilishi bilan bir qatorda, astrofizikaning buyuk yutuqlaridandir.

8-§. Kvark yulduzlar. Qora teshiklar

Zichlik juda katta $\rho \geq 10\rho_0$ bo'lganda bo'lganda (ρ_0 yadro zichligi) neytronlar bir-biriga juda yaqinlashib, bir-birini qisman yopib yuboradi. Bu holda kvarklar bir neytrondan ikkinchisiga o'tishi mumkin bo'lib qoladi. Shunday qilib, ultrakatta zichlikda kvarklar gaz yoki suyuqlikdagi kabi erkin harakatlanishi mumkin bo'ladi.

80-yillarda neytron yulduzlar holatini tahlil qilib, neytron yulduzlar zichligidan ortiq zichliklarda erkin kvarklar paydo bo'lishi mumkinligi taxmin qilinadi. Boshqacha aytganda, juda yuqori zichliklarda kvarklardan iborat yulduzlar bo'lishi mumkinligi aytiladi. 1989-yil yanvar oyida Berklidagi Lourens nomli laboratoriyada o'ta yangi 1987 A yulduz tadqiq qilinib, uning markazida pulsar mavjudligi kashf etildi. Bu pulsarning qiziqligi shundaki, u sekundiga 2000 marta aylanadi; u bu paytgacha kashf etilgan pulsarlarning eng tez aylanadiganidan ham 3 marta tez aylanadi. Bunday tez aylanish sababini tadqiq qilib, N.Glendenin o'ta yangi 1987 A ning markazidagi pulsar — kvark yulduz degan fikrga keldi. Analiz ko'rsatdiki, kvark yulduz bo'lishi uchun zichlik $12\rho_0$ dan ortiq bo'lishi zarur.

Glendenin modeliga qaraganda o'ta yangi 1987 A dan qolgan yadro — pulsar u , d va s kvarklardan tashkil toptan. Uningcha, neytron yulduzdagi bosim ma'lum kritik qiymatdan katta bo'lsa, neytron yulduz sponton ravishda (fazoviy o'tishga o'xshash) kvark yulduzga aylanada.

Kvark yulduzlarning yana bir xususiyati shundan iboratki, ularda boshqa yulduzlar, jumladan, neytron yulduzlardagiday gravitatsiya tortishish kuchi asosiy rol ni o'ynamay, balki bunda kuchli o'zaro ta'sir muhim rol o'ynaydi. Gravitatsiya maydoni qo'shimcha yordamchi rol ni o'ynaydi.

Hozirgi zamon tasavvurlariga ko'ra, neytron yulduz kvark yulduzga sponton o'tishda neytron yulduzning o'lchami keskin kamayadi va buning natijasida zichligi ortishi tufayli uning aylanish tezligi, momentning saqlanish

qonuniga asosan, ortadi. Shu tufayli kvark yulduzlar — pulsarlarning aylanish tezligi neytron yulduzlar — pulsarlarning aylanish tezligidan katta bo'ladi.

Kvark yulduzlar haqidagi bunday tasavvurlarga asosan, ba'zi pulsarlar kvark yulduzlardan iborat deyilishiga olib keldi. Jumladan, bizdan 40 ming yorug'lik yili masofadagi rentgen nurlari manbai bo'lgan Oqqush X-3 kvark yulduz deb taxmin qilinmoqda. O'ta yangi 1987 A yulduz o'rnidagi pulsar bizdan 180 ming yorug'lik yili uzoqlikda.

Juda katta massali yulduzlarda termoyadro yoqilg'i zaxirasi tugab, unda dinamik muvozanat buzilganda gravitatsion kollaps natijasida siqilish shunday davom etadiki, zichlik hatto yadro zichligiga teng bo'lgandan so'ng ham siqilish davom etaveradi va nihoyat yulduz "qora o'pa"ra aylanadi. Siqilish davom etib, gravitatsiya maydoni nihoyatda kuchayganda klassik fizikadagi Nyutonning butun Olam tortishish qonuni o'rniga Eynshteynning umumiy nisbiylik nazariyasining formulasi

$$F = \frac{GMm}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

o'rinli bo'ladi. Bunda

$$r_g = \frac{2G}{c^2} M \quad (30)$$

gravitatsiya radiusi, M massa markazi atrofidagi r_g radiusli sferani Shvarsschild sferasi deyiladi. (29) formuladan ko'rinadiki, ikki massa m va M orasidagi r gravitatsiya radiusi r_g ga yaqinlashganda, ular orasidagi kuch F juda kattalashadi, $r = r_g$ bo'lganda cheksiz katta bo'ladi. Boshqacha aytganda, r_g yoki undan kichik radiusli hajmdagi M massali yulduz — qora o'ra $r \leq r_g$ masofadagi barcha jismlarni, jumladan, fotonlarni ham o'ziga tortib oladi. Undan yorug'lik ham chiqa olmaydi!

(30) ifodaga asosan, gravitatsion radius r_g Quyosh uchun $\rho \approx 2,96$ km, Yer uchun $r_g \approx 0,886$ sm qiymatlarga ega, Quyosh massasiga teng bo'lgan qora o'pa massasining zichligi $\rho \approx 2 \cdot 10^{16}$ g/sm³. Bu yadro moddasi zichligidan ikki tartibga ortiqdir ($\rho \approx 2 \cdot 10^{14}$ g/sm³). Bunday katta zichlikdagi qora o'ra (yulduz) fazo xossasiga (uning egriligining hosil bo'lishiga) ta'sir etibgina qolmay, u o'zining atrofidagi jarayonlar tezligiga, vaqtning o'tishiga ham ta'sir etadi.

Qora o'ra atrofida r uzoqlikdagi sfera ustida ikki voqyea sodir bo'lgan bo'lsin. Ularning orasidagi vaqt (xususiy vaqt) shu sirt ustidagi kuzatuvchi nuqtai nazaridan $\Delta \tau$ ga teng bo'lsin. Sirtidan yetarli darajada uzoqdagi

kuzatuvchi nuqtai nazaridan bu ikki voqyeaning orasidagi vaqt Δt bo'lsa, u holda umumiy nisbiylik nazariyasiga asosan,

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \quad (31)$$

munosabat o'rinli. Bu munosabatdan ko'rinadiki, agar r yetarli darajada katta bo'lsa, ya'ni $\frac{r_g}{r} \ll 1$ bo'lsa, bu hodda ikki kuzatuvchilar vaqtlari Δt va $\Delta \tau$ bir-biriga deyarli teng bo'ladi. Agar sirt radiusi r gravitatsiya radiusi r_g ga yaqinlashsa, Δt kattalasha boradi va nihoyat $r=r_g$ bo'lganda $\Delta t \rightarrow \infty$ buladi.

$\Delta \tau$ vaqt elektromagnit to'lqin davri $T_0 = \lambda_0 / c$ bo'lishi mumkin. Bu holda uzoqdagi kuzatuvchi nuqtai nazaridan bu to'lqin davri T bo'ladi. U holda to'lqin uzunlig λ quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \quad (32)$$

(31) va (32) munosabatlardan nurinadiki, katta massali yulduz atrofida (yaqinida) vaqtning sekinlashishi, qizil siljish effekti (to'lqin uzunligining kattalashishi) e'tiborga olinishi lozim bo'ladi. Agar $r_0=r_g$ bo'lsa, yoki r radiusli sirt Shvarsschild sferasi ichida bo'lsa, uzoqdagi kuzatuvchiga signal (elektromagnit to'lqin) bormaydi ($\Delta t \rightarrow \infty$; $\lambda \rightarrow \infty$), qora o'pa tomonidan ushlanib qolinadi. Shu sababli Shvarsschild sferasi voqyealar gorizonti deyiladi.

Qora teshik o'lchami, temperaturasi va bug'lanishi.

Mashur ingliz olimi Stivin Xokingning kvant nazariyasiga ko'ra umumtasavvurdan farqli, qora teshik ma'lum temperatura T_g ga ega.

$$T_g = 10^{-7} \left(\frac{M_0}{M} \right) * K \quad (33)$$

bug'lanish vaqtiga ega:

$$\tau_{bug} = 10^{-35} M^3 \text{ yil} \quad (34)$$

Biz quyida, umumiy nisbiylik nazariyasiga va Kvant nazariyaga tayanmagan holda, qora teshikning oddiy tavsifini keltiramiz.

Shvarsschild radiusi. Avval qora teshikning o'lchamini aniqlaylik:

Sferik simmetriyaga ega M massali obyekt (yulduzdan) r masofadagi jismning gravitatsion maydondagi potensial energiyasi

$$U_{pot} = -\frac{Gm}{r} \quad (35)$$

Ifoda orqali aniqlanadi. Uning kinetik energiyasi

$$U_{kin} = \frac{m\vartheta^2}{2} \quad (36)$$

(35) va (36) ni miqdor jihatdan bir-biriga tenglashtirib yoki energiya $E = E_{kin} + E_{pot}$ ni nolga tenglashtirib, jismning statsionar holati uchun quyidagi munosabatni olamiz.

$$r = \frac{2GM}{\vartheta^2} \quad (37)$$

Nisbiylik nazariyasiga asosan $\vartheta \leq c$ va demak, M massali sferik obyektning (yulduzning) o'lchami

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (38)$$

bilan aniqlanadigan sferadan kichik bo'lolmaydi, ya'ni

$$r \geq r_g \quad (39)$$

(38) bilan aniqlanadigan r_g ni qora o'raning Shvarsschild radiusi deyiladi.

Juda katta tezlikli hollarda kinetik energiyaning klassik ifodasi $\frac{m\vartheta^2}{2}$ taqribiydir. Shuning uchun (35) dan foydalanib olingan ifoda (38) ham taqribiydir. Obyektning (yulduzning) minimal radiusini boshqa usul bilan aniqlaylik.

Sferik simmetriyaga ega M massali obyektning gravitatsion maydonida r masofada aylanayotgan m massali jismning markazdan qochma kuchi

$$F_q = \frac{m\vartheta^2}{r} \quad (40)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Gravitatsion maydon tomonidan m massali jismning markazga tortilish kuchi, Nyuton qonuniga asosan

$$F_g = G \frac{mM}{r^2} \quad (41)$$

Ifoda bilan aniqlanadi. Statsionar holat uchun esa har ikki kuch tengligi $F_q = F_g$ talab, etiladi, ya'ni

$$\frac{m\vartheta^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

yoki bundan

$$r = \frac{GM}{\vartheta^2} \quad (42)$$

M massali obyektning eng kichik radiusi $v=c$ bo'lganda sodir bo'ladi, ya'ni

$$r_s = \frac{GM}{c^2} \quad (43)$$

Obyektning massasi bilan o'lchami orasidagi bog'lanishning, yana bir usulini ko'raylik.

Plank erasidagi Olamning massasi m_p o'lchami l_p , vaqti ma'lumki,

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad l_p = \left(\frac{\hbar c}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t_p = \left(\frac{\hbar c}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

ifodalar bilan aniqlanadi. (44) dan

$$l_p = \frac{Gm_p}{c^2} \quad (45)$$

munosabat kelib chiqadi. (43) va (45) ni taqqoslashdan ko'rinadiki, Olam Plank erasidagi **singulyarlik holatda qora teshikdan iborat ekan**. Bu muhim xulosa. Shuningdek, (43) va (45) ga asosan obyektning minimal radiusi

uchun $r_s = \frac{GM}{c^2}$ ifoda olindi, ya'ni qora teshikning minimal radiusi an'anaviy qarashga nisbatan 2 marta kichik bo'ladi.

Olamning singulyarlik holatdagi parametrlari ma'lum bo'lgani uchun qora o'raning temperaturasi T_s ni va uning bug'lanish vaqti τ_{bug} ni aniqlaylik.

Qora teshik temperaturasi. Bizga ma'lum, qora o'ra o'lchami (45)

$r_s = \frac{GM}{c^2}$ va Kompton to'liq uzunligi

$$\lambda_c = r_s = \frac{\hbar c}{E_p} \quad (46)$$

Ifodalardan

$$E_p = \frac{\hbar c}{m_p} \frac{c^2}{G} \quad (47)$$

munosabatni olamiz. (47) Plank erasidagi qora teshik uchun o'rinli. (47)ni ekstropalyatsiya qilib, barcha qora teshiklar uchun o'rinli deb hisoblaylik. Bu holda, qora o'ra uchun quyidagi qonuniyat kelib chiqadi:

$$E_p = \frac{\hbar c}{m_p} \frac{c^2}{G} \quad (48)$$

$\hbar c$ va $\frac{c^2}{G}$ ni hisoblaylik:

$$\hbar c \frac{c^2}{G} = 26,52 \cdot 10^{22} \text{ eV} \cdot g \quad (49)$$

(49)ni temperaturada aniqlash uchun uni $1,16 \cdot 10^4$ ga ko'paytirish kerak.

$$\hbar c \frac{c^2}{G} = 30,76 \cdot 10^{26} \text{ gK} \quad (50)$$

Demak (48)ni temperatura orqali yozamiz:

$$T_g = 30,76 \cdot 10^{26} \text{ gK/M} \quad (51)$$

Quyosh massasi $M_0 = 2 \cdot 10^{33}$ orqali (51) ni yozaylik.

$$T_g = 1,54 \frac{M_0}{M} \cdot 10^{-6} \text{ K} \quad (52)$$

Bu (52) temperatura Xoking olgan temperatura (33) dan bir tartibga farqlanadi.

$$M_0 = 2 \cdot 10^{33} \text{ va } \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{1}{2}} = M = 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ qiymatlardan foydalanib, (52)}$$

asosida Plank erasidagi Olamning temperaturasini topamiz:

$$T_g = 1,41 \cdot 10^{32} \text{ K} \quad (53)$$

Xoking formulasi (33) bo'yicha T_g hisoblanganda odatdagi $T \approx 10^{12} \text{ K}$ dan bir tartibga kam chiqadi. Plank erasidagi temperatura o'ta yuqori bo'lgani uchun singulyarlik holatida Olam bir onda «bug'lanish». Boshqacha aytganda, «Katta Portlash» mexanizmi — bu «bug'lanish»dir. Endi bu bug'lanish vaqti τ_{bug} ni aniqlaylik.

Qora teshik bug'lanish vaqti. Gravitatsiya maydonida massa qancha katta bo'lsa, tortishish kuchi shuncha katta bo'ladi va demak bug'lanish shuncha qiyin bo'ladi. Boshqacha aytganda, massa ortishi bilan bug'lanish vaqti kattalashadi. Bug'lanish vaqti τ_{bug} qora teshik massasining kubi M^3 ga bog'liqligi aniqlagan.

Yuqoridagi bizning tasavvurimizga asosan, Olamning Plank erasi davomiyligi t_n shu singulyarlik — qora teshikning bug'lanish vaqti τ_{bug} ning o'zidir. Demak,

$$\tau_{oyz} = t_p = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{G}{\hbar c} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot m_p^3 = \frac{G^2}{\hbar c^4} m_p^3 \quad (54)$$

Biz (54) asosida barcha qora teshiklar uchun formula olamiz.

$$\tau_{oyz} = \frac{G^2}{\hbar c^4} M^3 \quad (55)$$

Bunda M grammlarda hisoblangan qora teshik massasi $\frac{G^2}{\hbar c^4} = 1,66 \cdot 10^{-37} \frac{yil}{z^3}$ qamligidan qora teshik bug'lanish vaqtini topamiz:

$$\tau_{oyz} = 1,66 \cdot 10^{-37} \frac{yil}{z^3} \quad (56)$$

Singulyarlik holatidagi Olam $5,34 \cdot 10^{-44}$ sekundda bug'lanadi ($M \approx 2,18 \cdot 10^{-5}$ g). Masalan, Quyosh qora teshikka aylangan bo'lsin. U holda an'anaviy tasavvur va Xoking nazariyasiga ko'ra uning parametrlari $r_s \approx 3$ km, $T \approx 10^{-7}$ K, $\tau_{bug} \approx 10^{65}$ yil qiymatlarga ega.

Bizning natijalarimizga asosan parametrlar $r_s \approx 1,5$ km, $T \approx 1,54 \cdot 10^{-6}$ K, $\tau_{bug} \approx 1,33 \cdot 10^{63}$ yil qiymatlarni qabul qiladi.

Shunday qilib, Katta Portlash Xoking nazariyasiga asosan singulyarlikning bir onda, $5 \cdot 10^{-44}$ sekundda bug'lanishidir.

Qora teshikning to'liq nurlanish quvvati

$$L = 10^{20} (10^{15}/M)^2 \text{ erg/sek} = 2,5 \cdot 10^{-17} (M_\odot/M)^2 \text{ erg/sek} \quad (57)$$

ma'lum (q. «Физика космоса» kitobi, M.1986 y, 718-bet). Bizning tasavvurimizga binoan, singulyarlikning — qora teshikning to'liq nurlanish (bug'lanish) quvvati

$$L_p = \frac{E_p}{\tau_{bug}} = \frac{m_p c^2}{(G^2/\hbar c^4) m_p^3} = \frac{\hbar c^6}{G^2} \frac{1}{m_p^3} \quad (58)$$

yoki barcha qora teshiklar uchun

$$L_p = \frac{\hbar c^6}{G^2} \frac{1}{M^2} \quad (59)$$

formula olamiz. Bundan (57) ga yaqin

$$L = 4,30 \cdot 10^{-17} (M_\odot/M)^2 \text{ erg/sek} \quad (60)$$

qiymat olamiz

V b o b. ZICHLIK MATRITSASI (OPERATORI)

1-§. Kirish

Ta'rif. Qaralayotgan sistemaning holatlari $\psi_{\alpha}, \psi_{\alpha'}, \dots$ va ularga Ermit qo'shloq holatlar $\psi_{\alpha}^*, \psi_{\alpha'}^*, \dots$ bo'lsin. Bular o'zaro ortogonal va normaldirlar

$$(\psi_{\alpha}^*, \psi_{\alpha'}) = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (1)$$

Agar sistemani α holatda bo'lish ehtimoli w_{α} bo'lsa, u holda bu sistemaning statistik xossalari quyidagi zichlik matritsasi (operatori) bilan aniqlanadi:

$$\rho = \sum w_{\alpha} \psi_{\alpha}^* \psi_{\alpha} \quad (= \sum |\alpha\rangle w_{\alpha} \langle \alpha|) \quad (2)$$

Bunda w_{α} uchun normalash sharti

$$\sum w_{\alpha} = 1 \quad (3)$$

Gilbert fazosida ixtiyoriy ortonormalli bazis vektorlar $\varphi_n = |n\rangle (n = 1, 2, \dots)$ berilgan bo'lsin. Bu bazisda zichlik matritsasi

$$\langle n|\rho|n\rangle = \sum_{\alpha} \langle n|\alpha\rangle w_{\alpha} \langle \alpha|n\rangle \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bunda diagonal elementlarining yig'indisi yoki matritsa (operator) shpuri birga normalangan bo'ladi:

$$\langle n|\rho|n\rangle = S\rho = 1 \quad (5)$$

2-§. Dinamik kattalikning o'rtachasi

Berilgan operator (matritsa) ning statistik ansambli asosida dinamik kattalikning o'rtacha qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{A} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle \alpha|A|\alpha\rangle = S\rho A \quad (6)$$

$S\rho A$ — ikki matritsa ρ va A ning ko'paytmasidan iborat bo'lgan matritsaning diagonal elementlarining yig'indisidir. Eslatamiz: Matritsaning diagonal elementlari yig'indisi (ya'ni matritsa shpuri) invariant kattalikdir, u koordinatalar sistemalariga bog'liq emas.

Kanonik taqsimotni ifodalovchi zichlik matritsasining ko'rinishi quyidagichadir:

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \equiv Z^{-1} \sum_{\epsilon} e^{-\beta \epsilon} \varphi_{\epsilon}^* \varphi_{\epsilon} \equiv Z^{-1} \sum_{\epsilon} e^{-\beta \epsilon} |E^{\epsilon}\rangle \langle E^{\epsilon}| \quad (7)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$\varphi_{\epsilon} = |E^{\epsilon}\rangle$ — gamiltonian $\hat{H}$ ning xususiy vektori (funksiyasi), ya'ni

$$\hat{H} \varphi_{\epsilon} = E^{\epsilon} \varphi_{\epsilon} \quad \left(\hat{H} |E^{\epsilon}\rangle = E^{\epsilon} |E^{\epsilon}\rangle \right) \quad (8)$$

$$Z = S_{\epsilon} e^{-\beta \epsilon} = \sum_{\epsilon} e^{-\beta \epsilon} \quad (9)$$

Kanonik taqsimot asosida dinamik kattalik A ning o'rtacha qiymati quyidagicha ko'rinishda aniqlanadi.

$$\bar{A} = \frac{S_{\epsilon} A e^{-\beta \epsilon}}{S_{\epsilon} e^{-\beta \epsilon}} \quad (10)$$

3-§. Ossilyator koordinatasi va impulsining ehtimollari taqsimotlari

Qattiq jism atomlari yoki molekula atomlari kichik tebranayotgan bo'lsin. U holda ossilyatorning energiyasi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (P_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2) \quad (11)$$

ifoda bilan aniqlanadi; P_{α} va q_{α} umumlashgan impuls va umumlashgan (normayal) koordinatalar; $\omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ normal tebranish chastotasi. Kvant mexanikada ham ossilyatorning energiyasi

$$E = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} \left(n_{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (12)$$

alohida ossilyatorlar energiyalari yig'indisidan iborat bo'ladi. Ossilyator koordinatasi qiymatlari ehtimollari taqsimotiga qaraylik. Klassik statistikada bu taqsimot

$$dW(q) = Ae^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} dq = Ae^{-\frac{\hbar^2 q^2}{2kT}} dq \quad (13)$$

dan iborat.

Kvant mexanikada shu masalani hal etaylik. Har bir ossillyatorning energiyasi

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (14)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

$q, q + dq$ intervalda ossillyator koordinatasi qiymati bo'lishi ehtimoli, umumiy ta'rifga asosan,

$$dw(q) = \rho(q) dq = dq \sum_n w_n \psi_n^2 \quad (15)$$

$$w_n = ae^{-\beta \epsilon_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (16)$$

(15) va (16) dan ko'rinadiki

$$\rho(q) = a \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n^2(q) \quad (17)$$

(17) dan hosila olamiz.

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = 2a \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n \frac{d\psi_n}{dq} \quad (18)$$

$-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial q} = \hat{p} \psi_n$ ekanligini va $n \rightarrow n \pm 1$ o'tishlar realizatsiyasi bo'lishini e'tiborga olib, (18) ni yozamiz (impuls matritsasi elementlari uchun $n \rightarrow n \pm 1$ o'tishlarga mavjud)

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = 2a \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n \left[\frac{i}{\hbar} \hat{p} \psi_n \right] = \frac{i2a}{\hbar} \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n [p_{n-1,n} \psi_{n-1} + p_{n+1,n} \psi_{n+1}]$$

$p_{n-1,n} = -i\omega q_{n-1,n}$; $p_{n+1,n} = i\omega q_{n+1,n}$ ni e'tiborga olib davom ettiramiz:

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = \frac{2a\omega}{\hbar} \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} [q_{n-1,n} \psi_n \psi_{n-1} - q_{n+1,n} \psi_n \psi_{n+1}]$$

$n - 1 \rightarrow n$ almashtiramiz.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(q)}{dq} &= \frac{2\alpha\omega}{\hbar} \sum_n [e^{-\beta\epsilon_n} q_{n+1} \psi_n \psi_{n+1} - q_{n+1n} \psi_n \psi_{n+1} e^{-\beta\epsilon_n}] = \\ &= \frac{2\alpha\omega}{\hbar} [e^{-\beta\hbar\omega} - 1] \sum_n (e^{-\beta\epsilon_n} q_{n+1} \psi_n \psi_{n+1}) \\ \frac{d\rho(q)}{dq} &= -\frac{2\alpha\omega}{\hbar} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n [e^{-\beta\epsilon_n} q_{n+1} \psi_n \psi_{n+1}] \quad (19)\end{aligned}$$

Endi $\hat{q}\rho$ ni aniqlaylik

$$\begin{aligned}\hat{q}\rho &= \hat{q}a \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n^2 = a \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \hat{q}(\psi_n \psi_n) = a \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} [\psi_n q_{n+1n} \psi_{n+1} + \psi_n q_{n+1n} \psi_{n+1}] = \\ &= |n-1 \rightarrow n \text{ almashtiramiz}| = a \left[\sum_n e^{-\beta\epsilon_n - \beta\hbar\omega} q_{n+1} \psi_n \psi_{n+1} + \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} q_{n+1n} \psi_n \psi_{n+1} \right] = \\ &= a(1 + e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} q_{n+1} \psi_n \psi_{n+1} e^{-\beta\epsilon_n} \quad (20)\end{aligned}$$

(19) va (20) dan olamiz:

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = q\rho \frac{-2\omega}{\hbar} \cdot \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}} = -\frac{2\omega}{\hbar} q\rho \frac{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} + e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}} = -\frac{2\omega}{\hbar} q\rho \operatorname{th} \frac{\beta\hbar\omega}{2} \quad (21)$$

(21) dan

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2\omega}{\hbar} \operatorname{th} \frac{\beta\hbar\omega}{2} q \cdot dq$$

yoki

$$\ln \rho(q) = -q^2 \frac{\omega}{\hbar} \operatorname{th} \frac{\beta\hbar\omega}{2} + \ln C$$

$$\rho(q) = C e^{-\frac{\omega}{\hbar} q^2 \operatorname{th} \frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$

shunday qilib, izlanayotgan taqsimot $\rho(q)$ ni olamiz:

$$\rho(q) = C \exp \left[-q^2 \frac{\omega}{\hbar} \operatorname{th} \frac{\hbar\omega}{2kT} \right]$$

$$\int dw_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q) dq = 1 \quad (22)$$

shartdan foydalanib, doimiy son C ni topamiz:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar}{2\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta \hbar \omega}{2}}} = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Shunday qilib, oxirgi natijani (F.Bloch, 1932) olamiz:

$$dw_q = \rho(q) dq = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-q^2 \frac{\omega}{\hbar} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega}{2kT} \right] dq \quad (23)$$

Kvant mexanikada koordinata qiymatlari ehtimollari taqsimoti

$$e^{-\beta \epsilon_q} \text{ yoki } e^{-\frac{\beta \omega^2 q^2}{2}}$$

ko'rinishda bo'lib, bunda β klassik fizikadagi $\frac{1}{kT}$ dan farqlidir:

$\beta = \frac{2}{\hbar \omega} \operatorname{th} \frac{\hbar \omega}{2kT}$. β chegaraviy holda, temperatura yuqori bo'lganda $\frac{1}{kT}$ ga o'tadi.

Izoh 1. Blox natijasi (23) ni mazkur kitobdagi metod bilan osonginini olish mumkin, Haqiqatan, (11) ni nazarda tutib yozamiz:

$$f(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} = f(q)f(p) \quad (24)$$

bunda

$$f(q) = A e^{-\frac{\beta \omega^2 q^2}{2}} \quad (25)$$

$$f(p) = B e^{-\frac{\beta p^2}{2}} \quad (26)$$

$$\text{Ossillyator uchun } v = 1, \beta = \frac{v}{U} = \frac{1}{\langle \epsilon \rangle} :$$

$$\frac{1}{\beta} = \langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT} \quad (27)$$

(27) ni (25) ga qo'yib, taqsimot funksiyasi $f(q)$ ni Blox taqsimoti (23) bilan bir hil ekanligini ko'ramiz.

Izoh 2. (27) ni (26) ga qo'yib, umumlashgan impuls qiymatlari ehtimollari taqsimotini olamiz:

$$f(p) = \rho(p) = Be^{-\frac{p^2 - 4\epsilon_0}{2A\Gamma}} \quad (28)$$

(25) va (26) (yoki (28)) taqsimot funksiyalaridagi A va V ni normalash shartlari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(q) d(q) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p) d(p) = 1$$

asosida topiladi:

$$A^{-1} = \left(\frac{2\pi}{\beta\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}}; A = \left(\frac{\beta\omega^2}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$B^{-1} = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}; B = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Masala 5.1. Garmonik ossillyatorning zichlik matritsasi q tasavvurda aniqlansin.

Yechish. Muvozanat holatdagi ossillyatorlar ansambli uchun zichlik matritsasi, ta'rif buyicha,

$$\rho(q, q') = a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q) \psi_n(q') \quad (1)$$

Hola bilan aniqlanadi. O'zgaruvchilarni quyidagicha almashtiraylik:

$$q = r + s, \quad q' = r - s \quad (2)$$

Hosila $\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_r$ ni topaylik:

$$q - q' = 2s \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_r = \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial s} = 2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \rho}{\partial q'} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho(q, q')}{\partial q} = a \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q) \frac{\partial \psi_n(q')}{\partial q} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p(q, q')}{\partial q} = a \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) \frac{\partial \psi_n(q')}{\partial q'} \quad (6)$$

bunda $-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial q} = \hat{p} \psi_n$; $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ impuls operatori. Ossilyator uchun matritsa elementlari noldan farqli bo'ladi: $n \rightarrow n \pm 1$ o'tishlar uchun (tanlash qoidasi). Bularni e'tiborga olib yozamiz

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n(q)}{dq} &= \frac{i}{\hbar} \hat{p} \psi_n = \frac{i}{\hbar} [p_{n-1n} \psi_{n-1} + p_{n+1n} \psi_{n+1}] = \\ &= \frac{i}{\hbar} [-i\omega q_{n-1n} \psi_{n-1}(q) + i\omega q_{n+1n} \psi_{n+1}(q)] = \\ &= \frac{\omega}{\hbar} [q_{n-1n} \psi_{n-1}(q) - q_{n+1n} \psi_{n+1}(q)] \end{aligned} \quad (7)$$

Xuddi shuningdek, tenglikni yozamiz:

$$\frac{d\psi_n(q')}{dq'} = \frac{\omega}{\hbar} [q_{n-1n} \psi_{n-1}(q') - q_{n+1n} \psi_{n+1}(q')] \quad (8)$$

(5) ni (7) ni nazarda tutib qayta yozamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dq} &= \frac{\alpha\omega}{\hbar} \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) [q_{n-1n} \psi_n(q) - q_{n+1n} \psi_{n+1}(q)] = \\ &\quad (n-1 \rightarrow n \text{ almashtiramiz}) \\ &= \frac{\alpha\omega}{\hbar} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n - \beta \epsilon_{n+1}} \psi_{n+1}(q') \psi_n(q) \mathcal{H}_{n+1n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q') \psi_{n+1}(q) \mathcal{H}_{n+1n} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Shuningdek, yozamiz:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dq} &= \frac{\alpha\omega}{\hbar} \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) [q_{n-1n} \psi_{n-1}(q') - q_{n+1n} \psi_{n+1}(q')] = \\ &= \frac{\alpha\omega}{\hbar} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) \psi_{n-1}(q') \mathcal{H}_{n-1n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) \psi_{n+1}(q') \mathcal{H}_{n+1n} \right\} = \\ &\quad |n-1 \rightarrow n \text{ almashtiramiz} = \\ &= \frac{\alpha\omega}{\hbar} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n - \beta \epsilon_{n+1}} \psi_{n+1}(q) \psi_n(q') \mathcal{H}_{n+1n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \psi_n(q) \psi_{n+1}(q') \mathcal{H}_{n+1n} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

(9) va (10) ni nazarda tutib, (4) ni yozamiz:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_r = 2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial q} - \frac{\partial \rho}{\partial q^*} \right] =$$

$$= \frac{2a\omega}{\hbar} \left\{ (e^{-\beta\hbar\omega} + 1) \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \psi_n(q) \mathcal{H}_{n-1} - (e^{-\beta\hbar\omega} + 1) \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \psi_{n+1}(q) \mathcal{H}_{n+1} \right\} =$$

$$= \frac{2a\omega}{\hbar} (1 + e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} [\psi_{n+1}(q^*) \psi_n(q) - \psi_n(q^*) \psi_{n+1}(q)] \mathcal{H}_{n+1}$$

Endi ρ ni aniqlaylik. $q=r+s$, $q^*=r-s$ dan $q+q^*=2r$; $q-q^*=2s$; $s = \frac{(q-q^*)}{2}$.

Demak $\frac{q\rho}{2}$ va $-\frac{q^*\rho}{2}$ larni aniqlash kerak.

$$q\rho = a \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \mathcal{H} \psi_n(q) =$$

$$= a \left\{ \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \psi_{n-1}(q) \mathcal{H}_{n-1} + \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \psi_{n+1}(q) \mathcal{H}_{n+1} \right\} =$$

$$= a \left[\sum_n e^{-\beta\epsilon_n - \beta\hbar\omega} \psi_n(q) \psi_{n+1}(q^*) \mathcal{H}_{n+1} + \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q^*) \psi_{n+1}(q) \mathcal{H}_{n+1} \right]$$

$$q^*\rho = a \left[\sum_n e^{-\beta\epsilon_n - \beta\hbar\omega} \psi_n(q^*) \psi_{n+1}(q) \mathcal{H}_{n+1} + \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_n(q) \psi_{n+1}(q^*) \mathcal{H}_{n+1} \right] \dots (13)$$

(11) va (13) dan foydalanib olamiz:

$$\rho s = \frac{1}{2} (q - q^*) \rho = \frac{a}{2} \left\{ (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} \psi_{n+1}(q) \psi_n(q^*) \mathcal{H}_{n+1} + \right.$$

$$\left. + (e^{-\beta\hbar\omega} - 1) \sum_n \psi_{n+1}(q) \psi_n(q) \mathcal{H}_{n+1} \right\} =$$

$$= \frac{a}{2} (-1 + e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_n e^{-\beta\epsilon_n} [-\psi_{n+1}(q) \psi_n(q) + \psi_{n+1}(q^*) \psi_n(q)] \mathcal{H}_{n+1}$$

Demak, (11) va (14) dan aniqlaymiz:

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_r = -\frac{2a\omega}{\hbar} \cdot \frac{2(1 + e^{-\beta\hbar\omega})}{a(1 - e^{-\beta\hbar\omega})} \cdot \rho s = -\frac{4\omega}{\hbar} \rho \operatorname{csch} \frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

yoki bundan

$$\rho(r, s) = A(r) e^{-r^2 \frac{\omega}{\hbar} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}}, \beta = \frac{1}{kT} \quad (15)$$

Avvalgi o'zgaruvchilar q, q' ga o'taylik:

$$r = \frac{q + q'}{2}, s = \frac{(q - q')}{2}$$

Demak,

$$\rho(q, q') = A(r) e^{\frac{(q - q')^2}{2\hbar} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}} \quad (16)$$

$q + q' = r, q = q'$ bo'lganda avvalgi masalaning natijasi olinishi zarur, ya'ni

$$\rho(q) = A(q) \cdot 1 = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-q^2 \frac{\omega}{\hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)$$

yoki q, q' da $r^2 = 4q^2$ ni e'tiborga olib yozamiz

$$\rho_1(q, q') = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left[\frac{(q + q')^2}{4\hbar} \right] \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right\} \quad (17)$$

(17) ni (16) ga qo'yib, oxirgi natijani olamiz:

$$\rho(q, q') = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{\omega (q + q')^2}{4\hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} - \frac{\omega (q - q')^2}{4\hbar} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT} \right\} \quad (18)$$

Izoh 1. Matritsa $\rho(q, q')$ ning diagonal elementlari $\rho(q, q)$ (18) dan $q = q'$ bo'lganda olinadi. Bu diagonal elementlar esa avvalgi masalaning natijasidir.

Izoh 2. Bu diagonal elementlarning klassik holdagi ifodasi $kT \gg \hbar \omega$ shart bajarilganda (18) dan olinadi:

$$\rho(q) = A e^{-q^2 \frac{\omega}{\hbar} \frac{\hbar \omega}{2kT}} = A e^{-\frac{\omega^2 q^2}{2kT}} \quad (19)$$

Normal koordinata q dan tabiiy koordinataga o'taylik: $\omega^2 q^2 = \frac{k}{m} m x^2 = k x^2$

Bu holda

$$\rho(x) = Ae^{-\frac{kx^2}{2kT}} \quad (20)$$

Potensial energiya $\frac{kx^2}{2}$ bo'lgandagi ma'lum Gibbs (yoki Bolsman) taqsimoti ifodasi kelib chiqadi.

Izoh 3. $\hbar\omega \gg kT$ bo'lganda zichlik matritsasi diagonal elementini aniqlaylik:

$$\rho(q) = Ae^{-\frac{\omega q^2}{\hbar}} = |\psi_0(q)|^2; \psi_0 = A^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}} \quad (21)$$

$\psi_0(q)$ – ossillyatorning asosiy holati to'liqin funksiyasi (q – tasavvurlar).

Masala 5.2. Ossillyator uchun zichlik matritsani p tasavvurda aniqlang.

Javob:

$$\rho(p, p') = \left(\frac{1}{\omega\pi\hbar} \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(p+p')^2}{4\hbar\omega} \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT} - \right. \\ \left. - \frac{(p-p')^2}{4\hbar\omega} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \right\} \quad (22)$$

Ko'rsatma. Avvalgi masalani yechgandagi usul qo'llanadi.

Izoh 1. Zichlik matritsa $\rho(p, p')$ ni diagonal elementlari ifodasi $p = p'$ da olinadi:

$$\rho(p) = A \exp \left(-\frac{p^2}{\omega\hbar} \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \quad (23)$$

Asosiy matndagi umumiy ifodadan bu (23) ifodani quydagicha olinadi:

$$\rho(p) = Ae^{-\frac{\beta p^2}{2}}; \beta = \frac{1}{\langle \epsilon \rangle} = \frac{2}{\hbar\omega} \tanh \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (24)$$

β ning bu qiymatini nazarda tutib, (24) ifoda (23) taqsimot bilan bir sili ekanligiga qanoat hosil qilinadi. A normallash shartidan aniqlanadi.

Izoh 2. klassik holda ($kT \gg \hbar\omega$ shart bajarilganda) (24) yoki (23) dan

$$\rho(p) = Ae^{-\frac{p^2}{2kT}} \quad (25)$$

Maksvell taqsimoti funksiyasi chiqadi.

Izoh 3. $\hbar\omega \gg kT$ holda (24) dan

$$\rho(p) = A e^{-\frac{p^2}{\hbar\omega}} = |\psi_0(p)|^2 \quad (26)$$

taqsimotni olamiz. Bunda $\psi_0(p) = A^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar\omega}}$ ossillyatorning asosiy holati to'liq funksiyasidir.

Izoh 4. $\rho(p)$ yoki $\rho(q)$ ni $\rho(q) = |\psi(q)|^2$ deb tasavvur etilsa, umumiy holda $\psi(q)$ funksiya qanday tenglamaning yechimi bo'ladi?

[$\psi_0(q)$ va $\psi_n(p)$ – Shredinger tenglamasining yechimi]

Izoh 5. Garmonik ossillyatorning zichlik matritsasi

$$\rho = Z^{-1} \exp\left(-\beta \hat{H}\right), \quad \hat{H} = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$$

q -tasavvurdagi matritsa elementlari

$$\rho(q, q') = \frac{1}{Z} \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q' \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \psi_n(q') \psi_n(q) \quad (9)$$

ifoda bilan aniqlanadi. Bunda $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ hususiy qiymatlarga mos kelgan to'liq funksiyalar

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \left(\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q\right)$$

$H_n(\xi)$ Ermit polinomi

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2} = \frac{e^{\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\omega)^n e^{U^2 + 2\xi U} dU$$

$\psi_n(\xi)$ ning ifodasidan foydalanib, zichlik matritsasi elementlari $\rho(q, q')$ uchun (18) ifodani olish mumkin. Ammo bu usul yetarli darajada murakkab bo'lgani uchun bu yerda uni qaytarmasdan, bu usul ham yana avvalgi natijaga olib kelishini qayd etish bilan chegaralanamiz.

VI b o b. FLUKTUATSIYA NAZARIYASI

1-§. Kirish

Statistik fizikaning asosiy vazifasi — termodinamik qonunlar va munosabatlarni asoslash, ularni isbot qilish xamda termodinamik funksiyalarni molekular - kinetik nazariya asosida xisoblashdan iborat. Bunda fizik kattaliklarning o'rtacha qiymati hisoblaniladi. Kattaliklarning haqiqiy qiymatlarining o'rtacha qiymatdan chetlanishini (og'ishini) ham muvozanatli statistik fizika tadqiq qiladi, o'rganadi.

Fizik kattaliklar haqiqiy qiymatlarining ularning o'rtacha qiymatidan farodifiy chetlanishiga fluktuatsiya hodisasi deyiladi. Moddalarning mikroskopik xossalariiga fluktuatsiya ta'sir qiladi. Demak, bu xossalarni chuqur tushunish uchun fluktuatsiyaning ta'sirini hisobga olish zarur. Shu sababli, fluktuatsiya hodisasini o'rganish — tadqiq qilish katta ahamiyatga ega. Fluktuatsiya nazariyasining ahamiyati shundan ham iboratki, u muvozanatli holat nazariyasi bilan nomuvozanatli holat nazariyasi o'rtasida ko'priki tashkil etadi. *Sistema muvozanatli holatdan chetlanishi statsionar bo'lishi mumkin. Bu nomuvozanatli jarayonlarni o'rganish usuli kinetika deyiladi.* Fluktuatsiya nazariyasi kinetik nazariya usullarini o'rganishga qo'yilgan qadamdir.

Ixtiyoriy miqdor x fluktuatsiyasining miqdoriy o'lchami sifatida $(x - \bar{x})^n$ kattalik qabul qilinadi. Aksariyat masalalarni yechishda $n=2$ bo'lgan holda foydalanish yetarli bo'ladi. *Bu holda $(x - \bar{x})^2$ ni x kattaligining o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi yoki dispersiyasi deyiladi.*

2-§. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi

Faraz qilaylik, sistema $X(x_1, x_2, \dots)$ parametriga nisbatan aniqlangan bo'lib, buning o'rtacha qiymati quyidagicha bo'lsin:

$$\bar{X}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$$

Biz X ning haqiqiy qiymatlarining o'rtacha qiymat $\bar{X}$ dan chetlanishi qonuniyatini, ya'ni X ning qiymatlari ehtimollari taqsimotini aniqlashimiz lozim.

Fluktuatsiyani aniqlash uchun (o'lchamsiz) entropiyaning umumiy ta'rifi

$$S = - \langle \ln f(E) \rangle \quad (1)$$

ifodadan foydalaniladi; bunda kanonik taqsimotni quydagicha aniqlaymiz:

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\beta E}, \beta = \frac{v}{U} \quad (2)$$

bunda Z – statistik integral (yig'indi), U – ichki energiya, $2v$ – sistemaning gamiltonianini aniqlovchi parametrlar soni; yuqori temperaturada, energiyaning erkinlik darajalari bo'yicha teng taqsimlanishi qonuni o'rinli bo'lganda (2) taqsimot Gibbsning kanonik taqsimotiga o'tadi. Bundan kanonik ansambl entropiyasini topamiz:

$$S = v + \ln Z \quad (3)$$

Sistema yoki uning biror qismini xarakterlaydigan fizik kattalik $X(x_1, x_2, \dots)$ ning o'zgarishi bilan sistemaning holati o'zgaradi. Faraz qilaylik, entropiya tenglamasi (3) faqat muvozanat holatidagi sistema uchun o'rinli bo'lmasdan, X ning barcha qiymatlarida ham o'rinli bo'lsin:

$$S(X) = v(X) + \ln Z(X) \quad (4)$$

Fluktuatsiya hodisasida erkinlik darajalari soni doimiy deb, (3) va (4) ifodalardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{Z(X)}{Z(\bar{X})} = \exp[S(X) - S(\bar{X})] \quad (5)$$

Bunda $S(X) - S(\bar{X}) = \Delta S(X) \leq 0$ va demak nisbat $\frac{Z(X)}{Z(\bar{X})}$ (0,1) intervalda o'zgaradi va sistemaning muvozanatli holatdan chetlanishi ehtimoli $W(X, \bar{X})$ ni aniqlaydi, ya'ni

$$W(X, \bar{X}) = A \exp[\Delta S(X)] \quad (6)$$

bunda A – normallashtirish shartidan aniqlanadi.

$$W(X, \bar{X}) = \frac{Z(X)}{Z(\bar{X})}; \Delta S(X) = S(X) - S(\bar{X})$$

(6) ifodani Eynshteyn formulasi deyiladi.

Quyidagi bir o'zgaruvchan $X(x_1) = x$ bo'lgan holni qarab chiqaylik. Parametr x ning o'rtacha qiymati $\bar{x}$ dan chetlanishi kichik bo'lsin. Bu holda $S(x)$ ni qatorga quyidagicha yoyaylik:

$$S(x) = S(\bar{x}) + \left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})^2 + \dots \quad (7)$$

$x = \bar{x}$ bo'lganda entropiya $S(x)$ maksimum qiymatga ega bo'ladi. Shuning uchun

$$\left. \frac{\partial S}{\partial X} \right|_{x=\bar{x}} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \right|_{x=\bar{x}} < 0 \quad (8)$$

(8) ga asosan

$$S(x) - S(\bar{x}) = \Delta S(x) = -\frac{\beta}{2} (x - \bar{x})^2 \quad (9)$$

bunda

$$\beta = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \right| > 0$$

(9) ni nazarda tutib, (6) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$W(x) = A \exp \left[-\left(\frac{\beta}{2} \right) (x - \bar{x})^2 \right] \quad (10)$$

(10) dagi A quyidagi normallash sharti

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 1 \quad (11)$$

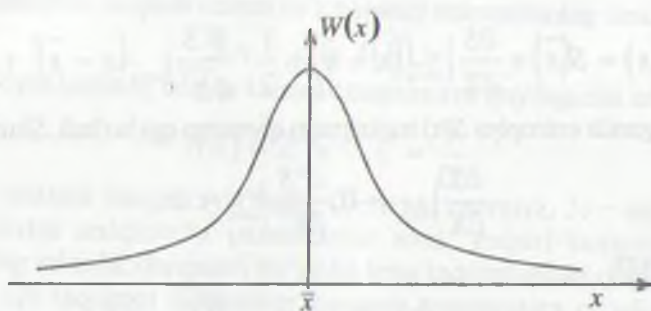
dan topiladi. (10) ni (11) ga qo'yib, $A = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ ekanini topamiz (6.1-

masalaga qarang). Shunday qilib, x kattalikning fluktuatsiyasi qiymatlari uchun quyidagi taqsimot funksiyasini olamiz:

$$W(x) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\left(\frac{\beta}{2} \right) (x - \bar{x})^2 \right] \quad (12)$$

Bu taqsimot Gauss taqsimoti (yoki normal taqsimot) deyiladi. Bu taqsimot simmetrikdir va $x = \bar{x}$ da maksimumga ega (6.1 rasm).

Kvadratik fluktuatsiya o'rtachasi $\overline{(x - \bar{x})^2}$ ni (12) asosida aniqlaymiz (6.1, 6.2-masalalarga qarang):



6.1-rasm.

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 W(x) dx = \frac{1}{\beta} \quad (13)$$

Demak,

$$W(x) = \left[2\pi \overline{(x - \bar{x})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2 \overline{(x - \bar{x})^2}} \right] \quad (14)$$

Yuqorida bir parametrlarning fluktuatsiyasini qaradik. Xuddi shuningdek, ko'p parametrlar fluktuatsiyalarini ko'rishimiz mumkin. Bu holda sistemni entropiyasi shu parametrlar $x_1, x_2, \dots, x_n$ ning funksiyasi bo'ladi:

$$S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bu holda parametrlarning o'rtacha qiymatlaridan chetlanishi ehtimoli $W(X)$ ni quyidagicha yozamiz:

$$W(X) dx_1 dx_2 \dots dx_n = A \exp[\Delta S(X)] dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (15)$$

bunda

$$X = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$S(X)$ ni $(x_i - \bar{x}_i)$ darajalar bo'yicha qatorga yoyamiz, $(x_i - \bar{x}_i)$ ni kichik deb, ikkinchi tartibli hadlarni hisobga olish bilan chegaralanamiz, ya'ni

$$S(X) = S(\bar{X}) + \sum_i \left. \frac{\partial S}{\partial x_i} \right|_{x_i = \bar{x}_i} (x_i - \bar{x}_i) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i = \bar{x}_i, x_j = \bar{x}_j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) + \dots$$

yoki (8) ga asosan

$$S(X) = S(\bar{X}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{i,j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \quad (16)$$

(16) ni (15) ga qo'yib, aniqlashimiz lozim bo'lgan fluktuatsiya ehtimollari taqsimotini topamiz.

$$W(X) = A \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j} \beta_{i,j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right] \quad (17)$$

Bunda A normallash sharti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W(X) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (18)$$

dan topiladi:

$$A = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\beta}$$

β -matritsa $\beta_{i,j}$ ning determinanti (6.1, 6.2 - masalalarga qarang).

Masalalar.

6.1. (10) ifodadagi A ni aniqlang.

Yechish. Qulaylik uchun $\bar{x} = 0$ deb, (10) ni (11) ga qo'yamiz

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \beta x^2 \right] dx = 1$$

yoki

$$A \left(\frac{2}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} I = 1$$

bundagi I Pausson integralini topamiz:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Huning uchun I^2 ni yozib, so'ng qutb koordinata sistemasiga o'tib, integrallash amalini bajaramiz, ya'ni

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Demak, $I = \sqrt{\pi}$. Shunday qilib, $A \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$

6.2. (17) ifodadagi A ni aniqlang.

Yechish. (18) integral ifodani hisoblash uchun x_i ustida shunday chiziqli almashtirish

$$x_i = \sum_k a_{ik} x_k^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

ni bajaraylikki, kvadratik forma $\sum_{i,j} \beta_{i,j} x_i x_j$ natijada $\sum_i x_i^2$ ga aylansin, ya'ni

$$\sum_{i,j} \beta_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} x_i x_j \delta_{i,j} \quad (2)$$

(1) ni (2) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum_{i,j} \beta_{i,j} a_{im} a_{jn} = \delta_{m,n} \quad (3)$$

Bunda chap tomondagi matritsa determinantlari $\beta = |\beta_{ij}|$, $a = |a_{im}|$, o'ng tomondagi matritsa determinanti esa $|\delta_{mn}| = 1$. Shuning uchun

$$\beta a^2 = 1 \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(18) integralni chiziqli almashtirgandan keyin, yakobian doimiy va a ga teng ekanligini nazarda tutib, quyidagini yozamiz:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} a W(X) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= A a \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \right] dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= A a \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right]^n = A a (2\pi)^{\frac{n}{2}} = 1 \end{aligned}$$

yoki (4) ni e'tiborga olib, aniqlanishi lozim bo'lgan A ni quyidagicha ekanligini topamiz:

$$A = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\beta}$$

6.3. Sistema qismining holatini ifodalaydigan parametr x bo'lsin. Entropiya ifodasi (3) asosida X ning fluktuatsiyalari taqsimotining

$$W(X, X_0) = C e^{-\frac{\Delta A_{min}(X, X_0)}{\theta}} \quad (1)$$

ko'rinishga ega ekanligini ko'rsating. Bunda ΔA_{min} — sistema qismining muvozanatli holat X_0 dan $X = X_0 + \Delta X$ holatga o'tishda bajarilishi zaryp bo'lgan minimal ish.

Yechish. To'la sistema holati o'zgarganda bajariladigan ish termodinamika qonunlariga asosan

$$dA \geq dU - \theta dS$$

yoki kvazielastik (qaytuvchan) jarayonlar uchun

$$dA_{\min} = dU - \theta dS \quad (2)$$

bo'ladi. Bunda U va S sistemaning ichki energiyasi va entropiyasi. To'la sistema yakkalangan, ya'ni $dU=0$ bo'lsin. Sistema qismi yetarli darajada kichik bo'lsa, sistema parametri ning o'zgarishini hisobga olmaslik mumkin. Bu holda sistemaning X_0 holatdan $X=X_0+\Delta X$ holatga o'tishi uchun (2) asosida quyidagini yozamiz:

$$\Delta A_{\min} = -\theta[S(X) - S(X_0)] \quad (3)$$

(3) ni (6.6) ga qo'yib, isbot qilinishi lozim bo'lgan (1) ga ega bo'lamiz.

Termodinamik parametrlarning o'rtacha qiymatlaridan chetlanishi, ya'ni fluktuatsiyasi tegishli (mos) ish bajarilishi bilan sodir bo'ladi.

3-§. Termodinamik parametrlar fluktuatsiyasi

Termodinamik parametr X ning ΔX ga o'zgarishi tufayli sistemaning ichki energiyasi U , entropiyasi S va hajmi V ning o'zgarishlari ΔU , ΔS va ΔV bo'lsin. O'zgarimas temperatura va bosimdagi sistemada fluktuatsiya sababli tashqi kuchlar bajargan ish termodinamika asosida quyidagicha aniqlanadi:

$$dA \geq dU + pdV - TdS$$

(bunda $\theta dS = kTdS = TdS_0$: qulaylik uchun indeks nol yozilmaydi).

Bundan minimal ish uchun

$$dA_{\min} = dU + pdV - TdS \quad (19)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifodada T va P muvozanatdagi qiymatlar. U ni ΔU va ΔS darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\begin{aligned} \Delta U = & \frac{\partial U}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial U}{\partial V} \Delta V + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} (\Delta V)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V \right] + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Ma'lumki, bu ifodada hosilalar uchun ularning muvozanatdagi qiymatlari olinadi.

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, -P = \frac{\partial U}{\partial V} \quad (21)$$

larni nazarda tutib, T va P parametrlarning o'zgarishini yozamiz:

$$\Delta T = \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \Delta S + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \Delta V \quad (22)$$

$$-\Delta P = \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} \Delta V + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \Delta S \quad (23)$$

(22) ni ΔS ga, (23) ni esa ΔV ga quyidagicha ko'paytiramiz:

$$\Delta S \Delta T = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \Delta V \Delta S \quad (24)$$

$$-\Delta P \Delta V = \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} (\Delta V)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \Delta S \Delta V \quad (25)$$

(21), (24) va (25) larni nazarda tutib, (20) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta U = T \Delta S - P \Delta V + \frac{1}{2} (\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V) \quad (26)$$

X ning chekli o'zgarishi $X + \Delta X$ uchun (19) ni

$$\Delta A_{\min} = \Delta U - T \Delta S + P \Delta V$$

ko'rinishda yozib, bu ifodaga (26) dan ΔU ni olib kelib qo'ysak, quyidagi munosabat hosil bo'ladi:

$$\Delta A_{\min} = \frac{1}{2} (\Delta T \Delta S - \Delta P \Delta V) \quad (27)$$

$\Delta A_{\min}$ ning bu ifodasini

$$W(X, \Delta X) = C \exp \left[- \frac{\Delta A_{\min}}{kT} \right]$$

ga quyib, termodinamik parametrlar fluktuatsiyalari uchun quyidagini olamiz:

$$W(X, \Delta X) = C \exp \left[\frac{1}{2kT} (\Delta P \Delta V - \Delta T \Delta S) \right] \quad (28)$$

Bu yerda $\theta = kT$ deb qabul qilindi,

Masalalar.

6.4. $(\Delta V)^2$, $(\Delta T)^2$ va $\overline{\Delta V \Delta T}$ o'rtacha kvadratik fluktuatsiyalar aniqlansin.

Yechish. Erkin o'zgaruvchilar V va T bo'lsin. U holda

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \Delta V \quad (1)$$

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \Delta V \quad (2)$$

Termodinamikadan ma'lumki,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{T}; \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad (3)$$

(1) ni e'tiborga olib, (2) ni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T} \Delta T \quad (4)$$

(1) va (4) larni (4.28) ga quyib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$W(\Delta V, \Delta T) = C \exp \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2kT} - \frac{C_V}{2kT^2} (\Delta T)^2 \right] \quad (5)$$

$\Delta V / \Delta T$ ga mutanosib bo'lgan hadlar (5) ifodada ishtirok etmayotir, demak, hajm V va temperatura T fluktuatsiyalari bir-biriga bog'liq emas, ya'ni $\overline{\Delta V \Delta T} = 0$.

(5) dan ko'rinadiki, hajm va temperatura kvadratik fluktuatsiyalari uchun quyidagilarga egamiz:

$$\overline{(\Delta V)^2} = -kT \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = kT \chi_T V \quad (6)$$

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT^2}{C_V} \quad (7)$$

bunda $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ – izotermik siqiluvchanlik. Termodinamik tengsizliklardan $C_V > 0$ va $\chi_T > 0$ fluktuatsiyalarning $\overline{(\Delta T)^2}$ va $\overline{(\Delta V)^2}$ musbat ekanligi ma'lum.

6.5. $\overline{(\Delta P)^2}$, $\overline{(\Delta S)^2}$ va $\overline{\Delta P \Delta S}$ fluktuatsiyalarni aniqlang.

Yechish. Erkin o'zgaruvchilar P va S bo'lsin.

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \Delta S \quad (1)$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \Delta S \quad (2)$$

Termodinamikadan ma'lumki,

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = C_P; \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \quad (3)$$

(3) ni e'tiborga olib, (1) va (2) ni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta S \quad (4)$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_S \Delta P + \frac{T}{C_P} \Delta S \quad (5)$$

(4) va (5) ni (28) ga quyib,

$$W(\Delta P, \Delta S) = C \exp \left[\frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S (\Delta P)^2 - \frac{1}{2kC_P} (\Delta S)^2 \right] \quad (6)$$

ekanligini aniqlaymiz.

(6) dan bosim va entropiya fluktuatsiyalari bir-biriga bog'liq emasligi, ya'ni $\overline{\Delta S \Delta P} = 0$ ekanligi ko'rinadi. Entropiya va bosim kvadratik fluktuatsiyalari uchun (6) dan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\overline{(\Delta S)^2} = kC_P \quad (7)$$

$$\overline{(\Delta P)^2} = -kT \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \frac{kT}{V\chi_S} \quad (8)$$

bunda $\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$ – adiabatik siqiluvchanlik.

6.6. Ichki energiya kvadratik fluktuatsiyasi $(\overline{\Delta U})^2$ ni aniqlang.
Erkin o'zgaruvchilar qilib, V va T ni oling.
Yechish.

$$\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \Delta V \quad (9)$$

Buni kvadratga ko'paytirib, so'ng o'rtachalaymiz.

$$(\overline{\Delta U})^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V^2 (\overline{\Delta T})^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T^2 (\overline{\Delta V})^2 \quad (10)$$

$(\overline{\Delta T})^2$ va $(\overline{\Delta V})^2$ larning o'rniga ularning qiymatlarini qo'ysak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(\overline{\Delta U})^2 = C_v kT^2 - kT \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T^2 = kT \left[TC_v + V\chi_T \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T^2 \right]$$

4-§. Zarralar soni fluktuatsiyasi

Sistemaning bir qismi hajmining fluktuatsiyasi uchun (6.4 - masalaga qarang).

$$(\overline{\Delta V})^2 = -kT \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (29)$$

tenglik o'rinlidir. Agar sistema qismi N ta zarralardan iborat bo'lsa, (29) ni N ga bo'lsak, solishtirma hajm fluktuatsiyasi uchun quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\left(\frac{\overline{\Delta V}}{N} \right)^2 = - \frac{kT}{N^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (30)$$

Bu fluktuatsiya sistema hajmi yoki zarralar soni o'zgarmas deb qaralayotganiga bog'liq emas. Shuning uchun, (30) asosida ma'lum hajmdagi zarralar soni fluktuatsiyasini aniqlashimiz mumkin.

Hqiqatan ham,

$$\Delta \left(\frac{V}{N} \right) = V \Delta \left(\frac{1}{N} \right) = - \frac{V}{N^2} \Delta N \quad (31)$$

Buni kvadratga ko'tarib, so'ng o'rtachalab quyidagini topamiz:

$$\frac{V^2}{N^4} (\overline{\Delta N})^2 = \left(\Delta \frac{V}{N} \right)^2$$

yoki (30) ni e'tiborga olib, quyidagi zarralar fluktuatsiyasi ifodasini yozamiz:

$$(\overline{\Delta N})^2 = -\frac{kTN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (32)$$

Kritik holatda $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ siqiluvchanlik cheksizlikka intiladi. Shuning uchun (31) dan ko'rinadiki, zarralar soni fluktuatsiyasi cheksizlikka intiladi. Shu sababli, kritik holatdagi jarayonlar maxsus qaralishi lozim.

Masalalar.

6.7. Zarralar soni fluktuatsiyasi quyidagi

$$(\overline{\Delta N})^2 = kT \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (1)$$

ko'rinishga ega bo'lishini isbot qiling.

Yechish. Hosila $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ ni o'zgarmas N da yozamiz, ya'ni

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial}{\partial P} NV \right)_{T,N} = -\frac{V^2}{N} \left(\frac{\partial}{\partial P} \cdot \frac{N}{V} \right)_{T,N}$$

Bu yerda o'zgaruvchan parametr deb, V ni emas, N ni olish mumkin ((36) formula munosabati bilan aytilgan izohni qarang). U holda

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} = -\frac{V}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right)_{T,V} \quad (2)$$

termodinamik potensial

$$d\Phi = d(N\mu) = -SdT + VdP + \mu dN$$

yoki

$$Nd\mu = -SdT + VdP$$

dan quyidagini olamiz

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{T,V} \quad (3)$$

(3) ni e'tiborga olib, (2) ni quyidagicha o'zgartirib yozamiz:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = -\frac{V^2}{N^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} \left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,V} = -\frac{V^2}{N^2} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} \quad (4)$$

Endi (4) ni (32) ga qo'yib, zarralar soni fluktuatsiyasi (1) ni hosil qilamiz.

6.8. Klassik ideal zarralar uchun $(\Delta N)^2$ ni aniqlang.

Yechish. Bizga ma'lumki,

$$(\overline{\Delta N})^2 = -\frac{kTN^2}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} \quad (1)$$

Ideal gaz tenglamasi $PV=nkT$ va umumiy matematik munosabat $P/\mu = 1$ ga asosan (1) dan klassik zarralar fluktuatsiyasi uchun

$$(\overline{\Delta N})^2 = \frac{N}{\mu} \quad (2)$$

ifodaga ega bo'lamiz; bunda μ – korrelyatsion parametr. Ideal gaz uchun $\mu=1$ ekanligidan izlanayotgan fluktuatsiya ifodasi

$$(\overline{\Delta N})^2 = N \quad (3)$$

kelib chiqadi.

5-§. Kvant ideal zarralar soni fluktuatsiyasi

Ideal kvant zarralar sistemasining muvozanat holati uchun Fermi-Dirak taqsimot funksiyasi

$$\bar{n}_i \equiv f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_i - \mu)}{kT}} + 1} \quad (32)$$

Boze - Eynshteyn taqsimot funksiyasi

$$\bar{n}_i \equiv f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_i - \mu)}{kT}} - 1} \quad (33)$$

shunda $\bar{n}_i - \epsilon_i$ energiyali i kvant holatdagi zarralarning o'rtacha soni.

Sistemadagi kvant zarralar soni n_i ning fluktuatsiyasini quyidagi

$$(\overline{\Delta n_i})^2 = kT \left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu}\right)_{T,N} \quad (34)$$

formula (6.7-masala (1) formulaga qarang) asosida aniqlaymiz.

(32) va (33) lardan $\left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu_i}\right)_T$ ni topib, so'ng (34) ga qo'yib, Fermi-gaz uchun

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1 - \bar{n}_i) \quad (35)$$

Boze-gaz uchun

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1 + \bar{n}_i) \quad (36)$$

ifodalarni olamiz.

Klassik ideal gaz uchun Bolsman taqsimotidan foydalansak, (34) formula asosida

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i \quad (37)$$

ekanligini topamiz (6.8 masalaning (3) formulasiga qarang). Klassik ideal gaz uchun olingan (37) natija (35) va (36) formuladan $n_i \ll 1$ bo'lgan chegaraviy holda kelib chiqadi.

Masala. 6.9. Eritmadagi konsentratsiya fluktuatsiyasini aniqlang. Ko'rsatma: (34) formuladan foydalaning.

Yechish. (34) formulani yozamiz:

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = kT \left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu_i} \right)_T \quad (1)$$

bunda n_i va μ_i eritmadagi i - xildagi modda zarralarining soni va kimyoviy potentsiali.

(1) ni zarralarning umumiy con N^2 ga bo'lib, konsentratsiya $C_i = \frac{n_i}{N}$ ning fluktuatsiyasi uchun quyidagi formulani olamiz:

$$\overline{(\Delta C_i)^2} = \frac{kT}{N} \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mu_i} \right)_T = \frac{kT}{N^2} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \bar{n}_i} \right)_T \quad (2)$$

6-§. Fluktuatsiyalar munosabatlari

Faraz qilaylik, sistema (yoki uning qismi) undagi fluktuatsiya jarayonlari tufayli o'zining muvozanatli holatidan nomuvozanatli holatiga o'tgan bo'lsin. Sistema holatining bu o'zgarishini "fluktuatsiyalovchi kuch" F (umumiy holda tashqi kuch) ta'sirida sodir bo'layapti deb tasavvur etish mumkin. Bu kuch F ta'siri tufayli unga mos umumlashgan koordinata o'zgarishining

o'rtacha qiymatidan chetlanishini x bilan belgilaylik. Bu holda bajarilgan ish Fx ga teng bo'ladi. Nomuvozanatli holatdagi sistemaning gamiltoniani, ayonki $H = H_0 - Fx$ bo'ladi; bunda H_0 muvozanatli holatdagi sistemaning gamiltoniani. Lokal muvozanat haqidagi farazga asoslanib, kanonik taqsimot funksiyasini

$$f(H) = \frac{1}{Z} \exp[-\beta(H_0 - Fx)] \quad (38)$$

ko'rinishda yozamiz.

Bu yerda maxsus shuni ta'kidlaymizki, ideal sistema qarayotganda (klassik yoki kvant hol bo'lishidan qat'i nazar) dinamik parametr x bitta zarraga tegishli bo'lishi mumkin.

Sistemadagi x ning o'rtacha qiymati umumiy usul bilan quyidagicha topiladi:

$$\bar{x} = \frac{\int x(p, q) \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq}{\int \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq} \quad (39)$$

bunda p va q -zarralarning umumlashgan impulsleri va koordinatalari, $\beta = \frac{v}{U}$.

(39) dan quyidagi hosilani olamiz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial F} \right)_0 &= \frac{\beta \int x^2 \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq}{\int \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq} - \beta \left\{ \frac{\int x \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq}{\int \exp[-\beta(H_0 - Fx)] dp dq} \right\}^2 = \\ &= \beta(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = \beta(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Shunday qilib, x parametrning fluktuatsiyasi uchun

$$(\Delta x)^2 = \theta \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial F} \right)_0, \theta = \frac{1}{\beta} \quad (40)$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Xuddi shuningdek, fluktuatsiyalovchi kuchlarning fluktuatsiyasi $(\Delta F)^2$ uchun

$$(\Delta F)^2 = \theta \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_0 \quad (41)$$

ifodani olamiz. (40) va (41) qo'shaloq parametrlarning (jumladan statistik kattaliklarning) fluktuatsiyalarini aniqlash metodlaridir.

(40) va (41) larni bir-biriga ko'paytirib va $\left(\frac{\partial x}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x} \right)_0 = 1$ deb hisoblab

$$\left[\overline{(\Delta F)^2 (\Delta x)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \theta \quad (42)$$

munosabatni olamiz. (42) ni birinchi fluktuatsiya munosabati deb ataymiz.

Fluktuatsiya uchun $F = \omega P$ ekanligini nazarda tutib (buni keyin asoslaymiz), (42) ni

$$\left[\overline{(\Delta x)^2 (\Delta P)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{\omega} \quad (43)$$

ko'rinishda yozamiz. (43) ni ikkinchi fluktuatsiya munosabati deb ataymiz.

7-§. Parametrlarning korrelatsiyasi

Fluktuatsiyalar simmetrik bo'lgani uchun, ya'ni ularning haqiqiy qiymatlari o'rtacha qiymatdan ikki tomonga bir xil chetlanganliklari uchun fluktuatsiyalarning o'rtachasi $\overline{\Delta x}$ har doim nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\overline{\Delta x} = \overline{(x - \bar{x})} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Sistema parametrlari x va y ning fluktuatsiyalari ko'paytmasining o'rtachasi $\overline{\Delta x \Delta y}$ ni ko'raylik.

$$\overline{\Delta x \Delta y} = \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad (44)$$

x parametrning qiymatlari y parametrning qiymatlariga bog'liq bo'lmasa, ya'ni ularning qiymatlari ehtimollari bir-biriga bog'liq bo'lmasa, x va y ni alohida-alohida o'rtachalash mumkin. Bu holda $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ va demak $\overline{\Delta x \Delta y} = 0$ bo'ladi. Agar x va y parametrlar qiymatlarining bir-biriga ta'siri bo'lsa, ya'ni ularning ehtimollari bir-biriga bog'liq bo'lsa, tabiiyki, x va y larni alohida-alohida o'rtachalab bo'lmaydi va demak $\overline{xy} \neq \bar{x}\bar{y}$ bo'ladi. Bu holda $\overline{\Delta x \Delta y} \neq 0$ bo'ladi va parametrlar x va y orasida korrelatsiya mavjud bo'ladi, Korrelatsiyaning o'lchovi sifatida

$$\overline{\Delta x \Delta y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad (45)$$

ifoda qabul qilinadi. Agar $x=y$ bo'lsa, (45) fluktuatsiyani ifodalaydi.

Umumlashgan F_1 va F_2 kuchlarga mos, sistemani xarakterlovchi parametrlar x_1 va x_2 bo'lsin. Temperatura T bo'lgan termostat bilan sistema kontaktida turibdi deb x_1 va x_2 parametrlarning korrelatsiyasi $\Delta x_1, \Delta x_2$ ni aniqlaylik.

Sistemaga F_1 va F_2 kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsa, uning gamiltoniani H

$$H = H_0 - F_1 x_1 - F_2 x_2$$

ko'rinishga ega buladi.

Bunda x_1 va x_2 umumlashgan koordinatalar q va umumlashgan impuls p ning funksiyalaridir.

Bir o'zgaruvchi parametr bo'lganda (Δx^2) ni aniqlaganimiz kabi, kanonik taqsimot

$$f(H) = Z^{-1} \exp[H_0 - F_1 x_1 - F_2 x_2]$$

asosida quyidagilarni ham osonlikcha aniqlashimiz mumkin:

$$\overline{\Delta x_1 \Delta x_2} = \theta \left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial F_2} \right)_0, \quad (46)$$

$$\overline{\Delta x_1 \Delta x_2} = \theta \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial F_1} \right)_0, \quad (47)$$

(46) va (47) ning chap tomonlari tengligidan

$$\left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial F_2} \right)_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial F_1} \right)_0 \quad (48)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu (48) munosabat x_1 ning o'zgarishi x_2 ga ta'siri qanday bo'lsa, x_1 ning o'zgarishi x_2 ga shundayligini ko'rsatadi (Onzager prinsipi: F_1 ning x_2 ga ta'siri F_2 ning x_1 gata'siriga teng).

Masalalar.

6.10. (40) asosida sistema hajmi V ning o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasini aniqlang.

Yechish. Hajmga mos umumlashgan kuch — manfiy ishorali bosimdir. Binobarin, aniqlanishi lozim bo'lgan fluktuatsiya uchun (40) asosida x ni V bilan va F ni $(-P)$ bilan almashtirib,

$$(\Delta V)^2 = -\theta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \theta V \chi_T \quad (1)$$

ifodaga ega bo'lamiz; bunda $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ — izotermik siqiluvchanlik.

6.11. O'zgarmas hajmli sistema T temperaturali termostat bilan kontaktda bo'lsin va zarralar manbai bilan zarralar almashib turishi mumkin bo'lsin. Bu hodda sistema holati katta kanonik taqsimot

$$f_r = \frac{\exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]} \quad (1)$$

bilan ifodalanadi. Bunda μ — zarraning kimyoviy potentsiali, n_r va E_r esa r holatdagi zarralar soni va energiyasidir.

Ma'lumki, makroskopik sistema uchun o'rta qiymatlar $\bar{n}$ va $\bar{E}$ ni odatda termodinamik muvozanatdagi qiymatlar bilan almashtiriladi, mikroskopik sistemalarga doir masala qaralganda esa n va E parametrlar n va E bilan almashtiriladi. Shularni nazarda tutib, zarralar soni va energiya fluktuatsiyalari $(\Delta n)^2$ va $(\Delta E)^2$ ni hamda $\overline{\Delta E \Delta n}$ korrelatsiyalarni aniqlang.

a) $(\Delta n)^2$ ni aniqlang.

Yechish. (39) bilan bu masaladagi (1) ni solishtirsak, ko'ramizki, zarralar soniga mos umumlashgan kuch — bu kimyoviy potensialdir. Shuning uchun, (40) ga asosan, zarralar soni fluktuatsiyasini yozamiz:

$$\overline{(\Delta n)^2} = \theta \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_\theta \quad (2)$$

b) $\overline{\Delta E \Delta n}$ ni aniqlang.

Yechish. E uchun yozilgan

$$\bar{E} = \frac{\sum_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]} \quad (3)$$

ifodadan μ bo'yicha hosila olamiz (hosiladagi E ni E bilan almashtiramiz):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_\theta &= \beta \frac{\sum_r n_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]} - \\ &- \beta \frac{\sum_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)] \sum_s n_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]}{\left\{ \sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)] \right\}^2} = \beta(\overline{E n} - \bar{E} \bar{n}) = \\ &= \beta \overline{(E - \bar{E})(n - \bar{n})} = \beta \overline{\Delta E \Delta n} \end{aligned}$$

Bundan:

$$\overline{\Delta E \Delta n} = \theta \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_\theta \quad (4)$$

Izoh. Agar (4) ifodada E ni n bilan almashtirilsa, bizga ma'lum zarralar soni $(\Delta n)^2$ fluktuatsiyasi olinadi.

c) $(\Delta E)^2$ ni aniqlang.

Yechish. Bu masalani yechish uchun (3) ifodani β bo'yicha differensiallaymiz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial \beta} \right)_\mu &= - \frac{\sum_r E_r (E_r - \mu n_r) \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]} + \\ &+ \frac{\sum_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)] \sum_s (E_s - \mu n_s) \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]}{\left\{ \sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)] \right\}^2} = \quad (5) \\ &= -\overline{E(E - \mu n)} + \overline{E}(\overline{E - \mu n}) = -\left[(\overline{E^2} - \overline{E}^2) - (\overline{En} - \overline{E}\overline{n}) \right] = \\ &= -\left[(\overline{\Delta E})^2 - \mu \overline{\Delta E \Delta n} \right] \end{aligned}$$

(4) va (5) ifodadan quyidagini olamiz:

$$(\overline{\Delta E})^2 = \theta \left[\theta \left(\frac{\partial E}{\partial \theta} \right)_\mu + \mu \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_\theta \right], \quad \theta = \frac{1}{\beta} \quad (6)$$

Izoh. Berk sistema uchun $(\overline{\Delta E})^2 = \theta^2 \frac{\partial \overline{E}}{\partial \theta}$. "Ossilyatorlar to'plami"

modeliga asosan $\overline{E} = \theta$. Demak, $(\overline{\Delta E})^2 = \theta^2$. Klassik holda $\theta = kT$ bu holda taqsimot funksiya kanonik taqsimotdan iborat bo'ladi. Kvant holda $\theta = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$ va bu holda taqsimot funksiya $f(E) = |\psi|^2$, bunda ψ — ossilyatorning to'lqin funksiyasidir.

8-§. Ideal gaz zarralari taqsimoti

Faraz qilaylik, berilgan ixtiyoriy V hajmda ixtiyoriy N sondagi zarralar bo'lsin. Shu zarralar soni ehtimollari taqsimotini topaylik. Ideal gazning umumiy hajmi V_0 zarralarining umumiy soni N_0 bo'lsin.

Agar bir jinsli gaz muvozanat holatda bo'lsa, biror ixtiyoriy zarraning

V hajmda bo'lish ehtimoli $\left(\frac{V}{V_0} \right)$ ga teng bo'ladi. Bir vaqtda N ta zarraning

V da bo'lish ehtimoli esa $\left(\frac{V}{V_0} \right)^N$ ga teng. Xuddi shuningdek, biror ixtiyoriy

zarraning V hajmda bo'lmaslik ehtimoli $\frac{V_0 - V}{V_0}$ ga teng, $N_0 - N$ zarralarning

V hajmda bo'lmalik ehtimoli esa $\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun V hajmda ixtiyoriy N ta zarralarning bo'lish ehtimoli $W(N)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$W(N) \sim \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^{N_0 - N} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$$

Sistema bir jinsli bo'lganda $\frac{V}{V_0} = \frac{\bar{N}}{N_0}$ bo'ladi, chunki $\bar{n}V = \bar{N}$, $\bar{n}V_0 = N_0$.

Bularni e'tiborga olib, quyidagini yozamiz:

$$W(N) \sim \left(\frac{\bar{N}}{N_0}\right)^N \left(1 - \frac{\bar{N}}{N_0}\right)^{N_0 - N}$$

N_0 , V_0 va V lar uchun $N_0 \rightarrow \infty$, $V_0 \rightarrow \infty$ va $V < \infty$ qabul qilib, $W(N)$ uchun quyidagini olamiz:

$$W(N) = \text{const} \bar{N}^N e^{-\bar{N}} \quad (49)$$

Normallash sharti

$$\sum_{N=0}^{\infty} W(N) = 1$$

dan

$$\text{const} = \frac{1}{N!}$$

ni topamiz. Shunday qilib,

$$W(N) = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \quad (50)$$

Bu $W(N)$ ideal zarralar taqsimoti uchun olingan **Puasson taqsimotidir**. Ma'lum N uchun, lekin uzluksiz o'zgaruvchi parametr $\bar{N}$ uchun ehtimollar taqsimoti (50) ni yozish mumkin:

$$dW(N) = w(N)dN = C_N N^N e^{-N} dN$$

yoki

$$dW(x) = w(x)dx = C_N x^N e^{-x} dx \quad (51)$$

Normalash shartidan

$$C_N \int_0^{\infty} x^N e^{-x} dx = C_N \Gamma(N+1) = 1$$

C_N ni topamiz,

$$C_N = \frac{1}{\Gamma(N+1)}, \quad (52)$$

bunda $\Gamma(N+1)$ gamma-funksiya. N butun son bo'lganda $\Gamma(N+1) = N!$ bo'ladi; demak,

$$dW(\bar{N}) = \frac{1}{\Gamma(N+1)} \bar{N}^N e^{-\bar{N}} d\bar{N},$$

bunda $w(\bar{N}) = \frac{1}{\Gamma(N+1)} \bar{N}^N e^{-\bar{N}}$ — gamma-taqsimotdir.

Masalalar.

6.12. $\overline{N^2}$ ni aniqlang.

Yechish.

$$\overline{N^2} = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 W(N) = e^{-N} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{N^N}{(N-2)!} + e^{-N} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^N}{(N-1)!} = N^2 + N \quad (1)$$

Shunday qilib, ideal gaz zarralari soni kvadratik fluktuatsiyasi uchun quyidagini olamiz:

$$(\overline{\Delta N})^2 = \overline{N} \quad (2)$$

6.13. Muvozanatli berk sistema energiyasi qiymatlari taqsimotini aniqlang va

$$f_{\beta\nu}(E) dE = \frac{\beta^\nu}{\Gamma(\nu)} E^{\nu-1} e^{-\beta\nu} dE \quad (1)$$

ekaniqligini isbot qiling. Bunda ν — erkinlik darajalari soni, $\Gamma(\nu)$ — gamma-funksiya, $\beta^{-1} = \theta$ erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan o'rtacha energiya.

Yechish. n va ν erkinlik darajalariga ega bo'lgan sistemalarning energiyalari E_n , E_ν qiymatlari tekis taqsimlangan va $n > \nu$, $\nu < \infty$ bo'lsin.

Ma'lum bir erkinlik darajasiga mos keluvchi energiya qiymatining $(0, E)$ intervalda bo'lish ehtimoli, ehtimollar taqsimotining teng taqsimlanish haqidagi farazimizga asosan, interval uzunligi E ga proporsional bo'ladi, ma'lum ν ta erkinlik darajalariga mos keluvchi energiya qiymatining intervalda $(0, E)$ bo'lish ehtimoli $P(E_\nu)$ esa ehtimollar ko'paytmasi E^ν ga proporsional, ya'ni

$$P(E_\nu) \sim E_\nu^\nu \quad (2)$$

Agar E uzluksiz o'zgarsa, ma'lum erkinlik darajalariga mos energiya qiymatlarining E_ν , $E_\nu + dE_\nu$ intervalda bo'lish ehtimoli $dP(E_\nu)$ uchun (2) ifodaga asosan, quyidagini yozamiz:

$$dP(E) \sim E^{\nu-1} dE$$

(bunda va bundan keyin indeks ν ni tushirib qoldiramiz).

Xuddi yuqoridagidek, ma'lum erkinlik darajasiga mos kelgan energiya qiymatining $(0, E)$ da bo'lmashlik ehtimoli $(E_n - E)$ ga proporsional, ma'lum $n - \nu$ ta erkinlik darajalariga mos kelgan energiya qiymati $(0, E)$ ga bo'lmashlik ehtimoli esa $(E_n - E)^{n-\nu}$ ga proporsionaldir.

Ixtiyoriy ν ta erkinlik darajali sistema energiyasining E , $E + dE$ intervalda bo'lish ehtimolligi $dW(E)$ yuqoridagi ehtimollar ko'paytmasidan iborat, ya'ni

$$dW(E) \sim (E)^{\nu-1} (E_n - E)^{n-\nu} dE \quad (3)$$

Endi hisoblaymiz:

$$n \rightarrow \infty, \quad \lim \left(\frac{E_n}{n} \right) = \theta \quad (4)$$

Bu farazimiz, ma'lum ma'noda Gibbs ansambliga ekvivalent, θ esa bir erkinlik darajasiga to'g'ri kelgan o'rtacha energiya, ya'ni ν erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistemaning ichki energiyasi $U = \nu\theta$ bo'ladi. (4) ni nazarda tutib, (3) ifodani o'zgartirib yozamiz:

$$dW(E) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} E_n^{n-\nu} E^{\nu-1} \left(1 - \frac{E}{E_n} \right)^\nu \left(1 - \frac{E}{E_n} \right)^{-\nu} dE = n^{n-\nu} \theta^{n-\nu} E^{\nu-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE$$

yoki

$$dW(E) = C n^{n-\nu} \theta^{n-\nu} E^{\nu-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE, \quad (5)$$

bunda

$$\left(1 - \frac{E}{E_n}\right)^n = \left(1 - \frac{E/\theta}{n}\right)^n = -e^{-\frac{E}{\theta}}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\left(1 - \frac{E/\theta}{n}\right)^{-n} \rightarrow 1, \quad v < \infty$$

ekani hisobga olindi.

Normalash shartidan C ni topamiz:

$$\int_0^\infty dW(E) = C n^{-v} \theta^{-v} \int_0^\infty E^{v-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE = 1$$

Bunda

$$\int_0^\infty E^{v-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE = \theta^v \int_0^\infty x^{v-1} e^{-x} dx = \theta^v \Gamma(v)$$

ni bilgan holda C ni aniqlaymiz:

$$C = 1/n^{-v} \theta^v \Gamma(v)$$

Shunday qilib, (5) ehtimollik uchun:

$$dW(E) = f_{\beta v}(E) dE = \frac{1}{\theta^v \Gamma(v)} E^{v-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE \quad (6)$$

Bundan isbot qilinishi lozim bo'lgan ehtimollik zichligi (1) ni, $\theta = \frac{1}{\beta}$ ekanligini nazarda tutib, olamiz.

6.14. Avvalgi 6.13-masalaning (6) ifodasidan quyidaga Puasson taqsimotini oling:

$$W(v) = \frac{\bar{v}^v e^{-\bar{v}}}{\Gamma(v+1)} \quad (1)$$

Yechish. Bu masalada energiya θ ma'lum, lekin erkinlik darajalari soni v o'zgaradi:

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

Ibu holda erkinlik darajalari sonining bir birlikka o'zgarishi, energiya E ning θ ga o'zgarishiga olib keladi, ya'ni

$$\Delta E = \theta; \beta \Delta E = 1 \quad (2)$$

(2) ni e'tiborga olib, gamma-taqsimot ifodasini

$$dW(E) = \frac{1}{\theta^{v+1} \Gamma(v+1)} E^v e^{-\frac{E}{\theta}} dE$$

quyidagicha yozamiz:

$$W_{\beta E}(\nu) = \frac{(\beta E)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\beta E} (\beta dE) = \frac{(\beta E)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\beta E} \quad (3)$$

$\bar{\nu}$ ni aniqlaymiz:

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu W_{\beta E}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \beta E (\beta E)^\nu}{\nu!} e^{-\beta E} = \beta E \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\beta E)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\beta E} = \beta E$$

Demak, $\bar{\nu} = \beta E$. Bu yerda

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W(\nu) = 1$$

ekani nazarda tutildi. Shunday qilib, (3) ifoda Puasson taqsimoti (1) bilan bir xil.

6.15. Quyidagi ehtimollik ifodasi

$$dW(E) = \frac{1}{\theta^\nu \Gamma(\nu)} E^{\nu-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE \quad (1)$$

dan (6.13-masaladagi (6) formulaga qarang) berk sistema (ya'ni berilgan ma'lum son) uchun taqsimot funksiyasini aniqlang.

Yechish. ν o'lchovli fazodagi radiuslari E va $E+dE$ bo'lgan gipersferalar orasidagi elementar hajm $d\Gamma_E$ ma'lumki, $E^{\nu-1}dE$ ga proporsional, ya'ni

$$d\Gamma_E \sim E^{\nu-1} dE$$

Gipersharning hajmi Γ_E esa

$$\Gamma_E = A E^\nu \quad (2)$$

bo'ladi yoki bundan

$$d\Gamma_E = \nu A E^{\nu-1} dE, \quad (3)$$

bunda A — har bir konkret hol uchun alohida aniqlanadi.

Umuman, $d\Gamma_E$ bo'yicha integrallash o'rniga elementar giperkublar (katakhalar, "holatlar") hajmlari $d\Gamma = d\Gamma(p, q)$, bo'yicha hisoblash mumkin. Bu holda

$$d\Gamma_E = g d\Gamma(p, q), \quad (4)$$

bunda $d\Gamma$ giperkub hajmi, E energiyali holatlar soni g ga teng deb olindi. (3) va (4) larni nazarga olib, (1) ifodani qayta yozamiz:

$$dW(E) = \frac{g e^{-\frac{E}{\theta}}}{\theta^{\nu} \Gamma(\nu+1)} d\Gamma = \frac{g h^{\nu}}{\theta^{\nu} \Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{E}{\theta}} dn$$

yoki

$$dW(E) = f(E) dn, \quad (5)$$

hunda

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\frac{E}{\theta}}, \quad (6)$$

$$Z^{-1} = \frac{g h^{\nu}}{\theta^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \quad (7)$$

$dn = \frac{d\Gamma}{h^{\nu}}$ o'lchamsiz son, h – Plank doimiysi.

(6) ifoda aniqlanishi zarur bo'lgan taqsimot funksiyasidir; Z – shu sistemaning statistik integrali (yig'indisi).

Izoh: Puasson taqsimoti, gamma-funksiya hamda berk sistema uchun taqsimot funksiyasi

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\frac{E}{\theta}} \quad (8)$$

omida shunday bog'lanish borki, ular ma'lum shartlar bajarilganda bir-birlariga o'tishlari mumkin.

9-§. Chiziqli garmonik ossillyator koordinatasi va impulsi qiymatlari fluktuatsiyalarining taqsimoti

Sistema holatini xarakterlovchi har qanday fizik kattalikning fluktuatsiyalari taqsimoti shu sistema holatlari taqsimoti funksiyasi orqali aniqlanadi, ya'ni holatlar taqsimoti funksiyasi (ehtimollar zichligi) fluktuatsiya nazariyasi uchun asos bo'ladi.

Berk sistema ($\nu = \text{const}$) uchun

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\beta E} \quad \theta \equiv \beta^{-1} = \frac{U}{\nu} \quad (53)$$

Ossillyator uchun

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}, \quad k_1 = m\omega^2 \quad (54)$$

$$\langle E \rangle = U = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (55)$$

ifodalar ma'lum.

Ossilyatorlar ansambli uchun (53) ni qo'llaymiz. (54) va (55) larni (53) ga qo'yamiz:

$$f(E) = f(x, p_x) = C_1 \exp \left[-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2} \right] C_2 \exp \left[-\frac{p_x^2}{2(\Delta p_x)^2} \right]$$

yoki bundan

$$f(E) = C_1 \exp \left[-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2} \right] \quad (56)$$

$$f(p_x) = C_2 \exp \left[-\frac{p_x^2}{2(\Delta p_x)^2} \right] \quad (57)$$

bunda

$$(\overline{\Delta x})^2 \equiv (\overline{\Delta x(\omega)})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} = \frac{\langle E \rangle}{m\omega^2} \quad (58)$$

$$(\overline{\Delta p_x})^2 \equiv (\overline{\Delta p_x(\omega)})^2 = \frac{m\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} = m\langle E \rangle \quad (59)$$

C_1 va C_2 larni normalash shartlari uchun yozilgan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(p_x) p_x = 1$$

ifodalardan aniqlaymiz:

$$C_1^{-1} = \left[\frac{\pi\hbar}{m\omega} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\pi\langle E \rangle}{m\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$C_2^{-1} = \left[\pi m\hbar\omega \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \right]^{\frac{1}{2}} = [2\pi m\langle E \rangle]^{\frac{1}{2}} \quad (60)$$

(56) va (57) ifodalar x va p_x fluktuatsiyalari taqsimoti funksiyalaridir. Bu taqsimot funksiyalar Gauss taqsimotidir. Bu yerda eslatamiz: x^2 bu $\bar{x} = 0$ dagi $(x - \bar{x})^2$, ya'ni

$$x^2 = (x - \bar{x})^2, \bar{x} = 0$$

Endi (56) va (57) funksiyalarning xususiy (chegaraviy) hollarini ko'raylik.

1. *Klassik hol:* $\beta \hbar \omega \ll 1, \beta = \frac{1}{kT}$

Bu holda

$$cth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \approx \frac{2kT}{\hbar \omega}, \langle E \rangle \approx kT \quad (61)$$

2. *Kvant hol:* $\beta \hbar \omega \gg 1$

Bu holda

$$cth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \approx 1, \langle E \rangle \approx \frac{\hbar \omega}{2} \quad (62)$$

(57) va (59) larga asosan ideal zarralar impulsi qiymatlari taqsimoti uchun

$$f(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m \langle E \rangle}} \exp \left[-\frac{p_i^2}{2m \langle E \rangle} \right] \quad (63)$$

bundan klassik hol uchun Maksvell taqsimotini olamiz:

$$f_u(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m kT}} \exp \left[-\frac{p_i^2}{2m kT} \right] \quad (64)$$

Kvant hol uchun (62) ni hisobga olib, (63) dan

$$f_{k9}(p_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi m \hbar \omega}} \exp \left[-\frac{p_i^2}{m \hbar \omega} \right] \quad (65)$$

ni topamiz. Bilamizki, $f_{k9}(p_i) = |\psi(p_i)|^2$ bunda $\psi(p_i)$ – ossillyator asosiy holatining to'liq funksiyasidir.

Koordinata qiymatlari taqsimot funksiyasi (56) klassik holda

$$f_{k1}(x) = \left(\frac{m\omega^2}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{m\omega^2 x^2}{2kT} \right] \quad (66)$$

Boltzman taqsimoti funksiyasidan iborat bo'ladi, kvant holda esa,

$$f_{k9}(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{m\omega^2 x^2}{\hbar} \right] \quad (67)$$

bo'ladi. Bilamizki, $f_{k9}(x) = |\psi(x)|^2$ bunda $\psi(x)$ – ossillyator asosiy holatining to'liq funksiyasidir.

Masala. 6.16. Normal koordinata va normal impuls qiymatlari taqsimot funksiyalari aniqlansin.

Yechish. Ossilyator energiyasini quyidagicha yozamiz:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} = \frac{1}{2} (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2)$$

Bunda normal koordinata q_α va normal impuls p_α quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$q_\alpha = m^{\frac{1}{2}} x, p_\alpha = \frac{p_x}{m^{\frac{1}{2}}}$$

quyidagi $f(q_\alpha) dq_\alpha = f(x) dx$, $f(p_\alpha) dp_\alpha = f(p_x) dp_x$ tengliklardan izlanayotgan taqsimot funksiyalari (ehtimollik zichliklari) quyidagicha aniqlanadi:

$$f(q_\alpha) = m^{\frac{1}{2}} f(x), f(p_\alpha) = m^{\frac{1}{2}} f(p_x)$$

10-§. Elektromagnit maydon fluktuatsiyasining spektral zichligi va Plank formulasi

Ma'lumki, elektromagnit maydon energiyasi zichligi

$$\xi(\omega) = \frac{1}{4\pi} E^2(\omega) \quad (68)$$

bo'ladi.

Taqsimot funksiyasi

$$f(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\xi^2(\omega)}{\langle \epsilon \rangle}} \quad (69)$$

ni muvozanatli nurlanish uchun tatbiq etamiz.

(68) ni (69) ga qo'yib,

$$f(\xi) = \frac{1}{Z} \exp \left[-\frac{E^2(\omega)}{2 \cdot 2\pi \langle \epsilon \rangle} \right] \quad (70)$$

ni topamiz.

Bundan elektromagnit maydon fluktuatsiyasining spektral zichligini topamiz:

$$\langle E^2(\omega) \rangle = 2\pi \langle \xi(\omega) \rangle \quad (71)$$

Bir ossilyator uchun, fluktuatsion-dissipatsion teorema (FDT) ga (13-§ ga qarang) asosan, fluktuatsiya spektral zichligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle \cdot \alpha''(\omega), \quad (72)$$

bunda $\langle \varepsilon(\omega) \rangle$ ossillyator energiyasining o'rtacha qiymati

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\beta\hbar\omega}{2}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (73)$$

$\alpha''(\omega)$ qabul qiluvchanlik koeffitsiyentining mavhum qismi.

Birlik chastota intervalidagi holatlar (ossillyator) soni $g(\omega)$ quyidagicha bo'ladi:

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 C^3} \quad (74)$$

Demak, fluktuatsiya $\langle E^2(\omega) \rangle$ uchun (72) va (74) larga asosan,

$$\langle E^2(\omega) \rangle = \alpha''(\omega) g(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle \quad (75)$$

yoki

$$\langle E^2(\omega) \rangle = \alpha''(\omega) \rho(\omega) \quad (76)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bunda $\rho(\omega) = g(\omega) \langle \varepsilon \rangle$ – nurlanish energiyasi spektral zichligining ifodasi.

Vakuum uchun sindirish ko'rsatkichi $n=1$ va $\alpha'' = 1$. Bu holda (71) va (76) dan

$$\langle E^2(\omega) \rangle = \rho(\omega) = 2\pi \langle \xi(\omega) \rangle \quad (77)$$

tenglamalar o'rinli; bunda nurlanish energiyasi zichligi $\rho(\omega)$ elektromagnit maydon fluktuatsiyasi spektral zichligiga teng. Bu esa $\rho(\omega)$ ning yoki Plank formulasining yangi (boshqacha) interpretatsiyasidir.

Elektromagnit maydon energiyasi zichligining o'rtacha qiymati $\left\langle \frac{E^2(\omega)}{4\pi} \right\rangle$ nurlanish energiyasi zichligi $\rho(\omega)$ ning 2π ga bo'linganiga teng.

11-§. Fluktuatsiya va noaniqlik munosabati

Ossillyator koordinatasi va impulsi qiymatlarining fluktuatsiyalari bizga ma'lum:

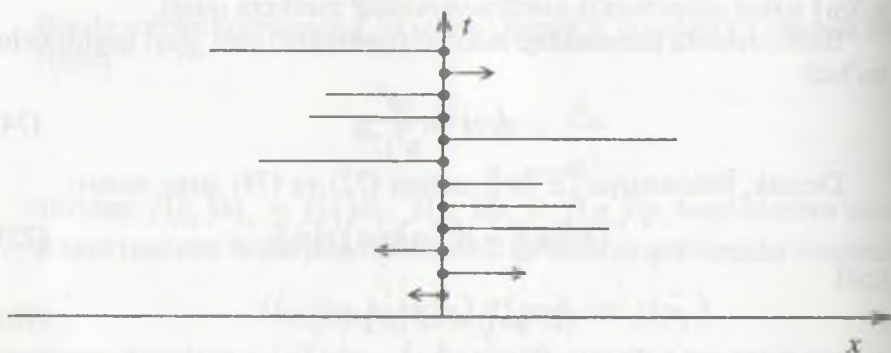
$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth \frac{\beta\hbar\omega}{2} \quad (78)$$

$$\overline{(\Delta p_x)^2} = \frac{m\hbar\omega}{2} \coth \frac{\beta\hbar\omega}{2} \quad (79)$$

Bu ikki $\overline{(\Delta x)^2}$ va $\overline{(\Delta p_x)^2}$ ifodadan fluktuatsiyalar ko'paytmasi uchun quyidagi qiymatni olamiz:

$$\left[\overline{(\Delta x)^2 (\Delta p_x)^2} \right] = \frac{\hbar}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT} \quad (80)$$

(80) ifodaning fluktuatsiyalar uchun universal xarakterga ega ekanligini ko'rsataylik.



6.2-rasm.

Fluktuatsiyalar o'rtacha qiymatga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun (6.2-rasm) bu fluktuatsiyalarni mos ravishda bir-biriga "ulasak" ("tiksak"), bu "ulangan" ossillyatorlar to'plamini hosil qiladi; "yarim ossillyatorlar" ning statistik ansambli — fluktuatsiyalar to'plamidan iborat. Shunday qilib, fluktuatsiyalarni qarash ossillyatorlar ansamblini qarashga olib keladi. Fluktuatsiyalarni bunday usul bilan qarashni "ossillyatorlar to'plami" modeli deb atashimiz mumkin. Demak,

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} = E(\omega), \quad k_1 = m\omega^2$$

ifodada x va p_x fluktuatsiyalanuvchi umumlashgan koordinata, umumlashgan impulsdir. Umumiy holda ularning fluktuatsiyalari (78) va (79) ifodalar bilan, ularning ko'paytmasi esa (80) ifoda bilan aniqlanadi. Demak, birinchi va ikkinchi fluktuatsiya munosabatlari (42) va (43) dagi θ — bu ossillyatorning o'rtacha energisi

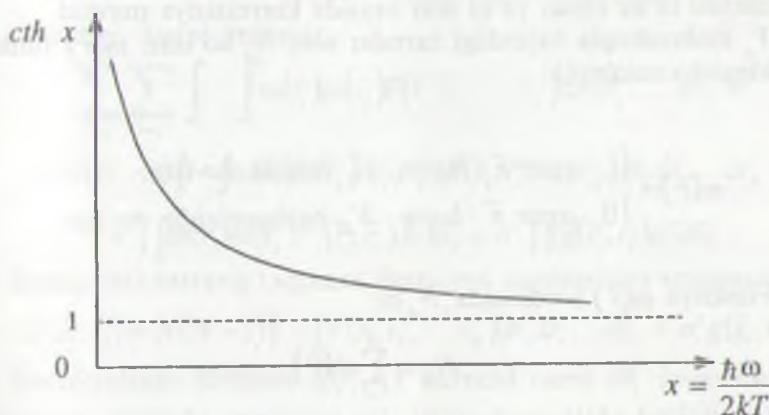
$$\theta \equiv \langle E \rangle = \frac{\hbar \omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2kT}$$

dan iboratdir. Shunday qilib, ikkinchi fluktuatsiya munosabati (80) universal xarakterga ega bo'lib, klassik va kvant hollarda, ya'ni ixtiyoriy temperaturada o'rinalidir.

Temperatura $(0, \infty)$ intervalda o'zgarganda $\text{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$ $(1, \infty)$ intervalda o'zgarishini e'tiborga olib (6.3-rasm), (80) ni

$$\left[\overline{(\Delta x)^2 \Delta p_x}\right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (81)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.



6.3-rasm.

Bu (81) Geyzenberg noaniqlik munosabatidir.

(80) dan ko'rinadiki, fluktuatsiya munosabati temperaturaga bog'liq qism $\text{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$ va temperaturaga bog'liq bo'lmagan qism (*buni vakuum holat uchun o'rinli bo'lgan qismi deyiladi*) $\frac{\hbar}{2}$ ko'paytmalaridan iborat.

Klassik hol $\beta \hbar\omega \ll 1$ bo'lganda (80) dan

$$\left[\overline{(\Delta x)^2 \Delta p_x}\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{kT}{\omega} \quad (82)$$

tenglikni, kvant hol $\beta \hbar\omega \gg 1$ bo'lganda, ya'ni fizik vakuum uchun ($T=0$ bo'lganda)

$$\left[\overline{(\Delta x)^2 (\Delta x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2} \quad (83)$$

munosabatni olamiz.

12-§. Korrelatsiya parametri va fazoviy korrelatsiya orasidagi bog'lanish

Bir jinsli izotrop sistemada (suyuqlik yoki gazda) molekulalar teng ehtimollik bilan joylashadi. Lekin zarralar bir-biri bilan o'zaro ta'sirda bo'lganligi sababli, ular orasida korrelatsiya mavjuddir. Masalan, agar ikki zarrani bir vaqtda qarasak, birining joylashishiga ikkinchisining joylashishi ta'sir etadi, ya'ni ular orasida korrelatsiya mavjud.

V_A makroskopik hajmdagi zarralar soni N_A bo'lsin; $m(\vec{r})$ funksiyani quyidagicha aniqlaylik:

$$m(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \vec{r} \text{ hajm } V_A \text{ ichida bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } \vec{r} \text{ hajm } V_A \text{ tashqarisida bo'lsa.} \end{cases}$$

Funksiya $m(\vec{r})$ yordamida N_A ni

$$N_A = \sum_{i=1}^N m(\vec{r}_i)$$

ko'rinishda yozish mumkin; N — sistema zarralarining soni; N ta zarralarning taqsimot funksiyasini (ehtimollar zichligi) $F_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ bilan belgilaylik. Bu holda o'rtacha qiymat $\langle N_A \rangle$ ni aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \langle N_A \rangle &= \sum_i \int_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)} m(\vec{r}_i) F_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N = \\ &= N \int \dots \int m(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \cdot F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2 d\vec{r}_3, \dots, d\vec{r}_N = \\ &= \int m(\vec{r}) F_1(\vec{r}) d\vec{r} = n V_A \end{aligned} \quad (84)$$

Bu yerda bir jinsli sistema (gaz yoki suyuqlik) uchun birzarraviy taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F(\vec{r}) = N \int \dots \int F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2 d\vec{r}_3, \dots, d\vec{r}_N \quad (85)$$

$N \rightarrow \infty$ bo'lganda $F_1(\vec{r}) = n$ kabi aniqlanadi, n — zarralar zichligi. Demak, bulardan

$$\langle N_A \rangle = n V_A \quad (86)$$

ni yozish mumkin.

$\langle N_A^2 \rangle$ ni aniqlaylik:

$$\langle N_A^2 \rangle = \left\langle \sum_i \sum_j m(\vec{r}_i) m(\vec{r}_j) \right\rangle = \left\langle \left[\sum_i m(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} m(\vec{r}_i) m(\vec{r}_j) \right] \right\rangle \quad (87)$$

Bunda $m(\vec{r}_i) m(\vec{r}_j) = m(\vec{r})$ ekanligi hisobga olinadi. Ma'lumki,

$$\left\langle \sum_i m(\vec{r}_i) \right\rangle = n V_A. \quad (88)$$

(87) dagi hadni yozamiz:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} \int \dots \int m(\vec{r}_i) m(\vec{r}_j) F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N = \\ & = N(N-1) \int \dots \int m(\vec{r}_1) m(\vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \cdot F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \dots d\vec{r}_N = \\ & = \int \int m(\vec{r}_1) m(\vec{r}_2) F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = n^2 \int \int g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \end{aligned} \quad (89)$$

Bunda ikki zarraviy taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = N(N-1) \int \dots \int F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \dots d\vec{r}_N = n^2 g(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (90)$$

Korrelyatsion funksiya $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ birinchi zarra $d\vec{r}_1$ hajm elementda bo'lganda, ikkinchi zarraning $d\vec{r}_2$ hajm elementida bo'lish ehtimolini ko'rsatadi (yoki aksincha, ikkinchi zarra $d\vec{r}_2$ da bo'lganda birinchi zarraning $d\vec{r}_1$ da bo'lish ehtimolini aniqlaydi).

Endi (87), (88) va (89) larni hisobga olib, zarralar soni fluktuatsiyasini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2}{\langle N_A \rangle} &= \frac{\langle (\Delta N_A)^2 \rangle}{\langle N_A \rangle} = \frac{n V_A}{\langle N_A \rangle} + \frac{n^2}{\langle N_A \rangle} \int \int g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 - \langle N_A \rangle = \\ &= 1 + \frac{n}{V_A} \int \int [g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - 1] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \end{aligned}$$

yoki

$$\frac{\langle (\Delta N_A)^2 \rangle}{\langle N_A \rangle} = 1 + \frac{n}{V_A} \int \int [g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - 1] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (91)$$

Suyuqlik va gazsimon (izotrop) sistemalar uchun korrelyatsion funksiya $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ikki zarra orasidagi masofa $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ gagina bog'liq bo'ladi.

Shuning uchun $\bar{r}_1$ va $\bar{r}_2$ bo'yicha integralni $\bar{r}_1$ va $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ o'zgaruvchilar bo'yicha integrallash bilan almashtirib, Yakobianning birga teng ekanligini hisobga olsak, (91) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\langle (\Delta N_A)^2 \rangle}{\langle N_A \rangle} = 1 + n \int [g(\bar{r}) - 1] d\bar{r}. \quad (92)$$

Ba'zan korrelyatsion funksiya quyidagicha aniqlanadi: $c(\bar{r}) = g(\bar{r}) - 1$

Endi zarralar soni fluktuatsiyasi $\langle (\Delta N)^2 \rangle$ bilan hajm fluktuatsiyasi $\langle (\Delta V)^2 \rangle$ orasidagi munosabatini aniqlaylik. Buning uchun avval N ni doimiy deb hisoblab yozamiz: $\Delta V = N \Delta \left(\frac{V}{N} \right)$; so'ng bunda V ni doimiy deb, N ni o'zgaruvchi deb hisoblab

$$\Delta V = NV \Delta \left(\frac{1}{N} \right) = -\frac{1}{N} \Delta N$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikni kvadratga ko'tarib, so'ng o'rtachalab, izlanayotgan

$$\langle (\Delta N_A)^2 \rangle = n^2 \langle (\Delta V)^2 \rangle \quad (93)$$

munosabatni olamiz.

Umumiy metodimiz asosida hajm fluktuatsiyasi

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle = -\theta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \theta = \frac{U}{V}$$

ifoda bilan aniqlanadi. Ikkinchi tomondan

$$n_c \mu \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0, \quad n_c = \frac{c - c_p}{c - c_v}, \quad \mu = \frac{\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_T}{\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_T} = \frac{\beta}{\alpha}$$

holat tenglamasi bizga ma'lum (I qism IV bobga qarang). Bu tenglama

$$-\frac{dV}{dP} = \frac{V}{P \mu n_c}$$

ko'rinishga yoki izotermik protsess uchun ($c \rightarrow \infty, n_c = 1$)

$$-\left(\frac{dV}{dP}\right)_T = \frac{V}{P\mu} \quad (94)$$

ko'rinishga keladi. Izotermik siqiluvchanlik $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_T$ kiritsak, oxirgi tenglikdan quyidagi sodda, lekin muhim

$$P\mu\chi_T = 1 \quad (95)$$

munosabatni olamiz.

(95) ni nazarda tutib, hajm fluktuatsiyasi uchun

$$\langle(\Delta V)^2\rangle = \frac{\theta V}{P\mu} \quad (96)$$

ifodani olamiz. Zarralar fluktuatsiyasi uchun, (96) ni nazarda tutib,

$$\langle(\Delta N)^2\rangle = N \frac{n\theta}{P} \frac{1}{\mu} \quad (97)$$

ifodani olamiz.

Ideal gaz uchun $\theta=kT$ va $\mu=1$ ekanligidan (97) ifodadan ma'lum $\langle(\Delta N)^2\rangle = N$ tenglik kelib chiqadi. Umumiy holda, $P=n\theta$ ekanligini nazarda tutsak, real gaz zarralarining soni fluktuatsiyasi ideal holdagi farqlanishini ko'ramiz:

$$\frac{\langle(\Delta N)^2\rangle}{N} = \frac{1}{\mu}. \quad (98)$$

(92) va (98) larning o'ng tomonlarini tenglashtirib, *korrelatsiya parametri* μ bilan *korrelyatsion funksiyasi* $g(\vec{r})$ orasidagi bog'lanishni ifodalovchi yangi umumiy tenglamani olamiz:

$$\mu^{-1} = 1 + n \int [g(\vec{r}) - 1] d\vec{r}. \quad (99)$$

Bu tenglamani (95) dan foydalanib

$$P\chi_T = 1 + n \int [g(\vec{r}) - 1] d\vec{r} \quad (100)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamada, agar bosim P uchun ideal gaz holdagi ifoda $P_0=nkT$ qabul qilinsa, tenglama (100) taqribiy

$$nkT\chi_\tau = 1 + n \int [g(\bar{r}) - 1] d\bar{r} \quad (101)$$

ko'rinishni oladi. (101) tenglama Ornshteyn—Sernike tenglamasidir. Demak, bizning umumiy va aniq tenglamamiz (99) yoki (100) dan taqribiy holda **Ornshteyn—Sernike tenglamasi** (101) kelib chiqadi.

Izotrop sistema uchun korrelyatsion funksiya masofaga bog'liq bo'lib, yo'nalishga bog'liq emas, ya'ni $g(\bar{r}) = g(r)$.

Izoh.

1. Ideal gaz uchun $\mu=1$, demak, $g(r)=1$ bo'ladi, ya'ni kutilganidek, zarralar orasida korrelatsiya yo'q.

2. Aniq munosabat (95) dagi ko'paytma $P\chi_\tau$ ning birdan farqliligi korrelatsiya parametri μ ni va u orqali korrelyatsion funksiyasi $g(r)$ ni aniqlashga imkon beradi.

3. α va β termik koeffitsiyentlardan $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$ ni va demak, korrelatsiyani aniqlash mumkin.

4. Real izoterma va real adiabatanning taqribiy tenglamalari $PV^\mu = \text{const}$ va $PV^{\mu'} = \text{const}$ asosida μ va demak, $g(r)$ haqida ma'lumot olish mumkin.

13-§. Fluktuatsiyalarning vaqt bo'yicha korrelyatsiyasi

Muvozanatli sistemanning biror parametri x ni ko'raylik. Bu parametr vaqt o'tishi bilan o'zining o'rtacha qiymati atrofida fluktuatsiyalanadi. Qulaylik uchun o'rtacha qiymat $\langle x \rangle$ ni nolga teng deylik: unda o'rtacha qiymat bilan x ning haqiqiy qiymati orasidagi farq $x(t)$ dan iborat bo'ladi.

Hap xil vaqtlardagi $x(t)$ ning qiymatlari orasida ma'lum korrelatsiya bo'ladi, ya'ni $x(t)$ ning ma'lum (biror) vaqt t dagi qiymati boshqa vaqt $t + \tau$ da qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimollariga ta'sir ko'rsatadi. Bunda vaqt korrelyatsion funksiya yoki avtokorrelatsiya $\varphi(\tau)$ kattalik $x(t)x(t+\tau)$ ning o'rtacha qiymati bilan aniqlanadi, ya'ni $\varphi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$. Bu yerda t va $t+\tau$ vaqtlarda x kattalikning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari bo'yicha o'rtachalanadi. Bunday statistik o'rtachalanish vaqt bo'yicha o'rtachalashga ekvivalentdir, ya'ni

$$\varphi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (102)$$

$x(t)$ parametrni Furrye integrali ko'rinishida ifodalaylik:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (103)$$

Furje — komponenta x_{ω} quyidagicha aniqlanadi:

$$x_{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt. \quad (104)$$

Furje integral (104) ni korrelyatsion funksiya $\varphi(t'-t) = \langle x(t)x(t') \rangle$ ga qo'yib,

$$\varphi(t'-t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega} x_{\omega'} e^{-i(\omega t + \omega' t')} d\omega d\omega' \quad (105)$$

ifodani hosil qilamiz. (105) da o'ng tomondagi integral faqat $t'-t$ ning funksiyasi bo'lishi uchun integral ishorasi ostidagi ifodada delta funksiya bo'lishi shart. Shuning uchun, ta'rif bo'yicha, qabul qilamiz:

$$x_{\omega} x_{\omega'} = 2\pi x_{\omega}^2 \delta(\omega + \omega') \quad (106)$$

(106) ni (105) ga qo'yib,

$$\varphi(t'-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega}^2 e^{-i(\omega t + \omega' t')} \delta(\omega + \omega') d\omega d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega}^2 e^{-i\omega(t'-t)} d\omega$$

yoki

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega}^2 e^{-i\omega \tau} d\omega \quad (107)$$

munosabatni olamiz. Bunda $\varphi(\tau) = \varphi(t'-t)$ ning $\delta(\omega + \omega')$ delta-funksiyaning xossasiga asosan, faqat, $\omega = -\omega'$ dagina noldan farqli bo'lishi hisobga olindi.

Xususiy hol $\tau = 0$ da (107) dan

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\omega}^2 d\omega \quad (108)$$

Ikkinchi tomondan, $\varphi(0) = \langle x(t)x(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle$ parametrning kvadratik fluktuatsiyasining o'rtachasidir. Shunday qilib,

$$\overline{x^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_{\omega}^2} d\omega \quad (109)$$

Diskret hol uchun bu ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\overline{x^2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_{\omega}^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2} dn \quad (110)$$

(107) va (109) lardan ko'rinadiki, $\overline{x_{\omega}^2}$ — parametrning kvadratik fluktuatsiyasi o'rtachasining spektral zichligi, ikkinchi tomondan $\overline{x_{\omega}^2}$ — korrelyatsion funksiyaning Furry komponentasidir, ya'ni

$$\overline{x_{\omega}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (111)$$

(107) va (111) munosabatlar Viner-Xinchin teoremasidir. Bu teorema korrelyatsion funksiya $\varphi(\tau)$ bilan $x(t)$ ning kvadratik fluktuatsiyasi o'rtachasi orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

14-§. Fluktuatsion - dissipatsion teorema

Sistemaga ta'sir etayotgan umumlashgan kuch $f(t)$ bo'lsin. Bu kuch sababli sistema muvozanat (eng katta ehtimolli) holatdan og'adi, ya'ni sistemaning reaksiyasi — javobi yuz beradi. Bunda sistema fizik kattaligining og'ishini $x(t)$ bilan belgilaylik.

Sistemaning javobi $x(t)$ bilan umumlashgan kuch orasidagi bog'lanish quyidagicha aniqlanadi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (112)$$

bunda $\alpha(\tau)$ — sistemaning xossasiga bog'liq bo'lgan vaqt funksiyasi va $\tau \leq 0$ bo'lganda $\alpha(\tau) = 0$ bo'ladi, chunki x ning t paytdagi qiymati $x(t)$ shu paytgacha bo'lgan vaqtgagina bog'liq bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, $x(t)$ ga $f(t')$ kuchning $t' > t$ dagi qiymatlari ta'sir ko'rsatishi mumkin emas (sababiyat prinsipiga asosan).

$x(t)$ va $f(t)$ larni Furry qatoriga yoyib, (112) ga qo'ysak,

$$x_{\omega} = \alpha(\omega) f_{\omega} \quad (113)$$

ni hosil qilamiz, bunda

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (114)$$

bo'lib, $\tau < 0$ bo'lganida $\alpha(\tau) = 0$ shart bajariladi. $\alpha(\omega)$ — berilgan kuch ta'sirida sistemaning umumlashgan qabul qiluvchanligi bo'lib, umumiy holda uni kompleks ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \quad (115)$$

(114) dan ko'rinadiki,

$$\alpha(-\omega) = \alpha^*(\omega); \quad \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega); \quad \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega),$$

ya'ni $\alpha'(\omega)$ — chastotaning juft, $\alpha''(\omega)$ toq funksiyalaridir,

Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar, masalan, tasodifiy kuchlar tufayli sistema tomonidan yutiladigan energiya umumlashgan qabul qiluvchanlikning mavhum qismi, ya'ni $\alpha''(\omega) = Jm\alpha(\omega)$ bilan bog'langan, shuning uchun tasodifiy kuchlarga sistema reaksiyasidasodir bo'luvchi energiya dissipationiyasi qaralganda $\alpha(\omega)$ ning mavhum qismi $Jm\alpha(\omega)$ ishtirok etadi.

Sistemaning muvozanatli holatdagi fluktuatsialari spektral zichligi $\overline{x^2}$ bilan uning nomuvozanatli xossasi — umumlashgan qabul qiluvchanlik $\alpha(\omega)$ orasidagi bog'lanish X.Kallen va T.Velton nomlari bilan ataluvchi teorema — fluktuatsion — dissipation teorema (FDT) orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{x_n^2} = \hbar \alpha''(\omega) \coth \hbar \omega / 2kT, \quad (116)$$

bunda $\overline{x_n^2} = 2\overline{x_\omega^2}$ spektral zichlik $\overline{x_\omega^2}$ (109) formula bilan aniqlanadi:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_\omega^2} d\omega. \quad (117)$$

Biz quyida FDT ning oddiy isbotini bayon qilamiz. Ossillyator ansambli uchun

$$\overline{x_n^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} = k_1^{-1}(\omega) \langle \epsilon(\omega) \rangle \quad (118)$$

ekani (58) dan ma'lum edi, bunda $k_1(\omega) = m\omega^2$. (118) ni quyidagicha yozamiz ((110) ga qarang).

$$\overline{x_n^2} = \overline{x_\omega^2} = k_1^{-1}(\omega) \langle \epsilon(\omega) \rangle, \quad (119)$$

bunda $\overline{x_\omega^2}$ va $\overline{x_n^2}(\omega)$ fizik kattalik $x(t)$ ning o'rtachasi kvadratik fluktuatsiyasining spektral zichliklaridir, ya'ni

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2(\omega)} d\omega \quad (120)$$

(117) va (120) larni mos ravishda quyidagicha yozamiz:

$$2\pi \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2(\omega)} d\omega = \int_0^{\infty} 2\overline{x_n^2} d\omega = \int_0^{\infty} \overline{x_{\omega_+}^2} d\omega,$$

$$2\pi \overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2(\omega)} d\omega = \int_0^{\infty} 2\overline{x_n^2(\omega)} d\omega = \int_0^{\infty} \overline{x_{\omega_+}^2} d\omega.$$

Bulardan chastotanyang musbat qiymatlari uchun yozilgan spektral zichliklar $\overline{x_{\omega_+}^2}$ va $\overline{x_{\omega_+}^2(\omega)}$ uchun

$$\overline{x_{\omega_+}^2} = 2\overline{x_{\omega}^2}; \quad \overline{x_{\omega_+}^2(\omega)} = 2\overline{x_n^2(\omega)} \quad (121)$$

ni olamiz. Xuddi shuningdek, $x(t)$ uchun

$$\overline{x_{\omega_+}^2(t)} = 2\overline{x^2(t)} \quad (122)$$

(117) va (120) lardan, (121) larni nazarda tutib, quyidagi ifodani olamiz:

$$\overline{x_{\omega_+}^2(\omega)} = \omega \overline{x_{\omega}^2} = \omega \overline{x_{\omega_+}^2} / 2 \quad (123)$$

Demak,

$$\overline{x_{\omega_+}^2(\omega)} = \omega \overline{x_{\omega}^2} = k_1^{-1}(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle \quad (124)$$

yoki chastotaning musbat qiymatlari uchun

$$\overline{x_{\omega_+}^2(\omega)} = \omega \overline{x_{\omega}^2} = 2k_1^{-1}(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle \quad (125)$$

tenglik bajariladi. Bundan

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (125)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\overline{x_{\omega_+}^2} = \hbar k_1^{-1}(\omega) cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (126)$$

ni hosil qilamiz. (116) va (126) formulalarni bir-biri bilan solishtirishdan ko'rinadiki, FDT dagi $\alpha''(\omega)$ rolini $k_1^{-1}(\omega)$ o'ynayapti, ya'ni

$$\alpha''(\omega) k_1(\omega) = 1 \quad (127)$$

muhim munosabat o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

(124) va (127) larni nazarda tutib, $x(t)$ ning fluktuatsiyalari uchun quyidagilarni olamiz:

$$\overline{x^2}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha''(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \alpha''(\omega) \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

$$\overline{x_1^2}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \alpha''(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \alpha''(\omega) \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

Agar fluktuatsiya hodisasida kichik chastotaning kichik intervali muhim rol o'ynasa, (ya'ni $\omega \approx \Delta\omega$) oxirgi tenglikdan quyidagi taqribiy ifodani olamiz:

$$\overline{x_1^2}(t) \approx \frac{2}{\pi} \alpha''(\omega) \langle \varepsilon(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{\pi} \alpha''(\omega) \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (128)$$

Bu ifoda *Naykvist formulasi* deyiladi.

Klassik holda **Naykvist formulasi**

$$\overline{x_1^2}(t) \approx \frac{2}{\pi} \alpha'' kT \quad (129)$$

Shunday qilib, fluktuatsiyaning spektral zichligi $\overline{x_1^2}$ yoki $\overline{x_1^2}$ sistema xossasiga bog'liq bo'lgan umumlashgan qabul qiluvchanlik $\alpha(\omega)$ ga (yoki $k_1(\omega)$ ga) bog'liq.

Shuni ta'kidlash lozimki, termodinamik fluktuatsiya bo'lgan holda spektral zichlik $\overline{x_1^2}$ ning chastotaga oshkor bog'liqligini aniqlash mumkin.

Agar 1) fluktuatsiya yuz bergan sistemachaning o'zi muvozanatda bo'lib, lekin sistemaning qolgan qismlariga nisbatan (og'ishgan) chetlangan bo'lsa, 2) bu og'ish termodinamik fizik parametr $x(t)$ qiymatining berilishi bilan aniqlanishi mumkin bo'lsa, bunday fluktuatsiyalarni termodinamik fluktuatsiyalar deyiladi. Bunda birinchi shart sistemachaning fluktuatsiya vaqti τ fizik kattalik $x(t)$ ning o'zgarishi uchun xarakterli bo'lgan vaqtdan

yotarli darajada kichik bo'lganda bajariladi, ikkinchi shartdan esa $\frac{dx(t)}{dt}$ ning faqat $x(t)$ ga bog'liqligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} x(t) \quad (130)$$

Agar o'rtacha qiymat $\bar{x}$ noldan farqli bo'lsa, (130) tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(x - \bar{x}) \quad (131)$$

Agar sistemaga ω chastota bilan o'zgaruvchi davriy kuch $f(\omega)$ ta'sir etayotgan bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$x(\omega) = \alpha(\omega)f(\omega) \quad (132)$$

$$\bar{x} = \alpha(0)f(\omega) \quad (133)$$

bo'ladi.

(132) va (133) larni (131) ga qo'yib, qo'yidagi munosabatni olamiz:

$$-i\omega\tau\alpha(\omega) = -\alpha(\omega) + \alpha(0)$$

yoki

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha(0)}{1 - i\omega\tau}, \quad (134)$$

bunda τ fizik kattalik (oqim) x ning relaksatsiya vaqti.

Umuman aytganda, (132) munosabatni nomuvozanatli termodinamika chiziqli qonunining umumiy ko'rinishi deb qarash mumkin. x_ω va f_ω Furye-komponentlar orasidagi bog'lanish quyidagicha edi:

$$x_\omega = \alpha(\omega)f(\omega).$$

Bundan

$$\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle = \alpha(\omega)\alpha(\omega')\langle f_\omega f_{\omega'} \rangle$$

yoki

$$\langle x_\omega^2 \rangle = \alpha(\omega)\alpha(-\omega)\overline{f_\omega^2} = |\alpha(\omega)|^2 \overline{f_\omega^2}$$

(116) dan foydalanib, tasodifiy kuch Furye-komponenti uchun olamiz:

$$\overline{f_\omega^2} = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{2|\alpha(\omega)|^2} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (135)$$

yoki

$$\overline{f_{\omega+}^2} = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2} \text{cth} \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (136)$$

Masala. 6.17. Chiziqli garmonik ossillyatorlar sistemasi uchun FDT ning o'rinli ekanini isbotlang.

Yechish. Ma'lumki, chiziqli garmonik ossillyator uchun $2U(x) = k_1(\omega)x^2(\omega)$, bunda $U(x)$ – potentsial energiya. Bu ifodani ossillyatorlar ansambli bo'yicha o'rtachalaymiz: $2\bar{U}(x) = k_1(\omega)\overline{x_n^2(\omega)}$ yoki $2\bar{U}(x) = \langle \varepsilon(\omega) \rangle$ ekanidan

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = k_1(\omega)\overline{x_n^2(\omega)}$$

Bundan $k_1(\omega) = \frac{1}{\alpha''(\omega)}$ ekanini nazarda tutib, quyidagini olamiz:

$$\alpha''(\omega)\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \overline{x_n^2(\omega)} = \overline{\omega x_\omega^2}$$

yoki bunda $2\overline{x_\omega^2} = \overline{x_\omega^2}$ ekanligidan FDT kelib chiqadi.

15-§. Korrelyatsion teorema

Faraz qilaylik, $t=0$ vaqtdan boshlab, $H_0(p, q)$ energiyali sistemaga $f_k(t)$ kuchlar ta'sir qila boshlasin. Kuch ta'sirida sistemaning energiyasi o'zgaradi. Vaqt Δt davomida $f_k(t)$ ta'sirida sistemaning gamiltoniani H

$$H = E_0 - \sum_i f_i(t)x_i(p, q, t) \quad (137)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. (6-§ qarang). Bunda $\Delta x_k \equiv x_k(p, q, t)$ "mikroskopik" oqimlar; $f_k x_k$ esa sistema tomonidan bajarilgan "mikroskopik" ishlar, qulaylik uchun quyida yig'indi ishorasini tushirib yozamiz.

Demak, sistemaning lokal taqsimoti funksiyasi $\rho(p, q, t)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho_i(p, q, t) = Z^{-1} \exp\{-\beta[E_0 - x_i(p, q, t)f_i(t)]\} \quad (138)$$

$$Z^{-1} = \int dp dq \exp\{-\beta[E_0 - x_i(p, q, t)f_i(t)]\} \quad (139)$$

Termodinamik kattalik $\bar{x}_i$ ni aniqlaylik;

$$\bar{x}_i = \int dp dq x_i(p, q, t') \rho_i(p, q, t) \quad t' > t \quad (140)$$

(138) va (139) ni hisobga olib, (140) dan

$$\theta \frac{\partial \bar{x}_i(t')}{\partial f_i(t)} = [\overline{x_i(t')x_i(t)} - \overline{x_i(t')} \overline{x_i(t)}] = \overline{\Delta x_i(t') \Delta x_i(t)} \quad (141)$$

ifodani hosil qilamiz. Bunda $\overline{\Delta x_i(t') \Delta x_i(t)}$ – korrelyatsion funksiya.

Sistemaning qabul qiluvchanlik koeffitsiyentini, ta'rifga ko'ra, quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{\partial \bar{x}_i(t')}{\partial f_k(t)} = \alpha_{ik}(t' - t) \quad (142)$$

(By yerda $\tau < 0$ bo'lganda $\alpha(\tau) = 0$ ekanligi nazarda tutildi). (142) ifoda chiziqli qonunni ifodalaydi:

$$\bar{x}_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}(\tau) f_k(t - \tau) d\tau \quad (143)$$

Bundan Furre-komponentlari uchun quyidagi munosabatni olamiz;

$$\bar{x}_i(\omega) = \alpha_{ik}(\omega) f_k(\omega), \quad (144)$$

$$\alpha_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (145)$$

bunda $\alpha_{ik}(\omega)$ — umumlashgan qabul qiluvchanlik deyiladi. (144) dan munosabat kelib chiqadi.

$$\frac{\partial \bar{x}_i(\omega)}{\partial f_k(\omega)} = \alpha_{ik}(\omega) \quad (146)$$

(142) ni hisobga olib, korrelyatsion funksiya ifodasi (141) ni

$$\overline{\Delta x_i(t') \Delta x_k(t)} = \alpha_{ik}(t' - t) \theta \quad (147)$$

ko'rinishda yozamiz.

Furre-komponentlari orasida esa

$$\overline{\Delta x_i(\omega) \Delta x_k(\omega)} = [\overline{x_i(\omega) x_k(\omega)} - \overline{x_i(\omega)} \overline{x_k(\omega)}] = \alpha_{ik}(\omega) \theta \quad (148)$$

shaklda yoziladi. (147) va (148) ni korrelyatsion teorema ifodalari deb ataymiz.

Shuni ta'kidlaymizki, korrelyatsion funksiyalarning quyidagi ifodalaridan

$$\overline{x_i(t') x_k(t)} = \overline{x_k(t') x_i(t)}$$

$$\overline{x_i(\omega) x_k(\omega)} = \overline{x_k(\omega) x_i(\omega)}$$

koeffitsiyentlarning quyidagi tengligi (simmetriyasi) kelib chiqadi:

$$\alpha_{ik}(t' - t) = \alpha_{ki}(t' - t)$$

$$\alpha_{ik}(\omega) = \alpha_{ki}(\omega)$$

Xususan, $i=k$ bo'lganda fizik kattalikning vaqt bo'yicha korrelatsiyasi yoki boshqacha aytganda, uning o'rtacha kvadratik fluktuatsiyasi ifodasini olamiz:

$$\overline{x(t')x(t)} = \alpha(t' - t)\theta.$$

Izoh. Fluktuatsiyaga oid masalalarni qarganda θ kattalikni

$$\theta = \frac{U}{v} = U = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT},$$

ya'ni ossillyatorning o'rtacha energiyasi ekanligini nazarda tutmoq lozim.

16-§. Umumlashgan qabul qiluvchanlik bilan kinetik koeffitsiyentlar bog'lanishi

Nomuvozanatli termodinamika chiziqli munosabati quyidagi ko'rinishga ega edi:

$$\overline{x_i(0)} = \alpha_{ik}(0)f_k = L_{ik}f_k, \quad (149)$$

bunda $x_i(0)$ — termodinamik oqim, $\alpha_{ik}(0) = L_{ik}$ — kinetik koeffitsiyentlar.

Termodinamik kattalik $\overline{x_i(t)}$ relaksatsion tenglamani qanoatlantirsin (14-§ ga qarang):

$$\dot{\overline{x_i(t)}} = \tau_{ik}^{-1}(\overline{x_k(0)} - \overline{x_k(t)}) \quad (150)$$

bunda $\overline{x_k(0)}$ kattalik $\overline{x_k(t)}$ ning $t=0$ dagi qiymati; (150) dan Furiye-komponentlari uchun quyidagi tenglikni olamiz:

$$-i\omega\overline{x_i(\omega)} = \tau_{ik}^{-1}(\overline{x_k(0)} - \overline{x_k(\omega)}), \quad (151)$$

(144) va (149) ifodalarni (151) ga quyib,

$$\alpha_{ik}(0) \equiv L_{ik} = \alpha_{ik}(\omega) - i\omega\tau_{im}\alpha_{mk}(\omega)$$

munosabatni hosil qilamiz.

Bu munosabat umumlashgan qabul qiluvchanlik $\alpha_{ik}(\omega)$ bilan kinetik koeffitsiyent L_{ik} lar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Faqat to'g'ri effektlarni o'liborga olsak, bu tenglik

$$\alpha(0) = \alpha(\omega) - i\omega\alpha(\omega)$$

ko'rinishga keladi. Bundan

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha(0)}{1 - i\omega\tau} \quad (152)$$

kelib chiqadi.

17-§. O'lchov asboblarning sezgirlikiga fluktuatsiyalarning ta'siri

Yuqori darajadagi sezgir asboblarda, jumladan, tarozilarda, galvanometrlarda va shunga o'xshash asboblarda issiqlik harakati tufayli yuzaga keladigan fluktuatsiyalarni hisobga olish ahamiyatga ega. Haqiqatan, agar o'rganilayotgan kattalikning qiymati asbobning xususiy fluktuatsiyasidan kichik bo'lsa, u holda fizik kattalikni bevosita bir marta o'lchaganda, o'rganayotgan kattalikni emas, balki asbobning xususiy fluktuatsiyasini qayd etiladi. Boshqacha aytganda, issiqlik harakati (fon) va shu bilan bog'liq fluktuatsiya har bir asbobning sezgirlikini chegaralab qo'yadi. Fizik kattalikning qiymati issiqlik harakati fonidan kichik bo'lganda (undan past bo'lganda, uning ichida bo'lganda), u qiymatni o'lchash uchun va demak, sezgirlik darajasini yuqorilash uchun ko'p marta o'lchashlar yoki yangi asboblarni yaratish lozim.

Agar asbob fluktuatsiya bilan bog'liq bo'lgan o'zining xususiy harakatini qayd qilsa, u holda ma'lumki, asbob ko'rsatishlarining o'rtacha qiymati nolga teng bo'ladi.

Agar fonga tashqi ta'sir qo'shilsa, asbob yangi holat atrofida fluktuatsiyalanadi va o'rtacha og'ish (chetlanish) bu holda noldan farqli bo'ladi. Bunda qancha ko'p marta o'lchash o'tkazilsa, shuncha kichik miqdorni qayd qilish imkoni tug'iladi.

Bir necha asbobning bir marta o'lchashdagi sezgirliklarini ko'raylik.

1. Gazli termometr. Gazli termometr vositasida temperaturani o'lchash uchun o'zgarmas bosimda hajmning o'zgarishidan foydalaniladi. Bu holda o'lchanayotgan temperatura hajm fluktuatsiyasi tufayli uzluksiz fluktuatsiyalanib turadi.

Faraz qilaylik, termometrdagi gaz Klapeyron tenglamasini qanoatlantirsin. U holda, hajmning ΔV ga o'zgarishi temperaturaning quyidagi o'zgarishiga olib keladi:

$$\Delta T = \frac{T}{V} \Delta V$$

Agar hajm va temperatura o'zgarishlari ΔV va ΔT fluktuatsiyalar sababli bo'lsa, u holda:

$$\Delta V = \sqrt{(\Delta V)^2} = \sqrt{-kT \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) T} = \frac{V}{\sqrt{N}} \quad (153)$$

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta T)^2} = \frac{T}{V} \Delta V = \frac{T}{\sqrt{N}} \quad (154)$$

Agar $N \sim 10^{20}$ bo'lsa, $\Delta T \sim 10^{-10} T$ bo'ladi. Temperaturaning bu minimal qiymati $10^{-10} T$ termometr yordamida o'lchanadigan temperatura o'zgarishiga nisbatan juda ham kichikdir.

2. Osilgan ko'zgu. Fizik kattalikni o'lchash uchun ingichka, odatda kvarsdan yasalgan ipga osilgan yengil ko'zgudan foydalaniladi. Bu oddiygina hamda juda sezgir asboblardan hisoblanadi. Asbobning sezgirlik darajasi, ipga osilgan ko'zguning qanday kichik burchakka burilishini qayd eta olinishi bilan aniqlanadi. Odatda, bu burilish burchagi nihoyatda kichik bo'ladi. O'lchanishi lozim bo'lgan eng kichik burilish burchagi ko'zgu va ipning molekulalari issiqlik harakati tufayli bo'ladigan fluktuatsiya natijasida tasodifan buriladigan burchakdan katta bo'lishi kerak. Ko'zguning muvozanatli holati $\varphi = 0$ dan molekular issiqlik harakati tufayli tasodifan φ burchakka burilishi uchun ipning elastiklik kuchini yengib, ma'lum ish bajariladi. Bu ish ipning potensial energiyasiga aylanadi. Agar burchak φ kichik bo'lsa, bu potensial energiya quyidagicha aniqlanadi:

$$U(\varphi) = \frac{k_1(\omega)\varphi^2(\omega)}{2},$$

bunda $k_1(\omega)$ — elastiklik koeffitsiyenti bo'lib, u

$$k_1(\omega) = \frac{\pi^2 r^2 g}{2l}$$

ga teng, bunda r — ipning radiusi, l — uning uzunligi, g — ipning siljish koeffitsiyenti. Bu yerda ko'zgu faqat bitta aylanish erkinlik darajasiga ega deb qaraladi.

$U(\varphi)$ ni o'rtachalab, fluktuatsion — dissipatsion teoremaning ifodasini olamiz:

$$2\overline{U}(\varphi) = k_1(\omega)\overline{\varphi^2(\omega)}$$

yoki

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \alpha''(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle, \quad (155)$$

bunda $\overline{U}(\varphi) = \langle\varepsilon(\omega)\rangle$ va $k_1(\omega) = \frac{1}{\alpha''(\omega)}$ hisobga olinadi.

1. Kvant holda $\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}$ demak,

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \frac{\hbar\omega}{2k_1(\omega)}$$

2. Klassik holda $\langle \varepsilon(\omega) \rangle \approx kT$ demak,

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \frac{kT}{k_1(\omega)} \quad (156)$$

Bu (156) adabiyotda uchraydigan odatdagi ifodadir.

Fluktuatsiya ta'sirida ko'zguning burilish burchagini baholaylik. $T=300$ K, juda ingichka kvars ip bo'lganda $\alpha \sim 10^{-5}$ erg bo'ladi. Bu holda $\sqrt{(\Delta\varphi)^2} \sim 10^{-4}$. Agar o'lchanayotgan kattalik bundan kichik burchakka ko'zguni bursa, bir marta o'lchash natijasida bu burchakni fluktuatsiya tufayli buriladigan ko'zguning xususiy burchagidan ajratib bo'lmaydi. Ammo juda ko'p marta o'lchab, tashqi ta'sir tufayli noldan farqli o'rtacha qiymatni aniqlash mumkin. Hatto fizik kattalikning ta'siri fondan kichik bo'lganda ham.

3. Elektr tok fluktuatsiyasi. Elektr zanjirda tasodifiy EYUK ning ta'siri tufayli elektr tok yoki kuchlanishning fluktuatsiyasi paydo bo'ladi. FDT asosida bu fluktuatsiyalarni aniqlaylik.

EYUK va elektr tok spektral zichliklari $\varepsilon(\omega)$ va $J(\omega)$ orasidagi bog'lanishni aniqlaylik. Kvazistatsionar toklar uchun Om qonuni

$$JR + L \frac{dJ}{dt} + \frac{q}{c} = E, \quad J = \frac{dq}{dt} \quad (157)$$

o'rinli. Furrye komponentalariga nisbatan, $J_\omega = -i\omega q_\omega$, $\frac{dJ}{dt} = -i\omega J_\omega$

nazarda tutilsa, bu qonun

$$E_\omega = Z(\omega) J_\omega \quad (158)$$

ko'rinishga keladi; bunda to'la qarshilik

$$Z(\omega) = R + i \left(\frac{1}{\omega c} - \omega L \right) \quad (159)$$

(158) ni "oqim" q_ω orqali yozaylik

$$q_\omega = \alpha(\omega) E_\omega, \quad (160)$$

bunda

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) = \frac{i}{\omega Z} = \frac{iR}{\omega |Z|^2} + \frac{1}{\omega |Z|^2} \left(\frac{1}{\omega c} - \omega L \right) \quad (161)$$

Hundan

$$\alpha^*(\omega) = \frac{R}{\omega|Z|^2} \quad (162)$$

FDT ga asosan

$$\overline{q_\omega^2} = \frac{\hbar R}{\omega|Z|^2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (163)$$

Klassik holda ($\hbar\omega \ll kT$), ya'ni yuqori temperaturada (163) formula

$$\overline{q_\omega^2} = \frac{R}{\omega|Z|^2} kT \quad (164)$$

ko'rinishga keladi. Bu Naykvist formulasi.

Tok kuchi $J(\omega)$ ga nisbatan Naykvist formulasi (164) $\overline{J(\omega)^2} = \omega^2 \overline{q_\omega^2}$ ni e'tiborga olinib,

$$\overline{J(\omega)^2} = \frac{R}{|Z(\omega)|^2} kT, \quad (165)$$

umumiy olda esa

$$\overline{J(\omega)^2} = \frac{\hbar\omega R}{|Z(\omega)|^2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} \quad (166)$$

ko'rinishda yoziladi. (117) ga asosan tok kuchi $J(t)$ ning fluktuatsiyasi

$$\overline{J^2(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{J(\omega)J(\omega')^*} d\omega \quad (167)$$

bilan aniqlanadi.

Fluktuatsion toklar, katoddan chiqadigan elektronlar soni fluktuatsiyasi bilan bog'liq bo'lgan "pitra effekti" hozirgi zamon elektr asboblari sezgirligini chegaralab qo'ydi.

18-§. Zichlik fluktuatsiyalarida yorug'lik sochilishi

Bilamizki,

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad \Delta\rho = -\frac{M}{V^2} \Delta V, \quad \overline{(\Delta V)^2} = -kT \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Bulardan zichlik fluktuatsiyasini olamiz:

$$\overline{(\Delta p)^2} = \frac{M^2}{V^4} \overline{(\Delta V)^2} = -\frac{\bar{\rho}^2}{V^2} kT \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

yoki

$$\frac{\overline{(\Delta p)^2}}{\rho^2} = -\frac{kT}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (168)$$

Zichlik fluktuatsiyalanishi sababli muhitning dielektrik koeffitsiyenti ham fluktuatsiyalanadi:

$$\Delta \epsilon = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right) \Delta p; \quad \overline{(\Delta \epsilon)^2} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)^2 \overline{(\Delta p)^2} \quad (169)$$

Dielektrikdan o'tayotgan yorug'lik to'liq uning dielektrik kirituvchanlik ϵ fluktuatsiyasi sababli sochiladi. Shu sochilishni qaraylik.

Qutblanish vektori $\vec{P} = \left(\frac{\epsilon}{4\pi} \right) \vec{E}$ dielektrik koeffitsiyent ϵ o'zgaruvchanligi sababli o'zgaradi:

$$\Delta \vec{P} = \frac{\Delta \epsilon}{4\pi} \vec{E} \quad (170)$$

Agar $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ bo'lsa, $\Delta \vec{P}$ uchun quyidagini yozamiz:

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{P}_0 \cos \omega t, \quad (171)$$

bunda

$$\Delta \vec{P}_0 = \frac{\Delta \epsilon \vec{E}_0}{4\pi}$$

O'zgaruvchan qutblanish vektori $\Delta \vec{P}$ ni shu chastota bilan tebranuvchi dipol deyishimiz mumkin. Tebranuvchi dipol shu chastota bilan elektromagnit to'liq nurlatadi. Shunday qilib, dielektrikni shunday dipollar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Dipollar soni va ularning dipol momenti $\Delta \vec{P}_0$ fluktuatsiyalar soni va ularning kattaligi, zichlik fluktuatsiyalar soni va ularning kattaligiga bog'liq. Dielektrikdan o'tayotgan yorug'lik to'liqni energiyasining bir qismi anashu tebranuvchi dipollar tomonidan har tomonga sochiladi (tarqaladi).

Birlik vaqtda dipol nurlanishi intensivligi I quyidagicha aniqlanadi:

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\Delta \ddot{\vec{P}} \right)^2, \quad (172)$$

bunda c — yorug'likning vakuumdagi tezligi. Bundan sochilgan yorug'lik nurl intensivligining o'rtachasini topamiz:

$$\bar{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} \overline{(\Delta \vec{P})^2} \quad (173)$$

(173) formuladan ko'ramizki, sochilgan yorug'lik nurining o'rtacha intensivligi tushayotgan yorug'lik to'liqini $\bar{E}$ chastotasining to'rtinchi darajasiga mutanosib (yoki to'liqin uzunligining to'rtinchi darajasiga teskari mutanosib). Bu bog'lanishni Reley qonuni deyiladi. Shu qonun asosida, atmosfera zichligi fluktuatsiyalarida yorug'lik nurlari sochilishi asosida, osmonning moviy hamda Quyoshning chiqishi va botishida to'q sariq bo'lishligi tushuntirilgan.

(173) formulani, $\Delta \vec{P}$ ning o'rniga uning qiymatini qo'ygandan keyin, o'zgartirib yozamiz:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\omega^4}{3c^3} \left(\frac{\bar{E}_0}{4\pi} \right)^2 \overline{(\Delta \varepsilon)^2} = \frac{\omega^4}{3c^3} \left(\frac{\bar{E}_0}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \overline{(\Delta \rho)^2} = \\ &= \frac{\omega^4}{3c^3} \left(\frac{\bar{E}_0}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \frac{kT}{V^2} \rho^2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right] \end{aligned} \quad (174)$$

Bu formuladan ko'rinadiki, agar $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 0$ bo'lsa, masalan, modda kritik holatda bo'lsa, zichlik fluktuatsiyasi eng katta va demak, yorug'lik nuri sochilishi eng ko'p bo'ladi. Haqiqatda, yorug'likning kritik holatda eng ko'p sochilishi (deyarli to'la sochilishi) hodisasi kuzatilada. Bu hodisa kritik opalesensiya deyiladi.

19-§. Broun harakati nazariyasi. Lanjeven tenglamasi

R. Broun 1827-yilda suyuqlikdagi mayda (kolloid) zarralar uzluksiz, tartibsiz harakat qilayotganini kuzatdi. Bu Broun harakati nazariyasini 1905-yilda A. Eynshteyn va 1906-yilda M. Smoluxovskiy yaratdilar.

Suyuqlikdagi og'ir (kolloid) zarra harakatini tekshiraylik. Bu masala muvozanatli sistema masalalaridan biridir.

M massali zarraga suyuqlik yopishqoqligi tufayli ishqalanish kuchi $\bar{f}$ ta'sir qiladi. Bu kuch $\bar{f}$ shu zarraning tezligi $\bar{v}$ ga proporsional (Stoks qonuni), ya'ni

$$\bar{f} = -M\xi\bar{v}, \quad (175)$$

bunda ξ - ishqalanish ko'effitsiyenti. Suyuqlik molekullari zarra bilan to'qnashib, unga ta'sir ko'rsatadi. Bu ta'sirlarning natijaviy kuchini $M\bar{R}(t)$ bilan belgilasak, broun zarrasining harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\dot{\bar{v}} = -\xi\bar{v} + \bar{R}(t), \quad (176)$$

Bu Lanjeven tenglamasi.

Mikroskopik miqyosda qat'iy qaralganda ishqalanish ko'effitsiyenti vaqtning funksiyasi va

$$\bar{R}(t) = \xi(t) \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t - \tau), \quad (177)$$

bo'ladi. Bu holda Lanjeven tenglamasi

$$\dot{v}(t) = -\xi(t)v(t) + \xi(t) \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t - \tau) \quad (178)$$

ko'rinishda bo'ladi. Inersion kuch e'tiborga olinmasa, (178) dan

$$v(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t - \tau) \quad (179)$$

tenglama kelib chiqadi.

Bu (112) munosabatning xususiy holi va demak,

$$v(\omega) = \mu(\omega)F(\omega) \quad (180)$$

$\mu(\omega) = \frac{1}{\xi(\omega)}$ - zarra harakatchanligining Furrye-komponenti.

Molekulalar bilan Broyn zarrasi har bir to'qnashganda o'z trayektoriyasidan chetlanadi. Bunday og'ishlar ham kattalik (miqdor), ham yo'nalish jihatdan juda har xil va nihoyatda betartib bo'ladi. Shu sababli bu og'ishlarni, ya'ni $\bar{R}(t)$ ning vaqt bo'yicha o'zgarishidagi qiymatini va demak, Broun zarrasining har bir vaqt momentidagi aniq o'rni va tezligini amalda aniq bilib bo'lmayda. Ammo Broun zarra bilan molekullar tuqnashishlarining o'rtacha ta'siriga asoslanib, Broun zarrasi harakatini

qarashimiz mumkin. Shu mazmunda Lanjeven tenglamasi (176) staxostik tenglamalarning tipik misolidir.

Lanjeven tenglamasini yechishda quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $t = 0$ vaqtdagi (momentda) v_0 tezlikli Broun zarralari ansambli bo'yicha olingan $\bar{R}(t)$ ning o'rtacha qiymati nolga teng:

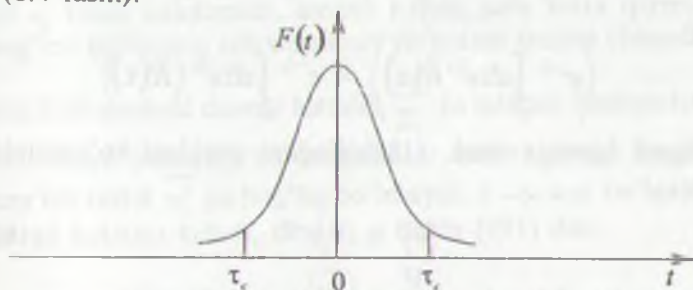
$$\langle \bar{R}(t) \rangle_n = 0 \quad (181)$$

Bu shart Broun zarrasining o'rtacha tezligi makroskopik tenglama (175) bilan aniqlanishini ta'minlaydi.

2. Betartib to'qnashishlar, agar vaqt bo'yicha yetarli darajada bir-biridan ajralgan bo'lsa, bir-biri bilan statistik bog'liq emas, deb hisoblanadi. Boshqacha aytganda, t_1 va t_2 paytlardagi kuchlar $\bar{R}(t)$ korrelatsiyasi to'qnashish vaqti $\tau_c < t_2 - t_1$ bo'lganda noldan farqli, $\tau_c \geq t_2 - t_1$ bo'lganda nolga teng deb qaraladi, ya'ni:

$$\langle \bar{R}(t_1) \bar{R}(t_2) \rangle_{\tau_c} = F(t_2 - t_1) \quad (182)$$

Bunda korrelyatsion funksiya $F(t_2 - t_1)$ grafigi $t_2 - t_1 = 0$ bo'lganda keskin tiklikka (cho'qqiga) ega bo'ladi; $t_2 - t_1 > \tau_c$ bo'lganda esa amalda nolga teng bo'ladi (6.4-rasm).



6.4-rasm.

$$F(t_2 - t_1) = \begin{cases} \neq 0 & t_2 - t_1 < \tau_c \\ = 0 & t_2 - t_1 \geq \tau_c \end{cases}$$

Bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama (176) ning yechimini

$$\bar{v} = \bar{v}_a + \bar{v}_H$$

ko'rinishida izlaylik, bunda

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 e^{-\psi}$$

bir jinsli tenglama $\dot{\vec{v}} = -\xi \vec{v}$ ning umumiy yechimi, $\vec{v}_H$ esa (176) tenglamaning xususiy yechimidir:

$$\vec{v}_H = e^{-\psi} \int_0^t d\tau e^{\xi\tau} \vec{R}(\tau)$$

Shunday qilib, (176) tenglamaning yechimi

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\xi t} + e^{-\psi} \int_0^t d\tau e^{\xi\tau} \vec{R}(\tau) \quad (183)$$

ko'rinishga ega. Bunda $\vec{R}(\tau)$ — noma'lum, (183) yechimnng hamma hadlarini ansambl bo'yicha o'rtachalaymiz:

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 e^{-\xi t} \rangle + \left\langle e^{-\xi t} \int_0^t d\tau e^{\xi\tau} \vec{R}(\tau) \right\rangle \quad (184)$$

Bunda

$$\langle \vec{v}_0 e^{-\xi t} \rangle = \vec{v}_0 e^{-\xi t} \quad (185)$$

$$\left\langle e^{-\xi t} \int_0^t d\tau e^{\xi\tau} \vec{R}(\tau) \right\rangle = e^{-\xi t} \int_0^t d\tau e^{\xi\tau} \langle \vec{R}(\tau) \rangle \quad (186)$$

(181) shartni hisobga olsak, (184) ifodani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_0 e^{-\xi t} \quad (187)$$

Bu esa makroskopik tenglama $\dot{\vec{v}} = -\xi \vec{v}$ ning yechimidir.

(183) ifodani kvadratga ko'tarib, so'ng uni o'rtachalab

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \left\langle v_0^2 e^{-2\xi t} + e^{-2\xi t} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 e^{\xi(\tau_1 + \tau_2)} \langle \vec{R}(\tau_1) \vec{R}(\tau_2) \rangle \right\rangle \quad (188)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bunda (181) shart hisobga olindi. (188) ifodada o'zgaruvchilarni

$$\tau_1 + \tau_2 = \chi, \tau_2 - \tau_1 = s$$

munosabatlar vositasida almashtirib,

$$\alpha(t) = \int_{-t}^{+t} ds \phi(s) \quad (189)$$

funksiyani kiritamiz. Bunda

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 e^{\xi(\tau_1 + \tau_2)} \langle \bar{R}(\tau_1) \bar{R}(\tau_2) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-t}^{+t} ds \phi(s) \int_0^{2t} d\chi e^{\xi\chi} = \\ &= \frac{\alpha(t)}{2\xi} (e^{2\xi t} - 1) \end{aligned} \quad (190)$$

(190) ni nazarda tutib, (188) ni quyidagicha yozamiz:

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = v_0^2 e^{-2\xi t} + \frac{\alpha(t)}{2\xi} (1 - e^{-2\xi t}) \quad (191)$$

Bu tenglamada kuzatish vaqti t to'qnashish vaqti τ_c dan yetarli darajada katta bo'lsa, ya'ni $t \gg \tau_c$ bo'lsa, $\alpha(t)$ ning o'rniga uning vaqtga bog'liq bo'lmagan qiymati

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \phi(s)$$

ni olish mumkin. (191) formuladan ko'rinadiki, t ning juda kichik qiymatlari ($t \ll (2\xi)^{-1}$) da tezlik fluktuatsiyasi tezlikning boshlang'ich qiymati v_0 bilan aniqlanadi, ammo t ning juda katta qiymatlarida bu boshlang'ich tezlikning roli umuman yo'qoladi (esdan chiqadi) va tezlik

kvadratik fluktuatsiyasi doimiy kattalik $\frac{\alpha}{2\xi}$ ga intiladi; boshqacha aytganda, bu fluktuatsiya butunlay to'qnashishlar mexanizmiga bog'liq bo'lib, boshlang'ich tezlik $\bar{v}_0^2$ ga bog'liq bo'lmaydi. $t \rightarrow +\infty$ bo'lganda sistema muvozanat holatiga keladi, deylik, u holda (191) dan

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{\alpha}{2\xi} \quad (192)$$

(59) formuladan ma'lumki, $\bar{p}_i^2(\omega) = m \langle \varepsilon \rangle$. By formulani ikki o'lchamli hol uchun yozsak bo'ladi:

$$\langle p_i^2(\omega) \rangle = 2M \langle \varepsilon(\omega) \rangle$$

yoki

$$\langle v^2(\omega) \rangle = \frac{2 \langle \varepsilon(\omega) \rangle}{M}$$

Bundan klassik hol uchun

yoki (192) ni e'borga olsak,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2kT}{M}$$

$$\frac{\alpha}{2\xi} = \frac{2kT}{M}$$

ekani kelib chiqadi. Buni e'tiborga olib, (191) ifodani

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{2kT}{M} + \left[v_0^2 - \frac{2kT}{M} \right] e^{-2\xi t} \quad (193)$$

shaklda yozamiz. (193) formuladan ko'rinadiki, Broun zarralari vaqt o'tishi bilan o'zining boshlang'ich tezligini esdan chiqara boradi va suyuqlik molekullari bilan to'qnashishlari tufayli muvozanat holatiga kela boradi.

Formula (193) "yirik strukturali" yoki vaqt bo'yicha tekislangan (silliqlangan) manzarani ifodalaydi. Bu esa makroskopik jarayonlarda kuzatiluvchi qaytmaslik mikroskopik jarayonlarni vaqt bo'yicha yaxlitlash orqali nazariyaga kiradi, deyishga asos bo'ladi.

Broun zarrasi siljishlarining shu zarra hamda muhitning xossalariga bog'liqligini ko'raylik. Buning uchun zarra harakati tenglamasini inersiya kuchini hisobga olmasdan yozaylik:

$$\xi \dot{\bar{r}} = \bar{R}(t) \quad (194)$$

Bu tenglamaning yechimi

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = \frac{1}{\xi} \int_0^t d\tau \bar{R}(\tau) = \frac{1}{\xi} \int_0^t d\bar{F}(\tau) \quad (195)$$

bo'ladi, bunda $d\bar{F}(\tau) = \bar{R}(\tau)d\tau$ — kuch impulsi va $\bar{r}_0$ — radius-vektor $\bar{r}$ ning $t=0$ dagi qiymati. (195) ifodani kvadratga ko'tarib, ansambl bo'yicha o'rtachalaylik:

$$\begin{aligned} \langle (\bar{r} - \bar{r}_0)^2 \rangle &= \frac{1}{\xi^2} \int_0^t \int_0^t \langle d\bar{F}(\tau_1) d\bar{F}(\tau_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{\xi^2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \langle \bar{R}(\tau_1) \bar{R}(\tau_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{\xi^2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \phi(\tau_2 - \tau_1) = \frac{1}{\xi^2} \alpha(t) \end{aligned} \quad (196)$$

Vaqt katta bo'lganda, (192) dan foydalanib, (196) ifodani

$$\overline{(\Delta r)^2} = \frac{4kT}{M\xi} \cdot t \quad (197)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan Eynshteyn formulasi kelib chiqadi:

$$\overline{(\Delta r)^2} = 2Dt, \quad (198)$$

bunda

$$D = \frac{2kT}{M\xi} \quad (199)$$

diffuziya ko'effitsiyenti. Ctoks qonuni bo'yicha $\xi = \frac{6\pi\eta a}{M}$ va demak:

$$D = \frac{kT}{3\pi\eta a}, \quad (200)$$

bunda η — suyuqlikning yopishqoqlik ko'effitsiyenti. a — Brown zarrasining radiusi.

(198) va (200) munosabatlarning o'rinli ekanini J.Perron va T.Svedberg tajribada ko'rsatdilar. Ular Bolsman doimiysi k va Avagadro soni $N = \frac{R}{k}$ ni tajribada aniqladilar va ularning qiymati boshqa metodlar bilan olingan qiymatlarga mos ekanligini ko'rsatdilar.

Masalalar.

6.18. Harakatchanlik $\mu(\omega) = \frac{1}{\xi(\omega)}$ ning Furiye komponenti aniqlansin.

Yechish. (180) tenglamaga asosan

$$v(\omega) = \mu(\omega)F(\omega) \quad (1)$$

FDT asosida

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\xi(\omega)} = \theta^{-1}(\omega) \langle v^2(\omega) \rangle = \beta(\omega) \omega \langle v^2(\omega) \rangle \quad (2)$$

ekanini aniqlaymiz. Bunda

$$\theta(\omega) = \frac{1}{\beta(\omega)} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

$\langle v^2(\omega) \rangle$ tezlik avtokorrelatsiyasi Furiye-komponentining kvadratidir.

6.19. H

Yechish

$$-t = \tau$$

Harakatchanlik μ (yoki ishqalanish koeffitsiyenti ξ) ni aniqlang. (184) tenglamani yetarli darajada kichik vaqt intervali 0 uchun yozamiz:

$$\text{Bunda } dv(t) = \mu(t' - t)F(t)dt = \mu(t' - t)dF(t) \quad (3)$$

Kuch im $\mu(t)$ kinetik koeffitsiyent (harakatchanlik "zichligi"), $dF(t)$ si. (3) dan korrelyatsion teorema asosida

$$\mu(\tau) = \theta^{-1} \langle v v(\tau) \rangle \quad (4)$$

unosabatni Olamiz, Bu ifodani vaqt bo'yicha integrallab, harakatchanlik (yoki ishqalanish koeffitsiyenti) ning umumiy ifodasi uchun

$$\mu, \equiv \frac{1}{\xi} = \int_0^t \mu(\tau) d\tau = \theta^{-1} \int_0^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle \quad (5)$$

tenglamaga Eslatma: bo'lamiz.

$$\text{Statsionar holat uchun quyidagi}$$

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu = \theta^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle \quad (6)$$

6.20. D deb qaraladi.

Yechish. $\theta \xi^{-1} = \theta \mu$ tenglikni isbot qiling, bunda D - diffuziya koef-

avvalgi masalaning yechimidan ma'lumki, (5) tenglama:

$$\text{Demak, } \frac{\theta}{\xi} = \int_0^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle \quad (7)$$

$$D = \int_0^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle \quad (8)$$

kanligini isbot qilish kerak.

1) $K(\tau) = \xi v(\tau)$ ni nazarga olib, (189) ni quyidagicha yozamiz:

$$q(t) = \xi^2 \int_{-t}^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle = 2\xi^2 \int_0^t d\tau \langle v v(\tau) \rangle = 2\xi^2(t) \quad (9)$$

(9)ni (196) ga Qo'yib, olamiz:

$$\overline{(\Delta r)^2} = 2D(t) \cdot t \quad (10)$$

(10) katta bo'lganda, ya'ni $t \gg \tau_c$ bo'lganda. D ni doimiy deb o'qida Eynshteyn formulasiga o'tadi, Bu esa diffuziya

koeffitsiyenti D ifodasi (8) bilan aniqlangan tezlik avtokorrelatsiyasining integrali ekanligini isbotlaydi.

2) ikkinchi usul,

$$v = \mu F$$

yoki chekli o'zgarish uchun

$$\Delta r = \mu \Delta t F$$

Korrelyatsion teorema asosan

$$\theta \mu \Delta t = \langle \Delta r \Delta r(\tau) \rangle$$

yoki har ikki tomonga siljishni e'tiborga olsak,

$$2\theta \mu \Delta t = \langle \Delta r \Delta r(\tau) \rangle = 2D \Delta t$$

bo'ladi. Bundan

$$D = \theta \mu = \theta \xi^{-1}$$

ekanligi kelib chiqadi.

6.21. Broun zarrasining r masofaga siljish ehtimolini aniqlang.

Yechish. Berilgan holatdan Broun zarrasining siljishlari tasodifiy va simmetrikdir. Shu sababli siljishlar normal (Gauss) taqsimoti bilan aniqlanadi:

$$dW(x) = A \exp \left[\frac{-x^2}{2(\Delta x)^2} \right] dx \quad (11)$$

Shuningdek, dy ga siljish ehtimoli

$$dW(y) = A \exp \left[\frac{-y^2}{2(\Delta y)^2} \right] dy \quad (12)$$

bo'ladi. Broun zarrasining r ga siljish ehtimoli (11) va (12) ehtimollarni ko'paytirib, so'ng burchaklar bo'yicha integrallab topiladi:

$$dW(r) = C \exp \left[\frac{-r^2}{2(\Delta r)^2} \right] r dr \quad (13)$$

bunda $\overline{(\Delta r)^2} = 2Dt$. Bu ifodadan ko'rinadiki, (13) taqsimot vaqt o'tishi bilan yoyilib ketadi.

MUNDARIJA

I b o b. KVANT STATISTIKA	3
1-§. Kirish	3
2-§. Sistema holati	4
3-§. Aynanlik prinsipi	8
4-§. Simmetrik va antisimmetrik to'ldin funksiyalar	9
5-§. Almashuv o'zaro ta'sir. Pauli prinsipi	12
6-§. Kvant zarralarning bir zarraviy holatlar bo'yicha taqsimoti	14
7-§. Kvant statistikaning taqsimot funksiyasi	16
8-§. Boze-Eynshteyn statistikasi	17
9-§. Fermi-Dirak statistikasi	19
10-§. Klassik statistika — kvant statistikaning xususiy holi. Aynish temperaturasi	20
11-§. Holatlar zichligi	25
II b o b. BOZE-EYNSHTEYN STATISTIKASINING TATBIQI	27
1-§. Kirish	27
2-§. Aynilgan boze — gaz. Boze — kondensatsiya	28
3-§. Muvozanatli nurlanish. Foton gaz	31
4-§. Plank formulasi	32
5-§. Qattiq jism issiqlik sig'imining nazariyasi	38
6-§. Issiqlik sig'imning Eynshteyn nazariyasi	42
7-§. Issiqlik sig'imning Debay nazariyasi	45
III b o b. FERMI-DIRAK STATISTIKASINING TATBIQI	61
1-§. Kirish	61
2-§. Qattiq jismlardagi elektronlar sistemasi	63
3-§. Absolut nol temperaturali Fermi-gaz	65
4-§. Past temperaturali Fermi-gaz termodinamikasi	66
5-§. Kristallardagi energetik zonalar	70
6-§. Holatlar zichligi. Qattiq jismlar turlari	75
7-§. Yarim o'tkazgichlar. Xususiy o'tkazuvchanlik	77
8-§. Aralashmali yarim o'tkazgichlar	81
9-§. Aralashmalar konsentratsiyalari bilan Fermi sathi orasidagi bog'lanish	84

IV b o b. O'TA YUQORI TEMPERATURALI VA ZICHLIKLI MODDA HOLATLARI.....	92
1 - b. Kirish	92
2 - b. Olamning avvalgi eralari	94
3 - b. Yulduzlarda elementlar sintezi	96
4 - b. Yulduz holatlari	100
5 - b. O'ta yangi yulduzlar	105
6 - b. Oq mitti yulduzlar	108
7 - b. Neytron yulduz	112
8 - b. Kvark yulduzlar. Qora teshiklar	121
V b o b. ZICHLIK MATRITSASI (OPERATORI)	128
1 - b. Kirish	128
2 - b. Dinamik kattalikning o'rtachasi	128
3 - b. Ossilyator koordinatasi va impulsining ehtimollari taqsimotlari	129
VI b o b. FLUKTUATSIYA NAZARIYASI	139
1 - b. Kirish	139
2 - b. Fluktuatsiyaning termodinamik nazariyasi	139
3 - b. Termodinamik parametrlar fluktuatsiyasi	145
4 - b. Zarralar soni fluktuatsiyasi	149
5 - b. Kvant ideal zarralar soni fluktuatsiyasi	151
6 - b. Fluktuatsiyalar munosabatlari	152
7 - b. Parametrlarning korrelatsiyasi	154
8 - b. Ideal gaz zarralari taqsimoti	157
9 - b. Chiziqli garmonik ossillyator koordinatasi va impuls qiymatlari fluktuatsiyalarining taqsimoti	163
10 - b. Elektromagnit maydon fluktuatsiyasining spektral zichligi va Plank formulasi	166
11 - b. Fluktuatsiya va noaniqlik munosabati	167
12 - b. Korrelatsiya parametri va fazoviy korrelatsiya orasidagi bog'lanish	170
13 - b. Fluktuatsiyalarning vaqt bo'yicha korrelyatsiyasi	174
14 - b. Fluktuatsion - dissipatsion teorema	176
15 - b. Korrelyatsion teorema	181
16 - b. Umumlashgan qabul qiluvchanlik bilan kinetik koeffitsiyentlar bog'lanishi	183
17 - b. O'leov asboblarning sezgirligiga fluktuatsiyalarning ta'siri	184
18 - b. Zichlik fluktuatsiyalarida yorug'lik sochilishi	187
19 - b. Broun harakati nazariyasi. Lanjeven tenglamasi	189

A.BOYDEDAEV, P.HABIBULLAEV

KVANT STATISTIK FIZIKA

O'quv qo'llanma

Muharrir *J.Subxon*
Texnik muharrir *M. Alimov*
Musahhih *H. Teshaboyev*
Kompyuterda sahifalovchi *A. Ro'ziyev*

Bosishga ruxsat etildi 22.08.07. Qog'oz bichimi 60x84 1/16
Hisob nashr tabog'i 12,5. b.t. Adadi - 500 nusxa.
Buyurtma raqami № 276.

«IQTISOD-MOLIYA» nashriyoti,
700084, Toshkent, X. Asomov ko'chasi, 7-uy.
Hisob-shartnoma №34-2007.

“Toshkent tezkor bosmaxonasi”
mas'uliyati cheklangan jamiyati bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, Radialniy tor ko'chasi, 10.

