МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО,
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ
СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО,
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

К. Х. Абдуллаев, Л. Е. Змиевская,
М. А. Низаметдинова, Ж. Х. Хусанов

ГЕОМЕТРИЯ

I часть

Экспериментальный учебник
для академических лицеев
с углубленным изучением математики

ТАШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 2002

22.151
Г 35

Рецензенты: *заслуженный работник Народного образования Республики Узбекистан, учитель математики высшей категории академического лицея при Самаркандском государственном университете* ***Насимов Хусан;***
кандидат физико-математических наук, учитель математики высшей категории лицея-интерната при Ташкентском государственном техническом университете ***Алимухамедов Саттар.***

А $\frac{\textbf{4306020502-68}}{\textbf{353 (04)—2002}}$ **тв. заказ —2002**

ISNB 5—645—03883—5 © Издательство „Ўқитувчи“, 2002

ОТ АВТОРОВ

На IX сессии Олий Мажлиса Республики Узбекистан (29 августа 1997 года) было принято два основных документа: «Закон Республики Узбекистан об образовании» и «Национальная программа по подготовке кадров», целью которых является коренное реформирование сферы образования, полный отказ от ее идеологизированной засоренности, создание Национальной системы подготовки высококвалифицированных кадров на уровне развитых демократических государств, отвечающей требованиям высокой духовности и нравственности.

До настоящего времени для академических лицеев с углубленным изучением геометрии не было учебного пособия, соответствующего новой учебной программе. Данный учебник по геометрии (I часть, Планиметрия) является одним из первых и предназначен для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. При написании этого учебника был использован многолетний опыт работы авторов в Национальном Республиканском лицее-интернате при Ташкентском государственном техническом университете и в академическом лицее имени С. Х. Сирожиддинова при Узбекском национальном университете.

В отличие от существующих учебников и учебных пособий по геометрии для общеобразовательных школ настоящий учебник имеет более подробные начальные геометрические понятия, расширенные сведения из истории развития геометрии как самостоятельной науки, а также данные о вкладе среднеазиатских ученых в развитие математики.

Кроме того, в учебнике дается более полный теоретический материал с доказательствами всех приводимых теорем и следствий, вытекающих из них. В частности, даются теоремы и формулы, которые ранее не изучались: дополнительные формулы для вычисления площадей фигур, различные углы, связанные с окружностью, линии второго порядка — окружность, эллипс, гипербола, парабола и их свойства.

Для самопроверки к каждой главе учебника приводятся вопросы и тесты.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам данного учебника кандидату физико-математических наук доценту Алимухамедову С. Т., заслуженному работнику Народного образования Республики Узбекистан Насимову Х. А., отличнику ССПО Республики Узбекистан Пашаеву З. А. за внимательное прочтение рукописи и сделанные ими полезные замечания.

Авторы благодарят также старейшего преподавателя и методиста ТашГТУ Давтяна В. О. за некоторые ценные замечания и полезные советы, сделанные им при прочтении отдельных глав книги.

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1.1. Из истории развития геометрии

Геометрия — греческое слово, в переводе на русский язык означает «землемерие», (от *гео* — земля и *метрия* — измеряю). Геометрия является разделом математики, в котором изучаются пространственные отношения и формы, а также те формы, которые сходны по своей структуре с пространственными.

Возникновение геометрии относится к глубокой древности (примерно к VII веку до н. э.) и обусловлено практической деятельностью: необходимостью измерения расстояний, вычисления площадей земельных участков, составления планов при земельных и строительных работах и др. В Древнем Египте, например, измерения были вызваны необходимостью уточнения русла реки Нил и его границ, постоянно меняющихся из-за его разливов.

Если арифметика была создана более пяти тысяч лет назад, то геометрия как наука систематическая, развивающаяся при помощи строгих логических рассуждений, восходит к трудам древнегреческих ученых, к VI—III вв. до н. э.

В развитии геометрии можно выделить **четыре основных периода.**

Первый период развития геометрии как математической науки достиг особенно высокого уровня в Египте. Египтяне вели оживленную торговлю с греками. Греки позаимствовали знания у египтян и дальнейшее развитие и обогащение геометрии многочисленными новыми теоремами уже связано с Грецией, где геометрия складывается в стройную систему со строгим ее обоснованием.

В этот период уже существовали отдельные доказательства, но они были еще достаточно примитивными. Это было время накопления фактического материала, связанного с развитием ремесел, земледелия и торговли, исчислением податей, обеспечением войск продовольствием и оружием, вычисления вместимости различных сооружений, сосудов и т. п.

Этот процесс привел к качественному скачку в развитии геометрии. Она выделилась в самостоятельную математическую науку.

С этого времени начинается **второй период** развития геометрии.

Известны положения, данные *Гиппократом Хиосским* (во второй половине V в. до н. э). Он является автором первого систематического курса геометрии, к сожалению, не дошедшего до наших дней.

Труды Гиппократа сыграли большую роль в появлении в III в. до н. э. «Начал» *Евклида*. В них геометрия (как ее понимают и сейчас) представлена как наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая в логической последовательности исходя из сформулированных положений-аксиом и основных пространственных представлений. Эту геометрию, уточненную и обогащенную, называют «Евклидовой геометрией». В тринадцати книгах, которые Евклид назвал «Начала», изложение геометрии настолько безупречно для своего времени, что в течение двух тысяч лет с момента появления они были единственным руководством для изучения этой науки.

Евклид

Из тринадцати книг «Начал» собственно геометрии посвящены книги I—IV и VI, где излагается планиметрия, а также XI—XIII, включающие стереометрию. Остальные книги «Начал» содержат сведения

по арифметике в геометрическом изложении. Каждая книга «Начал» начинается определением понятий, которые встречаются впервые. В первой книге даны 23 понятия. В частности:

Определение. *Точка есть то, что не имеет частей.*

Определение. *Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.*

За определениями следуют постулаты и аксиомы. Например:

Постулат 1. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую.

Постулат 2. Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиома 1. Равные порознь третьему равны между собой.

Аксиома 2. Если к равным прибавим равные, то получим равные.

И постулаты (от латинского слова — *требование*), и аксиомы (от греческого слова — *положение*) представляют утверждения, принимаемые без доказательств в рамках какой-либо научной теории за истины, хотя и недоказуемые средствами этой науки.

За аксиомами идут теоремы и задачи под общим названием «*предложения*», расположенные в строгой последовательности так, что доказательство каждого последующего опирается на предыдущие. Одно из них:

Предложение 1. Если в двух треугольниках две стороны одного равны двум сторонам другого и углы, содержащиеся между равными сторонами, равны, то и основание одного треугольника равно основанию

другого, и остальные углы одного треугольника равны остальным углам другого: равны именно углы, противолежащие равным сторонам.

«Начала» Евклида длительное время были образцом для сравнения. И хотя в них иногда были не совсем строгие изложения, многие определения даны безупречно, поэтому ими мы пользуемся и в настоящее время.

К недостаткам «Начал» следует отнести и изложение большого количества постулатов, многие из которых были впоследствии доказаны. А вот доказательство пятого постулата Евклида, формулировка которого «через одну и ту же точку плоскости нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой», пока безрезультатно, хотя этим занимались известные ученые геометры в течение более 2000 лет.

При попытке доказательства этого постулата типичной ошибкой было сознательное или несознательное использование какого-либо утверждения, не содержащегося явно в других постулатах и аксиомах и не вытекающего из них.

Поэтому существовало много предложений, также логически обратимых с постулатом Евклида (следовательно, логически равносильных).

Вот некоторые из этих предложений:

1. *Существует треугольник подобный, но неравный другому треугольнику* (итальянский математик Саккери, начало XVIII столетия).

2. *Существует выпуклый четырехугольник (прямоугольник), у которого все три угла прямые* (французский математик Клод Клеро, XVIII столетие).

3. *Через всякую точку, взятую внутри угла, меньшего 2 d, можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла* (немецкий математик Лоренц, конец XVIII столетия).

4. *Существует по крайней мере один треугольник,*

у которого сумма углов равна 2 d (французский математик Лежандр, начало XIX столетия).

Еще в Древней Греции в геометрии появляются новые методы определения площадей и объемов (Архимед, III в. до н. э. и другие). Первым из философов, применившим в математике в целом, и в том числе в геометрии, доказательства, был греческий ученый *Фалес Милетский*, живший в VII—VI вв. до н. э. Метод Фалеса — метод логического доказательства математических утверждений — был развит и усовершенствован учеными Пифагорейской школы, которые доказали теорему, называемую теоремой Пифагора (хотя формулировка этого утверждения была известна еще вавилонянам).

Поворотным пунктом было открытие пифагорейцами того, что «диагональ квадрата несоизмерима с его стороной».

Упадок античного общества привел к застою в развитии геометрии, однако она продолжала развиваться в Индии, в Центральной Азии и странах Арабского Востока.

Ведущую роль в развитии математики в средние века стали играть ученые стран Востока. Здесь, особенно в Индии и Китае, еще в древности сложилась своеобразная математическая культура, которая длительное время развивалась самобытно, а затем вступила во взаимодействие с культурой других стран, в том числе античной Греции.

Преемником научного наследия Индии и Китая, а также Древней Греции прежде всего стали ученые стран Ближнего и Среднего Востока.

Омар Хайям (1048—1131) получил широкую известность своими четверостишиями. Вместе с тем он был великим математиком своего времени. В трудах Хайяма много нового.

Математики Востока, предшественники Хайяма, вслед за Архимедом решали отдельные уравнения третьей степени. При этом они использовали геометри-

ческий метод. Неизвестное строилось путем нахождения точки пересечения двух конических сечений, которые подбирались в соответствии с решаемой задачей. Хайям показал, что этим методом можно решать любые уравнения третьей степени. Основой его теории, геометрической по методу, является классификация уравнений не выше третьей степени. Хайям выделил 25 типов уравнений, среди них аль-Хорезми рассмотрел шесть основных типов уравнений и пять, сводящихся к ним. Для их решения достаточно было двух книг Евклида «Начала» и построений с помощью циркуля и линейки. Для решения же остальных 14 типов уравнений используются конические сечения: парабола, гипербола, окружность, эллипс. Для каждого типа уравнений используются две из этих кривых.

Хайямом проведены глубокие исследования в самой геометрии, его внимание привлекла теория параллельных прямых. Пытаясь доказать пятый постулат Евклида, Хайям рассматривал четырехугольник, о котором пойдет речь в работах Лобачевского. Работы Хайяма показали, что постулат Евклида следует из утверждения о том, что «сумма внутренних углов плоского треугольника равна двум прямым».

Эти труды оказали большое влияние на Насир-ад-Дин-ат-Туси. Его исследования, как и работы Хайяма, стали известны в Европе, оставив заметный след в предыстории создания неевклидовой геометрии.

Беруни

Знаменитый ученый-энциклопедист Средней Азии *Мухаммед аль-Беруни* (973—1050) рассматривал и вопросы геометрии. Он использовал свойства треугольников в астрономии. Беруни вычислил сторону правильного вписанного девятиугольника, хорду дуги в 1°, отношение длины окружности к ди-

аметру и другие. Аль-Беруни решил первым задачу, которая привела к уравнению $x^3 + 1 = 3x$, решенному методом последовательных приближений. По существу, это уравнение трисекции угла.

В конце VIII — начале IX в. значительным научным центром был Багдад. В Багдаде было собрано много ученых и переводчиков из разных мест. Сюда прибывали в поисках убежища гонимые Византией ученые; имелись сирийские переводы многих научных трудов греческих ученых. Багдадская математическая школа активно работала два столетия. Были переведены основные произведения Евклида, Архимеда, Аполлония, Менелая, Герона и др.

Ряд выдающихся деятелей Багдадской школы открывает первый классик математики стран Востока *Мухаммад аль-Хорезми*, работавший при аль-Мамуне. Особо следует отметить и таких ученых, как Сабит ибн Корру (IX в.), Абу аль-Вафу (IX–X вв.), аль-Кухи и аль-Караджи.

Багдад был главным, но не единственным научным центром. Исследования велись в Дамаске и других городах. Например, на рубеже IX—X в.в. в обсерватории в ар-Ракке на Евфрате работал аль-Баттани, в обсерватории города Рея, недалеко от нынешнего Тегерана, работал аль-Ходжанди. Деятельность этих людей была важна для нового подъема науки. В разное время крупными научными центрами были Бухара, Хорезм, Газна, Рей и другие города. В Газне, в частности, долгое время работал Беруни.

Аль-Хорезми

Феодальные государства средних веков не были прочным политическим образованием. Создавались и исчезали большие государства. Они то распадались, то при более сильных правителях объединялись вновь. Военные походы разрушали города,

уничтожали ценности, созданные руками и умом человека. Однако все эти обстоятельства не могли остановить научный прогресс.

Но случались и непоправимые вещи. Так, в XI в. было уничтожено арабами древнее высокоразвитое Хорезмийское государство. В результате до сих пор мало что известно о состоянии наук в древнем Хорезме, а между тем многие крупные ученые, в том числе и ученый-энциклопедист аль-Беруни, были родом из Хорезма.

Возрождение наук и искусств в Европе привело к расцвету геометрии. Принципиально новый шаг был сделан в XVII веке *Рене Декартом*, который ввел в геометрию метод координат, позволивший связать геометрию с алгеброй и развивающимся анализом.

Геометрия перешла на качественно новую ступень.

С этого времени начинается **третий период** развития геометрии. Появляются аналитическая геометрия (изучает фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями в прямоугольных координатах с использованием при этом методов алгебры) и дифференциальная геометрия (исследует любые достаточно гладкие кривые линии и поверхности и их преобразования).

Четвертый период в развитии геометрии открывается построением *Н. И. Лобачевским* (в 1826 г.) новой неевклидовой геометрии, называемой теперь геометрией Лобачевского.

Независимо от Лобачевского в 1832 году венгерский математик *Иоанн Больян* (1802—1860) также построил новую геометрию, исходя из того же допущения, что и Лобачевский: через точку, взятую вне прямой, можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных этой прямой. Те же идеи развивал К. Гаусс, но не опубликовал их.

Позже немецкий математик *Риман* (1826—1866) показал возможность построения тоже особой, лишенной противоречий геометрии (названной потом гео-

метрией Римана), в которой вместо пятого постулата Евклида принимается допущение: через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной этой прямой (т. е. все прямые плоскости пересекаются).

Рассмотрим геометрию Лобачевского. Сущность и значение идеи Н. И. Лобачевского сводятся к следующему. В геометрии Евклида имеется аксиома (пятый постулат) о параллельных прямых, утверждающая: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более чем одну прямую, параллельную данной». Многие геометры пытались доказать эту аксиому, исходя из других основных посылок геометрии Евклида, но безуспешно. Н. И. Лобачевский пришел к выводу, что такое доказательство невозможно. Утверждение, противоположное аксиоме Евклида, гласит: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а, по крайней мере, две, не пересекающие ее прямые». Это и есть аксиома Лобачевского. Лобачевский, присоединив это положение к другим основным положениям геометрии, приходит к логически безупречным выводам. Система этих выводов и образует новую, неевклидову геометрию. Заслуга Лобачевского в том, что он не только высказал эту идею, но действительно построил и всесторонне развил новую геометрию.

Н. И. Лобачевский

В опубликованной работе «О началах геометрии» (1829—1830) Лобачевский начинает изложение основ новой геометрии (он ее называет *воображаемой*, а евклидову геометрию — *употребительной*) следующим образом: «Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть больше π. Остается предполагать эту сумму равной π или меньшей π. То и другое может быть принято без всякого про-

тиворечия впоследствии, от чего и происходят две геометрии: одна — употребительная по своей простоте — соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая — воображаемая, более общая и потому затруднительная, в своих вычислениях допускает возможность зависимости линий от углов.

Геометрия Лобачевского — геометрия n-мерного пространства. А геометрия Евклида — частный случай, для трехмерного пространства.

Приведем некоторые теоремы геометрии Лобачевского, резко отличающиеся от соответствующих теорем геометрии Евклида:

1. Два перпендикуляра к одной и той же прямой, по мере удаления от этой прямой, расходятся неограниченно.

2. Сумма углов треугольника меньше $2d$ (в геометрии Римана она больше $2d$), причем эта сумма не есть величина постоянная для разных треугольников.

3. Чем больше площадь треугольника, тем больше сумма его углов разнится от $2d$.

4. Если в выпуклом четырехугольнике три угла прямые, то четвертый угол — острый (в этой геометрии прямоугольники невозможны).

5. Если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то такие треугольники равны (значит, в геометрии Лобачевского не существует понятия «подобия»).

§ 1.2. Аксиоматика планиметрии

Известно, что геометрия изучает свойства фигур окружающего нас пространства. При этом изучаются те свойства, которые сохраняются при некоторых преобразованиях пространства: движении, подобии и др.

В современном курсе геометрии пространство рассматривается как некоторое точечное множество, а геометрические фигуры — как его подмножество.

Построение геометрии основано на следующей схеме:

1) перечисляются основные понятия, которые вводятся без определений. К основным понятиям отно-

сятся: множество; точка, прямая и плоскость; расстояние;

2) свойства и взаимосвязь основных понятий описывается с помощью определенной группы аксиом;

3) через основные понятия вводятся определения всех других геометрических понятий, например, угла, многоугольника, окружности;

4) на основании аксиом и определений доказываются теоремы.

Геометрия делится на планиметрию, изучающую свойства фигур, лежащих в одной плоскости, и стереометрию, изучающую свойства тел пространства.

Изучение курса геометрии базируется на различных системах аксиом.

Аксиоматика — система аксиом вместе с основными объектами и основными соотношениями между ними. Каждая геометрия определяется набором своих аксиом: аксиомы евклидовой геометрии, аксиомы проективной геометрии и др.

К системе аксиом предъявляются три основных требования: непротиворечивость, независимость и полнота.

Первая группа аксиом планиметрии характеризует взаимное расположение точек и прямых.

1. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.*

2. *Через любые две точки проходит прямая и притом только одна.*

Из этой аксиомы следует, что две различные прямые a и b могут иметь не более одной общей точки.

3. *Из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.*

4. *Каждая точка* O *прямой разбивает ее на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки* O*, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки* O*.*

5. Каждая прямая ***a****, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой* ***a****, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой* ***a****.*

Вторая группа аксиом относится к понятиям наложения и равенства фигур.

6. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

7. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

8. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

9. Любая фигура равна самой себе.

10. Если фигура Φ *равна фигуре* Φ_1*, то фигура* Φ_1 *равна фигуре* Φ*.*

11. Если фигура Φ_1 *равна фигуре* Φ_2*, а фигура* Φ_2 *равна фигуре* Φ_3*, то фигура* Φ_1 *равна фигуре* Φ_3*.*

Третья группа аксиом связана с измерением отрезков.

12. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого из них выражается положительным числом.

13. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Последняя аксиома — аксиома параллельных прямых.

14. В данной плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

§ 1.3. Основные понятия и определения

Как было отмечено в предыдущем параграфе (§ 1.2), основными понятиями геометрии являются: *множество, точка, прямая, плоскость* и *расстояние.*

Точки принято обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, D..., а прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, d... или двумя прописными латинскими буквами, поставленными у каких-либо двух ее точек.

На рисунке 1 изображена прямая a (или прямая AB).

Рис. 1

Определение. ***Полупрямой,*** *или* ***лучом,*** *называется часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эта точка называется* ***начальной точкой полупрямой.***

Определение. *Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую начальную точку, называются* ***дополнительными.***

На рисунке 2 изображены лучи OA и OB. O — начальная точка; OA и OB — дополнительные полупрямые прямой a.

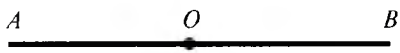


Рис. 2

Определение. ***Отрезком*** *называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между ее точками, называемыми концами отрезка.* Или: *отрезок — это часть прямой, ограниченная с двух сторон.*

На рисунке 3 изображены отрезки AB, CD, BC, AC, AD и BD.

Рис. 3

Определение. ***Геометрической фигурой*** *называется любое множество точек.*

917479

Таким образом, *прямая, луч, отрезок* — примеры геометрических фигур.

Определение. *Два отрезка являются* ***равными,*** *если они имеют равную длину, т. е. в одинаковых единицах измерения их длины выражаются равными числами.* Или: *два отрезка считаются равными, если они при наложении друг на друга совмещаются.*

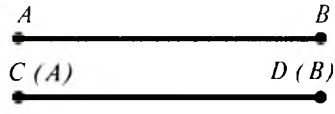


Рис. 4

Пусть даны два отрезка AB и CD.

Наложим отрезок AB на CD так, чтобы точка A совпала с точкой C и прямая AB пошла по прямой CD, если при этом концы B и D совпадут, то отрезки AB и CD считаются равными (в противном случае отрезки не будут равны, причем меньшим считается тот, который составит часть другого).

На рисунке 4 изображены равные отрезки AB и CD.

Отношение длин любых двух отрезков не зависит от выбора единицы длины. Поэтому можем говорить об отношении двух отрезков.

На рисунке 5 изображены отрезок a длиной 5 см и отрезок b длиной 8 см. Отношение этих отрезков: $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$.

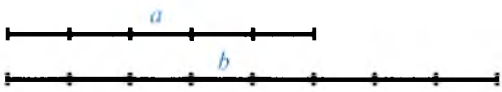


Рис. 5

Если точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC. Это свойство можно записать в виде равенства: $AC = AB + BC$ (рис. 6).

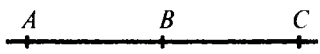


Рис. 6

Для нахождения суммы трех отрезков AB, CD и EF (рис. 7) на какой-нибудь прямой берем произвольную точку M и откладываем от нее отрезок MN, равный AB; затем от точки N в том же направлении

откладываем отрезок NP, равный CD, и отрезок PQ, равный EF. Тогда отрезок MQ и будет суммой отрезков AB, CD и EF, а сами отрезки будут называться *слагаемыми*.

$$AB + CD + EF = MQ.$$

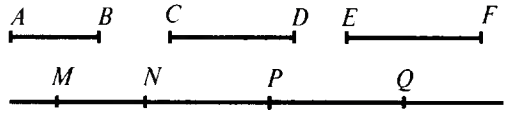


Рис. 7

Таким же образом можно получить сумму любого числа отрезков. Сумма отрезков обладает свойствами всякой суммы:

1) *она не зависит от порядка слагаемых — **перестительный** закон;*

2) *она не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммой — **сочетательный** закон.*

Из понятия суммы можно вывести понятие разности отрезков.

Определение. *Разностью двух отрезков AB и CD называется третий отрезок, сумма которого с CD образует отрезок AB.*

На рисунке 8 разность двух отрезков: $AB - CD = EB$, т. к. $AE + EB = CD + EB = AB$.

Рис. 8

На рисунке 9: $AB = 4AC$, или $AC = \frac{AB}{4} (n = 4)$.

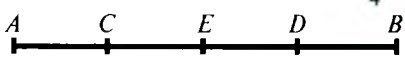


Рис. 9

При умножении или делении отрезка на натуральное число n его длина изменяется в n раз.

Итак, при умножении отрезка на натуральное число n длина его увеличится в n раз, а при делении отрезка на натуральное число n его длина уменьшается в n раз.

§ 1.4. Математические предложения

В геометрии мы сталкиваемся с разными предложениями, или понятиями. Одни из них мы считаем очевидными, истинность других устанавливаем путем рассуждений. В геометрии встречаются понятия следующих видов: *определения, аксиомы, теоремы, следствия, леммы.* Вспомним смысл этих понятий.

Определениями *называют предложения, в которых разъясняется, какой смысл придают тому или другому названию или понятию.*

Например: определение угла, центрального угла, биссектрисы и пр.

Аксиомами *называют истины, которые принимаются без доказательства.*

Например: 1) «через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну»;

2) «если две величины равны порознь одной и той же третьей величине, то они равны между собой».

В отличие от других наук в геометрии есть такие понятия, как *теорема* и *доказательство.* Только с их появлением геометрия стала наукой. Считают, что первые геометрические теоремы доказаны Фалесом Милетским. Среди них теоремы о вертикальных углах и свойстве равнобедренного треугольника, и еще теорема, называемая его именем. Дадим определение теоремы.

Теоремами *называются предложения, истинность которых обнаруживается только после некоторого рассуждения, т. е. доказательства.*

Например: «Два треугольника равны, если две стороны и угол, заключенный между ними, одного

треугольника равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника».

Или: «если центральные углы в одном круге или в равных кругах равны, то и соответствующие им дуги равны».

Каждая теорема состоит из двух частей: *условия* и *заключения*.

Условие — это то, что дано, а *заключение* — это то, что требуется доказать.

Например, в теореме: «если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны», условием служит первая часть теоремы: «если центральные углы равны»; а заключением — вторая часть: «то и соответствующие им дуги равны». Иначе: нам дано (известно), что центральные углы равны, а требуется доказать, что при этом условии и соответствующие дуги также равны.

Условие и заключение иногда могут состоять из нескольких частей. Условие теоремы часто начинается со слова «если», а заключение со слова «то».

Например, теореме «вертикальные углы равны» можно дать более подробную формулировку: «если два угла вертикальные, то они равны».

Следствиями *называются предложения, которые составляют непосредственный вывод из аксиомы или теоремы.*

Например, из теоремы: «вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается», следует, что «все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой».

Или, из аксиомы «через две точки можно провести только одну прямую», следует, что «две прямые могут пересечься только в одной точке».

Леммой *называется вспомогательная теорема.*

Примером леммы является лемма о подобии треугольников: «Прямая, параллельная какой-либо стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному».

Определение. ***Теоремой, обратной данной теореме,*** *называется такая, в которой условием является заключение, а заключением является условие данной теоремы.*

Например, следующие две теоремы будут обратными друг другу (или взаимно обратными):

Теорема. **Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.**

Теорема. **Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.**

Если одну из этих теорем назовем *прямой*, то другую следует назвать *обратной*.

Теорема (прямая). **У равнобедренного треугольника углы при основании равны.**

Теорема (обратная). **Если у треугольника два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.**

Но из справедливости прямой теоремы не всегда следует справедливость обратной. Вот простой пример. Прямой теореме: «Вертикальные углы равны» соответствует обратная теорема: «Если два угла равны, то они вертикальные», что, конечно, неверно.

Доказательство теоремы обычно начинается с ее условия, а затем, используя предыдущие, известные аксиомы или теоремы, доказывается заключение.

Но существует еще *метод доказательства от противного*. Суть его отражена в самом названии. Предполагая, что утверждение теоремы неверно, с помощью тех или иных рассуждений получаем противоречие либо с исходным предположением, либо с условием теоремы, либо с известным математическим фактом. По-латыни этот метод называется *reductio ad absurdum*, что означает — приведение к абсурду.

Метод от противного очень любил использовать Евклид при доказательстве обратных теорем.

При доказательстве теорем используется и *метод симметрии*.

Например, в теореме о свойствах равнобедрен-

ного треугольника в качестве метода доказательства используется *симметрия*. Интересно доказательство теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, приведенное Льюисом Кэрроллом — замечательным сказочником и выдумщиком. Его сказки про Алису и ее приключения в Стране Чудес и в Зазеркалье известны во всем мире. Однако не все знают, что Льюис Кэррол — это псевдоним, а настоящее имя автора этих книг Чарлз Латуидж Доджсон. Он был профессором математики в Оксфорде. Главным своим трудом Доджсон считал «Дополнение» к своей книге «Евклид и его современные соперники», в котором он, проводя доказательства теорем с помощью симметрии, называет ее «методом ножниц».

Теоремой, противоположной данной теореме, называется такая, в которой условие и заключение представляют отрицание условия и заключения данной теоремы.

Например, теореме: «Если треугольник равнобедренный, то углы его при основании равны», соответствует противоположная теорема: «Если треугольник не является равнобедренным, то углы при его основании не равны», которая справедлива.

Теореме: «Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны», т. е. $AB \parallel CD$; $\cup AC = \cup BD$ (рис. 10), соответствует противоположная теорема: «Если дуги не заключены между параллельными хордами, то они не равны», которая неверна. Например, равные дуги AB и $\cup AC$, хотя и не заключены между параллельными хордами (рис. 11).

Итак, противоположная теорема неверна, несмотря на то, что прямая теорема истинна.

Для лучшего понятия этой зависимости запишем формулировки те-

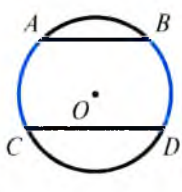


Рис. 10

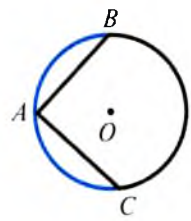


Рис. 11

оремы сокращенно. Обозначим условие теоремы буквой A, а заключение буквой B. Тогда будем иметь:

1. Прямая теорема: Если есть A, то есть и B.

2. Обратная теорема: Если есть B, то есть и A.

3. Противоположная прямой теореме: Если нет A, то нет и B.

4. Противоположная обратной теореме: Если нет B, то нет и A.

Рассматривая эти предложения, имеем, что первое находится в таком же отношении к четвертому, как второе к третьему, а именно: предложения первое и четвертое обратимы одно в другое, как второе и третье.

Действительно, из «если есть A, то есть и B» непосредственно следует: «если нет B, то нет и A» и обратно из предложения : «если нет B, то нет и A» следует: «если есть A, то есть и B».

Так же можно убедиться, что из второго следует третье, и наоборот.

Таким образом, чтобы иметь уверенность в справедливости всех четырех теорем, нет надобности доказывать каждую из них отдельно, а достаточно ограничиться доказательством только двух: прямой и обратной или прямой и противоположной.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется геометрической фигурой?
2. Какие фигуры называются равными?
3. Перечислить аксиомы планиметрии.
4. Что называется отрезком прямой?
5. Как обозначается отрезок?
6. Какие два отрезка называются равными?
7. Что называется суммой отрезков?
8. Какими свойствами обладает сумма отрезков?
9. Что значит умножить отрезок на число?
10. Чему равна разность отрезков?

11. Что называется определением, аксиомой, теоремой?
12. Что значит доказательство?
13. Что называется следствием?
14. Из чего состоит теорема?
15. Что называется условием и заключением теоремы?
16. Какая зависимость существует между прямой, обратной и противоположной теоремами?
17. Как из прямой теоремы можно получить обратную и противоположную теоремы?
18. Чем свойство фигуры отличается от признака?
19. Перечислить методы доказательств.
20. Привести пример прямой и обратной теоремы, чтобы прямая была верна, а обратная нет.
21. На поверхности каких геометрических тел можно проводить прямые линии или части прямых?
22. Почему при сгибании листа бумаги линия является прямой?
23. Что изучает геометрия?
24. Можно ли разбить прямую на два отрезка, на три отрезка, на два луча, на три луча?
25. На прямой даны точки A и B. Сколько можно найти на этой прямой точек M, таких, что а) $2AM = MB$; б) $AM = 3MB$.
26. На сколько частей могут разделить плоскость две прямые?
27. На плоскости проведены три прямые, не проходящие через одну точку и не параллельные друг другу? Как разделятся сами прямые?
28. Каким образом можно разделить плоскость на 3, 4, 5 частей?
29. Сколько осей симметрии имеют две пересекающиеся прямые?

Тест №1

1. Какая аксиома неверна?

А) Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей;

B) Через любые две точки можно провести прямые;
C) Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими;
D) Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля;
E) Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

2. Какое определение верно?

A) Треугольник — это фигура, состоящая из трех точек не лежащих на одной прямой и соединенные попарно тремя прямолинейными отрезками и части плоскости, лежащей внутри этой фигуры;
B) Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, соединенных тремя отрезками;
C) Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек и трех отрезков, соединяющих эти точки;
D) Треугольником называется фигура, состоящая из трех отрезков замкнутой ломаной линии.

3. Геометрия была открыта:

A) греками; B) египтянами; C) итальянцами; D) индусами; E) арабами.

4. Утверждение, принимаемое без доказательства:

A) определение; B) лемма; C) аксиома; D) теорема; E) следствие.

5. Сторону какого правильного вписанного многоугольника вычислил впервые Беруни?

A) шестиугольника; B) десятиугольника; C) восьмиугольника; D) девятиугольника; E) двенадцатиугольника.

6. Кому принадлежит это утверждение? Через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной прямой.

A) Евклиду; B) Лобачевскому; C) Риману; D) Омару Хайяму; E) Фалесу.

7. Сумма углов треугольника меньше 180°. Кому принадлежит это утверждение?

A) Евклиду; B) Лобачевскому; C) Риману; D) Омар Хайяму; E) Фалесу.

8. К какому понятию относится: две прямые могут пересечься только в одной точке. Что это?

A) теорема; B) лемма; C) аксиома; D) следствие; E) определение.

9. Кто считается первогеометром?

A) Фалес; B) Аполлоний; C) Евклид; D) Пифагор; E) Беруни.

10. Чем является утверждение: «вертикальные углы равны»?

A) аксиомой; B) теоремой; C) следствием; D) леммой; E) определением.

11. На луче AB отмечена точка C. Найти длину отрезка BC, если $AB = 1{,}6$ см и $AC = 0{,}4$ см.

A) 2 см; B) 1,2 см; C) 1 см; D) 0,8 см; E) 4 см.

12. На отрезке AB, равном 192 см, взята точка C так, что $AC : CB = 15 : 17$; на AC отложен отрезок CD, равный $\frac{2}{3}$ BC. Найти расстояние AD.

A) 22 см; B) 11 см; C) 112 см; D) 68 см; E) 92 см.

13. На прямой отложены два равных отрезка AC и CB. На отрезке CB взята точка D, которая делит его в отношении 4:5. Найти отрезок между серединами отрезков AC и DB, если CD равен 12 см.

A) 22 см; B) 27 см; C) 19,5 см; D) 33 см; E) 30 см.

14. Сколько книг включает «Начала» Евклида?

A) 14; B) 13; C) 12; D) 15; E) 11.

15. Прямоугольную систему координат ввел:

A) Евклид; B) Пифагор; C) Декарт; D) Герон; E) Фалес.

16. Теорему о вертикальных углах доказал:

A) Евклид; B) Пифагор; C) Декарт; D) Герон; E) Фалес.

17. Дан отрезок $AB = 180$ см. На AB взята точка C так, что $AC : CB = 4 : 5$, на AC отложен отрезок $CD = 0{,}2BC$. Найти расстояние между серединами крайних частей отрезка.

A) 100 см; B) 80 см; C) 90 см; D) 70 см; E) 50 см.

18. Сколько типов уравнений третьей степени выделил Омар Хайям?

A) 20; B) 24; C) 25; D) 28; E) 18.

19. На продолжении отрезка $AB = 100$ см взята точка C так, что $AC = 180$ см. Найти расстояние между серединами этих отрезков.

A) 140 см; B) 80 см; C) 90 см; D) 40 см; E) 50 см.

20. Кто первый решил приближенным методом уравнение: $x^3 + 1 = 3x$?

A) О. Хайям; B) Аль-Хорезми; C) Ат-Туси; D) Аль-Беруни; E) Ибн Сино.

Глава 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 2.1. Углы, их виды. Соотношения между ними

Понятие угла

Определение. ***Углом*** *называется часть плоскости, заключенная между двумя лучами этой плоскости, имеющими общее начало, включая сами лучи.*

Определение. *Точки, лежащие в этой части плоскости, называются* ***внутренними точками*** *угла.*

Определение. *Фигура, образованная двумя лучами и частью плоскости между ними, исходящими из одной точки, называется* ***углом****.*

Определение. *Лучи, образующие угол, называются* ***сторонами****, а их общее начало —* ***вершиной*** *угла.*

Угол обозначается тремя заглавными латинскими буквами, из которых средняя ставится у вершины, а две другие у каких-нибудь точек на сторонах угла (читается «угол AOB»). Но угол можно обозначить и одной буквой, поставленной у его вершины, если при этой вершине нет других углов (иногда слово угол заменяют знаком $\angle$).

На рисунке 12 изображены угол AOB, или $\angle O$; OA и OB — стороны угла, точка O — вершина угла.

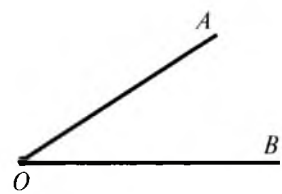


Рис. 12

Угол можно обозначить цифрой, поставленной внутри угла около вершины.

Стороны угла делят всю плоскость, в которой лежит этот угол, на две области. Одна из них (как уже сказано выше) называется внутренней областью угла (рис. 13 *а*), другая — внешней его областью (рис. 13 *б*).

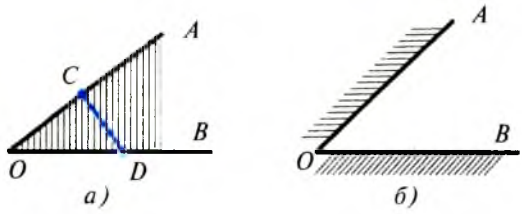


Рис. 13

Внутренней областью будем считать ту, в которой целиком помещается отрезок прямой, соединяющий две любые точки, взятые на сторонах угла. Например, отрезок CD, соединяющий произвольные точки C и D на сторонах угла AOB. Обычно «угол AOB» записывается как $\angle AOB$. Но иногда приходится считать углом другую часть плоскости, в этих случаях обычно делается специальное указание, какая область плоскости принимается за угол.

Равенство и неравенство углов

Определение. *Два угла называются* ***равными,*** *если при наложении они могут совместиться.*

Предположим, даны два угла: AOB и $A_1O_1B_1$.

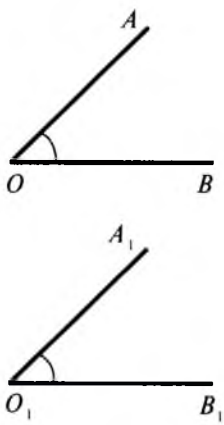


Рис. 14

Накладываем $\angle AOB$ на $\angle A_1O_1B_1$ так, чтобы вершина O совпала с O_1, сторона OB легла на O_1B_1 и чтобы внутренние области обоих углов были расположены по одну сторону от прямой O_1B_1. Если при этом сторона OA совместится с O_1A_1, то углы равны; если же OA расположится внутри $\angle A_1O_1B_1$ или же вне его, то углы не равны, причем тот из них будет меньше, который составит часть другого угла.

На рисунке 14 изображены углы, равные между собой.

Сумма углов

Определение. ***Суммой углов*** *называется угол, который получится при прикладывании одного из углов к другому так, чтобы внутренние области этих углов были расположены по разные стороны от их общей стороны, а вершина этих углов была общей.*

Суммой двух углов AOB и $A_1O_1B_1$ является $\angle A_1O_1D_1 = \angle A_1O_1B_1 + \angle B_1O_1D_1$, где $\angle B_1O_1D_1 = \angle AOB$ (рис. 15). Таким же образом можно составить сумму трех и более углов.

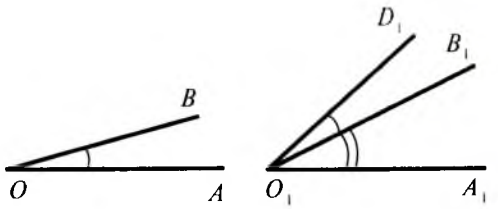


Рис. 15

Сумма углов, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами:

переместительным $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = \angle A_1O_1B_1 + \angle AOB$;

сочетательным $\angle AOB + (\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2) = (\angle AOB + \angle A_1O_1B_1) + \angle A_2O_2B_2$.

Расширение понятия об угле

При нахождении суммы углов возможны особые случаи.

1. После сложения нескольких углов сторона последнего угла составляет продолжение стороны первого угла.

Например, при сложении углов AOB, BOC, COD сторона OD составит продолжение AO. Полученную фигуру будем называть развернутым углом, или распрямленным (рис. 16).

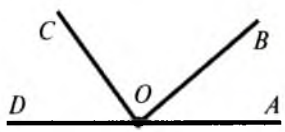


Рис. 16

Определение. *Угол, стороны которого лежат на одной прямой и являются дополнительными лучами этой прямой, называется* ***развернутым*** *углом.*

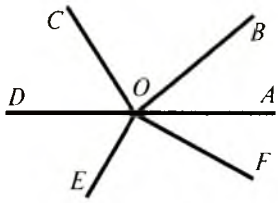


Рис. 17

2. После сложения нескольких углов сторона одного угла совместится со стороной другого угла. Например: при сложении углов *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOF*, *FOA* сторона *OA* угла *FOA* совместится со стороной *OA* ∠*AOB* (рис. 17).

Определение. *Фигура, образованная совпавшими полупрямыми (вместе со всей плоскостью), называется* ***полным*** *углом.*

Наиболее распространенной мерой углов является градусная мера.

Определение. ***Угол в 1 градус*** *(обозначается как 1°) есть 1/360 часть полного угла.*

В геометрии иногда углы измеряют в «долях d», принимая за единицу измерения прямой угол.

Для измерения углов в градусах используется транспортир.

Справедливы следующие утверждения:

1) каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля;

2) развернутый угол равен 180°;

3) градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами;

4) от любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°.

Определение. *Два угла называются* ***равными****, если их меры равны.*

Определение. *Из двух углов* ***бо́льшим*** *считается тот, мера которого больше.*

Определение. *Угол называется* ***прямым,*** *если его мера равна 90°* (рис. 18 *а*)

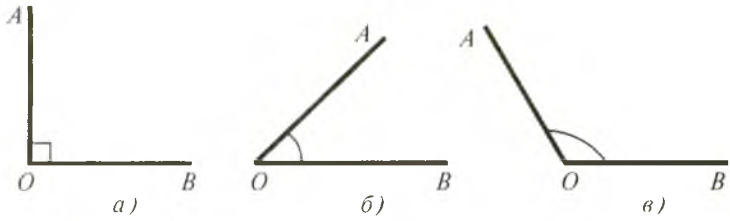


Рис. 18

Определение. *Угол называется* ***острым****, если он меньше прямого* (рис. 18 *б*).

Определение. *Угол называется* ***тупым****, если он больше прямого, но меньше развернутого (рис. 18 в).*

Определение. *Луч, который исходит из вершины угла и лежит в его внутренней области, называется* ***внутренним*** *лучом угла.*

Внутренний луч разбивает данный угол на два меньших угла.

Определение. ***Мера угла*** *равна сумме мер углов, на которые данный угол разбивается любым его внутренним лучом.*

Определение. *Внутренний луч, делящий угол на две равные части, называется* ***биссектрисой*** *угла.*

§ 2.2. Смежные и вертикальные углы и их свойства

Смежные углы и их свойства

Определение. *Два угла называются* ***смежными****, если одна сторона у них общая, а две другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.*

Рассмотрим свойства смежных углов.

теорема 1

Сумма двух смежных углов равна 180°.

Дано: $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные (рис. 19).

Доказать: $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

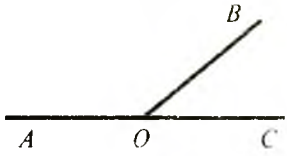


Рис. 19

Доказательство. Сумма двух смежных углов равна развернутому углу, т. е. 180°. Значит, $\angle AOB + \angle BOC$ — развернутый, т. е. $\angle AOB + \angle BOC = 180°$.

Следовательно, каковы бы ни были смежные углы, их сумма равна 180°, что и требовалось доказать.

Для каждого угла можно построить два смежных с ним угла. Продолжив сторону AO угла AOB за точку O, получим один смежный к нему угол BOC, а при продолжении другой стороны BO за точку O получим второй смежный угол AOD (рис. 20).

теорема 2

Два угла, смежные с одним и тем же углом, равны между собой.

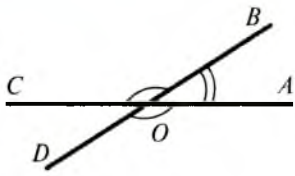


Рис. 20

Дано: $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — смежные с углом $\angle AOB$ (рис. 20).

Доказать: $\angle AOD = \angle BOC$.

Доказательство. Сумма $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ и $\angle AOB + \angle AOD = 180°$. Если от равных величин отнять тоже равные величины, то останутся равные величины. Следовательно, если от 180° отнять один и тот же угол AOB, то останутся равные углы AOD и BOC, т. е. $\angle AOD = \angle BOC$, что и требовалось доказать.

теорема 3

Если угол прямой, то каждый угол, смежный с ним, тоже прямой.

Дано: $\angle AOB = 90°$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — смежные с $\angle AOB$ (рис. 21).

Доказать: $\angle BOC = \angle AOD = 90°$.

Доказательство. По свойству смежных углов,

$\angle AOB + \angle BOC = 180°$, или $90° + \angle BOC = 180°$, а тогда $\angle BOC = 90°$. По теореме 2, $\angle BOC = \angle AOD = 90°$ как два угла, смежных с $\angle AOB$, что и требовалось доказать.

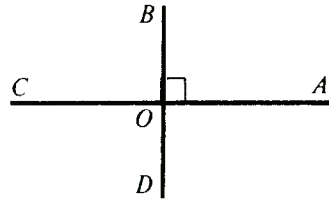


Рис. 21

Следствие. Если при пересечении двух прямых один из образовавшихся при этом четырех углов окажется прямым, то и остальные три угла должны быть прямыми.

Вертикальные углы и их свойства

Определение. *Два угла называются* ***вертикальными****, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми другого.*

теорема

Вертикальные углы равны.

Дано: AOB и COD — вертикальные углы (рис. 22).

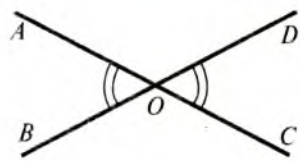


Рис. 22

Доказать: $\angle AOB = \angle COD$.

Доказательство. Пусть $\angle AOB$ и $\angle COD$ — любые вертикальные углы. Каждый из них смежный с углом AOD. По теореме 1 о смежных углах, $\angle AOB + \angle AOD = 180°$ и $\angle COD + \angle AOD = 180°$, откуда $\angle AOB = 180° - \angle AOD$ и $\angle COD = 180° - \angle AOD$. Следовательно, $\angle AOB = \angle COD$, что и требовалось доказать.

Особенности углов, имеющих общую вершину

Для углов, имеющих общую вершину, справедливы следующие утверждения.

1. Если сумма нескольких углов, имеющих общую вер-

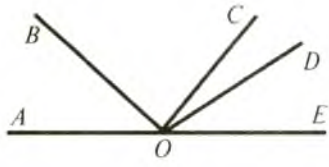


Рис. 23

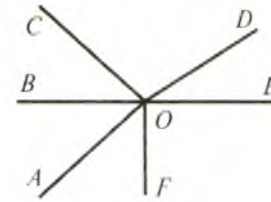


Рис. 24

шину, составляет развернутый угол, то она равна двум прямым, т. е. 180° (рис. 23).

2. Если сумма нескольких углов, имеющих общую вершину, составляет полный угол, то она равна четырем прямым, т. е. 360°.

На рисунке 24: $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF = 360°$.

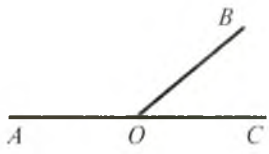


Рис. 25

3. Если два угла имеют общую вершину (O) и общую сторону (OB) и в сумме составляют 180°, то две другие стороны (AO и OC) составляют продолжение одна другой, т. е. такие углы будут смежными (рис. 25).

Определение. *Общая сторона двух смежных углов называется* ***наклонной к прямой,*** *на которой лежат две другие стороны, если смежные углы не равны между собой. Общая вершина этих углов называется* ***основанием наклонной.***

На рисунке 26: BO — наклонная к прямой AC; O — основание наклонной.

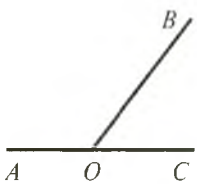


Рис. 26

Определение. *Общая сторона двух равных смежных углов называется* ***перпендикуляром к прямой****, на которой лежат две другие стороны смежных углов. Общая вершина этих углов называется* ***основанием перпендикуляра.***

На рисунке 27: BO — перпендикуляр к прямой AC; O — основание перпендикуляра.

Рис. 27

Определение. *Две прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются* ***взаимно перпендикулярными.***

Перпендикулярность двух прямых записывается символом «⊥».

На рисунке 28: прямые $BD \perp AC$.

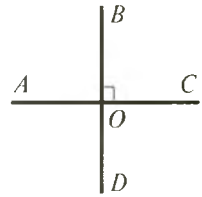


Рис. 28

§ 2.3. Треугольники и их виды

Прежде чем дать определение треугольника, вспомним определение ломаной линии.

Определение. ***Ломаной*** *линией называется линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого отрезка служит началом второго, конец второго отрезка началом третьего* и т. д.

Ломаная линия обозначается буквами, поставленными у ее вершин и концов. На рисунке 29 изображены ломаные $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

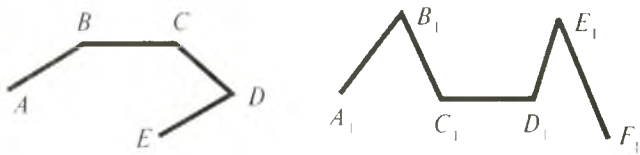


Рис. 29

Определение. *Отрезки называются* ***сторонами*** *ломаной, а вершины углов, образуемых соседними сторонами ломаной, называются ее* ***вершинами***.

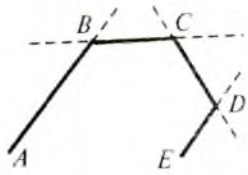


Рис. 30

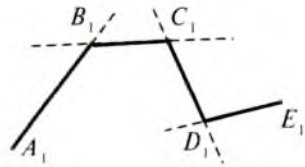


Рис. 31

Определение. *Ломаная линия называется* ***выпуклой****, если при проведении прямой через каждую сторону ломаная будет расположена по одну сторону этой прямой* (рис. 30).

На рисунке 31 ломаная $A_1B_1C_1D_1E_1$ не будет выпуклой, так как она расположена по разные стороны от прямой C_1D_1.

Определение. *Ломаная называется* ***замкнутой****, если ее концы совпадают.*

На рисунке 32 изображены замкнутые ломаные линии $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

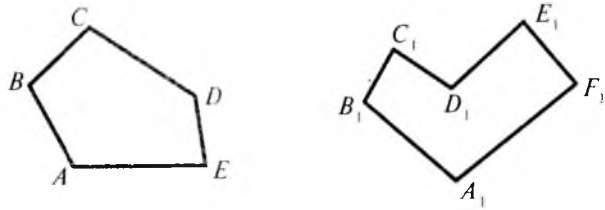


Рис. 32

Определение. ***Многоугольником*** *называется фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией. Стороны этой ломаной называются* ***сторонами многоугольника;*** *углы, составленные каждыми двумя соседними сторонами, называются* ***углами многоугольника****, а вершины этих углов —* ***вершинами многоугольника****.*

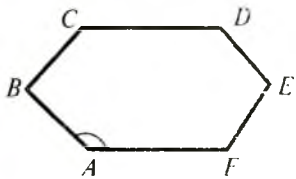


Рис. 33

На рисунке 33 изображен многоугольник $ABCDEF$. Угол BAF — при вершине A.

Определение. *Ломаная линия, ограничивающая многоугольник, называется его* ***контуром,*** *а отрезок, равный сумме всех его сторон, называется* ***периметром многоугольника.***

Определение. *Многоугольник называется* ***выпуклым,*** *если он ограничен выпуклой замкнутой ломаной линией.*

Определение. *Прямая, соединяющая любые несоседние вершины двух углов многоугольника, называется* ***диагональю*** *многоугольника.*

На рисунке 34 изображен выпуклый многоугольник $ABCDE$; AD — диагональ.

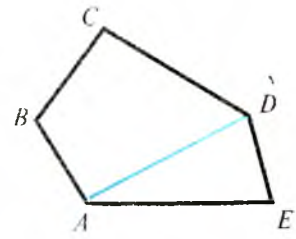


Рис. 34

Наименьшее число сторон в многоугольнике может быть три. По числу сторон многоугольник называется *треугольником, четырехугольником, пятиугольником* и т. д.

Определение. ***Треугольником*** *называется многоугольник, имеющий три стороны.*

Или: ***Треугольником*** *называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, и части плоскости, заключенной внутри этой фигуры.*

Треугольник обозначается символом Δ.

Виды треугольников

В зависимости от длин сторон треугольники бывают: *разносторонние, равнобедренные* и *равносторонние.*

Определение. *Треугольник называется* ***разносторонним,*** *если все его стороны различной длины.*

На рисунке 35 изображен разносторонний треугольник ABC, где $AB \neq BC \neq AC$.

Определение. *Треугольник называется* ***равнобедренным,*** *если две его стороны равны.*

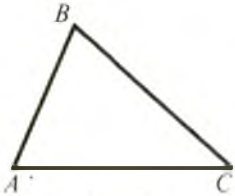


Рис. 35

Рис. 36

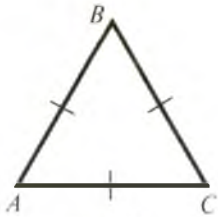


Рис. 37

На рисунке 36 изображен равнобедренный треугольник ABC, где $AB = BC \neq AC$.

Определение. *Треугольник называется* ***равносторонним,*** *если все его стороны равны.*

На рисунке 37 изображен равносторонний треугольник ABC, где $AB = BC = AC$.

В зависимости от величины углов треугольники бывают: *остроугольные, прямоугольные* и *тупоугольные.*

Определение. *Треугольник называется* ***остроугольным,*** *если все его углы острые.*

На рисунке 38 изображен остроугольный треугольник ABC, где $\angle A < 90°$; $\angle B < 90°$; $\angle C < 90°$.

Определение. *Треугольник называется* ***прямоугольным,*** *если один из его углов прямой.*

На рисунке 39 изображен прямоугольный треугольник ABC, где $\angle A = 90°$.

Определение. *Треугольник называется* ***тупоугольным,*** *если один из его углов тупой.*

На рисунке 40 изображен тупоугольный треугольник ABC, где $\angle A > 90°$.

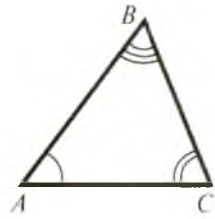


Рис. 38

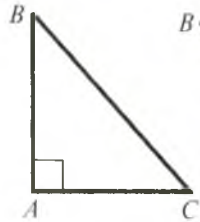


Рис. 39

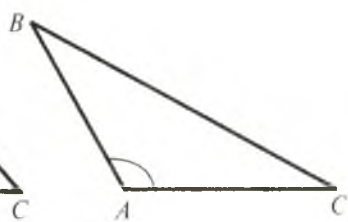


Рис. 40

Определение. *В прямоугольном треугольнике стороны, образующие прямой угол, называются* ***катетами,*** *а сторона, лежащая против прямого угла, называется* ***гипотенузой***.

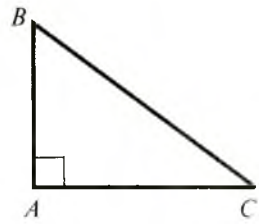


Рис. 41

На рисунке 41 изображен прямоугольный треугольник ABC, где AB и AC — катеты, BC — гипотенуза.

§ 2.4. Основные линии в треугольнике

Кроме шести основных элементов (сторон и углов) треугольник имеет и другие элементы.

Определение. ***Высотой*** *треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины угла треугольника на противоположную сторону (или на ее продолжение).*

На рисунке 42 основание высоты BD треугольника ABC лежит на стороне AC, а на рисунке 43 основание высоты B_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на продолжение продолжении стороны A_1C_1.

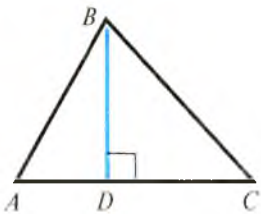


Рис. 42

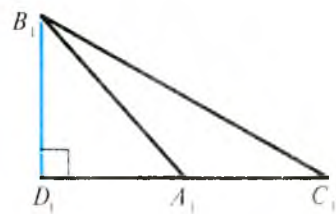


Рис. 43

Определение. ***Медианой*** *треугольника называется отрезок прямой, соединяющий любую вершину треугольника с серединой его противолежащей стороны.*

На рисунке 44 отрезок BM — медиана, так как $AM = MC$.

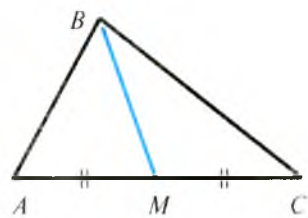


Рис. 44

Определение. ***Биссектрисой*** *треугольника называется отрезок прямой от вершины внутреннего угла треугольника до противоположной стороны, делящий этот угол пополам.*

На рисунке 45 изображен треугольник ABC, где BF — биссектриса угла B, т. к. $\angle ABF = \angle FBC$.

Таким образом, из каждой вершины треугольника можно провести высоту, медиану и биссектрису.

На рисунке 46 изображен треугольник ABC, где BD — высота ($BD \perp AC$); BF — биссектриса ($\angle ABF = \angle FBC$); BM — медиана ($AM = MC$), проведенные из вершины угла B.

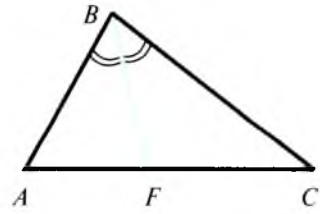


Рис. 45

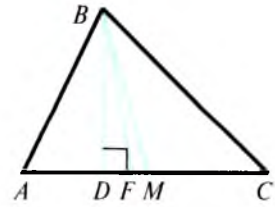


Рис. 46

В разностороннем треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, не совпадают.

В треугольнике частного вида эти элементы могут совпадать. Например, в равностороннем треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные из каждой вершины треугольника, совпадают. В равнобедренном треугольнике таким свойством обладают только высота, медиана и биссектриса одного угла, заключенного между равными сторонами этого треугольника (эта теорема будет доказана в § 2.5).

В каждом треугольнике имеются три высоты, три медианы и три биссектрисы.

§ 2.5. Свойства равнобедренного треугольника

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$.

Определение. *Равные стороны равнобедренного треугольника называются* ***боковыми сторонами****, угол между ними —* ***углом при вершине****, а третья сторона —* ***основанием.***

Рис. 47

На рисунке 47 изображен равнобедренный треугольник ABC, где AB и BC — боковые стороны; $AB = BC$; $\angle B$ — угол при вершине; AC — основание.

теорема

В любом равнобедренном треугольнике:

1) биссектриса угла при вершине треугольника является его медианой и высотой;

2) углы при основании равны.

Дано: ΔABC, $AB = BC$; BD — биссектриса $\angle ABC$ (т. е. $\angle 1 = \angle 2$) (рис. 48).

Доказать: 1) BD — медиана (т. е. $AD = DC$), BD — высота (т. е. $BD \perp AC$); 2) $\angle A = \angle C$.

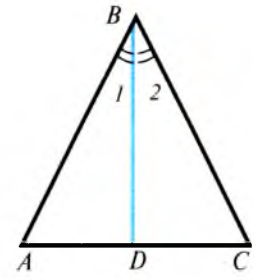


Рис. 48

Доказательство. Для доказательства повернем ΔABD вокруг BD до совмещения равных углов $\angle 1 = \angle 2$; вследствие их равенства сторона BA пойдет по стороне BC и совместится с ней, т. к. $AB = BC$. Поскольку через точки D и C проходит единственная прямая, то AD совместится с DC, следовательно, BD — медиана. ΔABD полностью совместится с ΔBDC, а тогда совместятся $\angle A$ и $\angle C$, а также $\angle ADB$ и $\angle CDB$. Из равенства смежных углов ADB и CDB следует, что $BD \perp AC$, т. е. BD — высота, что и следовало доказать.

Следствие 1. Так как из вершины равнобедренного треугольника можно провести только одну высоту и только одну медиану, то медиана всегда является биссектрисой и высотой, а высота — биссектрисой и медианой.

Следствие 2. В равностороннем треугольнике каждая из трех медиан является биссектрисой и высотой, а каждая высота — биссектрисой и медианой.

Следствие 3. В равностороннем треугольнике все внутренние углы равны.

Определение. *Две фигуры (в частности, две точки) называются* ***симметричными относительно прямой*** *(оси симметрии), если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой они совмещаются.*

Симметричные фигуры равны.

(Более подробно о симметрии в следующих главах.)

Следствие 4. В равнобедренном треугольнике осью симметрии является биссектриса (медиана, высота) угла при его вершине.

§ 2.6. Признаки равенства треугольников

Определение. *Две геометрические фигуры или два треугольника называются* ***равными****, если они совмещаются друг с другом при наложении.*

В совмещающихся треугольниках все их элементы: стороны, углы, высоты, медианы, биссектрисы должны быть равными. Однако для равенства треугольников нет необходимости устанавливать равенство всех их элементов, а достаточно убедиться в равенстве только некоторых из них.

Первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу

между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 49).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

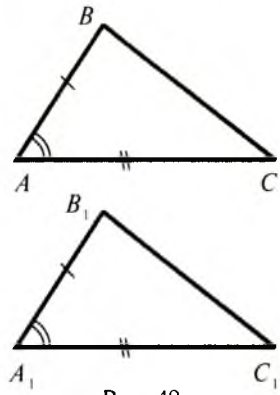


Рис. 49

Доказательство. Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с точкой A_1, а сторона AC пошла по стороне A_1C_1, тогда, вследствие равенства этих сторон, точка C совместится с точкой C_1. Вследствие равенства углов BAC и $B_1A_1C_1$, сторона AB пойдет по A_1B_1, а так как $AB = A_1B_1$, то точка B совпадет с точкой B_1; поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки C_1 и B_1 можно соединить только одной прямой). Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совместились при наложении, значит, они равны, что и требовалось доказать.

Второй признак равенства треугольников (по стороне и двум углам).

теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежашим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $BC = B_1C_1$; $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$; $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 50).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с точкой C_1 и сторона CB пошла по C_1B_1. Тогда вследствие равенства сторон CB и C_1B_1 точка B совпадет с точкой B_1. Вследствие равен-

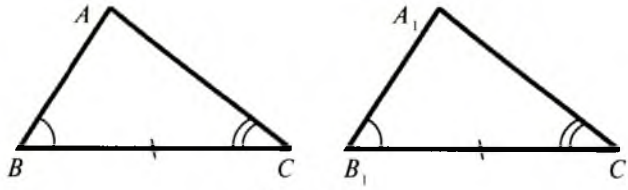


Рис. 50

ства углов ACB и $A_1C_1B_1$ сторона CA пойдет по C_1A_1, а вследствие равенства углов ABC и $A_1B_1C_1$ сторона BA пойдет по стороне B_1A_1. Так как две прямые C_1A_1 и B_1A_1 могут пересечься только в одной точке, то вершина A совпадет с вершиной A_1. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совместятся; значит, они равны, что и требовалось доказать.

Третий признак равенства треугольников (по трем сторонам).

теорема

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$ (рис. 51).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Для доказательства приложим ΔABC к $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1, а вершины B и B_1 находились по разные стороны от A_1C_1. Тогда ΔABC займет положение $\Delta A_1B_2C_1$, в котором $AB = A_1B_2$ и $BC = B_2C_1$ (рис. 52). Но $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, по условию, а потому стороны $A_1B_1 = A_1B_2$ и $B_1C_1 = B_2C_1$. Соединив B_1 и B_2, получим два равнобедренных треугольника

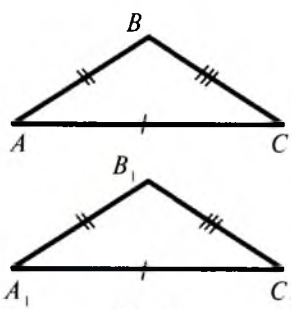


Рис. 51

$A_1B_1B_2$ и $B_1C_1B_2$ с общим основанием B_1B_2. Из свойств равнобедренного треугольника следует, что углы при основании в них равны, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, откуда следует, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1$. Тогда $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1B_2C_1$ (по первому признаку равенства треугольников). Значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

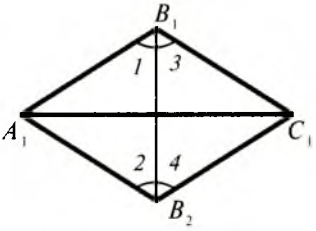


Рис. 52

Примечание. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.

§ 2.7. Признаки равнобедренного треугольника

Рассмотрим четыре признака равнобедренного треугольника.

теорема

(первый признак)

Если в треугольнике углы при двух вершинах равны, то этот треугольник равнобедренный.

Дано: ΔABC; $\angle A = \angle C$ (рис. 53).

Доказать: ΔABC равнобедренный, т. е. $AB = BC$.

Доказательство. Через точку D — середину стороны AC проведем перпендикуляр к стороне AC, который пересечет стороны AB и BC в точках B_1 и B_2.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ADB_1 и CDB_2. Они равны по второму признаку равенства треугольников: $AD = DC$ по построению; $\angle A = \angle C$ по условию; $\angle B_1DA = \angle B_2DC = 90°$.

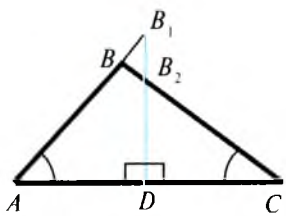


Рис. 53

Значит, DB_2 и DB_1 — равные отрезки, следовательно, точки B_1 и B_2 совпадают не только между собой, но и с точкой B. Следовательно, $AB = BC$, значит ΔABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

теорема

(второй признак)

Если в треугольнике биссектриса и высота, выходящие из одной вершины, совпадают, то этот треугольник равнобедренный.

Дано: ΔABC; BD — высота и биссектриса, т. е. $\angle ABD = \angle DBC$ и $BD \perp AC$ (рис. 54).

Доказать: ΔABC равнобедренный, т. е. $AB = BC$.

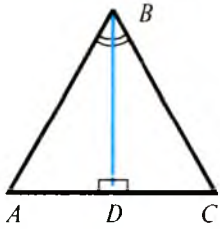


Рис. 54

Доказательство. Треугольники ABD и BDC имеют общую сторону BD и по два равных угла, прилежащих к ней. $\angle ABD = \angle DBC$ по условию, а $\angle ADB = \angle BDC = 90°$, т. к. $BD \perp AC$. Из равенства треугольников следует, что $AB = BC$. Значит, ΔABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

теорема

(третий признак)

Если в треугольнике высота и медиана, выходящие из одной вершины, совпадают, то этот треугольник равнобедренный.

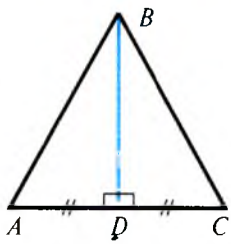


Рис. 55

Дано: ΔABC; BD — медиана и высота ($BD \perp AC$ и $AD = DC$) (рис. 55).

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. $\Delta ABD = \Delta DBC$ по первому признаку равенства треугольников: BD — общая сторона, $AD = DC$ по условию и $\angle ADB = \angle BDC = 90°$. Из равенства

треугольников следует, что $AB = BC$, т. е. ΔABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

теорема

(четвертый признак)

Если в треугольнике медиана и биссектриса, выходящие из одной вершины, совпадают, то треугольник равнобедренный.

Дано: ΔABC; BD — медиана и биссектриса; $AD = DC$ и $\angle ABD = \angle DBC$ (рис. 56).

Доказать: $AB = BC$.

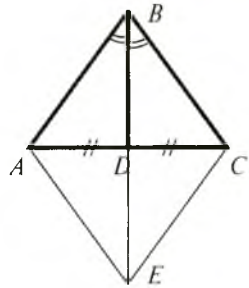


Рис. 56

Доказательство. Медиану BD продолжим за точку D и на этом продолжении отложим отрезок DE, равный BD. Соединим точку E с точками A и C. $\Delta ABD = \Delta CDE$ по первому признаку: $AD = DC$ по условию, $BD = DE$ по построению $\angle ADB = \angle CDE$ как вертикальные.

Из равенства треугольников следует, что $AB = CE$ и $\angle ABD = \angle DEC$. Но $\angle ABD = \angle DBC$ по условию, а потому $\angle DBC = \angle DEC$. ΔBCE — равнобедренный, т. к. углы при его основании равны (по первому признаку равнобедренного треугольника). Тогда $BC = CE$, но $CE = AB$ по доказанному. Следовательно, $BC = AB$ и ΔABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

§ 2.8. Внешний угол треугольника и его свойства

Определение. *Внешним углом треугольника (многоугольника) называется угол, смежный с его внутренним углом.*

При каждом внутреннем угле треугольника можно построить по два внешних угла. Эти два угла равны как углы вертикальные.

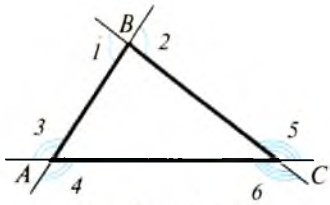


Рис. 57

На рисунке 57 внешние углы ΔABC: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$; $\angle 5 = \angle 6$.

теорема

(о внешнем угле треугольника)

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Дано: ΔABC; $\angle BCD$ — внешний (рис. 58).

Доказать: $\angle BCD > \angle A$; $\angle BCD > \angle B$.

Доказательство. Для доказательства проведем медиану AF и продолжим ее за точку F на расстояние, равное AF, т. е. $FE = AF$. Соединим точки E и C. Треугольники ABF и FEC равны по первому признаку: $AF = FE$ по построению; $BF = FC$, т. к. AF — медиана; $\angle BFA = \angle EFC$ как вертикальные.

Из равенства треугольников следует, что $\angle ABF = \angle FCE$, или $\angle B = \angle BCE$, но $\angle BCE$ составляет часть внешнего угла BCD, а потому $\angle BCD > \angle B$.

Аналогично докажем, что $\angle BCD > \angle A$. Для доказательства проведем медиану BM и продолжим ее на отрезок $MN = BM$. Соединим точки N и C. Рассмотрим ΔBAM и ΔMCN. Они равны по первому признаку равенства треугольников: $BM = MN$ по построению; $AM = MC$, т. к. BM — медиана, $\angle AMB = \angle NMC$ как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $\angle BAM = \angle MCN$. Но $\angle MCN$ составляет часть внешнего угла MCK, равного внешнему углу BCD (как вертикальному), и тогда $\angle MCN < \angle MCK$, а равный ему

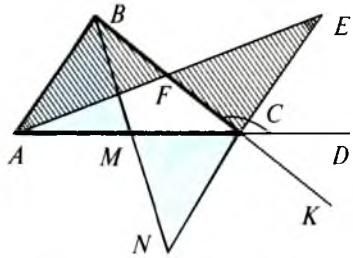


Рис. 58

$\angle BAC < \angle MCK = \angle BCD$, т. е. $\angle A < \angle BCD$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр.

Дано: прямая AB, точка C вне прямой, $CK \perp AB$ (рис. 59).

Доказать: CK — единственный перпендикуляр к AB.

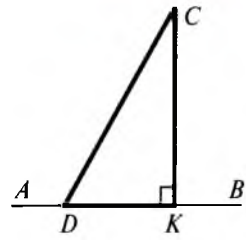


Рис. 59

Доказательство. Из того, что $CK \perp AB$, следует, что $\angle AKC = \angle CKB = 90°$. Предположим противное, что CK не единственный перпендикуляр к AB. Пусть CD также перпендикуляр к AB. Тогда $\angle CDK = 90°$. Но $\angle CKB$ является внешним углом ΔCDK и потому больше любого внутреннего угла этого треугольника, не смежного с ним. Тогда $\angle CKB > \angle CDK$, а при доказательстве получено, что $\angle CKB = \angle CDK = 90°$, что невозможно.

Следовательно, допущение о проведении второго перпендикуляра CD к прямой AB неверно. А потому перпендикуляр CK — единственный к AB, проведенный из точки C, что и требовалось доказать.

Следствие 2. В прямоугольном треугольнике только один внутренний угол прямой, а два других — острые.

Дано: ΔABC — прямоугольный (рис. 60).

Доказать: $\angle A < 90°$; $\angle B < 90°$.

Доказательство. Пусть BCD — внешний угол треугольника ABC. Так как он смежный с прямым углом BCA этого треугольника, то из свойства смежных углов $\angle BCD$ также прямой, т. е. $\angle BCD = \angle ACB = 90°$.

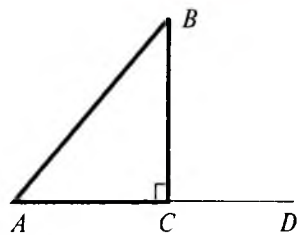


Рис. 60

По свойству внешнего угла ΔABC: $\angle BCD > \angle A$ и $\angle BCD > \angle B$, а т. к. $\angle BCD = 90°$, то $\angle A < 90°$ и $\angle B < 90°$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. В тупоугольном треугольнике только один угол тупой, а два других — острые.

Дано: ΔABC — тупоугольный (рис. 61).

Доказать: $\angle B < 90°$; $\angle C < 90°$.

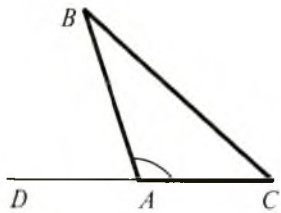


Рис. 61

Доказательство. Внешний $\angle BAD$ треугольника ABC является острым, т. к. смежный с ним $\angle BAC$ — тупой (сумма двух смежных углов равна 180°). По свойству внешнего угла ΔABC: : $\angle BAD > \angle B$ и $\angle BAD > \angle C$, т. е. внешний угол больше любого внутреннего, с ним не смежного, но $\angle BAD$ — острый, а потому $\angle B$ и $\angle C$ также острые, т. е. $\angle B < 90°$ и $\angle C < 90°$, что и требовалось доказать.

§ 2.9. Соотношения между сторонами и углами треугольника

теоремы

Во всяком треугольнике

1) против равных сторон лежат равные углы;

2) против бóльшей стороны лежит бóльший угол.

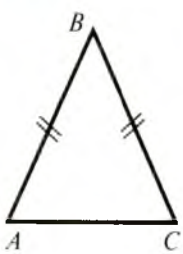


Рис. 62

1) Дано: ΔABC; $AB = BC$ (рис. 62).

Доказать: $\angle BAC = \angle BCA$.

Доказательство. По условию теоремы ΔABC —равнобедренный, а по свойству равнобедренного треугольника углы при его основании равны. Значит, $\angle BAC = \angle BCA$, что и требовалось доказать.

2) Дано: ΔABC; $AB > BC$ (рис. 63).

Доказать: $\angle BCA > \angle BAC$.

Доказательство. Отложим на большей стороне BA от вершины B отрезок BD, равный меньшей стороне BC, и соединим точки D и C прямой. Тогда получим равнобедренный ΔDBC, у которого углы при основании равны, т. е. $\angle BDC = \angle BCD$. Но угол BDC как внешний по отношению к ΔADC больше $\angle A$, не смежного с ним. Значит, $\angle BCD$ больше угла A, а потому $\angle BCA$ действительно больше угла BAC, что и требовалось доказать.

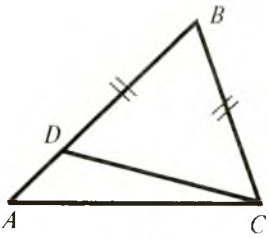


Рис. 63

теоремы

обратные

Во всяком треугольнике

1) против равных углов лежат равные стороны;

2) против большего угла лежит большая сторона.

1) Дано: ΔABC; $\angle A = \angle C$ (рис. 64).

Доказать: $AB = BC$.

Доказательство. Докажем эти теоремы методом от противного. Предположим противное, т. е. что стороны AB и BC не равны. Тогда одна из этих сторон должна быть больше другой и, следовательно, согласно прямой теореме, один из углов A или C должен быть больше другого. Но это противоречит условию, что $\angle A = \angle C$. Значит, наше предположение не верно, и стороны AB и BC равны, т. е. $AB = BC$, что и требовалось доказать.

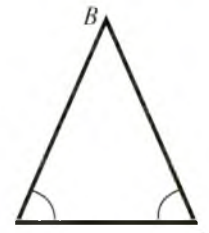


Рис. 64

2) Дано: ΔABC; $\angle C > \angle A$ (рис. 65).

Доказать: $AB > BC$.

Доказательство. Предположим противное, что

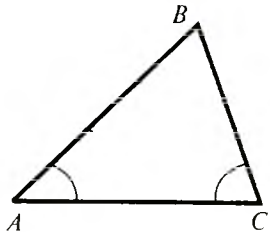


Рис. 65

AB не больше BC, т. е. $AB \leq BC$. Имеем два случая: или $AB = BC$, или $AB < BC$. В случае $AB = BC$, согласно прямой теореме, угол C должен быть равен $\angle A$, что противоречит условию $\angle C > \angle A$. Значит, наше предположение не верно. Рассмотрим случай $AB < BC$. Тогда, согласно прямой теореме, следует, что $\angle C < \angle A$, а это противоречит условию, следовательно, предположение, что $AB < BC$, тоже не верно. Итак, оба предположения не верны, а значит, $AB > BC$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. В равностороннем треугольнике все углы равны.

Следствие 2. В равноугольном треугольнике все стороны равны.

Следствие 3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого катета.

§ 2.10. Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной

Кратчайшим расстоянием между двумя точками плоскости является отрезок прямой линии, соединяющий эти точки. Это означает, что в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны. Данное свойство называется неравенством треугольника.

Сформулируем его в виде теоремы.

теорема

В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Дано: ΔABC; AC — наибольшая сторона (рис. 66).

Доказать: $AC < AB + BC$; $AB < AC + BC$; $BC < AB + AC$.

Доказательство. Достаточно доказать, что наибольшая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, поскольку два других неравенства очевидны. На продолжении стороны AB отложим отрезок $BD = BC$ и соединим точки D и C. Полученный $\Delta\, BCD$ — равнобедренный по построению, отсюда углы при его основании равны, т. е. $\angle D = \angle DCB$. Но $\angle DCB$ — часть $\angle DCA$, а потому $\angle DCB < \angle DCA$, а тогда $\angle D < \angle DCA$ и стороны треугольника, лежащие против этих углов, удовлетворяют условию $AC < AD$, т. е. $AC < AB + BD$. Но $BD = BC$, $AC < AB + BC$, что и требовалось доказать.

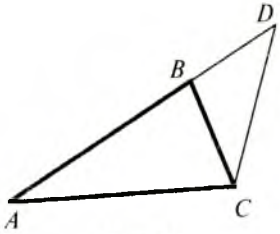


Рис. 66

Следствие. *В треугольнике каждая сторона больше разности двух других его сторон.*

Дано: $\Delta\, ABC$; a, b, c — длины его сторон ($b > a > c$) (рис. 67).

Доказать: $c > b - a$; $a > b - c$; $b > a - b - c$.

Доказательство. Из доказанной теоремы следует, что $b < a + c$. Вычтем из обеих частей этого неравенства: 1) по стороне a; 2) по стороне c. Получим:

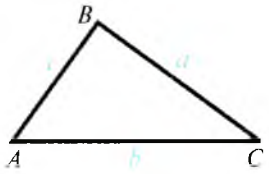


Рис. 67

1) $b - a < (a + c) - a$, или $b - a < c$, т. е. $c > b - a$;

2) $b - c < (a + c) - c$, или $b - c < a$, т. е. $a > в - c$.

3) Аналогичное доказательство для стороны $b > a - c$. Следствие доказано.

теорема

Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, меньше любой ломаной, соединяющей те же точки.

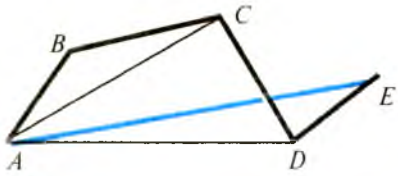


Рис. 68

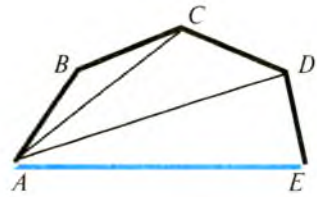


Рис. 69

Дано: ломаная $ABCDE$ и отрезок прямой AE (рис. 68, 69).

Доказать: $AE < AB + BC + CD + DE$.

Доказательство. Для доказательства соединим точку A с C и D, тогда, согласно предыдущей теореме, $AC < AB + BC$ (из ΔABC); $AD < AC + CD$ (из ΔACD); $AE < AD + DE$ (из ΔADE), т. е. каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Сложим почленно эти неравенства:

$AC + AD + AE < AB + BC + AC + CD + AD + DE$.

Из обеих частей полученного неравенства вычтем AC и AD, тогда $AE < AB + BC + CD + DE$, что и требовалось доказать.

теорема

Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то против большего из углов, заключенных между ними, лежит большая сторона.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$; $\angle A > \angle A_1$ (рис. 70).

Доказать: $BC > B_1C_1$.

Доказательство. Наложим $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC (рис. 71) так, чтобы A_1C_1 совпала с AC; так как $\angle A_1 < \angle BAC$, то сторона A_1B_1 пойдет внутри угла BAC и $\Delta A_1B_1C_1$ займет положение ΔAB_2C (вершина B_2 может оказаться внутри ΔABC или вне его, или же на стороне BC). Проведем биссектрису AD угла BAB_2 и со-

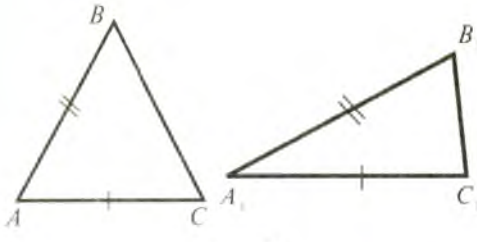


Рис. 70

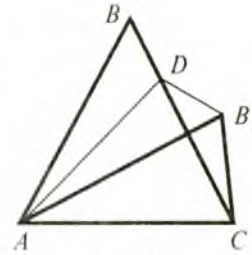


Рис. 71

единим точку D с B_2; тогда получим два треугольника ABD и DAB_2. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников: сторона AD — общая, $AB = AB_2 = A_1B_1$ по условию и $\angle BAD = \angle DAB_2$ по построению. Из равенства треугольников следует: $BD = DB_2$. Из $\Delta\, DCB_2$ выводим: $B_2C < B_2D + DC$, т. е. в треугольнике DCB_2 каждая сторона меньше суммы двух других его сторон. Заменив сторону B_2D на равную ей сторону BD, будем иметь $B_2C < BD + DC$, но $BD + DC = BC$, значит, $B_1C_1 < BC$, что и требовалось доказать.

теорема обратная

Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то против большей из неравных сторон лежит больший угол.

Дано: $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$ (рис. 72).

Доказать: $\angle A > \angle A_1$.

Доказательство. Докажем теорему методом от противного. Предположим, что $\angle A$ не больше $\angle A_1$; тогда может быть два случая: или $\angle A = \angle A_1$, или $\angle A < \angle A_1$.

В первом случае треугольники были бы равны по первому признаку ра-

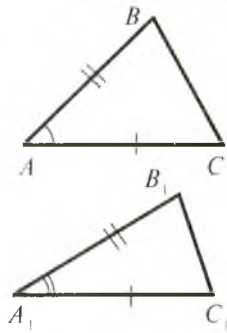


Рис. 72

венства треугольников: $AC = A_1C_1$; $AB = A_1B_1$ по условию и $\angle A = \angle A_1$ по предположению, следовательно, $BC = B_1C_1$, что противоречит условию. Во втором случае сторона BC (согласно прямой теореме) была бы меньше B_1C_1, что также противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и $\angle A > \angle A_1$, что и требовалось доказать.

§ 2.11. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных

Определение. *Точка пересечения перпендикуляра к прямой с этой прямой называется* ***основанием перпендикуляра.***

Определение. *Прямая, пересекающая другую прямую и не перпендикулярная к ней, называется* ***наклонной.***

Определение. *Точка пересечения наклонной к прямой с этой прямой называется* ***основанием наклонной.***

Определение. *Отрезок, соединяющий основания наклонной и перпендикуляра, проведенных из одной точки к прямой, называется* ***проекцией наклонной.***

Определение. ***Расстоянием от точки до прямой*** *является длина перпендикуляра от данной точки до его основания.*

теоремы

Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр меньше любой наклонной;

2) равным проекциям соответствуют равные наклонные;

3) большей проекции соответствует большая наклонная.

1) Дано: прямая MN; $AO \perp MN$; AB — наклонная (рис. 73).

Доказать: $AO < AB$.

Доказательство. По условию $AO \perp MN$, тогда ΔABO — прямоугольный и $\angle AOB$ — наибольший угол этого треугольника, а потому против него лежит наибольшая сторона (или: гипотенуза больше любого катета). Итак, $AO < AB$, что и требовалось доказать.

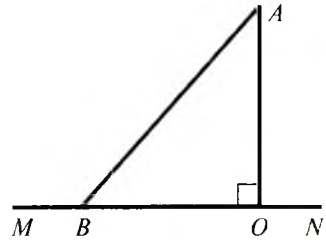


Рис. 73

2) Дано: прямая MN; $AO \perp MN$; AB и AC — наклонные, BO и OC — проекции наклонных; $BO = OC$ (рис. 74).

Доказать: $AB = AC$.

Доказательство. Рассмотрим ΔABC. В этом треугольнике AO является высотой, так как $AO \perp MN$, и медианой, так как $BO = OC$. Поэтому ΔABC — равнобедренный и значит $AB = AC$, что и требовалось доказать.

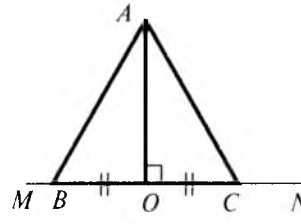


Рис. 74

3) Дано: прямая MN; $AO \perp MN$; AB и AD — наклонные; OB и OD — проекции наклонных; $OD > OB$ (рис. 75).

Доказать: $AD > AB$.

Доказательство. Для доказательства на прямой MN от точки O отложим отрезок OC, равный OB, и соединим точки C и A. ΔABC — равнобедренный, т. к. высота AO $(AO \perp MN)$ является в нем и медианой ($BO = OC$ по построению). Значит, $AB = AC$.

Угол ACD — внешний угол ΔAOC и потому больше любого внутреннего угла треугольника, с ним не смежного, т. е. $\angle ACD > \angle AOC = 90°$. Итак, $\angle ACD > 90°$, т. е. $\angle ACD$ —

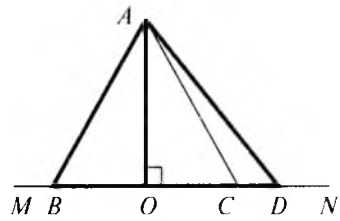


Рис. 75

тупой, а потому является наибольшим углом ΔACD. Тогда в треугольнике ACD против большего угла ACD лежит и большая сторона. Следовательно, $AD > AC$, но $AC = AB$, а тогда $AD > AC$, что и требовалось доказать.

теоремы

обратные

Если из точки, взятой вне прямой, проведены к ней две наклонные, то

1) равные наклонные имеют равные проекции;

2) большая наклонная имеет и большую проекцию.

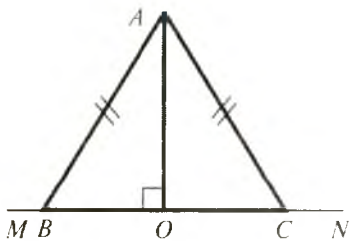


Рис. 76

1) Дано: прямая MN; $AO \perp MN$; AB и AC — наклонные; $AB = AC$; OB и OC — проекции наклонных (рис. 76).

Доказать: $OB = OC$.

Доказательство. Треугольник ABC равнобедренный, так как $AB = AC$. Высота AO его угла при вершине A является одновременно и медианой и потому $OB = OC$, что и требовалось доказать.

2) Дано: прямая MN; $AO \perp MN$; AB и AC — наклонные; $AC > AB$; OB и OC — проекции наклонных (рис. 77).

Доказать: $OC > OB$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть проекция OC не больше проекции OB. Поэтому, либо $OC = OB$, а тогда равным проекциям соответствуют равные наклонные AB и AC (согласно прямой теореме 2), что противоречит условию теоремы, либо $OC < OB$ и тогда (согласно прямой теореме 3) наклон-

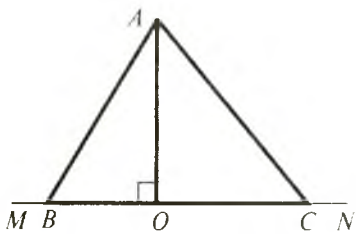


Рис. 77

ная AC меньше наклонной AB, что также противоречит условию теоремы. Итак, высказанное предположение о проекциях OC и OB неверно и, следовательно, $OC > OB$, что и требовалось доказать.

§ 2.12. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как прямоугольный треугольник есть частный случай треугольника общего вида, то два признака равенства треугольников не требуют особого доказательства.

теорема

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

теорема

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и прилежащему к нему углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.

Эти признаки являются частными случаями общих признаков равенства треугольников, поскольку углы, содержащиеся между катетами, всегда равны как прямые.

Докажем еще *два признака*, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

теорема

Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные; $AB = A_1B_1$; $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 78).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

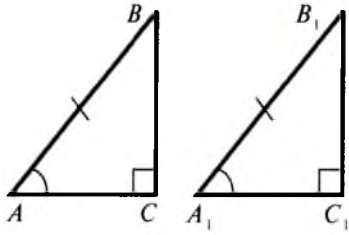


Рис. 78

Доказательство. Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные гипотенузы AB и A_1B_1. Тогда вследствие равенства углов A и A_1 катет AC пойдет по катету A_1C_1. Точка C должна совместиться с точкой C_1, т. к. из точки B_1 можно опустить на A_1C_1 только один перпендикуляр. Следовательно, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ совместятся, значит, они равны, что и требовалось доказать.

теорема

Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие прямоугольные треугольники равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные; $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$ (рис. 79).

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда в силу равенства углов C и C_1 катет CA пойдет по катету C_1A_1. При этом гипотенуза AB совместится с A_1B_1, иначе имели бы две равные наклонные AB и A_1B_1, проекции которых не равны, что невозможно. Значит, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ совместятся, следовательно, они равны, что и требовалось доказать.

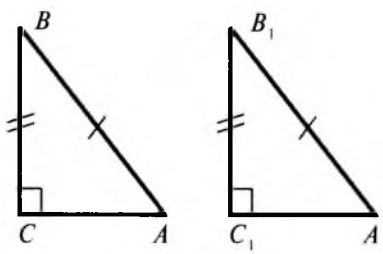


Рис. 79

§ 2.13. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину, и свойство биссектрисы угла

теорема 1

Любая точка, лежащая на перпендикуляре к отрезку, проведенному через его середину, одинаково удалена от концов этого отрезка.

Дано: отрезок AB; $AO = OB$; $EF \perp AB$; точка $M \in EF$ (рис. 80).

Доказать: $AM = MB$.

Доказательство. Рассмотрим ΔMAB. Так как его высота MO ($MO \perp AB$) является одновременно и медианой ($AO = OB$), то этот треугольник равнобедренный, а потому $AM = MB$, что и требовалось доказать.

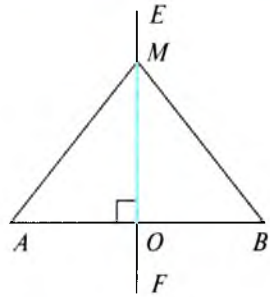


Рис. 80

теорема обратная

Если какая-либо точка равноудалена от концов некоторого отрезка, то она лежит на перпендикуляре к этому отрезку, проведенному через его середину.

Дано: отрезок AB; $AM = MB$; $MO \perp AB$ (рис. 81).

Доказать: $AO = OB$.

Доказательство. Через точку M проведем прямую $MF \perp AB$, которая пересекает AB в точке O. Прямоугольные треугольники AMO и BMO равны по общему катету MO и гипотенузам $AM = MB$. Из равенства треугольников следует, что $AO = OB$. Значит, прямая MF, проведенная через точку M, перпендикулярна к отрезку AB и делит его пополам, что и требовалось доказать.

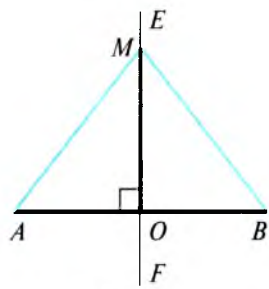


Рис. 81

теорема 2

Если какая-либо точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.

Дано: $\angle BAC$; AD — биссектриса; точка M лежит на AD; $ME \perp AB$; $MF \perp AC$ (рис. 82).

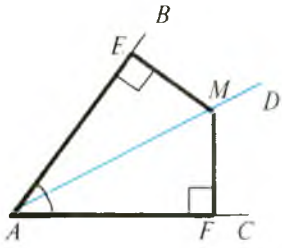


Рис. 82

Доказать: $ME = MF$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольные треугольники AEM и AMF. Они равны, т. к. имеют общую гипотенузу AM и равные острые углы $EAM = FAM$ (поскольку AM — биссектриса), и тогда катеты ME и MF равны, что и требовалось доказать.

теорема обратная

Если некоторая точка равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

Дано: $\angle BAC$; $ME \perp AB$; $MF \perp AC$; $ME = MF$ (рис. 83).

Доказать: AM — биссектриса $\angle BAC$.

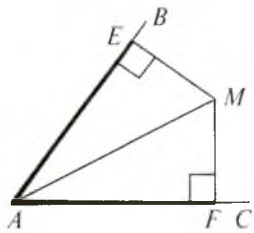


Рис. 83

Доказательство. Прямоугольные треугольники AEM и AFM равны по общей гипотенузе AM и равным катетам: $ME = MF$. Из равенства следует, что $\angle EAM = \angle FAM$, а потому AM — биссектриса $\angle BAC$, что и требовалось доказать.

Из двух доказанных прямых теорем можно получить противоположные теоремы.

теорема (противоположная теореме 1)

Если какая-либо точка не лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка, то она неодинаково удалена от концов этого отрезка.

теорема

(противоположная теореме 2)

Если какая-либо точка не лежит на биссектрисе угла, то она неодинаково удалена от сторон этого угла.

В справедливости этих теорем можно убедиться, доказывая их способом от противного.

Определение. ***Геометрическим местом точек,*** *обладающих определенным свойством, называется такое множество точек, которое содержит все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, которая данным свойством не обладает.*

Из доказанных теорем следует:

Определение. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является* ***перпендикуляр к отрезку,*** *соединяющему эти точки и проведенному через его середину.*

Определение. *Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного угла, является* ***биссектриса*** *этого угла.*

Окружность радиуса R с центром в точке O можно рассматривать как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки O на расстояние R.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется углом?
2. Как определяются вершины угла и его стороны?
3. Как обозначаются углы?
4. Какие углы называются равными?
5. Как найти сумму углов?
6. Какой угол называется развернутым?
7. Какой угол называется полным?
8. В каких единицах измеряются углы?
9. Что называется градусом?
10. Чему равна величина развернутого угла?
11. Какое соотношение существует между величинами двух равных углов?

12. Какой угол называется прямым, какой — острым, а какой — тупым?
13. Что называется биссектрисой угла?
14. Какие углы называются смежными?
15. Чему равна сумма смежных углов?
16. Чему равен каждый из двух равных смежных углов?
17. Какие углы называются вертикальными?
18. Каким свойством обладают вертикальные углы?
19. Чему равна величина полного угла?
20. Дать определения перпендикуляра и наклонной к прямой.
21. Что называется треугольником?
22. Какие виды треугольников вы знаете?
23. Какими свойствами обладает равнобедренный треугольник?
24. Перечислить признаки равнобедренного треугольника.
25. Сформулировать признаки равенства треугольников.
26. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?
27. Могут ли совпадать медиана и биссектриса одного угла треугольника?
28. В каком треугольнике медиана делит периметр пополам?
29. Могут ли в треугольнике быть равными только две медианы?
30. Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.
31. В каких пределах может меняться периметр треугольника, у которого две стороны a и b равны?
32. Какие три основных элемента определяют треугольник?
33. Длины двух сторон треугольника равны a и b. Какую длину может иметь его третья сторона?
34. Даны два основных элемента треугольника a и b. Какой основной элемент надо добавить, чтобы треугольник был определен?

35. Какой вид имеет треугольник, если его две медианы являются биссектрисами?

36. Какая сторона является наибольшей в тупоугольном треугольнике?

37. Какие условия необходимы для равенства двух треугольников?

38. Чему равен угол между биссектрисами двух смежных углов?

39. На сколько частей разделяют плоскость стороны острого угла? Какую из них называют внутренней областью угла, а какую — внешней? Какая из них больше и почему?

40. У какого угла обе области — внутренняя и внешняя — при наложении совмещаются?

41. У какого угла внешняя область в три раза больше внутренней?

42. У какого угла внешняя область меньше внутренней?

43. У какого угла нет внешней области?

44. Являются ли смежными два угла, приложенные друг к другу так, что две их стороны совпадают, если один из них равен 110°, а второй составляет 70% от прямого угла?

45. Каким свойством обладают биссектрисы двух смежных углов?

46. Каким свойством обладают биссектрисы двух вертикальных углов?

47. В каком угле биссектриса всегда перпендикулярна его сторонам?

48. Может ли разность двух углов быть равной прямому углу, если:

a) оба угла острые; b) один угол острый, а другой тупой; c) углы смежные; d) оба угла тупые?

49. Верны ли следующие утверждения:

a) всякий треугольник является многоугольником; b) всякий многоугольник является треугольником; c) всякий равносторонний треугольник является равнобедренным?

Тест №2

1. Чему равен угол, если он на 40° больше угла, смежного с ним?

A) 70°; B) 80°; C) 100°; D) 110°; E) 120°.

2. Чему равен $\angle AOC$, если $\angle AOB = 78°$, $\angle BOC = 82°$?

A) 180°; B) 160°; C) 150°; D) 140°; E) 130°.

3. Какое наибольшее число лучей можно провести через данную точку, чтобы все углы были тупыми?

A) 4; B) 3; C) 5; D) 2; E) 6.

4. Периметр треугольника равен 6 см, длины его сторон выражаются целыми числами. Найти его стороны.

A) 1; 2; 3 см; B) 1; 1; 4 см; C) 2; 2; 2 см; D) не существует; E) 3; 1; 1 см.

5. Стороны треугольника равны 9 см; 7 и 4 см. Через вершину треугольника, противоположную меньшей стороне, проведена прямая, делящая его периметр пополам. В каком отношении эта прямая делит меньшую сторону треугольника?

A) 7 : 9; B) 11 : 13; C) 1 : 3; D) 2 : 2; E) 1 : 2.

6. Найти периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 3,8 и 7,8 см.

A) 15,4 см; B) 19,4 см; C) 16,6 см; D) 18,4 см; E) 17,4 см.

7. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5 см?

A) 5; B) 3; C) 2; D) 4; E) 6.

8. Чему равен угол, если известно, что биссектриса смежного с ним угла образует угол 20° с одной из сторон этого угла?

A) 100°; B) 120°; C) 160°; D) 140°; E) 80°.

9. Найти угол α, если $\alpha - \beta = 20$ и α и β — смежные углы.

A) 80°; B) 100°; C) 160°; D) 120°; E) 60°.

10. В равнобедренном треугольнике угол, смежный с углом при вершине, равен 110°. Найти угол при основании треугольника.

A) 40°; B) 45°; C) 70°; D) 35°; E) 55°.

11. В треугольнике ABC: $AB = BC$ и $\angle ACB - \angle ABC = 60°$. Найти угол ABC.

A) 40°; B) 60°; C) 50°; D) 30°; E) 20°.

12. Найти угол, если он в 8 раз больше смежного с ним угла.

A) 80°; B) 140°; C) 160°; D) 100°; E) 120°.

13. Внутренние углы треугольника, не смежные с внешним углом, равным 108°, относятся как 5 : 4. Найти меньший из этих двух углов.

A) 45°; B) 40°; C) 75°; D) 48°; E) 30°.

14. Два внешних угла треугольника равны 120° и 160°. Найти третий внешний угол.

A) 100°; B) 80°; C) 90°; D) 70°; E) 60°.

15. Среди следующих высказываний найдите верное:

A) во всяком треугольнике биссектрисы, пересекаясь, делятся в отношении 1 : 2;
B) треугольники равны, если они имеют по две равные стороны и одному равному углу;
C) высота, опущенная из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике, целиком лежит внутри треугольника;
D) два равнобедренных треугольника равны, если равны их основания и углы при вершинах;
E) сумма смежных углов больше 180°.

16. Чему равен угол между биссектрисами смежных углов?

A) 100°; B) 80°; C) 90°; D) 120°; E) 60°.

17. Сумма данного угла и двух смежных с ним равна 330°. Чему равен данный угол?

A) 30°; B) 165°; C) 45°; D) 15°; E) 60°.

18. Один из смежных углов составляет $\frac{5}{13}$ другого. Определить меньший угол.

A) 40°; B) 50°; C) 65°; D) 130°; E) 60°.

19. $\angle AOB = \angle BOC$. Проведены биссектрисы OD и OE данных углов. Сколько пар равных углов получится?

A) 5; B) 3; C) 8; D) 4; E) 6.

20. Развернутый угол разделен на 4 равные части. Чему равен угол между биссектрисой угла первой части и биссектрисой угла четвертой части?

A) 150°; B) 135°; C) 120°; D) 100°; E) 140°.

21. В вершине угла, равного 160°, восставлены перпендикуляры к его сторонам. Определить угол между перпендикулярами.

A) 10°; B) 20°; C) 30°; D) 80°; E) 60°.

22. В каком треугольнике одна из его главных линий совпадает с его стороной?

A) равностороннем; B) равнобедренном; C) тупоугольном; D) прямоугольном; E) остроугольном.

23. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 24 см, делится высотой на два треугольника, периметры которых равны соответственно 12 и 20 см. Найти высоту прямоугольного треугольника.

A) 5 см; B) 10 см; C) 8 см; D) 4 см; E) 6 см.

24. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части: 15 см и 9 см. Найти равные стороны.

A) 9 см; B) 10 см; C) 8 см; D) 4 см; E) 7 см.

25. Угол вместе с двумя смежными углами равен 300°. Найти этот угол.

A) 45°; B) 90°; C) 30°; D) 150°; E) 60°.

26. Возможен ли треугольник, в котором: a) стороны равны 23 см; 18 см; 45 см; b) стороны равны 1м; 2м; 11 дм; c) одна из двух равных сторон равна половине третьей стороны; d) одна из сторон вдвое меньше другой и втрое меньше третьей; e) стороны относятся как 2:3:4?

A) нет, да, нет, нет, да; B) нет, нет, нет, нет, да; C) да, да, нет, нет, да; D) да, да, нет, нет, нет; E) да, да, да, нет, нет.

27. Периметр равнобедренного треугольника равен 44 см. Определить стороны, если одна из них равна: a) 14 см; в) 2 см; c) 22 см.

A) a) 14, 14 и 16 или 14, 15 и 15 см; b) 2, 21 и 21 или 2, 2 и 40 см; c) треугольник невозможен;
B) a) 14, 14 и 16 или 14, 15 и 15 см; b) 2, 21 и 21 см; c) треугольник невозможен;
C) a) 14, 14 и 16 см; b) 2, 21 и 21 или 2, 2 и 40 см; c) треугольник невозможен;
D) a) 14, 14 и 15 см; b) 2, 2 и 40 см; c) 22; 11 и 11 см;
E) a) 14, 14 и 16 или 14 см; 15 и 15 см; b) 2; 21 и 21 или 2 , 2 и 40 см; c) 22; 11 и 14 см.

28. Периметр треугольника равен p. Найти его стороны, если каждый из его внутренних углов треугольника равен $\frac{2}{3}\ d$.

A) $\frac{p}{4}; \frac{p}{4}; \frac{p}{2}$; B) определить нельзя; C) $\frac{p}{3}; \frac{p}{3}; \frac{p}{3}$; D) $\frac{p}{3}; \frac{p}{2}; \frac{p}{6}$; E) $\frac{p}{3}; \frac{p}{4}; \frac{5p}{12}$.

29. При каких значениях параметра a из трех отрез-

ков с длинами $1 + a$; $1 - a$ и 1,5 можно построить треугольник?

A) $(-0{,}75;\ 0{,}75)$; B) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; C) $\varnothing$; D) $(-0{,}7;\ 0{,}7)$; E) $(-0{,}4;\ 0{,}4)$.

30. В треугольнике два внутренних угла равны соответственно d и $\frac{d}{2}$, а внешний угол при третьей вершине равен $\frac{3}{2}d$. Какого вида этот треугольник?

A) равносторонний; B) разносторонний; C) тупоугольный; D) равнобедренный прямоугольный; E) равнобедренный.

31. Из точки A проведены две равные наклонные к прямой BC. $\angle BAC$ в два раза больше $\angle ABC$. Найти расстояние от точки A до прямой BC, если расстояние между основаниями наклонных равно 18 см.

A) 10 см; B) 6 см; C) 12 см; D) 9 см; E) определить нельзя.

32. Какого вида треугольник, если: a) сумма отрезков, являющихся проекциями двух его сторон на прямую, на которой находится его третья сторона, равна этой третьей стороне; b) одна из сторон является проекцией другой стороны, а проекция третьей стороны на ту же прямую есть точка; c) проекция одной из сторон на прямую, на которой лежит другая сторона, больше этой другой стороны?

A) остроугольный, остроугольный, тупоугольный;
B) остроугольный, прямоугольный, тупоугольный;
C) тупоугольный, прямоугольный, остроугольный;
D) остроугольный, тупоугольный, прямоугольный;
E) определить нельзя.

33. Среди приведенных высказываний найти ложное:

A) высота, опущенная на гипотенузу, меньше каждого из катетов прямоугольного треугольника;

B) две высоты прямоугольного треугольника совпадают с двумя его сторонами;
C) три высоты прямоугольного треугольника пересекаются в одной точке;
D) два прямоугольных треугольника равны, если имеют по два равных угла;
E) каждая точка перпендикуляра, проведенного через середину отрезка, одинаково удалена от концов этого отрезка.

34. Какие из приведенных высказываний верны: a) в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других; b) в остроугольном треугольнике все внешние углы тупые; c) в тупоугольном треугольнике все внешние углы острые; d) все медианы равнобедренного треугольника равны между собой; e) биссектриса равнобедренного треугольника является медианой и высотой.

A) все; B) *a*, *b*, *c* и *e*; C) *a*, *b*; D) *a*, *b* и *e*; E) *a*, *b* и *c*.

35. Существует ли треугольник: a) не имеющий осей симметрии; b) только с двумя осями симметрии; c) с одной осью симметрии; d) с тремя осями симметрии?

A) да, да, да, да; B) да, нет, да, да; C) нет, нет, да, да; D) да, нет, да, нет; E) да, да, нет, да.

36. При каких значениях параметра a из трех отрезков с длинами $1+2a$; $1-a$ и 2 можно построить треугольник?

A) $\varnothing$; B) $(-\frac{2}{3}; 0)$; C) $(0; \frac{2}{3})$; D) $(-\frac{1}{2}; 0)$; E) $(-\frac{1}{2}; 1)$.

37. Периметр треугольника равен p, одна сторона равна l и прилежащие к ней углы равны. Найти стороны треугольника.

A) $\frac{p-l}{2}; \frac{p-l}{2}; l$; B) $\frac{p-2l}{2}; \frac{p+l}{2}; l$; C) $\frac{2p-l}{4}; \frac{2p-l}{4}; p$;

D) определить нельзя; E) $\frac{p+l}{3}; \frac{p+2l}{3}; l$.

Глава 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

В элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля. Задачи на построение с использованием только линейки или только циркуля в данном учебнике не будут рассмотрены — о них можно узнать из занимательной геометрии. Рассмотрим некоторые основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

§ 3.1. Построение треугольника по трем его сторонам

Задача. Построить треугольник по трем его сторонам a, b, c.

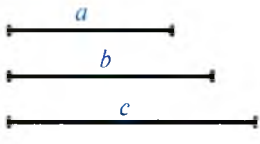


Рис. 84

Дано: отрезки a, b и c (рис. 84).

Построение. Возьмем произвольную прямую MN и отложим на ней отрезок $BC = a$ (рис. 85).

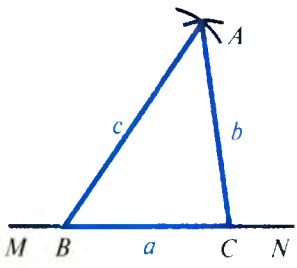


Рис. 85

Из точек B и C как из центров описываем две дуги: одну радиусом, равным b, другую радиусом, равным c. Точку, в которой эти дуги пересекаются, обозначим через A и соединим с точками B и C. ΔABC будет искомым, т. к. $BC = a$, $AC = b$ и $BA = c$.

Примечание. Чтобы три отрезка прямой могли служить сторонами треугольника, необходимо, чтобы больший из них был меньше суммы двух других (§ 2.9).

§ 3.2. Построение угла, равного данному

Задача. Построить угол, равный данному углу ABC.

Дано: $\angle ABC$ (рис. 86).

Построение. Возьмем некоторую прямую MN и на ней выберем произвольную точку O (рис. 87). Описываем произвольным радиусом с центром в вершине B между сторонами данного угла дугу DE; затем,

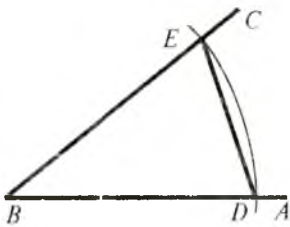


Рис. 86

Рис. 87

не изменяя раствора циркуля, переносим его острие в точку O и описываем дугу PQ. Далее раствором циркуля, равным DE, с центром в точке P, описываем дугу, пересекающую дугу PQ в некоторой точке F. Соединим точку F с точкой O и получаем $\angle POF$. Полученный $\angle POF = \angle DBE$, тогда $\angle POF = \angle ABC$ как лежащие против равных сторон $ED = FP$ в равных треугольниках POF и DBE (третий признак равенства треугольников).

§ 3.3. Построение биссектрисы угла

Задача. Разделить угол ABC пополам (т. е. построить биссектрису данного угла).

Дано: $\angle ABC$ (рис. 88).

Построение. С центром в точке B произвольным радиусом проведем

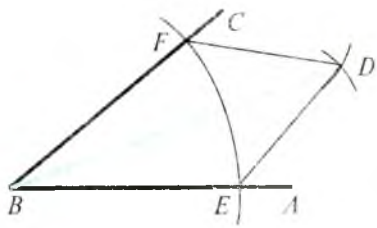


Рис. 88

дугу, пересекающую стороны данного угла в точках E и F. Затем произвольным раствором циркуля (однако, большим половины FE) описываем дуги с центрами в точках F и E, которые пересекаются в точке D. Соединив точки B и D, получим искомую биссектрису BD.

Докажем, что $\angle ABC$ разделен пополам прямой BD. Для этого соединим точку D с точками F и E. Получим два треугольника BFD и BED. Эти треугольники равны, т. к. $FD = ED$ и $BF = BE$ по построению, а BD — общая. Значит, $\Delta\, BFD = \Delta\, BED$ по трем сторонам (третий признак равенства треугольников), поэтому $\angle FBD = \angle EBD$ как углы, лежащие против равных сторон FD и DE в равных треугольниках. Итак, BD — биссектриса $\angle ABC$.

§ 3.4. Построение перпендикуляра к прямой

Задача. Из данной точки A провести прямую, перпендикулярную данной прямой BC.

I. Точка A лежит вне прямой BC.

Дано: прямая BC и точка A вне ее (рис. 89).

Построение. С центром в точке A произвольным раствором циркуля (но большим, чем расстояние от точки A до прямой BC) проводим дугу окружности, пересекающую данную прямую BC в точках M и N. С центрами в точках M и N проводим две равные дуги произвольного радиуса (однако большего половины отрезка MN), которые пересекаются в точке D. Соединим точки A и D отрезком прямой.

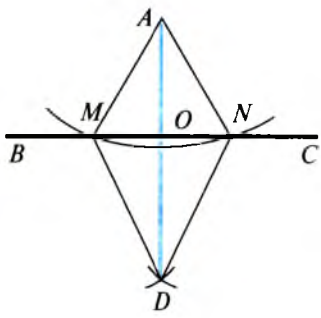


Рис. 89

Докажем, что полученный отрезок прямой AD есть перпендикуляр к BC. Соединим

точки A и D с точками M и N. Рассмотрим ΔAMD и ΔAND. В этих треугольниках $AM = AN$ и $DM = DN$ по построению, а AD — общая сторона. Следовательно, $\Delta AMD = \Delta AND$ (по третьему признаку равенства треугольников). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle MAD = \angle NAD$ (тогда $\angle MAO = \angle NAO$, где O — точка пересечения прямых BC и AD). В равнобедренном треугольнике MAN ($AM = AN$ по построению) биссектриса AO угла MAN при его вершине является одновременно и высотой, тогда $AO \perp MN$, отсюда $AD \perp BC$.

II. Точка A лежит на прямой BC.

Дано: прямая BC и точка A, лежащая на BC (рис. 90).

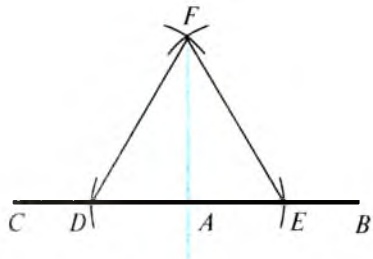


Рис. 90

Построение. По обе стороны от точки A на прямой BC отложим два равных отрезка AD и AE произвольной длины. С центрами в точках D и E одним и тем же раствором циркуля (однако большим, чем AD) опишем две дуги, пересекающиеся в точке F. Точки A и F соединим отрезком и докажем, что AF и есть перпендикуляр к BC. Соединим точку F с точками D и E. Получившийся треугольник DFE — равнобедренный, т. к. $FD = FE$ по построению. В равнобедренном ΔFDE AF — медиана, так как по построению $AD = AE$. Значит, по свойству равнобедренного треугольника AF является и его высотой. Итак, $AF \perp BC$.

§ 3.5. Деление отрезка пополам

Задача. Разделить отрезок AB пополам, т. е. найти середину данного отрезка.

Дано: отрезок AB (рис. 91).

Построение. С центром в точках A и B одним и

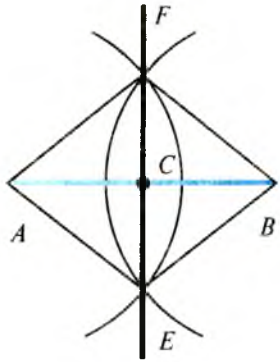


Рис. 91

тем же произвольным раствором циркуля (большим, однако, половины отрезка AB) проведем две дуги, пересекающиеся в точках E и F. Через точки E и F проводим прямую, которая пересечет отрезок AB в точке C. Точка C делит отрезок AB пополам, т. е. $AC = CB$. Докажем это утверждение. Для доказательства соединим точки A и B с точками E и F отрезками и рассмотрим ΔAEF и ΔBEF. В них: $AE = EB$ и $AF = FB$ по построению, EF — общая сторона. Значит, эти треугольники равны по третьему признаку равенства. Из равенства ΔAEF и ΔBEF следует, что $\angle AFE = \angle BFE$ (тогда $\angle AFC = \angle BFC$). В равнобедренном ΔAFB ($AF = BF$ по построению) FC является биссектрисой угла при вершине F (поскольку $\angle AFC = \angle BFC$), а тогда FC является и медианой, т. е. $AC = CB$ и точка C — середина отрезка AB.

§ 3.6. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Задача. Построить треугольник по двум сторонам a и b и углу C между ними.

Дано: стороны a и b; $\angle C$ (рис. 92).

Построение. На произвольной прямой MN от-

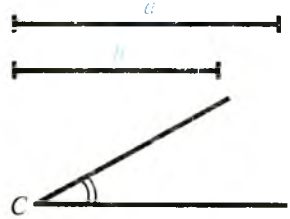


Рис. 92

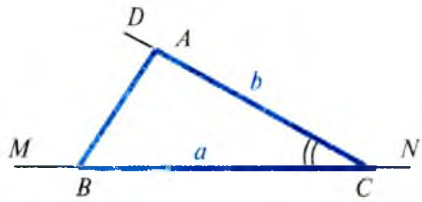


Рис. 93

ложим отрезок $BC = a$ (рис. 93). Строим $\angle BCD = \angle C$. На стороне CD откладываем отрезок $CA = b$. Полученную точку A соединяем с точкой B. ΔABC — искомый, т. к. в нем $BC = a$; $AC = b$ и $\angle ACB = \angle C$.

§ 3.7. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам

Задача. Построить треугольник по стороне a и двум прилежащим к ней углам B и C.

Дано: сторона a; углы B и C (рис. 94).

Построение. На произвольной прямой MN откладываем отрезок $BC = a$ (рис.95). Строим углы с вершинами в точках B и C, одной из сторон которых является BC, т. е. $\angle DBC = \angle B$ и $\angle BCE = \angle C$. Точка пересечения прямых BD и CE — точка A, а ΔABC — искомый. В нем $BC = a$; $\angle ABC = \angle B$ и $\angle ACB = \angle C$.

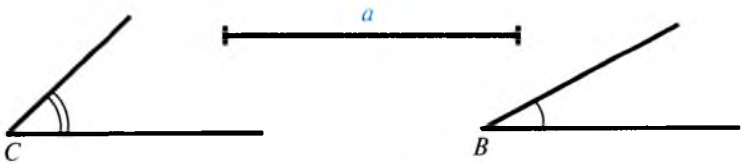


Рис. 94

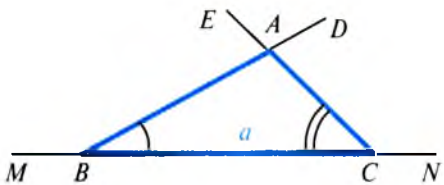


Рис. 95

Глава 4

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 4.1. Определение и аксиома о параллельных прямых

Определение. *Прямые называются* ***пересекающимися****, если они имеют только одну общую точку.*

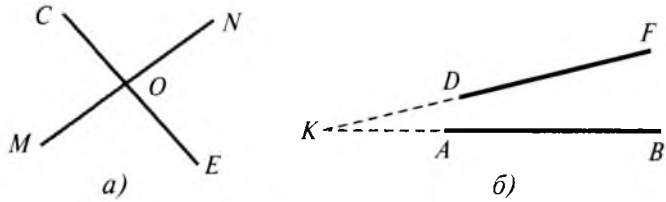


Рис. 96

На рисунке 96 *а)* прямые MN и CE имеют общую точку O, на рисунке 96 *б)* прямые DF и AB также имеют одну общую точку K, а потому MN и CE; DF и AB — пересекающиеся прямые.

Если две прямые имеют более одной общей точки, то они сливаются.

Рис. 97

На рисунке 97 прямые AB и CD имеют две общие точки E и F, а потому сливаются

Определение. *Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются* ***параллельными,*** *если они не пересекаются, сколько бы их не продолжали.*

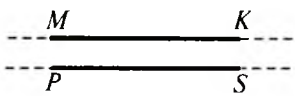


Рис. 98

Параллельность прямых обозначается символом $\parallel$.

На рисунке 98 изображены параллельные прямые MK и PS.

Аксиома параллельности двух прямых (пятый постулат Евклида).

Через точку, не лежащую на прямой, можно про-

вести на плоскости только одну прямую, параллельную данной.

На рисунке 99 точка M не лежит на прямой AB. $EF \parallel AB$; $CD \nparallel AB$. CD и EF проходят через точку M.

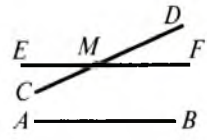


Рис. 99

Следствие 1. Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и другую.

Дано: $MN \parallel EF$; прямая AB пересекает прямую MN в точке O (рис. 100).

Доказать: AB пересекает EF.

Доказательство. Предположим противное, что AB не пересекает EF, т. е. $AB \parallel EF$. Тогда через точку O проходят две различные прямые AB и MN, параллельные EF, что невозможно как утверждение, противоречащее аксиоме о параллельных прямых. Итак, предположение неверно, а тогда AB пересекается с EF, что и требовалось доказать.

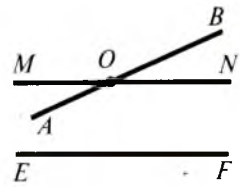


Рис. 100

Следствие 2. Если каждая из двух прямых параллельна одной и той же третьей прямой, то они параллельны между собой.

Дано: $AB \parallel EF$; $CD \parallel EF$ (рис. 101).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. Пусть AB не параллельна CD, т. е. AB и CD пересекаются в некоторой точке O. Тогда через эту точку O проходят две прямые AB и CD, параллельные прямой EF, что невозможно, так как это противоречит аксиоме о параллельных прямых.

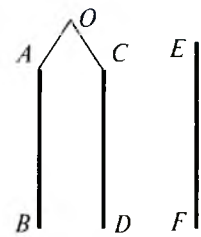


Рис. 101

Следовательно, AB и CD не могут пересекаться, а потому $AB \parallel CD$, что и требовалось доказать.

теорема

Два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны.

Дано: $AB \perp MN$, $CD \perp MN$ (рис. 102).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. Предположим противное, что AB не параллельна CD, т. е. AB пересекается с CD в некоторой точке E. Тогда из одной точки E на прямую MN было бы опущено два перпендикуляра, что невозможно (см. § 2.8. Следствие о внешнем угле треугольника). Значит, предположение о пересечении AB и CD неверно, а потому $AB \parallel CD$, что и требовалось доказать.

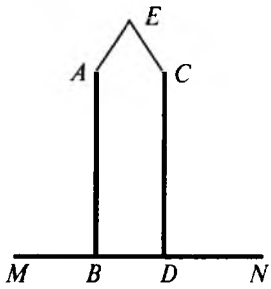


Рис. 102

§ 4.2. Признаки параллельности двух прямых

Если две прямые пересечь третьей прямой, то получим восемь углов (рис. 103). Образовавшиеся при пересечении углы имеют следующие названия.

Соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6 — внутренние; 1 и 7, 2 и 8 — внешние.

Односторонние углы: 1 и 8, 2 и 7 — внешние; 3 и 6, 4 и 5 — внутренние.

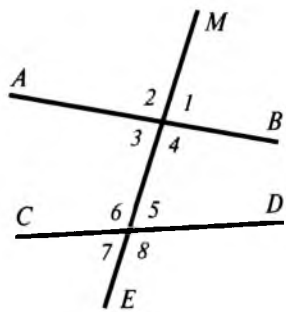


Рис. 103

Первый признак параллельности двух прямых

теорема

Если при пересечении двух прямых третьей прямой какая-то пара накрест лежащих углов (внутренних или внешних) равна между собой, то такие прямые параллельны.

Дано: AB и CD пересечены прямой $MEFN$[1]; $\angle 1 = \angle 2$ — накрест лежащие (внутренние) (рис. 104).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. Для доказательства разделим отрезок EF пополам и через его середину O проведем $OK \perp AB$, а затем продолжим OK до пересечения с прямой CD в точке H. Рассмотрим ΔKOE и ΔFOH.

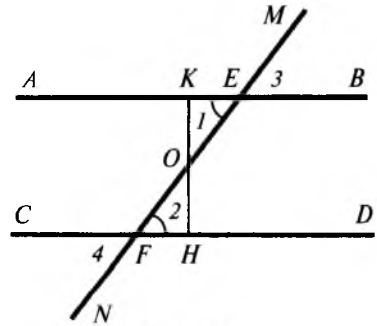


Рис. 104

$\Delta KOE = \Delta FOH$ по второму признаку равенства треугольников, так как $OF = OE$ по построению, $\angle 1 = \angle 2$ по условию, $\angle KOE = \angle FOH$ как вертикальные.

Из равенства треугольников следует, что $\angle OKE = \angle OHF$, а так как $\angle OKE = 90°$ ($OK \perp AB$ по построению), то и $\angle OHF = 90°$, то есть $KOH \perp CD$.

Итак, $KH \perp AB$ и $KH \perp CD$, а два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны. Значит, $AB \parallel CD$, что и требовалось доказать.

Теорема верна и в случае равенства какой-либо пары внешних накрест лежащих углов $\angle 3 = \angle 4$, поскольку из их равенства следует, что $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные).

[1] В некоторых случаях прямая может обозначаться тремя или четырьмя буквами для того, чтобы указать точки ее пересечения с другими прямыми.

Второй признак параллельности двух прямых

теорема

Если при пересечении двух прямых третьей какая-то пара соответственных углов равна между собой, то эти две прямые параллельны.

Дано: AB и CD пересечены прямой $MEFN$; $\angle 1 = \angle 2$ — соответственные (рис. 105).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. По условию теоремы $\angle 1 = \angle 2$, а из равенства вертикальных углов следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Тогда $\angle 2 = \angle 3$, так как они оба равны $\angle 1$. Углы 2 и 3 накрест лежащие при пересечении AB и CD третьей прямой $MEFN$ и по первому признаку из их равенства следует, что AB и CD параллельны, что и требовалось доказать.

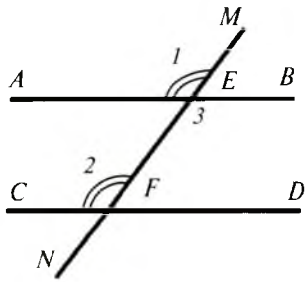


Рис. 105

Третий признак параллельности двух прямых

теорема

Если при пересечении двух прямых третьей какая-то пара односторонних углов (внутренних или внешних) в сумме составляет 180°, то эти прямые параллельны.

Дано: AB и CD пересечены $MEFN$; $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $\angle 1$ и $\angle 2$ — односторонние (внутренние) (рис. 106).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство. По условию $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, а из свойства смежных углов следует, что $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Из двух этих равенств следует, что $\angle 2 = \angle 3$, а так как они внутрен-

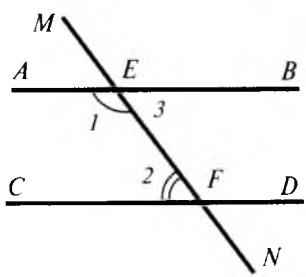


Рис. 106

ние накрест лежащие при пересечении двух прямых третьей прямой, то из их равенства по первому признаку параллельности прямых следует, что $AB \parallel CD$, что и требовалось доказать.

Доказательство признака аналогично при рассмотрении двух внешних односторонних углов.

§ 4.3. Свойства параллельных прямых

теоремы

(обратные признакам параллельности)

Если две параллельные прямые пересечь третьей прямой, то

1. Любая пара накрест лежащих углов равна.

2. Любая пара соответственных углов равна.

3. Любая пара односторонних углов в сумме равна 180°.

1. Дано: $AB \parallel CD$ и пересечены $MEFN$ (рис. 107).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие).

Доказательство. Предположим противное: накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 2$ не равны между собой. Построим $\angle KEF = \angle 2$. Углы $\angle KEF$ и $\angle 2$ — накрест лежащие при пересечении KEH и CD прямой $MEFN$, и из их равенства по первому признаку параллельности прямых следует, что $KEH \parallel CD$, но тогда через точку E проходят две прямые KEH и AB, параллельные CD, что противоречит аксиоме о параллельности прямых.

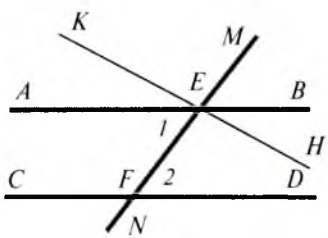


Рис. 107

Следовательно, предположение о неравенстве углов $\angle 1$ и $\angle 2$ неверно, а потому они равны между собой, т. е. $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

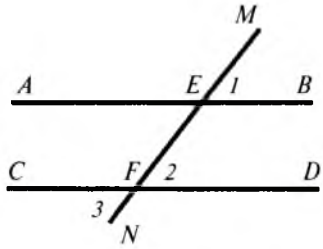


Рис. 108

2. Дано: $AB \parallel CD$ и пересечены $MEFN$ (рис. 108).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$ (соответственные).

Доказательство. Из теоремы 1) следует, что если $AB \parallel CD$, то любая пара накрест лежащих углов равна, т. е. $\angle 1 = \angle 3$ — внешние накрест лежащие. Но $\angle 3 = \angle 2$ как вертикальные, а потому из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 3 = \angle 2$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

3. Дано: $AB \parallel CD$ пересечены $MEFN$ (рис. 109).

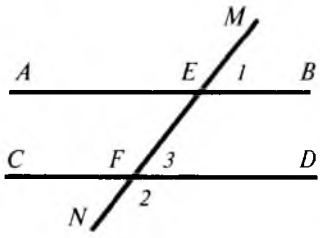


Рис. 109

Доказать: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Доказательство. Если $AB \parallel CD$, то соответственные углы 1 и 3 равны между собой, т. е. $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ по свойству смежных углов, а так как $\angle 1 = \angle 3$, то и $\angle 2 + \angle 1 = 180°$, что и требовалось доказать.

Следствие. Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть перпендикуляр и к другой.

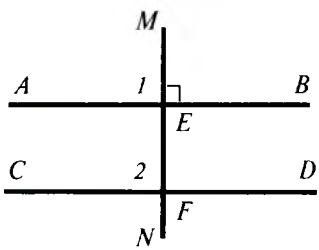


Рис. 110

Дано: $AB \parallel CD$; $MEFN \perp AB$ (рис. 110).

Доказать: $MEFN \perp CD$.

Доказательство. Если $AB \parallel CD$, то соответственные углы $1 = 2$, но поскольку $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, а тогда $MEFN \perp CD$, что и требовалось доказать.

§ 4.4. Свойства углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами

теорема

Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы равны (если они оба острые или тупые); в сумме составляют 180° (если один из них острый, а другой тупой).

1-й случай. Дано: $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $\angle 1$ и $\angle 2$ — **острые** (рис. 111).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство. Продолжим сторону BC до пересечения со стороной A_1B_1 в точке D. Пусть $\angle A_1DC = \angle 3$. $\angle 1 = \angle 3$ как соответственные при $AB \parallel A_1B_1$ и секущей DC. $\angle 2 = \angle 3$ как соответственные при $DBC \parallel B_1C_1$ и секущей A_1B_1. Из двух этих равенств следует, что $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

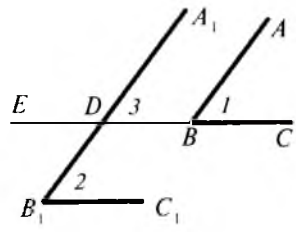


Рис. 111

2-й случай. Дано: $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $\angle 1$ и $\angle 2$ — **тупые** (рис. 112).

Доказать: $\angle 1 = \angle 2$.

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству при продолжении AC до пересечения со стороной A_1B_1 получается $\angle 3 = \angle 1$ как соответственные при $AB \parallel A_1B_1$ и секущей ACD. $\angle 3 = \angle 2$ как соответственные при $ACD \parallel A_1C_1$ и секущей A_1B_1. Из двух этих равенств $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

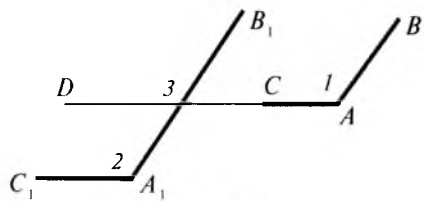


Рис. 112

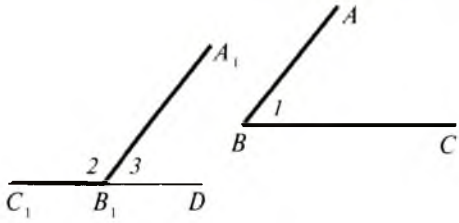


Рис. 113

3-й случай. Дано: $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $\angle 1$ — **острый**, $\angle 2$ — **тупой** (рис. 113).

Доказать: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Доказательство. Продолжим сторону C_1B_1 за точку B_1. Получим $\angle 3$, который (по первому случаю) равен $\angle 1$, т. е. $\angle 3 = \angle 1$, а по свойству смежных углов $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Тогда из равенств $\angle 3 = \angle 1$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, что и требовалось доказать.

теорема

Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы равны (если они оба острые или оба тупые); в сумме составляют 180° (если один из них острый, а другой тупой).

Дано: $\angle BAC = \angle 1$; $MN \perp AC$; $PQ \perp AB$; $\angle 2$, 3, 4, 5 — углы, стороны которых перпендикулярны сторонам угла 1 (рис. 114).

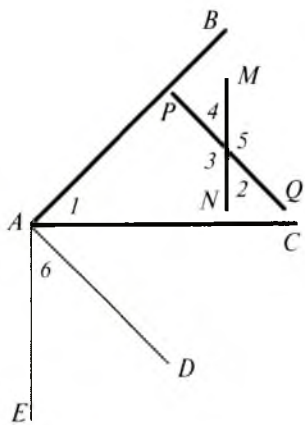


Рис. 114

Доказать: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$; $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 = 180°$.

Доказательство. Для доказательства из вершины A проведем $AE \perp AC$ и $AD \perp AB$. Стороны $\angle DAE = \angle 6$ перпендикулярны сторонам $\angle BAC = \angle 1$.

$\angle 1 = \angle BAD - \angle CAD = 90° - \angle CAD$; $\angle 6 = \angle CAE - \angle CAD = 90° - \angle CAD$.

Итак, $\angle 1 = \angle 6$, но стороны угла 6 параллельны сторонам углов 2, 3, 4 и 5 (так как два

перпендикуляра к одной прямой параллельны). Из предыдущей теоремы следует, что $\angle 6 = \angle 2 = \angle 4$ как два острых угла с соответственно параллельными сторонами, а $\angle 6 + \angle 3 = \angle 6 + \angle 5 = 180°$, так как один из них острый, а другой — тупой. Поскольку $\angle 6 = \angle 1$, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$ и $\angle 1 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 = 180°$, что и требовалось доказать.

§ 4.5. Сумма углов треугольника

теорема

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Дано: ΔABC (рис. 115).

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательство. Через вершину B проведем прямую $EBF \parallel AC$. Тогда $\angle EBA = \angle A$ как накрест лежащие при $EBF \parallel AC$ и секущей AB; $\angle CBF = \angle C$ как накрест лежащие при $EBF \parallel AC$ и секущей BC. Но $\angle EBA + \angle ABC + \angle CBF = 180°$ как развернутый угол, а потому $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, что и требовалось доказать.

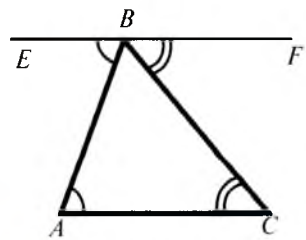


Рис. 115

Следствие 1 (свойство внешнего угла треугольника). Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с этим внешним.

Дано: ΔABC, где $\angle BCD$ — внешний (рис. 116).

Доказать: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Доказательство. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ по доказанной теореме о сумме внутренних углов треугольника. $\angle BCD + \angle BCA = 180°$

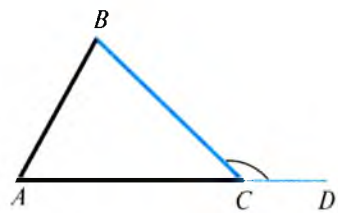


Рис. 116

по свойству смежных углов, и тогда $\angle A + \angle B = \angle BCD$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, где $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 117).

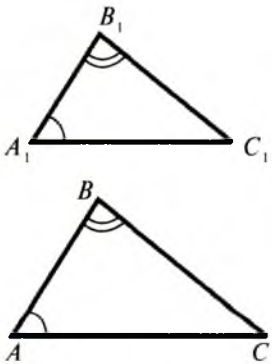


Рис. 117

Доказать: $\angle C = \angle C_1$.

Доказательство. Сумма внутренних углов ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда следует: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Сумма внутренних углов $\Delta A_1B_1C_1$ равна $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180°$, откуда следует: $\angle C_1 = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1)$. Следовательно, $\angle C = \angle C_1$, так как $\angle A + \angle B = \angle A_1 + \angle B_1$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

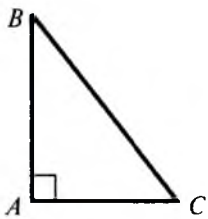


Рис. 118

Дано: ΔABC — прямоугольный, т. е. $\angle C = 90°$ (рис. 118).

Доказать: $\angle A + \angle B = 90°$.

Доказательство. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ по доказанной теореме, а $\angle C = 90°$, тогда $\angle A + \angle B = 90°$, что и требовалось доказать.

Следствие 4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°.

Дано: ΔABC — прямоугольный; $AC = BC$ (рис. 119).

Доказать: $\angle A = \angle B = 45°$.

Доказательство. По следствию 3: $\angle A + \angle B = 90°$, а так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то $\angle A = \angle B$, и тогда $\angle A = \angle B = 90° : 2 = 45°$, что и требовалось доказать.

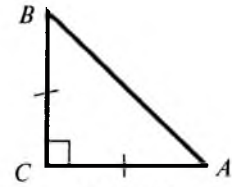


Рис. 119

Следствие 5. В равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

Дано: ΔABC — равносторонний, т. е. $AB = AC = BC$ (рис. 120).

Доказать: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Доказательство. Так как в равностороннем треугольнике все углы равны, а их сумма равна 180°, то каждый из них равен $180° : 3 = 60°$. Итак, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, что и требовалось доказать.

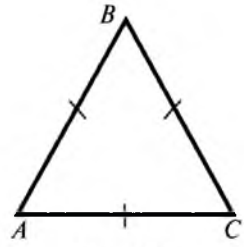


Рис. 120

Следствие 6. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Дано: ΔABC — прямоугольный и $\angle B = 30°$ (рис. 121).

Доказать: $AC = \frac{1}{2} AB$.

Доказательство. Пристроим к треугольнику ABC треугольник DBC, равный данному.

Поскольку в прямоугольном ΔABC $\angle B$ равен 30°, то $\angle A$ будет равен 60° ($90° - 30° = 60°$). Тогда $\angle D = 60°$ по построению и, следовательно, полученный ΔABD — равносторонний, так как все его углы равны 60°. Отсюда $AB = AD = BD$.

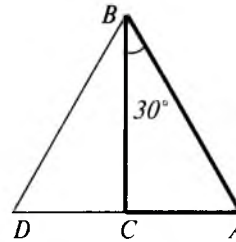


Рис. 121

Но $AC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB$. Значит, $AC = \frac{1}{2} AB$, что и требовалось доказать.

§ 4.6. Сумма углов выпуклого многоугольника

Известно, что ***многоугольник*** — *это фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией* (§ 2.3).

Определение. *Отрезок, соединяющий две не соседние вершины многоугольника, называется* ***диагональю*** *многоугольника.*

Определение. *Многоугольник называется* ***выпуклым****, если он расположен по одну сторону от каждой стороны многоугольника, неограниченно продолженной в обе стороны.*

На рисунке 122 изображен выпуклый многоугольник $ABCDE$, где AC и AD — диагонали данного многоугольника.

Многоугольник $ABCDEF$ (рис. 123) не выпуклый, так как прямые BCK и MCD рассекают его на две части.

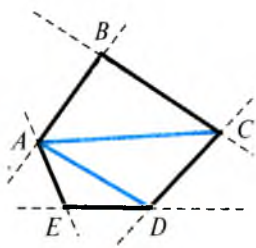


Рис. 122

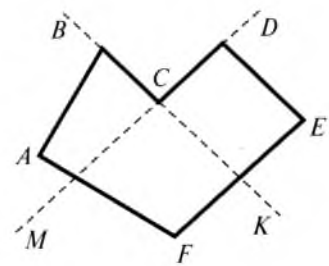


Рис. 123

теорема

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Дано: $ABCDE$ — выпуклый n-угольник.

Доказать: сумма внутренних углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Доказательство.

1-й способ (рис. 124). Из вершины A многоугольника проведем все возможные диагонали n-угольника. Они разобьют n-угольник на $(n-2)$ треугольника, сумма углов каждого из них равна 180°, а тогда сумма всех углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

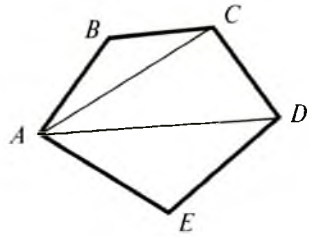


Рис. 124

2-й способ (рис.125).

Произвольную точку O внутри многоугольника соединяем со всеми вершинами n- угольника. Сумма углов каждого из полученных n-треугольников равна 180°, а сумма углов всех этих треугольников $180^\circ \cdot n$. В эту сумму, кроме суммы всех углов n-угольника, входит и полный угол при вершине O, величина которого равна 360°. Итак, сумма внутренних углов n-угольника равна $180^\circ \cdot n - 360^\circ = 180^\circ \cdot (n-2)$, что и требовалось доказать.

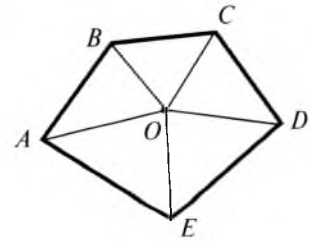


Рис. 125

теорема

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна 360°.

Дано: $ABCDF$ — выпуклый n-угольник и его внешние углы $MABN$, $NBCK$, $KCDZ$, $ZDEF$, $FEAM$ (рис. 126).

Доказать: $S_{\text{внеш. угл.}} = 360^\circ$.

Доказательство. При каждой вершине n-угольника сумма внутреннего и одного из внешних углов равна 180° (по свойству смежных углов),

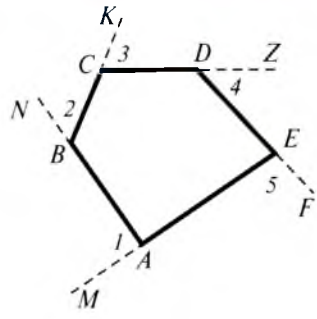


Рис. 126

а при n-вершинах их сумма равна $180° \cdot n$. Сумма внешних углов равна $180° \cdot n - S_{\text{внутр. углов } n\text{-угольника}} = 180° \cdot n - 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot n - 180° \cdot n + 360° = 360°$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Какие две прямые называются пересекающимися?
2. Какие две прямые называются параллельными?
3. Откуда следует, что через каждую точку плоскости проходит одна и только одна прямая, параллельная данной прямой?
4. Верны ли предложения:
   a) $a \parallel a$; b) если $a \parallel b$, то $b \parallel a$; c) если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$?
5. Будут ли параллельны две прямые, перпендикулярные третьей прямой?
6. Будут ли пересекаться две прямые, соответственно перпендикулярные двум пересекающимся прямым?
7. Перечислить названия углов, полученных при пересечении двух прямых третьей прямой.
8. Параллельны ли две прямые, пересеченные третьей прямой, если
   a) равна любая пара соответственных углов;
   b) равна любая пара накрест лежащих углов;
   c) сумма любой пары односторонних углов равна 180°?
9. Как сформулировать теоремы, обратные признакам параллельности двух прямых? Верны ли эти теоремы?
10. Могут ли два угла с соответственно параллельными сторонами:
    a) быть равными и при каких условиях?
    b) в сумме составлять 180° и при каких условиях?
11. Могут ли быть равными два угла, стороны которых взаимно перпендикулярны?

12. Могут ли два угла, стороны которых взаимно перпендикулярны, в сумме быть равными 180° и при каком условии это возможно?
13. Чему равна сумма внутренних углов треугольника?
14. Всегда ли внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних его углов?
15. Может ли внешний угол треугольника быть равен одному из внутренних его углов?
16. Может ли внешний угол треугольника быть меньше его внутреннего угла?
17. Сколько острых внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, может иметь треугольник?
18. Для какого треугольника один из внешних углов вдвое больше внутреннего угла, не смежного с ним?
19. Для какого треугольника биссектриса внешнего угла при одной из вершин треугольника параллельна стороне, лежащей против этой вершины?
20. В каком треугольнике два его угла равны по 45°?
21. Существует ли треугольник, каждый из углов которого равен 60°?
22. Каким свойством обладает катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°?
23. Чем отличаются выпуклые многоугольники от невыпуклых (звездчатых) многоугольников?
24. Как вычисляется сумма внутренних углов выпуклого многоугольника?
25. Чему равна сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине?

Тест № 4

1. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из полученных углов равен 72°. Найти остальные углы.

A) 36° и 144°; B) 72° и 108°; C) 136° и 44°; D) 24° и 156°; E) все они равны по 72°.

2. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из внутренних углов равен 107°. Под каким углом его биссектриса пересекает другую параллель?

A) 73°; B) 53°30′; C) 54°; D) 36°30′; E) 107°.

3. Дан $\angle ABC = 43°$. Из точки P, лежащей внутри этого угла, проведены две прямые параллельно его сторонам до пересечения с ними. Определить углы образовавшегося четырехугольника.

A) 43°, 137°, 137°; B) 57°, 123°, 137°; C) все углы по 43°; D) определить нельзя; E) 117°, 63°, 137°.

4. Даны два угла с параллельными сторонами, один из них на 90° больше другого. Найти эти углы.

A) 30° и 150°; B) 40° и 140°; C) 45° и 135°; D) 90° и 90°; E) 35° и 145°.

5. Один из двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами в 4 раза больше другого. Найти эти углы.

A) 30° и 120°; B) 40° и 160°; C) 35° и 145°; D) 36° и 144°; E) 50° и 200°.

6. Определить углы треугольника, если они относятся как 1:2:3.

A) 30°, 60°, 90°; B) 20°, 40°, 120°; C) 40°, 80°, 60°; D) 25°, 50°, 75°; E) 35°, 70°, 105°.

7. Два угла треугольника относятся как 5 : 7, а третий угол на 28° больше большего из них. Найти углы треугольника.

A) 45°, 63°, 91°; B) 25°, 35°, 63°; C) 35°, 49°, 96°; D) 30°, 42°, 108°; E) 40°, 56°, 84°.

8. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°20′. Найти другой острый угол.

A) 60°40′; B) 70°20′; C) 59°40′; D) 69°20′; E) 59°50′.

9. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 105°. Определить углы при основании.

A) 40° и 35°; B) 30° и 45°; C) 37°30′ и 37°30′; D) 37°50′ и 37°50′; E) 37° и 38°.

10. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 32°. Найти остальные углы треугольника.

A) 48° и 100°; B) 32° и 116°; C) 30° и 118°; D) 45° и 103°; E) 40° и 108°.

11. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найти угол между одной боковой стороной и высотой, опущенной на другую сторону.

A) 40°; B) 60°; C) 80°; D) 30°; E) 70°.

12. В равнобедренном треугольнике угол между высотой и боковой стороной на 20° меньше угла при основании. Определить углы этого треугольника.

A) 70°, 55°, 55°; B) 80°, 50°, 50°; C) 75°, 52°30′ и 52°30′; D) 60°, 60°, 60°; E) 30°, 30°, 120°.

13. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен 45°. Определить катеты, если их сумма равна 36 см.

A) 20 и 16 см; B) 12 и 24 см; C) 22 и 14 см; D) 18 и 18 см; E) 15 и 21 см.

14. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 45°. Определить гипотенузу, если в сумме с опущенной на нее высотой она равна 12 см.

A) 8 см; B) 9 см; C) 6 см; D) 7,5 см; E) 10 см.

15. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 60°, а сумма гипотенузы с меньшим катетом равна 1,8 м. Определить гипотенузу.

A) 1м; B) 1,2м; C) 1,4м; D) 1,5м; E) 1,6м.

16. В равностороннем треугольнике проведены две медианы. Найти острый угол между ними.

A) 45°; B) 30°; C) 60°; D) 70°; E) определить нельзя.

17. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов с одним из внешних равна 200°. Определить углы этого треугольника.

A) 160°, 10°, 10°; B) 80°, 50°, 50°; C) 100°, 40°, 40°; D) 120°, 30°, 30°; E) 140°, 20°, 20°.

18. Один из углов треугольника равен 60°. Определить острый угол между биссектрисами двух других углов треугольника.

A) 45°; B) 30°; C) 70°; D) 40°; E) 60°.

19. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?

A) 120°; B) 60°; C) 100°; D) 90°; E) определить нельзя.

20. В ΔABC угол B — прямой; M — точка пересечения биссектрис углов A и C. Определить $\angle AMC$.

A) 135°; B) 100°; C) 120°; D) 90°; E) 110°.

21. В равнобедренном треугольнике угол между основанием и высотой, опущенной на боковую сторону, равен 48°. Определить угол этого треугольника.

A) 40°, 40°, 100°; B) 42°, 42°, 96°; C) 52°, 52°, 76°; D) 32°, 32°, 116°; E) 50°, 50°, 80°.

22. В ΔABC проведены высоты AD и CE, точка M — их пересечение. Определить $\angle AMC$, если $\angle BAC = 22{,}5°$, $\angle BCA = 75°$.

A) 82°30′; B) 92°; C) 97°30′; D) 94°; E) 92°30′.

23. Определить сумму углов выпуклого семиугольника.

A) 800°; B) 700°; C) 840°; D) 900°; E) 1260°.

24. Определить углы пятиугольника, если величины их относятся как 1 : 1,5 : 2 : 2,5 : 3.

A) 54°, 81°, 108°, 135°, 162°; B) 60°, 90°, 120°, 135°, 150°; C) 40°, 60°, 80°, 100°, 120°; D) 70°, 105°, 140°, 175°, 210°; E) 50°, 75°, 100°, 125°, 150°.

25. В каком многоугольнике сумма внутренних углов равна сумме внешних, взятых по одному при каждой вершине?

A) в шестиугольнике; B) в пятиугольнике; C) в четырехугольнике; D) в семиугольнике; E) в десятиугольнике.

26. Сколько сторон имеет многоугольник, если сумма его внутренних углов вместе с одним из внешних равна 2070°?

A) 13; B) 12; C) 15; D) 14; E) 18.

Глава 5

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 5.1. Параллелограмм и его свойства

Определение. *Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется* ***параллелограммом***.

Свойство 1. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; AC — его диагональ (рис. 127).

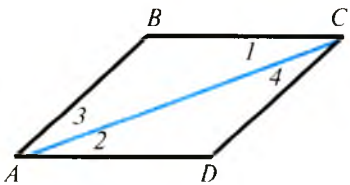


Рис. 127

Доказать: $\Delta ABC = \Delta ACD$.

Доказательство. $\Delta ABC = \Delta ACD$ по второму признаку равенства треугольников, т. к. AC — общая сторона;

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC;

$\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей AC, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Противоположные стороны параллелограмма равны между собой.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 128).

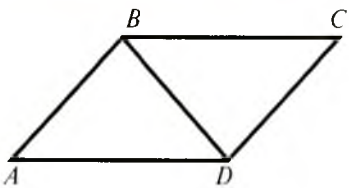


Рис. 128

Доказать: $AB = CD$, $BC = AD$.

Доказательство. Проведем диагональ параллелограмма BD. Она разобьет параллелограмм на два равных треугольника (по свойст-

ву 1). Из равенства треугольников ABD и BCD следует, что $AB = CD$, $BC = AD$, что и требовалось доказать.

Свойство 3. Противоположные углы параллелограмма равны между собой.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 129).

Доказать: $\angle BAD = \angle BCD$; $\angle ABC = \angle ADC$.

Доказательство. Проведем диагональ параллелограмма BD. По свойству 1 она разбивает параллелограмм на два равных треугольника; из равенства ΔABD и ΔBCD следует , что $\angle BAD = \angle BCD$.

Проводя диагональ AC, мы разбиваем параллелограмм $ABCD$ на два равных треугольника: ΔABC и ΔACD.

Из равенства ΔABC и ΔACD следует, что $\angle ABC = \angle ADC$, что и требовалось доказать.

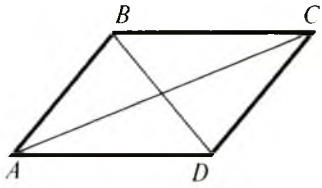


Рис. 129

Свойство 4. Сумма внутренних углов параллелограмма равна 360°.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 130).

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Доказательство. Поскольку сумма углов любого выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$, следовательно, для параллелограмма она равна: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180° \cdot (4 - 2) = 180° \cdot 2 = 360°$, что и требовалось доказать.

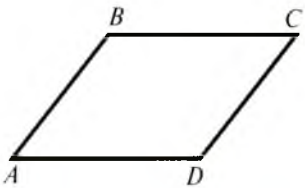


Рис. 130

Свойство 5. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 131).

Доказать: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$.

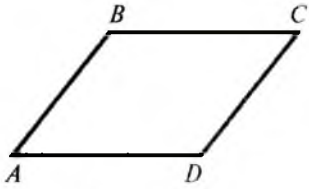


Рис. 131

Доказательство. Сумма всех углов параллелограмма равна 360°, а противоположные углы параллелограмма равны между собой.

Значит, $2 \cdot \angle A + 2 \cdot \angle B = 2 \cdot \angle C + 2 \cdot \angle D = 360°$.

Тогда $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$, а также $\angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180°$, что и требовалось доказать.

Свойство 6. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; AC и BD — его диагонали; O — точка пересечения AC и BD (рис. 132).

Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

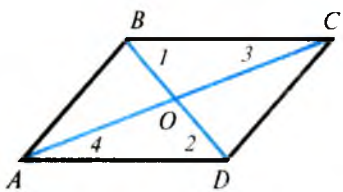


Рис. 132

Доказательство. $\Delta AOD = \Delta BOC$ по второму признаку равенства треугольников; $BC = AD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD; $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC. Из равенства треугольников следует, что $AO = OC$, $BO = OD$, что и требовалось доказать.

Симметрия параллелограмма

Определение. ***Центрально-симметричными*** *относительно центра O называются две точки, которые лежат на одной прямой, проходящей через центр O на равных расстояниях от него.*

Определение. *Фигуры называются* ***центрально-симметричными*** *относительно центра O, если каждой ее точке соответствует симметричная точка этой же фигуры относительно центра O.*

Свойство 7. В параллелограмме точка пересечения его диагоналей есть центр его симметрии.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; AC и BD — его диагонали; O — точка пересечения AC и BD (рис. 133).

Доказать: O — центр симметрии параллелограмма.

Доказательство. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма проведем произвольную прямую MN, которая пересечет контур параллелограмма в двух точках P и Q, симметричных относительно точки O, т. е. в двух таких точках, которые лежат по разные стороны от точки O и на равном расстоянии от этой точки, тогда $OP = OQ$. Докажем это утверждение, рассмотрев ΔOAP и ΔOCQ.

$\Delta OAP = \Delta OCQ$ (по второму признаку равенства треугольников).

$AO = OC$, так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

$\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC. Из равенства этих треугольников и следует, что $OP = OQ$.

Итак, точки P и Q симметричны относительно точки O. Поскольку эти точки выбраны произвольно, то можно утверждать, что $ABCD$ — центрально-симметричная фигура и ее центр симметрии — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, что и требовалось доказать.

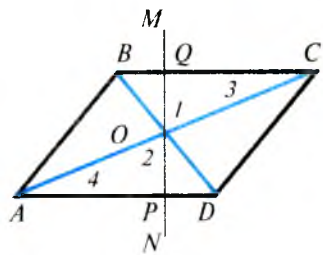


Рис. 133

§ 5.2. Признаки параллелограмма

теорема
(признак 1)

Если в выпуклом четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырехугольник — параллелограмм.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; $AD = BC$, $AB = CD$ (рис. 134).

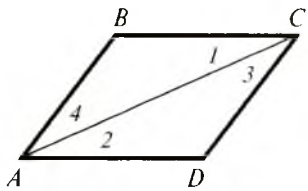


Рис. 134

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC и рассмотрим ΔABC и ΔACD. В этих треугольниках сторона AC — общая, $AB = CD$ и $AD = BC$ по условию. Значит, $\Delta ABC = \Delta ACD$ по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 2$, а тогда $BC \parallel AD$ из равенства накрест лежащих углов при пересечении BC и AD секущей AC.

$\angle 3 = \angle 4$, а тогда $AB \parallel CD$ из равенства накрест лежащих углов при пересечении AB и CD секущей AC.

Так как $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

теорема
(признак 2)

Если в выпуклом четырехугольнике какая-то пара противоположных сторон равна и параллельна, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, где $BC = AD$, $BC \parallel AD$ (рис. 135).

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD. $\Delta ABD = \Delta BCD$ по первому

признаку равенства треугольников, так как $BC = AD$ по условию, BD — общая, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD. Из равенства ΔABD и ΔBCD следует, что $\angle 3 = \angle 4$. Так как эти углы накрест лежащие при пересечении AB и CD секущей BD, то из их равенства следует, что $AB \parallel CD$.

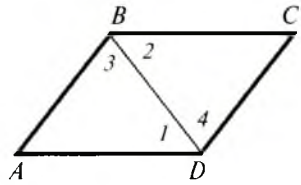


Рис. 135

Так как в четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

теорема
(признак 3)

Если в выпуклом четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; AC и BD — диагонали; O — точка пересечения AC и BD; $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 136).

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство. Рассмотрим треугольники AOD и BOC. В них $AO = OC$ и $BO = OD$ по условию, а $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные. Тогда $\Delta AOD = \Delta BOC$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует, что $AD = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Поскольку эти углы накрест лежащие при пересечении AD и BC прямой AC, то $AD \parallel BC$. Итак, $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, значит, по второму признаку $ABCD$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

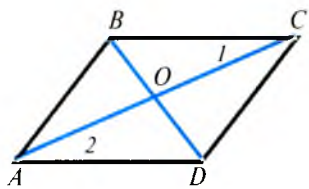


Рис. 136

§ 5.3. Прямоугольник и его свойства

Определение. *Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется* ***прямоугольником***.

Так как прямоугольник есть частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: противоположные стороны его равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам, точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

Но у прямоугольника есть и свои особые свойства.

Свойство 1. **В прямоугольнике диагонали равны.**

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; AC и BD — диагонали (рис. 137).

Доказать: $AC = BD$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и ACD. Сторона AD — общий катет. Катеты AB и CD равны, так как являются противоположными сторонами прямоугольника. Итак, $\Delta ABD = \Delta ACD$ по двум катетам, а из равенства треугольников следует, что их гипотенузы равны: $BD = AC$, что и требовалось доказать.

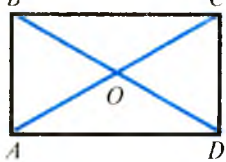
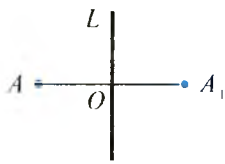


Рис. 137

Симметрия прямоугольника

Определение. *Две точки называются* ***симметричными*** *относительно оси, если они лежат на перпендикуляре к этой оси на равном расстоянии от нее.*



На рисунке 138 точки A и A_1 симметричны относительно оси L.

Рис. 138

Определение. *Если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигу-*

ры относительно оси L, то такие фигуры называются ***симметричными*** *относительно оси L.*

На рисунке 139 фигуры F и F_1 симметричны относительно оси L.

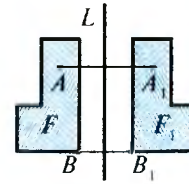


Рис. 139

Определение. *Если преобразование симметрии относительно прямой переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется* ***симметричной*** *относительно этой прямой, а данная прямая называется* ***осью симметрии*** *фигуры.*

Свойство 2. **Прямоугольник имеет две оси симметрии. Это — прямые, проходящие через центр его симметрии и параллельные сторонам прямоугольника.**

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; O — точка пересечения диагоналей BD и AC; $MON \perp AD$; $EOF \perp CD$ (рис. 140).

Доказать: MON и EOF — оси симметрии.

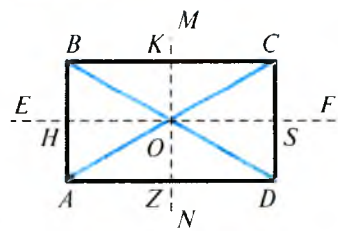


Рис. 140

Доказательство. Прямая MON — ось симметрии прямоугольника, так как при вращении прямоугольника $ABKZ$ вокруг MON он совмещается с прямоугольником $KZDC$; прямая EOF — также ось симметрии, так как при вращении прямоугольника $BHSC$ вокруг EOF он совмещается с прямоугольником $AHSD$, что и требовалось доказать.

§ 5.4. Ромб и его свойства

Определение. *Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется* ***ромбом***.

Ромб как параллелограмм обладает всеми его свойствами, но имеет и свои особые свойства.

Свойство 1. **Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.**

Дано: $ABCD$ — ромб; AC и BD — диагонали (рис. 141).

Доказать: $AC \perp BD$; $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказательство. Рассмотрим ΔABC.

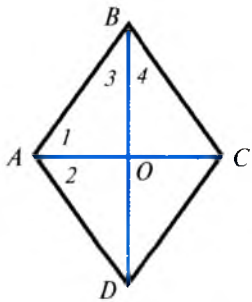


Рис. 141

Так как $AB = BC$, то ΔABC — равнобедренный, а поскольку BO — медиана (так как диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам), то BO — высота, а тогда $BO \perp AC$ и BO — биссектриса, а тогда $\angle 3 = \angle 4$. Аналогично в равнобедренном треугольнике ABD медиана AO является высотой и биссектрисой, а потому $\angle 1 = \angle 2$, что и требовалось доказать.

Свойство 2. **Каждая диагональ ромба есть его ось симметрии.**

Дано: $ABCD$ — ромб; AC и BD — его диагонали (рис. 142).

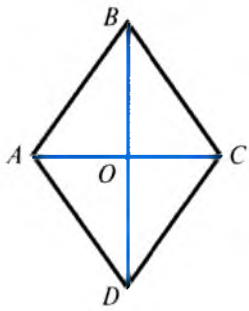


Рис. 142

Доказать: AC и BD — оси симметрии.

Доказательство. Диагональ BD есть ось симметрии ромба $ABCD$, так как при вращении ΔABD вокруг BD он совмещается с ΔBCD. Аналогично, AC — ось симметрии ромба $ABCD$, так как при вращении ΔABC вокруг AC он совмещается с ΔACD, что и требовалось доказать.

§ 5.5. Квадрат и его свойства

Определение. ***Квадратом*** *называется 1) параллелограмм, у которого все стороны равны и углы прямые; 2) прямоугольник, у которого все стороны равны; 3) ромб, у которого все углы прямые.*

Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба. У квадрата четыре оси симметрии: две из них проходят через середины противоположных сторон (как у прямоугольника) и две — через вершины противоположных углов (как у ромба) (рис. 143).

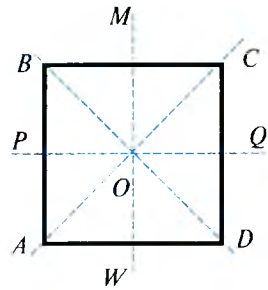


Рис. 143

Точка пересечения диагоналей — центр симметрии квадрата.

Диагонали квадрата равны между собой, взаимно перпендикулярны и делят углы квадрата пополам.

§ 5.6. Трапеция и ее виды

Определение. *Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется* ***трапецией***.

Определение. *Параллельные стороны трапеции называются* ***основаниями***, *а непараллельные —* ***боковыми сторонами***.

На рисунке 144 изображена трапеция $ABCD$, где $AD \parallel BC$, AD и BC — основания, AB и CD — боковые стороны.

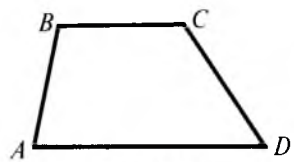


Рис. 144

Определение. *Трапеция называется* ***равнобедренной*** *(или равнобокой), если ее боковые стороны равны между собой.*

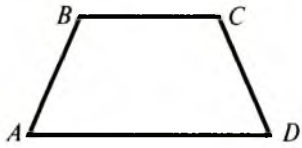


Рис. 145

На рисунке 145 изображена равнобедренная трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, $AB = CD$.

Определение. *Трапеция называется* ***прямоугольной****, если одна из ее боковых сторон перпендикулярна к основанию.*

Рис. 146

На рисунке 146 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, $AB \perp AD$ $(BA \perp BC)$.

Свойства равнобедренной трапеции

теоремы

В равнобедренной трапеции:

1. Углы при основаниях равны.

2. Диагонали равны.

3. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная к ее основаниям, является осью симметрии.

Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция; AC и BD — диагонали $MON \perp AD$ $(\perp BC)$ (рис. 147).

Доказать: **1.** $\angle BAD = \angle CDA$; $\angle ABC = \angle BCD$.

2. $AC = BD$.

3. MON — ось симметрии.

Доказательство. **1.** Из вершин B и C опустим на сторону AD перпендикуляры BK и CH.

Так как $BKHC$ — прямоугольник, то $BK = CH$.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABK и CHD. $\Delta ABK = \Delta CHD$ по равным гипотенузам AB и CD (по условию) и катетам BK и CH. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle BAK = \angle CDH$ — значит $\angle BAD = \angle CDA$, а тогда $\angle ABC = \angle BCD$.

2. Рассмотрим ΔABD и ΔACD; $\Delta ABD = \Delta ACD$ по первому признаку равенства треугольников: сторона AD — общая, $AB = CD$ по условию, $\angle BAK = \angle CDK$ по доказанному в п. **1**.

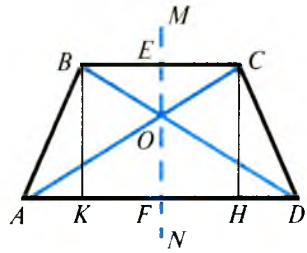


Рис. 147

Из равенства треугольников следует, что $AC = BD$.

3. Прямая MON — ось симметрии трапеции, так как при вращении четырехугольника $ABEF$ вокруг MON он совмещается с $ECDF$, что и требовалось доказать.

§ 5.7. Теорема Фалеса и ее применение

Фалес

Фалес Милетский (ок. 625 — 547 гг. до н. э.) — древнегреческий мыслитель, родоначальник античной философии и науки, основатель милетской школы. Возводил все многообразие явлений и вещей к единой первостихии — воде.

теорема Фалеса

Если на одной стороне угла отложить равные между собой отрезки и через точки деления провести параллельные между собой прямые до пересечения с другой стороной угла, то и на этой стороне угла отложатся равные между собой отрезки.

Дано: $\angle ABC$; $BC_3 = C_3C_2 = C_2C_1$; $A_3C_3 \parallel A_2C_2 \parallel A_1C_1$ (рис. 148).

Доказать: $BA_3 = A_3A_2 = A_2A_1$.

Доказательство. Проведем C_3B_3 и $C_2B_2 \parallel AB$ и рассмотрим треугольники BA_3C_3, $C_3B_3C_2$ и $C_2B_2C_1$. Они равны между собой по второму признаку равенства треугольников.

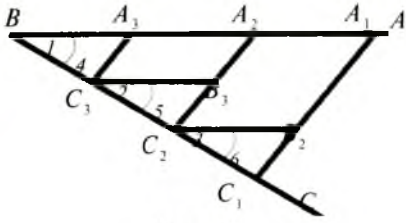


Рис. 148

$BC_3 = C_3C_2 = C_2C_1$ по условию; $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ как соответственные при $AB \parallel C_3B_3 \parallel C_2B_2$ и секущей BC; $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ как соответственные при $A_3C_3 \parallel A_2C_2 \parallel A_1C_1$ и секущей BC.

Из равенства треугольников следует, что $BA_3 = C_3B_3 = C_2B_2$, а $C_3B_3 = A_3A_2$ и $C_2B_2 = A_2A_1$ как противоположные стороны параллелограммов $A_3C_3B_3A_2$ и $A_2C_2B_2A_1$ ($A_3C_3B_3A_2$ и $A_2C_2B_2A_1$ — параллелограммы, так как их противоположные стороны параллельны).

Итак, $BA_3 = A_3A_2 = A_2A_1$, что и требовалось доказать.

Теорема Фалеса используется на практике для деления отрезка на n равных частей.

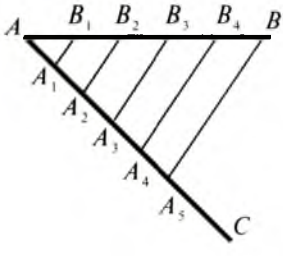


Рис. 149

Задача. Отрезок AB разделить на n равных частей ($n = 5$) (рис.149).

Построение. Через точку A проведем произвольную прямую AC, на которой отложим n равных между собой отрезков произвольной длины: $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$. Соединим точки A_5 и B. Через точки A_4, A_3, A_2 и A_1 проведем прямые, параллельные BA_5: $A_4B_4 \parallel A_3B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel BA_5$.

По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_3B_4 = B_4B$, т. е. отрезок AB разделен на n ($n = 5$) равных частей.

§ 5.8. Средние линии треугольника и трапеции; их свойства

Определение. *Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется* ***средней линией треугольника.***

теорема 1

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине.

Дано: ΔABC; DE — средняя линия (рис. 150).

Доказать: $DE \parallel AC$; $DE = {}^1/_2 AC$.

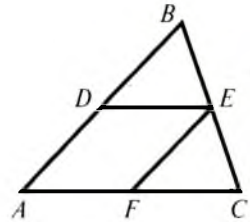


Рис. 150

Доказательство. Через середину D стороны AB проведем прямую, параллельную AC. По теореме Фалеса эта прямая разделит отрезок BC на две равные части, т. е. пройдет через середину E отрезка BC. Итак, DE — средняя линия ΔABC и $DE \parallel AC$.

Через середину E стороны BC проведем прямую, параллельную AB, которая пересечет середину стороны AC в точке F, т. е. $AF = FC$ (по теореме Фалеса).

Четырехугольник $ADEF$ — параллелограмм по построению ($AD \parallel EF$ и $DE \parallel AF$), а потому его противоположные стороны равны между собой, т.е. $AF = DE$. Итак, $AF = FC = DE$, а тогда $AC = 2AF$ и $AF = DE = {}^1/_2 AC$, что и требовалось доказать.

Определение. *Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее* ***средней линией.***

теорема 2

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Дано: $ABCD$ — трапеция; EF — ее средняя линия (рис. 151).

Доказать: $EF \parallel BC \parallel AD$; $EF = {}^1/_2(BC + AD)$.

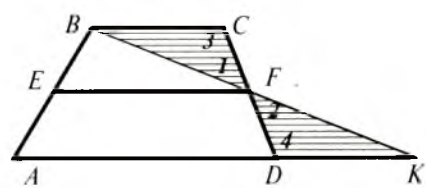


Рис. 151

Доказательство. Через точки B и F проведем прямую до пересечения ее с продолжением стороны AD в точ-

ке K. Рассмотрим ΔBCF и ΔFDK. $CF = FD$ (так как EF — средняя линия), $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей CD.

Итак, $\Delta BCF = \Delta FDK$ (по второму признаку равенства треугольников).

Из равенства треугольников следует, что $BF = FK$; $BC = DK$.

В треугольнике ABK: EF — средняя линия, так как $AE = EB$ и $BF = FK$.

По теореме о средней линии треугольника $EF \parallel AK$ (т. е. $EF \parallel AD$ и $EF \parallel BC$); $EF = {}^1/_2 AK = {}^1/_2 (AD + DK) = {}^1/_2 (AD + BC)$.

Итак, $EF \parallel BC \parallel AD$ и $EF = {}^1/_2 (AD + BC)$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение параллелограмма.
2. Сколько диагоналей можно провести в параллелограмме?
3. Какими свойствами обладают диагонали параллелограмма?
4. Всегда ли равны противоположные стороны и углы параллелограмма?
5. Чему равна сумма внутренних углов параллелограмма?
6. Чему равна сумма внешних углов параллелограмма?
7. Является ли параллелограммом четырехугольник, у которого суммы противоположных углов равны по 180°?
8. Имеет ли параллелограмм оси симметрии?
9. Имеет ли параллелограмм центр симметрии?
10. Является ли параллелограммом четырехугольник с одной парой равных параллельных сторон?
11. Какой вид имеет четырехугольник с равными парами противоположных сторон?
12. Какой вид имеет четырехугольник, диагонали которого в точке пересечения делятся пополам?
13. К какому типу четырехугольников относится параллелограмм с одним прямым углом?

14. Обладает ли прямоугольник свойствами параллелограмма?
15. Равны ли диагонали: a) параллелограмма, b) прямоугольника?
16. Имеет ли прямоугольник: a) оси симметрии, b) центр симметрии?
17. Чем является параллелограмм с равными сторонами?
18. Обладает ли ромб свойствами: a) параллелограмма, b) прямоугольника?
19. Какими свойствами обладают диагонали ромба?
20. Сколько осей симметрии имеет ромб?
21. Является ли ромб центрально-симметричной фигурой?
22. Что такое квадрат?
23. Какими свойствами обладают диагонали квадрата?
24. Сколько осей симметрии имеет квадрат?
25. Является ли квадрат центрально-симметричной фигурой?
26. Какой четырехугольник является трапецией?
27. Какая из трапеций имеет два равных угла?
28. Какая из трапеций имеет два прямых угла?
29. Могут ли быть равными диагонали трапеции?
30. В какой трапеции углы при основании равны?
31. Может ли трапеция иметь оси симметрии?
32. В чем состоит смысл теоремы Фалеса?
33. Какое применение имеет теорема Фалеса на практике?
34. Любой ли отрезок можно разделить на несколько равных частей?
35. Каким свойством обладает отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника?
36. Какими свойствами обладает средняя линия трапеции?

Тест №5

1. Один из углов параллелограмма равен 75°. Найти остальные углы параллелограмма.

A) 75°, 120°, 120°; B) 75°, 105°, 105°; C) 75°, 115°, 115°; D) 45°, 60°, 120°; E) 95°, 95°, 45°.

2. Определить углы параллелограмма, если один из них на 20° больше другого.

A) 80°, 80°, 100°, 100°; B) 70°, 70°, 90°, 90°; C) 75°, 75°, 95°, 95°; D) 85°, 85°, 105°, 105°, E) 60°, 60°, 80°, 80°.

3. В параллелограмме одна сторона равна 9 см и составляет $\frac{3}{10}$ его периметра. Найти другие стороны параллелограмма.

A) 9, 8 и 8 см; B) 9, 10 и 10 см; C) 9, 6 и 6 см; D) 9, 12 и 12 см; E) 9, 7 и 7 см.

4. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4; его периметр равен 2,8 м. Определить стороны параллелограмма.

A) 0,6; 0,6; 0,8 и 0,8 м. B) 0,3; 0,3; 0,4 и 0,4 м. C) 1,1; 1,5; 0,4 и 0,4 м. D) 0,2; 0,2; 0,15 и 0,15 м. E) 0,5; 0,5; 0,7 и 0,7 м.

5. Стороны параллелограмма равны 8 и 3 см, биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к бóльшей стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найти каждую из них.

A) 2; 2 и 4 см. B) 1; 1 и 6 см. C) 1,5; 1,5 и 5 см. D) 3; 3 и 2 см. E) 2,5; 2,5 и 3 см.

6. Одна из сторон параллелограмма равна 5 м. Могут ли диагонали выражаться следующими числами: 1) 4 и 6 м; 2) 4 и 3 м; 3) 6 и 7 м?

A) 1, 2, 3; B) 2 и 3; C) 1 и 3; D) только 2; E) только 3.

7. В параллелограмме через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 2$ м и $AF = 2{,}8$ м. Определить стороны BC и AD.

A) 4,8 м; B) 4 м; C) 5,6 м; D) 6 м; E) 6,8 м.

8. Вычислить углы параллелограмма, если они относятся как 3 : 7.

A) 90°, 210°, 90°, 210°; B) 54°, 126°, 54°, 126°; C) 60°, 60°, 210°, 210°; D) 45°, 45°, 105°, 105°; E) 51°, 51°, 129°, 129°.

9. В параллелограмме острый угол равен 60°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины угла, делит сторону параллелограмма пополам. Найти меньшую диагональ параллелограмма, если его периметр равен 24 см.

A) 8 см; B) 7 см; C) 7,5 см; D) 8,5 см; E) 6 см.

10. Из куска проволоки длиной 84 см надо изготовить параллелограмм, стороны которого относятся как 3 : 4. Каковы стороны параллелограмма?

A) 12 и 16 см; B) 24 и 32 см; C) 18 и 24 см; D) 21 и 28 см; E) 15 и 20 см.

11. В прямоугольнике перпендикуляры, проведенные из точки пересечения диагоналей к его сторонам, соответственно равны 4 и 6 см. Найти периметр прямоугольника.

A) 20 м; B) 40 см; C) 32 см; D) 60 см; E) 80 см.

12. Угол между диагоналями прямоугольника равен 50°.Определить углы между диагоналями прямоугольника и его сторонами.

A) 35° и 55°, B) 40° и 50°; C) 45° и 45°; D) 25° и 65°; E) 30° и 60°.

13. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника, равной 6 см, проведены прямые, параллельные катетам. Какой вид имеет полученный четырехугольник и каковы длины его диагоналей?

A) квадрат; 3 см; B) прямоугольник; 3 см; C) прямоугольник; 5 см; D) квадрат; 4 см; E) квадрат; 6 см.

14. В прямоугольнике диагонали пересекаются под углом 120°. Сумма обеих диагоналей и обеих меньших сторон равна 3,6 см. Определить длину диагоналей.

A) 1,8 м; B) 2,4 м; C) 2 м; D) 1,6 м; E) 1,2 м.

15. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от бóльшей стороны. Определить стороны прямоугольника, если его периметр равен 56 см.

A) 14 и 14 см; B) 12 и 16 см; C) 8 и 20 см; D) 10 и 18 см; E) 9 и 19 см.

16. В прямоугольнике перпендикуляр, спущенный из вершины на его диагональ, делит угол его прямоугольника в отношении 3:1. Найти угол между этим перпендикуляром и другой диагональю прямоугольника.

A) 45°; B) 60°; C) 30°; D) 70°; E) 40°.

17. Определить углы ромба, диагональ которого равна его стороне.

A) 60°, 60°, 120°, 120°; B) 45°, 45°, 135°, 135°; C) 30°, 30°, 150°, 150°; D) 40°, 40°, 140°, 140°; E) 90°, 90°, 90°, 90°.

18. Углы, образуемые стороной ромба с его диагоналями, относятся как 5 : 4. Определить углы ромба.

A) 95° и 76°; B) 120° и 96°; C) 100° и 80°; D) 110° и 70°; E) 75° и 60°.

19. Периметр ромба равен 8 см, высота 1 см. Найти тупой угол ромба.

A) 140°; B) 120°; C) 130°; D) 150°; E) 160°.

20. Определить углы ромба, если его высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

A) 60° и 120°; B) 45° и 135°; C) 30° и 150°; D) 40° и 140; E) 80° и 100°.

21. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найти периметр квадрата.

A) 2 м; B) 6 м; C) 8 м; D) 4 м; E) 4,5 м.

22. Дан квадрат со сторонами 1 м. Его диагональ служит стороной другого квадрата. Найти диагональ второго квадрата.

A) 1,5 м; B) 2 м; C) 3 м; D) 4 м; E) 4,5 м.

23. Стороны треугольника 8 см, 10 см и 12 см. Найти длины сторон треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

A) 4; 5; 6. B) 16; 20; 24. C) 2; 2,5; 24. D) 6; 7,5; 9. E) 8/3; 10/3; 4.

24. Периметр треугольника 12 см. Середины его сторон последовательно соединены. Найти периметр полученного треугольника.

A) 8 см; B) 6 см; C) 10 см; D) 4 см; E) 9 см.

25. Стороны треугольника относятся как 3 : 4 : 6. Соединив середины всех сторон, получим треугольник с периметром в 5,2 м. Определить стороны данного треугольника.

A) 3; 4 и 6 м; B) 1,2; 1,6 и 2,4 м; C) 2,4; 3,2 и 4,8 м; D) 3,2; 4 и 6 м; E) 3,6; 4,8 и 7,2 м.

26. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$ и $CD = AD$; середины сторон его последовательно соединены. Является ли полученный четырехугольник:

A) квадратом; *B*) ромбом; *C*) прямоугольником; *D*) трапецией; *E*) правильный ответ не приведен?

27. Могут ли углы трапеции, взятые в последовательном порядке, относиться как: a) 6 : 3 : 4 : 2; b) 8 : : 7 : 13 : 12; c) 5 : 6 : 12 : 13?

A) a, b, c; B) a, b; C) a; D) b и c; E) таких углов нет.

28. Найти периметр равнобедренной трапеции, острый угол которой равен 60°, а основания равны 15 см и 49 см.

A) 132 см; B) 140 см; C) 152 см; D) 160 см; E) 172 см.

29. В трапеции боковые стороны равны меньшему ос-

нованию, диагональ составляет с основанием угол, равный 30°. Найти углы трапеции.

A) 60° и 120°; B) 50° и 130°; C) 45° и 135°; D) 55° и 125°; E) 70° и 110°.

30. Основания трапеции относятся как 7 : 3; разность их равна 3,2 м. Найти среднюю линию.

A) 8 м; B) 4 м; C) 10 м; D) 5,4 м; E) 7,2 м.

31. Средняя линия трапеции равна 8 дм и делится диагональю на два отрезка, разность между которыми 2 дм. Чему равны основания трапеции?

A) 6 и 10 дм; B) 8 и 12 дм; C) 4 и 8 дм; D) 10 и 14 дм; E) 12 и 16 дм.

32. Определить углы равнобедренной трапеции, если разность противоположных углов равна 40°.

A) 70°, 110°, 60°, 120°; B) 60°, 120°, 60°, 120°; C) 70°, 110°, 70°, 110°; D) 80°, 120°, 100°, 60°; E) 50°, 90°, 130°, 90°.

33. В равнобедренной трапеции диагональ делит ее острый угол пополам, периметр трапеции равен 4,5 м, а большее основание равно 1,5 м. Определить меньшее основание.

A) 1,2 м; B) 1 м; C) 0,8 м; D) 1,1 м; E) 0,9 м.

34. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, а высота трапеции равна 10 см.

A) 5 см; B) 8 см; C) 12 см; D) 10 см; E) 15 см.

35. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний, со стороной a, и прямоугольный. Определить среднюю линию трапеции.

A) $a/2$; B) $3a/8$; C) $3a/4$; D) $3a/2$; E) $1{,}2a$.

36. Вершинами какого четырехугольника являются середины сторон равнобедренной трапеции?

A) трапеции; B) прямоугольника; C) квадрата; D) ромба; E) произвольного четырехугольника.

Глава 6

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

§ 6.1. Основные понятия

Определение. ***Окружностью*** *называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной данной точки, которая называется* ***центром окружности.***

Определение. *Часть плоскости, ограниченная окружностью, вместе с точками самой окружности называется* ***кругом***.

Определение. *Отрезок, соединяющий какую-нибудь точку окружности с ее центром, называется* ***радиусом***.

Определение. *Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется* ***хордой***.

Определение. *Хорда, проходящая через центр, называется* ***диаметром***.

Определение. *Прямая, проходящая через две точки окружности, называется* ***секущей***.

На рисунке 152: O — центр окружности; OA, OB — радиусы окружности; CD — хорда; EF — диаметр; MN — секущая.

Диаметр равен сумме двух радиусов, а потому все диаметры одной окружности равны между собой.

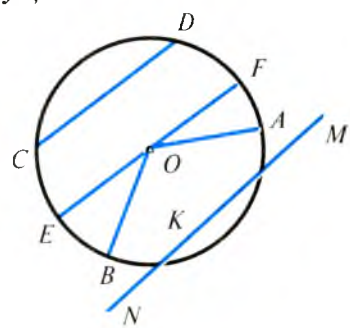


Рис. 152

теорема

Любая хорда, не проходящая через центр окружности, меньше диаметра.

Дано: Окружность O; DE — хорда; AB — диаметр (рис. 153).

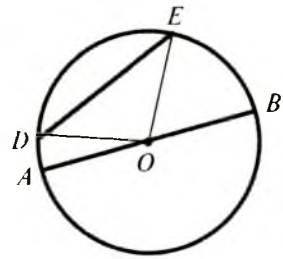


Рис. 153

Доказать: $DE < AB$.

Доказательство. Проведем радиусы OD и OE. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, т. е. $DE < OD + OE$, но $OD = OE = R$, $DE < 2R$, а поскольку $AB = 2R$, то $DE < AB$, что и требовалось доказать.

Определение. *Часть окружности называется* ***дугой***.

Хорда, соединяющая концы какой-нибудь дуги, стягивает эту дугу.

Определение. *Два круга (или две окружности) называются* ***равными,*** *если при наложении они совмещаются.*

Определение. *Часть круга, заключенная между двумя радиусами, называется* ***сектором***.

Определение. *Часть круга, отсекаемая от него какой-нибудь секущей, называется* ***сегментом***.

Определение. *Плоский угол с вершиной в центре круга называется* ***центральным углом***.

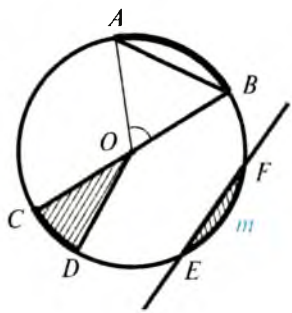


Рис. 154

Определение. ***Градусной мерой дуги*** *окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.*

На рисунке 154: AB, CD, EF — дуги; хорда AB стягивает дугу AB; $\angle AOB$ — центральный; COD — сектор; EmF — сегмент.

§ 6.2. Построение окружности, проходящей через три точки

Очевидно, что через любую точку плоскости можно провести сколько угодно окружностей, центры которых можно выбирать произвольно.

На рисунке 155 через точку C проходят 4 окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и O_4.

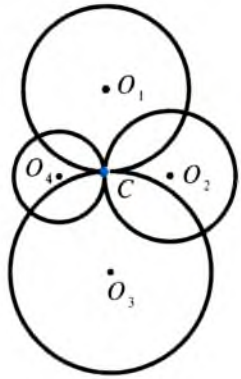


Рис. 155

Через любые две точки плоскости также можно провести бесчисленное множество окружностей, однако центры их нельзя выбирать произвольно, так как точки, одинаково удаленные от двух точек, должны лежать на перпендикуляре к отрезку, соединяющему эти точки, проведенном через середину данного отрезка.

На рисунке 156 через точки M и N проходят три окружности, центры которых O_1, O_2 и O_3 лежат на перпендикуляре EF к отрезку MN, проведенном через середину A этого отрезка. Можно ли провести окружность через любые три точки? Ответом на этот вопрос служит теорема.

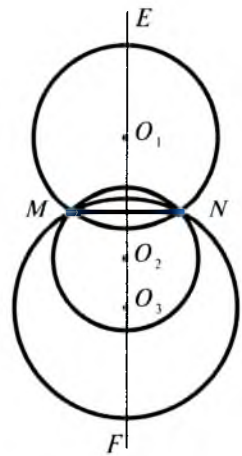


Рис. 156

теорема

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность.

Дано: точки A, B, C, не лежащие на одной прямой (рис. 157).

Доказать: Через A, B, C проходит единственная окружность.

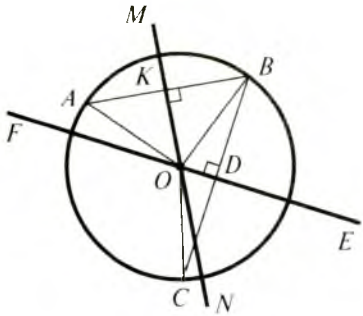


Рис. 157

Доказательство. Для доказательства существования окружности достаточно найти центр окружности — точку O, которая находится на равном расстоянии от точек A, B, C. Геометрическое множество точек, равноудаленных от точек A и B, лежит на перпендикуляре MN к отрезку AB, проведенному через его середину K, а геометрическое место точек, равноудаленных от точек B и C, лежит на перпендикуляре EF к отрезку BC, проведенному через его середину D. Точка, равноудаленная от точек A, B и C, должна лежать одновременно на перпендикуляре EF и перпендикуляре MN, т. е. являться точкой их пересечения O (MN и EF пересекаются всегда, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC). Точка O, одинаково удаленная от точек A, B и C, является центром окружности, радиусом которой будет отрезок OA (или OB или OC). Так как прямые MN и EF могут пересечься только в одной точке, то центр окружности O — единственная точка и длина радиуса может быть только одна, следовательно, окружность единственная, что и требовалось доказать.

§ 6.3. Центральные углы и их измерения

теорема

В одном круге или в равных кругах равным центральным углам соответствуют равные дуги.

Дано: O — круг; $\angle AOB$ и $\angle COD$ — центральные углы; $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 158).

Доказать: $\cup AB = \cup CD$.

Доказательство. Повернем центральный угол AOB

вокруг центра так, чтобы он совместился с равным ему центральным углом COD. В силу равенства радиусов OA, OB, OC и OD совместятся и концы дуг AB и CD (т. е. точки A и D; B и C). Следовательно, совместятся и сами дуги AB и CD, т. е. $\cup AB = \cup CD$, что и требовалось доказать.

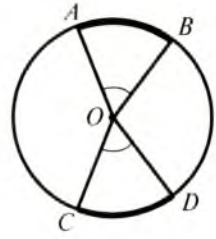


Рис. 158

теорема

обратная

В одном круге или в равных кругах равным дугам соответствуют равные центральные углы.

Дано: O — круг; $\cup AB = \cup CD$ (рис. 158).

Доказать: $\angle AOB = \angle COD$.

Доказательство. Повернем дугу AB вокруг центра круга O так, чтобы она совместилась с равной ей дугой CD, при этом точки A и D, а также B и C также совместятся. Тогда радиусы OA и OB совместятся с радиусами OD и OC соответственно, следовательно, центральные углы равны, т. е. $\angle AOB = \angle COD$, что и требовалось доказать.

§ 6.4. Соотношения между дугами и хордами

теорема

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.

Дано: O — круг; AFB — хорда; CFD — диаметр; $AB \perp CD$ (рис. 159).

Доказать: $AF = FB$, $\cup AD = \cup DB$, $\cup AC = \cup CB$.

Доказательство. Проведем радиусы OA и OB. Полученный ΔAOB — равнобедренный, в нем высота OF является медианой и биссектрисой, а потому $AF = FB$ и $\angle AOF = \angle BOF$. Из

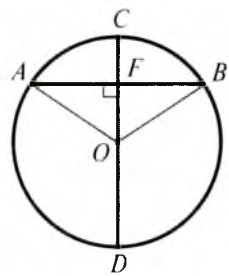


Рис. 159

равенства центральных углов AOC и COD следует и равенство дуг: $\cup AC = \cup BC$, а из равенства центральных углов AOD и DOB следует равенство дуг: $\cup AD = \cup BD$, что и требовалось доказать.

теорема

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Дано: O — круг; CD и AB — хорды; $AB \parallel CD$ (рис. 160).

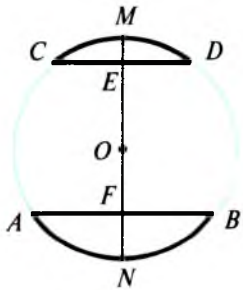


Рис. 160

Доказать: $\cup AC = \cup BD$.

Доказательство. Проведем диаметр MN, перпендикулярный к хорде AB, тогда MN перпендикулярен и к хорде CD, параллельной AB. По предыдущей теореме, $AF = FB$ и $CE = ED$. При сгибе чертежа по диаметру MON полуокружности совместятся, а потому совпадут и точки C и D, а также A и B. Тогда совместятся и дуги AC и BD, т. е. они равны: $\cup AC = \cup BD$, что и требовалось доказать.

теорема 1

Если в одном или в равных кругах дуги равны, то стягивающие их хорды равны и равноудалены от центра.

Дано: O — круг; AB и CD — хорды; $OF \perp CD$; $OE \perp AB$; $\cup AB = \cup CD$ (рис. 161).

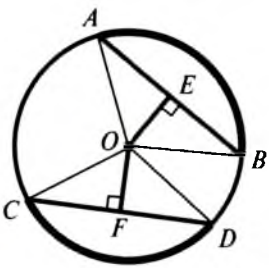


Рис. 161

Доказать: $AB = CD$, $OE = OF$.

Доказательство. Повернем сектор AOB вокруг центра круга O так, чтобы радиус OA совпал с радиусом OD. Вследствие равенства $\cup AB$ и $\cup CD$ они совместятся, а потому точка B совместится с точкой C. Тогда хорды AB и CD совместятся, т. е. $AB = CD$. Пер-

пендикуляры OE и OF также совместятся, так как из точки O на CD можно опустить только один перпендикуляр, что и требовалось доказать.

теорема 2

Если в одном или равных кругах две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то бóльшая из них стягивается бóльшей хордой и из этих хорд большая расположена ближе к центру.

Дано: O — круг; AB и CD — хорды; $OM \perp AB$; $OP \perp CD$; $\cup AB < \cup CD$ (рис. 162).

Доказать: $AB < CD$, $OM > OP$.

Доказательство. Отложим от точки C на дуге CD дугу CE, равную дуге AB, и проведем вспомогательную хорду CE. По первой части теоремы $AB = CE$ и $OM = ON$, где $ON \perp CE$. Поскольку в двух треугольниках COE и COD по две стороны равны: $CO = OE = OD = R$, а центральные углы, заключенные между этими сторонами, не равны, то против большего угла COD лежит большая сторона, т. е. $CD > CE$, и тогда $CD > AB$.

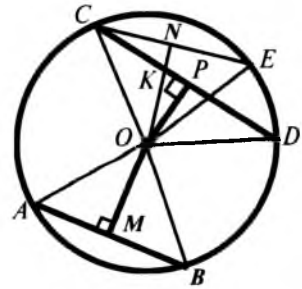


Рис. 162

В прямоугольном треугольнике KOP гипотенуза OK больше катета OP, но $ON > OK$ (так как OK — часть перпендикуляра ON). Итак, $OP < ON$, а $OM = ON$, тогда $OP < OM$. Теорема доказана для одного круга. Теорема остается верной и для равных кругов, потому что такие круги отличаются один от другого только положением, что и требовалось доказать.

теоремы обратные

1. Равные хорды равно удалены от центра и стягивают равные дуги.

2. Хорды, равноудаленные от центра, равны и стягивают равные дуги.

3. Из двух неравных хорд большая — ближе к центру и стягивает большую дугу.

4. Из двух хорд, не равноудаленных от центра, та, которая ближе к центру, больше и стягивает большую дугу.

Все эти теоремы доказываются методом от противного с использованием прямых теорем.

§ 6.5. Взаимное расположение прямой и окружности

Прямая и окружность могут находиться в трех различных положениях.

1. Расстояние прямой от центра окружности больше радиуса окружности.

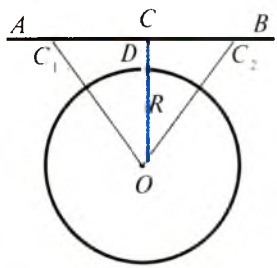


Рис. 163

На рисунке 163 изображена прямая AB; OC — расстояние от центра окружности до прямой AB ($AB \perp OC$); $OC > R$. Точка C лежит вне круга, так как $OC > OD = R$, все остальные точки прямой AB удалены от точки O на расстояние большее, чем OC ($OC_1 > OC$; $OC_2 > OC$ и т. д., так как наклонная длиннее перпендикуляра, проведенного из той же точки O). Итак, прямая AB с окружностью в этом случае общих точек не имеет.

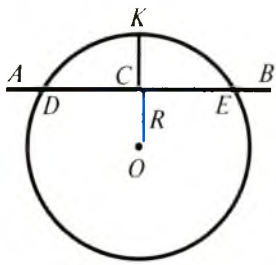


Рис. 164

2. Расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности.

На рисунке 164 изображена прямая AB; OC — расстояние от

прямой AB до центра окружности ($AB \perp OC$); $OC < R = OK$.

Точка C в этом случае лежит внутри круга, и тогда прямая AB пересекается с окружностью в двух точках D и E.

3. Расстояние прямой от центра окружности равно радиусу окружности.

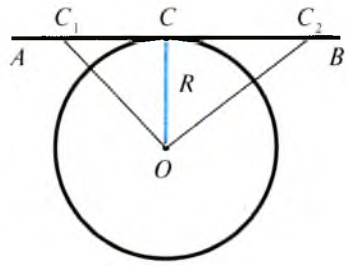


Рис. 165

На рисунке 165 изображена прямая AB; OC — расстояние от центра O до прямой AB; $OC = R$. Тогда точка C принадлежит и прямой AB, и окружности; все остальные точки (C_2, C_1 и т. д.) — прямой AB, отстоят от центра больше, чем $OC = R$; $OC_1 > OC$; $OC_2 > OC$ и т. д. и лежат вне круга.

В этом случае прямая AB имеет с окружностью только одну общую точку C — основание перпендикуляра, опущенного на прямую AB из точки O.

§ 6.6. Касательная к окружности и ее свойства

Определение. *Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется* ***касательной*** *к окружности, а общая точка называется* ***точкой касания.***

теорема

прямая

Прямая, перпендикулярная радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, является касательной к окружности.

Дано: окружность O; ACB — прямая; OC — радиус; $OC \perp ACB$ (рис. 166).

Доказать: ACB — касательная к этой окружности.

Доказательство. C — общая точка прямой и окружности, являющаяся основанием перпендикуляра OC к прямой AB. Любой другой отрезок OC_1, OC_2 и т. д., соединяющий любую другую точку C_1, C_2 ... прямой AB с центром O, будет наклонной к AB, т. е. $OC_1 > OC = R$; $OC_2 > OC = R$ и т. д., а потому все эти точки прямой AB не лежат на окружности. Значит, C — единственная общая точка прямой AB и окружности и, следовательно, по определению, AB — касательная к окружности, что и требовалось доказать.

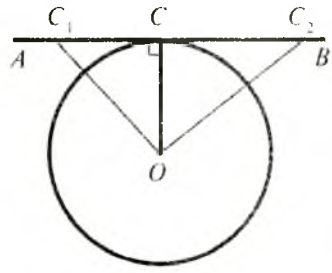


Рис. 166

теорема обратная

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

Дано: окружность O; ACB — касательная; OC — радиус (рис. 167).

Доказать: $OC \perp AB$.

Доказательство. По определению касательной к окружности точка C — единственная общая точка прямой AB и окружности, все остальные точки C_1, C_2, C_3 ... прямой ACB удалены от центра O на расстояние, большее OC, равное радиусу R; т.е. $OC_1 > R$; $OC_2 > R$; $OC_3 > R$ и т. д. Тогда OC — кратчайшее расстояние от точки O до прямой AB, а кратчайшее расстояние от точки до прямой и есть перпендикуляр, т. е. $OC \perp AB$, что и требовалось доказать.

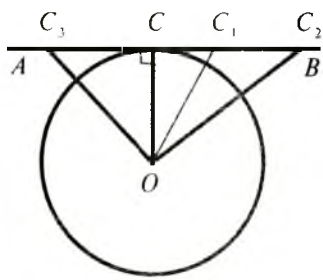


Рис. 167

теорема

Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны между собой, и центр этой окружности лежит на биссектрисе угла, образованного этими касательными.

Дано: окружность O; AB и AC — касательные к окружности (рис. 168).

Доказать: $AB = AC$; AO — биссектриса $\angle BAC$.

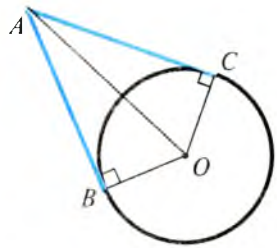


Рис. 168

Доказательство. Соединим точки касания B и C с центром окружности O. Радиусы OB и OC, проведенные в точки касания B и C, перпендикулярны касательным AB и AC. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABO и AOC, которые равны по общей гипотенузе AO и катетам BO и OC, равным радиусу R. Из равенства этих треугольников $AB = AC$ и $\angle OAB = \angle OAC$, а тогда $\angle 1 = \angle 2 = {}^1/_2 \angle BAC$, и потому AO — биссектриса $\angle BAC$, что и требовалось доказать.

§ 6.7. Взаимное расположение двух окружностей

Определение. *Если две окружности имеют одну общую точку, то они называются* ***касающимися****. Если две окружности имеют две общие точки, то они называются* ***пересекающимися****.*

Определение. *Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется* ***линией центров****.*

теорема

Если две окружности имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они имеют и еще одну точку, симметричную первой относительно линии центров (т. е. окружности пересекаются).

Дано: окружности O и O_1; C — общая точка окружностей; C не принадлежит прямой AOO_1B (рис. 169).

Доказать: C_1 — общая точка окружностей, симметричная точке C относительно прямой AOO_1B.

Доказательство. Линия центров прямой AOO_1B содержит диаметры окружностей, а тогда AOO_1B — ось симметрии обеих окружностей; поэтому общей точке этих окружностей C, лежащей вне линии центров, должна соответствовать точка C_1 — симметричная точке C и лежащая по другую сторону от оси симметрии на перпендикуляре к AOO_1B на равном расстоянии от линии центров ($DC = DC_1$; $CC_1 \perp AOO_1B$), что и требовалось доказать.

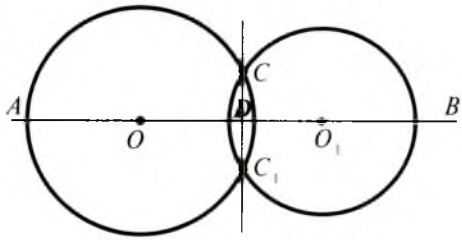


Рис. 169

Следствие. Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

теорема

Если две окружности имеют общую точку на линии центров, то эти окружности касаются.

Дано: окружности O и O_1; C — общая точка окружностей; C лежит ($\in$) на прямой AOO_1B (рис. 170).

Доказать: O и O_1 — касаются.

Доказательство. Предположим противное, что точка C — не единственная общая точ-

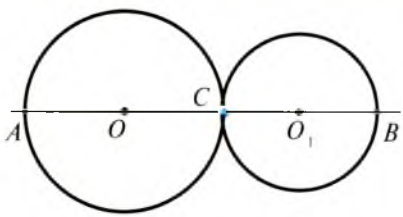


Рис. 170

ка двух окружностей. Тогда имеются два возможных положения второй общей точки относительно линии центров.

1) Если вторая общая точка этих окружностей не лежит на линии центров, то тогда (по предыдущей теореме) существует и третья общая точка, симметричная второй относительно линии центров AOO_1B. А две окружности, имеющие три общие точки, сливаются, что противоречит условию теоремы.

2) Если же вторая общая точка этих окружностей лежит на линии центров, то эти окружности имеют общую хорду, соединяющую две общие точки этих окружностей. Но хорда, проходящая через центр, есть диаметр окружности, а две окружности с общим диаметром сливаются в одну, что опять противоречит условию теоремы. Значит, предположения о существовании общих точек двух окружностей, кроме точки C, — неверно и C — единственная общая точка, что и требовалось доказать.

Определение. *Касание окружностей называется* ***внешним****, если окружности расположены одна вне другой. Касание окружностей называется* ***внутренним****, если одна из окружностей лежит внутри другой.*

На рисунке 171 показано внешнее касание окружностей O и O_1; C — точка касания.

На рисунке 172 показано внутреннее касание окружностей O и O_1; C — точка касания.

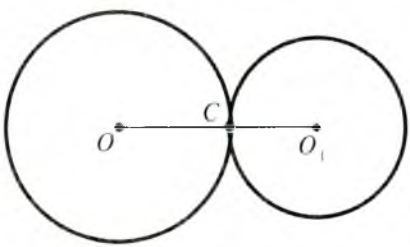


Рис. 171

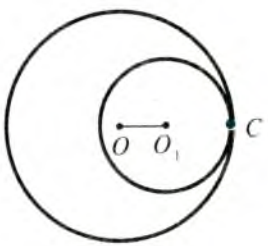


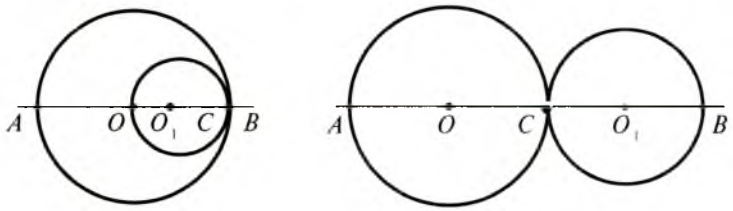
Рис. 172

теорема обратная

Если две окружности касаются, то точка касания лежит на линии центров.

Дано: окружности O и O_1 — касаются в точке C (рис. 173 *а* и *б*).

Доказать: точка $C \in AOO_1B$.



а) *б)*

Рис. 173

Доказательство. Предположим противное. Пусть точка C касания двух окружностей не лежит на линии центров. Тогда существует еще одна общая точка данных окружностей, симметричная точке C относительно линии центров AOO_1B, что противоречит условию теоремы о касании окружностей. Следовательно, предположение о положении точки C вне линии центров неверно, а потому C лежит на линии центров, что и требовалось доказать.

Следствие. Две касающиеся окружности имеют общую касательную в точке касания.

Дано: O и O_1 — две касающиеся окружности (рис. 174 *а* и *б*).

Доказать: ACB — общая касательная.

Доказательство. Проведем касательную ACB к окружности O, тогда $ACB \perp OC$ и ACB перпендикуляр и к O_1C, а потому ACB — касательная и к окружности O_1, т. к. касательная перпендикулярна радиу-

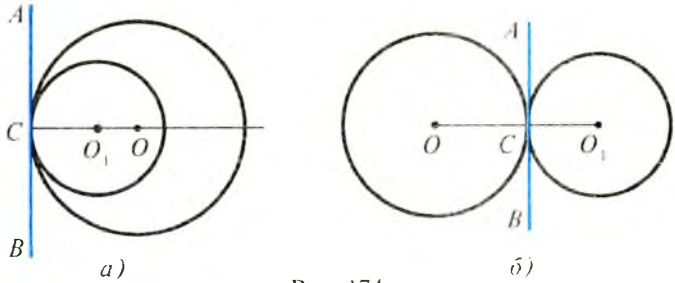


Рис. 174

су, проведенному в точку касания, что и требовалось доказать.

Рассмотрим различные случаи взаимного расположения двух окружностей.

Пусть R_1 и R_2 — радиусы двух окружностей, d — расстояние между их центрами. Рассмотрим зависимость между этими величинами.

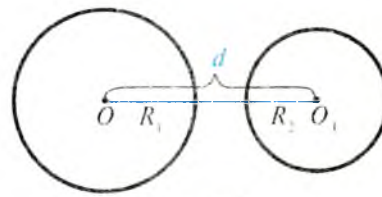


Рис. 175

1) Окружности лежат одна вне другой, не касаясь (рис. 175). В этом случае $d > R_1 + R_2$.

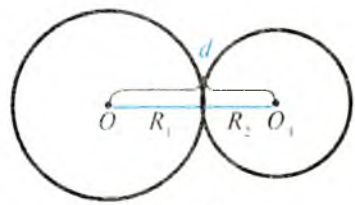


Рис. 176

2) Окружности имеют внешнее касание (рис. 176). В этом случае $d = R_1 + R_2$.

3) Окружности пересекаются (рис. 177). В этом случае $d < R_1 + R_2$ и $d > R_1 - R_2$, потому что в ΔOAO_1 сторона $OO_1 = d$, меньше суммы, но больше разности двух других сторон, равных радиусам R_1 и R_2.

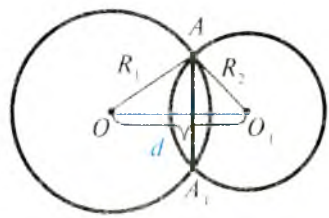


Рис. 177

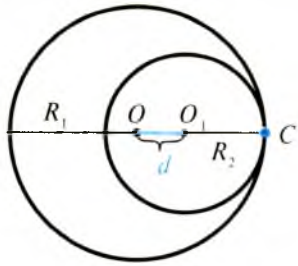


Рис. 178

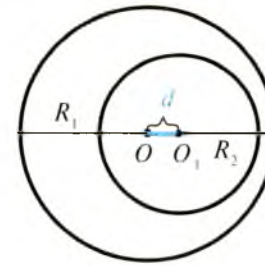


Рис. 179

4) Окружности имеют внутреннее касание (рис. 178). В этом случае $d = R_1 - R_2$.

5) Одна окружность лежит внутри другой (рис. 179). В этом случае $d < R_1 - R_2$, если $d = 0$, то центры этих окружностей сливаются.

Определение. *Две окружности, имеющие общий центр и лежащие в одной плоскости, называются* ***концентрическими***.

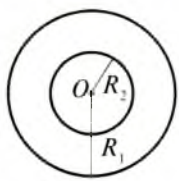


Рис. 180

На рисунке 180 изображены концентрические окружности с центром в точке O и радиусами R_1 и R_2.

§ 6.8. Угол, вписанный в окружность, и его измерение

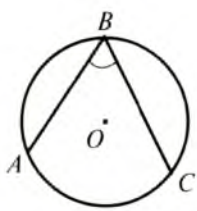


Рис. 181

Определение. *Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами этой окружности, называется* ***вписанным в окружность.***

На рисунке 181 угол ABC вписан в окружность; хорды AB и BC — стороны угла; вершина угла — B.

теорема

Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

1-й случай. Одна из сторон угла проходит через центр окружности.

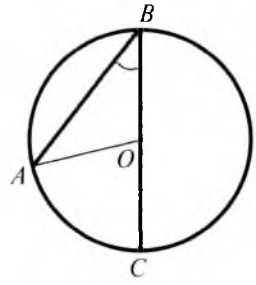


Рис. 182

Дано: окружность; вписанный в нее $\angle ABC$ (рис. 182).

Доказать: $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$.

Доказательство. Соединим точки A и O. Полученный треугольник AOB — равнобедренный, так как $AO = OB = R$, а тогда $\angle BAO = \angle ABO$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle AOC$ — внешний угол ΔABO и по свойству внешнего угла: $\angle AOC = \angle BAO + \angle ABO = 2\angle ABO$, а тогда $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle AOC$. $\angle AOC$ — центральный и измеряется дугой AC, на которую он опирается, а тогда $\angle ABO$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$, что и требовалось доказать.

2-й случай. Центр окружности лежит внутри угла, вписанного в окружность.

Дано: окружность O; вписанный в нее $\angle ABC$ (рис. 183).

Доказать: $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$.

Доказательство. Для доказательства проведем диаметр BOD. Он разобьет $\angle ABC$ на два угла ABD и DBC, вписанных в окружность, одна из сторон которых проходит через центр окружности. По первому случаю $\angle ABD$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AD$; $\angle DBC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup DC$; сумма углов ABD и DBC измеряется $\frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC$, т. е. $\angle ABC$

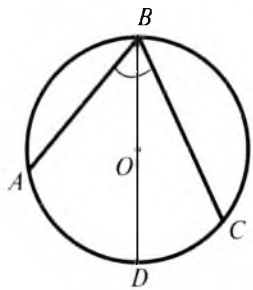


Рис. 183

измеряется $\frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC$, что и требовалось доказать.

3-й случай. Центр окружности лежит вне угла, вписанного в окружность.

Дано: окружность O; вписанный в нее $\angle ABC$ (рис. 184).

Доказать: $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$.

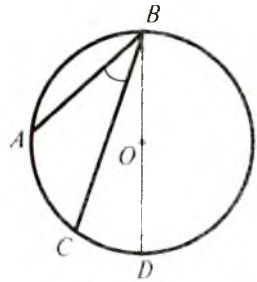


Рис. 184

Доказательство. Проведем диаметр окружности BOD. Тогда $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$. Каждый из углов ABD и CBD, вписанных в окружность, по первому случаю измеряется половиной дуги, на которую он опирается, т. к. одна из сторон этих углов проходит через центр окружности. Итак, $\angle ABD$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AD$; $\angle CBD$ измеряется $\frac{1}{2}\cup CD$; $\angle ABD - \angle CBD$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup CD$, т. е. $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD)$, или $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Все вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Дано: окружность O; $\angle AB_1C$, $\angle AB_2C$, $\angle AB_3C$ — вписанные в окружность углы (рис. 185).

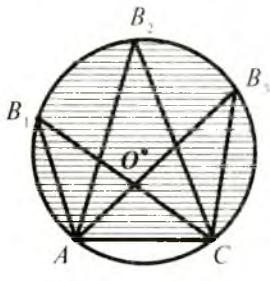


Рис. 185

Доказать: $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C$.

Доказательство. По теореме об измерении углов, вписанных в окружность, $\angle AB_1C$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$; $\angle AB_2C$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$; $\angle AB_3C$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$, а потому все эти углы равны между собой. $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, прямой.

Дано: окружность O; вписанный в нее $\angle ABC$; AC — диаметр (рис. 186).

Доказать: $\angle ABC = 90°$.

Доказательство. $\angle ABC$ измеряется $^1/_2 \cup AC$ по свойству углов, вписанных в окружность, но $\cup AC = 180°$ как половина всей окружности. Значит, $\angle ABC$ измеряется $^1/_2 \cdot 180° = 90°$, т. е. $\angle ABC$ — прямой, что и требовалось доказать.

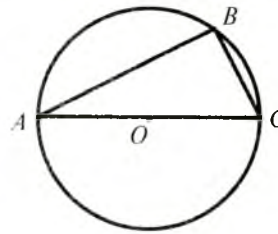


Рис. 186

§ 6.9. Измерение углов с вершиной внутри или вне круга

теорема

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и продолжениями его сторон.

Дано: O — круг; $\angle AMD$; точка M — внутри круга; AMB и CMD — хорды (рис. 187).

Доказать: $\angle AMD$ измеряется $^1/_2(\cup AD + \cup BC)$.

Доказательство. Соединим точки A и C и рассмотрим ΔACM: $\angle CAM = \angle CAB$ и измеряются $^1/_2 \cup BC$; $\angle ACM = \angle ACD$ и измеряются $^1/_2 \cup AD$ как вписанные в окружность. $\angle AMD$ — внешний угол ΔACM и равен сумме двух внутренних углов, не смежных с этим внешним: $\angle AMD = \angle CAM + \angle ACM$, или $\angle AMD = \angle CAB + \angle ACD$, и тогда $\angle AMD$ измеряется $^1/_2 \cup BC + {}^1/_2 \cup AD = {}^1/_2(\cup BC + \cup AD)$, что и требовалось доказать.

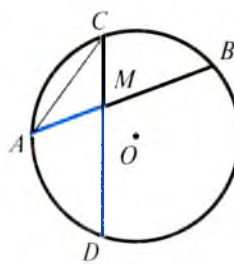


Рис. 187

теорема

Угол, вершина которого лежит вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Дано: O — круг; $\angle BAC$ и точка A вне круга; ADB и AEC — стороны угла (рис. 188).

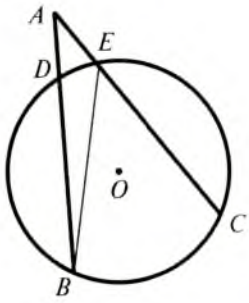


Рис. 188

Доказать: $\angle BAC$ измеряется $^1/_2(\cup BC - \cup DE)$.

Доказательство. Соединим точки B и E, $\angle DBE = \angle ABE$ и измеряется $^1/_2 \cup DE$ как угол, вписанный в окружность; $\angle BEC$ измеряется $^1/_2 \cup BC$ по той же причине. $\angle BEC$ — внешний угол треугольника ABE и по свойству внешнего угла: $\angle BEC = \angle ABE + \angle BAE$. Отсюда $\angle BAE = \angle BAC = \angle BEC - \angle ABE$, а тогда $\angle BAC$ измеряется $^1/_2 \cup BC - {}^1/_2 \cup DE = {}^1/_2(\cup BC - \cup DE)$, что и требовалось доказать.

теорема

Угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.

1-й случай. Хорда проходит через центр окружности.

Дано: O — круг; $\angle ACD$; CD — диаметр; ACB — касательная (рис. 189).

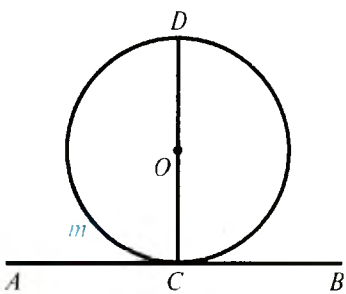


Рис. 189

Доказать: $\angle ACD$ измеряется $^1/_2 \cup CmD$.

Доказательство. Так как радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\angle ACD = 90°$. Но половина $\cup CmD$ также равна $90°$, поскольку $\cup CmD = 180°$,

так как составляет половину окружности. Значит, теорема верна, т. е. $\angle ACD$ измеряется $^1/_2 \cup CmD$ и равен 90°, что и требовалось доказать.

2-й случай. Хорда не проходит через центр.

Дано: O — круг; BC — хорда; ACE — касательная (рис. 190).

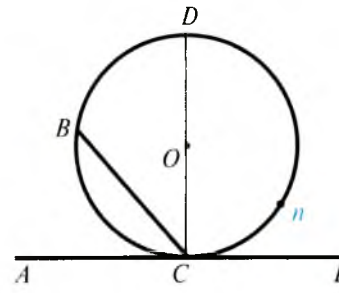


Рис. 190

Доказать: $\angle ACB$ измеряется $^1/_2 \cup BC$.

Доказательство. Через точку C проведем диаметр окружности COD. По первому случаю $\angle ACD$ измеряется $^1/_2 \cup CBD$, а угол BCD как вписанный в окружность измеряется $^1/_2 \cup BD$, $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$; $\angle ACB$ измеряется $^1/_2 \cup CBD - {}^1/_2 \cup BD = {}^1/_2(\cup CBD - \cup BD) = {}^1/_2 \cup BC$, что и требовалось доказать.

Аналогичным способом можно показать, что тупой $\angle BCE$, составленный касательной и хордой, измеряется $^1/_2$ дуги BDC, т. е. $^1/_2 \cup BD + {}^1/_2 \cup DnC$.

§ 6.10. Вписанные и описанные треугольники. Замечательные точки треугольника

Определение. *Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, а стороны являются хордами этой окружности, называется* ***вписанным*** *в окружность, а окружность —* ***описанной*** *около многоугольника.*

Определение. *Многоугольник, все стороны которого являются касательными к окружности, называется* ***описанным*** *около окружности, а окружность —* ***вписанной*** *в многоугольник.*

теорема

Около всякого треугольника можно описать окружность.

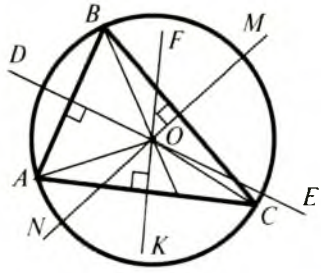


Рис. 191

Дано: ΔABC (рис. 191).

Доказать: около ΔABC можно описать окружность.

Доказательство. В § 6.2 была доказана теорема о возможности построения окружности, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой. Поскольку такие три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, задают единственный треугольник ABC, то теорема о существовании окружности, описанной около этого треугольника, справедлива. Центр окружности, описанной около ΔABC, лежит на пересечении любых двух перпендикуляров: DE к стороне AB и MN к стороне BC, проведенных через середины этих сторон.

Следствие. Все три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; $DE \perp AB$; $FK \perp AC$; $MN \perp BC$ — проходят через середины сторон AB, AC, BC (рис 191).

Доказать: DE, MN, FK пересекаются в точке O.

Доказательство. В доказанной теореме $OA = OB$ и $OB = OC$, тогда $OA = OC$ и, следовательно, точка O равноудалена от точек A и C, т. е. от концов отрезка AC, а геометрическое место таких точек — перпендикуляр FK к отрезку AC, проведенный через его середину. Но O — точка пересечения перпендикуляра DE и перпендикуляра MN. Итак, все три перпендикуляра DE, MN и FK к серединам сторон ΔABC пересекаются в одной точке O, что и требовалось доказать.

Точка пересечения трех перпендикуляров к серединам сторон треугольника — одна из замечательных точек треугольника и ***центр описанной окружности.***

теорема

Во всякий треугольник можно вписать окружность.

Дано: ΔABC (рис. 192).

Доказать: в треугольник ABC можно вписать окружность.

Доказательство. Для доказательства существования окружности, вписанной в ΔABC, следует найти ее центр O — точку, которая равноудалена от всех трех сторон ΔABC. Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон AB и AC угла BAC, есть биссектриса AE этого угла, а геометрическое место точек, равноудаленных от сторон BA и BC угла ABC, есть биссектриса BF этого угла. Точка пересечения этих двух биссектрис AE и BF равноудалена от сторон BA, AC и BC, т. е. равноудалена от всех сторон ΔABC. Окружность с центром в точке O и радиусом $OK = OM$ ($OK \perp AC$, $OM \perp AB$) и является окружностью, вписанной в данный ΔABC, что и требовалось доказать.

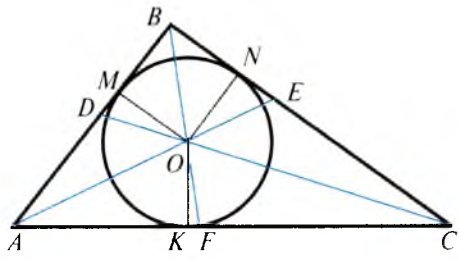


Рис. 192

Следствие. Все три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; AE, BF, CD — биссектрисы (рис. 192).

Доказать: биссектрисы пересекаются в точке O.

Доказательство. В доказанной теореме O — точка пересечения биссектрис AE и BF углов A и B треугольника ABC. Точка O равноудалена от сторон угла A, т. е. $OM = OK$ и от сторон угла B, т. е. $OM = ON$, а тогда $ON = OK$ и точка O равноудалена от сторон

CB и CA угла C, следовательно, лежит на биссектрисе этого угла. Итак, и третья биссектриса угла C проходит через точку O. Таким образом, все три биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

Точка пересечения трех биссектрис треугольника — одна из замечательных точек треугольника и ***центр вписанной окружности.***

теорема

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; AN, CM, BK — высоты треугольника (рис. 193).

Доказать: AN, CM, BK пересекаются в одной точке.

Доказательство. Для доказательства теоремы через вершины B, A и C проведем прямые, параллельные сторонам треугольника ABC AC, BC и AB до их взаимного пересечения в точках D, E, F. Рассмотрим ΔDFE, сторонам которого высоты ΔABC перпендикулярны.

Четырехугольники $ADBC$ и $ABEC$ — параллелограммы по построению, а потому $AC = BD$ и $AC = BE$ как противоположные стороны параллелограмма; тогда $BD = BE$ и точка B — середина отрезка DE. Значит, высота BK ΔABC является перпендикуляром к стороне DE ΔDFE, проведенным через его середину B. Аналогично, $ABEC$ и $ABCF$ — параллелограммы, в которых $AB = CE$ и $AB = FC$, т. е. $FC = CE$, и точка C — середина отрезка FE, а высота CM ΔABC будет для ΔDFE перпендикуляром к стороне FE этого треугольника, проведенным через его середину C. Также A — середина отрезка DF, а высота AN ΔABC является перпендикуляром к DF, про-

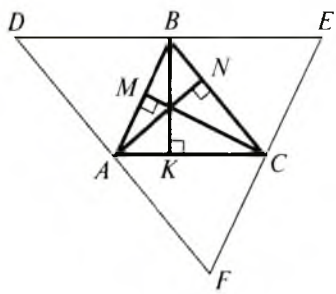


Рис. 193

веденным через его середину. Итак, для ΔDEC все три высоты ΔABC являются перпендикулярами к его сторонам, проведенным через их середины. По ранее доказанному все эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Точка пересечения трех высот треугольника является одной из замечательных точек треугольника и называется ***ортоцентром*** *треугольника.*

теорема

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке и эта точка отсекает от каждой медианы одну третью часть, считая от соответствующей стороны.

Дано: ΔABC; AD, BE и CN — его медианы (рис. 194).

Доказать: AD, BE и CN пересекаются в одной точке O; $ON = {}^1/_3 CN$; $OD = {}^1/_3 AD$; $OE = {}^1/_3 BE$.

Доказательство. Пусть медианы AD и BE пересекаются в точке O. Докажем, что отрезок CN, проходящий через третью вершину этого треугольника и точку O, будет третьей медианой ΔABC, т. е. $AN = NB$. Через точку E проведем $EF \parallel AD$, а так как $AE = EC$, то $CF = FD = {}^1/_2 CD$ по теореме Фалеса. Разделим отрезок BD пополам: $DK = KB = {}^1/_2 BD$, но $BD = CD$, а тогда все четыре отрезка BK, KD, DF и FC — равны ($n_4 = n_3 = n_2 = n_1$). Через точку K проведем $KS \parallel AD$. Из равенства $n_4 = n_3 = n_2$ по теореме Фалеса следует, что $BS = SO = OE$ ($m_3 = m_2 = m_1$). Через точки S и E проведем SP и $EQ \parallel CN$, тогда $l_4 = l_3 = l_2$, т. е. $BP = PN = NQ$ (по

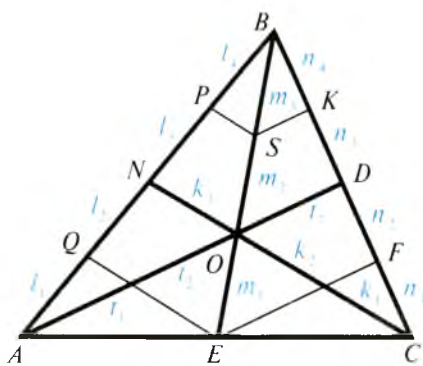


Рис. 194

теореме Фалеса). Кроме того, $AQ = QN$ ($l_1 = l_2$), так как $AE = EC$ и $EQ \parallel CN$. Значит, все три медианы ΔABC пересекаются в одной точке, т. к. $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$, т. е. $AN = NB$. Кроме того, из равенства $m_1 = m_2 = m_3$ следует, что $m_1 = {}^1/_3 BE$, т. е. $OE = {}^1/_3 BE$. Аналогично, используя теорему Фалеса, можно доказать, что $t_1 = t_2 = t_3$, и потому $t_3 = {}^1/_3 AD$, или $OD = {}^1/_2 AD$, а также $k_1 = k_2 = k_3$, т. е. $k_3 = {}^1/_3 CN$, или $ON = {}^1/_3 CN$, что и требовалось доказать.

Точка пересечения трех медиан треугольника есть одна из замечательных точек треугольника и ***центр тяжести треугольника.***

§ 6.11. Вписанные и описанные четырехугольники и их свойства

теорема

В выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Дано: O — круг; $ABCD$ — вписанный выпуклый четырехугольник (рис. 195).

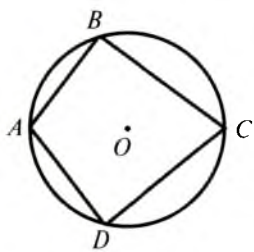


Рис. 195

Доказать: $\angle A + \angle C = 180°$; $\angle B + \angle D = 180°$.

Доказательство: $\angle A$ измеряется ${}^1/_2 \cup BCD$ и $\angle C$ измеряется ${}^1/_2 \cup BAD$ как углы, вписанные в окружность. $\angle A + \angle C$ измеряются ${}^1/_2 \cup BCD + {}^1/_2 \cup BAD = {}^1/_2 (\cup BCD + \cup BAD)$, т. е. дугой, равной половине окружности, или 180°. Итак, $\angle A + \angle C = 180°$. Так как сумма всех углов четырехугольника равна $180° \cdot (4 - 2) = 180° \cdot 2 = 360°$ (сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$, то сумма двух других углов $ABCD$ также равна 180°, т. е. $\angle B + \angle D = 180°$, что и требовалось доказать.

теорема

обратная

Если в выпуклом четырехугольнике сумма двух про-

тивоположных углов равна 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность.

Дано: $ABCB$ — выпуклый четырехугольник; $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 195).

Доказать: около $ABCD$ можно описать окружность.

Доказательство. Через три вершины четырехугольника $ABCD$ — точки A, B и C можно провести единственную окружность. Четвертая вершина D должна также находиться на этой окружности, поскольку при положении ее внутри или вне круга угол D не измерялся бы $^1/_2 \cup ABC$ (был бы больше или меньше $\cup ABC$), а тогда бы $\angle B + \angle D \neq 180°$, т. к. не измерялся бы $^1/_2 (\cup ADC + \cup ABC) = 180°$, что противоречит условию теоремы. Итак, точка D лежит на окружности и $ABCD$ — вписанный в окружность выпуклый четырехугольник, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из всех параллелограммов можно описать окружность только около прямоугольника или квадрата.

Следствие 2. Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Справедливость утверждений следствия 1 следует из того, что суммы противоположных углов прямоугольника и квадрата равны 180° (поскольку все углы этих четырехугольников прямые). В остальных параллелограммах противоположные углы либо оба острые, либо оба тупые, а потому их суммы не равны 180°.

В равнобедренной трапеции суммы противоположных углов равны (рис. 196): $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$, т. к. $\angle A = \angle D$; $\angle B =$

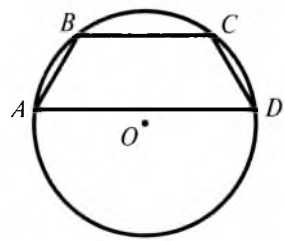


Рис. 196

$= \angle C$ по свойству равнобедренной трапеции, и сумма углов трапеции $ABCD$ равна 360°. Итак, следствие 2 тоже доказано.

теорема

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Дано: окружность O; $ABCD$ — описанный четырехугольник (рис. 197).

Доказать: $AD + BC = AB + CD$.

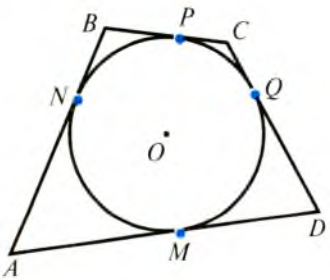


Рис. 197

Доказательство. Пусть M, N, P, Q — точки касания окружности и четырехугольника. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $AN = AM$; $CP = CQ$; $BN = BP$; $DM = DQ$, а тогда $AB + CD = AN + BN + CQ + DQ$; $BC + AD = BP + CP + AM + DM$; $AB + CD = BC + AD$, т. к. состоят из четырех соответственно равных попарно друг другу отрезков, что и требовалось доказать.

§ 6.12. Задачи на построение

Задача 1. Разделить данную дугу пополам.

Дано: $\cup AB$; O — центр окружности (рис. 198).

Построение. Соединим концы дуги AB хордой. На хорду AB из центра окружности O опустим перпендикуляр OC и продолжим его до пересечения с $\cup AB$ в точке D. Дуга AB разделится перпендикуляром OD пополам, т. е. $\cup AD = \cup DB$, т. к. радиус, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемую ею дугу пополам. Если центр

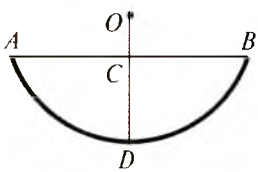


Рис. 198

окружности O не известен, то к хорде AB нужно провести через ее середину C перпендикуляр, который также разделит $\cup AB$ пополам.

Задача 2. Найти центр O данной окружности.

Дано: окружность O (рис. 199).

Построение. На данной окружности выбираем произвольные точки A, B и C. Проводим две хорды AB и BC. Каждую из этих хорд делим пополам и через их середины — точки M и N проводим перпендикуляры $MK \perp AB$ и $NE \perp BC$. Точка O будет точкой пересечения перпендикуляров и центром данной окружности, т.к. точка O лежит на перпендикуляре KM, проведенном через середину отрезка AB, а потому одинаково удалена от концов A и B данного отрезка; точка O лежит на перпендикуляре NE, проведенном через середину отрезка CB, а потому одинаково удалена от концов отрезка B и C. Итак, точка O одинаково удалена от точек A, B и C, лежащих на окружности, а следовательно является центром данной окружности.

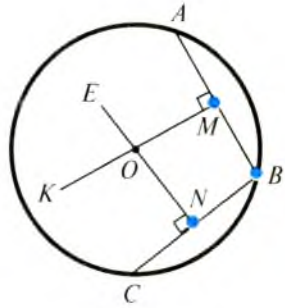


Рис. 199

Задача 3. Провести касательную к данной окружности O параллельно данной прямой AB.

Дано: окружность O и прямая AB (рис. 200).

Построение. Из точки O — центра данной окружности опускаем перпендикуляр на прямую AB.

Итак, $OC \perp AB$; через точку M пересечения этого перпендикуляра с окружностью проводим прямую DE, параллельную AB. DE и есть искомая касательная, параллельная AB. Действительно, если $OC \perp AB$ и $DE \parallel AB$, то $DE \perp OM$, а пря-

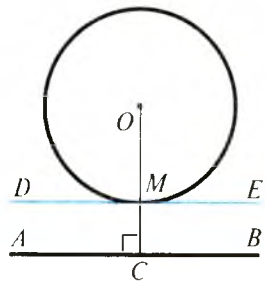


Рис. 200

мая, перпендикулярная радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, является касательной к данной окружности.

Задача 4. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и катету a.

Дано: гипотенуза c и катет a (рис. 201).

Построение. На произвольной прямой MN отложим отрезок $AB = c$ (рис. 202). На AB как на диаметре опишем полуокружность радиуса $R = \frac{AB}{2}$. С центром в точке B (или A) опишем дугу радиусом, равным a. Точку C пересечения полуокружности и дуги соединим с концами A и B диаметра AB. ΔABC — искомый, т. к. угол $C = 90^\circ$ как вписанный и опирающийся на диаметр окружности; $AB = c$ гипотенуза, а $BC = a$ — катет полученного прямоугольного треугольника.

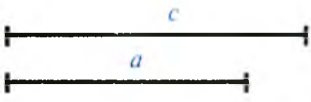


Рис. 201

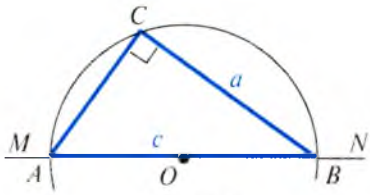


Рис. 202

Задача 5. Через данную точку A провести касательную к данной окружности O.

1-й случай. Точка A лежит на окружности (рис. 203).

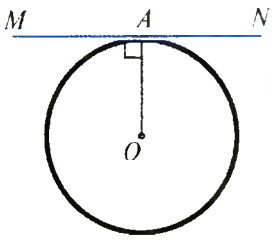


Рис. 203

Построение. Соединяем центр окружности O с точкой A, т. е. строим $OA = R$. Через точку A проводим прямую MN, перпендикулярную OA. MN и есть искомая касательная, т. к. MN перпендикулярна радиусу OA в конце его A, лежащем на окружности.

2-й случай. Точка A лежит вне окружности (рис. 204).

Построение. Соединим точки A и O и на AO, как на диаметре, строим окружность радиусом, равным $\frac{1}{2}AO$. Итак, $OO_1 = O_1A = \frac{1}{2}AO$. B и C — точки пересечения данной окружности с центром в точке O с построенной окружностью с центром в точке O_1. Через точки A и B и точки A и C проводим прямые AB и AC, которые и являются искомыми касательными.

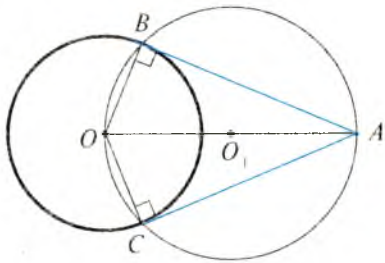


Рис. 204

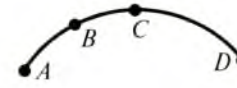
Действительно, вписанные углы OBA и OCA — прямые, т. к. опираются на диаметр OA окружности. Тогда $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, а прямая, перпендикулярная радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, и есть касательная к данной окружности.

Вопросы для самопроверки

1. Принадлежит ли кругу его центр?
2. Принадлежит ли окружности ее центр?
3. Чем отличается окружность от круга?
4. В чем отличие секущей от хорды окружности, проходящей через те же точки?
5. Является ли диаметр окружности хордой?
6. Как связаны диаметр и радиус одной окружности?
7. Сколько хорд можно провести через точку, взятую на окружности?
8. Сколько хорд можно провести через точку, взятую внутри круга?
9. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?
10. Сколько прямых, проходящих через центр окруж-

ности, можно провести через точку, взятую: a) внутри круга; b) на окружности?

11. Сколько дуг окружности изображено на данном чертеже?



12. Каким свойством обладают центральные углы двух равных кругов, если равны соответствующие им дуги?

13. Сформулируйте обратное утверждение вопросу 12. Верно ли оно?

14. Какие окружности имеют общий центр?

15. Даны две окружности с общим центром O и радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$). Где на чертеже находятся точки X, для которых a) $|OX| < r_2$; b) $|OX| > r_2$; c) $|OX| \leq r_2$; d) $r_1 < OX < r_2$; e) $|OX| = r_1$.

16. Сколько окружностей можно провести через a) одну точку; b) через две точки; c) через три точки? Где лежат центры этих окружностей?

17. Можно ли провести окружность через все четыре вершины: a) любого прямоугольника; b) параллелограмма; c) ромба; d) квадрата; e) трапеции; f) прямоугольной трапеции; j) равнобедренной трапеции?

18. Будет ли диаметр, проведенный через середину хорды (не проходящей через центр окружности), перпендикулярен ей? В каком отношении он делит дуги, стягиваемые этой хордой?

19. В каком отношении делит диаметр, проведенный через середину дуги, хорду, стягивающую эту дугу? Под каким углом наклонен этот диаметр к хорде?

20. Каким свойством обладают хорды одного круга, равноудаленные от его центра?

21. Какая из двух неравных хорд одного круга расположена ближе к центру?

22. Сравнимы ли дуги одной окружности, если известны соотношения между длинами хорд, стягивающими эти дуги?

23. Может ли прямая иметь с окружностью: a) две

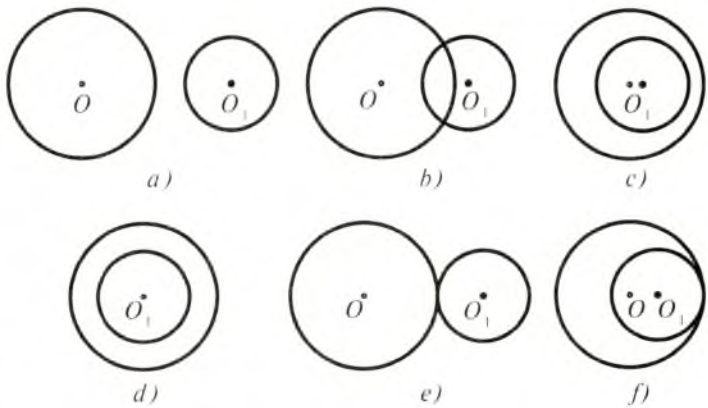
общие точки; b) три общие точки; c) одну общую точку; d) не иметь ни одной точки?

24. Каким свойством обладает прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку? Как называется эта прямая?

25. Каким свойством обладают две касательные, проведенные к окружности из одной точки?

26. Существуют ли неравные дуги, заключенные между двумя параллельными хордами одной окружности?

27. Как расположены две окружности, изображенные на чертежах a, b, c, d, e, f?



28. Как можно выразить в виде равенств или неравенств зависимость между отрезком OO_1 — расстоянием между центрами окружностей, изображенных на чертежах a), f) — и радиусами этих окружностей R и r?

29. Сколько общих точек может иметь прямая с тремя концентрическими окружностями?

30. Сколько осей симметрии имеют концентрические окружности?

31. Имеют ли концентрические окружности центр симметрии?

32. Каким свойством обладает общая хорда двух пересекающихся окружностей?

33. Верно ли, что точка касания двух окружностей лежит на линии их центров?
34. Каким свойством обладает угол, вписанный в окружность?
35. Каким свойством обладают вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности?
36. Когда вписанный в окружность угол является прямым?
37. Как измеряется угол, вершина которого лежит внутри круга?
38. Чему равен угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность?
39. Чему равен угол, образованный касательной и хордой?
40. Какой треугольник является вписанным в круг?
41. Какой треугольник является описанным около круга?
42. Существует ли окружность, описанная около любого треугольника?
43. Существует ли окружность, вписанная в любой треугольник?
44. Каким свойством обладают три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через середины этих сторон?
45. Каким свойством обладают три биссектрисы углов треугольника?
46. Каким свойством обладает точка пересечения медиан треугольника?
47. Что такое ортоцентр треугольника?
48. Что такое центр тяжести треугольника?
49. Какие многоугольники называются: a) вписанными в окружность; b) описанными около нее?
50. Каким свойством обладает вписанный выпуклый четырехугольник?
51. Каким свойством обладает описанный четырехугольник?
52. Можно ли описать окружность около выпуклого четырехугольника, если сумма двух его противоположных углов равна 180°?

Тест № 6

1. Радиус окружности равен 78 мм. Найти длину наибольшей хорды.

A) 156 мм; B) 78 м; C) 117 см; D) 124 мм; E) определить нельзя.

2. Найти диаметр окружности, если известно, что ее радиус на 55 мм меньше диаметра.

A) 100 мм; B) 110 мм; C) определить нельзя; D) 115 мм; E) 165 мм.

3. Хорда, стягивающая дугу в 120°, удалена от центра на 5 см. Определить радиус окружности.

A) 8 см; B) 15 см; C) 10 см; D) 12 см; E) 9 см.

4. Хорда, стягивающая дугу в 90°, удалена от центра на m. Определить длину хорды.

A) 2 m; B) m; C) $\frac{3}{2}m$; D) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$.

5. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой на два отрезка в 3 см и 7 см. Найти расстояние каждой хорды от центра.

A) 5 и 5 см; B) 3,5 и 3,5 см; C) 2 и 3 см; D) 2 и 2 см; E) 4 и 4 см.

6. Из точки A на окружности проведены две хорды $AB = AC = 3$ дм и их концы соединены. Найти расстояние от центра до хорды, если диаметр круга равен 0,6 м.

A) 2 дм; B) 3 дм; C) 1,5 дм; D) 2,5 дм; E) 2,4 дм.

7. Радиус окружности равен 10 см, данная точка удалена от центра на 3 см. Найти наименьшее и наибольшее расстояния от этой точки до окружности.

A) 3 и 7 см; B) 7 и 13 см; C) 5 и 15 см; D) 6 и 14 см; E) 8 и 12 см.

8. Из точки, данной на окружности, проведены ди-

аметр и хорда, равная радиусу. Найти угол между ними.

A) 45°; B) 90°; C) 30°; D) 120°; E) 60°.

9. Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, каждая из которых равна радиусу. Найти угол между ними.

A) 90°; B) 120°; C) 60°; D) 150°; E) 100°.

10. В круге на расстоянии 1 см от центра проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной по 6 см. Найти отрезки каждой хорды.

A) 3 и 3 см; B) 1 и 5 см; C) 2 и 4 см; D) 2,5 и 3,5 см; E) 1,5 и 4,5 см.

11. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на отрезки 2 см и 6 см. Найти расстояние хорды от центра.

A) 3 см; B) 4 см; C) 1 см; D) 2,5 см; E) 3,5 см.

12. Концы диаметра удалены от касательной на 1,6 м и 0,6 м. Определить длину диаметра.

A) 0,9 м; B) 1,1 м; C) 2 м; D) 2,4 м; E) 2,2 м.

13. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Определить длины этих хорд.

A) 14 и 18 см; B) 20 и 12 см; C) 12 и 18 см; D) 20 и 10 см; E) 16 и 18 см.

14. Из внешней точки проведены к кругу две взаимно перпендикулярные касательные. Радиус круга равен 10 см. Найти длину каждой касательной.

A) 10 и 10 см; B) 12 и 12 см; C) 10 и 12 см; D) 20 и 20 см; E) 15 и 15 см.

15. AB и AC — касательные к одной окружности; образованный ими угол $BAC = 60°$; ломаная линия BAC равна 1 см. Определить расстояние между точками касания B и C.

A) 0,5 см; B) 2 см; C) 0,8 см; D) 0,6 см; E) 0,4 см.

16. Радиусы двух кругов 2 см и 4 см, их общие внутренние касательные взаимно перпендикулярные. Найти длину каждой из них.

A) 4 и 8 см; B) 6 и 6 см; C) 3 и 9 см; D) 5 и 7 см; E) 6 и 12 см.

17. Какое относительное положение занимают две окружности, если расстояние между их центрами 10 см, а радиусы 8 см и 2 см?

A) пересекаются; B) одна лежит внутри другой; C) имеют внутреннее касание; D) имеют внешнее касание; E) одна лежит вне другой.

18. Какое относительное положение имеют две окружности, если расстояние между их центрами равно 4 см, а радиусы их 11 см и 7 см?

A) пересекаются; B) одна лежит внутри другой; C) имеют внутреннее касание; D) имеют внешнее касание; E) одна лежит вне другой.

19. Каково относительное расположение окружностей, если расстояние между их центрами 12 см, а радиусы 5 см и 3 см?

A) пересекаются; B) одна лежит внутри другой; C) имеют внутреннее касание; D) имеют внешнее касание; E) одна окружность лежит вне другой.

20. Наименьшее расстояние между двумя концентрическими окружностями равно 2 см, а наибольшее 16 см. Найти радиусы этих окружностей.

A) 9 и 7 см; B) 10 и 6 см; C) 9 и 8 см; D) 12 и 4 см; E) 12 и 6 см.

21. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 7 : 4, а ширина кольца равна 12 см. Определить радиус меньшей окружности.

A) 8 см; B) 10 см; C) 9 см; D) 12 см; E) 16 см.

22. В окружности радиуса 1,4 м определить расстояние от центра до хорды, стягивающей дугу в 120°.

A) 1 м; B) $0{,}7\sqrt{3}$ м; C) $0{,}7\sqrt{2}$ м; D) 0,7 м; E) 0,8 м.

23. Угол между двумя радиусами равен 102°37″. Определить угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.

A) 77°59′23″; B) 102°37″; C) 78°59′23″; D) 77°23″; E) 77°33″.

24. Дуга AB равна 73°27′, из ее конца B проведена касательная до встречи в точке C с продолжением радиуса AO. Определить $\angle ACB$.

A) 16°33′ B) 17°33′; C) 106°33′; D) 107°33′; E) 73°27′

25. Дуга содержит 117°23′. Определить угол между хордой и продолжением радиуса, проведенного в конец дуги.

A) 63°37′; B) 148°41′30″; C) 62°37′; D) 27°23′; E) 74°20′45″.

26. Дуга содержит 84°52′. Под каким углом из точек этой дуги видна ее хорда?

A) 93°8′; B) 95°8′; C) 137°34′; D) 84°52′; E) 42°26′.

27. Хорда делит окружность в отношении 5:13. Определить величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

A) 100° и 260°; B) 50° и 130°; C) 80° и 100°; D) 70° и 290°; E) 35° и 145°.

28. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3 : 5, проведена касательная. Определить острый угол между хордой и касательной.

A) 67°30′; B) 22°30′; C) 23°30′;D) 112°30′; E) 45°.

29. Окружность разделена точками A, B, C и D так, что $\cup AB : \cup BC : \cup CD : \cup DA = 2 : 3 : 5 : 6$, и про-

ведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке M. Определить $\angle AMB$.

A) 60°; B) 75°; C) 102°45′; D) 78°45′; E) 101°15′.

30. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M. $\angle CMB = 73°$; $\smile BC = 110°$. Сколько градусов содержит дуга BD?

A) 183°; B) 177°; C) 91° 30′; D) 72°; E)144°.

31. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D — прямые; диагональ AC образует со стороной AB угол 40°, а со стороной AD — угол 30°. Определить острый угол между диагоналями AC и BD.

A) 80°; B) 60°; C) 75°; D) 45°; E) 70°.

32. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4 м. Определить радиус описанной окружности.

A) 2,5 м; B) 2 м; C) 3 м; D) $2\sqrt{3}$ м; E) 3,5 м.

33. Два угла треугольника равны 100° и 50°. Под каким углом видна каждая сторона треугольника из центра вписанной окружности?

A) 105°, 115°, 140°; B) 110°, 120°, 130°; C) 75°, 65°, 230°; D) 80°, 100°, 180°; E)120°, 125°, 115°.

34. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанного круга в отношении 7:5, начиная от вершины. Найти отношения боковой стороны к основанию треугольника.

A) 6 : 5; B) 14 : 5; C) 7 : 10; D) 12 : 17; E) 7 : 9.

35. Около круга радиуса 4 см описан прямоугольный треугольник с гипотенузой 26 см. Найти периметр треугольника.

A) 66 см; B) 64 см; C) 54 см; D) 52 см; E) 60 см.

36. Около круга радиуса R описан ромб. Найти его высоту.

A) $\frac{3R}{2}$; B) $2R$; C) $\frac{R}{2}$; D) $\frac{3R}{4}$; E) $\frac{5}{4}R$.

37. Около круга радиуса 10 см описана равнобедренная трапеция с острым углом в 30°. Найти боковую сторону трапеции.

A) 30 см; B) 35 см; C) 40 см; D) 45 см; E) $20\sqrt{3}$ см.

38. Сторона ромба 8 см; острый угол его 30°. Определить радиус вписанного круга.

A) 2 см; B) 4 см; C) 6 см; D) 5 см; E) $2\sqrt{3}$ см.

39. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12 см. Определить среднюю линию этой трапеции.

A) 4 см; B) 6 см; C) 3 см; D) 8 см; E) 9 см.

40. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого относятся по порядку как: 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

A) да, да; B) нет, да; C) да, нет; D) нет, нет; E) определить нельзя.

41. Три стороны описанного четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1 : 2 : 3. Определить стороны, если периметр четырехугольника равен 24 м.

A) 3, 6, 9 и 6 м; B) 4, 8, 8 и 4 м; C) 2, 4, 8 и 10 м; D) 3, 6, 6 и 9 м; E) 4, 6, 8 и 6 м.

42. Три угла вписанного четырехугольника относятся как 1 : 2 : 3. Определить углы четырехугольника.

A) 60°, 120°, 120°, 60°; B) 45°, 90°, 135°, 90°; C) 90°, 45°, 90°, 135°; D) 135°, 90°, 45°, 90°; E) 120°, 60°, 120°, 60°.

Глава 7

ДВИЖЕНИЕ

§ 7.1. Преобразование фигур

Из первой главы известно: *геометрической фигурой на плоскости называется произвольное множество точек данной плоскости.*

В предыдущих главах мы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами: треугольниками, четырехугольниками, отрезками, окружностями и т.д.

Рассмотрим преобразование фигур.

Если каждую точку данной фигуры F сместить каким-нибудь образом, то получится новая фигура F_1. В этом случае считается, что фигура F_1 получена преобразованием фигуры F (рис. 205).

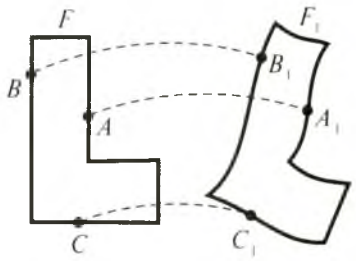


Рис. 205

Существуют различные виды преобразования. Мы рассмотрим только два из них: движение и гомотетию.

Определение. *Движением называется такое преобразование, которое не меняет расстояния между парами точек.*

При движении любые две точки A и B одной фигуры переводятся в точки A_1, B_1 другой фигуры так, что $|AB| = |A_1B_1|$ (рис. 206).

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1. Пусть произвольная точка A фигуры F при этом преобразовании пере-

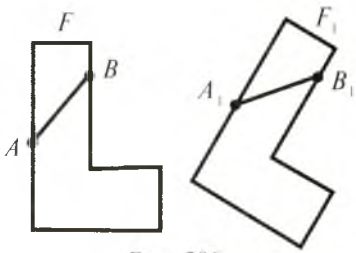


Рис. 206

ходит в точку A_1 фигуры F_1. Преобразование фигуры F_1 в фигуру F, при котором точка A_1 переходит в точку A, называется ***преобразованием, обратным данному.***

Движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные точки. Очевидно преобразование, обратное движению, также является движением.

§ 7.2. Свойства движения

теорема 1

(основное свойство движений)

Два движения, выполненные последовательно, снова дают движение.

Дано: точка A фигуры F, точка A_1 фигуры F_1, полученная из точки $A \in F$, движением и точка A_2 фигуры F_2, полученная из точки $A_1 \in F_1$ в результате движения (рис. 207).

Доказать: переход от $A \in F$ к $A_2 \in F_2$ есть движение.

Доказательство. При движении различные точки одной фигуры переходят в различные точки другой фигуры.

Рассмотрим две различные точки A и B фигуры F, переходящие после первого движения соответственно в точки A_1 и B_1 фигуры F_1, причем $AB = A_1B_1$. Точки A_1 и B_1 фигуры F_1 после второго движения переходят в точки A_2 и B_2 фигуры F_2, при этом $A_1B_1 = A_2B_2$. Следовательно, $AB = A_2B_2$ и преобразование, переводящее точки A и B фигуры F в точки A_2 и B_2 фигуры F_2 есть движение, что и требовалось доказать.

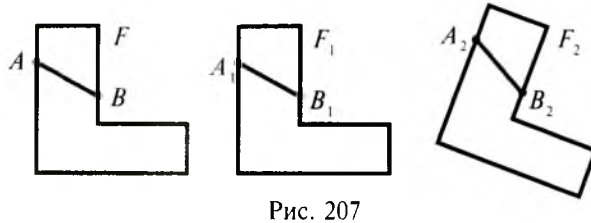


Рис. 207

теорема 2

Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, при этом сохраняется порядок их взаимного расположения.

Дано: точки A, B и C лежат на прямой MN, причем точка B расположена между A и C. Точки A_1, B_1 и C_1 получены из A, B и C в результате движения (рис. 208).

Доказать: точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямой M_1N_1 и точка B_1 расположена между точками A_1 и C_1.

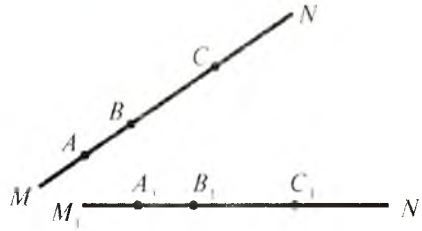


Рис. 208

Доказательство. Предположим противное, что точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой. Тогда они являются вершинами треугольника и, на основе соотношения между сторонами треугольника, будем иметь $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Из определения движения следует, что $AC < AB + BC$. Однако, по условию $AC = AB + BC$. Возникло противоречие. Значит, точки A_1 B_1 и C_1 лежат на одной прямой M_1N_1.

Первое утверждение теоремы доказано. Докажем вторую часть: точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Предположим противное, что точка A_1 лежит между точками B_1 и C_1. Тогда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству $AB + BC = AC$. Следовательно, точка A_1 не может лежать между точками B_1 и C_1.

Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между точками A_1 и B_1. Так как из трех точек A_1, B_1 и C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1, что и требовалось доказать.

Следствие. При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки (рис. 209).

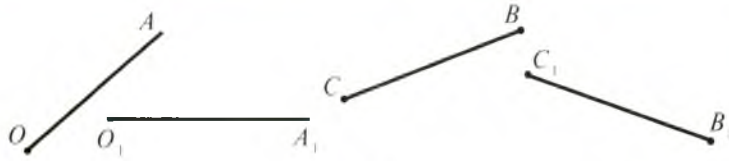


Рис. 209

теорема 3

При движении сохраняются углы между полупрямыми.

Дано: $\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$ получены в результате движения (рис. 210).

Доказать: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Доказательство. Пусть AB и AC — две полупрямые, исходящие из точки A, не лежащие на одной прямой.

При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Возьмем на сторонах угла BAC две точки M и N и соединим их. При движении точки M и N перейдут в точки M_1 и N_1.

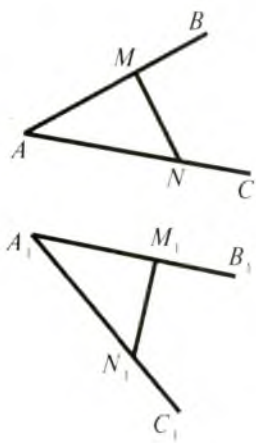


Рис. 210

По предыдущей теореме порядок точек A, M, B и A, N, C сохраняется при движении, и тогда получим A_1, M_1, B_1 и A_1, N_1, C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники MAN и $M_1A_1N_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов MAN и $M_1A_1N_1$. Значит, $\angle BAC = B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

§ 7.3. Симметрия относительно точки

Среди различных видов движения симметрия играет большую роль. Хотя в главе 5 была рассмотрена симметрия, мы вновь повторим ее, так как классифицировать движения можно по числу их симметрий.

Пусть O — фиксированная точка плоскости и A — произвольная точка. На продолжении отрезка OA за точку O построим отрезок OA_1, равный OA.

Определение. *Точка A_1 называется симметричной точке A относительно точки O, если точка O — середина отрезка AA_1.*

Точка, симметричная точке O, есть сама точка O.

На рисунке 211 изображены точки A и A_1, симметричные относительно O ($OA = OA_1$).

Рис. 211

Определение. *Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка A переходит в точку A_1, симметричную относительно данной точки O, называется* ***преобразованием симметрии*** *относительно точки O. При этом фигуры F и F_1 называются симметричными относительно точки O.*

На рисунке 212 изображены фигуры F и F_1, симметричные относительно точки O.

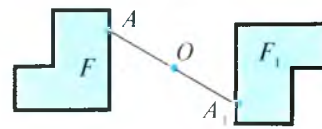


Рис. 212

Определение. *Фигура, которая при симметрии относительно некоторой точки O отображается на себя, называется* ***центрально-симметричной.***

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центр — точка пересечения диагоналей (рис. 213).

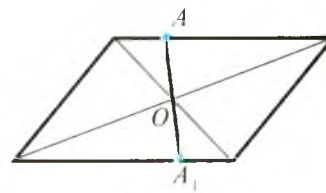


Рис. 213

теорема

Преобразование симметрии относительно точки является движением.

Дано: A и B — две произвольные точки фигуры F. A_1 и B_1 точки фигуры F_1, симметричные точкам A и B относительно точки O (рис. 214).

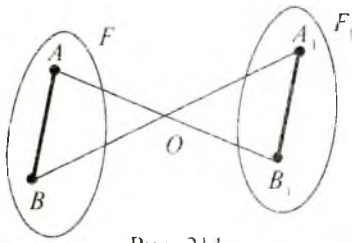


Рис. 214

Доказать: $AB = A_1B_1$.

Доказательство. Преобразование симметрии относительно точки O переводит точки A и B в точки A_1 и B_1. Рассмотрим треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а стороны $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $AB = A_1B_1$. А это значит, что симметрия относительно точки O есть движение, что и требовалось доказать.

§ 7.4. Симметрия относительно прямой

Пусть L — фиксированная прямая (рис. 215 *а*). Возьмем произвольную точку B и опустим перпендикуляр AB на прямую L.

На продолжении перпендикуляра за точку A отложим отрезок AB_1, равный отрезку AB. Точка B_1 называется симметричной точке B относительно прямой L. Если точка B лежит на прямой L, то симметричная ей точка есть сама точка B. Очевидно, что точка, симметричная точке B_1, есть точка B.

Определение. *Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка B переходит в точку B_1, симметричную относительно данной прямой L, называется* ***преобразованием относительно*** *прямой*

L. *При этом фигуры* F *и* F_1 *называются* ***симметричными относительно*** *прямой* L (рис. 215 *б*).

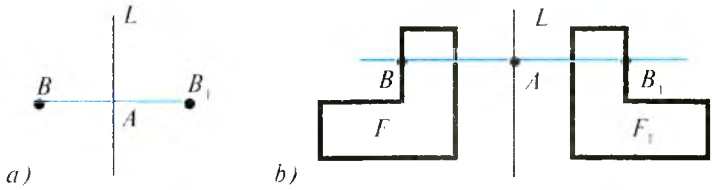


Рис. 215

Определение. *Если преобразование симметрии относительно прямой* L *переводит фигуру* F *на себя, то эта фигура называется симметричной относительно прямой* L, *а прямая* L *называется* ***осью симметрии*** *фигуры.*

Например, прямые AA_1 и BB_1, проходящие через точку O пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 216 *а*). Прямые AA_1 и BB_1, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 216 *б*).

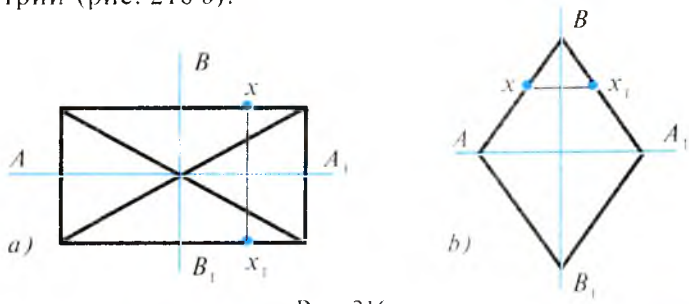


Рис. 216

теорема

Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Дано: точки A и B фигуры F и симметричные им точки A_1 и B_1 фигуры F_1 относительно прямой L; отрезок AB и симметричный ему отрезок A_1B_1 относительно прямой L (рис. 217 *а*, *б*).

Доказать: $AB = A_1B_1$.

Доказательство. Пусть точки A и B фигуры F при симметрии относительно прямой L отображаются на точки A_1 и B_1. Докажем, что $AB = A_1B_1$ для случая, когда точки A и B не лежат на одном перпендикуляре к прямой L (рис. 217 *а*). Пусть точки K и P — точки пересечения отрезков AA_1 и BB_1 с прямой L. Соединим точки A и A_1 с точкой P. Прямоугольные треугольники AKP и A_1KP равны по двум катетам (KP — общий катет, $AK = A_1K$). Из равенства треугольников следует, что $AP = A_1P$ и $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при прямых $AA_1 \parallel BB_1$ и секущей AP и $\angle 2 = \angle 4$ как накрест лежащие при прямых $AA_1 \parallel BB_1$ и секущей AP, то $\angle 3 = \angle 4$.

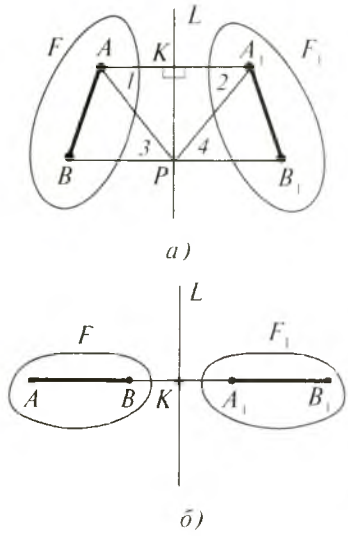


Рис. 217

Тогда треугольники ABP и A_1B_1P равны по двум сторонам и углу, заключенному между ними ($AP = A_1P$; $BP = B_1P$ и $\angle 3 = \angle 4$). Из равенства треугольников ABP и A_1B_1P следует, что $AB = A_1B_1$.

Докажем второй случай. Все точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной прямой (рис. 217 *б*).

Тогда $AB = |KB - KA| = |KB_1 - KA_1| = A_1B_1$.

Итак, при любом положении четырех точек A и A_1, B и B_1 отрезки AB и A_1B_1 равны, что и требовалось доказать.

§ 7.5. Поворот

Пусть даны точка O и фигура F (рис. 218). Повернем (например, по ходу часовой стрелки) произволь-

ную точку A этой фигуры вокруг точки O на угол α, образованный двумя лучами. Тогда точка A отобразится на такую точку A_1, что угловая мера дуги AA_1 с центром O будет равна α. При повороте с центром O на угол α все точки фигуры F отобразятся на точки фигуры F_1.

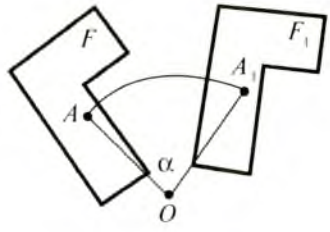


Рис. 218

Определение. ***Поворотом*** *фигуры около данной точки называется такое преобразование, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении.*

теорема

При повороте расстояния между точками сохраняются.

Дано: отрезок AB фигуры F и отрезок A_1B_1 фигуры F_1, полученный при повороте AB на угол α (рис. 219 *а, б*).

Доказать: отрезок $AB = A_1B_1$.

Доказательство. Пусть при повороте фигуры F около точки O на угол α точки A и B этой фигуры отображаются на точки A_1 и B_1. В результате поворота $OA = O_1A_1$, $OB = OB_1$ и $\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \alpha$

Докажем, что $AB = A_1B_1$ для случая, когда точки A, B и O не лежат на одной прямой (рис. 219 *а*).

$\angle AOB = \angle A_1OB_1$ как углы, полученные из равных углов AOA_1 и BOB_1 вычитанием одного угла BOA_1. Тогда треугольники A_1OB_1 и AOB равны по двум сторонам и углу между ними ($OA = OA_1$,

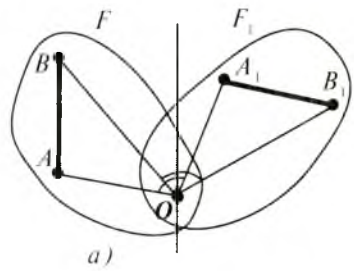


Рис. 219

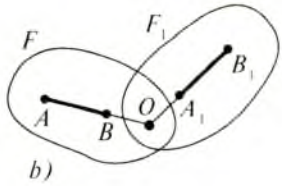


Рис. 219

$OB = OB_1$ и $\angle AOB = \angle A_1OB_1$). Из равенства треугольников вытекает, что $AB = A_1B_1$.

Рассмотрим случай, когда точки A, B и O лежат на одной прямой (рис. 219 *б*). Тогда $AB = |OA - OB| = |OA_1 - OB_1| = A_1B_1$. Итак, при любом положении точек A, A_1, B, B_1 отрезки AB и A_1B_1 равны, что и требовалось доказать.

Следовательно, поворот является движением. Поэтому при повороте прямая переходит в прямую, отрезок — в отрезок, окружность — в окружность, любая фигура — в равную ей фигуру.

Симметрию относительно точки O можно определить так же, как поворот на 180° около этой точки.

Рассмотрим задачи.

1) Построить точку A_1, в которую переходит точка A при повороте около точки O на угол 45° по часовой стрелке.

Решение. Проведем луч OM и возьмем на нем точку A, построим луч OM_1 так, что $\angle MOM_1 = 45°$ (рис. 220 *а*). Отложим на луче OM_1 отрезок OA_1, равный отрезку OA. Точка A_1 является искомой.

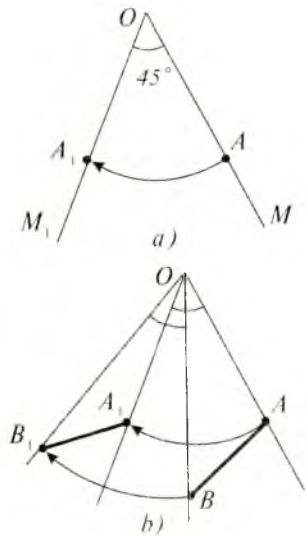


Рис. 220

2) Построить фигуру, в которую переходит отрезок AB при повороте около точки O на угол 45° по часовой стрелке.

Решение. Построим точки A_1 и B_1, в которые переходят при заданном повороте точки A и B, являющиеся концами отрезка AB (рис. 220 *б*). Отрезок A_1B_1 является искомым, поскольку при повороте отрезок переходит в отрезок.

§ 7.6. Параллельный перенос и его свойства

Пусть дана фигура F. Если каждую ее точку (A) сместить в одном и том же направлении на одно и то же расстояние AA_1, получим фигуру F_1. Считается, что параллельный перенос, отображающий точку A на A_1, отображает фигуру F на F_1 (рис. 221).

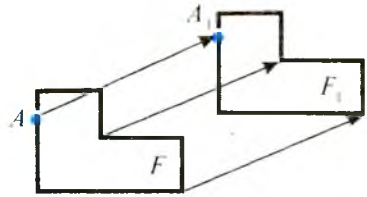


Рис. 221

Определение. *Преобразование фигуры, при котором каждая ее точка переходит в одном направлении на одно и то же расстояние в точку другой фигуры, называется* ***параллельным переносом.***

теорема

Если при параллельном переносе фигуры F ее точки A и B отображаются на A_1 и B_1 фигуры F_1, то отрезки AB и A_1B_1 равны.

Дано: точки A и B фигуры F, которые при параллельном переносе отображены на точки A_1 и B_1 фигуры F_1 (рис. 222).

Доказать: $AB = A_1B_1$.

Доказательство. При параллельном переносе отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны или лежат на одной прямой.

Рассмотрим первый случай, когда AB и A_1B_1 не лежат на одной прямой (рис. 222 *а*). Четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм, так как его две стороны AA_1 и BB_1 равны и параллельны. Значит, и две другие стороны — AB и A_1B_1 тоже равны и параллельны, т. е. $AB = A_1B_1$ (по признаку параллелограмма.

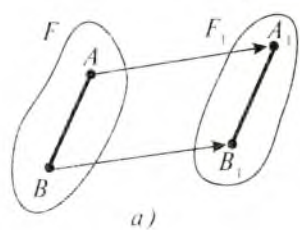


Рис. 222

Рассмотрим случай, когда от-

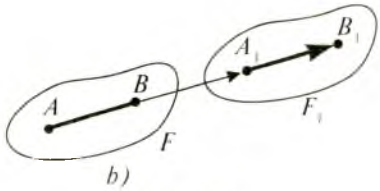


Рис. 222

резки AB и A_1B_1 лежат на одной прямой (рис. 222 *б*). Тогда $AB = |AA_1 - BA_1| = |BB_1 - BA_1| = A_1B_1$ т. к. $AA_1 = BB_1$ Итак, при любом положении четырех точек A, B, A_1, B_1 всегда $AB = A_1B_1$, что и требовалось доказать.

Значит, параллельный перенос — это движение и тогда, при параллельном переносе прямая переходит в прямую, отрезок — в отрезок, окружность — в окружность, любая фигура — в равную ей фигуру.

§ 7.7. Направление полупрямых

Определение. *Две полупрямые называются* ***одинаково направленными,*** *или* ***сонаправленными,*** *если они совмещаются параллельным переносом.*

теорема

Если полупрямые *a* и *b* и полупрямне *b* и *c* одинаково направлены, то *a* и *c* тоже одинаково направлены.

Дано: лучи a и b — сонаправлены и лучи b и c тоже сонаправлены (рис. 223).

Доказать: лучи a и c — сонаправлены.

Доказательство. Для доказательства возьмем точки A и B на луче a. При параллельном переносе эти точки отобразятся на точки A_1 и B_1 луча b, при этом $AB = A_1B_1$.

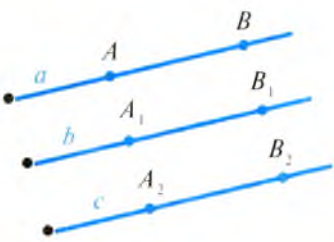


Рис. 223

При следующем параллельном переносе точки A_1 и B_1 перейдут в точки A_2 и B_2 луча c, причем $A_1B_1 = A_2B_2$. Следовательно, $AB = A_2B_2$. Значит, луч a отображается на луч c, т. е. они сонаправлены, что и требовалось доказать.

Определение. *Две полупрямые называются* ***противоположно направленными,*** *если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.*

На рисунке 224 изображены две противоположно направленные полупрямые a и b.

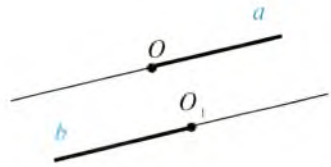


Рис. 225

§ 7.8. Равенство фигур

Определение. *Две фигуры называются* ***равными,*** *если они движением переводятся одна в другую.*

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F_1$ означает, что фигура F равна фигуре F_1. В записи равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ предполагается, что совмещаемые при движении вершины находятся на соответствующих местах.

теорема

Если у двух треугольников соответствующие углы и соответствующие стороны равны, то эти треугольники совмещаются движением.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 225).

Доказать: треугольники совмещаются движением.

Доказательство. По условию, $AB = A_1B_1$, $BC =$

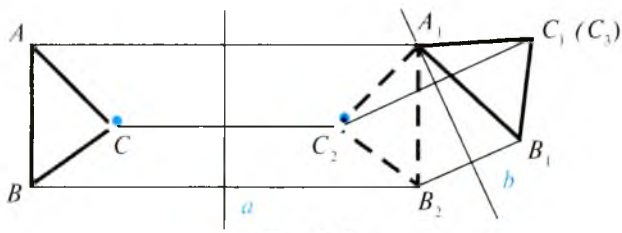


Рис. 225

$= B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ совмещаются движением, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1. Применим к ΔABC преобразование симметрии относительно прямой a, перпендикулярной к отрезку AA_1 и проходящей через его середину (рис. 225), получим $\Delta A_1B_2C_2$. Если точки B_1 и B_2 различны, то применим симметрию относительно прямой b, проходящей через точку A_1 и перпендикулярна к прямой B_1B_2. Получим $\Delta A_1B_1C_2$.

Если точки C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, т. к. углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_2$ равны, то лучи A_1C_1 и A_1C_2 совпадают, а поскольку отрезки A_1C_1 и A_1C_2 равны, то C_1 и C_2 совпадают. Таким образом, ΔABC движением переведен в $\Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Если точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, то для доказательства надо еще применить симметрию относительно прямой A_1B_1.

теорема обратная

Если два треугольника совмещаются движением, то у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Дано: ΔABC движением совмещается с $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 225).

Доказать: сторона $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Доказательство. Пусть треугольник ABC движением совмещается с треугольником $A_1B_1C_1$, причем вершина A отображается на вершину A_1, B — в B_1 и C — в C_1. Так как при движении сохраняются расстояние и углы, то для данных треугольников стороны $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, и углы $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, что и требовалось доказать.

§ 7.9. Гомотетия и ее свойство

Пусть даны точка O и фигура F (рис. 226 *а*). Проведем через произвольную точку A фигуры F луч OA и отметим на нем точку A_1 такую, что $OA_1 : OA = k$. Если подобным способом построить соответствующие точки для каждой точки фигуры F, получим новую фигуру F_1. Такое преобразование фигуры F в F_1 называют **гомотетией** относительно точки O с коэффициентом k, а фигуру F_1 — **гомотетичной** фигуре F относительно точки O с коэффициентом k.

Определение. ***Гомотетией** с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование фигуры, при котором любая точка A этой фигуры переходит в такую точку A_1, что расстояние $OA_1 = k \cdot OA$* (рис. 226 б).

Из определения следует, что при $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.

При $k = -1$ гомотетия становится центральной симметрией.

Две гомотетии с центром в O и коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ являются взаимно обратными. Это означает, что если одна из них переводит точку A в точку A_1, то другая переводит A_1 в A.

При $k \neq 1$ гомотетия не сохраняет расстояний между точками. Например, если $k > 1$, гомотетия отображает точки A и B на A_1 и B_1, при этом $A_1B_1 > AB$. Зна-

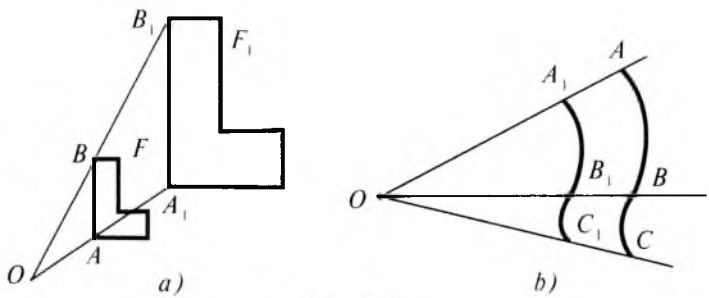


Рис. 226

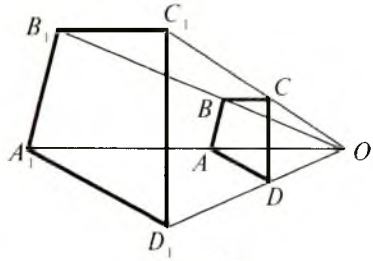


Рис. 227

чит, гомотетия не является движением. Но при гомотетии сохраняются отношения расстояний. Если при гомотетии с коэффициентом k четырехугольник $ABCD$ переходит в $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 227), то каждое из отношений $A_1B_1 : AB$, $B_1C_1 : BC$, $C_1D_1 : CD$, $D_1A_1 : DA$, $A_1C_1 : AC$, $B_1D_1 : BD$ равно числу k.

Можно доказать, что при гомотетии прямая переходит в прямую, луч — в луч, угол — в равный ему угол. Поэтому гомотетия, изменяя размеры фигуры, не изменяет ее формы.

Подобие фигур. Отобразим данную фигуру F с помощью гомотетии на фигуру F_1, а фигуру F_1 каким-либо движением — на F_2 (рис. 228). В таком случае считается, что фигура F отображается на F_2 с помощью композиции гомотетии и движения. В результате получим фигуру F_2, подобную фигуре F.

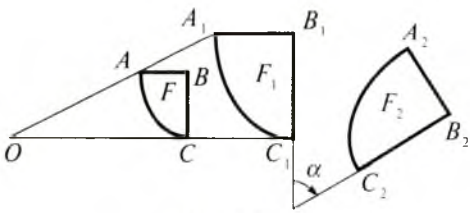


Рис. 228

Определение. *Две фигуры называют* ***подобными,*** *если с помощью композиции гомотетии и движения одну из них можно отобразить на другую. Геометрическое преобразование, отображающее фигуру на подобную ей, называется* ***преобразованием подобия.***

Вопросы для самопроверки

1. Что называется геометрической фигурой?
2. Что называется преобразованием фигуры?
3. Какое преобразование фигуры называется движением?

4. Верно ли, что точки, лежащие на прямой, при движении также переходят в точки, лежащие на прямой, и при этом сохраняется порядок их взаимного расположения?
5. На что отображаются прямые, полупрямые и отрезки при движении?
6. Сохраняются ли при движении углы между полупрямыми и почему?
7. Какие точки называются симметричными относительно данной точки?
8. Какое преобразование называется симметрией относительно данной точки?
9. Какая фигура называется центрально-симметричной?
10. Что такое центр симметрии фигуры? Приведите пример центрально-симметричной фигуры.
11. Является ли симметрия относительно точки движением?
12. Какие точки относительно данной прямой называются симметричными?
13. Какое преобразование относительно данной прямой называется симметрией?
14. Какая фигура относительно данной прямой называется симметричной?
15. Что такое ось симметрии фигуры? Приведите пример.
16. Является ли симметрия относительно прямой движением?
17. Какое преобразование называется поворотом?
18. Что такое параллельный перенос?
19. Какие вы знаете свойства параллельного переноса?
20. Является ли поворот движением?
21. Какие полупрямые называются одинаково направленными?
22. Если полупрямые a и b и полупрямые b и c одинаково направлены, то будут ли одинаково направлены полупрямые a и c?
23. Какие полупрямые называются противоположно направленными?
24. Какие фигуры называются равными?

25. Какие два треугольника совмещаются при движении?

26. Какое преобразование называется гомотетией?

Тест №7

1. В какую точку перейдет точка $P\,(0;\,-3)$ при повороте на -90° вокруг начала координат?

A) $(0;3)$; B) $(3;0)$; C) $(-3;3)$; D) $(3;-3)$; E) $(-3;0)$.

2. Найти точку, симметричную точке $A\,(3;\,1)$ относительно прямой $y=x$.

A) $(-3;1)$; B) $(3;-1)$; C) $(-3;-1)$; D) $(1;3)$; E) $(-1;-3)$.

3. Найти точку, симметричную точке $A\,(-1;\,2)$ относительно оси Ox.

A) $(-1;-2)$; B) $(1;2)$; C) $(1;-2)$; D) $(2;-1)$; E) $(-2;1)$.

4. В какую точку перейдет точка $A\,(5;\,0)$ при повороте на 90° вокруг начала координат?

A) $(-5;\,0)$; B) $(0;\,-5)$; C) $(5;\,5)$; D) $(0;\,5)$; E) $(5;\,-5)$.

5. Найти точку, симметричную точке $(2;\,-7)$ относительно оси Oy.

A) $(2;\,7)$; B) $(-2;\,-7)$; C) $(-2;\,7)$; D) $(-7;\,2)$; E) $(7;\,2)$.

6. Найти точку, симметричную точке $A\,(\frac{8}{3};\,-9)$ относительно начала координат.

A) $(-\frac{8}{3};\,9)$; B) $(\frac{8}{3};\,9)$; C) $(-\frac{8}{3};\,-9)$; D) $(-9;\,\frac{8}{3})$; E) $(9;\,-\frac{8}{3})$.

7. Какие из данных фигур являются центрально-симметричными: 1) ромб; 2) квадрат; 3) угол; 4) произвольный треугольник; 5) трапеция; 6) окружность?

A) 1, 2, 5; B) 1, 2, 6; C) 2, 4, 6; D) 4, 5, 6; E) 1, 3, 6.

8. Имеют ли оси симметрии следующие фигуры: 1) угол; 2) равнобедренная трапеция; 3) прямоугольная трапеция; 4) равносторонний треугольник; 5) ромб?

A) 1, 2, 4; B) 1, 2, 3, 5; C) все фигуры; D) 1, 2, 4, 5; E) 2, 4, 5.

9. Для каких из данных фигур биссектриса угла является осью симметрии: 1) квадрата; 2) прямоугольника; 3) ромба; 4) произвольного треугольника; 5) параллелограмма?

A) 1, 2, 4; B) 1, 2, 3; C) 1,3; D) 3, 5; E) 1, 3, 4.

10. Какая из данных фигур имеет только две оси симметрии: 1) ромб; 2) параллелограмм; 3) прямоугольник; 4) равносторонний треугольник; 5) квадрат?

A) 1, 3; B) 1, 2, 3; C) 1, 3, 4; D) 1, 3, 5; E) 1, 4, 5.

11. Сколько осей симметрии имеет окружность?

A) одну; B) две; C) три; D) бесчисленное множество; E) ни одной.

12. В какую точку перейдет точка B (4; 0) при повороте на 60°?

A) $(2;\ 2\sqrt{3})$; B) $(-2;\ 2\sqrt{3})$; C) $(2\sqrt{3};\ 2)$; D) $(-2\sqrt{3};\ 2)$; E) $(-2;\ -2\sqrt{3})$.

13. В какую точку перейдет точка (−5; 0) при повороте на −45°?

A) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$;; B) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; C) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; D) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; E) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

14. При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (−1; 0). В какую точку переходит начало координат?

A) (−2; −1); B) (2; 1); C) (−2; 1); D) (2; −1); E) (−1; −2).

15. Найти координаты точки, симметричной точке A $(-3; 4)$ относительно a) оси Ox; b) оси Oy; c) начала координат.

A) (3; 4), (−3; −4), (3; −4); B) (3; −4), (3; 4), (−3; −4); C) (−3; −4), (3; 4), (3; −4); D) (−3; −4), (3; 4), (−3; 4); E) (−3; 4), (3; 4), (−3; −4).

16. Параллельный перенос задан формулами $x' = x + 1$; $y' = y - 1$. В какую точку при этом переносе переходит точка (0; 2)?

A) (−1; 1); B) (1; 1); C) (1; −1); D) (−1; −1); E) (2; 0).

17. Найти a и b в формулах параллельного переноса $x_1 = x + a$; $y_1 = y + b$, если точка (1; 2) переходит в точку (3; 4).

A) $a = 2$; $b = 2$; B) $a = 2$; $b = 1$; C) $a = 1$; $b = 2$; D) $a = 3$; $b = 3$; E) $a = 2$; $b = 3$.

18. Существует ли параллельный перенос, при котором: a) точка (1; 2) переходит в точку (3; 4), точка (0; 1) в точку (−1; 0), b) точка (2; −1) переходит в точку (1; 0), точка (−1; 3) в точку (0; 4)?

A) да, да; B) нет, да; C) нет, нет; D) нет, да; E) однозначно ответить нельзя.

19. Среди данных утверждений найти ложное: a) отрезки равной длины совмещаются движением; b) углы с равной градусной мерой совмещаются движением; c) ромбы равны, если равны их диагонали; d) прямоугольники равны, если равны их диагонали; e) окружности одинакового радиуса совмещаются движением.

A) a; B) b; C) c; D) d; E) e.

20. Какие из данных фигур имеют только одну ось симметрии? 1) угол; 2) равнобедренный треугольник; 3) ромб; 4) окружность; 5) равнобедренная трапеция.

A) 1, 2, 5; B) 1, 2, 3; C) 2, 5; D) 2, 4, 5; E) 1, 2, 4, 5.

21*. Как запишется уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, если его повернуть на 90° вокруг начала координат?

A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; B) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; C) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$;

D) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$; E) не изменится.

22*. Дана окружность $(x+1)^2+(y-2)^2=1$. Составить уравнение окружности: a) симметричной данной относительно оси Oy; b) симметричной данной относительно оси Ox:

A) a) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$ и *b*) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$;
B) a) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ и *b*) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$;
C) a) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ и *b*) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$;
D) a) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ и *b*) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$;
E) a) $(x-1)^2+y^2=1$ и *b*) $(x+1)^2+(y+2)^2=1$.

23*. Составить уравнение окружности, симметричной данной окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=1$: a) относительно начала координат; b) полученной параллельным переносом данной окружности на вектор $a\ (-1;\ 1)$.

A) a) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ и *b*) $x^2+(y-1)^2=1$;
B) a) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ и *b*) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$;
C) a) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ и *b*) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$;
D) a) $x^2+y^2=1$ и *b*) $(x+2)^2+(y-3)^2=1$;
E) a) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ и *b*) $x^2+y^2=1$;

24*. Сколько осей симметрии имеет a) эллипс; b) парабола; c) гипербола?

A) 2; 1; 1; B) 1; 1; 2; C) 2; 2; 2; D) 2; 1; 2; E) 2; 2 ; 1.

25*. Записать уравнение параболы $x^2=3y$ при параллельном переносе ее начала в точку $O_1(2;\ 5)$, если оси новой системы O_1x_1 и O_1y_1 параллельны осям старой системы Ox и Oy.

---

* Задачи, отмеченные звездочкой, можно решать после изучения уравнений кривых второго порядка.

A) $y_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}$; B) $y_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{3}$;

C) $y_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 + \frac{11}{3}$; D) $y_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{5}{3}x_1 - \frac{11}{3}$;

E) $y_1 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 - \frac{11}{3}$.

26. Координаты точки P в старой системе $(-2; 1)$, а в новой системе $(5; 3)$. Найти координаты нового начала в старой системе.

A) O_1 $(-7; -2)$; B) O_1 $(7; -2)$; C) O_1 $(-7; 2)$; D) O_1 $(7; 2)$; E) O_1 $(-8; -3)$;

27. Координаты нового начала в старой системе $(-3; 4)$, а координаты точки Q в новой системе $(2; -5)$. Определить координаты точки Q в старой системе.

A) $(1; 1)$; B) $(-1; 1)$; C) $(-1; -1)$; D) $(1; -1)$; E) $(-2; -1)$.

28*. Найти уравнение гиперболы $xy = 2$ в новой системе координат, полученной из старой системы поворотом против часовой стрелки на угол 45°.

A) $x_1^2 - y_1^2 = 2$; B) $x_1^2 - y_1^2 = 4$; C) $x_1^2 - y_1^2 = 3$;

D) $x_1^2 - y_1^2 = 1$; E) $x_1^2 - y_1^2 = 5$.

29*. Составить уравнение параболы, симметричной относительно прямой $x = 2$ и проходящей через точки $(3; 2)$ и $(-1; 10)$, если ее ось параллельна оси Oy.

A) $y = (x-2)^2 + 1$; B) $y = (x+2)^2 + 1$; C) $y = (x-2)^2 - 1$; D) $y = (x+2)^2 - 1$; E) $y = (x-2)^2 + 2$.

30. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Найти точки симметричные точке A $(-2\sqrt{5}; 1)$ относительно осей координат и начала координат.

A) A $(2\sqrt{5}; 1)$; $(2\sqrt{5}; -1)$; $(-2\sqrt{5}; -1)$;

B) A $(-2\sqrt{5}; -1)$; $(2\sqrt{5}; -1)$; $(2\sqrt{5}; 1)$;

C) $(2\sqrt{5}; 1)$; $(-2\sqrt{5}; -1)$; $(2\sqrt{5}; -1)$;

D) $(1; 2\sqrt{5};)$; $(-1; +2\sqrt{5};)$; $(-1; +2\sqrt{5};)$;

E) $(1; 2\sqrt{5};)$; $(-1; -2\sqrt{5};)$; $(-1; 2\sqrt{5};)$.

Глава 8

ПОДОБИЕ ФИГУР

§ 8.1. Признаки подобия треугольников

Определение. *Два треугольника называются* ***подобными****, если углы одного из них соответственно равны углам другого и сходственные стороны пропорциональны.*

Для обозначения подобных фигур используется значок $\backsim$.

Определение. *Стороны треугольников, лежащие против равных углов, называются* ***сходственными.***

Определение. ***Отношением*** *двух сторон треугольника называется отношение тех чисел, которые выражают длины этих сторон, если они измерены в одних и тех же единицах измерения.*

Лемма о подобии треугольников (вспомогательная теорема).

Прямая, параллельная какой-либо стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Дано: ΔABC; $DE \parallel AC$ (рис. 229 и 230).

Доказать: $\Delta DBE \backsim \Delta ABC$.

Доказательство. Если $\Delta DBE \backsim \Delta ABC$, то

1) $\angle A = \angle BDE$; $\angle C = \angle BED$.

2) $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$.

У ΔABC и ΔDBE $\angle B$ — общий, а $\angle A = \angle BDE$; $\angle C = \angle BED$ как соответственные при параллельных прямых DE и AC и секущих AB или BC.

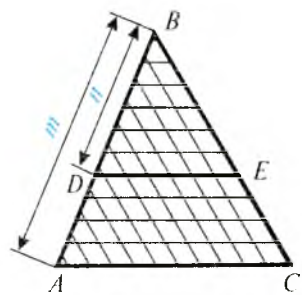


Рис. 229

Доказательство второго утверждения теоремы будет состоять из двух частей.

1. Стороны AB и BD измере-

ны рациональными числами, т. е. $AB = m$ линейных единиц; $BD = n$ линейных единиц, где m и n — рациональные числа (рис. 229).

Разделим отрезок AB на m равных частей, тогда отрезок BD разделится на n таких же частей. Через точки деления проведем ряд прямых, параллельных AC, и ряд прямых, параллельных BC.

По теореме Фалеса сторона BC разделится на m равных между собой частей, а BE — на n таких же частей.

Аналогично сторона AC разобьется на m равных частей, каждая из которых в DE содержится n раз.

Итак, $\frac{BD}{AB} = \frac{n}{m}$; $\frac{BE}{BC} = \frac{n}{m}$; $\frac{DE}{AC} = \frac{n}{m}$, а потому $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

Значит, $\Delta ABC \backsim \Delta DBE$.

2. Длина стороны BD (или AB) — иррациональное число (т. е. отношение $\frac{BD}{AB}$ — иррациональное число) (рис. 230).

Найдем приближенные значения отношений $\frac{BD}{AB}$ и $\frac{BE}{BC}$ с точностью до 0,1, затем до 0,01 и т. д.

Сторону AB разобьем на 10 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AC. По теореме Фалеса сторона BC также разбивается на 10 равных между собой частей, $\frac{1}{10}$ часть AB укладывается в BD n раз с остатком, меньшим $\frac{1}{10} AB$, а потому и на стороне BE $\frac{1}{10} BC$ укладывается n раз с остатком, меньшим $\frac{1}{10} BC$.

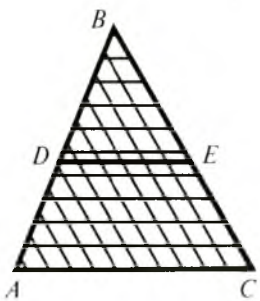


Рис. 230

Следовательно, с точностью до 0,1 имеем:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{n}{10}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{n}{10}.$$

Теперь разделим отрезок AB на 100 равных частей и предположим, что $\frac{1}{100}AB$ укладывается в BD n_1 раз с остатком, меньшим $\frac{1}{100}AB$. Проведем через точки деления прямые, параллельные AC, которые разобьют BC на 100 равных между собой частей, а $\frac{1}{100}BC$ в отрезке BE укладывается n_1 раз с остатком, меньшим $\frac{1}{100}BC$. Тогда с точностью до 0,01 имеем:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{n_1}{100}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{n_1}{100}.$$

Увеличивая степень точности в 10,100 и т. д. раз, получим, что отношения $\frac{BD}{AB}$ и $\frac{BE}{BC}$, вычисленные с одинаковой степенью точности, равны.

Тогда точные значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью, значит $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC}$. Аналогично доказывается, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$, а потому $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$. По определению подобия треугольников, имеем $\Delta ABC \sim \Delta DBE$, что и требовалось доказать.

теорема

(первый признак подобия треугольников)

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$ (рис. 231).

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Для того чтобы доказать, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, следует доказать равенство $\angle C$ и $\angle C_1$ (что справедливо, т. к. в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ по два

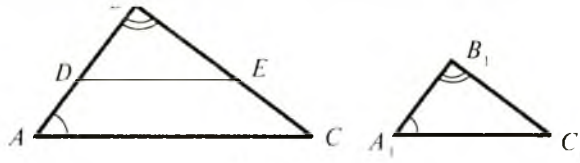


Рис. 231

угла, равных по условию) и пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}. \qquad (1)$$

Для доказательства (1) в ΔABC на стороне AB от точки B отложим $BD = A_1B_1$ и проведем $DE \parallel AC$. По лемме $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, но $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$ (по второму признаку равенства треугольников), так как стороны $BD = A_1B_1$ по построению: $\angle B = \angle B_1$ по условию, $\angle BDE = \angle A$ как соответственные при $DE \parallel AC$ и секущей AB. Но $\angle A = \angle A_1$ по условию, тогда $\angle BDE = \angle A_1$. Итак, $\Delta BDE = \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, а тогда и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, что и требовалось доказать.

теорема

(второй признак подобия треугольников)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 232).

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. На стороне AB треугольника ABC от точки B отложим отрезок BD, равный отрезку A_1B_1, и проведем прямую $DE \parallel AC$. По лемме о подобии треугольников, $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, и тогда $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC}$, а по условию

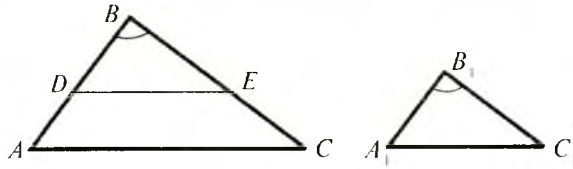


Рис. 232

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{BE}{BC}, \qquad (1)$$

но $BD = A_1B_1$, следовательно,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}. \qquad (2)$$

В пропорциях (1) и (2) имеется по три равных члена, следовательно, равны и четвертые их члены, т. е. $BE = B_1C_1$.

В треугольниках DBE и $A_1B_1C_1$ сторона $BD = A_1B_1$; $BE = B_1C_1$; $\angle B = \angle B_1$, тогда эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Итак, $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

теорема

(третий признак подобия треугольников)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ (рис. 233).

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Доказательство. На стороне AB треугольника ABC от точки B отложим отрезок $BD = A_1B_1$ и через точку D проведем прямую DE, параллельную AC. Полученный треугольник DBE подобен ΔABC по лемме о подобии, а потому $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$, т. к. в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны.

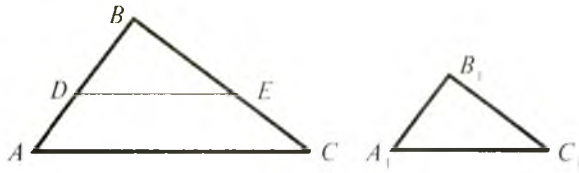


Рис. 233

По условию $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Сравним две пропорции $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC}$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Поскольку $BD = A_1B_1$ по построению, то $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{BE}{BC}$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$, и тогда $BE = B_1C_1$ (если в двух пропорциях по 3 равных члена, то равны и четвертые их члены).

Сравним еще две пропорции: $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AC}$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Из равенства BD и A_1B_1 получаем $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{DE}{AC}$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{DE}{AC}$, а тогда в этих пропорциях, где равны по три их члена, равны и четвертые их члены, т. е. $DE = A_1C_1$.

Итак, в ΔDBE и $\Delta A_1B_1C_1$ $BD = A_1B_1$ по построению; $BE = B_1C_1$ и $DE = A_1C_1$ по доказанному.

Следовательно, $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$ (по третьему признаку равенства треугольников). Итак, $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ и $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$. Значит, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, что и требовалось доказать.

§ 8.2. Признаки подобия прямоугольных треугольников

В прямоугольных треугольниках имеется по одному равному прямому углу, а потому, исходя из первого и второго признаков подобия треугольников, следует справедливость первых двух признаков подобия, а справедливость третьего мы докажем.

Признак 1. **Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого, то такие треугольники подобны** (из первого признака подобия треугольников).

Признак 2. **Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого, то такие треугольники подобны** (из второго признака подобия треугольников).

Признак 3. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.**

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — прямоугольные треугольники, где $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ (рис. 234).

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Для доказательства на стороне BC ΔABC от вершины C отложим $CE = C_1B_1$ и проведем $ED \parallel AB$. $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ по лемме о подобии. Из подобия этих треугольников следует: $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC}$, т. к. $CE = B_1C_1$, то $\frac{DE}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$, а по условию теоремы $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

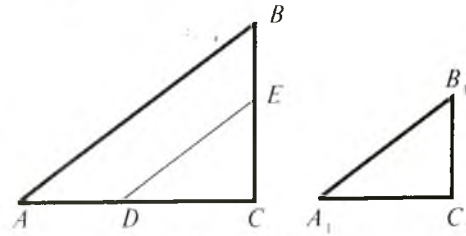


Рис. 234

Из этих двух пропорций с тремя равными членами следует равенство и четвертых членов этих пропорций, т. е. $DE = A_1B_1$. Тогда в $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔDEC равны по одному катету и гипотенузе: $CE = B_1C_1$ по построению; $DE = A_1B_1$ по доказанному, и тогда $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$ по признаку равенства прямоугольных треугольников. Итак, $\Delta DEC \sim \Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta DEC$, потому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

теорема

(об отношении высот подобных треугольников)

Высоты в подобных треугольниках относятся как сходственные стороны.

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; BD и B_1D_1 — высоты треугольников (рис. 235).

Доказать: $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

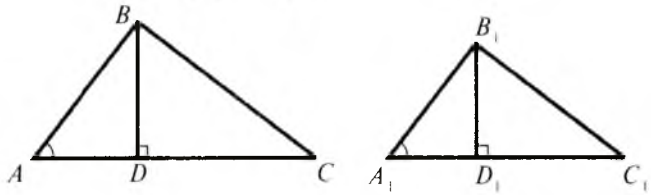


Рис. 235

Доказательство. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следует, что $\angle A = \angle A_1$, тогда прямоугольные $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ по первому признаку подобия прямоугольных треугольников. Из подобия этих треугольников следует, что их сходственные стороны пропорциональны, следовательно, $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$, что и требовалось доказать.

§ 8.3. Подобие многоугольников

Определение. *Два многоугольника, имеющие одинаковое число сторон (или углов), называются* ***одноименными.***

Определение. *Два одноименных многоугольника называются* ***подобными,*** *если углы одного из них соответственно равны углам другого, а стороны, называемые сходственными и заключающие равные углы, пропорциональны.*

На рисунке 236 изображены подобные многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E$, где $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$;

$\angle C = \angle C_1$; $\angle D = \angle D_1$; $\angle E = \angle E_1$, а стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{AE}{A_1E_1}$$

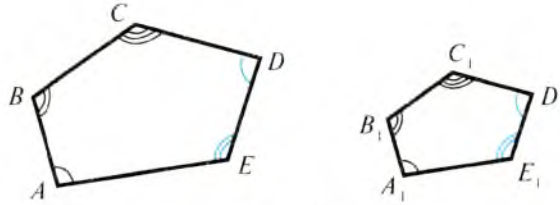


Рис. 236

теорема

(о разложении подобных многоугольников на подобные треугольники)

Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных между собой треугольников.

Дано: $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис.237).

Доказать: возможность разложения этих многоугольников на подобные треугольники.

Доказательство. Внутри многоугольника $ABCDE$ произвольную точку O соединяем со всеми ее вершинами, тогда этот многоугольник разобьется на такое количество треугольников, сколько в нем сторон. На стороне A_1E_1 многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ строим $\angle KA_1E_1 = \angle OAE$ и $\angle ME_1A_1 = \angle OEA$. Точку пересечения сторон KA_1 и ME_1 обозначим через O_1 и соединим со всеми вершинами многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$

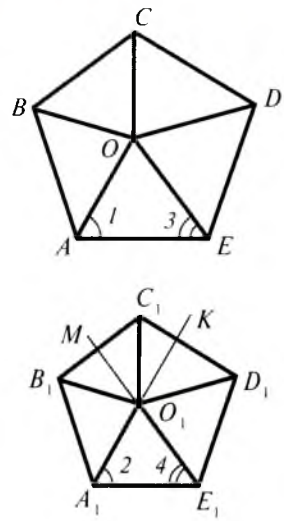


Рис. 237

разобьется на то же число треугольников, что и $ABCDE$. Докажем, что треугольники первого многоугольника подобны треугольникам второго многоугольника.

$\Delta AOE \sim \Delta A_1O_1E_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ по построению). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{OE}{O_1E_1}. \qquad (1)$$

Рассмотрим ΔOED и $\Delta O_1E_1D_1$. В них $\angle OED = \angle O_1E_1D_1$, т. к. $\angle AED = \angle A_1E_1D_1$ из подобия многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $\angle 3 = \angle 4$ по построению, а $\angle OED = \angle AED - \angle 3$; $\angle O_1E_1D = \angle A_1E_1D_1 - \angle 4$.

Так как в подобных многоугольниках сходственные стороны пропорциональны, то $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$, но из пропорции (1) $\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{OE}{O_1E_1}$, и тогда $\frac{OE}{O_1E_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$.

Итак, $\Delta OED \sim \Delta O_1E_1D_1$ (по второму признаку подобия), $\angle OED = \angle O_1E_1D_1$ и $\frac{OE}{O_1E_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{OD}{O_1D_1} \qquad (2)$$

и $\angle ODE = \angle O_1E_1D_1$.

Рассмотрим теперь пару треугольников COD и $C_1O_1D_1$. В них $\angle ODC = \angle O_1D_1C_1$, т. к. $\angle EDC = \angle E_1D_1C_1$ (из подобия многоугольников), $\angle ODE = \angle O_1D_1E_1$ (по доказанному), а $\angle ODC = \angle EDC - \angle ODE$ и $\angle O_1D_1C_1 = \angle E_1D_1C_1 - \angle O_1D_1E_1$.

Из подобия многоугольников следует, что $\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, а из (2) $\frac{DE}{D_1E_1} = \frac{OD}{O_1D_1}$.

Из этих двух пропорций следует, что $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{OD}{O_1D_1}$.

Итак, $\Delta COD \sim \Delta C_1O_1D_1$ (по второму признаку подобия): две стороны одного из этих треугольников пропорциональны сторонам второго и углы, заключенные между ними, равны.

Аналогично доказывается подобие ΔBOC и $\Delta B_1O_1C_1$, ΔAOB и $\Delta A_1O_1B_1$, что и требовалось доказать.

теорема

(об отношении периметров подобных многоугольников)

Периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны.

Дано: $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 238).

Доказать: $\frac{P_{ABCDE}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \frac{AE}{A_1E_1}$.

Доказательство. Из подобия многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ следует, что

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{AE}{A_1E_1}.$$

По свойству ряда равных отношений (сумма всех предыдущих членов отношений относится к сумме всех последующих членов как каждый предыдущий к своему последующему члену) имеем:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + AE}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + A_1E_1} =$$

$$= \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{AE}{A_1E_1},$$

т. е. $\frac{P_{ABCDE}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots =$

$= \frac{AE}{A_1E_1}$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что эта теорема справедлива и для подобных треугольников.

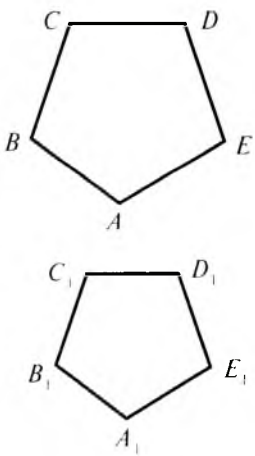


Рис. 238

Определение. *Отношение сходственных сторон двух подобных многоугольников (или треугольников) называется* ***коэффициентом подобия*** *этих многоугольников (или треугольников):* $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots = k$, *где* k *— коэффициент подобия.*

§ 8.4. Теоремы о пропорциональных отрезках

теорема

(обобщенная теорема Фалеса)

Стороны угла, пересеченные рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные отрезки.

Дано: $\angle BAC$; $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ (рис. 239).

Доказать: $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$.

Доказательство. Для доказательства через точки C_1 и C_2 проведем прямые C_1A_1 и C_2A_2, параллельные AB. $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta C_1C_2A_1 \sim \Delta C_2C_3A_2$ (по первому признаку подобия треугольников): $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ как соответственные углы при $AB \parallel C_1A_1 \parallel C_2A_2$ и секущей AC, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ как углы с соответственно параллельными сторонами.

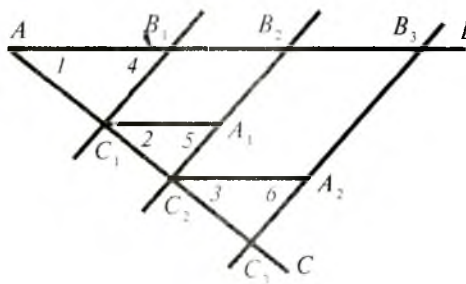


Рис. 239

Из подобия треугольников следует: $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{C_1A_1}{C_1C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2C_3}$, но $C_1A_1 = B_1B_2$ и $C_2A_2 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов: $B_1C_1A_1B_2$ и $B_2C_2A_2B_3$ ($B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ по условию, а $AB \parallel C_1A_1 \parallel C_2A_2$ по построению).

Следовательно, $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$, что и требовалось доказать.

теорема

Две параллельные прямые, пересеченные рядом прямых, исходящих из одной точки, рассекаются на пропорциональные отрезки.

Дано: $PQ \parallel MN$; прямые SA_1A_2; SB_1B_2; SC_1C_2; SD_1D_2 пересекают PQ и MN (рис. 240).

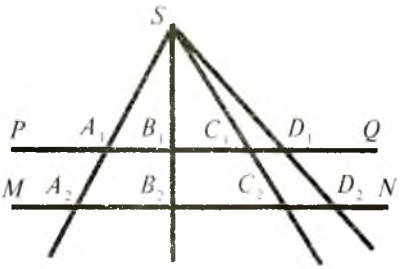


Рис. 240

Доказать: $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_2}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$.

Доказательство. $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2B_2$ по лемме о подобии ($A_1B_1 \parallel A_2B_2$). Из подобия следует:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{SB_1}{SB_2}. \qquad (1)$$

Аналогично, $\Delta SB_1C_1 \sim \Delta SB_2C_2$ (по лемме о подобии). Из их подобия

$$\frac{SB_1}{SB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{SC_1}{SC_2}. \qquad (2)$$

Из пропорций (1) и (2) следует, что $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ (т. к. оба эти отношения равны $\frac{SB_1}{SB_2}$). $\Delta SC_1D_1 \sim \Delta SC_2D_2$ (по лемме о подобии).

Из подобия треугольников:

$$\frac{SC_1}{SC_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}. \qquad (3)$$

Из пропорций (2) и (3) следует, что $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$ (т. к. оба эти отношения равны $\frac{SC_1}{SC_2}$). Поскольку $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ и $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$, то $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}$, что и требовалось доказать.

§ 8.5. Свойство биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника

теорема

(свойство биссектрисы внутреннего угла)

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит

противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к углу сторонам треугольника.

Дано: ΔABC; BD — биссектриса $\angle A$, т. е. $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 241).

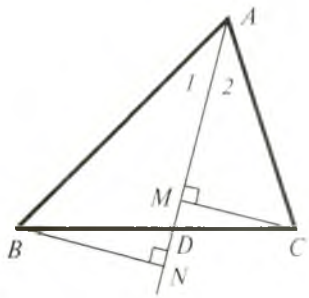


Рис. 241

Доказать: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство. Из точек B и C опустим перпендикуляры BN и CM на биссектрису угла A. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABN и AMC. Эти треугольники подобны, т. к. они имеют по одному равному острому углу: $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle A$ (первый признак подобия прямоугольных треугольников). Из их подобия следует, что

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{CM}. \qquad (1)$$

Прямоугольные треугольники BDN и CDM подобны, т. к. имеют по равному острому углу: $\angle BDN = \angle MDC$ (как вертикальные). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BN}{CM} = \frac{BD}{DC}. \qquad (2)$$

Из пропорций (1) и (2) следует, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, что и требовалось доказать.

теорема

(свойство биссектрисы внешнего угла треугольника)

Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, расстояния которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим к углу сторонам треугольника.

Дано: ΔABC; $\angle CBE$ — внешний угол ΔABC; BD — биссектриса $\angle CBE$ (рис. 242).

Доказать: $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Доказательство. Проведем через точку C прямую CF, параллельную BD. Стороны угла EAD пересечены параллельными прямыми CF и BD, а потому рассекаются ими на пропорциональные отрезки

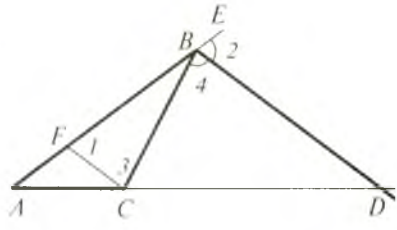


Рис. 242

$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{FB}. \qquad (1)$$

$\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при $CF \parallel BD$ и секущей AE, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при тех же параллельных CF и BD и секущей BC. Но $\angle 2 = \angle 4$, т. к. BD — биссектриса $\angle CBE$, а тогда $\angle 1 = \angle 3$ и ΔBFC — равнобедренный, поскольку углы при его основании равны. Итак, $FB = BC$. В пропорции (1) заменим FB на BC и тогда $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

§ 8.6. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

теорема

В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная величина между всей гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Дано: ΔABC — прямоугольный; $CD \perp AB$ (рис. 243).

Доказать: 1) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$.

Доказательство. 1) Рассмотрим прямоугольные треугольники ACD и BCD. Они имеют по одному рав-

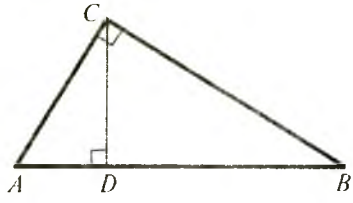


Рис. 243

ному острому углу: $\angle A = \angle DCB$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами ($AC \perp CB$ и $AB \perp CD$). Значит, ΔACD подобен ΔBCD (по первому признаку подобия прямоугольных треугольников). Из подобия треугольников следует: $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$ (или $(CD)^2 = AD \cdot DB$).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и ACD. Они подобны, т. к. имеют общий острый угол A (первый признак подобия прямоугольных треугольников). Из подобия этих треугольников следует: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ (или $(AC)^2 = AB \cdot AD$).

3) Прямоугольные треугольники ABC и BCD подобны, т. к. имеют общий острый угол B. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ (или $(BC)^2 = AB \times BD$), что и требовалось доказать.

Следствие 1. Отношение квадратов двух катетов прямоугольного треугольника равно отношению их проекций на гипотенузу.

Дано: ΔABC — прямоугольный; $BD \perp AC$ (рис. 244).

Доказать: $\frac{(AB)^2}{(BC)^2} = \frac{AD}{DC}$.

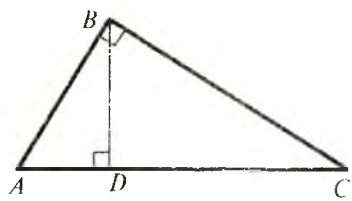


Рис. 244

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что каждый катет прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная величина между гипотенузой и проекцией

этого катета на гипотенузу, т. е. $(AB)^2 = AC \cdot AD$; $(BC)^2 = AC \cdot DC$.

Разделим первое равенство на второе: $\frac{(AB)^2}{(BC)^2} = \frac{AC \cdot AD}{AC \cdot DC}$, и тогда $\frac{(AB)^2}{(BC)^2} = \frac{AD}{DC}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр, а каждая хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная величина между диаметром и проекцией этой хорды на диаметр.

Дано: O — окружность; AC — диаметр; $BD \perp AC$; AB и BC — хорды (рис. 245).

Доказать: $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$.

Доказательство. Вписанный в окружность $\angle ABC$ опирается на диаметр, а потому $\angle ABC = 90°$. Значит, ΔABC — прямоугольный и BD — перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, тогда справедливы все три соотношения из теоремы, т. е. $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$; $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$, что и требовалось доказать.

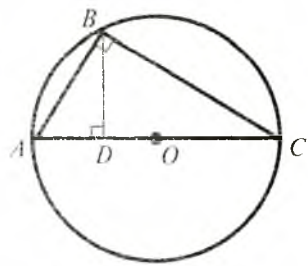


Рис. 245

§ 8.7. Теорема Пифагора и некоторые способы ее доказательства

Пифагор Самосский (564—473 гг. до н. э.) — древнегреческий ученый, религиозный и политический

Пифагор

деятель, основатель пифагореизма, математик. Пифагору приписывается изучение свойств целых чисел и пропорций, доказательство теоремы Пифагора, хотя, как предполагают некоторые исследователи по истории математики, она была известна и до него.

В первоначальной формулировке теорема Пифагора устанавливала зависимость между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника.

Приведем несколько вариантов доказательства теоремы Пифагора.

теорема

Пифагора

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

Дано: ΔABC — прямоугольный (рис. 246).

Доказать: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$.

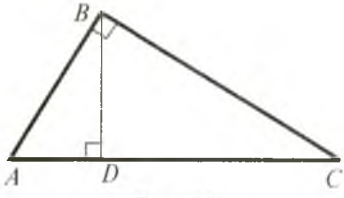


Рис. 246

Доказательство. Из вершины прямого угла B опустим перпендикуляр BD на гипотенузу. По теореме о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике $(AB)^2 = AC \cdot AD$; $(BC)^2 = AC \cdot DC$ (катет есть средняя пропорциональная величина между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу).

Сложим оба эти равенства:

$(AB)^2 + (BC)^2 = AC \cdot AD + AC \cdot DC$;

$(AB)^2 + (BC)^2 = AC \ (AD + DC)$, т. к. $AD + DC = AC$, то $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, что и требовалось доказать.

теорема

Пифагора

Площадь квадрата, построенного на гипотенузе пря-

моугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Дано: ΔABC — прямоугольный; ABB_1A_1, ACC_1A_2, BCC_2B_2 — квадраты (рис. 247).

Доказать: $S_{ABB_1A_1} = S_{ACC_1A_2} + S_{BCC_2B_2}$.

Доказательство. Построим два квадрата $DEHK$ и $D_1E_1H_1K_1$ (рис. 248), сторона которых равна сумме катетов $a + b$ $(AC + BC)$ треугольника ABC.

Выполнив построения в этих квадратах, разобьем квадрат $DEHK$ на два квадрата с площадями a^2 и b^2 и четыре прямоугольных треугольника, каждый из которых равен ΔABC (по двум катетам a и b).

Квадрат $D_1E_1H_1K_1$ также разобьем на четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b и четырехугольником $MNPQ$, который является квадратом, т. к. стороны его равны c — гипотенузе ΔABC, а углы — прямые (острые углы $1 + 2 = 90°$, тогда $\angle 3 = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 180° - 90° = 90°$). Таким образом, площадь квадрата $DEHK$ равна сумме площадей квадрата со стороной a, квадрата со стороной b и учетверенной площади ΔABC. Площадь квадрата $D_1E_1H_1K_1$ равна сумме площади квадрата со стороной c плюс четыре площади треугольника ABC.

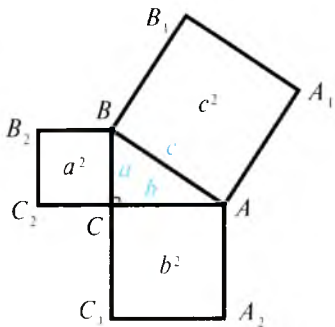
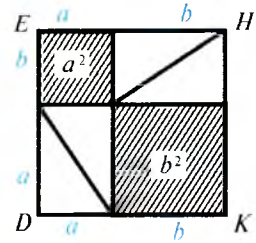


Рис. 247



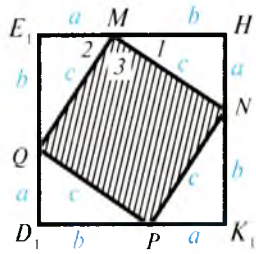


Рис. 248

Поскольку квадраты $DEHK$ и $D_1E_1H_1K_1$, равны, то площадь квадрата со стороной a, сложенная с площадью квадрата со стороной b и с учетверенной площадью треугольника ABC, равна площади квадрата со стороной c, сложенной с учетверенной площадью треугольника ABC, тогда сумма площадей квадратов со сторонами a и b равна площади квадрата со стороной c, что и требовалось доказать.

теорема

В любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Дано: ΔABC — прямоугольный (рис. 249).

Доказать: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$, или $(a^2 = b^2 + c^2)$.

Доказательство. На продолжении стороны AC отложим $CK = c$ и на прямой AK от точки K отложим отрезок $KD = b$. На сторонах AD и DK строим квадраты $ABED$ и $DFHK$ со сторонами c и b соответственно $(AD = AC + CD = AC + CK - KD = b + (c - b) = c)$.

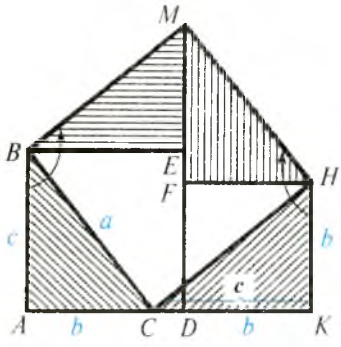


Рис. 249

Площадь полученного шестиугольника $ABEFHK$ равна сумме площадей двух квадратов, построенных на катете $AB = AD = c$ прямоугольного треугольника ABC и катете $HK = KD = b$ прямоугольного треугольника CHK, т. е. площадь этого шестиугольника равна $c^2 + b^2$. Прямоугольные треугольники ABC и CHK равны по двум катетам: $AC = KH = b$ и $AB = CK = c$. Из равенства этих треугольников следует, что их гипотенузы BC и CH равны, т. е. $BC = CH = a$. Итак, площадь шестиугольника $ABEFHK$ равна $c^2 + b^2$ и в то же самое время площадь этого шестиугольника равна сумме площа-

дей двух равных прямоугольных треугольников ABC и CHK и многоугольника $CBEFH$.

Повернем треугольник ABC вокруг вершины B на 90°, а треугольник CHK вокруг вершины H тоже на 90°. Тогда ΔABC займет положение ΔBME, а ΔCHK — положение ΔFMH.

Полученные треугольники BME и FMH и многоугольник $CBEFH$ образуют квадрат, сторона которого равна гипотенузе $BC = a$ прямоугольного треугольника ABC, а площадь этого квадрата равна a^2.

Площадь шестиугольника $ABEFHK$ можно рассматривать как сумму площадей треугольников ABC и CHK и многоугольника $CBEFH$. Площадь квадрата $CBMH$ можно рассматривать как сумму площадей треугольников BME и MFH и того же многоугольника $CBEFH$. Но треугольники ABC, CHK, BME и MFH равны между собой, а потому равны и площади этих треугольников.

Значит, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CHK} = S_{\Delta BME} = S_{\Delta MFH}$, и потому площади шестиугольника $ABEFHK$ и квадрата $CBMH$ равны между собой.

Итак, $c^2 + b^2 = a^2$, что и требовалось доказать.

После изучения темы «Площади многоугольников» будет приведено еще одно доказательство теоремы Пифагора.

§ 8.8. Пропорциональные отрезки в круге

теорема

Если через точку, взятую внутри круга, проведены диаметр и хорда, то произведение отрезков диаметра равно произведению отрезков хорды.

Дано: O — круг; CED — диаметр; AEB — хорда (рис. 250).

Доказать: $CE \cdot ED = AE \cdot EB$.

Доказательство. Соединим точки A с C и B с D и рассмотрим ΔACE и ΔEDB. Эти треугольники по-

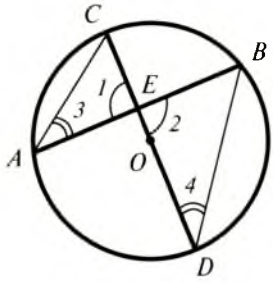


Рис. 250

добны по первому признаку подобия треугольников: $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу CB. Из подобия треугольников следует пропорциональность их сходственных сторон: $\frac{CE}{BE} = \frac{AE}{ED}$, следовательно $CE \cdot ED = AE \cdot BE$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если через точку, взятую внутри круга, проведено несколько хорд, то произведение отрезков любой хорды есть число, постоянное для всех хорд.

Дано: O — круг; AEB, CED, FEK — хорды (рис. 251).
Доказать: $AE \cdot EB = CE \cdot ED = FE \cdot EK$.

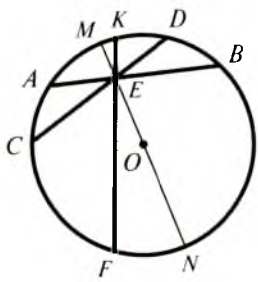


Рис. 251

Доказательство. Через точку E проведем диаметр MEN. По предыдущей теореме $AE \cdot EB = ME \cdot EN$; $CE \cdot ED = ME \cdot EN$; $FE \cdot EK = ME \cdot EN$.

У этих равенств правые части равны, следовательно, и левые части должны быть равны между собой, т. е. $AE \cdot EB = CE \cdot ED = FE \cdot EK$, что и требовалось доказать.

теорема

Если из точки, взятой вне круга, проведены касательная и секущая, то произведение секущей на ее внешний отрезок равно квадрату касательной (секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

Дано: O — круг; AB — касательная; ACD — секущая (рис. 252).

Доказать: $AD \cdot AC = (AB)^2$.

Доказательство. Соединим точку B с точками C и D. Рассмотрим ΔABC и ΔABD, которые подобны по первому признаку подобия: $\angle A$ — общий; $\angle 1 = \angle 2$, т. к. измеряются половиной дуги BC ($\angle 1$ как составленный касательной и хордой, а $\angle 2$ как вписанный в окружность). Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, а отсюда $(AB)^2 = AC \cdot AD$, что и требовалось доказать.

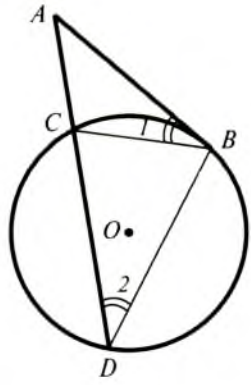


Рис. 252

Следствие. Если из точки, взятой вне круга, проведено несколько секущих, то произведение каждой секущей на ее внешний отрезок есть число, постоянное для всех секущих.

Дано: O — круг; ACD, AEF, AMN — секущие (рис. 253).

Доказать: $AC \cdot AD = AE \cdot AF = AM \cdot AN$.

Доказательство. Из точки A проведем касательную AB. По предыдущей теореме $AC \cdot AD = (AB)^2$; $AE \cdot AF = (AB)^2$; $AM \cdot AN = (AB)^2$.

В этих равенствах равны правые части, а потому равны и их левые части. Следовательно, $AC \cdot AD = AE \cdot AF = AM \cdot AN$, что и требовалось доказать.

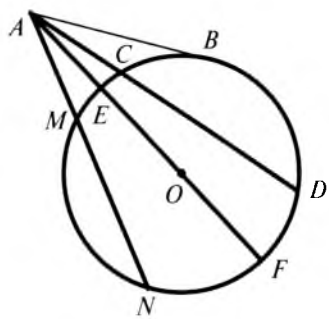


Рис. 253

§ 8.9. Теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого или тупого угла

теорема

Квадрат стороны, лежащей против острого угла произвольного треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон треугольника без удвоенного произведения одной из этих сторон на ее проекцию на другую сторону.

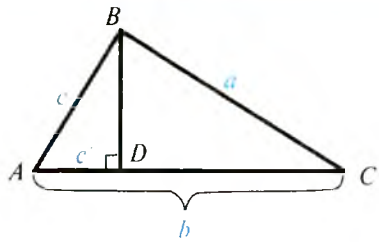


Рис. 254

Дано: ΔABC; $\angle A$ — острый; $BD \perp AC$ (рис. 254).

Доказать: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AC \cdot AD$, или $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc'$.

Доказательство. В прямоугольном треугольнике BDC по теореме Пифагора

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольника ABD по теореме Пифагора

$$(BD)^2 = (AB)^2 - (AD)^2. \qquad (2)$$

Кроме этого,

$$DC = AC - AD. \qquad (3)$$

Подставив равенства (2) и (3) в равенство (1), получим:

$(BC)^2 = ((AB)^2 - (AD)^2) + (AC - AD)^2$

$(BC)^2 = (AB)^2 - \cancel{(AD)^2} + (AC)^2 - 2AC \cdot AD + \cancel{(AD)^2}$ и тогда

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AC \cdot AD$, или $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc'$, что и требовалось доказать.

теорема

В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других его сторон, сложенной с удвоенным произве-

дением одной из этих сторон на ее проекцию на другую сторону.

Дано: ΔABC — тупоугольный; $\angle A$ — тупой; $BD \perp AC$ (рис. 255).

Доказать: $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2AC \cdot AD$, или $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.

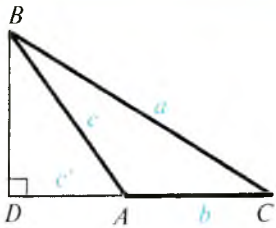


Рис. 255

Доказательство. В прямоугольном треугольнике DBC по теореме Пифагора:

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (DC)^2. \quad (1)$$

В прямоугольном треугольнике DBA по теореме Пифагора:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2 \quad (2)$$

и, кроме того,

$$CD = AD + AC. \quad (3)$$

Подставив равенства (2) и (3) в равенство (1), получим:

$(BC)^2 = ((AB)^2 - (AD)^2) + (AD + AC)^2$

$(BC)^2 = (AB)^2 - \cancel{(AD)^2} + \cancel{(AD)^2} + 2AD \cdot AC + (AC)^2$ и тогда

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 + 2AD \cdot AC$, или $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$, что и требовалось доказать.

Следствие. Квадрат стороны треугольника равен, меньше или больше суммы квадратов двух других его сторон в зависимости от того, будет ли противолежащий этой стороне угол прямым, острым или тупым.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 256).

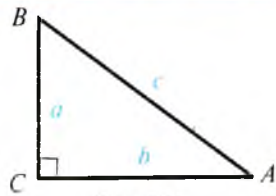


Рис. 256

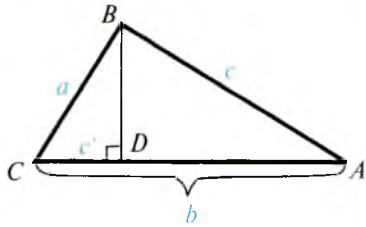


Рис. 257

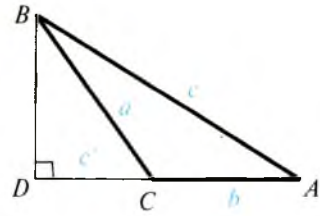


Рис. 258

По теореме о квадрате стороны, лежащей против острого угла C, имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc', \quad \text{т. е.} \quad c^2 < a^2 + b^2 \quad \text{(рис. 257)}.$$

По теореме о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого угла C, имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bc', \quad \text{т. е.} \quad c^2 > a^2 + b^2 \quad \text{(рис. 258)}.$$

Верно и обратное утверждение.

Следствие 2. Угол треугольника будет прямым, острым или тупым в зависимости от того, будет ли квадрат стороны, лежащей против этого угла, равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон этого треугольника.

§ 8.10. Теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма

теорема

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

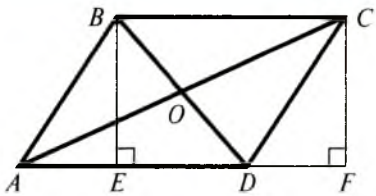


Рис. 259

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; AC и BD — диагонали (рис. 259).

Доказать: $(AC)^2 + (BD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2$.

Доказательство. Из

точек B и C опустим перпендикуляры BE и CF на AD и ее продолжение. По теоремам о квадрате стороны, лежащей против острого угла A и тупого угла D, имеем:

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 - 2(AD) \cdot AE \qquad (1)$$

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 + 2AD \cdot DF. \qquad (2)$$

Прямоугольные треугольники ABE и CDF равны, т. к. их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы BAD и CDF равны как соответственные при $AB \parallel CD$ и секущей AF. Из равенства этих треугольников следует, что $AE = DF$. Сложим равенства (1) и (2): $BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE + AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot AE$, и поскольку $AD = BC$ и $AE = DF$, получим $BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Что следует понимать под отношением двух отрезков?
2. Какие стороны двух треугольников называют сходственными?
3. Что необходимо для подобия двух треугольников?
4. Что утверждает лемма о подобии треугольников?
5. Будут ли подобны два треугольника, имеющие по два равных угла?
6. Подобны ли два треугольника, стороны которых пропорциональны?
7. Будут ли подобны два треугольника, если по две стороны у них пропорциональны и заключают между собой по равному углу?
8. Для подобия каких треугольников достаточно равенства только одного острого угла?
9. Какие треугольники, имеющие по две пары пропорциональных сторон, подобны?
10. Какие два треугольника подобны всегда?
11. Каким свойством обладают высоты двух подобных треугольников?

12. При каких условиях подобны два многоугольника?

13. Могут ли быть подобны многоугольники, не являющиеся одноименными?

14. Каким свойством обладают два подобных многоугольника?

15. Какими способами подобные многоугольники могут быть разложены на подобные треугольники?

16. Каким свойством обладают периметры подобных треугольников или многоугольников?

17. Что такое коэффициент подобия многоугольников, треугольников?

18. Верны ли следующие утверждения: a) если два треугольника равны, то они подобны; b) подобные треугольники равны; c) два треугольника, подобные одному и тому же треугольнику, подобны; d) если два треугольника подобны, то треугольник, равный первому, подобен второму?

19. Подобны ли между собой два треугольника, если они отсекаются от данного треугольника двумя прямыми: a) параллельными одной и той же стороне треугольника; b) параллельными двум разным сторонам данного треугольника?

20. Каким свойством обладают: a) стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых; b) две параллельные прямые, пересекаемые рядом прямых, исходящих из одной точки?

21. Каким свойством обладает: a) биссектриса внутреннего угла треугольника; b) биссектриса внешнего угла треугольника?

22. Какую особенность имеет биссектриса внешнего угла треугольника?

23. Пропорциональность двух пар сходственных сторон подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выражена пропорцией $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$: a) верна ли пропорция $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$? Выражает ли она пропорцио-

нальность сторон? b) Какая из двух пропорций даст коэффициент подобия?

24. Следует ли из пропорциональности сходственных сторон подобных треугольников пропорциональность: a) сходственных высот; b) сходственных биссектрис; c) сходственных медиан?

25. Каким свойством обладает перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника?

26. Какая зависимость существует между катетом прямоугольного треугольника, его гипотенузой и проекцией данного катета на гипотенузу?

27. Какими свойствами обладают перпендикуляр, опущенный из любой точки окружности на диаметр, и хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра?

28. Сформулировать теорему Пифагора несколькими способами.

29. Как относятся между собой квадраты катетов прямоугольного треугольника?

30. Указать пропорциональные отрезки в круге.

31. Каким свойством обладают: a) отрезки хорд, проведенных через точку, взятую внутри круга; b) отрезки секущих, проведенных через точку, взятую вне круга?

32. Как формулируется теорема о квадрате стороны, лежащей: a) против острого угла; b) против тупого угла?

33. Если известны длины сторон треугольника, возможно ли установить, будет ли этот треугольник остроугольным, тупоугольным или прямоугольным?

34. Как связаны длины сторон параллелограмма с длинами его диагоналей?

Тест № 8

1. Какие из данных отношений не равны единице? a) диагоналей ромба с прямыми углами; b) смежных сторон параллелограмма со взаимно перпен-

дикулярными диагоналями; c) гипотенузы прямоугольного треугольника к медиане, проведенной к гипотенузе; d) средней линии трапеции к сумме ее оснований.

A) a, b, c; B) c, d; C) a, c; D) a, d; E) b, c, d.

2. Какие из данных отношений равны $\frac{1}{2}$: a) меньшего катета прямоугольного треугольника с углом в 60° к гипотенузе; b) хорды, стягивающей дугу в 60°, к хорде, стягивающей дугу в 180°, в одной окружности; c) разности оснований равнобедренной трапеции с углом в 45° к ее высоте; d) отрезков диаметра, проходящего через середину хорды, стягивающей дугу в 120°?

A) все; B) a, b; C) c, d; D) a, b, c; E) a, b, d.

3. Найти отношение отрезков, если первый из них равен 18 дм, а второй на 40% больше первого.

A) $\frac{5}{7}$; B) $\frac{7}{5}$; C) $\frac{5}{14}$; D) $\frac{7}{10}$; E) $\frac{4}{9}$.

4. Найти отношение отрезков, если один из них составляет 65% второго.

A) $\frac{13}{20}$; B) $\frac{7}{20}$; C) определить нельзя; D) 0,6; E) 0,75.

5. Сколько пар пропорциональных отрезков имеется в разностороннем треугольнике с одной проведенной в нем средней линией?

A) одна; B) две; C) три; D) четыре; E) ни одной.

6. Сколько пар пропорциональных отрезков имеется в параллелограмме?

A) одна; B) две; C) ни одной; D) три; E) четыре.

7. В треугольнике проекции боковых сторон на основание равны 5 м и 9 м, а большая боковая сторона равна 15 м. На какие части эта боковая сторона делится перпендикуляром к основанию, проходящим через его середину?

A) $3\frac{1}{3}$ и $11\frac{2}{3}$ *м*; B) 4 и 11 м; C) 3,5 и 11,5 м; D) 5 и 10 м; E) 4,5 и 10,5 м.

8. Стороны треугольника 51 см, 85 см и 104 см. Проведена окружность, которая касается двух меньших сторон и имеет центр на большей стороне. На какие части большая сторона делится центром?

A) 30 и 74 см; B) 35 и 69 см; C) 32 и 72 см; D) 40 и 64 см; E) 39 и 65 см.

9. В трапеции $ABCD$ меньшее основание $BC = 12$ см. Диагональ AC делится другой диагональю на отрезки: $AO = 12$ см и $OC = 8$ см. Найти AD.

A) 16 см; B) 18 см; C) 21 см; D) 20 см; E) 24 см.

10. Подобны ли треугольники, если стороны их таковы: a) 2,7, 2,4, 1,8 м и 12, 16, 18 см; b) 4, 3, 2 дм и 16, 10, 12 см; c) могут ли быть подобны прямоугольные треугольники, если в одном из них отношение катета к гипотенузе равно $\frac{1}{2}$, а в другом отношение катета к гипотенузе не равно $\frac{1}{2}$?

A) a, b; B) b, c; C) a; D) a, c; E) b.

11. На отрезке $AB = 6$ см дана точка C, расстояние которой от A равно 3,6 см. На продолжении отрезка AB за точку B найти такую точку D, расстояния от которой до точек A и B соответственно относились бы как $AC : CB$.

A) $BD = 10$ см; $AD = 16$ см; B) $BD = 12$ см; $AD = 16$ см; C) $BD = 12$ см; $AD = 18$ см; D) $BD = 8$ см; $AD = 15$ см; E) $BD = 16$ см; $AD = 20$ см.

12. Стороны угла A пересечены двумя параллельными прямыми BC и DE (точки B и D лежат на одной стороне угла). Определить AB, если $AB + AD = 21$ м; $AC = 12$ м; $AE = 16$ м.

A) 8 м; B) 9 м; C) 7,5 м; D) 8,4 м; E) 10 м.

13. Стороны угла A пересечены двумя параллельными прямыми BC и DE (точки B и D лежат на одной стороне угла). Определить AD, если $AC : AE = \frac{3}{11} : 0{,}6$; $BD = 12$ дм.

A) 20 дм; B) 21 дм; C) 18 дм; D) 22 дм; E) 24 дм.

14. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Требуется определить отрезок BM, если $AB = 1{,}2$ м и $CD : CM = \frac{1}{6} : 0{,}25$.

A) 1,9 м; B) 1,5 м; C) 2 м; D) 1,6 м; E) 1,8 м.

15. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке M. Определить CD, если $AB : BM = 17 : 9$ и $CD - CM = 1{,}6$ м.

A) 3,4 м; B) 3 м; C) 3,2 м; D) 3,1 м; E) 3,5 м.

16. Основания трапеции 1,8 м и 1,2 м; боковые стороны ее длиной 1,5 м и 1,2 м продолжены до взаимного пересечения. На сколько продолжены боковые стороны?

A) 4,5 и 3,6 м; B) 3 и 2,4 м; C) 2 и 2,4 м; D) 3 и 3,6 м; E) 3,6 и 4,8 м.

17. Угол треугольника, заключенный между сторонами, равными 9 см и 6 см, разделен пополам. Один из отрезков третьей стороны оказался равным одной из данных сторон. Определить третью сторону.

A) 10 см; B) 15 см; C) 12 см; D) 14 см; E) 9 см.

18. В треугольнике ABC: D — точка на стороне BC. Узнать, делит ли прямая AD угол A пополам, если a) $AB = 12$ м; $AC = 56$ м и $BC : BD = 14 : 3$; b) $AB = \frac{5}{11} AC$; $BD = 2$ м; $DC = 4{,}5$ м; c) $AB = 6$ м; $AC = 28$ м; $BD = \frac{3}{11} BC$.

A) да, нет, да; B) нет, нет, да; C) нет, нет, нет; D) да, да, да; E) да, да, нет.

19. В равнобедренном треугольнике высота равна 20 см, а основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Определить радиус вписанного круга.

A) 9 см; B) 10 см; C) 8 см; D) 12 см; E) 8,5 см.

20. Хорда $AB = 15$ см, хорда $AC = 21$ см и хорда $BC = 24$ см. Точка D — середина дуги CB. Найти длины отрезков BE и EC, на которые делится хорда BC прямой AED.

A) 10 и 14 см; B) 12 и 12 см; C) 11 и 13 см; D) 9 и 15 см; E) 8 и 16 см.

21. Стороны треугольника относятся как 4:5:6; меньшая сторона подобного ему треугольника равна 0,8 м. Определить стороны второго треугольника.

A) 1 и 1,8 м; B) 1,5 и 1,8 м; C) 1,6 и 1,8 м; D) 2 и 2,4 м; E) 1 и 1,2 м.

22. Стороны треугольника относятся как 2 : 5 : 4, периметр подобного ему треугольника равен 55 м. Определить стороны второго треугольника.

A) 8, 27 и 20 м; B) 12, 25 и 18 м; C) 10, 25 и 20 м; D) 9, 24 и 22 м; E) 9, 25 и 21 м.

23. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). O — точка пересечения диагоналей; $BO : OD = 0{,}3 : \frac{2}{3}$, а средняя линия трапеции равна 29 см. Определить основания и отношение $AO : OC$.

A) 40 и 18 см; 20 : 9; B) 20 и 9 см; 20 : 9; C) 20 и 9 см; 10 : 3; D) 27 и 2 см; 3 : 1; E) 30 и 28 см; 15 : 14.

24. Основания трапеции относятся как 5 : 9, а одна из боковых сторон равна 16 см. На сколько надо ее продолжить, чтобы она встретилась с продолжением другой боковой стороны?

A) 24 см; B) 20 см; C) 21 см; D) 18 см; E) 25 см.

25. Стороны параллелограмма равны 2 м и 16 дм, расстояние между большими сторонами 8 дм. Определить расстояние между меньшими сторонами.

A) 0,8 м; B) 1,2 м; C) 1,1 м; D) 0,9 м; E) 1 м.

26. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его высоты относятся, как 5 : 7. Определить соответствующие им стороны.

A) 10 и 14 см; B) 20 и 28 см; C) 14 и 10 см; D) 28 и 20 см; E) 15 и 21 см.

27. Стороны одного четырехугольника относятся между собой как $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$. Периметр подобного ему четырехугольника равен 75 м. Определить стороны четырехугольника.

A) 16, 8, 19 и 32 м; B) 18, 9, 12 и 36 м; C) 20, 10, 5 и 40 м; D) 17, 8,5, 15,5 и 34 м; E) 15, 7,5, 22,5 и 30 м.

28. Катеты относятся как 5 : 6, а гипотенуза равна 122 см. Найти отрезки, на которые гипотенуза делится высотой.

A) 42 и 80 см; B) 48 и 74 см; C) 50 и 72 см; D) 44 и 78 см; E) 52 и 70 см.

29. Катеты относятся как 3 : 7, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 42 см. Определить отрезки гипотенузы.

A) 9 и 49 см; B) 18 и 98 см; C) 27 и 147 см; D) 21 и 49 см; E) 24 и 56 см.

30. Сторона квадрата равна a. Чему равна его диагональ?

A) $a\sqrt{2}$; B) $2a$; C) $a\sqrt{3}$; D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; E) $1{,}5a$.

31. Стороны прямоугольника a и b. Определить радиус описанного круга.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$; B) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; C) $a+b$; D) $\frac{a+b}{2}$;

E) $\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

32. Катеты прямоугольного треугольника равны 16 см и 12 см. Определить медиану гипотенузы.

A) 20 см; B) 10 см; C) 25 см; D) 24 см; E) 18 см.

33. В равнобедренном треугольнике основание равно 4 см, а угол при нем равен 45°. Определить боковую сторону.

A) $4\sqrt{2}$ см; B) 4 см; C) $2\sqrt{2}$ см; D) 2 см; E) $3\sqrt{2}$ см.

34. Определить диагонали ромба, если они относятся как 3 : 4, а периметр 1м.

A) 3 и 4 дм; B) 6 и 8 дм; C) 4,5 и 6 дм; D) 9 и 12 дм; E) 1,5 и 2 дм.

35. Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Определить длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 см и 50 см, а их проекции на прямую относятся как 3 : 10.

A) 60 см; B) 45 см; C) 40 см; D) 50 см; E) 48 см.

36. Радиус круга равен 89 дм, хорда 16 м. Определить ее расстояние от центра.

A) 52 дм; B) 40 дм; C) 45 дм; D) 39 дм; E) 42 дм.

37. Радиус круга — 25 см, две параллельные хорды равны 14 см и 40 см. Определить расстояние между ними.

A) 12 и 30 см; B) 10 и 50 см; C) 8 и 38 см; D) 16 и 20 см; E) 9 и 39 см.

38. Определить катеты, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части в 15 см и 20 см.

A) 21 и 28 см; B) 18 и 24 см; C) 24 и 32 см; D) 12 и 16 см; E) 20 и 24 см.

39. В прямоугольном треугольнике катеты равны 13 дм и 84 дм. Определить радиус вписанного круга.

A) 5 дм; B) 10 дм; C) 7 дм; D) 8 дм; E) 6 дм.

40. Определить вид треугольника, если его стороны 2; 3 и 4.

A) остроугольный; B) прямоугольный; C) тупоугольный; D) определить нельзя; E) треугольника с такими сторонами не существует.

41. В треугольнике определить третью сторону, если две другие образуют угол в 60° и соответственно равны 5 см и 8 см.

A) 8 см; B) 7 см; C) 7,5 см; D) 9 см; E) 8,5 см.

42. Сторона треугольника равна 21 см, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся как 3 : 8. Определить эти стороны.

A) 9 и 24 см; B) 12 и 32 см; C) 15 и 40 см; D) 8 и 18 см; E) 6 и 16 см.

43. В тупоугольном треугольнике бóльшая сторона равна 16 см, а высоты, проведенные из обоих ее концов, отстоят от вершины тупого угла на 2 см и 3 см. Определить две другие стороны треугольника.

A) 9 и 12 см; B) 10 и 12 см; C) 12 и 8 см; D) 12 и 15 см; E) 12 и 7 см.

44. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а стороны относятся как 2 : 3. Определить стороны.

A) 12 и 18 см; B) 6 и 9 см; C) 9 и 13,5 см; D) 10 и 15 см; E) 8 и 12 см.

45. Стороны треугольника равны 16 см, 18 см и 26 см. Найти медиану бóльшей стороны.

A) 10 см; B) 12 см; C) 11 см; D) 13 см; E) 9 см.

46. Хорда BDC перпендикулярна радиусу ODA. Определить BC, если $OA = 25$ см; $AD = 10$ см.

A) 42 см; B) 38 см; C) 35 см; D) 39 см; E) 40 см.

47. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см, а один из от-

резков другой хорды равен 28 см. Определить ее второй отрезок.

A) 15 см; B) 12 см; C) 10 см; D) 14 см; E) 18 см.

48. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на 48 см и 3 см, а другая пополам. Определить длину второй хорды.

A) 24 см; B) 30 см; C) 32 см; D) 16,5 см; E) 35 см.

49. Радиус окружности 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что данной окружностью она делится пополам. Определить длину этой секущей.

A) 12 см; B) 9 см; C) 8 см; D) 10 см; E) 7 см.

50. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Определить длину касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей равны 4 см и 5 см.

A) 6 см; B) $\sqrt{20}$ см; C) 9 см; D) 8 см; E) 7 см.

51. Касательная равна 20 см, а наибольшая секущая, проведенная из той же точки, равна 50 см. Определить радиус круга.

A) 22 см; B) 19 см; C) 18 см; D) 21 см; E) 20 см.

52. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Сумма их равна 15 см, а внешний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Определить касательную и секущую (ответ взять только в целых числах).

A) 6 и 9 см; B) 8 и 10 см; C) 8 и 12см; D) 13 и 15 см; E) 11 и 14 см.

Глава 9

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 9.1. Построение многоугольника, подобного данному

Задача 1. Построить многоугольник, подобный данному, если одна из сторон равна отрезку a.

Дано: $ABCDE$ — данный многоугольник; $MN = a$ — сторона искомого многоугольника, сходственная стороне AB (рис. 260).

Построение. На стороне AB от точки A отложим $AB_1 = a$ (если $a > AB_1$, то точка B_1 расположится на продолжении стороны AB). Проведем из точки A все возможные диагонали многоугольника $ABCDE$. Через точку B_1 проведем $B_1C_1 \parallel BC$, через точку C_1 проведем $C_1D_1 \parallel CD$ и через точку D_1 проведем $D_1E_1 \parallel DE$. Полученный многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$ подобен $ABCDE$. Действительно, $\angle A$ — общий; $\angle B = \angle B_1$ как соответственные при параллельных BC и B_1C_1 и секущей AB; $\angle E = \angle E_1$ как соответственные при параллельных DE и D_1E_1 и секущей AE; $\angle C = \angle C_1$, т. к. $\angle C_1 = \angle 1 + \angle 2$ и $\angle C = \angle 3 + \angle 4$, причем $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ как соответственные при параллельных BC и B_1C_1, CD и C_1D_1 и секущей AC.

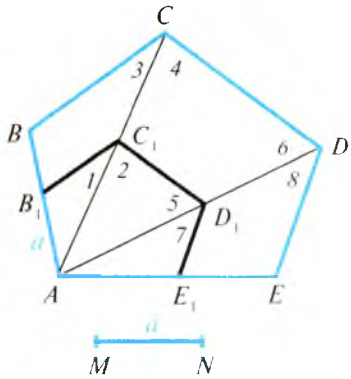


Рис. 260

$\angle D = \angle D_1$, т. к. $\angle D_1 = \angle 5 + \angle 7$ и $\angle D = \angle 6 + \angle 8$, причем $\angle 5 = \angle 6$ и $\angle 7 = \angle 8$ как соответственные при параллельных CD и C_1D_1, DE и D_1E_1 и секущей AD.

По лемме о подобии $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$. Из их подобия:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}, \qquad (1)$$

$\Delta AC_1D_1 \sim \Delta ACD$. Из их подобия:

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD}, \qquad (2)$$

$\Delta AD_1E_1 \sim \Delta ADE$. Из их подобия:

$$\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}. \qquad (3)$$

В равенствах (1) и (2) есть общее отношение $\frac{AC_1}{AC}$; а в равенствах (2) и (3) есть равные отношения $\frac{AD_1}{AD}$.

Следовательно, из (1), (2) и (3) следует, что

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

Итак, у одноименных многоугольников $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ равны углы и пропорциональны сходственные стороны, следовательно, эти многоугольники подобны.

Эта задача может быть использована как пример разложения подобных многоугольников на подобные треугольники делением многоугольников диагоналями, проведенными из какой-либо вершины многоугольника.

§ 9.2. Деление отрезка на пропорциональные части

Задача 2. Данный отрезок разделить на части, пропорциональные $m : n : p : q$ (где m, n, p, q — данные отрезки или данные числа) (рис. 261).

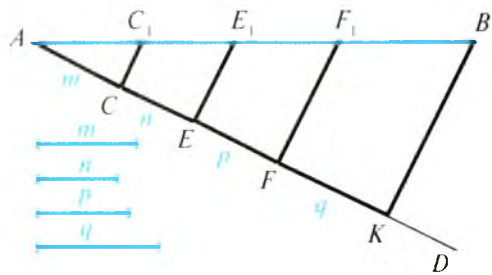


Рис. 261

Дано: AB — отрезок; m, n, p, q — данные отрезки или числа.

Построение. Под произвольным углом к AB проведем луч AD, на котором от точки A отложим отрезки $AC = m$; $CE = n$; $EF = p$ и $FK = q$. Точку K соединим с точкой B и через точки F, E и C проведем прямые FF_1, EE_1 и CC_1, параллельные BK.

По обобщенной теореме Фалеса имеем, что отрезок AB разбился на части, пропорциональные m, n, p, q, т. е. $AC_1 : C_1E_1 : E_1F_1 : F_1B = m : n : p : q$.

Если m, n, p и q — данные числа, то построение выполняется аналогично, с той лишь разницей, что на луче AD откладываются отрезки, равные m; n; p; q произвольным единицам измерения.

§ 9.3. Построение четвертого отрезка, пропорционального трем данным

Задача 3. Построить четвертый отрезок, пропорциональный трем данным отрезкам a, b, c.

Итак, следует найти отрезок x, чтобы a, b, c и x удовлетворяли пропорции $a : b = c : x$.

Дано: a, b, c — данные отрезки.

Построение. На сторонах произвольного $\angle BAC$ отложим $AD = a$ и $DE = c$ на стороне AC и $AF = b$ — на стороне AB (рис. 262). Соединим точки F и D и через точку E проведем $EK \parallel FD$, тогда $FK = x$.

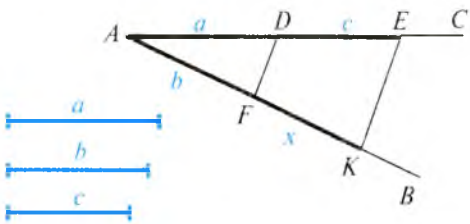


Рис. 262

Действительно, по обобщенной теореме Фалеса $\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{FK}$, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, или $x = \frac{bc}{a}$.

§ 9.4. Построение среднего отрезка, пропорционального двум данным

Задача 4. Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя данными отрезками a и b, т. е. $x^2 = ab$.

Дано: a и b — отрезки (рис. 263 *а*).

1-й способ построения. На произвольной прямой AD отложим $AB = a$ и $BC = b$ (рис. 263 *б*). На отрезке AC как на диаметре радиусом, равным $\frac{a+b}{2}$, проводим полуокружность.

Из точки B проведем перпендикуляр BM к AC, где M — точка, лежащая на окружности. BM и есть искомый отрезок x, т. к. $BM^2 = AB \cdot BC$, т. е. $x^2 = ab$, а тогда $x = \sqrt{ab}$ (исходя из следствия 2 к метрическим соотношениям между элементами прямоугольного треугольника).

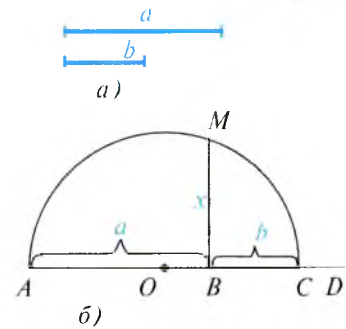


Рис. 263

2-й способ построения. На произвольной прямой AD от точки A откладываем отрезки $AB = a$ и $AC = b$ (рис. 264). На большем из этих отрезков (a) строим полуокружность. Из точки C проводим $CM \perp AB$ и точку M, лежащую на окружности, соединяем с точкой A. Хорда AM — средняя пропорциональная величина между AC и AB, т. е. $AM^2 = AC \cdot AB$, или $x^2 = ab$ (следует из того же следствия 2 к метрическим соотношениям между элементами прямоугольного треугольника).

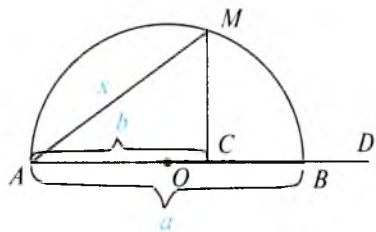


Рис. 264

Глава 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

§ 10.1. Определение тригонометрических функций

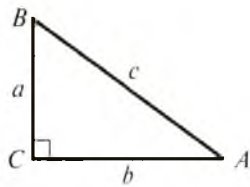


Рис. 265

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, стороны которого a, b, c (рис. 265).

Определение. ***Синусом*** *данного угла называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе:*

$$\sin A = \frac{a}{c};\ \sin B = \frac{b}{c}.$$

Определение. ***Косинусом*** *данного угла называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе:*

$$\cos A = \frac{b}{c};\ \cos B = \frac{a}{c}.$$

Определение. ***Тангенсом*** *данного угла называется отношение катета, противолежащего этому углу, к прилежащему катету:*

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b};\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Определение. ***Котангенсом*** *данного угла называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к катету противолежащему:*

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a};\ \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}.$$

Из определений синуса, косинуса, тангенса и ко-

тангенса острого угла можно вывести соотношения между катетами или гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника. Из того, что $\sin A = \frac{a}{c}$, следует ($\Rightarrow$), что $a = c \cdot \sin A$ и $c = \frac{a}{\sin A}$.

Аналогично, из того, что $\sin B = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin B$ и $c = \frac{a}{\sin B}$. Итак,

1) *катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету;*

2) *гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.*

Из определения $\cos A = \frac{b}{c}$ следует, что $b = c \cdot \cos A$; $c = \frac{b}{\cos A}$.

Аналогично, из определения $\cos B = \frac{a}{c}$ следует, что $a = c \cdot \cos B$; $c = \frac{a}{\cos B}$. Итак,

3) *катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету;*

4) *гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус угла, прилежащего к этому катету.*

Из того, что $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, следует, что $a = b \cdot \operatorname{tg} A$; из того, что $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg} B$.

А из того, что $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$ следует, что $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$; из того, что $\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \operatorname{ctg} B$. Итак,

5) *катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к нему.*

теорема

Величины $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$ не зависят от длины сторон прямоугольного треугольника при неизменной величине угла A.

Дано: прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$ (рис.266).

Доказать: $\sin A = \sin A_1$;
$\cos A = \cos A_1$;
$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$;
$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1$.

Доказательство. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны ($\sim$), т. к. имеют по одному равному острому углу. Из подобия треугольников следует пропорциональность сходственных сторон:

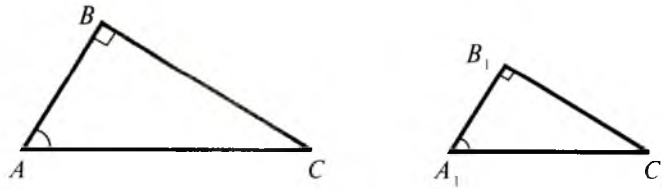


Рис. 266

$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$;

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$;

$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$;

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, т. е. $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} A_1$.

теорема

С увеличением угла A величины $\sin A$ и $\operatorname{tg} A$ возрастают, а $\cos A$ и $\operatorname{ctg} A$ — убывают.

Дано: прямоугольные треугольники ABC и ADE; $\angle BAC < \angle DAE$; $AD=AB$ (радиусы окружности) (рис. 267).

Доказать: 1) $\sin \angle BAC < \sin \angle DAE$;
2) $\cos \angle BAC > \cos \angle DAE$;
3) $\operatorname{tg} \angle BAC < \operatorname{tg} \angle DAE$;
4) $\operatorname{ctg} \angle BAC > \operatorname{ctg} \angle DAE$.

Доказательство. По определению синуса острого угла:

1) $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB}$; $\sin \angle DAE = \frac{DE}{AD}$, но $AB = AD$, а $BC < DE$, тогда $\sin \angle BAC < \sin \angle DAE$.

2) $\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB}$; $\cos \angle DAE = \frac{AE}{AD}$, но $AB = AD$, а $AC > AE$, тогда $\cos \angle BAC > \cos \angle DAE$.

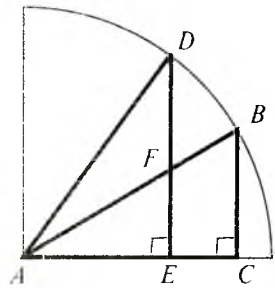


Рис. 267

3) Из подобия треугольников AFE и ABC следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{FE}{AE}$, а тогда $\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} \angle FAE$.

$\operatorname{tg} \angle DAE = \frac{DE}{AE}$, но $DE > FE$, поэтому $\operatorname{tg} \angle DAE > \operatorname{tg} \angle FAE$, а тогда $\operatorname{tg} \angle BAC < \operatorname{tg} \angle DAE$.

4) Аналогично, из подобия треугольников AFE и ABC следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{FE}$, и тогда $\operatorname{ctg} \angle BAC = \operatorname{ctg} \angle FAE$.

$\operatorname{ctg} \angle DAE = \frac{AE}{DE}$, но $DE > FE$, поэтому $\operatorname{ctg} \angle DAE < \operatorname{ctg} \angle FAE$ и тогда $\operatorname{ctg} \angle BAC > \operatorname{ctg} \angle DAE$.

Итак, каждому углу α соответствует некоторое значение каждого из отношений: $\sin \alpha$; $\cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$. Следовательно, данные отношения являются функциями угла. Эти функции называются ***тригонометрическими функциями***, а угол α — их ***аргументом.***

§ 10.2. Основные тригонометрические тождества

Эти тождества выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

и позволяют, если известна величина одной из этих функций, находить значения трех остальных.

Тождество 1. Сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла равна 1 (рис. 268)

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. По определению синуса и косинуса угла α в прямоугольном треугольнике ABC имеем:

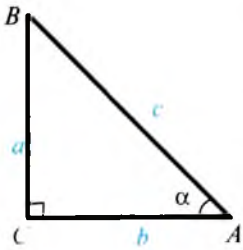


Рис. 268

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тогда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ и потому: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, что и требовалось доказать.

Тождество 2. Тангенс острого угла равен отношению синуса к косинусу этого угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Доказательство. По определению $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ и тогда $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тождество 3. Котангенс острого угла равен отношению косинуса к синусу этого угла

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Доказательство. По определению $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, тогда $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$. Но по определению $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Тождество 4. Произведение тангенса и котангенса одного и того же угла равно 1

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Доказательство. Из тождеств 2 и 3 имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\sin\alpha}} = 1$, что и требовалось доказать.

Следствие. Тангенс произвольного угла есть величина, обратная котангенсу того же угла, и наоборот

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Доказательство. По тождеству 4: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, и потому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Тождество 5. Сумма единицы и квадрата тангенса произвольного угла есть величина, обратная квадрату косинуса этого угла

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Доказательство. По тождеству 2: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тогда $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, но

по тождеству 1: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, и потому $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, что и требовалось доказать.

Тождество 6. Сумма единицы и квадрата котангенса произвольного угла есть величина, обратная квадрату синуса этого угла

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Доказательство. По тождеству 3: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тогда $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

По тождеству 1 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, и потому $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, что и требовалось доказать.

Большое применение имеет следующая теорема.

теорема

Для любого острого угла:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

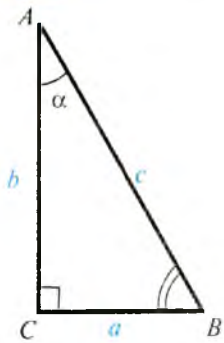


Рис. 269

Дано: прямоугольный треугольник ABC; $\angle A = \alpha$ (рис. 269).

Доказать: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Доказательство. В прямоугольном треугольнике сумма двух его острых углов равна 90°, и тогда $\angle B = 90^\circ - \alpha$, поскольку $\angle A = \alpha$.

По определению синуса и косинуса углов α и $90^\circ - \alpha$ имеем:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad (2)$$

$$\sin \angle B = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}, \qquad (3)$$

$$\cos \angle B = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}. \qquad (4)$$

Тогда из (1) и (4) следует, что $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c}$, а из (2) и (4) следует, что $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$, что и требовалось доказать.

Формулы $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ и $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ называются ***формулами приведения***, а углы α и β — ***дополнительными*** до 90°.

На плоскости xy рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом R. Пусть точка A с координатами x и y расположена в верхней полуплоскости, т. е. полуплоскости, где $y > 0$ (рис. 270).

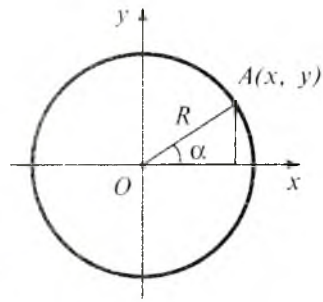


Рис. 270

Значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ для острого угла α выражаются через координаты точки A:

$$\cos \alpha = \frac{x}{R}; \quad \sin \alpha = \frac{y}{R}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Определим теперь значения тригонометрических функций любого угла с помощью формул. (Исключаются значения $\operatorname{tg} \alpha$ для угла $\alpha = 90^\circ$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для углов $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 180^\circ$.) При таком определении $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$; $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{ctg} 180^\circ = 0$. Считая, что совпадающие лучи образуют угол 0°, будем иметь: $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$.

теорема

Для любого угла α при $0^\circ < \alpha < 180^\circ$:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$; **$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$;**

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$; **$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$;**

при $\alpha \neq 90^\circ$

Дано: круг O; $OA = OA_1 = R$; $\angle AOB = \alpha$; $\angle A_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$ (рис. 271).

Доказать: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, при $0^\circ < \alpha < 180^\circ$;
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, при $\alpha \neq 90^\circ$.

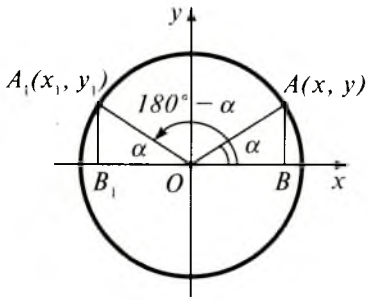


Рис. 271

Доказательство. Рассмотрим прямоугольные ΔOAB и ΔOA_1B_1. В них равны гипотенузы $OA = OA_1 = R$ и острые углы: $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \alpha$, а тогда эти треугольники равны. Из равенства этих треугольников следует, что $AB = A_1B_1$, т. е. $y = y_1$ и $OB = OB_1$, следовательно, $x = -x_1$.

Поэтому $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y_1}{R} = \dfrac{y}{R} = \sin\alpha$,

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Тогда $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$ и

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

§ 10.3. Значения тригонометрических функций углов в 30°, 45° и 60°

1. *Найдем значения тригонометрических функций для угла 30°.*

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$ (рис. 272 *а*). $\sin A = \sin 30^\circ = \dfrac{a}{c}$, но $a = \dfrac{c}{2}$ по свойству катета, лежащего против угла в 30°.

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

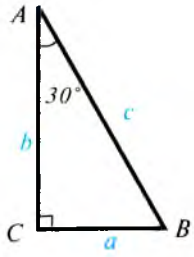


Рис. 272 *а*

В прямоугольном треугольнике ABC по теореме Пифагора вычислим катет b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4c^2 - c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда

$$\cos A = \cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}}$$

2. *Найдем значения тригонометрических функций для угла 60°.*

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$ (рис. 272 *б*).

Тогда

$$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos B = \cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2};$$

$$\boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

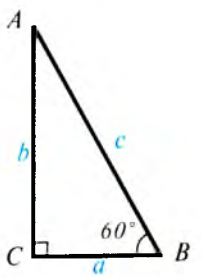


Рис. 272 *б*

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}.$$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Значения тригонометрических функций для угла 60° можно вычислить, используя формулы дополнительных углов: $\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$ и $\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ$.

3. *Найдем значения тригонометрических функций для угла 45°.*

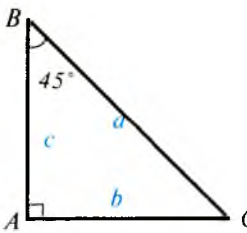


Рис. 272 *в*

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$ (рис. 272 *в*). Тогда и $\angle B = 45^\circ$, и поэтому катеты a и b равны между собой. По теореме Пифагора из ΔABC: $a^2 + a^2 = c^2$; $2a^2 = c^2$; $a^2 = \frac{c^2}{2}$, а тогда $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2} = b$.

Тогда

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c\sqrt{2}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{\frac{c\sqrt{2}}{2}}{\frac{c\sqrt{2}}{2}} = 1;$$

$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{b}{a} = 1;$$

$\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$

Все полученные значения оформим таблицей.

Углы / функц.	30°	45°	60°	90°	0°	180°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	−1
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	не сущ.

§ 10.4. Теорема косинусов

теорема

Во всяком треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

1-й случай: $\angle A$ — острый.

Дано: ΔABC (рис. 273).

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ или $(a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A)$.

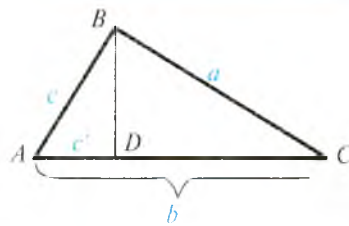


Рис. 273

Доказательство. По теореме о квадрате стороны, лежащей против острого угла:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc', \qquad (1)$$

где c' — проекция стороны AB на AC ($BD \perp AC$). Из прямоугольного треугольника ABD находим катет c':

$$c' = c \cdot \cos A \qquad (2)$$

(катет равен произведению гипотенузы на cos угла, прилежащего к этому катету). Подставив (2) в (1), получим $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

2-й случай: $\angle A$ — тупой.

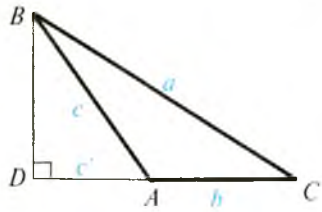


Рис. 274

Дано: ΔABC (рис. 274).

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$; $(a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A)$.

Доказательство. По теореме о квадрате стороны, лежащей против тупого угла, имеем:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2bc', \qquad (3)$$

где c' — проекция AB на AC ($BD \perp AC$). Из прямоугольного треугольника ABD: $\angle BAD = (180^\circ - \angle A)$, и тогда $c' = c \cdot \cos \angle BAD = c \cdot \cos (180^\circ - \angle A)$;

$$c' = -c \cdot \cos A \qquad (4)$$

(по формуле приведения $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$).

Подставим (4) в (3), получим: $a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos A)$, отсюда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

3-й случай: $\angle A$ — прямой.

Дано: ΔABC (рис. 275).

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

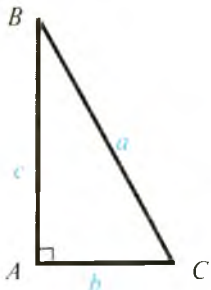


Рис. 275

Доказательство. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, или $a^2 = b^2 + c^2$, так как $\angle A = 90^\circ$, а $\cos 90^\circ = 0$, то $2bc \cdot \cos 90^\circ = 0$, следовательно, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ верно и для этого случая.

Итак, каков бы ни был угол треугольника (острый, тупой или прямой), верно равенство $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, а тогда верны и следующие равенства:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

§ 10.5. Теорема синусов

Лемма. В треугольнике отношение любой его стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру описанного около треугольника круга.

1-й случай: $\angle A$ – острый.

Дано: ΔABC; O – описанный круг; BD – диаметр; $BD = 2R$ (рис.276).

Доказать: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

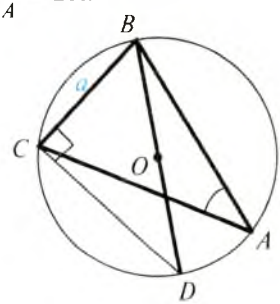


Рис. 276

Доказательство. Соединим точки C и D. Полученный ΔCBD – прямоугольный, т. к. $\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный в окружность и опирающийся на диаметр BD.

Из прямоугольного треугольника BCD: $BC = BD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin D$. Но $\angle D = \angle A$ как вписанные в окружность и измеряющиеся $\frac{1}{2} \cup BC$. Итак, $BC = 2R \sin A \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Теорема для острого угла ΔABC доказана.

2-й случай: $\angle A$ – тупой.

Дано: ΔABC – тупоугольный; O – описанный круг; BD – диаметр; $BD = 2R$ (рис. 277).

Доказать: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

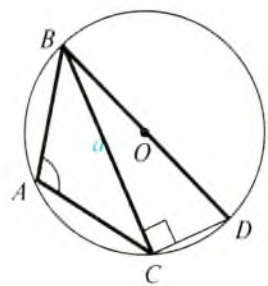


Рис. 277

Доказательство. Соединим точки C и D. Рассмотрим прямо-

угольный ΔBCD ($\angle BCD = 90^\circ$ как вписанный в окружность и опирающийся на диаметр окружности): $BC = BD \cdot \sin D = 2R \cdot \sin D$, но $\angle A + \angle D = 180^\circ$ как сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника. Тогда, $\sin D = \sin (180^\circ - A) = \sin A$ (по формуле приведения $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$). Тогда $BC = BD \cdot \sin A$, или $a = 2R \cdot \sin A$, а тогда $\frac{a}{\sin A} = 2R$, что и требовалось доказать.

3-й случай: $\angle A$ — прямой.

Дано: ΔABC — прямоугольный; O — описанный круг (рис. 278).

Доказать: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, или $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

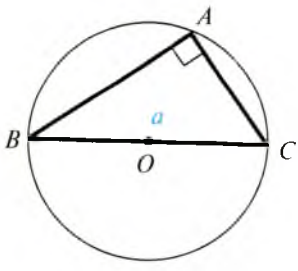


Рис. 278

Доказательство. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$ и, как вписанный в окружность, опирается на диаметр, т. е. $BC = 2R$, $a = 2R$, но $\sin A = \sin 90^\circ = 1$, а потому $a = 2R \cdot \sin A$, т. е. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Итак, теорема верна для произвольного угла.

теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

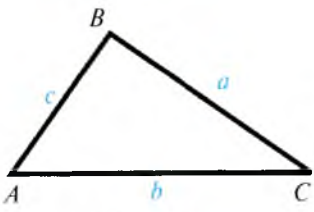


Рис. 279

Дано: ΔABC (рис. 279).

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Доказательство. По лемме для произвольного угла ΔABC отношение его стороны к синусу противолежащего

угла равно диаметру описанного круга, т. е. $\frac{a}{\sin A} = 2R$; $\frac{b}{\sin B} = 2R$; $\frac{c}{\sin C} = 2R$, а тогда $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. что и требовалось доказать.

§ 10.6. Теорема Стюарта

Английский математик *М. Стюарт* (1717—1785) опубликовал эту теорему в 1748 году в труде «Некоторые общие теоремы», где впервые ее доказал. Теорема Стюарта применяется при вычислении длин медиан и биссектрис треугольника.

теорема

Если A, B и C — вершины ΔABC, а точка D лежит между B и C, то имеет место соотношение $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$.

Дано: ΔABC; точка D лежит между B и C (рис. 280).

Доказать: $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$.

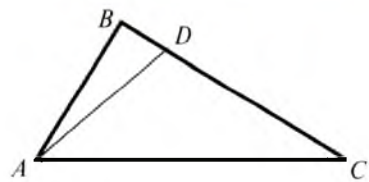


Рис. 280

Доказательство. Из треугольника ABD по теореме косинусов следует:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B. \qquad (1)$$

Из треугольника ABC по теореме косинусов следует:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B, \qquad (2)$$

отсюда $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$. Найденное значение $\cos B$ подставим в равенство (1):

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - \frac{2AB \cdot BD(AB^2 + BC^2 - AC^2)}{2AB \cdot BC}.$$

Преобразуем это выражение

$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot BC + BD^2 \cdot BC - BD \cdot AB^2 - BD \cdot BC^2 + BD \cdot AC^2$,

$AD^2 \cdot BC = AB^2(BC - BD) - BD \cdot BC(BC - BD) + BD \cdot AC^2$, но

$BD + CD = BC$, а тогда $BC - BD = CD$.

Подставим найденное значение в предыдущее равенство:

$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD - BD \cdot BC \cdot CD + BD \cdot AC^2$;

$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot BD \cdot CD$, что и требовалось доказать.

Следствие 1 (формулы для вычисления биссектрис треугольника). В треугольнике длина любой его биссектрисы (AD) вычисляется по формуле:

$$AD = \frac{\sqrt{AB \cdot AC(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)}}{AB + BC}, \text{ или } AD = \frac{\sqrt{bc(b + c + a)(b + c - a)}}{b + c},$$

где a, b, c — длины сторон ΔABC.

Дано: ΔABC; AD — биссектриса (рис. 281).

Доказать: $AD = \frac{\sqrt{bc(b + c + a)(b + c - a)}}{b + c}$.

Доказательство. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC: $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, тогда $\frac{BD}{BC - BD} = \frac{c}{b}$, или $\frac{BD}{a - BD} = \frac{c}{b}$.

Отсюда $b \cdot BD = ac - c \cdot BD$, и тогда $BD = \frac{ac}{b + c}$, а

$$CD = a - \frac{ac}{b + c} = \frac{ab + ac}{b + c} = \frac{ab}{b + c}.$$

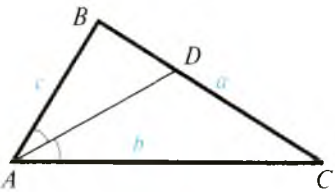


Рис. 281

По теореме Стюарта: $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot CD \cdot BD$. Подставим в нее значения CD и BD:

$$AD^2 \cdot a = c^2 \frac{ab}{b+c} + b^2 \frac{ac}{b+c} - a \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c}.$$

Преобразуем это выражение:

$$AD^2 = \frac{bc^2}{b+c} + \frac{b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc^2 + b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2) =$$

$$= \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Откуда $AD = \frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2 (формулы для вычисления медиан треугольника) В треугольнике длина любой его медианы AD вычисляется по формуле:

$$AD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2}, \quad \text{или} \quad AD = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2},$$

где a, b, c — длины сторон ΔABC.

Дано: ΔABC; AD — медиана (рис. 282).

Доказать: $AD = \frac{\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2}$, или

$$AD = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Поскольку AD — медиана, то $BD = DC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$. Подставив эти значения в теорему Стюарта, получим:

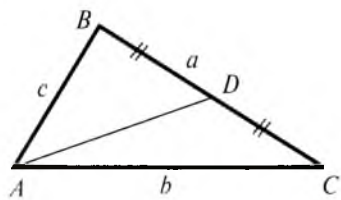


Рис. 282

$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot CD \cdot BD$, и тогда $AD^2 \cdot a = c^2 \cdot \frac{1}{2}a + b^2 \cdot \frac{1}{2}a - a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a$. Откуда $AD^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}a^2$ и $AD^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$, тогда

$$AD = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}, \qquad (1)$$

что и требовалось доказать.

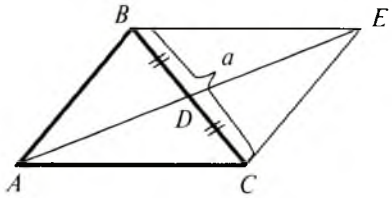


Рис. 283

Примечание: Формулу (3) можно получить, достроив ΔABC до параллелограмма $ABEC$, и воспользоваться теоремой о сумме квадратов диагоналей параллелограмма (рис. 283).

В параллелограмме $ABEC$, где $AE = 2AD$, имеем: $AE^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$, а тогда $(2AD)^2 + a^2 = 2c^2 + 2b^2$ и $4AD^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$, откуда $AD = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}$.

§ 10.7. Теорема Менелая и Чевы

Менелай Александрийский (I—II в. н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Ему принадлежат труды по сферической геометрии и тригонометрии.

Итальянский математик-геометр *Джованни Чева* доказал в 1678 году теорему, которая носит проективный характер и метрически двойственна теореме Менелая.

Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке; высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Существуют ли условия, при которых три прямые — AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, если A, B, C — вершины ΔABC, а точки A_1, B_1 и C_1 — произвольные точки, взятые на сторонах этого треугольника (или на их

продолжениях)? Ответ на этот вопрос дает теорема Чевы.

теорема

Если в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB или на их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника, и прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны, то $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$

1-й случай: AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

Дано: ΔABC; $A_1 \in BC$; $B_1 \in AC$; $C_1 \in AB$; O — точка пересечения AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 284).

Доказать: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1,$

или

Дано: ΔABC; $A_1 \in$ продолжению BC; $B_1 \in AC$; $C_1 \in$ – продолжению AB; O — точка пересечения AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 285).

Доказать: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$

Доказательство. Из точек A и O опустим перпендикуляры на сторону BC (или ее продолжение): $AD = h_1$ и $OE = h_2$.

Отношение площадей треугольников ABA_1 и AA_1C равно:

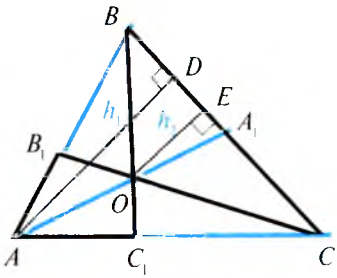


Рис. 284

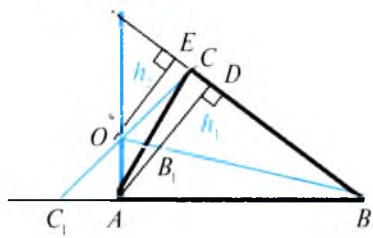


Рис. 285

$$\frac{S_{\Delta ABA_1}}{S_{\Delta AA_1C}} = \frac{\frac{1}{2} BA_1 \cdot h_1}{\frac{1}{2} A_1C \cdot h_1} = \frac{BA_1}{A_1C},$$ тогда $S_{\Delta ABA_1} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot S_{\Delta AA_1C}$;

$$\frac{S_{\Delta OBA_1}}{S_{\Delta OA_1C}} = \frac{\frac{1}{2} BA_1 \cdot h_2}{\frac{1}{2} A_1C \cdot h_2} = \frac{BA_1}{A_1C},$$ и тогда $S_{\Delta OBA_1} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot S_{\Delta OA_1C}$.

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{S_{\Delta ABA_1} - S_{\Delta OBA_1}}{S_{\Delta AA_1C} - S_{\Delta OA_1C}} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{S_{\Delta AA_1C} - S_{\Delta OA_1C}}{S_{\Delta AA_1C} - S_{\Delta OA_1C}} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Итак,

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AOC}}. \qquad (1)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABO}} \qquad (2)$$

и

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}. \qquad (3)$$

Перемножив равенства (1), (2) и (3), получим:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AOC}} \cdot \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta ABO}} \cdot \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}} = 1,$$

когда три прямые BB_1, AA_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

2-й случай: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

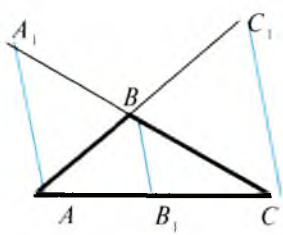


Рис. 286

Дано: ΔABC; $B_1 \in AC$; $C_1 \in$ продолжению стороны AB; $A_1 \in$ продолжению стороны BC; $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ (рис. 286).

Доказать: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$.

Доказательство. По лемме о подобии: $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (т. к.

$BB_1 \parallel AA_1$). Из подобия треугольников следует: $\frac{CB}{A_1C} = \frac{CB_1}{AC}$. По свойству пропорций: $\frac{A_1C - CB}{A_1C} = \frac{AC - CB_1}{AC}$, откуда

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{B_1A}{AC}. \qquad (1)$$

Стороны $\angle A_1CA$ пересечены параллельными прямыми $BB_1 \parallel AA_1$, а тогда стороны этого угла рассекаются на пропорциональные отрезки, т. е.

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB}{BA_1}. \qquad (2)$$

$\Delta ABB_1 \sim \Delta AC_1C$ по лемме о подобии, т. к. $BB_1 \parallel CC_1$. Из подобия этих треугольников: $\frac{AC_1}{BA} = \frac{AC}{B_1A}$. По свойству пропорций $\frac{AC_1}{AC_1 - BA} = \frac{AC}{AC - B_1A}$, а тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB_1}. \qquad (3)$$

Перемножив равенства (1), (2) и (3), получим $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{AC} \cdot \frac{CB}{BA_1} \cdot \frac{AC}{CB_1} = \frac{B_1A \cdot CB}{BA_1 \cdot CB_1}$. Из равенства (2) по основному свойству пропорции: $CB_1 \cdot BA_1 = B_1A \cdot CB$, а потому $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CB_1 \cdot BA_1}{CB_1 \cdot BA_1} = 1$, и в случае, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 — параллельны, что и требовалось доказать.

теорема обратная

Если в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника, и выполняется условие $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Дано: ΔABC; $A_1 \in BC$; $B_1 \in AC$; $C_1 \in AB$ (рис.287).

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1. \qquad (1)$$

Доказать: AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O либо $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

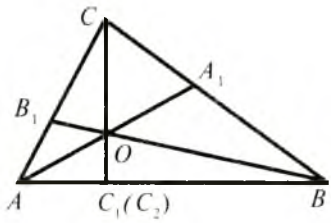


Рис. 287

Доказательство. Пусть прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O.

Проведем прямую через точки C и O и точку пересечения CO с AB обозначим через C_2. Тогда по теореме Чевы:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} = 1. \qquad (2)$$

Сравнивая равенство (1) и (2), заключаем, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}. \qquad (3)$$

Обозначим это отношение λ, и тогда

$$AC_2 = \lambda C_2B \qquad (4)$$

и

$$AC_1 = \lambda C_1B. \qquad (5)$$

Вычитая из равенства (4) равенство (5), получим $AC_2 - AC_1 = \lambda(C_2B - C_1B)$, или

$$C_1C_2 = \lambda(C_2C_1). \qquad (6)$$

Это равенство возможно при $\lambda = 1$, но тогда $AC_1 = C_1B$, а следовательно, C_1 — середина стороны AB (а тогда CC_1 — медиана треугольника ABC), что противоречит условию теоремы, поскольку C_1 — произвольная точка на стороне BC. Тогда из равенства (6) при $\lambda \neq 1$ следует, что длина отрезка $C_1C_2 = O$, т.е. точки C_1 и C_2 — совпадают. А тогда получаем, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Аналогично дока-

зывается, что если $AA_1 \parallel BB_1$, то $CC_1 \parallel BB_1$, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы Чевы доказываются следующие утверждения:

a) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

b) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

c) высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

теорема

Менелая

Если в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB (или на их продолжениях) взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника и эти точки лежат на одной прямой, то

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1 \ .$$

Дано: ΔABC; точка $A_1 \in$ продолжению стороны BC; $C_1 \in AB$; $B_1 \in AC$; A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (рис. 288).

Доказать: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$.

Доказательство. На прямой, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1, выбираем произвольную точку O и через нее проводим прямую a, параллельную AC,

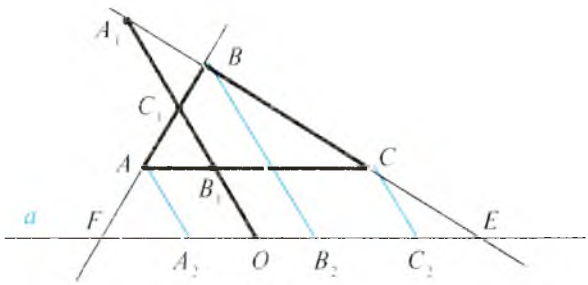


Рис. 288

а через вершины треугольника ABC прямые, параллельные прямой A_1C_1 и пересекающие прямую a в точках A_2, B_2 и C_2. Стороны угла A_1EF пересечены параллельными прямыми BB_2 и A_1O, и тогда $\frac{BA_1}{BC} = \frac{B_2O}{B_2C_2}$, а по свойству пропорций $\frac{BA_1}{BA_1 + BC} = \frac{B_2O}{B_2O + B_2C_2}$, и потому

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{B_2O}{OC_2}. \qquad (1)$$

Аналогично, стороны угла BFE пересечены параллельными прямыми C_1O и BB_2, а потому

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{A_2O}{OB_2}. \qquad (2)$$

Справедлива и пропорция

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{C_2O}{OA_2} \qquad (3)$$

(т. к. $AC \parallel a$ и $AA_2 \parallel CC_2 \parallel B_1O$). Перемножая равенства (1), (2) и (3), получим: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{B_2O}{OC_2} \cdot \frac{A_2O}{OB_2} \cdot \frac{C_2O}{OA_2} = 1$.

Итак, $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$, что и требовалось доказать.

теорема обратная

Если в треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB (или на их продолжениях) взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника ABC, такие, что $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$, то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Доказательство этой теоремы полностью совпадает с доказательством обратной теоремы Чевы. Используя теорему Менелая, можно доказать, что:

а) основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки, описанной около треугольника ок-

ружности, к прямым, содержащим стороны треугольника, лежат на одной прямой;

b) середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой, проходящей через середины диагоналей.

Вопросы для самопроверки

1. Если ΔABC — прямоугольный с гипотенузой AB, то какое из этих отношений $\frac{AC}{BC}; \frac{AC}{AB}; \frac{BC}{AB}; \frac{BC}{AC}$ является a) $\sin A$; b) $\cos A$; c) $\sin B$; d) $\cos B$; e) $\operatorname{tg} A$; f) $\operatorname{ctg} A$; k) $\operatorname{tg} B$; l) $\operatorname{ctg} B$?
2. Как зависят значения тригонометрических функций $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{ctg} A$ от длины сторон прямоугольных треугольников при неизменной величине угла A?
3. Как изменяются значения $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{ctg} A$ с изменением величины угла A: a) с увеличением $\angle A$; b) с уменьшением $\angle A$?
4. Как найти катет прямоугольного треугольника при известной гипотенузе и величине одного из острых углов?
5. Как находится катет прямоугольного треугольника при известном втором катете и величине одного из острых углов?
6. При каких данных возможно нахождение гипотенузы прямоугольного треугольника?
7. При каких значениях углов α и β совпадают $\sin \alpha$ и $\cos \beta$?
8. При каких значениях углов α и β совпадают $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \beta$?
9. Что больше: a) $\sin 40^\circ$ или $\sin 25^\circ$; b) $\cos 37^\circ$ или $\cos 60^\circ$; c) $\operatorname{tg} 3^\circ$ или $\operatorname{tg} 48^\circ$?
10. Что больше: синус или тангенс одного и того же острого угла?
11. Что больше: косинус или котангенс одного и того же угла?

12. Всегда ли возможно найти сторону треугольника по известным двум другим сторонам и одному из углов?

13. Для каких острых углов верны неравенства:

a) $\operatorname{tg}\alpha < 1$; b) $\operatorname{tg}\alpha > 1$; c) $\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{3}$; d) $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

14. Для каких острых углов верны неравенства:

a) $\sin\alpha < \frac{1}{2}$; b) $\sin\alpha > \frac{1}{2}$; c) $\sin\alpha > 1$; d) $\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$?

15. Для каких острых углов верны неравенства:

a) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos\alpha < \frac{1}{2}$; e) $\cos\alpha > 1$?

16. Справедлива ли теорема косинусов для: a) остроугольного треугольника; b) тупоугольного треугольника; c) прямоугольного треугольника?

17. Какая зависимость существует между сторонами произвольного треугольника и диаметром круга, описанного около этого треугольника?

18. Возможно ли нахождение двух сторон треугольника, если известна одна сторона этого треугольника и какие-либо два его угла?

19. Справедлива ли теорема синусов для: a) остроугольного треугольника; b) тупоугольного треугольника; c) прямоугольного треугольника?

20. Сформулировать теорему Стюарта.

21. Для нахождения каких элементов треугольника применяется теорема Стюарта?

22. Сформулировать теорему Менелая.

23. В чем состоит применение теоремы Менелая?

24. Сформулировать теорему Чевы.

Тест №10

1. Вычислить: $\dfrac{4 - 2\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ}{3\sin 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4\operatorname{ctg}45^\circ}$.

A) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$; B) $\frac{3}{5}$; C) $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$; D) $\frac{3}{4}$; E) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

2. Вычислить: $\frac{4-\operatorname{tg}^2 45^\circ+\operatorname{ctg}^4 60^\circ}{2\sin^3 90^\circ-4\cos^2 60^\circ+4\operatorname{ctg} 45^\circ}$.

A) $\frac{26}{45}$; B) $\frac{28}{45}$; C) $\frac{29}{45}$; D) $\frac{5}{9}$; E) $\frac{3}{5}$.

3. Вычислить: $(4\sin 45°)^2-(2\operatorname{tg} 30°)^2-(2\cos 30°)^4-(2\operatorname{ctg} 45°)^2$.

A) $-6\frac{1}{2}$; B) $6\frac{1}{3}$; C) $-6\frac{1}{3}$; D) $6\frac{1}{2}$; E) $-6\frac{2}{3}$.

4. Вычислить: $\frac{(2a\cos 60^\circ)^3-(b\operatorname{ctg} 45^\circ)^3+(3ab\sin 0^\circ)^2}{(15a\cos 90^\circ)^m+2a\sin 30^\circ-2b\cos^2 45^\circ}$.

A) $\frac{a^3-b^3+9a^2b^2}{a-b}$; B) $\frac{a^3-b^3}{2a-b}$; C) a^2+ab+b^2;

D) a^2-ab+b^2; E) $\frac{a^3-b^3}{a-2b}$.

5. В прямоугольном треугольнике один катет равен 8 см, а синус противолежащего угла равен 0,8. Найти гипотенузу и второй катет.

A) 10 и 6 см; B) 6,4 и 6 см; C) 10 и 6,4 см; D) 10 и 8 см; E) правильный ответ не указан.

6. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найти катеты и их проекции на гипотенузу.

A) $c\cdot\sin\alpha$; $c\cdot\cos\alpha$; $c\cdot\sin^2\alpha$; $c\cdot\cos^2\alpha$; B) $c\cdot\operatorname{tg}\alpha$; $c\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; $c\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$; $c\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha$; C) $c\cdot\sin\alpha$; $c\cdot\cos\alpha$; $c\cdot\sin\alpha\cos\alpha$; $c\cdot\sin\alpha\cos\alpha$; D) $c\cdot\operatorname{tg}\alpha$; $c\cdot\operatorname{ctg}\alpha$; $c\cdot\sin\alpha$; $c\cdot\cos\alpha$; E) правильный ответ не указан.

7. В прямоугольном треугольнике известен катет a и противолежащий ему угол α. Найти второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.

A) $90°-\alpha$; $a\cdot\operatorname{tg}\alpha$; $\frac{a}{\sin\alpha}$; B) $90°-\alpha$; $a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

$a \cdot \sin a$; C) $180^\circ - a$; $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\frac{a}{\sin\alpha}$; D) $90^\circ - a$; $a \cdot \operatorname{ctg} a$; $\frac{a}{\sin\alpha}$; E) $90^\circ - a$; $a \cdot \operatorname{tg} a$; $a \cdot \sin a$.

8. Известно основание a равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти боковую сторону.

A) $a\sqrt{2}$; B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; E) $\frac{a}{2}$; F) $a\sqrt{3}$.

9. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и углом 60° найти катет, противоположный этому углу.

A) $a\sqrt{2}$; B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; C) $\frac{\sqrt{2}a}{2}$; D) $\frac{a}{2}$; E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

10. В треугольнике один из углов при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 и 21 см. Найти бо́льшую боковую сторону.

A) 29 или 30 см; B) 29 или $\sqrt{882}$ см; C) 30 или 32 см; D) 29 или 28 см; E) 30 или $\sqrt{882}$ см.

11. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найти другие стороны треугольника.

A) $\sqrt{3}-1;\ \sqrt{3}+1$; B) $\sqrt{3}-2;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

C) $\sqrt{3}-2;\ \sqrt{3}+2$; D) $\sqrt{3}-1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

E) $\sqrt{3}-1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

12. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найти углы между диагоналями.

A) 30° и 150°; B) 60° и 120°; C) 45° и 135°; D) 90° и 90°; E) 40° и 140°.

13. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найти углы ромба.

A) 30°, 30°, 150°, 150°; B) 45°, 45°, 135°, 135°;

C) 60°, 60°, 120°, 120°; D) 40°, 40°, 140°, 140°; E) 50°, 50°, 130°, 130°.

14. Указать равенства, в которых угол α больше угла β: 1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\beta = \frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$; $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$; $\cos\beta = 0{,}74$.

A) 1; 3; 4; B) 1; 3; C) 1; D) 1; 4; E) 2; 3; 4.

15. Указать равенства, в которых угол β больше угла α: 1) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}1$; $\operatorname{tg}\beta = 2{,}5$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = 3{,}4$; $\operatorname{ctg}\beta = 1{,}9$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{8}{15}$.

A) 1; 3; 4; B) 1; 4; C) 1; 2; D) 1; 2; 4; E) 2; 3; 4.

16. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найти основание треугольника.

A) $\frac{h}{\sin\frac{\beta}{2}}$; B) $\frac{h}{2\sin\beta}$; C) $\frac{2h}{\cos\frac{\beta}{2}}$; D) $\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$; E) $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

17. Длины сторон треугольника m, n и k связаны зависимостью $m^2 = n^2 + k^2 + \sqrt{2}\,nk$. Чему равен угол, лежащий против стороны, длина которой равна m?

A) 45°; B) 150°; C) 120°; D) 90°; E) 135°.

18. В треугольнике ABC медиана AD со стороной AB составляет угол 30°, а со стороной AC угол 60°. Найти AC, если $AB = \sqrt{3}$.

A) 1; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $1\frac{1}{2}$; E) $1\frac{1}{3}$.

19. Вычислить синус внутреннего угла правильного восьмиугольника.

A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $-\frac{1}{2}$; C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{1}{2}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. На сколько градусов поворачивается минутная стрелка часов за 9 минут?

A) 15°; B) 30°; C) 25°; D) 54°; E) 60°.

21. Два угла треугольника равны 45° и 75°, средняя по длине сторона равна $3\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

A) $\sqrt{3}$; B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; C) 3; D) $\sqrt{6}$; E) 2.

22. У вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ $\angle A = 120°$; $CB = 3$; $CD = 7$. Найти диагональ BD.

A) $11\sqrt{2}$; B) $\sqrt{21}$; C) $\sqrt{58}$; D) $\sqrt{37}$; E) $10\sqrt{3}$.

23. Длины сторон треугольника a, b и c находятся в зависимости $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$. Чему равен угол, лежащий против стороны a?

A) 135°; B) 140°; C) 125°; D) 150°; E) 120°.

24. Два угла треугольника равны 75° и 60°, а меньшая его сторона равна $2\sqrt{2}$. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

A) $\sqrt{2}$; B) 2; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) 1.

25. Известно, что $m > n > 0$. Какое из следующих утверждений верно, если стороны треугольника имеют длины $a = m^2 + n^2$; $b = m^2 - n^2$; $c = 2mn$?

A) треугольник остроугольный;
B) треугольник тупоугольный;
C) треугольник прямоугольный;
D) треугольник равнобедренный с углами при основании, не равными 45°;
E) треугольник равносторонний.

26. В треугольнике ABC стороны $AB = 3$; $BC = 4$; $\cos B = \frac{2}{3}$. Найти сторону AC.

A) 2; B) 4; C) 6; D) 3; E) 1.

27. В треугольнике ABC: $\angle A = 30^\circ$; $AB = \sqrt{3}$ и $AC = 4$. Найти высоту, опущенную из вершины угла A.

A) $\frac{3}{7}\sqrt{21}$; B) $\frac{2}{7}\sqrt{21}$; C) $\frac{4}{7}\sqrt{21}$; D) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; E) $\frac{1}{2}\sqrt{21}$.

28. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, а угол при вершине равен 2α. Какому из указанных выражений равен радиус окружности, вписанной в этот треугольник?

A) $b \cdot \sin\alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$; B) $b \cdot \cos\alpha \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$;

C) $b \cdot \sin\alpha \operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$; D) $b \cdot \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2}$;

E) $b \cdot \cos\alpha \operatorname{ctg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$.

29. Стороны треугольника равны 3, 5 и 6. Найти косинус угла, лежащего против стороны, равной 5.

A) $-\frac{1}{2}$; B) $\frac{5}{18}$; C) $\frac{5}{9}$; D) $\frac{1}{2}$; E) $\frac{4}{9}$.

30. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5. Сторона $AB = 5$, высота $BD = 4$. Найти сторону BC.

A) 4,5; B) 8; C) 6; D) 10; E) 5,6.

Глава 11

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 11.1. Построение правильных многоугольников

Определение. *Многоугольник называется* ***правильным,*** *если*

1) все его стороны равны между собой,

2) все его углы равны между собой.

Примерами правильных многоугольников, уже известных, являются равносторонний треугольник и квадрат. Существование других правильных многоугольников и способ их построения доказывается с помощью следующих теорем.

теорема

Если окружность разделена на несколько равных частей (больше двух), то:

1) соединив хордами каждые две соседние точки деления, получим правильный вписанный многоугольник;

2) проведя через точки деления касательные и продолжив каждую из них до взаимного пересечения с касательными соседних точек деления, получим правильный описанный многоугольник.

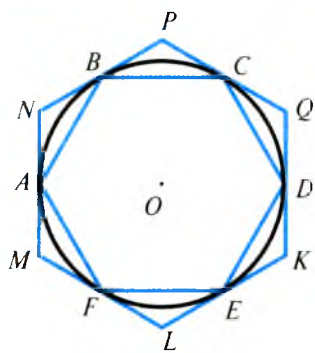


Рис. 289

Дано: O — окружность; $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup EF = \cup AF$; AB, BC, CD, DE, EF, AF — хорды; MAN, NBP, PCQ, QDK, KEL, LFM — касательные (рис. 289).

Доказать: 1) $ABCDEF$ — правильный вписанный многоугольник;

2) $MNPQKL$ — правильный описанный многоугольник.

Доказательство. 1) Хорды $AB = BC = CD = DE = EF = AF$, так как стягивают равные дуги $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup EF = \cup AF$; $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$ как вписанные в окружность углы, опирающиеся на равные дуги (каждая из этих дуг равна разности всей окружности и двух равных между собой дуг: $\angle A = 360^\circ - (\cup AF + \cup AB)$; $\angle B = 360^\circ - (\cup AB + \cup BC)$; $\angle C = 360^\circ - (\cup BC + \cup CD)$ и т. д. $\angle F = 360^\circ - (\cup EF + \cup AF)$.

Итак, многоугольник $ABCDEF$ — правильный, так как все его углы и все его стороны равны между собой.

2) Рассмотрим треугольники: ANB; BPC; CQD; DKE; ELF; AMF: их основания равны между собой: $AB = BC = CD = DE = EF = AF$ по доказанному. Эти треугольники равны по второму признаку, так как все углы этих треугольников равны между собой как углы, составленные касательными и хордами и измеряющиеся половиной равных дуг $\cup AB$; $\cup BC$; $\cup CD$; $\cup DE$; $\cup EF$ и $\cup AF$, т. е. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = \angle 7 = \angle 8 = \angle 9 = \angle 10 = \angle 11 = \angle 12$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle N = \angle P = \angle Q = \angle K = \angle L = \angle M$ и стороны их равны, а поскольку эти треугольники равнобедренные (углы при их основаниях равны), то равны и все стороны: $AN = NB = BP = PC = CQ = QD = DK = KE = EL = LF = FM = MA$, а тогда $MN = NP = PQ = QK = KL = LM$. Значит, многоугольник $MNPQKL$ — правильный, поскольку все его стороны и все углы равны между собой, что и требовалось доказать.

теорема обратная

Если многоугольник правильный, то

1) около него можно описать окружность;

2) в него можно вписать окружность.

Дано: $ABCDE$ — правильный многоугольник (рис. 290).

Доказать: 1) около $ABCDE$ можно описать окружность; 2) в $ABCDE$ можно вписать окружность.

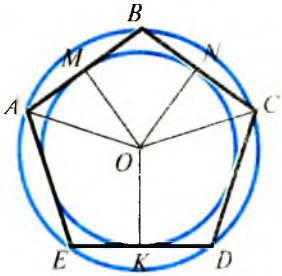


Рис. 290

Доказательство 1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность, а потому через три вершины правильного многоугольника A, E и D проведем окружность, центром которой будет точка O. Докажем, что эта окружность пройдет через точку C (а затем и через точку B). Соединим точку O с точками A и C и опустим из точки O перпендикуляр к стороне ED. Тогда $EK = KD$, так как диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду пополам.

Повернем четырехугольник $AEKO$ вокруг перпендикуляра OK так, чтобы он совпал с четырехугольником $OKDC$. Вследствие равенства прямых углов $\angle EKO$ и $\angle OKD$ сторона EK пойдет по стороне KD, а из того, что $EK = KD$, точки E и D совместятся. Вследствие равенства $\angle E = \angle D$ (в правильных многоугольниках углы равны) сторона EA пойдет по DC и совместится с ней, так как $EA = DC$ (в правильных многоугольниках все стороны равны).

Итак, точки A и C совмещаются, значит $OA = OC$, но OA — радиус окружности O, а тогда OC также радиус окружности, отсюда следует, что точка C тоже принадлежит окружности. Теперь окружность O проходит через три точки: E, D и C. Аналогично можно доказать, что эта окружность пройдет и через четвертую точку B, и тогда все вершины правильного многоугольника $ABCDE$ лежат на окружности, откуда следует, что этот многоугольник вписан в окружность.

Доказательство 2. Правильный многоугольник $ABCDE$ вписан в окружность O, тогда все его стороны — хорды данной окружности, а так как все эти хорды равны между собой: $AB = BC = CD = DE = AE$

(так как многоугольник правильный), то эти хорды равноудалены от центра O окружности, т.е. $OK = OM = ON = OP = OQ$. Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом OK будет вписанной в многоугольник $ABCDE$, что и требовалось доказать.

Следовательно, в правильный многоугольник можно вписать окружность. Две окружности — описанная около правильного многоугольника и вписанная в него имеют общий центр — точку O. Точка O равноудалена от всех вершин многоугольника $ABCDE$, а тогда она должна лежать на перпендикуляре, проведенном к любой стороне этого многоугольника через середину стороны. Точка O равноудалена и от всех сторон многоугольника $ABCDE$, а потому должна лежать на биссектрисе любого угла многоугольника.

Значит, для нахождения центра окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, достаточно найти точку пересечения двух перпендикуляров, проведенных через середины двух любых сторон этого многоугольника, или точку пересечения любых двух биссектрис углов многоугольника, или же точку пересечения одного перпендикуляра и одной биссектрисы.

Следствие 1. Перпендикуляры, проведенные через середины сторон правильного многоугольника, являются его осями симметрии.

Следствие 2. Биссектрисы всех углов правильного многоугольника являются его осями симметрии.

Определение. ***Центром правильного многоугольника*** *называется общий центр окружностей, описанной около этого многоугольника и вписанной в него.*

Определение. ***Апофемой*** *называется радиус вписанной в правильный многоугольник окружности.*

Определение. ***Центральным углом многоугольника*** *называется угол, образованный двумя радиусами,*

проведенными к концам любой стороны правильного многоугольника.

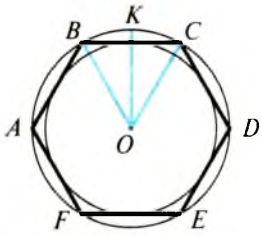


Рис. 291

На рисунке 291 изображены: правильный многоугольник $ABCDEF$; вписанная и описанная окружности с центром O; OK – апофема ($OK \perp BC$); OB и OC – радиусы $\angle BOC$ – центральный.

Количество центральных углов в правильном многоугольнике равно количеству его сторон; все эти углы равны между собой, так как измеряются равными дугами.

Сумма всех центральных углов равна 360°, а каждый из них равен $\frac{360^\circ}{n}$, $\angle BOC = \frac{360^\circ}{n}$, где n – число сторон многоугольника.

Так как сумма всех внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$, а все углы правильного n-угольника равны между собой, то величина каждого из этих углов:

$$\angle A = \angle B = \ldots = \angle F = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

§ 11.2. Подобие правильных одноименных многоугольников

теорема

Правильные одноименные многоугольники подобны и стороны их относятся как радиусы или как апофемы.

Дано: $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильные многоугольники; O и O_1 – центры; $AO = R$; $A_1O_1 = R_1$; $OK = r$; $O_1K_1 = r_1$ (рис. 292).

Доказать: 1) $ABCDEF \sim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

2) $\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$, где R и R_1 – ради-

усы описанных окружностей AO и A_1O_1; r и r_1 — апофемы OK и O_1K_1.

Доказательство 1. Из того, что многоугольники правильные, следует: $AB = BC = CD = DE = EF = AF$ и $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1$, а тогда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \frac{AF}{A_1F_1}$. Так как многоугольники правильные и одноименные, то все их углы равны между собой и каждый равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Итак, $ABCDEF \backsim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, так как стороны их пропорциональны и углы равны.

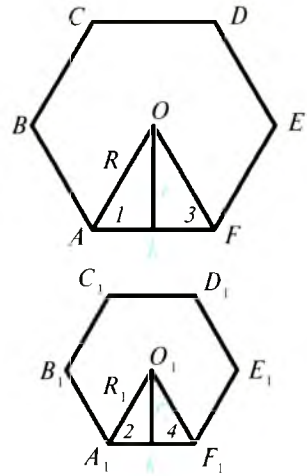


Рис. 292

Доказательство 2. Равнобедренные треугольники AOF и $A_1O_1F_1$, подобны, так как $OA = OF = R$; $O_1A_1 = O_1F_1 = R_1$, и поскольку центральные углы $\angle AOF$ и $A_1O_1F_1$ равны $\frac{360^\circ}{n}$, то и $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Итак, $\Delta AOF \backsim \Delta A_1O_1F_1$, по первому признаку подобия треугольников. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{AO}{A_1O_1}, \text{ или } \frac{AF}{A_1F_1} = \frac{R}{R_1}.$$

OK и O_1K_1 — высоты подобных треугольников, а они относятся как сходственные стороны, т. е. $\frac{r}{r_1} = \frac{AF}{A_1F_1}$. Итак, $\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Периметры правильных одноименных многоугольников относятся как радиусы или как апофемы.

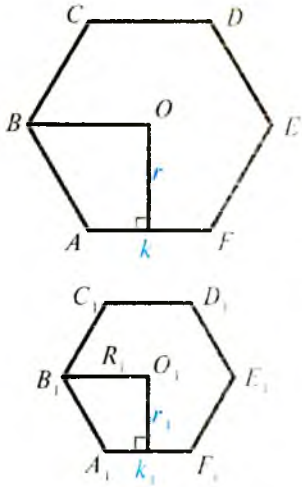


Рис. 293

Дано: $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные многоугольники; O и O_1 — центры; $OB = R$; $O_1B_1 = R_1$; $OK = r$; $O_1K_1 = r_1$ (рис. 293).

Доказать: $\frac{P_{ABCDEF}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$.

Доказательство. Правильные многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ подобны. А периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны. $\frac{P_{ABCDEF}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{AF}{A_1F_1}$, но по предыдущей теореме $\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$, а потому $\frac{P_{ABCDEF}}{P_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1}$. Следствие доказано.

§ 11.3. Выражение сторон правильных многоугольников через радиусы вписанной и описанной окружностей

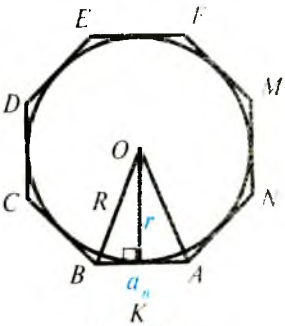


Рис. 294

Пусть AB, равная a_n, — сторона правильного n-угольника; $AO = R$ — радиус описанной окружности; $OK = r$ — апофема (рис. 294).

Выразим $AB = a_n$ через R и r.

Центральный угол $AOB = \frac{360^\circ}{n}$, а в равнобедренном ΔAOB ($AO = OB = R$) высота OK является

медианой и биссектрисой, а потому $AK = \frac{a_n}{2}$, $\angle AOK = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180^\circ}{n}$. Из прямоугольного ΔAOK: $\frac{a_n}{2} = R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}$, а тогда

$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} \qquad (1)$$

и $\frac{a_n}{2} = r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, и тогда

$$a_n = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}. \qquad (2)$$

При $n = 3$, $n = 4$ и $n = 6$ можно найти стороны n-угольников, не прибегая к использованию таблиц тригонометрических функций.

1. $n = 3$, т. е. a_3 — сторона правильного треугольника. Из формул (1) и (2)

$$a_3 = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{3} = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3};$$

$$a_3 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{3} = 2r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2r\sqrt{3}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_3 = R\sqrt{3}; \\ a_3 = 2r\sqrt{3}. \end{array}}$$

2. $n = 4$, т. е. a_4 — сторона правильного четырехугольника, т.е. квадрата. Из формул (1) и (2)

$$a_4 = 2R \cdot \sin\frac{180}{4} = 2R \cdot \sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2};$$

$$a_4 = 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{4} = 2r \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 2r \cdot 1 = 2r.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_4 = R\sqrt{2}; \\ a_4 = 2r. \end{array}}$$

3. $n = 6$, т. е. a_6 — сторона правильного шестиугольника. Из формул (1) и (2)

$$a_6 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \cdot \sin 30^\circ = 2R \cdot \frac{1}{2} = R;$$

$$a_6 = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{6} = 2r \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

$$a_6 = R;$$
$$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Является ли многоугольник правильным, если все его стороны равны между собой?
2. Является ли многоугольник правильным, если все его углы равны между собой?
3. Какой треугольник является правильным?
4. Какой четырехугольник является правильным?
5. Всегда ли правильный многоугольник можно вписать в окружность?
6. Около любого ли правильного многоугольника можно описать окружность?
7. Могут ли окружности, вписанная в правильный многоугольник и описанная около него, иметь общий центр?
8. Как найти центры этих окружностей?
9. Всегда ли подобны два правильных многоугольника?
10. Чему равны внутренний, внешний и центральный углы правильного n-угольника?
11. Чему равно отношение сторон правильных одноименных многоугольников?
12. Как относятся периметры правильных одноименных многоугольников?
13. Как выражается сторона правильного n-угольника: через радиус вписанной или через радиус описанной около него окружности?
14. Как вычисляется сторона правильного шестиугольника: через радиус вписанной или через радиус описанной окружности?

15. По каким формулам вычисляется сторона квадрата: через радиус вписанной или через радиус описанной окружности?

16. По каким формулам вычисляется сторона правильного треугольника: через радиус вписанной или через радиус описанной окружности?

17. Сколько осей симметрии имеет правильный: a) пятиугольник; b) шестиугольник?

18. Равны ли углы многоугольника, вписанного в окружность, если все его стороны равны?

19. Равны ли стороны многоугольника, вписанного в окружность, если все его углы равны между собой?

20. Чему равен угол между двумя несмежными сторонами правильного шестиугольника?

21. Выразить апофемы правильного треугольника, квадрата и шестиугольника через: a) радиус описанной окружности; b) его сторону.

22. Как относятся диаметры двух окружностей: вписанной в квадрат и описанной около него?

23. Чему равна сумма центрального угла и угла при вершине правильного n-угольника?

24. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внутренних углов его равен: a)135°; b)150°?

25. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен: a) 36°; b) 18°; c) 24°?

Тест № 11

1. Разность между радиусами окружностей: описанной около правильного треугольника и вписанной в него, равна m. Определить сторону треугольника.

A) $m\sqrt{3}$; B) $2m\sqrt{3}$; C) $\frac{2m}{\sqrt{3}}$; D) $\frac{m}{\sqrt{3}}$; E) $2m$.

2. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус круга, описанного около него, равен R. Определить радиус вписанного круга.

A) $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$; B) $\sqrt{R^2-a^2}$; C) $\sqrt{2R^2-a^2}$;

D) $\frac{1}{2}\sqrt{R^2-a^2}$; E) $\sqrt{3R^2-a^2}$.

3. Определить сторону правильного многоугольника, если радиусы вписанного и описанного около него кругов равны соответственно r и R.

A) $2\sqrt{r^2-R^2}$; B) $2\sqrt{R^2-\frac{r^2}{4}}$; C) $\sqrt{2R^2-r^2}$;

D) $2\sqrt{R^2-r^2}$; E) $\sqrt{R^2-r^2}$.

4. Чему равна сторона правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиуса R?

A) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; B) $R\sqrt{2}$; C) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$; D) $R\sqrt{5}$;

E) $2R\sqrt{2}$.

5. По данной стороне a правильного n-угольника определить его апофему, если: a) $n=3$; b) $n=4$; c) $n=6$.

A) $a\sqrt{3}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{8}$; C) $a\sqrt{2}$; $\frac{a}{2}$;

$\frac{a\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; E) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; a; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник и середины его сторон последовательно соединены. Определить сторону нового шестиугольника.

A) $R\sqrt{3}$; B) $R\sqrt{2}$; C) $\frac{3R}{2}$; D) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

7. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна b. Найти радиус круга и сторону вписанного в эту окружность квадрата.

A) $\frac{b\sqrt{3}}{3}$; $\frac{b\sqrt{6}}{3}$; B) $b\sqrt{3}$; $b\sqrt{6}$; C) $\frac{b\sqrt{3}}{2}$; $\frac{b\sqrt{6}}{2}$; D) $2b$;

$2b\sqrt{2}$; E) $\frac{2b\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2b\sqrt{6}}{3}$.

8. По данному радиусу R определить длину хорды дуги, которая равна 135°.

A) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; B) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; C) $R\sqrt{3}$; D) $2R\sqrt{2}$; E) $R\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

9. Найти радиусы окружностей: описанной около правильного треугольника и вписанной в него, если разность их радиусов равна 6 см.

A) 9 и 3 см; B) 12 и 6 см; C) 10 и 4 см; D) $12\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$ см; E) 8 и 2 см.

10. Найти отношение диаметров окружностей: вписанной в правильный треугольник и описанной около него.

A) 1 : 3; B) 2 : 3; C) 1 : 2; D) 2 : 1; E) 3 : 1.

11. Вокруг квадрата со стороной a описана окружность, а около окружности описан правильный треугольник. Определить сторону треугольника.

A) $2a\sqrt{6}$; B) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; C) $2a\sqrt{3}$; D) $a\sqrt{6}$; E) $a\sqrt{5}$.

12. Чему равны внутренний, внешний и центральный угол правильного шестиугольника?

A) 120°; 60°; 60°; B) 60°; 120°; 60°; C) 60°; 100°; 60°; D) 120°; 60°; 120°; E) 60°; 60°; 120°.

13. Найти отношение апофемы к радиусу правильного: a) треугольника; b) квадрата; c) шестиугольника.

A) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{3}$; D) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Найти отношение периметров правильного вписанного и описанного около круга радиуса R шестиугольника.

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B) $\sqrt{3}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

15. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен 1,5 см. Найти радиус описанной окружности.

A) 1,6 см; B) 1,7 см; C) $\sqrt{3}$ см; D) 2 см; E) $\sqrt{2}$ см.

16. Биссектриса правильного треугольника равна 21 см. Чему равен радиус круга, вписанного в этот треугольник?

A) 10 см; B) 12 см; C) 7 см; D) 8 см; E) 14 см.

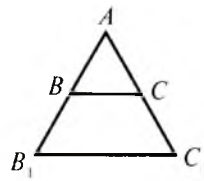
17. Найти радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 81 см.

A) $27\sqrt{3}$ см; B) $28\sqrt{3}$ см; C) $23\sqrt{3}$ см; D) $24\sqrt{3}$ см; E) $25\sqrt{3}$ см.

18. Высота правильного треугольника равна 18 см. Чему равен радиус круга, описанного около этого треугольника?

A) 8 дм; B) 9 дм; C) 13 дм; D) 12 дм; E) 10 дм.

19. Периметр равностороннего ΔABC равен 3 дм. Найти периметр ΔAB_1C_1, если $AB_1 = 2AB$ и $AC_1 = 2AC$.



A) 5 дм; B) 6 дм; C) 7 дм; D) 8 дм; E) 9 дм.

20. Найти радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, если его меньшая диагональ равна $12\sqrt{3}$ см.

A) $4\sqrt{3}$ см; B) $6\sqrt{3}$ см; C) 12 см; D) 14 см; E) $8\sqrt{3}$ см.

21. Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен $5\sqrt{3}$ дм. Найти расстояние между его параллельными сторонами.

A) 15 дм; B) 10 дм; C) 12 дм; D) 17 дм; E) 16 дм.

22. Найти длину меньшей диагонали правильного ше-

стиугольника, если радиус описанной около него окружности равен 12 см.

A) $12\sqrt{2}$ см; B) $12\sqrt{3}$ см; C) $6\sqrt{5}$ см; D) $8\sqrt{5}$ см; E) $9\sqrt{5}$ см.

23. Сколько сторон у правильного многоугольника, если его внешний угол в 4 раза меньше его внутреннего угла?

A) 10; B) 6; C) 8; D) 12; E) 9.

24. Определить длину диагоналей правильного восьмиугольника по данному радиусу R.

A) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{3+\sqrt{2}}$; $2R$; B) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$; C) $R\sqrt{2}$; $2R\sqrt{2}$; $2R$; D) $R\sqrt{3}$; $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $2R$; E) $R\sqrt{2}$; $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2R$.

25. Определить длину диагоналей правильного восьмиугольника по данной его стороне a.

A) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; B) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; C) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; D) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{3}+1)$; $2a$; E) $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{2}+2)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

26. Сколько осей симметрии имеет правильный пятиугольник; правильный шестиугольник?

A) 5; 3; B) 1; 3; C) нет; 2; D) нет; 6; E) 5; 6.

27. Найти отношение диаметров окружностей: вписанной в квадрат и описанной около него.

A) $1:\sqrt{2}$; B) $\sqrt{2}:1$; C) $1:2$; D) $1:\sqrt{3}$; E) $\sqrt{3}:1$.

28. Найти отношение длин окружностей: вписанной в правильный треугольник и описанной около него.

A) $2:\sqrt{2}$; B) $2:\sqrt{3}$; C) $1:2$; D) $2:1$; E) $\sqrt{3}:1$.

29. Найти радиусы двух окружностей: описанной око-

ло правильного шестиугольника и вписанной в него, если разность этих радиусов равна 6 см.

A) $4(2\sqrt{3}+3)$ см; $6(2\sqrt{3}+3)$ см; B) $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{3}+6$ см; C) $6(\sqrt{3}+3)$ см; $6(\sqrt{3}+4)$ см; D) $6(2\sqrt{3}+3)$ см; $12(\sqrt{3}+2)$ см; E) $6(2\sqrt{3}-3)$ см; $12(\sqrt{3}-1)$ см.

30. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его центральный угол 60°; 90°; 120°; 45°?

A) 6; 4; 3; 8; B) 8; 3; 4; 6; C) 9; 4; 3; 8; D) 6; 3; 4; 8; E) 9; 6; 3; 8.

31. Может ли центральный угол правильного n-угольника быть равным 30°; 40°; 50°; 15°?

A) да, нет, нет, нет; B) да, да, нет, да; C) да, нет, да, нет; D) да, нет, нет, да; E) да, да, да, нет.

32. Сколько сторон имеет правильный n-угольник, внешний угол которого равен 72°?

A) 6; B) 8; C) 10; D) 9; E) 5.

33. Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанного в него круга равен r. Определить радиус описанного круга.

A) $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$; B) $2\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$; C) $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{2}}$; D) $2\sqrt{r^2+\frac{a^2}{2}}$; E) $2\sqrt{r^2+\frac{a^2}{8}}$.

34. Сколько сторон у правильного многоугольника, если его внутренний угол равен 144°?

A) 6; B) 10; C) 8; D) 12; E) 9.

35. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 6 дм. Найти расстояние от вершины C до диагонали AE.

A) 8 дм; B) 10 дм; C) 9 дм; D) 7 дм; E) 12 дм.

36. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов вместе с одним из внешних равна $\frac{23\pi}{2}$?

A) 10; B) 11; C) 13; D) 15; E) 16.

37. Внешний угол при вершине правильного многоугольника равен 60°. Найти длину его большей диагонали, если периметр этого многоугольника равен 54 см.

A) 12 см; B) 16 см; C) 20 см; D) 18 см; E) 10 см.

38. Определить число сторон многоугольника, если сумма его внутренних углов в 6 раз больше суммы внешних углов, взятых по одному у каждой вершины.

A) 16; B) 10; C) 15; D) 12; E) 14.

39. Найти сторону правильного 12-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

A) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; B) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; C) R; D) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$;

E) $R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

40. Определить $\operatorname{ctg}\beta$, где β-внутренний угол правильного восьмиугольника.

A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; B) -1; C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; D) $-\sqrt{3}$; E) 1.

Глава 12

ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

§ 12.1. Общие понятия о площади

Определение. *Величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь плоской замкнутой фигуры, называется* ***площадью*** *этой фигуры.*

Величина площади плоской фигуры есть некоторое число, измеряющее площадь. Соотношение между площадями фигур и числами, их измеряющими, должны удовлетворять следующим условиям.

1) Числа, измеряющие площади равных фигур, должны быть равны между собой.

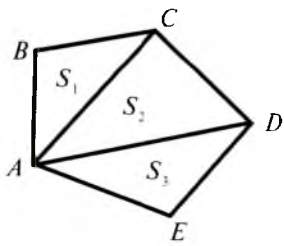


Рис. 295

2) Если данная фигура разбита на несколько частей, составляющих каждая замкнутую фигуру, то число, измеряющее площадь всей фигуры, должно быть равно сумме чисел, измеряющих площади отдельных ее частей: $S_{ABCDE} = S_1 + S_2 + S_3$ (рис. 295).

Определение. *Фигуры, имеющие равные площади, называются* ***равновеликими.***

Очевидно, что равные фигуры всегда равновелики, но равновеликие фигуры не всегда равны.

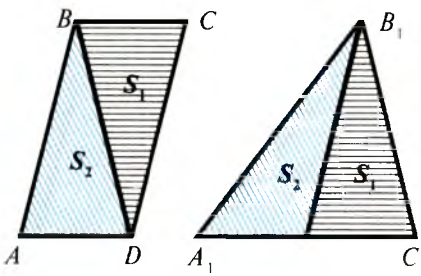


Рис. 296

На рисунке 296 изображены параллелограмм $ABCD$ и треугольник $A_1 B_1 C_1$, которые равновелики, т. е. $S_{ABCD} = S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = S_1 + S_2$, но фигуры не равны.

Принято одну из сторон треугольника или параллелограмма называть *основанием*, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из вершины треугольника или какой-либо точки противоположной стороны параллелограмма, называть *высотой*.

В прямоугольнике одну из его сторон называют *основанием*, а другую *высотой*.

Определение. *Основание и высота прямоугольника называются его измерениями.*

Для измерения площади данной фигуры следует выбрать единицу измерения.

Определение. *За единицу измерения площадей принимают площадь квадрата, сторона которого равна линейной единице (1см; 1м; 1дм и т.д.).*

§ 12.2. Площадь прямоугольника

теорема

Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.

1-й случай. Длины основания и высоты измеряются натуральными числами m и n ($m, n \in N$).

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; $AB = n$; $AD = m$ (рис. 297).

Доказать: $S_{ABCD} = mn$ (квадратных единиц).

Доказательство. Разделим основание AD на m равных частей, а высоту AB на n таких же равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные соответственно высоте и основанию прямоугольника. От взаимного пересечения этих прямых получаются некоторые четырехугольники. Рассмотрим один из них, например четы-

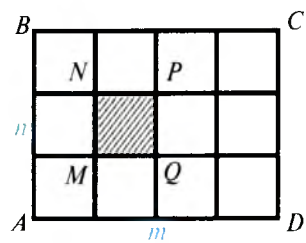


Рис. 297

рехугольник $MNPQ$. Этот четырехугольник является прямоугольником, т. к. его стороны параллельны сторонам прямоугольника $ABCD$, а поскольку длины его сторон MN и PQ равны по одной линейной единице, то $MNPQ$ — квадрат. Это утверждение верно для любого четырехугольника, получившегося при пересечении прямых.

В одной горизонтальной полосе на основании прямоугольника укладывается m таких квадратов, на высоте прямоугольника укладывается n полос. Таким образом, в прямоугольнике $ABCD$ укладывается $m \cdot n$ таких квадратов. Поэтому площадь прямоугольника $ABCD$ равна (mn) квадратных единиц.

$S_{ABCD} = mn = AB \cdot AD$, т. е. произведению основания на высоту.

2-й случай. Длины основания и высоты прямоугольника измеряются рациональными числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in N)$.

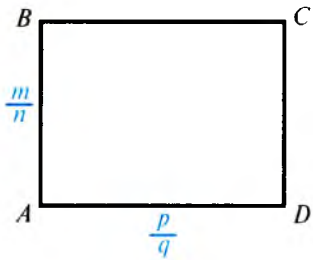


Рис. 298

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; $AB = \frac{m}{n}$; $AD = \frac{p}{q}$ (рис. 298).

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ (квадратных единиц).

Доказательство. Дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ приведем к общему знаменателю $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$ и $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$. Примем $\frac{1}{nq}$ долю линейной единицы, в которой измерены AB и AD, за новую единицу длины. В новых единицах измерения: $AB = mq$ новых линейных единц, $AD = pn$ новых линейных единиц, т.е. AB и AD измерены натуральными числами в новых единицах измерения, и поэтому по первому случаю $S_{ABCD} = (mq) \cdot (np)$ новых квадратных единиц (в новой квадратной единице содержится $\frac{1}{(nq)^2}$ старых квадратных единиц). Перейдя к старым единицам измерения, получим:

$S_{ABCD} = \frac{(mq)\cdot(pn)}{(nq)^2} = \frac{mq}{nq} \cdot \frac{pn}{qn} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ (старых квадратных единиц). Итак, $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

3-й случай. Длины основания и высоты прямоугольника измеряются иррациональными числами α и β.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; $AB = \alpha$; $AD = \beta$; (рис. 299).

Доказать: $S_{ABCD} = \alpha \cdot \beta$ (квадратных единиц).

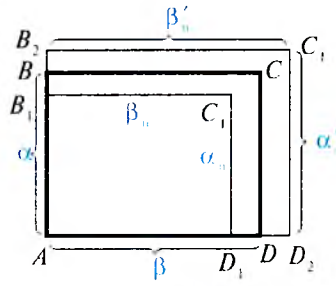


Рис. 299

Доказательство. По определению иррационального числа $\alpha_n < \alpha < \alpha_n'$ и $\beta_n < \beta < \beta_n'$, где α_n и α_n' — приближенные значения с недостатком и избытком с точностью до n десятичных знаков числа α, а β_n и β_n' — числа β, причем α_n и α_n', β_n и β_n' — рациональные числа.

От точки A отложим на стороне AB отрезки $AB_1 = \alpha_n$ и $AB_2 = \alpha_n'$, а на стороне AD отрезки $AD_1 = \beta_n$ и $AD_2 = \beta_n'$. Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$, стороны которых, равные α_n, β_n и α_n'; β_n', измерены рациональными числами. Тогда по второму случаю

$S_{AB_1C_1D_1} = \alpha_n \cdot \beta_n$ — квадратных единиц, а $S_{AB_2C_2D_2} = \alpha_n' \cdot \beta_n'$ — квадратных единиц, причем $S_{AB_1C_1D_1} < S_{ABCD} < S_{AB_2C_2D_2}$. При неограниченном увеличении n, т. е. при $n \to \infty$ α_n, и $\alpha_n' \to \alpha$, а β_n и $\beta_n' \to \beta$ по определению иррационального числа, и тогда $\alpha_n \cdot \beta_n$ и $\alpha_n' \cdot \beta_n' \to \alpha\beta$. Этот общий предел $\alpha_n \beta_n$ и $\alpha_n \beta_n'$, т. е. произведение $\alpha\beta$, и принимается за меру площади $ABCD$. Таким образом, и в этом случае $S_{ABCD} = (\alpha \cdot \beta)$ — квадратных единиц, т. е. $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

Значит, при любых измерениях своих сторон площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Дано: $ABCD$ — квадрат (рис. 300).

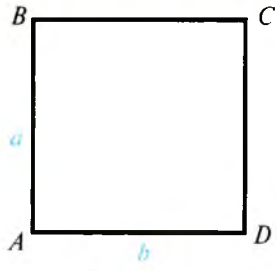


Рис. 300

Доказать: $S_{ABCD} = AB^2$.

Доказательство. Так как квадрат есть прямоугольник, у которого основание и высота равны, то его площадь $S_{ABCD} = AD \cdot AB$. По определению квадрата сторона AB равна стороне AD, и тогда $S_{ABCD} = AB^2$.

Следствие доказано.

§ 12.3. Площадь параллелограмма

теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; BK — высота, AD — основание (рис. 301 и 302).

Доказать: $S_{ABCD} = AD \cdot BK$.

Доказательство. На основании AD построим прямоугольник $AEFD$, у которого сторона EF — продолжение стороны BC. Возможны два случая построения.

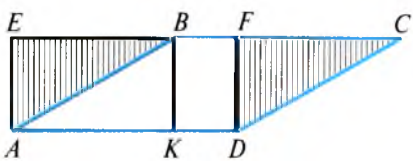


Рис. 301

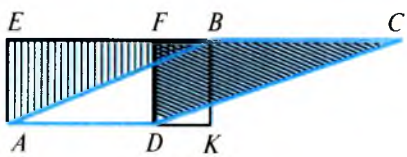


Рис. 302

1-й случай. Сторона BC частично совпадает с стороной EF (рис. 301).

2-й случай. Сторона BC лежит вне стороны EF (рис. 302).

Докажем, что в обоих случаях $S_{ABCD} = S_{AEFD}$.

$$S_{\text{параллелограмма } ABCD} = S_{AEFCD} - S_{\Delta AEB}; \quad (1)$$
$$S_{\text{прямоугольника } AEFD} = S_{AEFCD} - S_{\Delta FDC}. \quad (2)$$

Но прямоугольные треугольники AEB и DFC равны по гипотенузе $AB = CD$ (противоположные стороны параллелограмма) и катету $AE = FD$ (противоположные стороны прямоугольника).

Итак, $\Delta AEB = \Delta DEC$, и тогда

$$S_{\Delta AEB} = S_{\Delta DFC}. \quad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) следует, что площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $AEFD$ равны, т. е. эти фигуры равновелики. Но площадь прямоугольника $AEFD$ равна: $S_{AEFD} = AD \cdot AE = AD \cdot BK$, и тогда и $S_{\text{параллелограмма}} = AD \cdot BK$, т. е. произведению его основания на высоту, что и требовалось доказать.

теорема

Площадь параллелограмма равна произведению сторон параллелограмма на синус угла между ними.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; BE — высота (рис. 303).

Доказать: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

Доказательство. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $AD \cdot BE$. Из прямоугольного треугольника ABE имеем: $BE = AB \sin A$ (катет равен произведению гипотенузы на синус противолежащего ему угла) и тогда $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$, что и требовалось доказать.

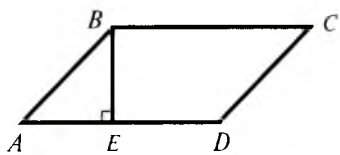


Рис. 303

§ 12.4. Площадь треугольника

теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Дано: ΔABD; BE — его высота (рис.304).

Доказать: $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE$.

Доказательство. Достроим ΔABD до параллелограмма, проведя $DC \parallel AB$ и $BC \parallel AD$. Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} S_{\text{параллелограмма } ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE$, что и требовалось доказать.

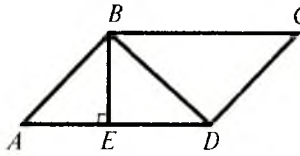


Рис. 304

Следствие 1. Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.

Дано: ΔABC, ΔAB_1C, ΔAB_2C; $B_1D_1 = BD = B_2D_2$ — равные высоты (рис. 305).

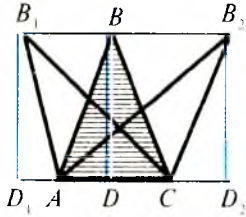


Рис. 305

Доказать: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle AB_2C}$.

Доказательство. По доказанной теореме площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, и поэтому площади данных треугольников равны: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1D_1$ и $S_{\triangle AB_2C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_2D_2$. Так как высоты $BD = B_1D_1 = B_2D_2$, а основание AC треугольников общее, то $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle AB_2C}$. Следствие доказано.

Следствие 2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Дано: ΔABC — прямоугольный (рис. 306).

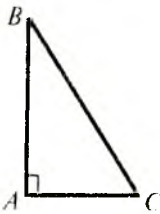


Рис. 306

Доказать: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$.

Доказательство. Так как катеты прямоугольного треугольника взаимно перпендикулярны: $BC \perp AC$, то один из катетов BC можно считать за высоту, а другой катет AC — за основание треугольника ABC. Поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC.$$

Следствие 3. Отношение площадей двух треугольников равны отношению произведений их оснований на высоты.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; BD и B_1D_1 — их высоты (рис. 307).

Доказать: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$.

Доказательство. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ и $S_{\Delta A_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1$. Тогда $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$, что и требовалось доказать.

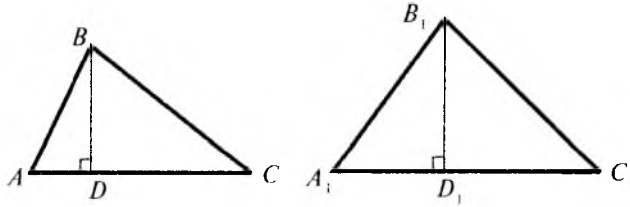


Рис. 307

Следствие 4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Дано: $ABCD$ — ромб; AC и BD — его диагонали (рис. 308).

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Доказательство. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABC}$ (диагональ ромба делит его на два равных треугольника), а т. к. диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то BO — высота ΔABC. Отсюда

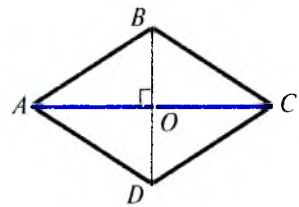


Рис. 308

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{4} AC \cdot BD$. Таким образом, $S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{4} AC \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

Следствие 5. Площадь ромба равна произведению квадрата стороны ромба на синус угла между его сторонами.

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 309).

Доказать: $S_{ABCD} = AB^2 \cdot \sin A \cdot (S_{ABCD} = a^2 \cdot \sin A)$, где $AB = AD = a$.

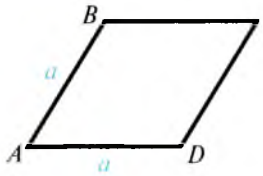


Рис. 309

Доказательство. Площадь параллелограмма, разновидностью которого является ромб, равна произведению его сторон на синус угла между ними: $S_{\text{параллелограмма}} = a \cdot b \cdot \sin A$, где a и b — стороны параллелограмма, а A — угол между ними. Так как стороны ромба равны между собой, то $a = b$, то, $S_{\text{ромба } ABCD} = a^2 \cdot \sin A$, что и требовалось доказать.

§ 12.5. Формула Герона

Древнегреческий ученый *Герон Александрийский* работал в Александрии в I веке н. э. Герон рассматривал треугольники со сторонами $a = 13$; $b = 14$; $c = 15$ и $a = 5$; $b = 12$; $c = 13$, площади которых выражаются целыми числами. Впоследствии такие треугольники с целочисленными сторонами и площадью стали называть „героновыми“.

Формула Герона

(вычисление площади треугольника через длины трех его сторон). Площадь произвольного треугольника ABC равна $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ и a, b, c — длины сторон треугольника.

Дано: ΔABC; AD — его высота (рис. 310).

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$ (или $p = \frac{a+b+c}{2}$).

Доказательство. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

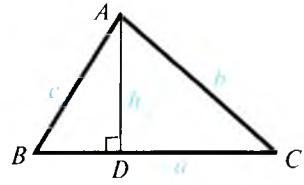


Рис. 310

Из треугольника ABC по теореме о квадрате стороны, лежащей против острого угла B, следует, что $b^2 = c^2 + a^2 - 2a \cdot BD$. Отсюда $BD = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$. Из ΔABD по теореме Пифагора находим:

$$AD = h_a = \sqrt{c^2 - BD^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(2ac - c^2 - a^2 + b^2) \cdot (2ac + c^2 + a^2 - b^2)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left(b^2 - (a-c)^2\right) \cdot \left((a+c)^2 - b\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)}.$$

Но $a + c + b = 2p$, и тогда $b - a + c = b + a + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$. Аналогично: $b + a - c = b + a + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$ и $a + c - b = a + c + b - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$. Итак,

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)} =$$

$$= \frac{4}{2a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

И тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cancel{a}\cdot\frac{2}{\cancel{a}}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

что и требовалось доказать. Эта формула Герона позволяет вычислять площадь треугольника через длины трех его сторон.

Следствие. Площадь правильного треугольника равна: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника.

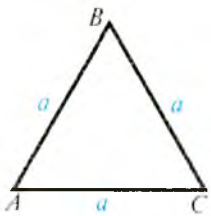


Рис. 311

Дано: ABC — равносторонний треугольник; $AB = a$ (рис. 311).

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Доказательство. По формуле Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, но т. к. треугольник ABC равносторонний, то $a = b = c$ и $p = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3}{2}a - a\right)\left(\frac{3a}{2} - a\right)\left(\frac{3}{2}a - a\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Итак, $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, что и требовалось доказать.

§ 12.6. Площади треугольника, выраженные через тригонометрические функции

теорема

Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.

1-й случай. $\angle A$ — острый.

Дано: ΔABC (рис. 312).

Доказать: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ ($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$).

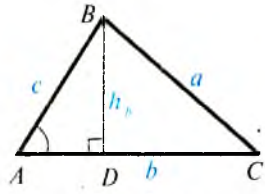


Рис. 312

Доказательство. По ранее доказанному $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, где BD — высота ΔABC. Из прямоугольного треугольника ABD находим $h_b = C \cdot \sin A$. Тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$.

2-й случай. $\angle A$ — тупой.

Дано: ΔABC (рис. 313).

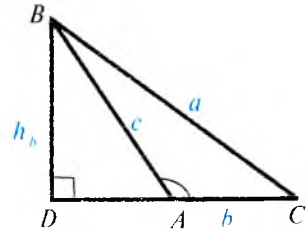


Рис. 313

Доказать: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ ($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$).

Доказательство. Используем известную формулу площади треугольника $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b$, где h_b — высота ABC, опущенная на сторону $AC = b$. Из прямоугольного треугольника ABD находим $h_b = c \cdot \sin \angle BAD = c \cdot \sin (180° - A) = c \cdot \sin A$ (по формуле приведения $\sin(180° - A) = \sin A$). Итак, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$.

3-й случай. $\angle A$ — прямой.

Дано: ΔABC (рис. 314).

Доказать: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$; ($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$).

Доказательство. Площадь прямоугольного треугольника ABC равна половине произведения его катетов, т. е. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} bc$. Известно, что $\sin A = \sin 90° = 1$, следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$. Таким образом, каким бы ни был угол ΔABC, теорема оказыва-

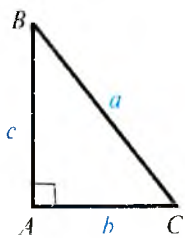


Рис. 314

ется верна, т. е. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$, что и требовалось доказать.

Эти формулы позволяют вычислить площадь треугольника, если известны длины двух его сторон и величина угла между ними.

теорема

Площадь произвольного треугольника *ABC* со сторонами *a*, *b*, *c* вычисляется по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A}; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{b^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{\sin B}; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{\sin C},$$

где *a*, *b*, *c* — стороны треугольника *ABC*.

Дано: ΔABC (рис. 315).

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin A}$.

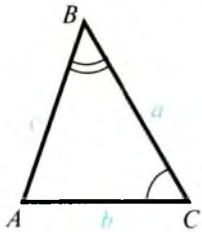


Рис. 315

Доказательство. Используя доказанную ранее теорему, имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C. \qquad (1)$$

По теореме синусов стороны пропорциональны синусам противолежащих углов, т. е. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Рассмотрим пропорцию $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, откуда получаем: $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$. Найденное значение подставим в формулу (1):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin A}. \qquad (2)$$

Аналогично можно получить, что $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{b^2 \sin A \cdot \sin C}{\sin B}$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \frac{c^2 \sin A \cdot \sin B}{\sin C}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь произвольного треугольника *ABC* со сторонами *a*, *b*, *c* вычисляется по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Дано: ΔABC.

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin(B+C)}$.

Доказательство. Сумма углов ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Поэтому $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$, а $\sin A = \sin(180° - (B + C)) = \sin(B + C)$ (используется формула приведения $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Найденное значение $\sin A$ подставим в формулу (2) и получим:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin(B+C)}.$$

Эта формула позволяет вычислять площадь треугольника, если известны одна из сторон треугольника и два его угла.

§ 12.7. Площадь треугольника через радиусы вписанного и описанного кругов

теорема

Площадь треугольника равна частному от деления произведения трех его сторон на учетверенный радиус описанного около треугольника круга.

Дано: ΔABC; O — описанный круг; радиус $OB = R$ (рис. 316).

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}\left(S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot OB}\right)$.

Доказательство. Используя формулу площади $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ и лемму к теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = 2R$, из которой $\sin A = \frac{a}{2R}$, получим: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$, что и требовалось доказать.

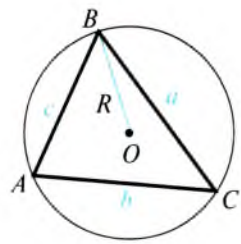


Рис. 316

теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанного в треугольник круга.

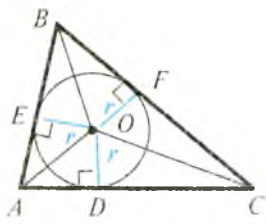


Рис. 317

Дано: ΔABC; O — вписанный круг; радиус $OD = r$ (рис. 317).

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} r \cdot P_{\Delta ABC}$.

Доказательство. Соединим центр вписанного круга O со всеми вершинами треугольника ABC. Тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} =$ $= \frac{1}{2} AB \cdot OE + \frac{1}{2} BC \cdot OF + \frac{1}{2} AC \cdot OD = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r +$ $+ \frac{1}{2} AC \cdot r$ (по свойству касательных, перпендикулярных к радиусу окружности, проведенному в точку касания) $OE = OF = OD = r$. Итак, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} r(AB + BC + AC) =$ $= \frac{1}{2} r \cdot P_{\Delta ABC}$, что и требовалось доказать.

§ 12.8. Площадь трапеции

теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Дано: $ABCD$ — трапеция; BE — ее высота (рис. 318).

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + AD) \cdot BE$.

Доказательство. Проведем диагональ BD трапеции $ABCD$. Тогда $S_{ABCD} =$ $= S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BE +$ $+ \frac{1}{2} BC \cdot DF$, где DF — высота ΔBDC. Но $BE = FD$ как противоположные стороны прямоугольника $BEDF$. Тогда $S_{ABCD} =$

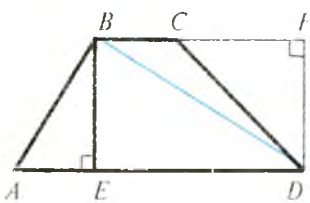


Рис. 318

$= \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} BC \cdot BE = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BE$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

Дано: $ABCD$ — трапеция; MN — средняя линия (рис. 319).

Доказать: $S_{ABCD} = MN \cdot BE$.

Доказательство. По доказанной теореме: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot BE$, а по свойству средней линии трапеции $MN = \frac{AB + CD}{2}$. Тогда $S_{ABCD} = MN \cdot BE$. Следовательно, следствие доказано.

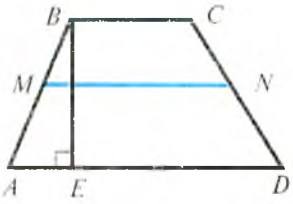


Рис. 319

§ 12.9. Площадь описанного многоугольника

теорема

Площадь любого описанного многоугольника равна произведению периметра многоугольника на половину радиуса вписанного в него круга.

Дано: O — круг; r — радиус; $ABCDE$ — описанный многоугольник; $OM = r$ (рис. 320).

Доказать: $S_{ABCDE} = \frac{1}{2} P_{ABCDE} \cdot OM = \frac{1}{2} P_{ABCDE} \cdot R$.

Доказательство. Соединим центр окружности со всеми вершинами многоугольника. Многоугольник разбился на треугольники, в каждом из которых высотой является радиус вписанного круга (так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной). Следовательно,

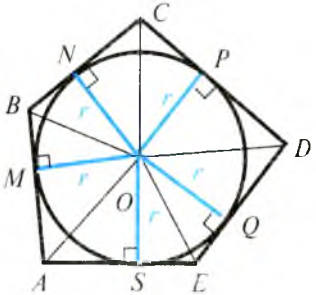


Рис. 320

$S_{ABCDE} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta DOE} + S_{\Delta AOE} = \frac{1}{2} AB \cdot OM +$
$+ \frac{1}{2} BC \cdot ON + \frac{1}{2} CD \cdot OP + \frac{1}{2} DE \cdot OQ + \frac{1}{2} AE \cdot OS =$
$= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CD \cdot r + \frac{1}{2} DE \cdot r + \frac{1}{2} AE \cdot r =$
$= \frac{1}{2} \cdot r(AB + BC + CD + DR + AE) = \frac{1}{2} r \cdot P_{ABCDE}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Формула площади треугольника, полученная в § 12.7, является частным случаем доказанной формулы.

§ 12.10. Площадь четырехугольника через его диагонали

теорема

Площадь произвольного четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Дано: $ABCD$ — четырехугольник; AC и BD — его диагонали (рис. 321).

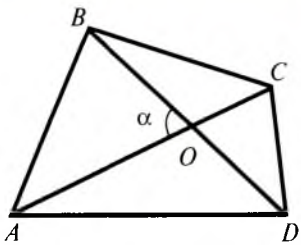


Рис. 321

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB$.

Доказательство. Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle COD = \alpha$ как вертикальный, а $\angle BOC = \angle AOD = 180°$ (как смежные с углом α). $S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD}$, и т. к. площадь произвольного треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними, то $\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha)$. По формуле приведения $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sin\alpha \, (OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OA \cdot OD) = \frac{1}{2} \sin\alpha \, [OB(OA + OC) +$

$+ OD \cdot (OC + OA)| = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot AC(OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ (т. к. $OA + OC = AC$ и $OB + OD = BD$, что и требовалось докать.

§ 12.11. Площадь правильного многоугольника

теорема

Площадь правильного n-угольника (S_n) равна: $S_n = \frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$, где R — радиус круга, описанного около n-угольника.

Дано: $ABCDEF$ — правильный n-угольник; O — описанный круг; радиус $OA = R$ (рис. 322).

Доказать: $S_n = \frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$.

Доказательство. Около любого правильного n-угольника можно описать круг. Пусть сторона AB правильного n-угольника равна a_n, центральный угол $AOB = \frac{360^\circ}{n}$. Тогда $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$ (площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними). Но $S_n = n \cdot S_{\triangle ABC} = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$.

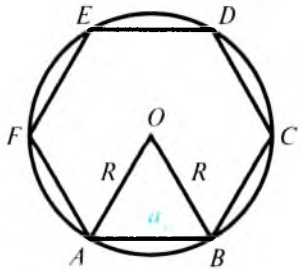


Рис. 322

Итак, $S_n = \frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$, что и требовалось доказать.

теорема

Площадь правильного n-угольника (S_n) равна: $S_n = nr^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, где r — радиус круга, вписанного в правильный n-угольник.

Дано: $ABCDEF$ — правильный n-угольник; O — вписанный круг; радиус $OK = r$ (рис. 323).

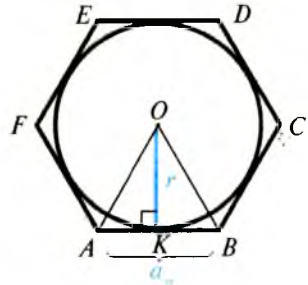


Рис. 323

Доказать: $S_n = nr^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$.

Доказательство. В любой правильный n-угольник можно вписать окружность. Пусть $AB = a_n$ — сторона правильного n-угольника. Тогда центральный $\angle AOB = \frac{360°}{n}$. В равнобедренном треугольнике AOB, где $AO = OB = R$, OK является высотой (радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной). Тогда OK — медиана, т. е. $AK = KB = \frac{1}{2}a_n$ и OK — биссектриса угла AOB, т. е. $\angle AOK = \angle BOK = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180°}{n}$. Из прямоугольного треугольника AKO имеем: $AK = \frac{a_n}{2} = OK \cdot \operatorname{tg}\angle AOK = r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$ (катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету). Тогда $a_n = 2AK = 2r \cdot tg\frac{180°}{n}$.

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OK = \frac{1}{2}a_n \cdot r = r \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n} \cdot r = r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

Итак, $S_n = n \cdot S_{\triangle AOB} = nr^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, что и требовалось доказать.

§ 12.12. Теорема Пифагора (доказательство Евклида)

теорема

Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.

Дано: прямоугольный треугольник ABC; $AFYC$; $BHKC$ и $BDEA$ — квадраты (рис. 324).

Доказать: $S_{BHKC} = S_{BDEA} + S_{AFYC}$

Доказательство. Проведем $AM \perp BC$ до пересечения со стороной HK. Квадрат $BHKC$ разбился на два прямоугольника. Докажем, что $S_{BHML} = S_{\text{квадрата } BDEA}$, а $S_{LMKC} = S_{\text{квадрата } AFYC}$.

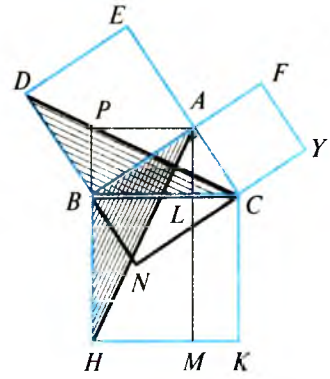


Рис. 324

Проведем прямые DC и AH. Найдем площадь треугольника DBC:

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot CN = \frac{1}{2} BD^2 \quad (1)$$

$CN = DE$ как противоположные стороны прямоугольника $DECN$, а $DE = BD$ как стороны квадрата $BDEA$.

$$S_{BDEA} = BD^2. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} S_{BDEA}$.

Аналогично, $S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} BH \cdot AP = \frac{1}{2} BH \cdot HM = \frac{1}{2} S_{\text{прям. } BHML}$ ($AP = HM$ как противоположные стороны прямоугольника $HPAM$). $\Delta DBC = \Delta ABH$ по первому признаку равенства треугольников: $BD = BA$ как стороны квадрата $BDEA$, $BC = BH$ как стороны квадрата $BHKC$, $\angle DBC = \angle ABH$, т. к. $\angle DBC = 90° + \angle ADC$, $\angle ABH = 90° + \angle ABC$. Из того, что $\Delta DBC = \Delta ABH$, следует, что их площади тоже равны, т. е. $S_{\Delta DBC} = S_{\Delta ABH}$, но $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} S_{BDEA}$, а $S_{\Delta ABH} = \frac{1}{2} S_{BHML}$, и тогда $S_{BDEA} = S_{BHML}$. Соединив точки Y с B и A с K аналогично можно доказать равновеликость квадрата $ACYF$ с прямоугольником $LMKC$. Итак, квадрат $BHKC$ равновелик сумме квадратов $BDEA$ и $ACYF$, что и требовалось доказать.

§ 12.13. Отношение площадей подобных фигур

теорема

Площади двух подобных треугольников или многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.

1-й случай (для треугольников).

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 325).

Доказать: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2}$.

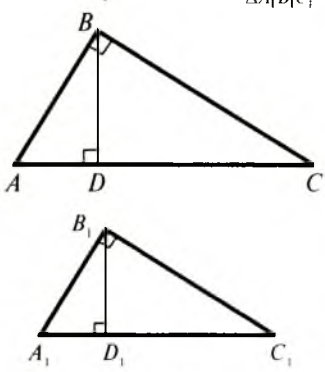


Рис. 325

Доказательство. Проведем высоты BD и B_1D_1 в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ на стороны AC и A_1C_1. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1$.

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AD \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$, но высоты в подобных треугольниках относятся как сходственные стороны, и поэтому $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Тогда $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2}$.

2-й случай (для подобных многоугольников).

Дано: $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 326).

Доказать: $\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{AE^2}{A_1E_1^2}$.

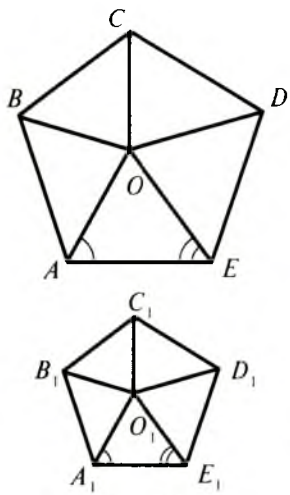


Рис. 326

Доказательство. Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных между собой треугольников, т. е. $\Delta AOE \sim \Delta A_1O_1E_1$; $\Delta AOB \sim \Delta A_1O_1B_1$; $\Delta BOC \sim \Delta B_1O_1C_1$; $\Delta COD \sim \Delta C_1O_1D_1$ и $\Delta EOD \sim \Delta E_1O_1D_1$.

Из их подобия по части 1 теоремы следует, что

$\frac{S_{\Delta AOE}}{S_{A_1O_1E_1}} = \frac{AE^2}{A_1E_1^2}$; $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta A_1O_1B_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}$;

$\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1O_1C_1}} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}$; $\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta C_1O_1D_1}} = \frac{CD^2}{C_1D_1^2}$ и

$\frac{S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta E_1O_1D_1}} = \frac{ED^2}{E_1D_1^2}$. Но в подобных многоугольниках сходственные стороны пропорциональны, т. е.

$\frac{AE}{A_1E_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{ED}{E_1D_1}$, а тогда

$\frac{AE^2}{A_1E_1^2} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2} = \frac{CD^2}{C_1D_1^2} = \frac{ED^2}{E_1D_1^2}$. Значит,

$$\frac{S_{\Delta AOE}}{S_{\Delta A_1O_1E_1}} = \frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta A_1O_1B_1}} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1O_1C_1}} = \frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta C_1O_1D_1}} = \frac{S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta E_1O_1D_1}}.$$

По свойству ряда равных отношений

$$\frac{S_{\Delta AOE} + S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta EOD}}{S_{\Delta A_1O_1E_1} + S_{\Delta A_1O_1B_1} + S_{\Delta B_1O_1C_1} + S_{\Delta C_1O_1D_1} + S_{\Delta E_1O_1D_1}} = \frac{S_{\Delta AOE}}{S_{\Delta A_1O_1E_1}} =$$

$= \frac{AE^2}{A_1E_1^2}$, и тогда $\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = \frac{AE^2}{A_1E_1^2}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты сторон, квадраты радиусов описанных окружностей или квадраты их апофем.

Дано: $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные многоугольники; O и O_1 — центры окружностей; $OA = R$; $O_1A_1 = R_1$; $OK = r$; $O_1K_1 = r_1$ (рис. 327).

Доказать: $\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{AF^2}{A_1F_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$.

Доказательство. Известно, что правильные одноименные многоугольники подобны и их стороны относятся как радиусы, или как апофемы, т. е. $\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{R}{R_1} =$

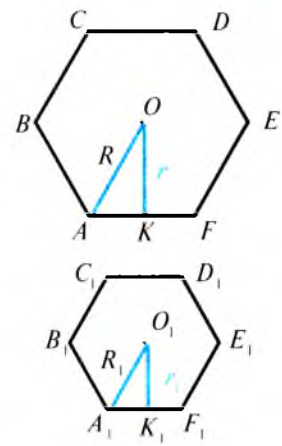


Рис. 327

$= \frac{r}{r_1}$, а площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон (а тогда и как квадраты радиусов или квадраты апофем). Итак, $\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{AE^2}{A_1E_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Каким условиям должны удовлетворять соотношения между площадями фигур и числами, их измеряющими?
2. Какие фигуры являются равновеликими?
3. В каких единицах измеряют площади плоских фигур?
4. При любых ли измерениях длины основания и высоты прямоугольника (в натуральных, рациональных и иррациональных числах) его площадь вычисляется как произведение этих измерений?
5. С помощью каких формул может быть вычислена площадь параллелограмма?
6. Как вычисляется площадь треугольника, если известны: a) его основание и высота; b) две его стороны и угол между ними; c) сторона и два прилежащих к ней угла; d) три стороны треугольника.
7. Каким свойством обладают треугольники с равными основаниями и равными высотами?
8. Как вычисляется площадь прямоугольного треугольника?
9. Привести различные формулы площади ромба.
10. Как относятся площади двух треугольников?
11. Как вычисляется площадь трапеции?
12. Как связана площадь треугольника с радиусами вписанной и описанной окружностей?
13. Как вычисляется площадь описанного многоугольника?
14. Привести формулы для вычисления площади правильного многоугольника.

15. Существует ли возможность вычислить площадь произвольного выпуклого четырехугольника, если известны его диагонали?

16. Каким способом была доказана Евклидом теорема Пифагора?

17. Как относятся площади подобных треугольников?

18. Как относятся площади правильных одноименных многоугольников?

Тест № 12

1. Найти периметр прямоугольника, если его площадь равна 144 см², а отношение сторон 3:2.

A) $20\sqrt{3}$ см; B) $20\sqrt{6}$ см; C) 240см; D) 120см; E) $40\sqrt{3}$ см.

2. Сторона квадрата $a = 7{,}3$ м. Его основание укорочено на $b = 2$ м, а высота на столько же удлинена, так что получился прямоугольник. Как соотносятся периметры и площади прямоугольника и квадрата?

A) Периметры равны, площадь прямоугольника меньше на 4 м² площади квадрата;
B) Периметры равны, площадь квадрата на 4 м² меньше площади прямоугольника;
C) Периметр прямоугольника на 4 м больше, а площади прямоугольника и квадрата равны;
D) Периметр прямоугольника на 4 м меньше, а площади этих фигур равны;
E) Площадь и периметр прямоугольника на 4 м и 4 м² меньше, чем у квадрата.

3. На сколько процентов увеличится площадь квадрата со стороной 40 см, если длину его стороны увеличить на 25%?

A) 55%; B) 56%; C) 56,25%; D) 59%; E) 25%.

4. Высота равностороннего треугольника равна 6 дм. Найти его сторону и площадь.

A) 8 дм и 24 дм²; B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ дм и $\frac{12}{\sqrt{3}}$ дм²; C) 4 дм и

12 дм^2; D) $4\sqrt{3}$ дм и $12\sqrt{3}$ дм^2; E) $8\sqrt{3}$ дм и $24\sqrt{3}$ дм^2.

5. Катет равен 24 см, а его проекция на гипотенузу 9,6 см. Определить площадь треугольника (ответ дать с точностью до 1см).

A) 660 см^2; B) 662 см^2; C) 661 см^2; D) 665 см^2; E) 664 см^2.

6. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника $h = 3\frac{1}{3}$ м. Найти его площадь.

A) 11 м^2; B) $11\frac{1}{9}$ м^2; C) 12 м^2; D) $12\frac{1}{9}$ м^2; E) $11\frac{4}{9}$ м^2.

7. Найти площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 и 6 см, а угол между ними 30°.

A) 24 см^2; B) $12\sqrt{3}$ см^2; C) 12 см^2; D) $\frac{24}{\sqrt{3}}$ см^2; E) $24\sqrt{3}$ см^2.

8. Вычислить площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а один из углов равен 150°.

A) $50\sqrt{2}$ см^2; B) $50\sqrt{3}$ см^2; C) 100 см^2; D) 50 см^2; E) 25 см^2.

9. Найти площадь ромба, если его углы относятся как 1 : 5, а сторона равна a.

A) a^2; B) $a^2\sqrt{3}$; C) $a^2\sqrt{2}$; D) $\frac{a^2}{3}$; E) $\frac{1}{2}a^2$.

10. В параллелограмме высота, проведенная к одной из сторон, в 3 раза меньше этой стороны. Площадь параллелограмма 48 см^2. Найти его высоту.

A) 4 см; B) 8 см; C) 12 см; D) 6 см; E) 3 см.

11. Площадь параллелограмма равна 41 см^2, стороны его равны 5 см и 10 см. Найти высоты параллелограмма.

A) 16,4 и 8,2 см; B) 8,2 и 4,1 см; C) 4,1 и 2,15 см; D) 8 и 4 см; E) 12,3 и 6,45 см.

12. Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Найти расстояние между его сторонами, равными 6 см.

A) 4 см; B) 8 см; C) 2 см; D) 6 см; E) 5 см.

13. Определить площадь квадрата по его диагонали l.

A) l^2; B) $2l^2$; C) $\frac{l^2}{2}$; D) $l^2\sqrt{2}$; E) $\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$.

14. Во сколько раз площадь описанного около круга квадрата больше площади вписанного в этот же круг квадрата?

A) в 2 раза; B) в $\sqrt{2}$ раза; C) в $\sqrt{3}$ раза; D) в 1,5 раза; E) в 2,5 раза.

15. Стороны прямоугольника равны 72 и 8 м. Определить сторону равновеликого ему квадрата.

A) 26 м; B) 25 м; C) 20 м; D) 24 м; E) 28 м.

16. Определить площадь параллелограмма по двум сторонам a и b и углу 60° между ними.

A) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$; B) $ab\sqrt{2}$; C) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; D) $ab\sqrt{3}$; E) ab.

17. Определить площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

A) 156 см^2; B) 198,8 см^2; C) 200,6 см^2; D) 202,8 см^2; E) 204,8 см^2.

18. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна c. Найти его площадь.

A) $\frac{c^2}{4}$; B) $\frac{c^2}{2}$; C) $\frac{c^2}{3}$; D) $\frac{2c^2}{3}$; E) $c^2\sqrt{2}$.

19. Периметр равнобедренной трапеции — 124 см, меньшее основание равно боковой стороне и меньше другого основания на 20 см. Определить площадь трапеции.

A) 432 см^2; B) 864 см^2; C) 964 см^2; D) 840 см^2; E) 900 см^2.

20. Одна из диагоналей ромба больше другой в $1\frac{1}{3}$

раза, площадь ромба равна 150 см². Определить высоту.

A) 15 см; B) 18 см; C) 12 см; D) 14 см; E) 16 см.

21. Вычислить площадь правильного четырехугольника, вписанного в круг радиусом 20 см.

A) 400 см²; B) 800 см²; C) $400\sqrt{2}$ см²; D) 840 см²; E) $800\sqrt{2}$ см².

22. Определить квадрат радиуса окружности, описанной около правильного многоугольника с площадью 54 дм² и внутренним углом 120°.

A) $12\sqrt{3}$ дм; B) 12 дм; C) $12\sqrt{2}$ дм; D) $\sqrt{12\sqrt{3}}$; E) $\sqrt{12}$ дм.

23. Две стороны треугольника равны 3 см и 8 см. Может ли его площадь быть равна: a)10 см²; в) 15 см²; c) 12 см²?

A) нет, да, нет; B) да, нет, нет; C) да, нет, да; D) да, да, да; E) нет, да, да.

24. Определить площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки в 32 см и 18 см.

A) 6 дм²; B) 8 дм²; C) 10 дм²; D) 12 дм²; E) 16 дм².

25. Определить площадь треугольника, если его основание равно a, а углы при основании равны 30° и 45°.

A) $\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$; B) $\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$; C) $\frac{a^2}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)$;

D) $\frac{a^2}{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$; E) $\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

26. Определить меньшую высоту треугольника, стороны которого равны 25 дм; 29 дм; 36 дм.

A) 24 дм; B) 20 дм; C) 21 дм; D) 22 дм; E) 25 дм.

27. Определить площадь параллелограмма, если одна

из его сторон равна 51 см, а диагонали равны 40 см и 74 см.

A) 1224 см^2; B) 1228 см^2; C) 1200 см^2; D) 1220 см^2; E) 1226 см^2.

28. Определить стороны треугольника, если они относятся как 26 : 25 : 3, а площадь его равна 900 дм^2.

A) 78; 75; 9 дм; B) 130; 125; 15 дм; C) 260; 250; 30; D) 104; 100; 12 дм; E) 130; 120; 20 дм.

29. Основания трапеции равны 35 см и 29 см, площадь равна 256 см^2. Определить высоту трапеции.

A) 10 см; B) 12 см; C) 9 см; D) 16 см; E) 8 см.

30. В трапеции высота равна 8 см, площадь 2 дм^2. Определить среднюю линию.

A) 25 см; B) 28 см; C) 50 см; D) 12,5 см; E) 35 см.

31. В равнобедренной трапеции основания равны 51 и 69 см, а боковая сторона — 41 см. Определить ее площадь.

A) 240 см^2; B) 200 см^2; C) 24 дм^2; D) 28 дм^2; E) 48 дм^2.

32. Около окружности радиуса 25 см описан многоугольник площадью 20 дм^2. Определить его периметр.

A) 18 дм; B) 16 дм; C) 150 см; D) 185 см; E) 17 дм.

33. Определить площадь четырехугольника, если его диагонали k и l взаимно перпендикулярны.

A) $\frac{kl}{2}$; B) kl; C) $\frac{kl\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{kl\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{kl}{3}$.

34. Сторона правильного шестиугольника равна 84 см. Вычислить сторону равновеликого ему правильного треугольника.

A) $\frac{84}{\sqrt{6}}$ см; B) $84\sqrt{3}$ см; C) $42\sqrt{6}$ см; D) $84\sqrt{6}$ см; E) $84\sqrt{2}$ см.

35. По данному радиусу r круга определить площадь правильного описанного около него шестиугольника.

A) $2r^2\sqrt{3}$; B) $r^2\sqrt{3}$; C) $2r^2\sqrt{2}$; D) $2r^2\sqrt{6}$; E) $3r^2\sqrt{2}$.

36. Сторона треугольника равна 5 дм. Чему равна сходственная сторона подобного ему треугольника, площадь которого вдвое больше.

A) 10 дм; B) $5\sqrt{2}$ дм; C) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ дм; D) $5\sqrt{3}$ дм; E) $10\sqrt{2}$ дм.

37. Какую часть площади (считая от вершины) отсекает средняя линия треугольника.

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{4}$; D) $\frac{2}{5}$; E) $\frac{1}{5}$.

38. Прямыми, параллельными основанию, площадь треугольника разделилась в отношении 9 : 55 : 161 (от вершины к основанию). В каком отношении разделились боковые стороны?

A) 3 : 5 : 7; B) $3:\sqrt{55}:\sqrt{161}$; C) 3 : 7 : 9; D) 9 : 46 : 106; E) $\sqrt{3}:\sqrt{5}:\sqrt{7}$.

39. Сумма площадей трех подобных многоугольников равна 232 дм^2, а периметры их относятся как 2 : 3 : 4. Определить площадь каждого многоугольника.

A) 36; 54; 142 дм^2; B) 32; 72; 128 дм^2; C) 30; 60; 142 дм^2; D) 30; 90; 112 дм^2; E) 40; 60; 132 дм^2.

40. В треугольнике ABC $AC = a$, $BC = b$. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?

A) 100°; B) 120°; C) 90°; D) 45°; E) 30°.

Глава 13

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 13.1. Числовая последовательность и ее предел

Отрезок прямой всегда можно сравнить с единичным отрезком, поскольку прямые линии совмещаются при наложении. По этой же причине можно сравнить дуги окружностей одинакового радиуса. Но так как никакая часть окружности не может совместиться с прямой, то путем наложения нельзя установить, какой криволинейный отрезок можно считать равным или неравным данному прямолинейному отрезку. Таким образом, необходимо определить, что понимается под длиной окружности при сравнении ее с прямолинейным отрезком.

Для этой цели вводится понятие *предела числовой последовательности*, имеющее огромное значение в математике.

Определение. *Функция натурального аргумента называется числовой последовательностью, т. е.* $y = f(n)$; $n \in N$.

Примерами числовых последовательностей являются:

1. Последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... n, ...

2. Последовательность простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

3. Бесконечная геометрическая прогрессия $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\frac{1}{2^n}$ ...

4. Последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ с недостатком с возрастающей степенью точности: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 ...

Определение. *Число A называется пределом число-*

вой последовательности $\{a_n\}$, *если для любого наперед заданного сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такой номер* N, *зависимый от* ε, *что для всех* $n \geq N$ (*т. е., начиная с какого-то номера* n) *все члены последовательности удовлетворяют условию* $|a_n - A| \leq \varepsilon$. *Если число* A *является пределом числовой последовательности* a_n *то применяется запись* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Справедливы следующие теоремы о пределах (они будут доказаны в дальнейшем в курсе «Алгебра и начала математического анализа»).

теорема

Всякая бесконечная числовая последовательность не может иметь двух различных пределов.

Пусть пределы числовых последовательностей a_n и b_n равны A и B, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

теорема

Предел суммы двух числовых последовательностей равен сумме их пределов, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

теорема

Предел произведения двух числовых последовательностей равен произведению пределов, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot A$, где c — const.

теорема

Предел частного двух числовых последовательностей равен частному пределов при условии, что предел знаменателя не равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ **при** $B \neq 0$.

Определение. *Если каждый следующий член числовой последовательности больше предыдущего, то последовательность называется* ***возрастающей.***

Например. $\{a_n\}$: 2, 4, 6, 8, ... $2n$, ...

Определение. *Если каждый следующий член числовой последовательности меньше предыдущего, то последовательность называется* ***убывающей.***

Например. $\{b_n\}$: 1; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; ... $\frac{1}{\sqrt{n}}$; ...

Возрастающие или убывающие числовые последовательности называются монотонными.

Определение. *Числовая последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***ограниченной сверху,*** *если существует такое число* M, *что все члены последовательности* $a_n \leq M$.

Например. $\{c_n\}$: 3; 0; -5; $-1{,}2$; ... $4 - n^2$, ...

$M = 3$, $c_n \leq 3$

Определение. *Числовая последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***ограниченной снизу,*** *если для нее существует такое число* N, *что все члены последовательности* $a_n \geq N$.

Например. $\{d_n\}$: 1; 3; 5; 7; ... ... $2n - 1$, ...

$N = 1$, $d_n \geq 1$.

Определение. *Числовая последовательность называется* ***ограниченной,*** *если она ограничена и сверху, и снизу.*

Например. $\{a_n\}$: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ... $\frac{1}{n}$; ... $0 < a_n \leq 1$.

Немецким математиком *Карлом Теодором Вильгельмом Вейерштрассом* (1815—1897) была доказана теорема, имеющая большое значение в математике. Ему же принадлежит приоритет в доказательстве классических теорем в области математики и работы по обоснованию математического анализа.

теорема Вейерштрасса

Всякая возрастающая ограниченная сверху число-

вая последовательность имеет предел или всякая убывающая ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел.

§ 13.2. Длина окружности и дуги

Определение. *За длину окружности принимается предел, к которому стремится последовательность периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, когда число сторон многоугольника неограниченно удваивается.*

Сначала докажем, что последовательность периметров P_n таких многоугольников возрастает и ограничена сверху и тогда, по теореме Вейерштрасса, предел такой последовательности существует.

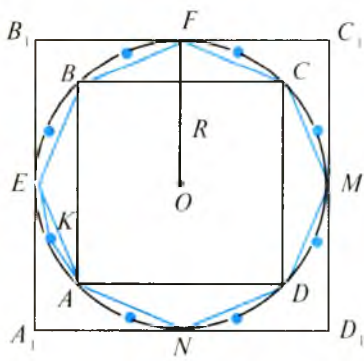


Рис. 328

Пусть O — круг; $OF=R$ — радиус; $ABCD$ — правильный четырехугольник, вписанный в круг; $AB = a_4$; $P_4 = P_{ABCD} = 4a_4$ (рис. 328).

Каждую дугу AB, BC, CD и DA поделим пополам и полученные точки E, F, M, N соединим последовательно с точками B, C, D и A. Полученный 8-угольник $AEBFCMDN$, исходя из построения, является правильным многоугольником и его периметр $P_8 = 8 \cdot a_8 = 8\,AE$.

Покажем, что $P_8 > P_4$.

В треугольнике ABE: $AB < AE + EB = 2AE = 2a_8$ (в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других его сторон), т. е. $a_4 < 2a_8$, тогда $4a_4 < 8a_8$, т. е. $P_4 < P_8$.

Повторим тот же прием, разделив каждую из дуг AE, EB, BF, FC, CM, DM, DN, AN пополам и, соединив последовательно две соседние точки, получим 16-угольник, который также по построению являет-

ся правильным. Рассмотрим один из треугольников AKE, где $AK = KE = a_{16}$, а $AE = a_8$.

В треугольнике AKE каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон, т. е. $AE < AK + KE = 2AK = 2a_{16}$, т. е. $a_8 < 2a_{16}$, а тогда $8a_8 < 16a_{16}$, т. е. $P_8 < P_{16}$. Итак, $P_4 < P_8$ и $P_8 < P_{16}$; т. е. $P_4 < P_8 < P_{16}$...

Этот процесс можно продолжить и дальше и убедиться в том, что последовательность периметров P_{2n}-правильных, вписанных в круг многоугольников, возрастает.

Докажем, что эта последовательность ограничена сверху. Для этого опишем около круга O правильный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Его периметр $P_{A_1B_1C_1D_1} = 4 \cdot A_1B_1 = 4 \cdot 2R = 8R$ больше периметра любого из вписанных многоугольников. Итак, $P_4 < P_8 < P_{16} < \ldots < P_{2n} < \ldots \ldots < 8R$, следовательно, по теореме Вейерштрасса, такая последовательность имеет предел, который и принимается за длину окружности.

Лемма. Отношение длины окружности к ее диаметру есть число, постоянное для всех окружностей.

Дано: O и O_1 — окружности; $AO = R$; $A_1O_1 = R_1$; C — длина окружности O; C_1 — длина окружности O_1 (рис. 329).

Доказать: $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$.

Доказательство. Впишем в окружности O и O_1 правильные одноименные многоугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Пусть P_n — периметр $ABCDEF$, P_n' — периметр $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Известно, что периметры правильных одноименных многоугольников относятся как радиусы (или как апофемы). Значит,

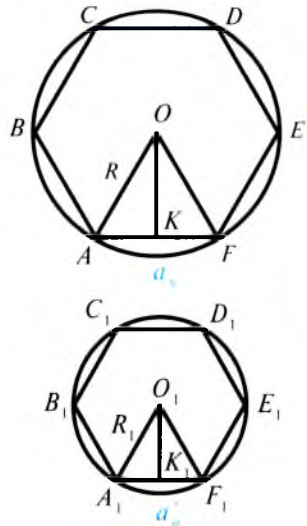


Рис. 329

$\frac{P_n}{P_n'} = \frac{R}{R_1}$ и тогда $\frac{P_n}{R} = \frac{P_n'}{R_1}$ (по свойству пропорций), или $\frac{P_n}{2R} = \frac{P_n'}{2R_1}$. Будем неограниченно удваивать число сторон этих многоугольников. Тогда последовательность P_n имеет пределом C — длину окружности O, а последовательность P_n' имеет предел C_1 — длину окружности O_1, и поэтому при $n \to \infty$ из $\frac{P_n}{2R} = \frac{P_n'}{2R_1}$. следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$, т. е. отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.

Это постоянное число было введено еще в XVII веке и его принято обозначать греческой буквой π. Доказано, что π — иррациональное число. Приближенные значения π находят различными способами с определенной степенью точности. Если принять периметр 96-угольника за приближенную длину окружности, то $\pi \approx 3{,}14$ с точностью до 0,01. Ученые, используя усовершенствованные способы, вычисляют π с точностью, далеко превосходящей всякие практические требования.

Английский математик Шенкс в 1873 году вычислил π с точностью до 707 десятичных знаков. Еще в III веке до н.э. сиракузский геометр Архимед (около 287 — 212 гг. до н. э.) нашел для π простое число: $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Это число немного больше π и отличается от него на 0,002.

теорема

Длина окружности равна произведению числа π на диаметр данной окружности.

Дано: O — круг; $OA = R$ — радиус; C — длина окружности (рис. 330).

Доказать: $C = 2\pi R$.

Доказательство. Согласно лемме, отношение длины окружности к ее диаметру есть число посто-

янное для всех окружностей и равно π. Итак, $\frac{C}{2R} = \pi$. Тогда

$$C = 2\pi R = \pi D.$$

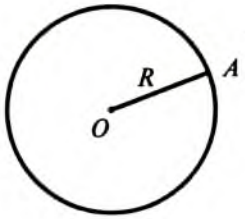


Рис. 330

Это и есть формула длины окружности, что и требовалось доказать.

Длина окружности есть $2\pi R$ и соответствует длине дуги в 360°. Значит, длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, а тогда длина дуги в n° равна

$$L = \frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга L выражена в минутах (n') или секундах (n''), то ее длина равна соответственно

$$L_1 = \frac{\pi R n}{180^\circ \cdot 60}$$

или

$$L_2 = \frac{\pi R n}{180^\circ \cdot 60^2},$$

где n — число минут для L_1 и секунд для L_2. В частности, если длина дуги равна радиусу окружности, т. е. $L = R$, то получим $R = \frac{\pi R n^\circ}{180}$, или $1 = \frac{\pi n}{180^\circ}$, отсюда $n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}14} \approx 57^\circ 17' 45''$. Эта дуга, равная радиусу, называется *радианом*. Итак,

$$1 \text{ радиан} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

§ 13.3. Площадь круга, сектора, сегмента и кольца

Определение. *За площадь круга принимается тот предел, к которому стремится последовательность площадей правильных многоугольников, вписанных в этот*

круг, когда число сторон многоугольника неограниченно удваивается.

Сначала следует доказать, что последовательность площадей таких многоугольников возрастает и ограничена сверху. Тогда, по теореме Вейерштрасса, предел такой последовательности существует.

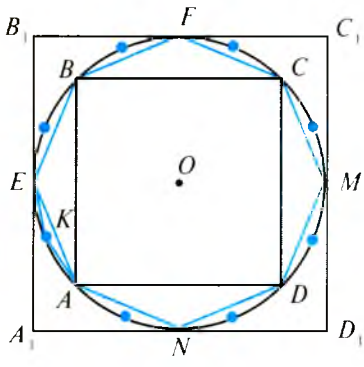


Рис. 331

Пусть O — круг; $OA = R$ — радиус; $ABCD$ — правильный четырехугольник, вписанный в круг (рис. 331).

Пусть $AD = a_4$ — сторона квадрата. Тогда его площадь равна:

$$S_4 = a_4^2. \qquad (1)$$

Каждую дугу AB, BC, CD и DA разделим пополам и полученные точки E, F, M и N соединим последовательно с точками A, B, C, D.

Получим правильный восьмиугольник $AEBFCMDN$, площадь которого равна $S_8 = S_{AEBFCMDN} = S_{ABCD} + 4S_{\Delta AEB}$ ($\Delta AEB = \Delta BFC = \Delta CMD = \Delta AND$ по третьему признаку равенства треугольников: $AB = BC = CD = AD$ по условию, а $AE = BE = BF = FC = CM = MD = DN = AN$ как хорды, стягивающие равные дуги). Итак,

$$S_8 = a_{(1)}^2 + 4S_{\Delta AEB}, \qquad (2)$$

сравнивая (1) и (2), получаем, что $S_8 > S_4$. Повторим тот же прием. Разделив каждую из дуг AE, EB, BF, FC, CM, MD, DN, AN пополам и соединив последовательно все точки деления и точки A, E, B, F, C, M, D, N, получим правильный 16-угольник, площадь которого $S_{16} = S_8 + 8S_{\Delta AKE}$, а поэтому $S_{16} > S_8$, т. е. $S_4 < S_8 < S_{16}$. Продолжив этот процесс, можно заключить, что последовательность площадей возрастающая. Но каждая из площадей вписанного в круг мно-

гоугольника не превосходит площади описанного правильного многоугольника, например, квадрата, площадь которого равна $S^1 = A_1B^2_1 = (2R)^2 = 4R^2$. И тогда, $S_4 < S_8 < S_{16} < \cdots < 4R^2$, т. е. последовательность S_n ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса, такая последовательность имеет предел, который и принимается за площадь круга.

теорема

Площадь круга равна произведению длины его окружности на половину радиуса круга.

Дано: O — круг; $OA = R$ — радиус; C — длина окружности (рис. 332).

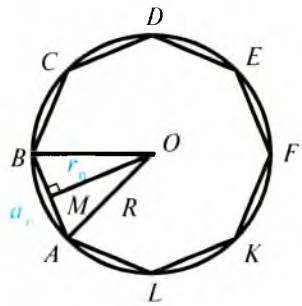


Рис. 332

Доказать: $S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Доказательство. Впишем в круг правильный n-угольник. Пусть $AB = a_n$ — сторона правильного n- угольника, а $OM = r_n$ — апофема правильного n-угольника. По определению площади круга: $S_{\text{круга}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n — площадь правильного n-угольника. Площадь правильного n-угольника равна половине произведения его периметра на апофему, т. е. $S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot r_n$, где P_n — периметр правильного n-угольника. Тогда площадь круга: $S_{\text{круга}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}(P_n \cdot r_n) = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} P_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} r_n$, но по определению длины окружности $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = C_{\text{окр}}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABO, в котором $r_n = OM$ — высота, а тогда и медиана. $AM = \frac{a_n}{2}$. При $n \to \infty$ $a_n \to 0$, т. к. $a_n = \frac{P_n}{n} \to 0$ как дробь, у которой знаменатель неограниченно возрастает (т. е. $\to \infty$), а числитель, хоть и возрастает, но не может быть больше P_n — пери-

метра правильного описанного около круга n-угольника. В треугольнике AOM разность сторон $AO - OM < AM = \frac{a_n}{2}$. Так как $\frac{a_n}{2} \to 0$, то $AO - OM \to 0$ и, следовательно, $OM \to AO$, т. е. $r_n \to R$. Итак, $S_{\text{круга}} = \frac{1}{2} C_{окр.} \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак,

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Площади кругов относятся как квадраты их радиусов или диаметров.

Доказательство. $S_1 = \pi R_1^2$, где R_1 — радиус первого круга; $S_2 = \pi R_2^2$, где R_2 — радиус второго круга. Отношение этих кругов равно: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{4 \cdot R_1^2}{4 \cdot R_2^2} = \frac{(2R_1)^2}{(2R_2)^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$, что и требовалось доказать.

теорема

Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса.

Дано: AOB — сектор круга; $\cup AB = n^\circ$; $OA = R$ — радиус; L_{AB} — длина дуги AB (рис. 333).

Доказать: $S_{\text{сек.}} = \frac{1}{2} L_{AB} \cdot R$.

Доказательство. Площадь круга соответствует площади сектора в 360°. Площадь сектора, содержащего дугу в 1°, равна: $S_{\text{сектора в 1}^\circ} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}$, т. е. составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга. Если же дуга AB содержит n°, то площадь сектора равна: $S_{AOB} = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = \frac{\pi R n}{180^\circ} \cdot \frac{R}{2} = L_{AB} \cdot \frac{R}{2}$. Итак,

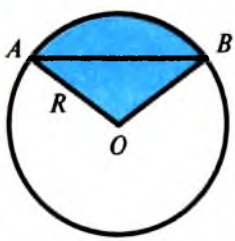


Рис. 333

$$S_{AOB} = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ} = L_{AB} \cdot \frac{R}{2},$$

что и требовалось доказать.

Для нахождения **площади сегмента,** ограниченного дугой L и хордой AB, нужно из площади сектора AOB вычесть площадь треугольника AOB; ALB — сегмент (рис. 334)

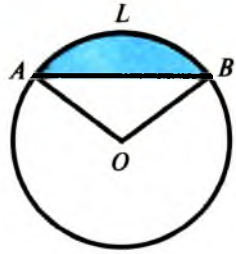


Рис. 334

$$S_{\text{сегмента } ALB} = S_{\text{сектора } AOB} - S_{\Delta AOB}.$$

Когда градусное измерение дуги сегмента невелико, можно вычислять площадь сегмента по следующей приближенной формуле:

$$S_{\text{сегмента}} = \frac{2}{3} bh,$$

где b — основание сегмента, h — его высота, обычно называемая стрелкой сегмента (рис. 335).

Доказано, что погрешность, получаемая по этой приближенной формуле, тем меньше, чем меньше отношение $h : b$. Так, при $h < \frac{1}{9} b$ (что бывает, когда дуга сегмента содержит меньше 50°) погрешность оказывается меньше 1% площади.

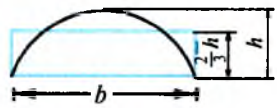


Рис. 335

Значительно более точные результаты дает более сложная формула:

$$S_{\text{сегмента}} = \frac{2}{3} bh + \frac{h^2}{2b}.$$

Этой формулой можно пользоваться для всех сегментов, меньших полукруга. Ошибка никогда не превышает 1% от искомой площади.

теорема

Площадь концентрического кольца между кругами с радиусами R и r равна $\pi(R^2 - r^2)$.

Дано: кольцо между кругами $OA = R$; $OB = R$ (рис. 336).
Доказать: $S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - r^2)$.

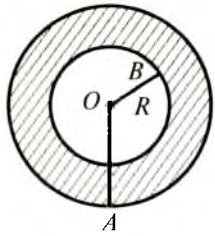


Рис. 336

Доказательство. Для нахождения площади кольца между кругами нужно найти разность площадей двух кругов с радиусами R и r, т. е. $S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$. Итак,

$$S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - r^2),$$

что и требовалось доказать.

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под числовой последовательностью?
2. Привести примеры известных числовых последовательностей.
3. Какие числовые последовательности являются монотонными?
4. Что называется пределом числовой последовательности?
5. Любая ли монотонная числовая последовательность имеет предел?
6. Существуют ли числовые последовательности, ограниченные сверху? Привести примеры.
7. Существуют ли числовые последовательности, ограниченные снизу? Привести примеры.
8. Какие числовые последовательности являются ограниченными? Привести примеры.
9. Являются ли монотонными последовательности периметров правильных вписанных в круг или описанных около него многоугольников?
10. Являются ли ограниченными последовательности периметров правильных вписанных в круг или описанных около него многоугольников?
11. Что называется длиной окружности?
12. Каким свойством обладает отношение длины окружности к ее диаметру?
13. Чем является число π? Чему равно его численное значение?
14. По какой формуле вычисляется длина окружности?
15. Как вычисляется длина дуги в n° или α радиан?

16. Что принимают за площадь круга?

17. Является ли последовательность площадей правильных вписанных в круг или описанных около него многоугольников монотонной?

18. Являются ли ограниченными последовательности площадей правильных вписанных в круг или описанных около него многоугольников?

19. По какой формуле вычисляется площадь круга?

20. Как вычисляется площадь секторов в n°?

21. Как вычисляется площадь сектора в α радиан?

22. Чему равна площадь сегмента?

Тест № 13

1. Определить диаметр ствола дерева, если длина окружности его поперечного сечения равна 450 см (с точностью до 1 см).

A) 140 см; B) 141 см; C) 143 см; D) 142 см; E) 144 см.

2. Как изменится длина окружности, если: *a*) ее радиус увеличить на 10 см; *b*) ее радиус увеличить в 5 раз; *c*) ее диаметр увеличить в 7 раз; *d*) ее диаметр уменьшить в 9 раз:

A) увеличится на 10 см; увеличится в 5 раз; увеличится в 7 раз; уменьшится в 9 раз;
B) увеличится в 10 раз; увеличится в 5 раз; увеличится в 14 раз; уменьшится в 18 раз;
C) увеличится на 20 π; увеличится в 5 раз; увеличится в 7 раз; уменьшится в 9 раз;
D) увеличится на 10 π; увеличится в 5 раз; увеличится в 14 раз; уменьшится в 18 раз;
E) увеличится на 10 π; увеличится в 5 раз; увеличится в 7 раз; уменьшится в 18 раз.

3. Определить диаметр трубы, которую можно изготовить из прямоугольного листа жести размером 425 мм x 250 мм с точностью до 1 мм (расходы на шов не принимаются).

A) 212,5 мм и 125 мм; B) только 125 мм; C) только 212,5 мм; D) 135 мм и 80 мм; E) только 80 мм.

4. Сколько градусов содержит дуга окружности, длина которой равна радиусу (с точностью до 1 минуты)?

A) 57°18′; B) 57°20′; C) 57°17′; D) 57°19′; E) 58°.

5. Найти длину и радиус окружности, если длина ее дуги, содержащая 36°, равна 45 см (с точностью до 0,1 см).

A) 450 и 71,7 см; B) 450 и 71,6 см; C) 450 и 71,5 см; D) 450 и 72,0 см; E) 450 и 71,0 см.

6. Радиус окружности равен 25 см. Определить длину ее дуги: a) в 1°; b) в 45°; c) в 10° (с точностью до 0,01 см).

A) 0,43; 19,6; 4,36; B) 0,45; 19,5; 4,36; C) 0,44; 19,8; 4,4; D) 0,45; 19,7; 4,36; E) 0,44; 19,6; 4,37.

7. Окружность радиуса 2 см разогнута в дугу радиуса 5 см. Найти получившийся центральный угол.

A) 140°; B) 144°; C) 142°; D) 150°; E) 145°.

8. Дуга радиуса 4 см, измеряющая центральный угол в 120°, равна длине некоторой окружности. Найти радиус этой окружности.

A) 1,5 см; B) 1,2 см; C) 1,6 см; D) $1\frac{1}{3}$ см; E) $1\frac{2}{3}$ см.

9. По данной хорде a определить длину ее дуги, если она содержит: a) 60°; b) 90°; c)120°.

A) $\frac{\pi a}{3}$; $\frac{\pi a}{4}$; $\frac{2\pi a}{3}$; B) $\frac{\pi a}{3}$; $\frac{\pi a}{2}$; $\frac{2\pi a}{3}$; C) $\frac{2\pi a}{3}$; $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; $\frac{4\pi a}{3}$; D) $\frac{\pi a}{3}$; $\frac{\pi a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi a\sqrt{2}}{9}$; E) $\frac{\pi a}{3}$; $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$.

10. Железная труба со стенками толщиной 6 мм имеет внешнюю окружность длиной 22 см. Найти длину внутренней окружности (с точностью до 1 мм).

A) 182 мм; B) 180 мм; C) 179 мм; D) 181 мм; E) 178 мм.

11. Определить ширину кольца из двух концентрических окружностей с длинами 167 см и 117 см (с точностью до 1 см).

A) 9 см; B) 7 см; C) 8 см; D) 10 см; E) 6 см.

12. Определить длину окружности, если она больше периметра правильного вписанного шестиугольника на 7 см.

A) 50π; B) 52π; C) 49π; D) 48π; E) 51π.

13. Найти площадь круга поршня воздушного насоса, диаметр которого равен 10 см ($\pi = 3{,}14$).

A) 314 см^2; B) 15,2 см^2; C) 78,5 см^2; D) 15,7 см^2; E) 80 см^2.

14. Определить площадь круга, если длина его окружности равна 8 см.

A) $\frac{32}{\pi}$ см^2; B) $\frac{18}{\pi}$ см^2; C) $\frac{20}{\pi}$ см^2; D) $\frac{16}{\pi}$ см^2; E) $\frac{30}{\pi}$ см^2.

15. Определить длину окружности, если площадь круга равна 18 см^2 (с точностью до 1 см).

A) 15 см; B) 16 см; C) 14 см; D) 17 см; E) 18 см.

16. Определить площадь круга, если площадь вписанного квадрата равна F.

A) πF; B) $\frac{\pi F}{2}$; C) $\frac{\pi F}{\sqrt{2}}$; D) $\frac{\pi F}{3}$; E) $1{,}5\pi F$.

17. Найти отношение между площадями кругов, вписанного в правильный треугольник и описанного около него.

A) 1:2; B) 2:3; C) 1:4; D) 4:1; E) 3:2.

18. Определить радиус сектора, если его площадь равна q, а центральный угол 72°.

A) $\sqrt{\frac{2q}{\pi}}$; B) $\sqrt{\frac{3q}{\pi}}$; C) $\sqrt{\frac{4q}{\pi}}$; D) $\sqrt{\frac{5q}{2\pi}}$; E) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$.

19. Определить площадь сегмента, если радиус равен R, а дуга содержит 60°.

A) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$; B) $\frac{R^2}{6}\left(2\pi - \sqrt{3}\right)$; C) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi - \sqrt{3}\right)$;
D) $\frac{R^2}{4}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$; E) $\frac{R^2}{12}\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right)$.

20. Во сколько раз увеличится площадь круга, если: a) диаметр увеличить в 3 раза; b) радиус увеличить в 1,5 раза.

A) в 3 раза; в 1,5 раза; B) в 9 раз; в 2,25 раза; C) в 9 раз; в 2,5 раза; в 3π раз; в $1{,}5\pi$ раз; E) в 9π раз; в $2{,}25\pi$ раз.

21. Во сколько раз нужно уменьшить радиус круга, чтобы площадь уменьшилась: a) в 4 раза; b) в 3 раза; c) в 1,96 раз.

A) в 2 раза; в $\sqrt{3}$ раза; в 1,4 раза; B) в 4 раза; в 3 раза; в 1,96 раза; C) в 2π раза; в $\sqrt{3}\pi$ раз; в $1{,}4\pi$ раз; D) в 4π раз; в 3π раза; в $1{,}96\pi$ раза; E) в 2 раза; в 1,5 раз; в 0,9 раз.

22. Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м, а расстояние между ними 39 м. Определить площадь круга.

A) 600 м^2; B) 620 м^2; C) 625 м^2; D) 681 м^2; E) 576 м^2.

23. Найти отношение площади круга к площади вписанного в него: a) квадрата; b) правильного треугольника; c) правильного шестиугольника.

A) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; B) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; D) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; E) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

24. Найти площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями радиусов 4 см и 6 см.

A) 24 см^2; B) 20 см^2; C) 24π см^2; D) 18π см^2; E) 20π см^2.

25. Найти отношение площадей кругов, вписанного в квадрат и описанного около него.

A) 2; B) 2,5; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{4}$; E) $\frac{1}{9}$.

26. Найти диаметр круга, площадь которого равна сумме площадей двух кругов радиусов 3 см и 4 см.

A) 7 см; B) 14 см; C) 10 см; D) 11 см; E) 12 см.

27. Сколько градусов содержит центральный угол сектора, площадь которого составляет от площади круга: *a*) $\frac{1}{2}$; *b*) $\frac{2}{3}$; *c*) $\frac{15}{16}$?

A) 180°; 220°; 336°; B) 180°; 240°; 330°; C) 180°; 240°; 340°; D) 180°; 250°; 377°30′; E) 180°; 240°; 337°30′.

28. Найти радиус сектора, если его площадь равна 157 мм^2, а центральный угол равен 72°.

A) 15,81 мм; B) 15 мм; C) 16 мм; D) 14,5 мм; E) 4,82 мм.

29. Определить длину дуги, содержащей 22° 30′, если радиус равен 1.8 м.

A) $\frac{\pi}{5}$ м; B) $\frac{9\pi}{40}$ м; C) $\frac{9\pi}{20}$ м; D) $\frac{3\pi}{4}$ м; E) $\frac{6\pi}{5}$ м.

30. Найти центральный угол сектора, если его площадь равна 56,8 м^2, а радиус равен 6 м.

A) $\frac{568^\circ}{\pi}$; B) $\frac{284^\circ}{\pi}$; C) $\frac{424^\circ}{\pi}$; D) $\frac{560^\circ}{\pi}$; E) $\frac{574^\circ}{\pi}$.

31. Найти диаметр круга, площадь которого равна сумме площадей двух кругов радиусами 6 см и 8 см.

A) 10 см; B) 5 см; C) 20 см; D) 12 см; E) 7 см.

32. Найти диаметр круга, площадь которого равна разности площадей двух кругов радиусами 10 см и 8 см?

A) 12 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 2 см; E) 9 см.

33. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличится: a) в 2 раза; b) в 5 раз; c) в m раз?

A) 2; 5; m; B) 4; 10; $2m$; C) 4; 25; m^2; D) 2π; 5π; $m\pi$; E) 4π; 25π; $m^2\pi$.

34. Найти отношение площади правильного вписанного в круг треугольника и квадрата.

A) $3\sqrt{3}$; B) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$; C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; D) $\frac{3}{2}$; E) $\frac{3}{4}$.

35. Найти отношение площади круга к площади вписанного в него правильного шестиугольника.

A) $2\pi : 3\sqrt{3}$; B) $\pi : 3\sqrt{3}$; C) $2\pi : \sqrt{3}$; D) $4\pi : 3\sqrt{3}$; E) $\pi : \sqrt{3}$.

36. Найти отношение площади круга к площади описанного около него квадрата.

A) $\pi : 2$; B) $\pi : 4$; C) $2\pi : 3$; D) $2\pi : 5$; E) $3\pi : 2$.

37. Найти площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него квадрата (радиус круга равен R).

A) $(\pi - 2) \cdot R^2$; B) $(\pi - 3) \cdot R^2$; C) $(2\pi - 1) \cdot R^2$; D) $(2\pi - 3) \cdot R^2$; E) $(\pi - 1) \cdot R^2$.

38. Найти площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него правильного треугольника (радиус круга равен R)

A) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot R^2$; B) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot R^2$; C) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot R^2$;

D) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot R^2$; E) $\left(\pi - \sqrt{3}\right) \cdot R^2$.

39. Найти площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него правильного шестиугольника (радиус круга равен R).

A) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot R^2$; B) $\left(\pi - \sqrt{3}\right) \cdot R^2$; C) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot R^2$;

D) $\left(2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \cdot R^2$; E) $\left(3\pi - 2\sqrt{3}\right) \cdot R^2$;

40. Дана окружность радиуса R. Найти площадь сектора, соответствующего дуге длиной, равной l.

A) Rl; B) $2Rl$; C) $\frac{Rl}{3}$; D) $\frac{Rl}{2}$; E) $\frac{2Rl}{3}$.

Глава 14

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

§ 14.1. Числовая ось. Метод координат на прямой

Представление о числовой оси дает обычная линейка. Любому положительному числу в пределах линейки можно поставить в соответствие точку. Чем больше число, тем дальше точка от начала линейки.

Определение. *Прямая, на которой указана начальная точка O, положительное направление и масштабный отрезок (т. е. единица измерения), называется* ***числовой осью.***

Обычно положительное направление выбирают слева направо.

Возьмем произвольную точку M на числовой оси. Измерив длину отрезка OM, получим число $m > 0$ (вправо от O). Введем переменную x: обозначим 1) $x = m$, если M правее точки O и 2) $x = -m$, если M левее точки O. Число x называется координатой точки M. Координата записывается в круглых скобках, рядом с обозначением самой точки: $M(x)$. Двум разным точкам M_1 и M_2 будут соответствовать два различных числа x_1 и x_2 — их координаты. Например, $M_1(2)$ и $M_2(-3)$ на рисунке 337.

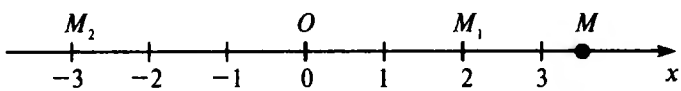


Рис. 337

Пусть даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Если длину отрезка с концами A и B обозначить $|AB|$, то для этих точек $|AB| = |x_2 - x_1|$.

§ 14.2. Декартова система координат

Система координат — это совокупность условий, определяющих положение точки на прямой, на плоскости или в пространстве. Впервые понятие системы координат было введено в геодезии и астрономии для определения положения точки на земной поверхности или на небесной сфере.

В XIV веке французский математик *Н. Орезм* пользовался системой координат на плоскости для построения графиков. Он употреблял понятия долготы и широты, соответствующие современным понятиям абсциссы и ординаты.

В XVII веке, благодаря трудам французского ученого Декарта, было выяснено значение метода координат, позволяющего переводить задачи геометрии на язык алгебры и математического анализа и, обратно, давать различным результатам алгебры и математического анализа геометрическую интерпретацию.

Прямолинейная система координат на плоскости (или в пространстве), в которой масштабы по осям координат равны, названа по имени французского математика, философа, физика и физиолога *Рене Декарта* (1596—1650), который заложил основы аналитической геометрии, дал понятие переменной величины и функции, ввел многие алгебраические обозначения. Декартом был высказан закон сохранения количества движения, даны понятия импульса силы. Он же автор теории, объясняющей образование и движение частиц материи.

Декарт

Основными сочинениями Декарта являются «Геометрия» (1637 г.), «Рассуждение о методе» (1637 г.) и «Начала философии» (1644 г.).

В элементарной математике в основном используют *прямоугольную декартову систему координат*.

Определение. *Две взаимно перпендикулярные числовые оси, проведенные через данную точку (O), образуют* ***прямоугольную систему координат.*** *Эти числовые оси называются* ***осями координат,*** *а их точка пересечения —* ***началом координат.***

Если через точку M плоскости провести прямую, параллельную оси Oy, то она пересечет ось абсцисс в некоторой точке M_x (рис.338).

Определение. ***Абсциссой*** *точки M называется число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки M_x.*

Это число x будет положительным, если M_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательным, если M_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка M лежит на оси ординат, то абсцисса ее считается равной нулю.

Аналогично определяется и ордината y.

Через точку M проводим прямую, параллельную оси Ox, которая пересекает ось ординат в некоторой точке M_y (рис. 338).

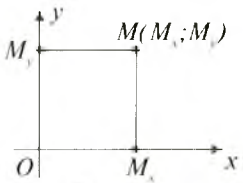


Рис. 338

Определение. *Ординатой точки M называется число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до точки M_y.*

Это число y будет положительным, если M_y принадлежит положительной полуоси, и отрицательным, если M_y принадлежит отрицательной полуоси.

Если точка M лежит на оси абсцисс, то ее ордината считается равной нулю.

На рисунке 339 изображена прямоугольная система координат xOy, где Ox и Oy — оси координат; O — начало координат.

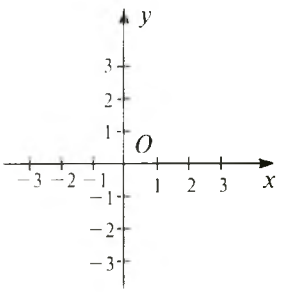


Рис. 339

Определение. *Одна ось* ***x*** *(обычно горизонтальная) называется* ***осью абсцисс,*** *или* ***осью Ox.*** *Другая ось* ***y*** *(обычно вертикальная) называется* ***осью ординат,*** *или* ***осью Oy.***

Начало координат делит каждую ось координат на две полуоси: одна считается *положительной* (по оси x — вправо, по оси y — вверх), а другая считается *отрицательной* (по оси x — влево, по оси y — вниз).

Каждая точка на плоскости характеризуется двумя числами — двумя координатами: *абсциссой* и *ординатой.* Верно и обратное утверждение, т. е. два числа (две координаты) задают одну точку. На рисунке 340 точки $A(3; 2)$ и $M(x, y)$ числа 3 и x задают абсциссы точек A и M, а числа 2 и y — ординаты этих же точек.

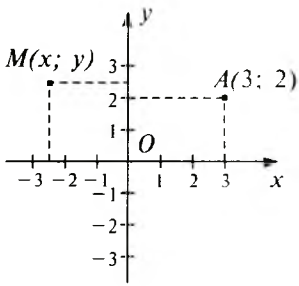


Рис. 340

Координаты точки записываются рядом с обозначением точки в скобках, при этом на первом месте в скобках пишут абсциссу точки: $M(x; y)$.

Таким образом, каждой точке на плоскости в системе прямоугольных координат отвечает «упорядоченная» пара действительных чисел $(x; y)$. И каждой паре действительных чисел соответствует единственная точка координатной плоскости.

Между парами действительных чисел и точками плоскости в системе координат xOy имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому будем говорить: «дана точка», вместо «даны координаты точки», «найти точку M», вместо «найти координаты точки M».

Каждой точке плоскости сопоставляют пару чисел (координаты точки): абсциссу x и ординату y.

Определение. ***Координаты точки*** *— это числа,*

взятые в определенном порядке и характеризующие положение точки на линии, на плоскости.

§ 14.3. Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная декартова система координат и произвольные точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ (рис. 341).

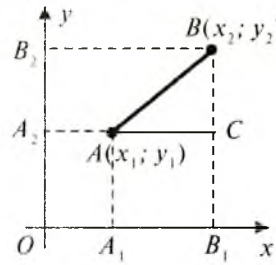


Рис. 341

Выразим расстояние AB между этими точками через координаты точек A и B. Пусть A_1 и B_1 — проекции на ось абсцисс точек A и B соответственно, а A_2 и B_2 — проекции этих же точек на ось ординат.

Тогда $OA_1=x_1$; $OB_1=x_2$ и $OA_2=y_1$; $OB_2=y_2$, следовательно, $A_1B_1=|x_2-x_1|$ и $A_2B_2=|y_2-y_1|$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, где C — точка пересечения прямых BB_1 и A_2A. Гипотенуза AB этого треугольника по теореме Пифагора равна: $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}$, но $AC=A_1B_1=|x_2-x_1|$, а $BC=A_2B_2=|y_2-y_1|$.

Тогда

$$AB=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2},$$

но по свойству модуля: $|a|^2=a^2$, значит

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

т. е. расстояние между двумя точками на плоскости равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

§ 14.4. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в декартовой системе координат задан отрезок AB, который точкой C делится в известном от-

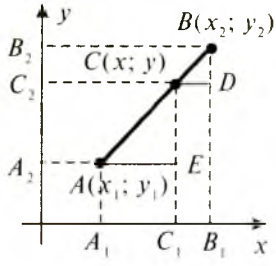


Рис. 342

ношении λ, т.е. $AC : CB = \lambda$. Задача деления отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы найти координаты точки C, если известны координаты концов отрезка $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и число λ (рис.342).

Пусть данный отрезок AB не параллелен координатным осям. Найдем проекции данных точек A и B и искомой точки C, координаты которой обозначим через x и y, на ось абсцисс (A_1, B_1, C_1 соответственно) и на ось ординат (A_2, B_2, C_2 соответственно). Проекции точек A и C на прямые CC_1 и BB_1 обозначим через E и D.

Рассмотрим прямоугольные треугольники: ΔACE и ΔCBD. Они имеют по одному равному острому углу ($\angle CAE = \angle BCD$ как соответственные при параллельных AE и CD и секущей AB), а потому подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{CE}{BD}$, но по условию $\frac{AC}{CB} = \lambda$, а тогда

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AE}{CD} = \lambda \qquad (1)$$

и

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CE}{BD} = \lambda, \qquad (2)$$

но $AE = A_1C_1 = |x - x_1|$; $CD = C_1B_1 = |x_2 - x|$; $CE = C_2A_2 = |y - y_1|$; $BD = B_2C_2 = |y_2 - y|$. Из равенства (1) имеем: $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \lambda$, а из равенства (2) имеем: $\frac{|y - y_1|}{|y_2 - y|} = \lambda$.

В этих двух равенствах знаки числителей и знаменателей дроби совпадают, поэтому знак модуля у членов дроби можно опустить.

Итак, $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$, или $x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x)$. Из этого

равенства получаем: $x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2$, и потому $x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2$, следовательно,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (3)$$

Так как $\lambda \neq -1$, то абсцисса точки C однозначно определяется по формуле (3). Аналогично определяется ордината точки C:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \text{ или } y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$

тогда $y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2$, и потому $y(1 + \lambda) = y_1 + \lambda y_2$. Следовательно,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (4)$$

Частным случаем деления отрезка в данном отношении является деление отрезка на равные части, т. е. нахождение координат середины отрезка AB.

В этом случае $AC : CB = 1$, т. к. $AC = CB$, и из выведенных формул (3) и (4) следует, что середина отрезка имеет координаты:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, *координаты середины отрезка равны полусумме одноименных координат его концов.*

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение числовой оси.
2. Как определяется длина отрезка на числовой оси?
3. Дать определение прямоугольной (или декартовой) системы координат.
4. Каковы знаки координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвертой) четверти?
5. Как определяется расстояние между двумя точками?
6. Как определяются координаты середины отрезка?

7. Как определить координаты точек, делящих отрезок в данном отношении?
8. Можно ли определить точку пересечения медиан, зная координаты вершин треугольника?
9. Можно ли определить вид треугольника (равнобедренный, равносторонний и разносторонний), зная координаты вершин треугольника?
10. Как определить величину диагоналей четырехугольника, если известны координаты его вершин?

Тест № 14

1. Найти длину медианы CM треугольника с вершинами $A(3; 1)$; $B(1; 3)$ и $C(0; 2)$.

A) 5; B) 1; C) 4; D) 2; E) 3.

2. Дан треугольник с вершинами $A(2; 1)$; $B(-2; 4)$ и $C(-6; -4)$. Найти меньшую из сторон ΔABC.

A) $\sqrt{70}$; B) $\sqrt{73}$; C) 5; D) 8; E) $\sqrt{60}$.

3. В ΔABC с вершинами $A(2; -1)$; $B(-1; 3)$ и $C(-3; 1)$ проведена медиана AD. Найти ее длину.

A) 5; B) 4; C) 3; D) 6; E) 2.

4. Точки $A(-2; 4)$; $B(-6; 12)$; $C(2; 8)$ являются вершинами треугольника. Найти точку пересечения медиан.

A) (6; 8); B) (8; 2); C) (2; −8); D) (−6; 12); E) (−2; 8).

5. Найти $\frac{2}{3}$ расстояния MN, если $M(3; -2)$ и $N(-1; 1)$.

A) 1,5; B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; D) $1\frac{2}{3}$; E) $3\frac{2}{3}$.

6. Известно, что (5; 8) — координаты вершины C параллелограмма $ABCD$, а (4; 5) — координаты точки O пересечения диагоналей AC и BD. Найти координаты вершины A.

A) (2; 3); B) (3; 2); C) (1; 4); D) (4; 1); E) (3; 1).

7. Найти координаты середины отрезка AB, если $A(-3; 2)$ и $B(4; 1)$.

A) $(-0{,}5;\ 1{,}5)$; B) $(1{,}5;\ -0{,}5)$; C) $(1{,}5;\ 0{,}5)$; D) $(0{,}5;\ -1{,}5)$; E) $(0{,}5;\ 1{,}5)$.

8. Точка $A(0;\ y)$ равноудалена от точек $B(1;\ 2)$ и $C(-1;\ 3)$. Найти y.

A) $y=1$; B) $y=2$; C) $y=\frac{5}{3}$; D) $y=1{,}8$; E) $y=2{,}5$.

9. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если координаты его вершин: $A(8;\ -5)$; $B(2;\ 5)$ и $C(-7;\ -9)$.

A) $(-1;\ -3)$; B) $(1;\ -3)$; C) $(1;\ 3)$; D) $(-1;\ 3)$; E) $\left(\frac{2}{3};\ 3\right)$.

10. Найти расстояние от точки $M(-4;\ 3)$ до начала координат.

A) 2; B) 6; C) 3; D) 4; E) 5.

11. Найти длину отрезка с концами в точках $M(-4;\ 1)$ и $N(2;\ -4)$.

A) $\sqrt{41}$; B) $\sqrt{52}$; C) $\sqrt{13}$; D) $\sqrt{61}$; E) $\sqrt{29}$.

12. Точки $A(-9;\ 4)$ и $B(3;\ 10)$ симметричны относительно точки $M(x;\ y)$. Найти x и y.

A) $(3;\ 7)$; B) $(-3;\ 3)$; C) $(6;\ 7)$; D) $(-3;\ 7)$; E) $(6;\ 3)$.

13. Точка $F(3;\ y)$ равноудалена от точек $K(2;\ 3)$ и $P(4;\ 6)$. Найти значение y.

A) 6,5; B) 4; C) 5; D) 5,5; E) 4,5.

14. Даны три вершины параллелограмма $MNPQ$: $M(1;\ 3)$, $N(3;\ 4)$, $P(4;\ 2)$. Найти координаты четвертой вершины.

A) $(3;\ 1)$; B) $(2;\ 1)$; C) $(2;\ 2)$; D) $(2;\ 4)$; E) $(3;\ 4)$.

15. Найти стороны ΔMNP, если заданы вершины $M(4;\ 2)$, $N(0;\ -1)$ и $P(-1;\ 2)$.

A) 5; 5; $\sqrt{10}$; B) 4; 5; $\sqrt{10}$; C) 5; 5; $\sqrt{2}$; D) $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; 5; E) 5; 5; $\sqrt{6}$.

Глава 15

ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ)

§ 15.1. Уравнение линии

Из алгебры известно, что всякое уравнение, связывающее между собой x и y, задает на координатной плоскости, как правило, линию. Например, $x + y = 5$ — прямая линия, $y = x^2$ — парабола. Возникает и обратная задача: найти уравнение, задающее данную линию плоскости. С такой задачей сталкиваются, когда хотят использовать метод координат для решения той или иной геометрической задачи.

В этой и в следующей главе рассмотрим некоторые плоские линии: прямую, окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

Определение. *Равенство $F(x; y) = 0$ называется уравнением линии Z в заданной системе координат на плоскости, если оно выполнено для координат всех точек линии Z и не выполнено для координат точек, не лежащих на линии Z.*

§ 15.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

теорема

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + b$ (где k — угловой коэффициент, b — отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy).

Дано: $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент; b — отрезок, отсекаемый прямой оси Oy.

Доказать: уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$.

Доказательство. Проведем прямую, пересекающую ось Oy в точке $B(0; b)$ под углом α — с осью

Ox (рис.343). Чтобы вывести уравнение прямой, возьмем любую точку M с текущими координатами x и y, расположенную на искомой прямой.

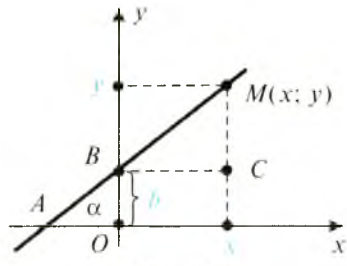


Рис. 343

Рассмотрим прямоугольный ΔBMC, где $\angle MBC = \angle BAO$ как соответственные углы при параллельных прямых BC и AO и секущей AM. Так как $BC = x$, а $MC = y - b$, то тангенс угла α равен отношению противолежащего катета MC к прилежащему BC. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MC}{BC} = k$; $MC = BC \cdot k$, или $y - b = kx$. Отсюда

$$\boxed{y = kx + b},$$

что и требовалось доказать.

§ 15.3. Общее уравнение прямой и его исследование

Любое уравнение первой степени, т.е. уравнение вида $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$, в котором A и B не равны одновременно нулю, есть уравнение прямой.

Пусть $B \neq 0$. Выразим y через x: $By = -Ax - C$; $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, и тогда $y = kx + b$, где $k = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Значит, $Ax + By + C = 0$ и есть уравнение прямой.

Уравнение $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ *называется* ***общим уравнением прямой***.

Рассмотрим частные случаи этого уравнения, когда один из коэффициентов A, B или C равен 0.

а) Пусть в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ $C = 0$ (при $A \neq 0$; $B \neq 0$). Уравнение приобретает вид: $Ax + By = 0$, или $y = -\frac{A}{B}x$. Обозначив $-\frac{A}{B} = k$, получим

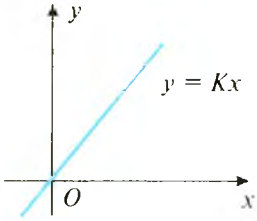


Рис. 344

$y = kx$. В этом случае прямая проходит через начало координат $O(0; 0)$, т. к. координаты начала $x = 0$; $y = 0$ удовлетворяют уравнению $y = kx$.

На рисунке 344 изображена прямая вида: $Ax + By = 0$, или $y = kx$, которая проходит через начало координат.

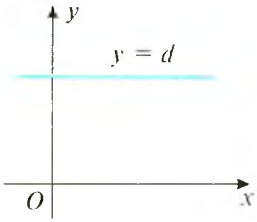


Рис. 345

b) Если $A = 0$ ($B \neq 0$; $C \neq 0$), то уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид: $By + C = 0$, или $y = -\frac{C}{B} = const$, т. е. $y = d$. Полученное уравнение есть уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

На рисунке 345 изображена прямая вида: $By + C = 0$, или $y = d$, параллельная оси абсцисс.

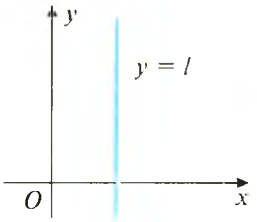


Рис. 346

c) Если $B = 0$ ($A \neq 0$; $C \neq 0$), то уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид: $Ax + C = 0$, или $x = -\frac{C}{A} = const$, т. е. $x = l$. Полученное уравнение есть уравнение прямой, параллельной оси ординат.

На рисунке 346 изображена прямая вида: $Ax + C = 0$, или $x = l$, параллельная оси ординат.

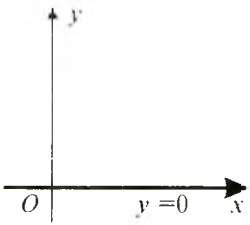


Рис. 347 *a*

d) Если $A = C = 0$ ($B \neq 0$),то уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид: $By = 0$, или $y = 0$ — это уравнение оси абсцисс; прямая в этом случае совпадает с осью Ox.

На рисунке 347 а изображена прямая вида: $y = 0$. Это есть сама ось абсцисс.

е) Если $B = C = 0$ $(A \neq 0)$, то уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид: $Ax = 0$, или $x = 0$ — это уравнение оси ординат; прямая в этом случае совпадает с осью Oy.

На рисунке 347 б изображена прямая вида: $x = 0$, совпадающая с осью ординат.

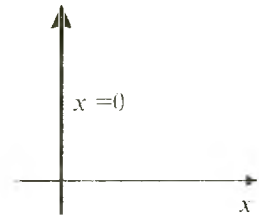


Рис. 347 б

§ 15.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку

Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k. Уравнение искомой прямой запишем в виде:

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Так как точка M_1 принадлежит прямой, то имеет место равенство:

$$y_1 = kx_1 + b. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим: $y - y_1 = (kx + b) - (kx_1 + b)$, откуда

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3)$$

Это и есть искомое уравнение прямой. При изменении углового коэффициента k прямая (3) вращается вокруг точки M_1, т. е. уравнение (3) задает пучок прямых, проходящих через точку M_1 (рис. 348). Из уравнения (3) полученной прямой можно получить уравнение любой прямой, проходящей через точку M_1, за исключением прямой $x = x_1$.

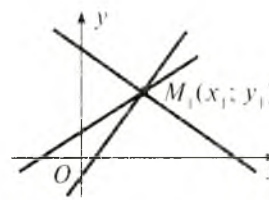


Рис. 348

§ 15.5. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть на плоскости xOy заданы две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Проведем через эти точки прямую AB (эта прямая — единственная, т. к. по аксиоме через две точки проходит единственная прямая). На прямой AB выбираем произвольную точку M с текущими координатами x и y, т. е. $M(x; y)$ (рис. 349).

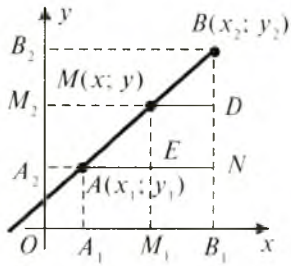


Рис. 349

Найдем проекции точек A, M и B на ось абсцисс — это точки A_1, M_1 и B_1 соответственно, а на ось ординат — точки A_2, M_2 и B_2 соответственно. Точку пересечения BB_1 с M_2M обозначим через D, а точку пересечения AA_2 с BB_1 через N. Из подобия треугольников AME и ABN по лемме о подобии (т. к. $MM_1 \parallel BB_1$) следует, что

$$\frac{AE}{AN} = \frac{ME}{BN}, \qquad (4)$$

но $AE = A_1M_1 = |x - x_1|$; $AN = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$; $BN = A_2B_2 = |y_2 - y_1|$. $ME = M_2A_2 = |y - y_1|$.

Подставив эти значения в пропорцию (4), получим: $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{|y - y_1|}{|y_2 - y_1|}$, или

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}. \qquad (5)$$

(поскольку числители и знаменатели обеих дробей имеют одинаковые знаки, знак модуля у членов дробей можно опустить).

Полученное *уравнение* (5) *называется уравнением прямой, проходящей через две точки* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$.

Это уравнение можно получить и другим спосо-

бом. Из того, что точка $A(x_1; y_1)$ лежит на прямой $y = kx + b$, то

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{6}$$

(как уравнение прямой, проходящей через данную точку A_1), а из того, что точка $B(x_2; y_2)$ лежит на той же прямой (6), то

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \tag{7}$$

откуда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{8}$$

где k — это угловой коэффициент искомой прямой. Подставляя его в выражение (6), получим $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$, или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

§ 15.6. Уравнение прямой в отрезках на координатных осях

Пусть заданы две точки A и B, лежащие на координатных осях: $A(a, 0)$ и $B(0; b)$ (рис. 350). Составим уравнение прямой, проходящей через две точки A и B.

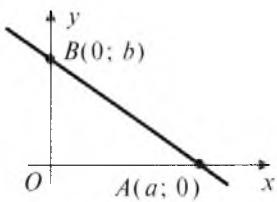


Рис. 350

В уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

подставим соответствующие координаты точек $A(a, 0)$ и $B(0; b)$, т. е. $x_1 = a$; $x_2 = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = b$.

Тогда $\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}$, и потому

$$\frac{y}{b} = \frac{x - a}{-a}. \tag{9}$$

Преобразуя выражение (9), имеем: $\frac{y}{b} = \frac{x}{-a} + 1$, или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (10)$$

Уравнение (10) *называется уравнением прямой в отрезках* на осях, т.к. числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая AB на осях координат.

Данное уравнение не имеет смысла, если прямая проходит через начало координат.

§ 15.7. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности прямых

теорема

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле: $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Дано: прямые $y = k_1x + b_1$; и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$; θ — угол между прямыми (рис. 351)

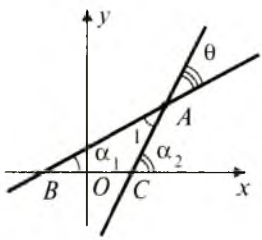


Рис. 351

Доказать, что $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Доказательство. Рассмотрим углы θ и 1, которые равны между собой как вертикальные. Угол α_2 — внешний угол ΔABC. По свойству внешнего угла треугольника угол α_2 равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Значит, $\angle\alpha_2 = \angle\alpha_1 + \angle 1$, или $\angle\alpha_2 = \angle\alpha_1 + \angle\theta$, откуда $\angle\theta = \angle\alpha_2 - \angle\alpha_1$. А тогда:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Используя формулу тангенса разности двух углов, имеем: $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$, или, заменяя тангенсы углов α_1 и α_2 угловыми коэффициентами прямых, имеем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (11)$$

что и требовалось доказать.

Если прямые параллельны, то $k_2 - k_1 = 0$, или

$$k_2 = k_1 \qquad (12)$$

условние параллельности двух прямых.

Если прямые перпендикулярны, то $1 + k_1 k_2 = 0$, или

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad (13)$$

условие перпендикулярности двух прямых.

Если прямые заданы в общем виде: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то, приведя к уравнениям с угловым коэффициентом, будем иметь:

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1}; \quad y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2},$$

где $-\frac{A_1}{B_1} = k_1$ и $-\frac{A_2}{B_2} = k_2$, подставляя в формулу (11), получим $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}}$, или

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{B_1 \cdot B_2 + A_1 \cdot A_2} \qquad (14)$$

тангес угла между двумя прямыми.

Если прямые параллельны, то $\angle\theta = 0$, тогда $\operatorname{tg}\theta = 0$ и числитель дроби равен нулю, т. е. $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$, откуда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (15)$$

условие параллельности двух прямых, заданных в общем виде.

Если прямые перпендикулярны, то $\angle\theta = 90^\circ$ и $\operatorname{tg}\theta$ не существует. Значит, знаменатель дроби равен нулю, т. е.

$$B_1 \cdot B_2 + A_1 \cdot A_2 = 0 \qquad (16)$$

условие перпендикулярности двух прямых, заданных в общем виде.

§ 15.8. Точка пересечения двух прямых

Даны прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Чтобы найти точку пересечения двух прямых, надо решить систему двух уравнений, т. к. точка пересечения должна принадлежать обеим прямым.

Линейную систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$ можно решать различными методами:

1) способом подстановки;
2) способом алгебраического сложения;
3) методом Крамера.

Решив данную систему методом Крамера, получим

$$x = \frac{C_1 \cdot B_2 - C_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1} \quad \text{и} \quad y = \frac{A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1}{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1} \qquad (17)$$

координаты точек пересечения двух прямых, заданных в общем виде.

Вопросы для самопроверки

1. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Записать общее уравнение прямой.
3. Как расположена прямая, если в уравнении $Ax + By + C = 0$ $A = 0$ ($B = 0$; $C = 0$)?
4. В чем состоит геометрический смысл углового коэффициента прямой?
5. Записать уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Записать уравнение прямой в отрезках по координатным осям.
7. При каком условии возможно перейти от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к уравнению с угловым коэффициентом?

8. Что геометрически представляет собой в уравнении прямой $y = kx + b$ число b?

9. Почему коэффициент k в уравнении прямой называется угловым коэффициентом?

10. Можно ли найти среднюю линию треугольника, зная координаты трех его вершин?

11. Можно ли составить уравнение медианы треугольника, зная координаты его вершин?

12. Как записать уравнение прямой $3x - 5y + 8 = 0$ в отрезках на координатных осях?

13. Как определяется угол между двумя прямыми, заданными с угловым коэффициентом?

14. Как определяется угол между двумя прямыми, заданными в общем виде?

15. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых, заданных с угловым коэффициентом.

16. Сформулируйте условие параллельности прямых, заданных с угловым коэффициентом.

17. При каком условии перпендикулярны прямые, заданные в общем виде?

18. При каком условии параллельны прямые, заданные в общем виде?

19. Назвать частные случаи уравнения прямой.

20. Как найти точку пересечения двух прямых?

Тест №15

1. Чему равен угловой коэффициент прямой $2x + 3y - 5 = 0$?

A) $-2{,}5$; B) $-\frac{5}{3}$; C) $-\frac{2}{3}$; D) $\frac{2}{3}$; E) $2{,}5$.

2. Уравнение $3x - 5y + 15 = 0$ записать в отрезках.

A) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$; B) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$; C) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$;

D) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$; E) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1$.

3. Записать уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A\ (-1;\ 2)$.

A) $x - 1 = 0$; B) $x - 2 = 0$; C) $x + 1 = 0$; D) $x + y - 1 = 0$; E) $x - y - 3 = 0$.

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3; 1)$ и $B(2; -2)$.

A) $3x-5y+4=0$; B) $3x-2y+5=0$; C) $3x+5y++4=0$; D) $5x-3y+2=0$; E) $5x-4y+9=0$.

5. Чем является четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-12; 6)$; $B(0; 11)$; $C(5; -1)$; $D(-7; -6)$?

A) ромбом; B) квадратом; C) параллелограммом, D) трапецией; E) прямоугольником.

6. Точки $A(-1; 2)$; $B(3; 6)$ и $C(1; -4)$ — вершины треугольника. Найти уравнение прямой AD, перпендикулярной прямой BC.

A) $x+5y-9=0$; B) $x-5y+9=0$; C) $x+4y--5=0$; D) $5x-y+9=0$; E) $5x+y-8=0$.

7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $(-3; 1)$ и $(2; -2)$.

A) $3x+5y+4=0$; B) $5x-3y-10=0$; C) $3x-5y++24=0$; D) $4x-5y-3=0$; E) $3x-5y+10=0$.

8. Через точку $A(2; -3)$ проходит прямая, параллельная прямой $y=2x-5$. Написать уравнение этой прямой.

A) $y=2x+7$; B) $y=\frac{1}{2}x+7$; C) $y=2x-7$; D) $y=2x-3$; E) $y=2x-4$.

9. Найти уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если $A(-2; 3)$ и $B(1; -4)$.

A) $3x+7y-8=0$; B) $3x-7y-2=0$; C) $8x-6y--30=0$; D) $6x+8y-24=0$; E) $3x+7y-24=0$.

10. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $M_1(1; 2)$ и $M_2(-2; 3)$.

A) $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$; B) $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$; C) $(1; 0)$; D) $(-1; 0)$; E) $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

11. Найти расстояние от точки $M(2; 2)$ до прямой $y=x-1$.

A) $\frac{1}{2}$; B) 2,5; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{1}{4}$; E) 6,25.

12. При каком значении k график функции $y = kx + 6$ проходит через точку $M(0{,}5;\ 4{,}5)$?

A) 3; B) -3; C) -2; D) 4; E) -30.

13. При каких значениях a и b прямые $ax + by = -4$ и $2x - 2y = 4$ совпадают?

A) $a = 2;\ b = -2$; B) $a = -2;\ b = 2$; C) $a = b = 2$; D) $a = 2;\ b = -1$; E) $a = 4;\ b = 2$.

14. При каких значениях a прямые $ax + 2y = -4$ и $x - y = 4$ параллельны?

A) 1; B) 2; C) -2; D) $a \in R$; E) -1.

15. Найти расстояние от точки $M\ (2;\ 1)$ до прямой $y = x + 2$.

A) 2,25; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $1{,}5\sqrt{2}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $x - 2y + 2 = 0;\ x + y - 4 = 0$ и $y = 0$.

A) 5; B) 5,5; C) 6; D) 7; E) 6,8.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (3;\ 4)$ и перпендикулярной прямой $y = \frac{1}{3}x + 5$.

A) $y = 3x$; B) $y = -3x + 9$; C) $y = -3x + 13$; D) $y = \frac{1}{3}x + 13$; E) $y = -3x + 2$.

18. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ -3)$, параллельной прямой $2x + 3y = 6$.

A) $2x + 3y + 12 = 0$; B) $2x + 3y + 7 = 0$; C) $3x + 2y + 12 = 0$; D) $2x - 3y + 7 = 0$; E) $2x + 3y + 5 = 0$.

19. Найти тангенс острого угла между прямыми $y = 3x + 5$ и $y = x - 3$.

A) 3; B) $-\frac{1}{3}$; C) $-\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{2}$; E) 2.

20. Найти косинус угла между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = -x + 2$.

A) $-\frac{1}{10}$; B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; C) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ D) $-\frac{1}{2}$; E) 2.

Глава 16

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из предыдущего параграфа известно, что *уравнением фигуры в декартовых координатах на плоскости называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки данной фигуры*. Верно и обратное: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами какой-либо точки этой фигуры.

§ 16.1. Конические сечения

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. *Линии на плоскости, уравнения которых задаются в виде* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *называются линиями второго порядка*.

Линии второго порядка играют большую роль в архитектуре, астрономии, механике и других разделах науки и техники. С ними были знакомы уже в Древней Греции, но греческие математики еще не знали ни метода координат, ни уравнений. Вместо этого они рассматривали всевозможные конические сечения плоскостью.

Кривые, которые получаются при сечении круговой конической поверхности, не проходящей через вершину этой поверхности, называются *коническими сечениями*, или *кониками*. К этим линиям относятся эллипс, окружность, гипербола и парабола.

Определение. *Если секущая плоскость пересекает все прямолинейные образующие одной полости конуса, то в сечении получится линия, называемая* ***эллипсом*** (рис. 352).

Определение. *Если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получим линию, называемую* ***окружностью*** (рис. 353).

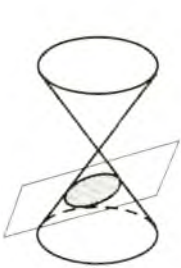


Рис. 352

Рис. 353

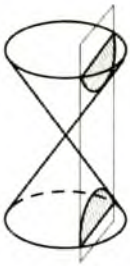


Рис. 354

Рис. 355

Определение. *Если секущая плоскость пересекает образующие обеих полостей конуса, то в сечении получится линия, называемая* ***гиперболой*** (рис.354).

Определение. *Если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса, то в сечении получится линия, называемая* ***параболой*** (рис. 355).

§ 16.2. Уравнение окружности

Составим уравнение окружности с центром в точке $O\ (a;\ b)$ и радиусом R.

По определению окружность — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки $O\ (a;\ b)$ (рис. 356). Пусть $M\ (x;\ y)$ — произвольная точка на окружности. Отрезок OM как расстояние между двумя точками плоскости определяется по формуле: $OM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, где $OM = R$. Тогда

$$OM^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \qquad (1)$$

уравнение окружности, поскольку координаты x и y любой точки M окружности удовлетворяют этому уравнению. Справедливо и обратное утверждение: любая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (1), принадлежит окруж-

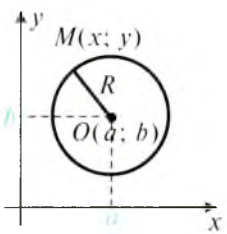


Рис. 356

ности, т. к. расстояние от нее до точки $O(a; b)$ равно R. Таким образом, уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Если центр окружности совпадает с началом координат O (0; 0), т. е. $a=b=0$, то уравнение окружности принимает вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

§ 16.3. Уравнение эллипса

Определение. ***Эллипс*** *— это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

Если даны две точки F_1 и F_2 и некоторое число m, то любая точка $M(x; y)$, лежащая, на эллипсе, удовлетворяет условию

$$MF_1+MF_2=m.$$

Для вывода уравнения эллипса выберем прямоугольную систему координат так, чтобы точки F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс на равном расстоянии от начала координат.

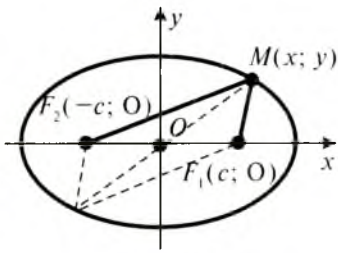


Рис. 357

Пусть точки F_1 и F_2 — фокусы эллипса имеют координаты: $F_1(c; o)$ и $F_2(-c; o)$ (рис. 357). Пусть константа m равна $2a$, а точка M — точка с текущими координатами x и y, лежащая на эллипсе, тогда по определению эллипса имеем:

$$MF_1+MF_2=2a. \qquad (2)$$

Найдем расстояния между двумя точками имеем MF_1 и MF_2

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \text{и} \quad MF_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

После подстановки в уравнение (2) найденных значений MF_1 и MF_2 уравнение эллипса примет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Упростим его сделав алгебраические преобразования. Избавимся от корней, возведя обе части в квадрат, перенеся сначала один корень в правую часть:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc,$$

после сокращения на 4 возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(a^2 - xc\right)^2,$$

$$a^2 (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2xa^2c + x^2c^2,$$

раскрывая скобки и вынося x^2, имеем:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Обе части полученного уравнения разделив на $a^2(a^2 - c^2)$ получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как $2c<2a$ (сторона треугольника меньше суммы двух других сторон) т. е. $F_1F_2 < MF_2 + MF_1$, тогда $a^2 - c^2 > 0$, а потому $a^2 - c^2$ можно обозначить через b^2, т. е. $a^2 - c^2 = b^2$, и уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

— каноническое уравнение эллипса.

На рисунке 358 изображен эллипс, где $2c$ — фокусное расстояние (F_1F_2); $2a$ — большая ось эллипса (AB); $2b$ — малая ось эллипса (CD), т. к. $a > b$; a — большая полуось; b — малая полуось; c — полуфокусное расстояние.

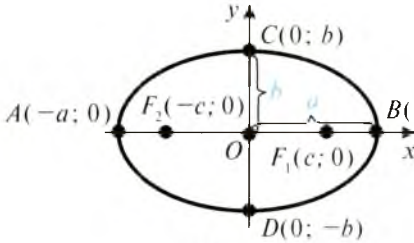


Рис. 358

Если полуоси a и b эллипса равны, то имеем окружность $x^2+y^2=R^2$.

§ 16.4. Уравнение гиперболы

Определение. ***Гиперболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек (F_1 и F_2) — фокусов гиперболы —есть величина постоянная.*

Если даны две точки F_1 и F_2 — фокусы и некоторая постоянная, то любая точка $M(x; y)$, лежащая на гиперболе, удовлетворяет условию:

$$MF_2-MF_1=m. \qquad (4)$$

Для вывода уравнения гиперболы возьмем декартову систему координат, а точки F_1 и F_2 выберем на оси абсцисс на расстоянии, равном c от начала координат. Тогда $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$. Пусть точка M с текущими координатами x и y — произвольная точка гиперболы, т. е. $M(x; y)$ (рис. 359) принадлежит гиперболе. Обозначим константу m как $2a$.

$$MF_2-MF_1=2a. \qquad (5)$$

Определив расстояние MF_1 и MF_2 как расстояние между двумя точками $MF_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $MF_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ и подставив эти значения в равенство (5), получим:

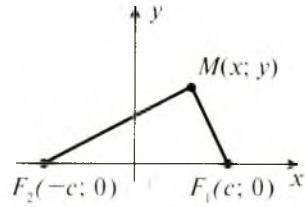


Рис. 359

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Преобразуем это выражение:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2;$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

после сокращения на 4, возведя это уравнение еще раз в квадрат, имеем

$$(xc - a^2) = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2).$$

Раскрыв скобки

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 - a^2x^2 + 2xca^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

и вынеся x^2 за скобки, получим

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4;$$

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$; разделив обе части этого уравнения на $a^2(c^2 - a^2) \neq 0$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad (6)$$

Из рисунка 359 видно, что $F_2F_1 > F_2M - MF_1$ (сторона треугольника больше разности двух других сторон). Значит, $2c > 2a$, т. е. $c > a$. Следовательно, $c - a > 0$, и тогда $c^2 - a^2 > 0$, отсюда можно обозначить $c^2 - a^2$ через b^2.

Уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$

каноническое уравнение гиперболы.

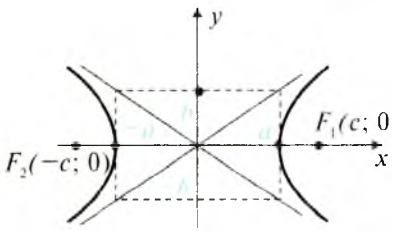


Рис. 360

На рисунке 360 изображена гипербола, где $2a$ — действительная ось (AB); $2b$ — мнимая ось; $2c$ — фокусное расстояние; a — действительная полуось; b — мнимая полуось; c — полуфокусное расстояние.

§ 16.5. Уравнение параболы

Определение. ***Параболой*** *называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки* ***F*** *этой плоскости равно расстоянию до некоторой данной прямой.*

Фиксированная точка ***F*** *называется* ***фокусом****, а данная прямая —* ***директрисой****.*

Для вывода канонического уравнения параболы выберем начало O декартовой системы координат в середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису. Ось абсцисс проходит через фокус F и перпендикулярна

директрисе, а ось ординат проходит через середину отрезка FD (рис. 361).

Так как точка F и прямая DN заданы, то можно измерить расстояние от точки F до прямой DN.

Пусть $FD \perp DN$ и $FD = p$. При таком выборе системы координат точка F будет иметь координаты:

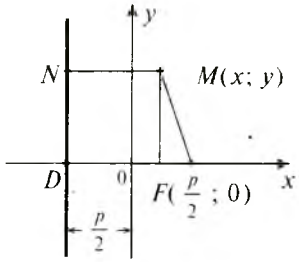


Рис. 361

$$\frac{p}{2} \text{ и } 0, \text{ т. е. } F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$$

и расстояние $OD = \frac{p}{2}$. Возьмем произвольную точку M, лежащую на параболе, с текущими координатами x и y. По определению параболы:

$$MF = MN. \tag{8}$$

Это равенство является необходимым и достаточным условием расположения точки $M(x; y)$ на данной параболе. Найдем отрезки MF и MN — расстояния между двумя точками:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \tag{9}$$

$$MN = \frac{p}{2} + x. \tag{10}$$

Подставив значения (9) и (10) в равенство (8), получим $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$ — и есть уравнение параболы. Упростим его, возведя обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2;$$

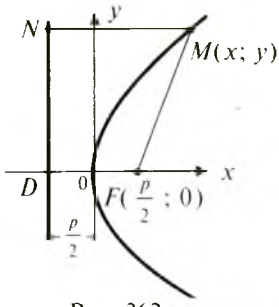


Рис. 362

$$y^2 = 2px \qquad (11)$$

каноническое уравнение параболы.

На рисунке 362 изображена парабола, где p — параметр параболы и расстояние от фокуса F до директрисы параболы $x = -\frac{p}{2}$.

§ 16.6. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям

Мы немного знаем о форме кривых эллипса, гиперболы и параболы. Теперь, исследуя канонические уравнения этих линий, выясним свойства, более точно характеризующие их форму.

1. Исследование формы эллипса.

Дано каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при этом $a > b$ и $b^2 = a^2 - c^2$.

Свойство 1. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, называемые главными осями эллипса, и центр симметрии, называемый центром эллипса.

Таким образом, если эллипс задан своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то главными осями этого эллипса являются оси координат, центром эллипса — начало координат. Точки пересечения эллипса с главными осями называются вершинами

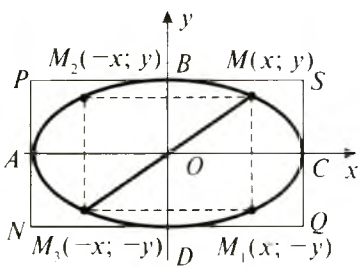


Рис. 363

эллипса. Точки A, B, C, D — вершины эллипса, которые имеют координаты: $A(-a; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; 0)$ и $D(0; -b)$ (рис.363).

Примечание 1. Так как $2a > 2b$, то $2a$ — большая ось эллипса, $2b$ — малая ось эллипса. Если $2a < 2b$, то большая ось $2b$ будет по оси ординат, а малая $2a$ — по оси абсцисс.

Примечание 2. Фокусы эллипса располагаются на большой оси.

Свойство 2. Весь эллипс находится внутри прямоугольника $NPSQ$: $|x| \le a$; $|y| \le b$. Это видно из рисунка 363 (из канонического уравнения: $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ и $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, откуда $|x| \le a$; $|y| \le b$).

Свойство 3. Эллипс может быть получен посредством равномерного сжатия окружности.

Уравнение окружности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Будем уменьшать вертикальную ось, т. е. сжимать эллипс по вертикали, тогда при $b < a$ будем иметь $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 364).

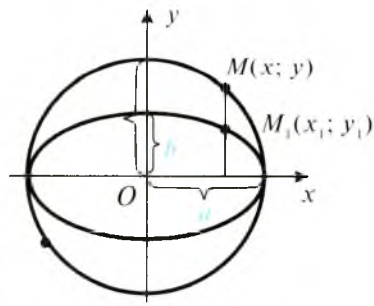


Рис. 364

2. Исследование формы гиперболы.

Рассмотрим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Свойство 1. Гипербола имеет две оси симметрии — главные оси гиперболы и центр симметрии — центр гиперболы.

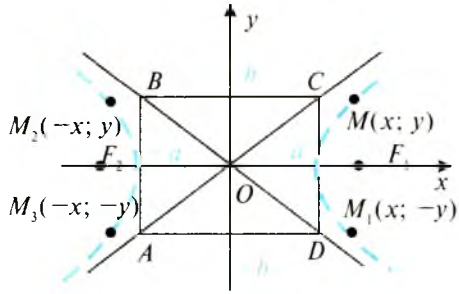


Рис. 365

При этом одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются вершинами гиперболы. Эта ось называется действительной осью гиперболы (рис.365).

Другая ось не имеет общих точек с гиперболой, поэтому называется мнимой осью гиперболы. Мнимая ось гиперболы разделяет плоскость на левую и правую полуплоскости, в которых расположены две ветви гиперболы: левая и правая, симметричные относительно мнимой оси. На рисунке 365 показаны симметричные точки M, M_1, M_2, M_3. Из них M и M_1; M_2 и M_3 — симметричны относительно оси абсцисс; M и M_2; M_1 и M_3 — симметричны относительно оси ординат; M и M_3; M_2 и M_1 — симметричны относительно начала координат. Таким образом, если гипербола задана своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то главными осями этой гиперболы являются оси координат, а центром гиперболы является начало координат.

Ось абсцисс является действительной осью, т.к. она пересекает гиперболу в двух точках: $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \pm a$. Следовательно, гипербола пересекается с осью абсцисс в двух точках $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

При $x = 0 \Rightarrow \frac{-y^2}{b^2} \neq 1$. Точек пересечения с осью ординат нет. Поэтому ось ординат является мнимой осью.

Примечание. Фокусы гиперболы расположены на действительной оси.

Свойство 2. Гипербола расположена вне прямоугольника $ABCD$, где $AB = 2b$, а $AD = 2a$, и внутри двух углов, образованных диагоналями этого прямоугольника.

Свойство 3. Ветви гиперболы приближаются к диагоналям прямоугольника, но не пересекают их. Правая часть гиперболы расположена в I, IV четвертях, левая ее ветвь расположена во II, III четвертях.

Свойство 4. Наряду с гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (рис. 366) рассматривают сопряженную по отношению к ней гиперболу.

Уравнение сопряженной гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

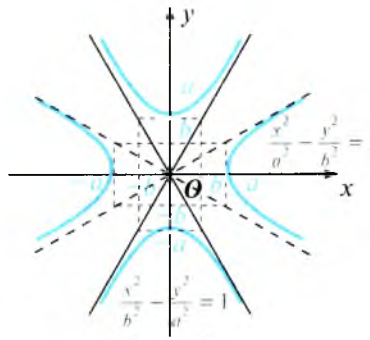


Рис. 366

3. Исследование формы параболы.

Рассмотрим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$.

Свойство 1. Парабола имеет ось симметрии — ось параболы.

Осью симметрии параболы является ось Ox (рис. 367). Действительно, если точка $M(x; y)$ принадлежит параболе, то и точка $M_1(x; -y)$, симметричная точке M относительно оси Ox, также принадлежит параболе (что следует из канонического уравнения параболы).

Определение. *Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы.*

Вершиной параболы является начало координат, т. к. точка O (0; 0) удовлетворяет уравнению параболы (рис. 367).

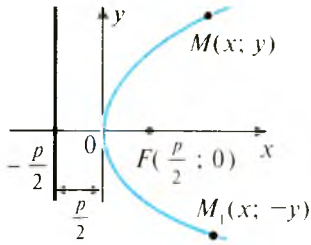


Рис. 367

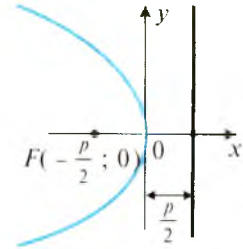


Рис. 368

Свойство 2. Вся парабола расположена в правой полуплоскости xOy, при $p > 0$.

Если $p < 0$, то парабола $y^2 = 2px$, расположена в левой полуплоскости xOy (рис. 368).

Свойство 3. Директриса параболы, определяемой каноническим уравнением $y^2 = 2px$ имеет вид $x = -\frac{p}{2}$.

Свойство 4. Любые две параболы подобны друг другу.

Вопросы для самопроверки

1. Записать уравнения окружности.
2. Что называется эллипсом?
3. Записать каноническое уравнение эллипса.
4. Что называется гиберболой?
5. Записать каноническое уравнение гиперболы.
6. Что называется параболой?
7. Записать каноническое уравнение параболы.
8. Перечислить свойства эллипса, гиперболы, параболы.
9. Показать, что эллипс, гипербола, парабола — конические сечения.
10. Что называется уравнением линии в прямоугольной системе координат?
11. Записать уравнение окружности с центром в точке $O(0; 0)$ и радиуса r.
12. Как узнать, лежит ли точка $M(x_0; y_0)$ на линии, заданной уравнением $f(x; y) = 0$.
13. Привести примеры двух точек, одна из которых

является внутренней, а вторая — внешней для окружности $x^2 + y^2 = 1$.

14. Верно ли высказывание, «окружности $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ и $(x-1)^2 + (y+2) = 9$ — концентрические»?

15. Какую форму имеет эллипс, если его полуоси равны?

16. Написать уравнение какого-либо эллипса, большая ось которого лежит на оси ординат. На какой оси лежат фокусы этого эллипса?

17. Является ли гипербола, как и эллипс, ограниченной кривой?

18. На какой оси лежат фокусы гиперболы?

19. Какое уравнение гиперболы известно из школьной программы?

20. Написать уравнение директрисы параболы $y^2 = x$.

21. Найти фокус параболы $y^2 = 6x$.

22. Сколько осей симметрии имеет парабола?

23. Какие оси симметрии имеет гипербола?

24. Какие кривые второго порядка являются ограниченными?

25. Какие кривые второго порядка являются неограниченными?

26. Что больше: сумма расстояний точки эллипса до фокусов или фокусное расстояние?

27. Где расположены фокусы эллипса?

28. Могут ли фокусы гиперболы располагаться на оси ординат?

29. Как можно получить эллипс?

30. К чему стремятся ветви гиперболы?

Тест № 16

1. Какая точка лежит на окружности $x^2 + y^2 = 58$?

A) $(-4; 3)$; B) $(6; 2)$; C) $(3; -7)$; D) $(-3; 6)$; E) $(3; 4)$;.

2. Какая точка лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 16$?

A) $(-4; 3)$; B) $(4; 4)$; C) $(-2; 2)$; D) $(2; 4)$; E) $(3; 4)$;

3. Какая из точек лежит внутри эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$?

A) $(-4;\ 1)$; B) $(4;\ 3)$; C) $(2;\ -1)$; D) $(-3;\ 5)$; E) $(3;\ 0{,}5)$;

4. На какой параболе лежит точка $M\ (1;\ 2)$?

A) $y^2=3x$; B) $y^2=2x$; C) $y^2=-2x$; D) $y^2=4x$; E) $y^2=-4x$.

5. Найти радиус окружности, если концами одного из диаметров являются точки $A\ (3;\ 4)$ и $B\ (2;\ -1)$.

A) 2; B) $\sqrt{6{,}5}$; C) $\sqrt{2{,}5}$; D) 5,5; E) 3.

6. Найти радиус окружности, заданной уравнением: $x^2+y^2+4x+6y-3=0$.

A) 3; B) 6; C) 4; D) 5; E) 3,5.

7. Найти центр окружности, заданной уравнением: $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.

A) $(-2;\ 3)$; B) $(2;\ -3)$; C) $(4;\ -3)$; D) $(-4;\ 6)$; E) $(4;\ -6)$.

8. Найти центр окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

A) $(-4;\ -3)$; B) $(4;\ -4)$; C) $(-4;\ 6)$; D) $(2;\ -3)$; E) $(-2;\ 3)$.

9. Найти радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-4x-6y-3=0$.

A) 3; B) 5; C) 6; D) 3,5; E) 4.

10. Найти периметр треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $5x-3y-15=0$; $x+5y-3=0$ и $3x+y+5=0$.

A) $\approx 17{,}25$; B) ≈ 18; C) $\approx 17{,}75$; D) 18; E) 17,25.

11. Найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ 2)$; $B(-3;\ 1)$; $C(2;\ -1)$.

A) $(\frac{15}{26}; \frac{5}{26})$; B) $(-\frac{15}{26}; -\frac{5}{26})$; C) $(-\frac{15}{26}; \frac{5}{26})$; D) $(-15; -5)$; E) $(15; 5)$.

12. Какие из точек: $A(2; 1)$; $B(3; 2)$; $C(-3; 2)$; $D(-2; -4)$ лежат внутри круга, ограниченного окружностью $(x+2)^2+(y-1)^2=25$?

A) A, B; B) A, C, D; C) B, C, D; D) A; C; E) A, B, C.

13. Вычислить периметр четырехугольника, вершины которого совпадают с вершинами эллипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$.

A) $8\sqrt{2}$; B) 8; C) 15; D) 7,5; E) $4\sqrt{2}$.

14. Найти полуоси эллипса $25x^2+16y^2=1$.

A) 5; 4; B) 4; 5; C) $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{5}; \frac{1}{4}$; E) $\frac{2}{5}; \frac{1}{2}$.

15. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M(4; 0)$ и $N(-2; 3)$.

A) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; C) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

D) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; E) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

16. На гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ найти точки, лежащие на осях координат.

A) $(5; 0)$; $(-5; 0)$; B) $(0; 5)$ $(0; -5)$; C) $(0; 4)$; $(0; -4)$; D) $(5; 0)$; $(-5; 0)$; $(0; 4)$; $(0; -4)$; E) $(4; 0)$; $(-4; 0)$; $(0; 5)$; $(0; -5)$.

17. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точки $M(4; 3)$ и $N(2\sqrt{2}; 0)$.

A) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1$; B) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$; C) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{18}=1$;

D) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{16}=1$; E) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

18. Составить уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку (6; −4).

A) $x^2 - y^2 = 36$; B) $x^2 - y^2 = 52$; C) $x^2 - y^2 = 20$; D) $x^2 - y^2 = 40$; E) $x^2 - y^2 = 24$.

19. Составить уравнение параболы, если координаты ее фокуса (0; 4), а уравнение директрисы $y + 4 = 0$.

A) $x^2 = 16y$; B) $x^2 = 4y$; C) $x^2 = 8y$; D) $x^2 = 32y$; E) $x^2 = 10y$.

20. Определить координаты вершины и фокус параболы $x^2 = -10y$.

A) (0; 0); (2,5; 0); B) (2,5; 0); (0; 0); C) (0; 0); (−2,5; 0); D) (0; 0); (5; 0); E) (0,5); (0; 10).

21. Какая из точек: $M(2; 3)$, $N(-2; 4)$, $K(-3;0)$, $P(1; 2)$ и $F(3; 0)$ лежит на окружности $(x-1)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

A) M; B) N; C) K; D) P; E) F.

22. Дана гипербола $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Какие точки: $M(-4; -3)$, $N(3; 4)$, $K(4; 2)$, $P(-3; 4)$ и $F(4; 3)$ лежат на гиперболе?

A) P, F; B) M, N; C) M, F; D) N, P, F; E) среди указанных таких точек нет.

23. Какой радиус у окружности $x^2 - 10x + y^2 + 4y - 7 = 0$?

A) 5; B) 7; C) 2; D) 6; E) 8.

24. Определить фокусное расстояние эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

A) 10; B) 12; C) 4; D) 16; E) 8.

25. Найти мнимую ось гиперболы, если фокусное расстояние равно 10, а действительная ось равна 8.

A) 8; B) 6; C) 4; D) 3; E) 5.

Глава 17

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 17.1. Понятие вектора

Определение. ***Векторными величинами*** *называются такие величины, которые, кроме численного значения, имеют направление.*

При изучении любых векторных величин основой является направленный отрезок.

Определение. *Отрезок, имеющий определенную длину и направление с указанием его начала, называется* ***вектором***, или:

Направленный отрезок с произвольно выбранной начальной точкой называется ***вектором***.

Векторные величины принято обозначать строчными латинскими буквами: **a**, **b**, **c** ..., набранными жирным шрифтом (на письме $\bar{a}$). Можно также обозначить вектор указанием его начала и конца: **AB** (или $\overline{AB}$), где A — начало, B — конец вектора.

Определение. ***Модулем*** *вектора называется длина отрезка, изображающего вектор.*

Модуль вектора **a** обозначается $|\mathbf{a}|$.

Определение. *Вектор называется* ***нулевым***, *если его длина равна 0 (начало вектора совпадает с его концом).*

Нулевой вектор обозначается $\bar{0}$, или **0**.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. *Ненулевые векторы, параллельные одной и той же прямой или лежащие на одной прямой, называются* ***коллинеарными***.

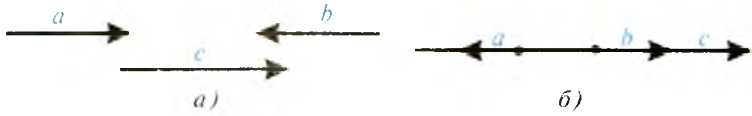


Рис. 370

На рисунке 370 *а* изображены коллинеарные векторы **a**, **b** и **c**, лежащие на параллельных прямых, а на рисунке 370 *б* — лежащие на одной прямой.

Таким образом, в общее понятие любого вектора $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ входит единство трех его составных частей:

1) его численная величина $|\mathbf{a}| = |\mathbf{AB}|$, или модуль вектора;

2) его направление;

3) начало (A) и конец (B) вектора.

В зависимости от точки A приложения вектора **AB** различают три вида векторов:

1) *свободный*, если точку приложения A можно взять произвольно;

2) *скользящий* (передвижной), когда точку приложения A можно перемещать по направлению вектора;

3) *связанный* (несвободный), когда точка приложения A строго указана.

Определение. *Два коллинеарных и одинаково направленных вектора называются* ***сонаправленными;*** *если они направлены противоположно, то называются* ***противоположно направленными*** *векторами.*

Сонаправленные векторы обозначаются $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, а противоположно направленные — $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

Определение. *Векторы называются* ***равными,*** *если они одинаково направлены и их длины равны:*

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ если } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \text{ и } \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}.$$

Определение. *Два коллинеарных и противоположно направленных вектора равной длины называются* ***взаимно противоположными*** *и обозначаются как* $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$.

§ 17.2. Операции над векторами

I. Операция — умножение вектора на число, или на скаляр.

Когда говорят о векторах, то числа называют *скалярами*. Одной из линейных операций над векторами является умножение вектора на число.

Определение. *Произведением вектора* **a** *на действительное число* λ *называется вектор* **b**, *длина которого равна произведению длины вектора* $|\mathbf{a}|$ *на модуль числа* λ; *направление же этого вектора совпадает с направлением вектора* **a**, *если* $\lambda > 0$, *и противоположно направлению вектора* **a**, *если* $\lambda < 0$.

Произведение вектора **a** на число λ обозначается через $\lambda\mathbf{a}$.

На рисунке 371 *а* изображен вектор $\lambda\mathbf{a}$ при $\lambda > 0$, а на рисунке 371 *б* — вектор $\lambda\mathbf{a}$ при $\lambda < 0$.

Рассмотрим свойства произведения вектора на число.

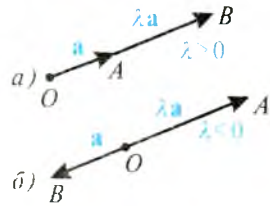


Рис. 371

теорема

(свойство 1)

Для любых чисел α и β и любого вектора a справедливо равенство: $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (ассоциативный, или сочетательный, закон умножения).

Дано: вектор ***a*** и скаляры α и β.

Доказать: $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$.

Доказательство. Длина вектора $\alpha(\beta\mathbf{a})$ равна $|\alpha(\beta\mathbf{a})| = |\alpha||\beta||\mathbf{a}|$ и, аналогично, длина вектора $(\alpha\beta)\mathbf{a}$ равна $|\alpha(\beta\mathbf{a})| = |\alpha||\beta||\mathbf{a}|$, т. е. длины этих векторов одинаковы. Кроме того, они коллинеарны и одинаково направлены, так как их направление совпадает с направлением **a**, если α и β одного знака, и противоположно направлению **a**, если α и β разного знака. Если же α и β или **a** равны нулю, то обе части равенства равны 0. Следовательно, для любых α и β равенство верно, что и требовалось доказать.

теорема

(*свойство 2*)

Для любого вектора $\mathbf{b}$, коллинеарного вектору $\mathbf{a}$, существует число λ, и притом только одно, удовлетворяющее равенству $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Дано: коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число λ.

Доказать: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ при единственном числе λ.

Доказательство. Действительно, число λ равно $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, или $-\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, в зависимости от того, направлены ли векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаково или противоположно. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$. Единственность множителя λ очевидна, так как при умножении $\mathbf{a}$ на разные числа мы получим различные векторы, что и требовалось доказать.

теорема

(*свойство 3*)

Для любого числа λ и вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство: $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda$ (коммутативный, или переместительный, закон умножения).

Теорема справедлива по определению умножения вектора $\mathbf{a}$ на число λ.

теорема

(признак коллинеарности)

Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является существование такого числа λ, которое удовлетворяет равенству $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть при некотором λ выполняется равенство $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Тогда векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны согласно определению умножения вектора на число.

2) *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, причем $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Найдем такое число λ, чтобы вы-

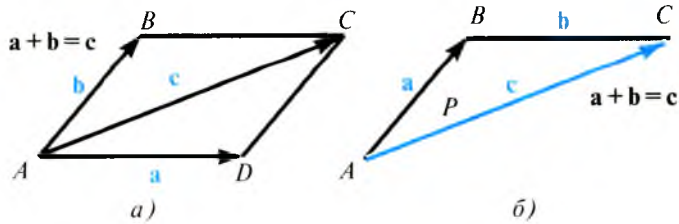
полнялось равенство $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Для этого рассмотрим отношение $\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = k$. Отсюда следует равенство длин векторов: $|\mathbf{b}| = k|\mathbf{a}|$. Если векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ сонаправлены, то выражение $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ выполняется при $\lambda = k$. В случае противоположного направления векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ следует принять $\lambda = -k$.

Если же $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$. Следовательно, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ верно при любом λ, что и требовалось доказать.

II. Сложение векторов.

Определение (правило параллелограмма). ***Суммой двух векторов*** *называется вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах при условии, что у них одно начало* (рис. 372 *а*).

Определение (правило треугольника). ***Суммой двух векторов*** *называется вектор, направленный от начала первого к концу второго вектора, если начало второго вектора совпадает с концом первого вектора* (рис. 372 *б*).



а) *б)*

Рис. 372

теорема

(*свойство 1*)

Вектор остается неизменным при сложении его с нулевым вектором, т. е. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (закон поглощения нулевого вектора).

теорема

(*свойство 2*)

Для любых двух векторов справедливо равенство $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативный, или переместительный, закон сложения).

Данное свойство справедливо по определению суммы векторов по правилу параллелограмма (рис.372 *а*).

теорема

(*свойство 3*)

Для любых трех векторов выполняется равенство: $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ (ассоциативный, или сочетательный, закон сложения).

Дано: векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис. 373).

Доказать: $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

Доказательство. Сначала находим $\mathbf{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, затем, прибавляя к нему вектор $\mathbf{c}$, имеем: $\mathbf{AD}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$. Складывая векторы $\mathbf{BC}=\mathbf{b}$ и $\mathbf{CD}=\mathbf{c}$, получим вектор $\mathbf{BD}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Сложим векторы $\mathbf{AB}=\mathbf{a}$ и $\mathbf{BD}$ и получим $\mathbf{AD}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, т. е. $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, что и требовалось доказать.

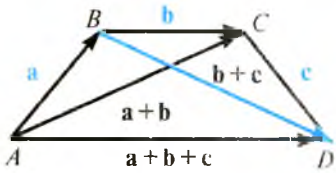


Рис. 373

теорема

(*свойство 4*)

Для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и некоторого числа λ справедливо равенство $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ (распределительный, или дистрибутивный, закон умножения по отношению к сложению).

Дано: векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, число λ (рис.374).

Доказать: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

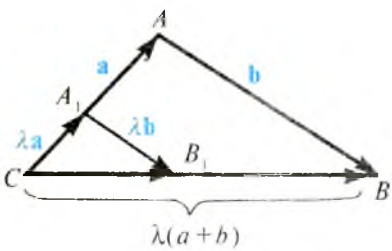


Рис. 374

Доказательство. Из подобия треугольников: ABC и $A_1B_1C_1$ имеем: $\frac{CB_1}{CB}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{CA_1}{CA}$, или $\frac{|\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})|}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}=\frac{|\lambda\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}=\frac{|\lambda\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}$. Используя свойство пропорции, име-

ем: $\frac{|\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})|}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|} = \frac{|\lambda\mathbf{a}|+|\lambda\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}$ при сонаправленных векторах $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ и тогда в данном выражении знаменатели одинаковые, поэтому числители равны, т.е. $|\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})| = |\lambda\mathbf{a}| + |\lambda\mathbf{b}|$. Направление у векторов одинаковое, поэтому $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема для противоположно направленных векторов.

теорема

(*свойство 5*)

Для любых двух чисел α и β некоторого вектора $\mathbf{a}$ справедливо равенство $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ (дистрибутивный, или распределительный, закон умножения по отношению сложения).

Дано: вектор $\mathbf{a}$ и два числа α и β.

Доказать: $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Доказательство. Очевидно, что векторы в обеих частях доказываемого равенства коллинеарны. Допустим, что числа α и β одного знака. Тогда векторы $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{a}$ сонаправлены, и длина их суммы равна сумме их длин, т. е. $|\alpha||\mathbf{a}| + |\beta||\mathbf{a}|$.

Но $|\alpha\mathbf{a}| + |\beta\mathbf{a}| = (|\alpha| + |\beta|)\,|\mathbf{a}| = |\alpha + \beta|\,|\mathbf{a}|$ и, следовательно, в этом случае векторы $(\alpha+\beta)\mathbf{a}$ и $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ равны по длине. Направление их совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если знаки α и β положительны; и направление противоположно вектору $\mathbf{a}$, если знаки α и β отрицательны. Допустим теперь, что знаки α и β различны, и для определенности будем считать $|\alpha| > |\beta|$. В этом случае длина суммы двух $\alpha\mathbf{a}$ и $\beta\mathbf{a}$ векторов равна разности их длин, точнее: $|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}| = |\alpha\mathbf{a}| - |\beta\mathbf{a}|$.

На основании свойств модуля $|\alpha\mathbf{a}| - |\beta\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}| - |\beta||\mathbf{a}| = (|\alpha| - |\beta|)\,|\mathbf{a}| = |\alpha + \beta|\,|\mathbf{a}|$. Следовательно, и в этом случае длина вектора $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ равна длине вектора $(\alpha+\beta)\mathbf{a}$. Очевидно, что оба эти вектора направлены

так же, как $\alpha\mathbf{a}$. Если же $|\alpha| = |\beta|$ и знаки α и β противоположны, то обе части равенства равны нулю. Следовательно, равенство $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ справедливо для любых α и β, что и требовалось доказать.

III. Операция вычитания векторов.

Известно, что ненулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления:

$\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$, или $\mathbf{a} = -(-\mathbf{a})$, или $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Определение. ***Разностью двух векторов*** **a** *и* **b** *с общим началом называется вектор, соединяющий концы вычитаемого и уменьшаемого векторов.*

Разность обозначают $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$, или:

Определение. ***Разностью двух векторов*** *называется такой вектор* **c**, *сумма которого с вектором* **b** *даст вектор* **a**, *т. е.* $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$, *если* $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

теорема

Для любых векторов a и b справедливо равенство $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Дано: векторы **a** и **b** (рис. 375).

Доказать: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Доказательство. По определению разности векторов $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\mathbf{b})$, получим:

$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, или $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 0 = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, откуда $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, что и следовало доказать.

Из рассмотренного $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Таким образом, вычитание векторов сведено к сложению.

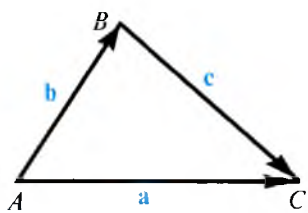


Рис. 375

Чтобы найти разность векторов **a** и **b**, достаточно найти сумму вектора **a** и вектора, противоположного вектору **b**. Все свойства сложения векторов справедливы и для операции вычитания векторов.

Рассмотренные операции являются линейными операциями, так как в результате получены векторы.

Умножение векторов в результате дает либо вектор, либо число, т. е. существуют два вида произведения векторов: векторное и скалярное.

Скалярное произведение двух векторов будет рассмотрено в § 17.6.

§ 17.3. Проекции вектора на ось. Координаты вектора

Пусть точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в декартовых координатах xOy являются началом и концом вектора **AB**.

Определение. ***Проекцией вектора*** **AB** *на ось Ox называется отрезок между проекциями точек A и B на ось Ox, и величина проекции равна разности между абсциссами конца и начала вектора* **AB**.

Определение. ***Проекцией вектора*** **AB** *на ось Oy называется отрезок между проекциями точек A и B на ось Oy, и величина проекции равна разности между ординатами конца и начала вектора* **AB**.

Для наглядности рассмотрим рис. 376.

Проекцию вектора **AB** на ось Ox обозначают $\text{пр.}_{Ox}\,\mathbf{AB} = A_1B_1 = x_2 - x_1$.

Аналогично определяется проекция вектора **AB** на ось Oy. $\text{пр.}_{Oy}\,\mathbf{AB} = A_2B_2 = y_2 - y_1$.

Для краткости обозначают $\text{пр.}_{Ox}\,\mathbf{AB} = X$; $\text{пр.}_{Oy}\,\mathbf{AB} = Y$.

На рисунке 377 проекции вектора **AB** равны: $X = A_xB_x$; $Y = A_yB_y$.

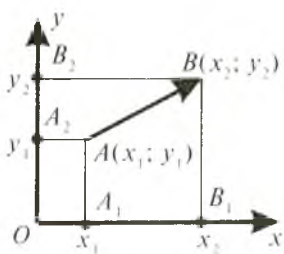


Рис. 376

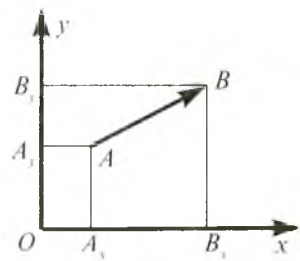


Рис. 377

Таким образом, проекция вектора на любую ось есть длина отрезка между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и B на эту же ось, взятая со знаком «+», если направление отрезка и оси совпадают, и со знаком «−», если они противоположны.

Можно доказать, что:

1) **если проекции вектора заданы, то они однозначно определяют сам вектор;**

2) **если два вектора равны, то они имеют равные проекции.**

Поэтому проекции вектора на оси являются его компонентами или его координатами и записываются: $\mathbf{AB} = (X; Y)$.

§ 17.4. Угол между векторами

Определение. ***Углом между двумя направлениями*** *называют величину угла между любыми двумя лучами этих направлений, имеющими общее начало.*

Угол между двумя направлениями, определяемыми лучами l_1 и l_2, обозначается так: $(\widehat{l_1; l_2}) = \gamma$, где $\gamma \in [0°; 180°]$.

Определение. ***Углом*** *между двумя ненулевыми векторами называется угол между направлениями этих векторов.*

Обозначение угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будет иметь вид $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \gamma$ (рис. 378).

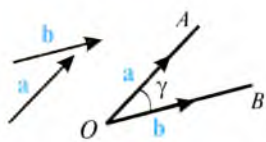


Рис. 378

Определение. *Если угол между векторами равен 90°, то векторы называются* ***перпендикулярными****, или* ***ортогональными****, и записываются* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Выделим еще два частных случая:

1) если $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$, то $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0°$; 2) если $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, то $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 180°$.

Определение. ***Углом между двумя пересекающими-***

ся прямыми *называют величину меньшего из углов, определяемых этими прямыми.*

Если две прямые параллельны, то угол между ними считается равным 0. Обозначение угла между прямыми p и q: $(\widehat{p; q}) = \gamma$, где $0° \le \gamma \le 90°$.

§ 17.5. Разложение вектора по базису

Определение. ***Базисом*** *на плоскости называется два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятых в определенном порядке.*

теорема

Любой вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен через два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в виде $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ единственным способом (α_1 и α_2 — некоторые числа).

Дано: векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$; числа α_1 и α_2 (рис. 379).

Доказать: вектор $\mathbf{a}$ представляется в виде $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ единственным способом.

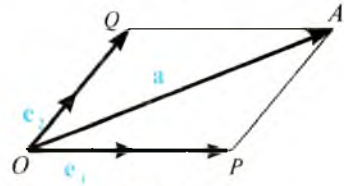


Рис. 379

Доказательство. Заметим прежде всего, что оба вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ отличны от нуля (если бы хоть один из них был нулевым, то они были бы коллинеарны). Если вектор $\mathbf{a}$ коллинеарен одному из данных векторов, то утверждение сводится к свойству 1 операции умножения вектора на число (§17.2).

В общем случае перенесем все три вектора в одну точку O. Через конец A вектора $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ проведем прямые AP и AQ, параллельные векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1$. Очевидно, что $\mathbf{OA} = \mathbf{OQ} + \mathbf{OP}$, причем векторы $\mathbf{OP}$ и $\mathbf{OQ}$ соответственно коллинеарны векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. В силу свойства 1 (§ 17.2) существуют такие числа α_1 и α_2, что $\mathbf{OP} = \alpha_1\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{OQ} = \alpha_2\mathbf{e}_2$. Таким образом, $\mathbf{OA} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$. Докажем единственность чисел α_1 и α_2.

Предположим противное, что существует другая линейная комбинация $\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2$, равная **a**, например $\alpha_1 \neq \beta_1$. Тогда $\beta_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{OP} = \alpha_1\mathbf{e}_1$, так как иначе мы имели бы две прямые, проходящие через точку A параллельно вектору $\mathbf{e}_2$. Из последнего равенства вытекает, что $\alpha_1 = \beta_1$, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, разложение единственно, что и требовалось доказать.

В дальнейшем для удобства будем использовать прямоугольную систему координат на плоскости и два единичных вектора **i**, **j**, направленных по положительному направлению осей координат.

Начало векторов **i**, **j** совмещено с началом координат.

Определение. *Система двух векторов **i**, **j** называется декартовым прямоугольным базисом, а **i** и **j** называются* ***координатными векторами,*** *или* ***ортами.***

Каждый вектор можно представить в виде суммы двух векторов $X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, эта сумма называется разложением вектора по базису **i**, **j**.

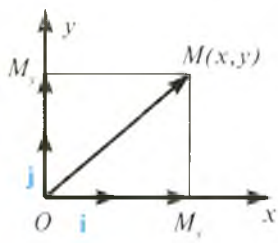


Рис. 380

Векторы $X\mathbf{i}$, $Y\mathbf{j}$ называются составляющими вектора **a**.

На рисунке 380 рассмотрен вектор **OM** и его разложение по ортам **i**, **j**: $\mathbf{OM} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$.

теорема

Каким бы ни был вектор a, его всегда можно разложить по базису i, j, т.е. $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, где X, Y — координаты вектора a.

Дано: вектор **a** с координатами X, Y, базис **i** и **j**.

Доказать: $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ (рис. 380).

Доказательство. Пусть координаты вектора **a** равны: $X = |\mathbf{OM}_x|$, $Y = |\mathbf{OM}_y|$.

Вектор $\mathbf{OM} = \mathbf{OM}_x + \mathbf{OM}_y$, но $\mathbf{OM}_y = |\mathbf{OM}_y| \cdot \mathbf{j}$, т. е. $\mathbf{OM}_y\,\mathbf{j} = У\,\mathbf{j}$, и $\mathbf{OM}_x = |\mathbf{OM}_x| \cdot \mathbf{i}$, т. е. $\mathbf{OM}_x\,\mathbf{i} = X\mathbf{i}$, тогда вектор $\mathbf{OM}$ примет вид: $\mathbf{OM} = X\mathbf{i} + У\mathbf{j}$ или $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + У\mathbf{j}$, что и требовалось доказать.

Где бы ни был вектор $\mathbf{a}$, его начало можно перенести в начало системы координат.

§ 17.6. Скалярное произведение двух векторов

В физике и механике приходится вычислять работу силы $\mathbf{F}$, под действием которой тело перемещается на расстояние, определяемое вектором $\mathbf{S}$ (рис. 381 *а*).

Если все точки тела переместятся по направлению действия силы $\mathbf{F}$, то работа силы будет равна произведению силы $\mathbf{F}$ на пройденный путь $\mathbf{S}$, т. е. $A = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{S}|$. Если тело движется под углом γ по направлению к вектору $\mathbf{F}$, то будет действовать лишь составляющая силы $\mathbf{F}$, направленная вдоль вектора $\mathbf{S}$, а перпендикулярная составляющая уравнивается силой сопротивления. Проектируя силу на направление вектора пути $\mathbf{S}$, получим $\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \cos \gamma$. Следовательно, работа $A = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{S}| \cos \gamma$.

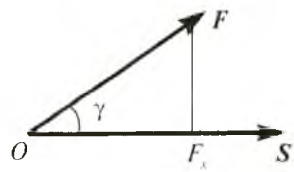


Рис. 381 *а*

Определение. ***Скалярным произведением*** *двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение обозначается либо $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, либо $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

По определению $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\,(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, или $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\,\gamma$.

Знак скалярного произведения двух векторов зависит от величины угла между ними $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \gamma$. Скалярное произведение определяется только для двух векторов.

Свойства скалярного произведения

теорема

(*свойство 1*)

Скалярное произведение двух векторов равно длине одного вектора, умноженной на проекцию второго вектора на ось, определяемую первым вектором: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\ \text{пр.}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

Дано: векторы **a** и **b**.

Доказать: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\ \text{пр.}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный ΔOAB (рис. 381 б). Прилежащий катет OA по определению косинуса угла равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к данному катету, а потому $OA = OB \cdot \cos\gamma$ или $OA = \text{пр.}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, $OB = |\mathbf{b}|$, следовательно, $\text{пр.}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos\gamma$. Подставляя вместо $|\mathbf{b}| \cos\gamma$ его значение в скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$, получим: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\ \text{пр.}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, что и требовалось доказать. Аналогично можно доказать, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\ \text{пр.}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

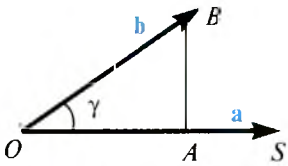


Рис. 381 *б*

теорема

(*свойство 2*)

Для любых двух векторов справедливо равенство $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})$ (коммунитативный, или переместительный, закон умножения).

Дано: векторы **a** и **b**.

Доказать: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})$.

Доказательство. По определению скалярного произведения двух векторов имеем $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma$ и $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\gamma$, но для чисел справедливо равенство $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}|$, следовательно, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})$, что и требовалось доказать.

теорема

(*свойство 3*)

Если векторы a и b перпендикулярны друг другу или

хотя бы один из них равен нулю, то скалярное произведение их равно 0, т. е. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$.

Дано: векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; 1) вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; 2) вектор $\mathbf{b} = \mathbf{0}$; 3) угол $\gamma = 90°$.

Доказать: во всех случаях скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$.

Доказательство. $(\mathbf{0} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{0}) = 0$ по определению. Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то угол $\gamma = \frac{\pi}{2}$. И $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, что и требовалось доказать.

теорема

(*обратная*)

Если скалярное произведение равно 0, то либо один из векторов равен 0, либо векторы перпендикулярны.

Дано: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$.

Доказать: 1) $|\mathbf{a}| = 0$ или 2) $|\mathbf{b}| = 0$ или 3) $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Если $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$, то $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma = 0$. Это равенство возможно, когда один из сомножителей произведений равен 0, т. е. $|\mathbf{a}| = 0$, а тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $|\mathbf{b}| = 0$, а тогда $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, либо $\cos\gamma = 0$, а тогда $\gamma = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Обе теоремы можно сформулировать как одну теорему, выражающую условие перпендикулярности двух векторов.

теорема

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Пусть $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$, отсюда $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\gamma = 0$. Но по условию $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, поэтому $\cos\gamma = 0$, $\gamma = 90°$, т.е. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\gamma = 90°$ и по определению скаляр-

ного произведения $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$, что и требовалось доказать.

теорема

(свойство 4)

Скалярное произведение вектора на этот же вектор равно квадрату числового значения его длины.

Дано: вектор $\mathbf{a}$.

Доказать: $\mathbf{a}^2 = a^2$.

Доказательство. Действительно, по определению имеем: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cos 0^\circ = a^2$, так как $\cos 0^\circ = 1$.

Произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ будем записывать $\mathbf{a}^2$ и называть *скалярным квадратом вектора* $\mathbf{a}$. Тогда свойство 4 можно сформулировать по-иному: **скалярный квадрат вектора равен *квадрату его длины, т.е.*** $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a^2$.

теорема

(свойство 5)

Если m — действительное число, то для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо:

$$((m\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = m\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$
$$(\mathbf{a} \cdot (m\,\mathbf{b})) = m\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

(ассоциативный, или сочетательный, закон умножения).

Дано: векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; число m.

Доказать: $((m\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = m\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ и $(\mathbf{a} \cdot (m\,\mathbf{b})) = m\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Доказательство. На основе определения скалярного произведения и свойства произведения вектора на число имеем:

$m\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = m\,|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma$

$((m\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) = |m\,\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma = |m|\,|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma$

$(\mathbf{a} \cdot (m\,\mathbf{b})) = |\mathbf{a}|\,|m\,\mathbf{b}| \cos \gamma = |m|\,\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \gamma$, что и требовалось доказать.

теорема

(свойство 6)

Для трех векторов справедливо равенство $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$

$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (распределительный, или дистрибутивный, закон умножения по отношению к сложению).

Дано: векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Доказать: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{d}$, тогда по скалярному произведению двух векторов имеем: $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) = |\mathbf{c}| \text{ пр.}_{\mathbf{c}} \mathbf{d} = |\mathbf{c}| \text{ пр.}_{\mathbf{c}} (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

На основе свойства проекции суммы имеем:
$|\mathbf{c}| \text{ пр.}_{\mathbf{c}} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \cdot (\text{пр.}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + \text{пр.}_{\mathbf{c}} \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| \cdot \text{пр.}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \cdot \text{пр.}_{\mathbf{c}} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, что и требовалось доказать.

§ 17.7. Операции над векторами, заданными в координатной форме

теорема 1

При сложении векторов, заданных в координатной форме, складываются их соответствующие координаты (или компоненты).

Дано: векторы $\mathbf{a} = (X_1, Y_1)$, т. е. $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = (X_2, Y_2)$, т. е. $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j}$.

Доказать: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1 + X_2)\mathbf{i} + (Y_1 + Y_2)\mathbf{j}$.

Доказательство. Действительно, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j}) + (X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j})$.

Используя распределительный и сочетательный законы, получим $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (X_1 + X_2)\mathbf{i} + (Y_1 + Y_2)\mathbf{j}$, что и требовалось доказать.

теорема 2

При вычитании двух векторов, заданных в координатной форме, их одноименные координаты вычитаются.

Дано: векторы $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j}$.

Доказать: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (X_1 - X_2)\mathbf{i} + (Y_1 - Y_2)\mathbf{j}$.

Доказательство. Действительно, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j}) - (X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j})$.

Используя распределительный и сочетательный законы сложения, получим $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (X_1 - X_2)\mathbf{i} + (У_1 - У_2)\mathbf{j}$, что и требовалось доказать.

теорема 3

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Дано: вектор $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + У_1\mathbf{j}$ и число λ.

Доказать: $\lambda\mathbf{a} = (\lambda X)\mathbf{i} + (\lambda У)\mathbf{j}$.

Доказательство. Действительно, $\lambda\mathbf{a} = \lambda\cdot(X\mathbf{i} + У\mathbf{j})$.

Используя распределительный закон, получим $\lambda\mathbf{a} = (\lambda X)\mathbf{i} + (\lambda У)\mathbf{j}$, что и требовалось доказать.

теорема 4

Скалярное произведение двух векторов, заданных в координатной форме, равно сумме произведений их одноименных координат.

Дано: векторы $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + У_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + У_2\mathbf{j}$.

Доказать: $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = X_1X_2 + У_1У_2$.

Доказательство. Действительно, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (X_1\mathbf{i} + У_1\mathbf{j})\cdot(X_2\mathbf{i} + У_2\mathbf{j})$.

Используя свойство распределительности скалярного произведения и вынося числовые множители за знак скалярного произведения, получим: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = X_1X_2\mathbf{i}^2 + X_1У_1(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + У_1X_2(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + У_1У_2\mathbf{j}^2$. Так как скалярное произведение вектора самого на себя есть квадрат его длины, а длина единичного вектора равна 1, то

$$\mathbf{i}^2 = |\mathbf{i}|^2 = 1; \quad \mathbf{j}^2 = |\mathbf{j}|^2 = 1.$$

Так как единичные векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0:

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}|\cos 90^\circ = 0; \quad (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) = |\mathbf{j}|\,|\mathbf{i}|\cos 90^\circ = 0.$$

Следовательно, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = X_1X_2 + У_1У_2$, что и требовалось доказать.

теорема 5

Длина вектора, заданного в координатной форме, имеет вид: $|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + У^2}$.

Дано: вектор $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$.

Доказать: $|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Доказательство. Длина вектора **a** равна:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2} = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{(X\mathbf{i} + Y\mathbf{j})^2} = \sqrt{X^2\mathbf{i}^2 + 2X \cdot Y\mathbf{ij} + Y^2\mathbf{j}^2} =$$

$$= \sqrt{X^2 \cdot 1^2 + 2XY \cdot 0 + Y^2 \cdot 1^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

($\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$, т. к. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, а $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, т. к. **i** и **j** — взаимно перпендикулярны). Итак, $|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, что и требовалось доказать.

теорема 6

Косинус угла между двумя векторами, заданными в координатной форме, равен сумме произведений одноименных координат, деленное на произведение длин этих векторов.

Дано: векторы $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j}$.

Доказать: $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}$.

Доказательство. По определению скалярного произведения имеем $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

Откуда $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

Подставив значения скалярного произведения и длин векторов по теоремам 4 и 5, получим:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}, \qquad (1)$$

что и требовалось доказать.

Из полученной формулы выводится условие перпендикулярности двух векторов. Если вектор **a** перпендикулярен вектору **b**, т.е. угол между ними равен 90°, а косинус 90° равен нулю, то правая часть формулы (1) должна равняться нулю. Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю. Значит,

$$\boxed{X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0.}$$

Эта формула выражает условие перпендикулярности двух векторов, т. е. *если сумма произведений одноименных координат двух векторов равна нулю, то векторы перпендикулярны.*

Условие параллельности двух векторов вытекает из условия коллинеарности векторов, т.е. *если векторы* **a** *и* **b** *коллинеарны, то их одноименные координаты пропорциональны:*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

§ 17.8. Доказательство некоторых теорем с применением векторов

Многие теоремы геометрии могут быть доказаны с помощью векторов: теорема о средней линии треугольника, теорема Пифагора, теоремы о диагоналях параллелограмма, прямоугольника и др. Рассмотрим некоторые из них.

теорема

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна его третьей стороне и равна ее половине.

Дано: ΔABC; MN — средняя линия треугольника.

Доказать: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$.

Доказательство. Рассмотрим ΔABC (рис. 382).

Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$, тогда по определению суммы векторов $\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Пусть M и N — середины сторон AB и BC ΔABC,

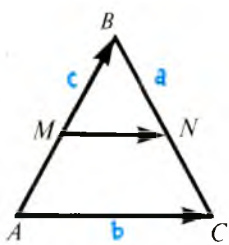


Рис. 382

$$\mathbf{MN} = \mathbf{MB} + \mathbf{BN} = \frac{1}{2}\mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{BC} = \frac{\mathbf{c}}{2} + \frac{\mathbf{a}}{2} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

Так как $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{MN} = \frac{1}{2}\mathbf{AC}$, то $\mathbf{MN} \parallel \mathbf{AC}$; так как $\mathbf{MN} = \frac{1}{2}\mathbf{AC}$, то и длина отрезка MN будет равна половине длины AC, т. е. $MN = \frac{1}{2} AC$, что и требовалось доказать.

теорема

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; AC и BD — диагонали (рис. 383).

Доказать: $AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

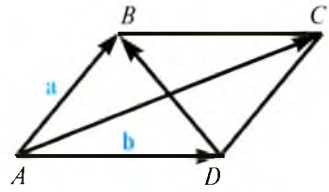


Рис. 383

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Обозначим $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AD} = \mathbf{b}$. Из свойства параллелограма о равенстве противоположных сторон следует: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{CD}| = |\mathbf{a}|$; $|\mathbf{AD}| = |\mathbf{BC}| = |\mathbf{b}|$.

По определению суммы и разности векторов:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Используя свойство скалярного квадрата (§ 17.6), получим:

$\mathbf{AC}^2 + \mathbf{DB}^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = 2\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}^2$, т. е. $|\mathbf{AC}|^2 + |\mathbf{DB}|^2 = |\mathbf{AB}|^2 + |\mathbf{BC}|^2 + |\mathbf{CD}|^2 + |\mathbf{AD}|^2$, а тогда $AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$, что и требовалось доказать.

теорема

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Дано: $ABCD$ — ромб; AC и BD — его диагонали (рис. 384).

Доказать: $AC \perp BD$.

Доказательство. Введем обозначение $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{b}$. Из определения параллелограмма следует: $\mathbf{AB} = \mathbf{DC} = \mathbf{a}$, $\mathbf{AD} = \mathbf{BC} = \mathbf{b}$.

По определению суммы и разности векторов $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

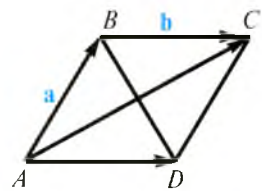


Рис. 384

Рассмотрим скалярное произве-

дение векторов, направленных по диагоналям ромба: $(\mathbf{AC}\cdot\mathbf{DB}) = ((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ (по свойствам скалярного произведения).

Так как стороны ромба равны, то и длины векторов **a** и **b** тоже равны. Следовательно, $(\mathbf{AC}\cdot\mathbf{DB}) = 0$. Из последнего получаем: $\mathbf{AC}\perp\mathbf{DB}$, значит диагональ AC перпендикулярна диагонали DB, что и требовалось доказать.

теорема

(*теорема Пифагора*)

Квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов его катетов.

Дано: ΔABC прямоугольный; $\angle C = 90°$, стороны $AB = c$, $AC = a$, $CB = b$ (рис. 385).

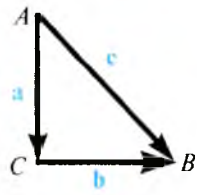


Рис. 385

Доказать: $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{CB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$.

По определению суммы векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Возведя в квадрат это выражение, получим:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2,$$

или $\mathbf{a}^2 + 2(\mathbf{ab}) + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$; по определению скалярного квадрата вектора и скалярного произведения двух перпендикулярных векторов имеем:

$|\mathbf{a}|^2 \cdot \cos 0° + 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \cos 90° + |\mathbf{b}|^2 \cos 0° = |\mathbf{c}|^2 \cos 0°$;

$|\mathbf{a}|^2 \cdot 1 + 2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot 0 + |\mathbf{b}|^2 \cdot 1 = |\mathbf{c}|^2 \cdot 1$;

$|\mathbf{a}|^2 + 0 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$; $a^2 + b^2 = c^2$, что и требовалось доказать.

теорема

Высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC; AP, BQ и CL — высоты (рис. 386).

Доказать: AP, BQ и CL пересекаются в точке O.

Доказательство. Пусть две высоты AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке O. Покажем, что и третья высота CL этого треугольника пройдет через ту же точку O.

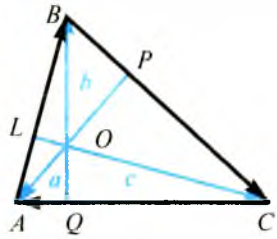


Рис. 386

Обозначим векторы: $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$; $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$. По определению разности векторов имеем:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a};\ \ \mathbf{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b};\ \ \mathbf{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

Из условия перпендикулярности двух векторов их скалярное произведение равно нулю, а потому из того, что $\mathbf{PA} \perp \mathbf{BC}$, следует: $\mathbf{a}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$, отсюда $\mathbf{(ac)} - \mathbf{(ab)} = 0$ и тогда

$$\mathbf{(ac)} = \mathbf{(ab)}. \qquad (1)$$

Аналогично из перпендикулярности векторов QB и CA следует равенство нулю скалярного произведения векторов $\mathbf{b}\ (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0$, поэтому $\mathbf{(ba)} - \mathbf{(ac)} = 0$ и тогда

$$\mathbf{(ba)} = \mathbf{(bc)}. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) по свойству транзитивности и коммутативности скалярного произведения векторов следует:

$\mathbf{(ac)} = \mathbf{(ab)}$, тогда $\mathbf{(ac)} - \mathbf{(ab)} = 0$, а $\mathbf{c}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$.

Из равенства нулю скалярного произведения следует, что векторы $\mathbf{c}$ и $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ взаимно перпендикулярны, т. е. $\mathbf{OC} \perp \mathbf{AB}$, а тогда высота CL треугольника ABC, перпендикулярная AB, пройдет через точку O, в которой пересекаются две другие высоты ΔABC.

Итак, три высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке O, что и требовалось доказать.

§ 17.9. Задачи, решаемые с помощью векторов

Использование векторов дает еще один метод решения геометрических задач — векторных. Возможности этого метода довольно большие, поскольку он охва-

тывает многочисленные аффинные задачи, а после введения скалярного произведения векторов — и метрические.

Выделяются несколько видов задач, которые лучше решать с применением векторов, при этом в тексте задач не содержится никаких понятий векторной алгебры, т.е. задачи чисто геометрические.

К *первому* виду отнесем задачи, связанные с доказательством параллельности некоторых отрезков и прямых. В задачах этого типа для решения нужно показать коллинеарность векторов, изображаемых некоторыми данными отрезками. Рассмотрим решение задачи такого вида.

Задача 1.

На плоскости дан четырехугольник $ABCD$ и точка M. Доказать, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон этого четырехугольника, являются вершинами параллелограмма.

Дано: $ABCD$ — четырехугольник; N, P, Q, R — точки, симметричные точке M относительно середин AB, BC, CD и DA (рис. 387).

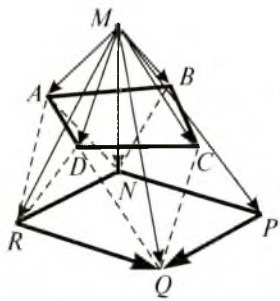


Рис. 387

Доказать: четырехугольник $NPQR$ — параллелограмм.

Доказательство. При сложении векторов по правилу параллелограмма, проведенных из точки M к вершинам четырехугольника $NPQR$, имеем:

$$\mathbf{MN} = \mathbf{MA} + \mathbf{MB},\ \mathbf{MP} = \mathbf{MB} + \mathbf{MC}$$
$$\mathbf{MQ} = \mathbf{MC} + \mathbf{MD},\ \mathbf{MR} = \mathbf{MD} + \mathbf{MA}. \qquad (1)$$

По определению разности векторов найдем два вектора, направленных по противоположным сторонам четырехугольника $NPQR$:

$$\mathbf{NR} = \mathbf{MR} - \mathbf{MN} \text{ и } \mathbf{PQ} = \mathbf{MQ} - \mathbf{MP}. \qquad (2)$$

Докажем, что $\mathbf{NR} = \mathbf{PQ}$. Рассмотрим разность этих векторов:

$$\mathbf{NR} - \mathbf{PQ} = (\mathbf{MR} - \mathbf{MN}) - (\mathbf{MQ} - \mathbf{MP}). \qquad (3)$$

Найденные значения векторов из равенства (1) подставим в равенство (3):

$\mathbf{NR} - \mathbf{PQ} = (\mathbf{MD} + \mathbf{MA}) - (\mathbf{MA} + \mathbf{MB}) - (\mathbf{MC} + \mathbf{MD}) + (\mathbf{MB} + \mathbf{MC})$, т. е. $\mathbf{NR} - \mathbf{PQ} = \mathbf{MD} + \mathbf{MA} - \mathbf{MA} - \mathbf{MB} - \mathbf{MC} - \mathbf{MD} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC} = \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{NR} - \mathbf{PQ} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{NR} = \mathbf{PQ}$. Равные векторы имеют равные длины, следовательно, $|\mathbf{NR}| = |\mathbf{PQ}|$.

Аналогично доказывается, что $\mathbf{NP} = \mathbf{RQ}$. Следовательно, противоположные стороны четырехугольника $NPQR$ равны, а потому $NPQR$ — параллелограмм (использован один из признаков параллелограмма), что и требовалось доказать.

Ко *второму* виду относятся задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в данном отношении или, в частности, является его серединой.

Задача 2.

В параллелограмме $ABCD$ сторона AD разделена на n равных частей и первая точка деления соединена с вершиной B. На какие части полученная прямая делит диагональ AC?

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $AK = \frac{1}{n} AD$; точка P лежит на диагонали AC; $AP = \alpha AC$ (рис. 388).

Найти число α.

Решение. Пусть $\mathbf{DC} = \mathbf{b}$, $\mathbf{DA} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{AP} = \alpha\mathbf{AC}$.

Выразим вектор $\mathbf{AP}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ двумя способами. С одной стороны, по определению разности векторов $\mathbf{AC} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, тогда вектор $\mathbf{AP} = \alpha\mathbf{AC} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \alpha\mathbf{b} - \alpha\mathbf{a}$.

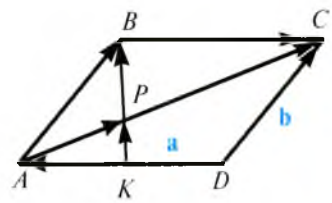


Рис. 388

С другой стороны, на основе определения суммы двух векторов $\mathbf{AP} = \mathbf{AK} + \mathbf{KP}$, но из

условия следует, что $\mathbf{AK} = \frac{1}{n}\mathbf{AD}$, а $\mathbf{KP} = \alpha\mathbf{KB}$ из подобия ΔAPK и ΔBPC, имеем вектор

$$\mathbf{AP} = -\frac{1}{n}\mathbf{a} + \alpha\mathbf{KB} = -\frac{1}{n}\mathbf{a} + \alpha\left(\frac{1}{n}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right) = \frac{\alpha - 1}{n}\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Согласно теореме о единственности представления вектора через два неколлинеарных вектора, имеем:

$$\frac{\alpha - 1}{n} = -\alpha, \text{ откуда } \alpha = \frac{1}{n+1}$$

Значит, отрезок AP составляет $(n + 1)$ — часть отрезка AC, т. е. $AP = \frac{1}{n+1} \cdot AC$. Задача решена.

К задачам *третьего* вида относятся те, в которых требуется доказать принадлежность трех точек одной прямой. Эти задачи можно рассматривать как частный случай задач предыдущего вида. Но они имеют свою специфику решений. Рассмотрим такую задачу.

Задача 3.

На стороне AB треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые, параллельные его медианам AM_1 и BM_2 и пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1 и B_1. Доказать, что середина отрезка A_1B_1 (точка E), а также точка P и точка G пересечения медиан данного треугольника лежат на одной прямой.

Изменим заключение задачи таким образом, чтобы к ее решению можно было применить векторы. Это можно сделать следующими способами (рис. 389):

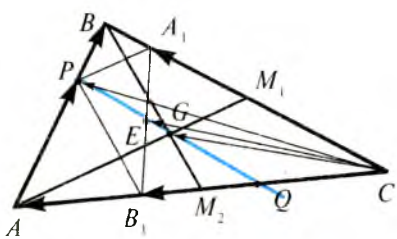


Рис. 389

1. Установить, что $\mathbf{EP} = k\,\mathbf{GP}$ (можно взять и другие векторы).

2. Для некоторой точки Q установить, что

$\mathbf{QE} = k\mathbf{QP} + (1 - k)\,\mathbf{QG}$ (условие принадлежности трех точек одной прямой).

Первый способ решения аналогичен решению задач первого вида.

Рассмотрим другой способ. Для этого введем вначале условие принадлежности трех точек одной прямой.

Для того чтобы какие-либо три точки F, N, M принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы для полюса Q выполнялось равенство:

$$\mathbf{QM} = p\mathbf{QF} + q\mathbf{NQ}, \text{ где } p + q = 1.$$

Пусть длины двух векторов

$$|\mathbf{AP}| : |\mathbf{PB}| = m : n \qquad (1)$$

Тогда

$$|\mathbf{AB}_1| : |\mathbf{B}_1\mathbf{C}| = m : (m + n + n) = m : (2n + m) \qquad (2)$$

(так как M_2 — середина AC) и

$$|\mathbf{BA}_1| : |\mathbf{A}_1\mathbf{C}| = n : (m + n + n) = n : (2m + n) \qquad (3)$$

(так как M_1 — середина BC). Из свойства центра тяжести G вытекает:

$$\mathbf{CG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB}) = \frac{1}{3}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB}). \qquad (4)$$

Из отношений (2) и (3) можно написать:

$$\mathbf{CB}_1 = \frac{2n + m}{2(m + n)}\mathbf{CA}, \quad \mathbf{CA}_1 = \frac{n + 2m}{2(m + n)}\mathbf{CB}.$$

Из того, что точка E — середина отрезка A_1B_1, можно записать:

$$\mathbf{CE} = \frac{1}{2}(\mathbf{CB}_1 + \mathbf{CA}_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{2n + m}{(m + n)}\mathbf{CA} + \frac{n + 2m}{m + n}\mathbf{CB}\right). \qquad (5)$$

По теореме о делении отрезка в данном отношении имеем:

$$\mathbf{CP} = \frac{n}{m + n}\mathbf{CA} + \frac{m}{m + n}\mathbf{CB}. \qquad (6)$$

Чтобы связать векторы **CG**, **CE**, **CP**, преобразуем

вектор **CE** из формулы (5) и выразим его через векторы **CG** и **CP**. $\mathbf{CE} = \frac{1}{4}\left(\frac{m+n+n}{m+n}\mathbf{CA} + \frac{m+n+m}{m+n}\mathbf{CB}\right) =$

$= \frac{1}{4}(\mathbf{CA} + \mathbf{CB} + \frac{n}{m+n} \cdot \mathbf{CA}) = \frac{1}{4}(3\mathbf{CG} + \mathbf{CP}) = \frac{3}{4}\mathbf{CG} + \frac{1}{4}\mathbf{CP}.$

Итак, $\mathbf{CE} = \frac{3}{4}\mathbf{CG} + \frac{1}{4}\mathbf{CP}$, а поскольку $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, то точки E, G, P принадлежат одной прямой и $|EG| : |PE| = 1 : 3$. Задача решена.

Рассмотренные виды аффинных задач на плоскости не исчерпывают всего их многообразия, но они являются самыми распространенными.

Теперь рассмотрим другие задачи — метрические. В них используется скалярное произведение векторов.

Задача 4.

Найти сумму квадратов медиан треугольника, если известны его стороны a, b, c.

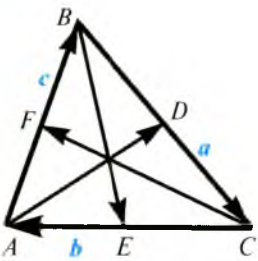


Рис. 390

Дано: ΔABC; BE, AD и CF — медианы (рис. 390).

Найти сумму квадратов медиан.

Решение. Пусть $\mathbf{AB} = \mathbf{c}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{a}$, $\mathbf{CA} = \mathbf{b}$.

По определению суммы векторов: $\mathbf{AD} = \mathbf{c} + \frac{\mathbf{a}}{2}$, $\mathbf{BE} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{b}}{2}$, $\mathbf{CF} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{c}}{2}$.

Используя свойство скалярного квадрата, получим:

$$\mathbf{AD}^2 + \mathbf{BE}^2 + \mathbf{CF}^2 = \left(c + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= \mathbf{c}^2 + (\mathbf{ca}) + \frac{\mathbf{a}^2}{4} + \mathbf{a}^2 + (\mathbf{ab}) + \frac{\mathbf{b}^2}{4} + \mathbf{b}^2 + (\mathbf{bc}) + \frac{\mathbf{c}^2}{4} =$$

$$= \frac{5}{4}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + [(\mathbf{ca}) + (\mathbf{ba}) + (\mathbf{bc})]. \qquad (7)$$

Так как по правилу сложения векторов: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, то $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 0$. Таким образом, $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2[(\mathbf{ac}) + (\mathbf{ba}) + (\mathbf{bc})] = 0$, т. е. $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = -2[(\mathbf{ac}) + (\mathbf{ba}) + (\mathbf{bc})]$.

Итак, $(\mathbf{ac}) + (\mathbf{ba}) + (\mathbf{bc}) = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. Подставив полученное значение в равенство (7), получим: $|\mathbf{AD}|^2 + |\mathbf{BE}|^2 + |\mathbf{CF}|^2 = \frac{3}{4}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$ согласно свойству скалярного квадрата: $AD^2 = |\mathbf{AD}|^2$, $BE^2 = |\mathbf{BE}|^2$, $CF^2 = |\mathbf{CF}|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, и тогда $AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором?
2. Как обозначаются векторы?
3. Что значит абсолютная величина вектора?
4. Какие векторы называются равными?
5. Что называется суммой и разностью векторов?
6. Что называется скалярным произведением двух векторов?
7. Какие векторы называются коллинеарными?
8. Сформулировать правила сложения и вычитания векторов, заданных в координатной форме.
9. Как определить угол между двумя векторами?
10. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух векторов?
11. Верно ли равенство $(3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2$?
12. Может ли произведение двух векторов быть вектором?
13. Можно ли в результате сложения двух векторов получить скалярную величину?
14. Можно ли доказать теорему о средней линии треугольника с помощью векторов?
15. Что называется проекцией вектора на прямую?
16. Что такое орт?
17. Что значит — единичный вектор?
18. Как разложить вектор по ортам?
19. Как сформулировать правило треугольника и многоугольника при сложении векторов?
20. Что значит — векторы свободны?

Тест № 15

1. Дано: $\mathbf{a}$ (2; −4) и $\mathbf{b}$ (3; 5). Найти $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

A) (1; 1); B) (1; 9); C) (−1; −9); D) (5;1); E) (−5; −1).

2. Дано $\mathbf{a}$ (1; −2) $\mathbf{b}$ (3; 2). Найти $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

A) (4; 0); B) (5; −2); C) (−5; 2); D) (7;2); E) (4; −4).

3. Дано $\mathbf{a}$ (8; −6). Найти λ, если $|\lambda\mathbf{a}| = 5$.

A) 2; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{1}{25}$; E) 5.

4. Если $\mathbf{m}$ (−3; −1) и $\mathbf{n}$ (5; −6), найти координаты вектора $\mathbf{a} = \mathbf{n} - 3\mathbf{m}$.

A) (14; −9); B) (4; −3); C) (14; −3); D) (9; 3); E) (−5; 6).

5. Даны векторы $\mathbf{a}$ (7; 3) и $\mathbf{b}$ (5; 2). Вычислить $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

A) 19; B) 5; C) 8; D) 13; E) 12.

6. Если $|\mathbf{a}| = 3$ и $|\mathbf{b}| = 4$ и угол между ними равен 60°, то при каком λ $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$ будет перпендикулярен $\mathbf{a}$?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 1,5; E) 2,5.

7. Косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ (3; 2) и $\mathbf{b}$ (4; 2):

A) $\frac{6}{\sqrt{65}}$; B) $\frac{6}{\sqrt{41}}$; C) $\frac{8}{\sqrt{65}}$; D) $\frac{8}{\sqrt{41}}$; E) $\frac{2}{\sqrt{65}}$.

8. Если $\mathbf{a}$ (3; 4) и $\mathbf{b}$ (5; −2), то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ равно:

A) 8; B) 7;C) 14; D) 10; E) 12.

9. Если $(\mathbf{m} - 2\mathbf{n})^2 + (\mathbf{m} + \mathbf{n})^2 = 73$, $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$; $|\mathbf{n}| = 3$, найти угол между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$.

A) 120°; B) 130°; C) 128°; D) 150°; E) 135°.

10. Какое высказывание неверно:

A) сумма двух векторов есть вектор;
B) умножение вектора на число есть число;

C) разность двух векторов есть вектор;
D) скалярное произведение двух векторов есть число;
E) векторное произведение двух векторов есть вектор?

11. Даны $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Найти $\cos^2\alpha$, где α — угол между векторами. **a** и **b**.

A) 0; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{50}$; D) $\frac{3}{2}$; E) $\frac{1}{25}$.

12. Векторы **a** (4; y) и **b** (2; 5) коллинеарны, найти *y*.

A) 5; B) 10; C) 6; D) 4; E) 3.

13. Даны **m** и **n** — единичные векторы и угол между ними 60°. Найти скалярное произведение векторов $(2\mathbf{m} + \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - 3\mathbf{n})$.

A) −25; B) −3,5; C) 3,5; D) 2; E) −3.

14. Найти угол между векторами **a** (2; 5) и **b** (−7; −3).

A) 150°; B) 120°; C) 135°; D) 60°; E) 45°.

15. Найти длину вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{в}$, если **a** (1; 2) и **b** (3; 1).

A) 4,5; B) 5; C) 3; D) $\sqrt{13}$; E) $\sqrt{41}$.

16. Даны векторы **a** (−4; 6) и **b** (3; *n*). При каком *n* эти векторы перпендикулярны?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

17. Найти угол A треугольника *ABC*, если *A* (0; 1); *B* ($\sqrt{3}$;0); C (0; 3).

A) 30°; B) 90°; C) 60°; D) 120°; E) 150°.

18. Даны векторы **a** (5; 1) и **b** (−3; 2), Найти такое число λ, чтобы вектор $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ был перпендикулярен вектору **a**.

A) 2; B) 1; C) −4; D) 4; E) 5.

19. Найти угол **B** треугольника *ABC*, если *A* (2; −1); *B* (3; 2) и *C* (0; 3).

A) 30°; B) 90°; C) 60°; D) 120°; E) 150°.

20. Даны векторы $\mathbf{a}$ (−1; 0); $\mathbf{b}$ (−1; 2); $\mathbf{c}$ (−1; 1). Найти косинус угла между векторами $(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ и $(\mathbf{c}+\mathbf{b})$.

A) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$; B) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$; C) $\frac{\sqrt{13}}{13}$; D) $\frac{\sqrt{26}}{13}$; E) $\frac{3}{4}$.

21. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{c}$ (−1; 2) и $\mathbf{d}$ (0,5; 1).

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{2}{5}$; E) $\frac{3}{4}$.

22. Найти наибольший угол треугольника MNK, если M (1; 1); N (2; 3) и K (−1; 2).

A) 75°; B) 90°; C) 120°; D) 135°; E) 105°.

23. Даны векторы $\mathbf{a}$ (0; 1) и $\mathbf{b}$ (2; 1). При каком значении x вектор $(\mathbf{b}+x\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$?

A) −4; B) −6; C) −7; D) −3; E) −5.

24. Даны векторы $\mathbf{a}$ (5; 1) и $\mathbf{b}$ (−2; 3). Вычислить: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

A) 5; B) 3; C) 4; D) 2; E) 1.

25. В трапеции $ABCD$: MN — средняя линия; $AB = 12$; $CD = 8$; $\mathbf{AB} = \lambda\mathbf{NM}$. Найти λ, если $\mathbf{AB} \uparrow\downarrow \mathbf{NM}$.

A) 1,2; B) −1,2; C) 1,5; D) −1,5; E) 2.

26. Найти угол между диагоналями четырехугольника $OMPK$, если $O(0; 0)$; $M(1; 1)$; $P(0; 2)$; $K(-1; 1)$.

A) 90°; B) 30°; C) 45°; D) 75°; E) 60°.

27. Найти угол между единичными векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, если векторы $\mathbf{c}-2\mathbf{b}$ и $4\mathbf{b}+5\mathbf{c}$ перпендикулярны.

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D)120°; E) 90°.

28. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если они составляют угол 45° и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$.

A) 4; B) $2\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) 2; E) 8.

29. Найти координаты вектора $\mathbf{p} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, если $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$.

A) $(-4; 12)$; B) $(-4; 0)$; C) $(4; 0)$; D) $(2; -6)$; E) $(-2; 4)$.

30. Даны три вершины четырехугольника $M(2; -4)$; $N(-4; 0)$; $P(2; -2)$. Найти координаты вершины Q, если $\mathbf{MN} = 4\mathbf{QP}$.

A) $(-7; 1)$; B) $(2{,}5; -3)$; C) $(-2{,}5; -1)$; D) $(5; 1)$; E) $(8; -6)$.

31. Найти угол между векторами $\mathbf{a}$ $(2; \sqrt{2})$ и $\mathbf{b}$ $(4; 2\sqrt{2})$.

A) $\frac{\pi}{4}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) 0; D) $\frac{\pi}{2}$; E) $\frac{\pi}{6}$.

32. Угол между единичными векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $60°$. Найти: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$.

A) $\sqrt{2}$; B) 2; C) 1; D) $\sqrt{3}$; E) 3.

33. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, если они составляют угол $30°$ и $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}$.

A) 2; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) 1; D) $2\sqrt{3}$; E) 1,5.

34. Вектор $\mathbf{m}$ разложен по двум неколлинеарным векторам $\mathbf{p}$ $(2{,}5; -1)$ и $\mathbf{q}$ $(-2; -2)$ так, что $\mathbf{m} = 4\mathbf{p} + 2\mathbf{q}$. Найти длину вектора $\mathbf{m}$.

A) 12; B) 8; C) 14; D) 6; E) 10.

35. Точки $A(9; 7)$; $B(6; -1)$; $C(4; 9)$ являются вершинами ΔABC. Найти длину медианы, проведенной к стороне BC.

A) 4,5; B) 4; C) 6; D) 10; E) 5.

36. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол в $120°$. $|\mathbf{a}| = 3$; $|\mathbf{b}| = 5$. Определить $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

A) 2; B) 8; C) 7; D) 6; E) 10.

37. Вершины треугольника имеют координаты $(2; 2)$;

(3; 3) и (1; 4). Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

A) (2; 3); B) (2,5; 3,5); C) (3,5; 3); D) (2; 3,5); E) (1,5; 2,5).

38. Какие из векторов **a** (2; −4); **b** (1; 2); **c** (1; −2) и **d** (−2; −4) коллинеарны?

A) **a**; **c**; и **b**; **d**; B) **b**; **c**; C) **a**; **d**; D) **a**; **b**; E) коллинеарных нет.

39. Векторы **a** и **b** образуют угол $\frac{\pi}{3}$; $|\mathbf{a}| = 3$; $|\mathbf{b}| = 4$. Найти длину вектора $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

A) $\sqrt{217}$; B) 12; C) 17; D) $\sqrt{221}$; E) 13.

40. При каком положительном значении n ($n > 0$) векторы **a** $(2n; 3)$ и **b** $(6; n)$ коллинеарны?

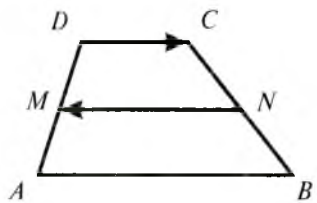
A) 1; B) 3; C) 2; D) 4; E) 6.

41. Найти синус угла между векторами **a**(1; 2) и **b**(2; 1).

A) $\frac{3}{5}$; B) $\frac{4}{5}$; C) $\frac{4}{7}$; D) $\frac{1}{6}$; E) $\frac{5}{7}$.

42. В трапеции $ABCD$: MN — средняя линия; $AB = 13$; $CD = 7$. Найти значение λ, если $\mathbf{DC} = \lambda \cdot \mathbf{NM}$.

A) 0,6; B) -0,6; C) 0,7; D) -0,7; E) 0,8.



Глава 18

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

§ 18.1. Основные этапы решения задач на построение

Решение задачи на построение состоит из следующих четырех частей.

1. Самая важная часть, имеющая целью составить план решения, называется *анализом*.

Предположив, что задача решена, делают от руки приблизительный чертеж искомой фигуры и, рассматривая его, находят такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу к другим, ранее известным.

2. После нахождения плана решения задач выполняют сообразно этому плану *построение*.

3. Для проверки правильности решения на основании известных теорем доказывают, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи. Эта часть называется *синтезом*, или *доказательством*.

4. Выясняется вопрос, при всех ли данных задача возможна, имеет ли она одно или несколько решений и нет ли в задаче каких-либо особых случаев, когда построение упрощается или усложняется. Эта часть решения — *исследование задачи*. Когда задача очень проста и не возникает никаких сомнений в возможности ее решения, то анализ и исследование не проводят, а лишь указывают этапы построения и приводят доказательство. Такой способ был использован при решении задач на построение, выполненных ранее.

Рассмотрим несколько задач на построение:

Задача 1.

Построить треугольник, зная его основание a, угол B, прилежащий к основанию, и сумму S двух других его сторон (рис. 391 *а*).

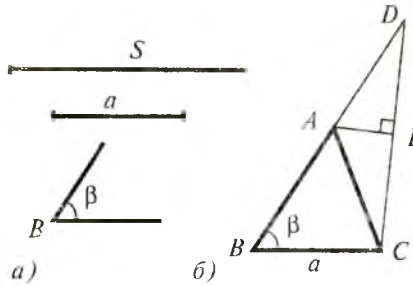


Рис. 391

Анализ. Пусть построен треугольник ABC, у которого $BC = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $AB + AC = S$. Рассмотрим полученный треугольник ABC. Всегда можно построить $BC = a$, $\angle B = \beta$. Остается найти на стороне угла B такую точку A, чтобы сумма $BA + AC$ равнялась S. На продолжении стороны BA от B отложим отрезок $BD = S$. Теперь на отрезке BD следует найти такую точку A, которая будет одинаково удалена от точек D и C. Эта точка должна принадлежать перпендикуляру, проведенному к отрезку CD через его середину. При пересечении этого перпендикуляра с BD и получается точка A.

Построение. 1. Строим угол B, равный данному углу β.

2. На одной стороне этого угла отложим $BC = a$, на другой — $BD = S$. Соединяем точки D и C.

3. Отрезок CD делим пополам и через точку E — середину отрезка проводим перпендикуляр к CD. Его пересечение с BD дает точку A.

4. Соединив точки A и C, получим ΔABC.

Синтез (или доказательство). Треугольник ABC — искомый, поскольку $BC = a$, $\angle B = \beta$ и $BA + AC = S$, т. к. в ΔDAC медиана AE ($CE = ED$) является и высотой ($AE \perp CD$), следовательно, ΔDAC — равнобедренный, т. е. $AD = AC$ и $BA + AD = BA + AC$.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если $S > \alpha$, поскольку в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других его сторон (при $S = \alpha$ или $S < \alpha$ задача не имеет решения), т.е. каждый из этапов построения — единствен (перпендикуляр AE может пересечься с BD только в одной точке).

Задача 2.

К двум окружностям Q и O_1 провести общую касательную (рис. 392).

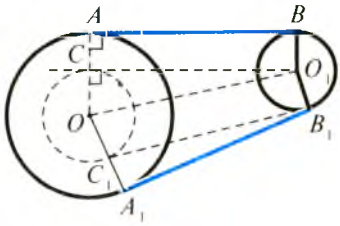


Рис. 392

Анализ. Предположим, что задача решена и AB — общая касательная окружностей O и O_1. Определив одну из точек касания (A или B), легко можно найти и другую. Проведем радиусы OA и O_1B. Так как касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, то $OA \perp AB$ и $O_1B \perp AB$, и поэтому $OA \parallel O_1B$. Из точки O_1 проведем $O_1C \parallel AB$, тогда ΔOCO_1 — прямоугольный ($\angle C = 90°$). Если описать окружность с центром в точке O и радиусом OC, то она будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности равен $OA - CA = OA - O_1B$, т. е. разности радиусов этих двух окружностей.

Построение. 1. Описываем окружность с центром в точке O и радиусом, равным разности радиусов этих окружностей.

2. Из точки O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C.

3. Через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до встречи с данной окружностью в точке A.

4. Из точки A проводим прямую $AB \parallel CO_1$.

Синтез. AB — действительно общая касательная к окружностям O и O_1, т. к. $OC \perp CO_1$ и $AB \parallel CO_1$, и поэтому $OA \perp AB$. Следовательно, AB — касательная к окружности O, т. к. AB перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. $OA \parallel O_1B$, следовательно, $O_1B \perp AB$, т. е. AB — касательная к окружности O_1. Итак, AB — общая касательная окружностей O и O_1.

Исследование. Поскольку из точки O_1 к вспомогательной окружности радиуса $OA - O_1B$ можно провести две касательные OC и OC_1, то задача имеет два

решения, т. е. возможна еще одна касательная A_1B_1. Касательные AB и A_1B_1 называются *внешними касательными.*

Возможно построение и внутренних общих касательных к окружностям O и O_1.

Анализ (рис. 393). Предположим, что задача решена и AB — искомая касательная. В точках касания A и B проведем радиусы OA и O_1B, которые, будучи перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой. Из точки O_1 проведем $O_1C \parallel BA$ и продолжим OA до пересечения с O_1C в точке C. Тогда OC будет перпендикулярна к O_1C, следовательно окружность, описанная радиусом OC с центром в точке O, будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности равен $OA+AC = OA + O_1B$, т. е. равен сумме радиусов этих окружностей.

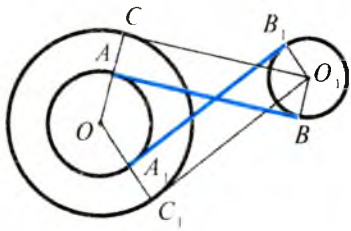


Рис. 393

Построение. 1. Проводим окружность с центром в точке O и радиусом, равным сумме радиусов двух данных окружностей.

2. Из точки O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C.

3. Точку касания C соединяем с точкой O.

4. Через точку A, в которой OC пересекается с данной окружностью, проводим $AB \parallel CO_1$.

Синтез. Действительно, AB — общая касательная к окружностям O и O_1, т. к. O_1C, будучи касательной к вспомогательной окружности, является перпендикуляром к OC, а поскольку $AB \parallel CO_1$, то $OC \perp AB$, т. е. AB — касательная к окружности O. $AO \parallel O_1B$, а т. к. $AO \perp AB$, то и $O_1B \perp AB$, т. е. AB — касательная и ко второй окружности O_1.

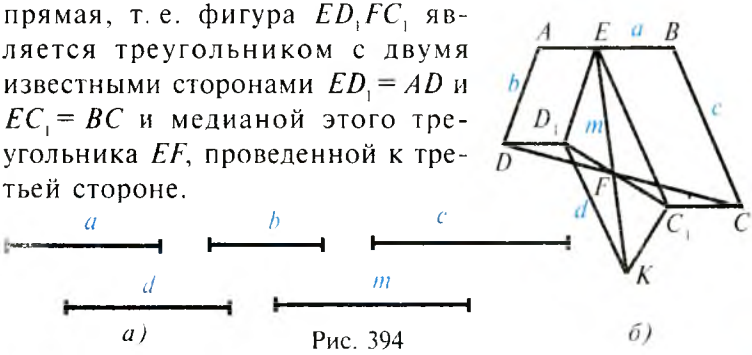
Исследование. Задача имеет два решения, т. к. из точки O_1 можно провести две касательные O_1C и O_1C_1 к вспомогательной окружности радиуса $OA+O_1B$.

§ 18.2. Метод параллельного переноса и симметрии

Задача 1.

Построить четырехугольник $ABCD$, зная его стороны и отрезок EF, соединяющий середины противоположных сторон (рис. 394 *а*).

Анализ. Пусть четырехугольник $ABCD$, стороны которого $AB=a$, $AD=b$; $BC=c$; $DC=d$, построен, причем $EF=m$, где $AE=BE$; $DF=CF$. Для сближения данных линий произведем параллельный перенос стороны AD в положение ED_1 и стороны BC в положение EC_1. Тогда $DD_1=AE$ и $DD_1 \parallel AE$, и поэтому четырехугольник ADD_1E — параллелограмм. Аналогично, $CC_1=BE$ и $CC_1 \parallel BE$, и тогда четырехугольник BEC_1C также параллелограмм. Из этого получаем, что $DD_1=CC_1$ и $DD_1 \parallel CC_1$. Рассмотрим $\Delta DD_1F=\Delta CC_1F$. Они равны по первому признаку равенства треугольников: $DD_1=CC_1$ (по доказанному); $DF=FC$ (по условию) и $\angle D_1DF=\angle FC_1C$ как соответственные при параллельных DD_1 и CC_1 и секущей D_1C_1. Из равенства треугольников следует, что $\angle D_1FD=\angle C_1FC$, и тогда эти углы будут вертикальными и линия D_1FC_1 — прямая, т. е. фигура ED_1FC_1 является треугольником с двумя известными сторонами $ED_1=AD$ и $EC_1=BC$ и медианой этого треугольника EF, проведенной к третьей стороне.



а) *б)*

Рис. 394

Треугольник D_1EC_1 по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне, можно построить, продолжив медиану EF за точку F на расстояние $FK = EF$ и соединив полученную точку K с точками D_1 и C_1. Параллелограмм KD_1EC_1 возможно построить по двум его сторонам и диагонали.

Если ΔED_1C_1 построен, можно построить ΔD_1DF и ΔC_1CF по трем сторонам: $DD_1 = AE = \frac{1}{2}AB$; $DF = FC = \frac{1}{2}DC$ и $D_1F = FC_1 = \frac{1}{2}D_1C_1$; $CC_1 = EB = \frac{1}{2}AB$; $FC = DF = \frac{1}{2}DC$ и $FC_1 = D_1F = \frac{1}{2}D_1C_1$.

После построения треугольников DD_1F и CC_1F можно построить и весь четырехугольник $ABCD$.

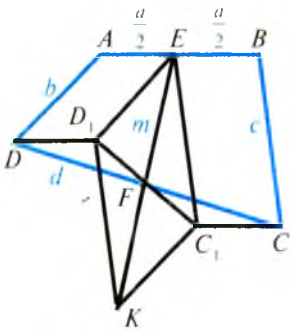


Рис. 395

Построение (рис. 395).

1. Строим ΔD_1EK по трем сторонам: $D_1E = b$; $D_1K = c$ и $EK = 2m$.

2. Достроим ΔD_1EK до параллелограмма D_1EC_1K, проведя $KC_1 \parallel D_1E$ и $EC_1 \parallel D_1K$.

3. При D_1F строим ΔDD_1F, у которого $DD_1 = \frac{a}{2}$, а $DF = \frac{d}{2}$ (по трем сторонам).

4. Через точку D проводим $DA \parallel D_1E$ и $DA = b = D_1E$.

5. На продолжении AE отложим $EB = AE = \frac{a}{2}$.

6. Через точку B проводим $BC \parallel EC_1$ и на ней отложим $BC = EC_1 = c$.

7. Соединяя точки D и C, получаем искомый четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = a$; $BC = c$; $DC = d$; $AD = b$ и $EF = m$.

Синтез. По построению $AB = a$; $BC = c$; $DC = d$; $AD = b$ и E — середина отрезка AB. Следует доказать, что $DC = d$, а поскольку $DF = \frac{d}{2}$, то нужно только

доказать, что $FC = \frac{d}{2}$. $\Delta DD_1F = \Delta FCC_1$ (по первому признаку равенства треугольников), $D_1F = FC_1$ (по свойству диагоналей параллелограмма D_1EC_1K), $DD_1 = C_1C = \frac{a}{2}$ (по построению), $C_1C = BE = \frac{a}{2}$ (как противоположные стороны параллелограмма C_1EBC), $\angle DD_1F = \angle FC_1C$ (как накрест лежащие при параллельных DD_1 и C_1C, которые порознь параллельны стороне AB). Из равенства треугольников следует, что $DF = FC = \frac{d}{2}$, и поэтому $CD = d$.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если построение треугольника D_1EK возможно, т. е. если его стороны удовлетворяют условию, что каждая из них меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.

Аналогичным требованиям должны удовлетворять стороны треугольника D_1DF, построенного по трем сторонам. Итак, искомый четырехугольник $ABCD$ построен.

Свойства симметрии могут быть использованы при решении задач на построение. Иногда искомый способ построения очевиден, если перегнуть чертеж относительно некоторой оси, чтобы эта часть заняла симметричное положение по другую сторону от этой оси.

Задача 2.

На прямой AB найти такую точку x, для которой сумма расстояний от данных точек M и N была бы наименьшей.

Анализ (рис. 396). Пусть точка x — искомая точка прямой AB — такая, что $Mx + Nx$ — наименьшее расстояние. Перегнув чертеж по прямой AB, найдем точку M_1, симметричную точке M относительно AB. Расстояние от точки M до любой точки прямой AB равно расстоянию от точ-

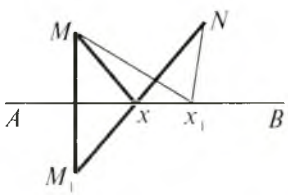


Рис. 396

ки M_1 до той же прямой AB. Суммы $Mx + Nx = M_1x + Nx$ и $Mx_1 + Nx_1 = M_1x_1 + Nx_1$, где x_1 — произвольная точка прямой AB, не совпадающая с точкой x. Если сравнивать эти суммы, то наименьшей из них будет та, при которой M_1xN — прямая линия, $M_1xN < M_1x_1 + Nx_1$, т.к. в треугольнике M_1NX_1 каждая сторона меньше суммы двух других его сторон.

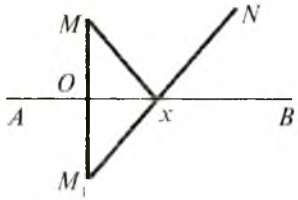


Рис. 397

Построение (рис. 397).

1. Строим точку M_1, симметричную точке M относительно оси AB ($MM_1 \perp AB$ и $MO = M_1O$).

2. Соединим точки M_1 и N.

3. Пересечение M_1N и прямой AB дает искомую точку x на оси AB, такую, что сумма $Mx + Nx$ — наименьшая.

Синтез. По построению $MO = M_1O$ и $Mx + Nx = M_1x + Nx$, но $M_1x + Nx = M_1N$, и это кратчайшее расстояние между двумя точками M_1 и N (прямая линия). Тогда $Mx + Nx$ также наименьшее расстояние.

Исследование. Задача имеет единственное решение, поскольку каждый этап построения может быть выполнен только единственным образом: 1) точка M_1, симметричная точке M относительно оси AB, является единственной; 2) через две точки M_1 и N проходит единственная прямая M_1N. Итак, точка x — искомая на прямой AB.

§ 18.3. Метод подобия

Метод подобия состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Чаще всего этот метод используется в случае, если одна из данных величин является длиной отрезка, а остальные данные — углы или отношения каких-либо величин.

Задача 1.

Построить треугольник по одному из его углов C, отношению сторон $AC : BC$, заключающих этот угол, и высоте h, опущенной из вершины угла C на противоположную сторону.

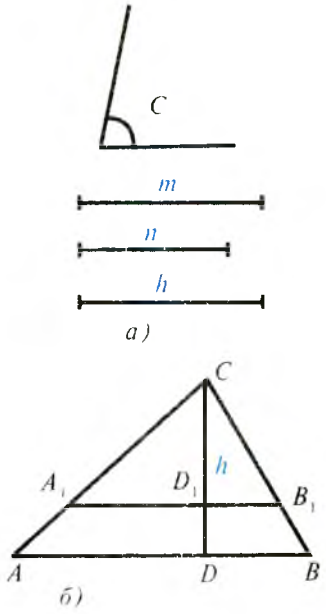


Рис. 398

Анализ. Пусть треугольник ABC построен. В нем $AC : BC = m : n$, $\angle BCA = C$ и $CD = h$ — высота. Если на сторонах данного угла C, равного углу ACB, отложить отрезки $CA_1 = m$ и $CB_1 = n$, где m и n отрезки (если же m и n —числа, то строятся отрезки mk и nk, где k — произвольный отрезок), то ΔA_1CB_1 по углу и двум сторонам, прилежащим к нему, построен. Построенный ΔA_1CB_1 подобен искомому ΔABC. Для построения искомого треугольника в треугольнике A_1CB_1 проводим высоту к стороне A_1B_1. Пусть $CD_1 = h_1$ — высота данного треугольника. Выбрав произвольный центр подобия, строим треугольник, подобный ΔA_1CB_1, с коэффициентом подобия, равным $\frac{h}{h_1}$, где h — высота искомого треугольника ABC. Полученный таким способом ΔABC и будет искомым. В качестве центра подобия проще всего выбрать вершину C. Тогда построение искомого треугольнике ABC становится довольно простым: на стороне CD_1 (при $\frac{h}{h_1} < 1$) или на ее продолжении (при $\frac{h}{h_1} > 1$) откладываем отрезок $CD = h$ и через точку D проводим прямую, параллельную A_1B_1. Итак, ΔABC построен. В нем $AC : BC = m : n$, $\angle BCA = C$ и $CD = h$ —высота этого треугольника.

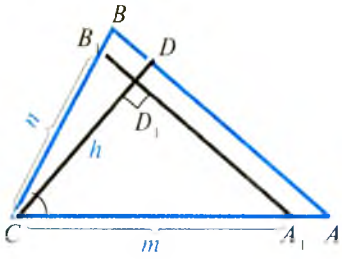


Рис. 399

Построение (рис. 399).

1. Строим угол, равный углу C.

2. На сторонах угла C откладываем отрезки $CA_1 = m$ и $CB_1 = n$.

3. Из точки C опускаем перпендикуляр CD_1 на A_1B_1, т. е. проводим высоту ΔA_1CB_1.

4. На продолжении стороны CD_1 откладываем отрезок $CD = h$.

5. Через точку D проводим прямую $AB \parallel A_1B_1$.

6. ΔABC — искомый.

Синтез. Полученный $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ по лемме о подобии, т. к. $AB \parallel A_1B_1$. Из подобия треугольников следует, что $\frac{CB}{CB_1} = \frac{CA}{CA_1}$ или $\frac{CA}{CB} = \frac{CA_1}{CB_1} = \frac{m}{n}$. По построению $\angle BCA = \angle C$ и $CD = h$. Итак, ΔABC удовлетворяет всем данным задачи.

Исследование. Задача имеет единственное решение, т. к. каждый этап построения — единственный. Построение возможно при любых значениях $\angle C$, $m : n$ и h.

Задача 2.

Построить окружность, вписанную в данный угол BAC и проходящую через данную точку N.

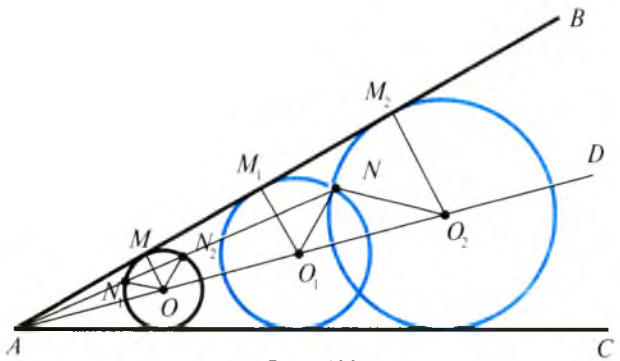


Рис. 400

Анализ (рис. 400). Окружность, вписанная в угол BAC, должна проходить через данную точку N. Отбросим на время это условие. Тогда существует бесчисленное множество окружностей, вписанных в данный угол, центр которых лежит на биссектрисе AD угла BAC (геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, и является биссектриса данного угла).

Пусть окружность с центром в точке O и радиусом OM является одной из окружностей, вписанных в угол BAC. Соединим вершину A угла с данной точкой N. Пусть N_1 и N_2 — точки пересечения построенной окружности O с прямой AN. Теперь используем условие, по которому окружность должна проходить через данную точку N. Если через точку N проведем прямые параллельно отрезкам ON_1 и ON_2, то точки пересечения этих прямых O_1 и O_2 с биссектрисой $\angle BAC$ и являются центрами искомых окружностей.

Построение.

1. Проводим биссектрису $\angle BAC$.
2. Из произвольной точки O, лежащей на биссектрисе, как из центра, проводим окружность радиуса OM, где $OM \perp AB$.
3. Соединяем точки A и N.
4. Находим точки пересечения прямой AN и построенной окружности O — точки N_1 и N_2.
5. Через точку N проводим прямые, параллельные радиусам ON_1 и ON_2, до пересечения этих прямых с биссектрисой угла BAC в точках O_1 и O_2.
6. Через точки O_1 и O_2 проводим прямые, перпендикулярные прямой AB, до пересечения с ней в точках M_1 и M_2.
7. С центрами в точках O_1 и O_2 радиусами O_1M_1 или O_2M_2 проводим окружности, которые и являются искомыми.

Синтез. Рассмотрим треугольники AN_2O и ANO_1: они подобны по лемме о подобии, т. к. $O_1N \parallel ON_2$ по

построению. Из подобия треугольников следует, что их сходственные стороны пропорциональны, т. е.

$$\frac{O_1N}{ON_2} = \frac{AO_1}{AO}. \qquad (1)$$

Рассмотрим треугольники AMO и AM_1O_1, которые также подобны по лемме о подобии, т. к. $OM \parallel O_1M_1$ как перпендикуляры к одной и той же прямой AB.

Из их подобия следует пропорциональность сходственных сторон этих треугольников:

$$\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{AO_1}{AO}. \qquad (2)$$

Из пропорций (1) и (2) с равными правыми частями следует равенство и левых частей этих пропорций, и тогда $\frac{O_1N}{ON_2} = \frac{O_1M_1}{OM}$, но $ON_2 = OM$ как радиусы окружности O, а тогда $O_1M_1 = O_1N$, т. е. окружность, описанная радиусом O_1N с центром в точке O_1, касается стороны AB, а т. к. ее центр лежит на биссектрисе угла, то эта окружность касается и стороны AC.

Аналогично можно показать, что окружность, описанная радиусом O_2N с центром в точке O_2, также касается сторон $\angle BAC$.

Исследование. Задача имеет два решения, т. е. возможно построение двух окружностей, вписанных в данный угол и проходящих через точку N, что следует из рассмотрения этапов построения задачи.

Задача 3.

В данный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы все его вершины лежали на сторонах треугольника.

Анализ (рис. 401). Построим сначала произвольный квадрат $KLMN$, три вершины которого лежат на сторонах данного треугольника ABC, а его четвертая вершина M сторонам треугольника не принадлежит.

Построенный квадрат $KLMN$ подобен искомому квад-

рату. Для построения искомого квадрата через точки A и M проводим прямую до пересечения со стороной BC в точке M_1.

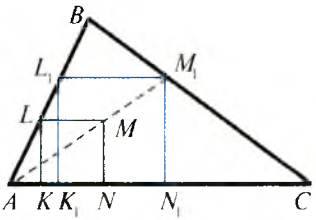


Рис. 401

Приняв за центр подобия точку A — вершину ΔABC и коэффициент подобия $K = \frac{AM_1}{AM}$, можно построить искомый квадрат $K_1L_1M_1N_1$, подобный квадрату $KLMN$.

Построение. 1. Из произвольной точки L, взятой на стороне AB треугольника ABC, опускаем перпендикуляр LK на сторону AC.

2. На стороне AC откладываем $KN = LK$.

3. Через точки L и N проводим прямые, параллельные KN и LK соответственно, до их взаимного пересечения в точке M.

4. Квадрат $KLMN$ подобен искомому квадрату.

5. Через точки A и M проводим прямую до ее пересечения со стороной BC треугольника ABC в точке M_1.

6. Строим квадрат, подобный квадрату $KLMN$, приняв за центр подобия вершину A треугольника ABC, а за коэффициент подобия $K = \frac{AM_1}{AM}$.

7. Для построения искомого квадрата через точку M_1 проводим M_1L_1 параллельно ML и M_1N_1 параллельно MN (L_1 — точка пересечения со стороной AB, а N_1 — точка пересечения со стороной AC) Через точку L_1 проводим прямую L_1K_1, параллельную стороне LK, — квадрат $K_1L_1M_1N_1$ — искомый.

Синтез. Полученный четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — прямоугольник, поскольку его стороны параллельны сторонам квадрата $KLMN$.

Докажем, что стороны этого прямоугольника L_1K_1

и L_1M_1 равны, и тогда этот прямоугольник будет квадратом.

Треугольники AMN и AM_1N_1 подобны по лемме о подобии ($MN \parallel M_1N_1$ по построению). Из их подобия следует:

$$\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{AM}{AM_1}. \qquad (1)$$

Треугольники ALM и AL_1M_1 также подобны по лемме о подобии ($LM \parallel L_1M_1$ по построению). Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{LM}{L_1M_1} = \frac{AM}{AM_1}. \qquad (2)$$

Из пропорций (1) и (2), правые части которых равны, следует, что и их левые части равны, и поэтому:

$$\frac{MN}{M_1N_1} = \frac{LM}{L_1M_1}. \qquad (3)$$

Но стороны MN и LM квадрата $KLMN$ равны, и тогда из пропорции (3) следует, что и $M_1N_1 = L_1M_1$.

Итак, построенный четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — искомый квадрат.

Исследование. Задача имеет единственное решение, т. к. каждый этап построения — единственный. Построение возможно для любого треугольника.

§ 18.4. Аналитический метод решения задач на построение

Алгебра и тригонометрия находят применение не только при решении задач на вычисление и на доказательство, но и при решении задач на построение. Для успешного решения задач на построение алгебраическим методом нужно уметь строить отрезки по формулам, выражающим их длины через длины данных отрезков.

Построение отрезков, заданных формулами $x = \frac{ab}{c}$;

$x = \sqrt{ab}$; $x = \sqrt{a^2+b^2}$ было рассмотрено ранее. В более сложных случаях построение отрезков сводится к этим известным построениям.

Задача.

В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату со стороной a.

Анализ (рис. 402). Пусть в окружность вписан прямоугольник $ABCD$, равновеликий квадрату со стороной a. Диагональ AC этого прямоугольника является диаметром окружности, а $\Delta ABC = \Delta ACD$. Задача будет решена, если удастся построить точку B. Для этого достаточно найти высоту BH треугольники ABC. Пусть $AC = d$ и $BH = x$. Выразим площадь прямоугольника $ABCD$ через d и x. Приравняв площадь прямоугольника площади данного квадрата со стороной a, получим уравнение: $dx = a^2$, откуда $x = \frac{a^2}{d}$,

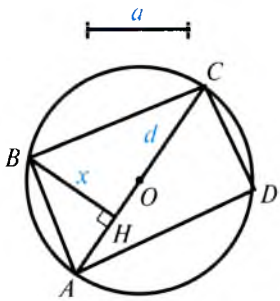


Рис. 402

Построение (рис 403).

1. Проводим диаметр данной окружности AC.
2. На окружности находим точку M так, чтобы $AM = a$.
3. Проводим перпендикуляр ME к диаметру AC.
4. Полученный отрезок $AE = \frac{a^2}{d} = x$ (по следствию из теоремы о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике $AM^2 = AC \cdot AE$, а тогда $AE = \frac{AM^2}{AC} = \frac{a^2}{d}$).
5. На расстоянии $x = AE$ от прямой AC проводим прямую $KN \parallel AC$.
6. Тогда точка пересечения KN с окружностью — третья вершина прямоугольника $ABCD$.

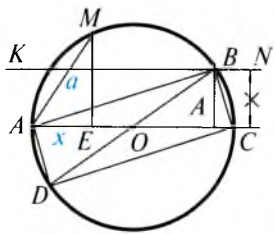


Рис. 403

7. Строим точку D, симметричную точке B, относительно центра окружности O.

8. $ABCD$ — искомый прямоугольник.

Синтез. Так как AC и BD — диаметры окружности и вписанные в окружность углы A, B, C, D, опирающиеся на диаметр окружности, являются прямыми углами,то, следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. $S_{BCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2\frac{1}{2} AC \cdot BH = AC \cdot BH = dx = d \cdot \frac{a^2}{d} = a^2$. Итак, $S_{ABCD} = S_{\text{квадрата}} = a^2$.

Исследование. Задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $x \le \frac{d}{2}$, т. е. $d \ge a\sqrt{2}$ (диаметр окружности не меньше диагонали данного квадрата). В противном случае прямая MN не пересечется с окружностью. В данном решении в качестве x принята высота BH треугольника ABC. Если за неизвестное x принять длину стороны прямоугольника, то формула, выражающая x через длины данных отрезков, окажется громоздкой и для решения задачи придется выполнить более сложные построения.

Таким образом, выбор неизвестных при решении задачи алгебраическим методом имеет существенное значение.

Иногда за неизвестное целесообразно принять угол. Для его нахождения составляется тригонометрическое уравнение. Выразив какую-либо тригонометрическую функцию искомого угла через данные элементы, можно построить этот угол, а затем и фигуру.

§ 18.5. Применение поворота при решении задач на построение

Задача.

Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина находилась в данной точке A, другая на данной прямой BC и третья — на данной окружности.

Анализ (рис. 404). Пусть ΔAMN — равносторонний, одна из его вершин N лежит на прямой BC, а другая вершина M лежит на окружности. Очевидно, что ни сам треугольник, ни какую-либо его часть по данным элементам построить нельзя. Мешает построению то, что прямая BC и окружность с центром O и радиусом $OM = r$ никак не взаимосвязаны и расположены совершенно произвольно. Кроме того, в искомом треугольнике известен всего один его элемент — его углы, равные каждый 60°.

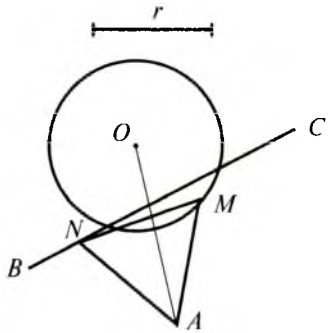


Рис. 404

Очевидно, чтобы устранить эти помехи, нужно преобразовать расположение элементов так, чтобы они как-то были связаны между собой. Точка A — фиксированная, и угол $MAN = 60°$ также известен. Поэтому, если повернуть окружность $(O; r)$ вокруг точки A на этот угол, т. е. на 60°, то точка M совпадет с точкой N, и тогда эта точка будет точкой пересечения прямой BC с новым положением окружности $(O; r)$.

Построение (рис. 405).

1. Проводим прямую AO.

2. Строим $\angle OAD = 60°$ и $\angle OAD_1 = 60°$ по обе стороны от AO.

3. Из точки A, как из центра, проводим окружность радиуса AO.

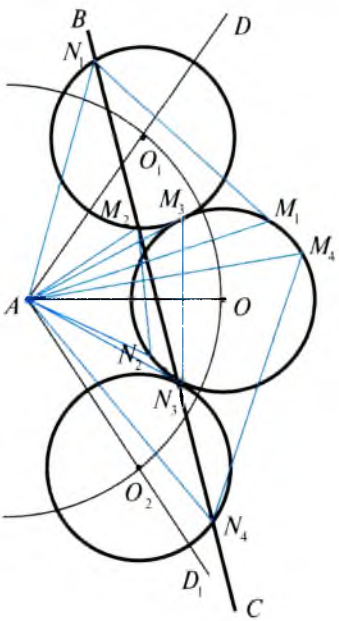


Рис. 405

4. Находим точки пересечения O_1 и O_2 окружности $(A; AO)$ с лучами AD и AD_1.

5. Проводим окружности радиуса r с центрами в точках O_1 и O_2.

6. Находим точки пересечения окружностей (O_1, r) и (O_2, r) с BC. На данном чертеже этих точек четыре: N_1, N_2, N_3 и N_4. Это максимальное количество точек, но вообще их может быть от 0 до 4.

7. Из точки A проводим окружности радиусом AN_1 (или AN_2, AN_3, AN_4).

8. Находим точки пересечения полученных окружностей $(A; AO)$ и $(A; AN_1)$ с окружностью $(O; r)$ и из каждой пары точек пересечения выбираем в качестве точки M_1, M_2, M_3, M_4 ту, которая лежит по ту сторону от AO, по какую лежит соответствующая ей точка N_1, N_2, N_3 или N_4 от AD и AD_1.

9. Соединяем точки A, M_1 и N_1; A, M_2 и N_2; A, M_3 и N_3 и A, M_4 и N_4 отрезками. Треугольники AM_1N_1, AM_2N_2, AM_3N_3, AM_4N_4 — искомые.

Синтез. Построенные треугольники AM_1N_1; AM_2N_2; AM_3N_3 и AM_4N_4 являются равнобедренными, углы при вершинах которых равны по 60°, откуда следует, что все эти треугольники — равносторонние. Кроме того, одна из вершин этих треугольников A — общая, другие N_1, N_2, N_3, N_4 лежат на прямой BC, а третьи вершины M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на окружности $(O; r)$.

Исследование. Если точка A совпадает с центром заданной окружности, то построение подобным образом непригодно. Решение в этом случае возможно лишь тогда, когда BC пересекает заданную окружность $(O; r)$ или касается ее. Откладывая от точки пересечения или касания по обе стороны дуги в 60°, получаем четыре решения (в случае пересечения) или два решения (в случае касания).

§ 18.6. Метод геометрических мест при решении задач на построение

Для решения многих задач на построение применяется понятие геометрического места точек и основанный на этом метод геометрических мест, известный еще со времен Платона (IV век до н. э.). Допустим, решение задачи сводится к нахождению точки, удовлетворяющей нескольким условиям. При отбрасывании одного из этих условий задача становится неопределенной, поскольку ее удовлетворяет уже бесчисленное множество точек. Эти точки и составляют геометрическое место, построение которого становится возможным.

Затем принимают во внимание первоначально отброшенное условие задачи. В этом случае задача опять становится неопределенной, т.к. ее удовлетворяет бесчисленное множество точек, которые также составляют геометрическое место.

Искомая точка, удовлетворяющая нескольким условиям, должна принадлежать обоим геометрическим местам, т. е. находиться на их пересечении. Задача оказывается возможной или невозможной в зависимости от того, пересекаются или не пересекаются найденные геометрические места точек. Задача будет иметь столько решений, сколько точек пересечения имеют эти геометрические места.

Рассмотрим сначала задачу на построение, решение которой позволит решить более сложную задачу уже с использованием геометрических мест.

Задача 1.

На данном отрезке AB построить сегмент, вмещающий данный угол α (рис. 406 *а*).

Анализ (рис. 406 *б*). Предположим, что задача решена и на отрезке AB построен сегмент AmB, вмещающий в себя угол α, т. е. каждый вписанный в

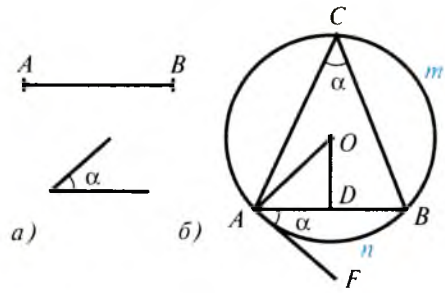


Рис. 406

него угол равен α. Проведем вспомогательную прямую AF — касательную к окружности в точке A. Тогда $\angle BAF$, составленный касательной и хордой, измеряется и как вписанный угол ACB половиной дуги AnB, т. е. $\angle BAF = \angle ACB = \alpha$. Центр же окружности O должен лежать на перпендикуляре DO, проведенном к отрезку AB через его середину, и в то же время он должен лежать на перпендикуляре AO к касательной AF, проведенном в точку касания (по свойству касательной к окружности она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания).

Итак, возможно следующее построение.

Построение (рис. 407).

1. На произвольной прямой AM откладываем отрезок AB.
2. При конце A отрезка AB строим $\angle BAF = \alpha$.
3. Через середину D отрезка AB проводим $DE \perp AB$.
4. Из точки A проводим $AK \perp AF$.
5. Точка пересечения DE и AK и есть центр окружности O.
6. Радиусом OA описываем окружности с центром в точке O.

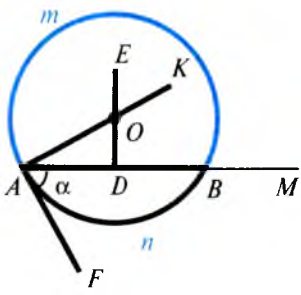


Рис. 407

Синтез. Сегмент AmB будет искомым, поскольку любой угол, вписанный в него, измеряется половиной дуги AnB, на которую он опирается, а половина $\cup AnB$ и есть $\angle BAF = \alpha$.

Исследование. В задаче построен сегмент AmB, расположенный выше отрезка AB.

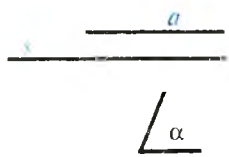
Такой же сегмент можно построить и по другую сторону отрезка AB. Таким образом, задача имеет два решения

И тогда: геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом a, состоит из дуг двух сегментов AmB и AnB, каждый из которых вмещает в себя угол α. Один из них расположен по одну сторону отрезка AB, а второй — по другую сторону этого отрезка.

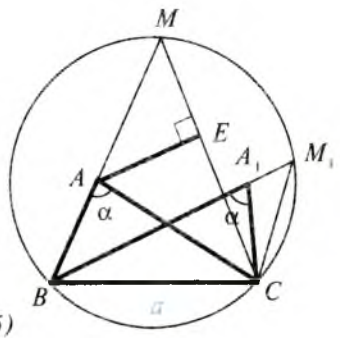
Задача 2.

Построить треугольник по основанию $BC = a$, углу $A = \alpha$ при вершине и сумме $S = MN$ двух боковых сторон (рис. 408 *а*).

Анализ (рис. 408 *б*). Пусть ΔABC — искомый треугольник, в котором $BC = a$, $AB + AC = S$ и $\angle A = \alpha$. Принимая во внимание сумму сторон BA и AC, равную S, отложим на продолжении отрезка BA отрезок $BM = S$ и полученную точку M соединим с точкой C. Получим вспомогательный треугольник BMC. Если ΔBMC построен, то можно перейти к построению и треугольника ABC. Построение ΔBMC сводится к нахождению точки M. Так как $AM = AC = S - AB$, то ΔAMC — равнобедренный, и тогда $\angle M = \frac{1}{2}\angle BAC$, т. к. $\angle M + \angle MCA = \angle BAC$ (по свойству внешнего угла он равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с ним), но в равнобедренном ΔAMC углы при основании равны, т. е. $\angle M =$



а)



б)

Рис. 408

$= \angle MCA$ и каждый из них равен половине внешнего $\angle BAC$, т. е. $\angle M = \frac{1}{2}\alpha$.

Итак, точка M должна удовлетворять двум условиям:

1) быть удаленной от точки B на расстоянии S;

2) из этой точки данный отрезок BC должен быть виден под углом, равным $\frac{1}{2}\alpha$.

Отбросим второе условие, и тогда получим бесчисленное множество точек M, лежащих на окружности, описанной радиусом S, с центром в точке B.

Отбросим первое условие и получим бесчисленное множество точек M, лежащих на дуге сегмента, построенного на BC и вмещающего угол, равный $\frac{1}{2}\alpha$. Таким образом, нахождение точки M сводится к построению двух геометрических мест, каждое из которых можно построить.

Если существуют точки пересечения этих геометрических мест, то задача решена.

Построение (рис. 409).

1. На произвольной прямой BK отложим отрезок $BC = a$.

2. Из точки B как из центра проводим окружность радиуса S.

3. На данном отрезке BC строим сегмент, вмещающий данный угол, равный $\frac{1}{2}\alpha$.

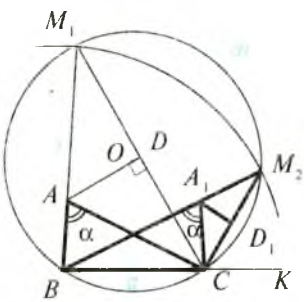


Рис. 409

4. Находим точки пересечения окружности радиуса S и сегмента BmC, вмещающего данный угол $\frac{1}{2}\alpha$ (с центром в точке O).

5. Полученные точки пересечения M_1 и M_2 соединяем с точками B и C.

6. Из середины D отрезка M_1C и D_1 отрезка M_2C проводим

перпендикуляры к ним до пересечения с прямыми BM_1 и BM_2 соответственно в точках A и A_1.

7. Полученные точки A и A_1 соединяем с точкой C.

8. Полученные ΔABC и ΔA_1BC — искомые.

Синтез. Действительно, в ΔABC и ΔA_1BC, сторона $BC = a$, $AB + AC = AB + AM_1 = S$ и $A_1B + A_1C = A_1B + A_1M_2 = S$ (ΔM_1AC и ΔM_2A_1C — равнобедренные, поскольку медианы AD и A_1D_1 являются и высотами). $\angle BAC = \angle BA_1C =$ как внешние углы, равные сумме двух внутренних, не смежных с ним, каждый из которых равен $\frac{1}{2}\alpha$.

Исследование. 1). Задача не имеет решений, если два геометрических места (окружность радиуса S и сегмент, вмещающий данный угол $\frac{\alpha}{2}$) не пересекаются.

2). Задача имеет одно решение, если геометрические места касаются, т. е. имеют только одну общую точку.

3). Задача имеет два решения (как в приведенном построении), если геометрические места пересекаются.

Ответы к тестам

Тест № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	B	C	D	C	B	A	A	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	D	B	C	E	A	C	C	D

Тест № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	B	B	C	C	B	B	D	B	E	E	C	D	B	D	C
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
A	B	C	B	B	D	D	B	E	A	B	C	A	D	D	B
33	34	35	36	37											
D	C	B	C	A											

Тест № 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	B	A	C	D	A	E	C	C	B	D	A	D
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	A	E	D	A	B	C	D	A	C	A

Тест № 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	A	D	E	A	B	E	C	B	D
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	E	D	A	A	C	D	A	D	B	A	B
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
C	C	D	A	A	B	A	C	B	D	C	D

Тест № 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	B	C	A	D	C	B	E	B	C	C	E	B	A
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	B	D	C	E	A	E	D	A	A	B	C	B	A
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
D	E	A	B	A	A	E	B	C	A	C	C	A	B

Тест № 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	D	A	D	B	A	B	D	C	A	D	A	B	A	C
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	C	D	A	A	B	C	D	E	D	C	B	A	C

Тест № 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	D	A	A	C	B	A	E	B	D	C	B	D	E	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	C	C	A	E	C	A	B	E	C	B	C	B	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
B	B	C	A	C	D	E	A	E	C	B	A	C	D	C
46	47	48	49	50	51	52								
E	B	A	C	A	D	A								

Тест № 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	B	C	C	A	A	D	C	E	B	D	B	C	C	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	E	A	E	D	C	D	D	B	C	D	B	A	C	B

Тест № 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	A	D	A	D	E	A	A	B	C	D	A	A	C	C
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	D	B	C	A	B	A	B	A	E	A	C	D	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
B	E	A	B	C	C	D	E	A	B					

Тест № 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	A	C	D	A	B	C	D	E	A	B	A	C	A	D
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	A	B	C	B	A	C	A	A	B	A	B	E	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
C	B	A	D	A	B	C	A	B	C					

Тест № 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	D	A	A	C	B	D	E	A	C	A	C	D	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	E	A	B	A	C	A	E	C	C	E	A	B	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
C	A	C	B	A	B	A	B	C	D					

Тест № 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	A	E	E	B	E	E	B	E
11	12	13	14	15					
D	D	E	B	A					

Тест № 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	E	C	C	B	A	A	C	B	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	B	B	C	D	C	C	B	D	B

Тест № 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	C	E	D	B	C	A	D	E	A	B	D	A
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
D	B	A	B	C	A	C	D	E	D	E	B	

Тест № 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	B	C	C	D	D	C	B	E	B	C	B	B	C	B
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	D	A	B	B	C	B	E	A	B	A	D	D	C	B
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42			
C	D	C	E	E	C	A	A	A	B	A	D			

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов ... 3
Глава 1. Начальные геометрические сведения ... 5
§ 1.1. Из истории развития геометрии ... 5
§ 1.2. Аксиоматика планиметрии ... 14
§ 1.3. Основные понятия и определения ... 16
§ 1.4. Математические предложения ... 20
Вопросы для самопроверки ... 24
Тест №1 ... 25

Глава 2. Треугольники ... 29
§ 2.1. Углы, их виды. Соотношения между ними ... 29
§ 2.2. Смежные и вертикальные углы и их свойства ... 33
§ 2.3. Треугольники и их виды ... 37
§ 2.4. Основные линии в треугольнике ... 41
§ 2.5. Свойства равнобедренного треугольника ... 43
§ 2.6. Признаки равенства треугольников ... 44
§ 2.7. Признаки равнобедренного треугольника ... 47
§ 2.8. Внешний угол треугольника и его свойства ... 49
§ 2.9. Соотношения между сторонами и углами треугольника ... 52
§ 2.10. Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной ... 54
§ 2.11. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных ... 58
§ 2.12. Признаки равенства прямоугольных треугольников ... 61
§ 2.13. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину, и свойство биссектрисы угла ... 63
Вопросы для самопроверки ... 65
Тест № 2 ... 68

Глава 3. Геометрические построения с помощью циркуля и линейки ... 74
§ 3.1. Построение треугольника по трем его сторонам ... 74
§ 3.2. Построение угла, равного данному ... 75
§ 3.3. Построение биссектрисы угла ... 75
§ 3.4. Построение перпендикуляра к прямой ... 76

§ 3.5. Деление отрезка пополам ... 77
§ 3.6. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними ... 78
§ 3.7. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам ... 79

Глава 4. Параллельные прямые ... 80
§ 4.1. Определение и аксиома о параллельных прямых ... 80
§ 4.2. Признаки параллельности двух прямых ... 82
§ 4.3. Свойства параллельных прямых ... 85
§ 4.4. Свойства углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами ... 87
§ 4.5. Сумма углов треугольника ... 89
§ 4.6. Сумма углов выпуклого многоугольника ... 92
Вопросы для самопроверки ... 94
Тест № 4 ... 95

Глава 5. Четырехугольники 100
§ 5.1. Параллелограмм и его свойства ... 100
§ 5.2. Признаки параллелограмма ... 104
§ 5.3. Прямоугольник и его свойства ... 106
§ 5.4. Ромб и его свойства ... 107
§ 5.5. Квадрат и его свойства ... 109
§ 5.6. Трапеция и ее виды ... 109
§ 5.7. Теорема Фалеса и ее применение ... 111
§ 5.8. Средние линии треугольника и трапеции; их свойства ... 112
Вопросы для самопроверки ... 114
Тест №5 ... 115

Глава 6. Окружность и круг ... 121
§ 6.1. Основные понятия ... 121
§ 6.2. Построение окружности, проходящей через три точки ... 123
§ 6.3. Центральные углы и их измерения ... 124
§ 6.4. Соотношения между дугами и хордами ... 125
§ 6.5. Взаимное расположение прямой и окружности ... 128
§ 6.6. Касательная к окружности и ее свойства ... 129
§ 6.7. Взаимное расположение двух окружностей ... 131
§ 6.8. Угол, вписанный в окружность, и его измерение ... 136
§ 6.9. Измерение углов с вершиной внутри или вне круга ... 139

§ 6.10. Вписанные и описанные треугольники. Замечательные точки треугольника 141
§ 6.11. Вписанные и описанные четырехугольники и их свойства 146
§ 6.12. Задачи на построение 148
Вопросы для самопроверки 151
Тест № 6 155

Глава 7. Движение 161
§ 7.1. Преобразование фигур 161
§ 7.2. Свойства движения 162
§ 7.3. Симметрия относительно точки 165
§ 7.4. Симметрия относительно прямой 166
§ 7.5. Поворот 168
§ 7.6. Параллельный перенос и его свойства 171
§ 7.7. Направление полупрямых 172
§ 7.8. Равенство фигур 173
§ 7.9. Гомотетия и ее свойство 175
Вопросы для самопроверки 176
Тест № 7 178

Глава 8. Подобие фигур 183
§ 8.1. Признаки подобия треугольников 183
§ 8.2. Признаки подобия прямоугольных треугольников 188
§ 8.3. Подобие многоугольников 190
§ 8.4. Теоремы о пропорциональных отрезках 194
§ 8.5. Свойство биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника 195
§ 8.6. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике 197
§ 8.7. Теорема Пифагора и некоторые способы ее доказательства 199
§ 8.8. Пропорциональные отрезки в круге 203
§ 8.9. Теоремы о квадрате стороны, лежащей против острого или тупого угла 206
§ 8.10. Теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма 208
Вопросы для самопроверки 209
Тест № 8 211

Глава 9. Задачи на построение 220
§ 9.1. Построение многоугольника, подобного данному 220

§ 9.2. Деление отрезка на пропорциональные части ... 221
§ 9.3. Построение четвертого отрезка, пропорционального трем данным ... 222
§ 9.4. Построение среднего отрезка, пропорционального двум данным ... 223

Глава 10. Тригонометрические функции острого угла ... 224
§ 10.1. Определение тригонометрических функций ... 224
§ 10.2. Основные тригонометрические тождества ... 227
§ 10.3. Значения тригонометрических функций углов в 30°, 45° и 60° ... 232
§ 10.4. Теорема косинусов ... 235
§ 10.5. Теорема синусов ... 237
§ 10.6. Теорема Стюарта ... 239
§ 10.7. Теорема Менелая и Чевы ... 242
Вопросы для самопроверки ... 249
Тест № 10 ... 250

Глава 11. Правильные многоугольники ... 256
§ 11.1. Построение правильных многоугольников ... 256
§ 11.2. Подобие правильных одноименных многоугольников ... 260
§ 11.3. Выражение сторон правильных многоугольников через радиусы вписанной и описанной окружностей ... 262
Вопросы для самопроверки ... 264
Тест № 11 ... 265

Глава 12. Площади плоских фигур ... 272
§ 12.1. Общие понятия о площади ... 272
§ 12.2. Площадь прямоугольника ... 273
§ 12.3. Площадь параллелограмма ... 276
§ 12.4. Площадь треугольника ... 277
§ 12.5. Формула Герона ... 280
§ 12.6. Площади треугольника, выраженные через тригонометрические функции ... 282
§ 12.7. Площадь треугольника через радиусы вписанного и описанного кругов ... 285
§ 12.8. Площадь трапеции ... 286
§ 12.9. Площадь описанного многоугольника ... 287
§ 12.10. Площадь четырехугольника через его диагонали ... 288

§ 12.11. Площадь правильного многоугольника 289
§ 12.12. Теорема Пифагора (доказательство Евклида) 290
§ 12.13. Отношение площадей подобных фигур 291
Вопросы для самопроверки 294
Тест № 12 295

Глава 13. Длина окружности. Площадь круга 301
§ 13.1. Числовая последовательность и ее предел ... 301
§ 13.2. Длина окружности и дуги 304
§ 13.3. Площадь круга, сектора, сегмента и кольца 307
Вопросы для самопроверки 312
Тест № 13 313

Глава 14. Декартова система координат 319
§ 14.1. Числовая ось. Метод координат на прямой 319
§ 14.2. Декартова система координат 320
§ 14.3. Расстояние между двумя точками на плоскости 323
§ 14.4. Деление отрезка в данном отношении 323
Вопросы для самопроверки 325
Тест № 14 326

Глава 15. Линии первого порядка. (Различные виды уравнения прямой на плоскости) 328
§ 15.1. Уравнение линии 328
§ 15.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом 328
§ 15.3. Общее уравнение прямой и его исследование 329
§ 15.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку 331
§ 15.5. Уравнение прямой, проходящей через две точки 332
§ 15.6. Уравнение прямой в отрезках на координатных осях 333
§ 15.7. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности прямых 334
§ 15.8. Точка пересечения двух прямых 336
Вопросы для самопроверки 336
Тест № 15 337

Глава 16. Кривые второго порядка 340
§ 16.1. Конические сечения 340

§ 16.2. Уравнение окружности 341
§ 16.3. Уравнение эллипса 342
§ 16.4. Уравнение гиперболы 344
§ 16.5. Уравнение параболы 346
§ 16.6. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям 348
Вопросы для самопроверки 352
Тест № 16 353

Глава 17. Векторы на плоскости и действия над ними 357
§ 17.1. Понятие вектора 357
§ 17.2. Операции над векторами 359
§ 17.3. Проекции вектора на ось. Координаты вектора 365
§ 17.4. Угол между векторами 366
§ 17.5. Разложение вектора по базису 367
§ 17.6. Скалярное произведение двух векторов 369
§ 17.7. Операция над векторами, заданными в координатной форме 373
§ 17.8. Доказательство некоторых теорем с применением векторов 376
§ 17.9. Задачи, решаемые с помощью векторов 379
Вопросы для самопроверки 385
Тест № 17 386

Глава 18. Геометрические построения 391
§ 18.1. Основные этапы решения задач на построение 391
§ 18.2. Метод параллельного переноса и симметрии 395
§ 18.3. Метод подобия 398
§ 18.4. Аналитический метод решения задач на построение 404
§ 18.5. Применение поворота при решении задач на построение 405
§ 18.6. Метод геометрических мест при решении задач на построение 409
Ответы к тестам 414
Содержание 418

Г 35

Геометрия. Часть I. Экспериментальный учебник для академических лицеев с углубленным изучением математики / К. Х. Абдуллаев, Л. Е. Змиевская, М. А. Низаметдинова и др. — Т.: «Ўқитувчи», 2002.— 424 с.

I. Абдуллаев К. Х. и др.

В надзагл.: М-во высшего и среднего спец. образования РУз., Центр среднего спец., профессионального образования, Ин-т развития среднего спец., профессионального образования.

ББК 22.151я721.6

Учебное издание

АБДУЛЛАЕВ КОСИМАЛИ ХУСИЕНОВИЧ,
ЗМИЕВСКАЯ ЛЮДМИЛА ЕФИМОВНА,
НИЗАМЕТДИНОВА МИСБОХАТ АНВАРОВНА,
ХУСАНОВ ЖУМАНАЗАР ХУСАНОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ
1 часть

Экспериментальный учебник для академических лицеев с углубленным изучением математики

Ташкент «Ўқитувчи» 2002

Редакторы *Г. И. Александрова, О. Вульф, Е. Полещикова*
Художественное оформление *М. Калинина, Б. Юсупова*
Художественный редактор *М. Кудряшова*
Технический редактор *Т. Грешникова*
Компьютерная верстка *Т. Пономаревой*
Корректор *В. Тараненко*

ИБ № 8041

Подписано в печать с оригинал-макета 13.05.2002. Формат 84+108$^{1}/_{32}$. Кегль 10 н/шпон. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. п. л. 22.26+0,21. Усл. кр.-отт 46,20. Изд. л. 21,98+0,25 форзац. Тираж 5000 экз. Заказ № 2013

Издательство «Ўқитувчи». Ташкент, 129, ул. Навои, 30. Договор № 14-19-02.

Типография № 1 Государственного комитета по печати Республики Узбекистан. Ташкент, ул. Сагбан, 1-й тупик, дом 2. 2002.