ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «КЕРЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, физики и информатики

Подольская О.Г.
Рябухо Е.Н.
Растопчина О.М.

МАТЕМАТИКА

Практикум

Часть 2
к практическим занятиям и по самостоятельной работе
для студентов направления подготовки – 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» очной и заочной форм обучения

Керчь, 2019 г.

УДК 517(0.75.8)

Составители: Подольская О.Г., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ»

Рябухо Е.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ»

Растопчина О.М., старший преподаватель кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ»

Рецензент: Уколов А.И.., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ»

Практикум рассмотрен и одобрен на заседании кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ»,

протокол № 9 от 23 апреля 2019 г.

Зав. кафедрой ____________ Т. Н. Попова

Практикум утвержден и рекомендован к публикации на заседании методической комиссии ТФ ФГБОУ ВО «КГМТУ»,

протокол № 8 от 25.04 2019 г.

ВВЕДЕНИЕ

Современная наука характеризуется возрастанием значения математических методов в научном познании. Дисциплина «Математика» является одной из базовых математического и естественнонаучного цикла обучения студентов направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». Изучение дисциплины «Математика» студентами инженерных специальностей способствует развитию логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения, выработке навыков математического исследовании различных прикладных задач.

Знания, которые студенты должны приобрести в результате изучения математики, необходимы для успешного изучения общетехнических и профессиональных дисциплин (физика, теоретическая механика, детали машин, сопротивление материалов, инженерная графика, основы метрологии и взаимозаменяемости, электротехника и электроника, технология пищевого машиностроения, процессы и аппараты пищевых производств, системы автоматизированного проектирования, физические основы производства теплоты, логистика, расчет и конструирование машин и аппаратов пищевых производств, теплотехника, энергосбережение в отрасли), участия в НИР и выполнения выпускной квалификационной работы.

Данный практикум предназначен для студентов технических специальностей вуза продолжающим изучение математики во втором семестре; содержит следующие разделы программы по математике: «Неопределенные интегралы», «Определенные интегралы», Кратные и криволинейные интегралы». Практикум содержит перечень практических занятий с теоретической информацией по каждому из перечисленных разделов математики, примеры решения задач, задания для самостоятельной работы, вопросы для подготовки к экзамену.

Студенты очной формы обучения могут использовать данные указания для самостоятельного изучения материала, при выполнении домашнего задания, при подготовке к семестровому экзамену. С целью закрепления изученного материала студентам очной формы обучения рекомендуется решать задачи, приведенные в разделе задач для самостоятельной работы.

Практическое занятие №1. Первообразная функции. Понятие и свойства неопределенного интеграла. Методы непосредственного интегрирования и замены переменной.

Теория

Определение. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех его первообразных функций $F(x)+C$. Обозначается: $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где: $f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования; C - произвольная постоянная; $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Задача нахождения по данной функции её первообразной решается неоднозначно.

Так например, если $f(x)=x^2$, то первообразной для неё является не только $x^3/3$, но также и $x^3/3+5$ или $x^3/3-7$, и вообще $x^3/3+C$, где C - некоторая произвольно выбранная постоянная. Для нашего примера $\int x^2\,dx = x^3/3 + C$

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием*.

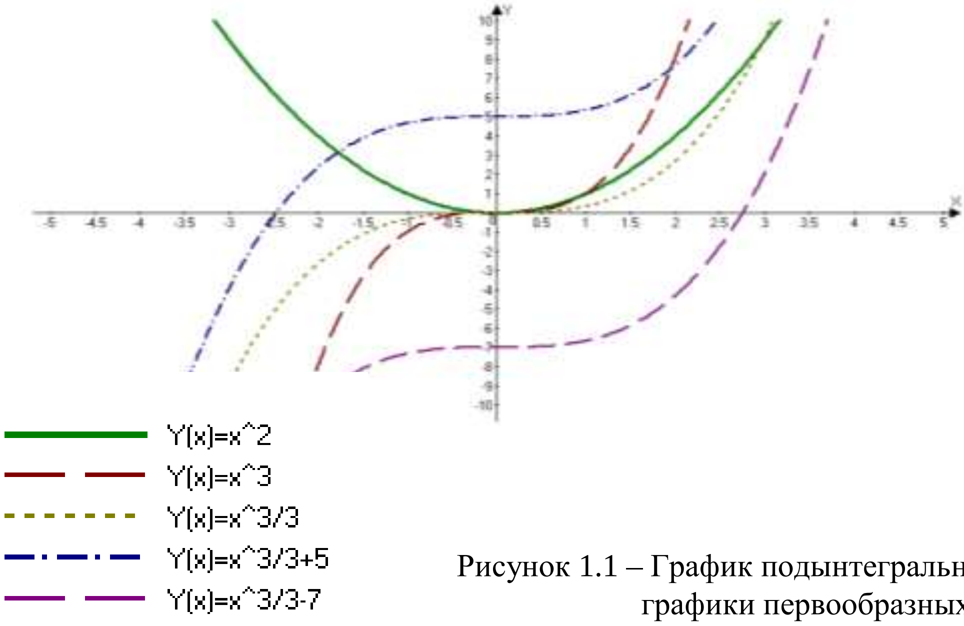


Рисунок 1.1 – График подынтегральной функции и графики первообразных

График первообразной функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $f(x)$.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство параллельных кривых в направлении оси ординат $y = F(x) + C$. Каждому числовому значению С соответствует определенная кривая.

На рисунке 1.1 показаны графики подынтегральной функции $f(x) = x^2$ и четыре графика первообразных.

Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению (знак дифференциала перед знаком интеграла уничтожает последний), т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = F'(x)dx = f(x)dx$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Указанные свойства означают, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными действиями.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ где } a = const.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций:

$$\int \left[f(x) + \varphi(x) - g(x) \right] dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int g(x)dx;$$

аналогично для всякого другого числа слагаемых.

6. «Инвариантность формулы интегрирования»: всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее, т.е. если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то и } \int f(u)dx = F(u) + C,$$

где $u = \varphi\left(x\right)$ - произвольная функция.

Для вычисления неопределенных интегралов используются правила:

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то:

1. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$

2. $\int f(ax)dx = \dfrac{1}{a}F(ax) + C$

3. $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Пример 1. $\int x^2\, dx = x^3/3 + C$. Заменим x на u $\left(u = \varphi\left(x\right)\right)$. $\int u^2\, du = u^3/3 + C$.

В частности: а) $\int sin^2 x \cdot d\left(sin\, x\right) = sin^3 x / 3 + C$; б) $\int ln^2 x \cdot d\left(ln\, x\right) = ln^3 x / 3 + C$.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int a \cdot dx = a \int dx = ax + C$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (ï ðè $n \neq -1$)
4. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$
5. $\int \dfrac{dx}{x+a} = ln|x+a| + C$
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$;
8. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$
9. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \dfrac{x}{a} + C$
14. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$
17. $\int \dfrac{dx}{sin\, x} = ln \left| tg \dfrac{x}{2} \right| + C$
18. $\int \dfrac{dx}{cos\, x} = ln \left| tg \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right| + C$
19. $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

20. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

Следует отметить, что, несмотря на сложность (по сравнению с дифференцированием) процесса интегрирования, *всегда имеется возможность проверить результат* обычным дифференцированием полученной первообразной функции.

Пример 2. (Формула 14). $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Проверим, дифференцируя $\frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

$$\left(\frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{a+x}{a-x}} \cdot \left(\frac{a+x}{a-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{(a+x)' \cdot (a-x) - (a+x)(a-x)'}{(a-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a+x} \cdot \frac{a-x+a+x}{a-x} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a+x} \cdot \frac{2a}{a-x} =$$

$$= \frac{1}{a+x} \cdot \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

Основные методы интегрирования

1 Непосредственное интегрирование

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на алгебраическую сумму функции, от каждой из которых первообразную можно найти непосредственно или с помощью других методов.

Пример 3.

$$\int\left(5 - 7x^2 + 4^x\right)dx = \int 5dx - \int 7x^2 dx + \int 4^x dx = 5x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{4^x}{ln4} + C$$

Пример 4.

$$\int \frac{3x^3 + 5x\sqrt{x} + 2}{6x} dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{5}{6}\int \sqrt{x} dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{6} + \frac{5}{9}x\sqrt{x} + \frac{ln|x|}{3} + C$$

Пример 5. $\int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = \int dx + \int \frac{dx}{x-1} = x + ln|x-1| + C$

2 Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

Во многих случаях удается введением вместо исходной переменной интегрирования x новой переменной z свести данный интеграл $\int f(x)dx$ к новому интегралу $\int \varphi(z)dz$, который, или содержится в таблице основных интегралов или легко вычисляется другим способом. Этот метод интегрирования получил название метода замены переменной или метода интегрирования подстановкой.

Если подынтегральное выражение удалось записать в виде

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = \int f(z)dz$$

где $z = \varphi(x),\ dz = \varphi'(x)dx$ и интеграл от выражения справа известен:

$$\int f(z)dz = F\left(z\right) + C,$$

то исходный интеграл был равен

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx = F\left[\varphi(x)\right] + \tilde{N}.$$

Часто методы интегрирования разложением и замены переменной применяют одновременно

Метод замены переменной является одним из основных методов вычисления интегралов. Успех интегрирования зависит в значительной степени от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменной, которая упростила бы данный интеграл.

Пример 6. Найти интеграл $\int\sqrt{\dfrac{x+2}{3}}dx.$

Выполним замену переменной: $z = \dfrac{x+2}{3}$, отсюда $x = 3z - 2$ и $dx = 3dz$, получаем

$$\int\sqrt{\frac{x+2}{3}}dx = \int z^{1/2}\cdot 3dz = \frac{3\cdot 2}{3}z^{3/2} + C = 2\left(\frac{x+2}{3}\right)^{3/2} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл

$$\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left\langle \begin{matrix} e^x = t & \\ e^x dx = dt & dx = \dfrac{dt}{t} \end{matrix} \right\rangle = \int\frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)\cdot t} = arctg\,t + C = arctg\,e^x + C.$$

Пример 8. Найти интеграл

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx = \left\langle \begin{matrix} x^2+1 = z \\ 2xdx = dz \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z} = \frac{ln|z|}{2} + C = \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Пример 9. Найти интеграл

$$\int\left(2x+1\right)^{20}dx = \left\langle \begin{matrix} 2x+1 = t \\ 2dx = dt \to dx = \dfrac{1}{2}dt \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\int t^{20}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21} + C = \frac{1}{42}\left(2x+1\right)^{21} + C$$

3 Способ «подведения под знак дифференциала»

Данный способ эквивалентен способу подстановки, однако, часто интегрирование выполняется с меньшим количеством рутинных операций. Способ основан на следующих простых соотношениях:

$xdx = \dfrac{1}{2}d(x^2);\ x^2dx = \dfrac{1}{3}d(x^3);\ x^3dx = \dfrac{1}{4}d\left(x^4\right);\ldots$, а также

$xdx=\frac{1}{2}d(x^2\pm a);\ x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3\pm a);\ x^3dx=\frac{1}{4}d\left(x^4\pm a\right);...$ при любом числе a.

Пример 10. $\int e^{2x}dx+\int e^{-x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d\left(2x\right)+\left(-1\right)\int e^{-x}d\left(-x\right)=\frac{e^{2x}}{2}-e^{-x}+C$

Пример 11. Найти интеграл

$$\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+e^{2x}}=arctg\,e^x+C.$$

Пример 12. Найти интеграл

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Пример 13. Найти интеграл

$$\int tg\,x\,dx=\int\frac{sin\,x}{cos\,x}dx=\int\frac{-d\left(cos\,x\right)}{cos\,x}=-ln\left|cos\,x\right|+C.$$

Теоретические вопросы

1. Понятие первообразной функции. Теоремы о первообразных.
2. Неопределенный интеграл, его свойства.
3. Таблица неопределенных интегралов.
4. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
5. Разложение дробной рациональной функции на простейшие дроби.
6. Интегрирование простейших дробей. Интегрирование рациональных функций.

7 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

8. Интегрирование иррациональных выражений.

1.1 Задания для самостоятельной работы

I. Используя таблицу, найти следующие интегралы:

1) $\int x^5dx$;	2) $\int x^2dx$;
3) $\int\sqrt{x}dx$;	4) $\int\sqrt[3]{x^2}dx$;
5) $\int\frac{1}{x^7}dx$;	6) $\int\frac{1}{x}dx$;
7) $\int\frac{1}{x^2+9}dx$;	8) $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

II. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла:

1) $\int\left(2x^5-5x^4+4x-7\right)dx$ 2) $\int\left(3x-5e^x+4^x-2\right)dx$

3) $\int\left(\sqrt{x}+2\right)^2 dx$

4) $\int\sqrt{x}\left(x^2+1\right)dx$

5) $\int\frac{x^4+x^2-6x}{x^3}dx$

6) $\int\frac{3+\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}dx$

7) $\int\left(2x-\frac{2}{x^3}+4\sin x-9\right)dx$

8) $\int\left(2\cdot 3^x-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{5}{\cos^2 x}-1\right)dx$

III. Найти интегралы:

1) $\int\cos 2x dx$

2) $\int\sin(x+2)dx$

3) $\int e^{3x+1}dx$

4) $\int(9x+2)^{17}dx$

5) $\int\sqrt{3x+4}dx$

6) $\int(1-4x)^5 dx$

7) $\int\frac{2}{x+3}dx$

8) $\int\frac{5}{x-7}dx$

9) $\int\cos(\frac{1}{3}x+1)dx$

10) $\int\frac{1}{25x^2+1}dx$

Задание 1.2 Проверить, что:

1) $\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C;$

2) $\int 2\sqrt{x}dx=\frac{4x\sqrt{x}}{3}+C;$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C;$

4) $\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}+C;$

5) $\int\frac{dx}{x^4+x^2}=-\frac{1}{x}-arctgx+C;$

6) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C;$

7) $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx=\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+arctg(x+1)+C.$

Задание 1.3 Вычислить интегралы:

1.1. $\int\left(4-3x\right)e^{-3x}dx.$

1.2. $\int\text{arctg}\sqrt{4x-1}dx.$

1.3. $\int\left(3x+4\right)e^{3x}dx.$

1.4. $\int\left(4x-2\right)\cos 2xdx.$

1.5. $\int\left(4-16x\right)\sin 4xdx.$

1.6. $\int\left(5x-2\right)e^{3x}dx.$

1.7. $\int\left(1-6x\right)e^{2x}dx.$

1.8. $\int\ln\left(x^2+4\right)dx.$

1.9. $\int\ln\left(4x^2+1\right)dx.$

1.10. $\int\left(2-4x\right)\sin 2xdx.$

1.11. $\int\text{arctg}\sqrt{6x-1}dx.$

1.12. $\int e^{-2x}\left(4x-3\right)dx.$

1.13. $\int e^{-3x}\left(2-9x\right)dx.$

1.14. $\int\text{arctg}\sqrt{2x-1}dx.$

1.15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx.$ 1.16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx.$

1.17. $\int (5x+6)\cos 2xdx.$ 1.18. $\int (3x-2)\cos 5xdx.$

1.19. $\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2xdx.$ 1.20. $\int (4x+7)\cos 3xdx.$

1.21. $\int (2x-5)\cos 4xdx.$ 1.22. $\int (8-3x)\cos 5xdx.$

1.23. $\int (x+5)\sin 3xdx.$ 1.24. $\int (2-3x)\sin 2xdx.$

1.25. $\int (4x+3)\sin 5xdx.$ 1.26. $\int (7x-10)\sin 4xdx.$

1.27. $\int \left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3xdx.$ 1.28. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ 1.30. $\int x\sin^2 xdx.$

Задача 1.4 Вычислить неопределенные интегралы.

4.2. $\int (5x^4 - x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x})dx.$ 4.3. $\int (x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2})dx.$

4.4. $\int (2^x + 1)^2 dx.$ 4.5. $\int (\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2}{1+x^2})dx.$

4.6. $\int \cos x(2\operatorname{tg} x + \frac{e^x}{\cos x} + 4)dx.$ 4.7. $\int \sin x(1 + \frac{2}{x^3 \sin x} - 4ctgx)dx.$

4.8. $\int \frac{2 - x\cos^2 x + 3ctg^2 x + 5\cos^3 x}{\cos^2 x}dx.$

4.9. $\int \frac{3x-7}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$ 4.10. $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx.$

4.11. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$ 4.12. $\int \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}.$

4.13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x.$ 4.14. $\int \frac{x^2+2}{x(x-2)(x+1)}dx.$

4.15. $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x.$ 4.16. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

4.17. $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x.$ 4.18. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+5}dx.$

Рекомендуемая литература: [1] стр. 208-210, [4] стр. 326-333.

Практическое занятие № 2. Метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных функций. Метод неопределенных коэффициентов.

Теория

Интегрирование по частям

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - две функции от x, имеющие непрерывные производные, то *формула интегрирования по частям*

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Рассмотрим три вида часто встречающихся интегралов, которые вычисляются методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида

$\int P(x) \cdot e^{ax} dx;\ \int P(x) \cdot \sin ax\, dx;\ \int P(x) \cdot \cos ax\, dx;\ \int P(x) \cdot ctgax\, dx;\ \int P(x) \cdot tgax\, dx,$

где $P(x)$ - многочлен, a - некоторое число.

За $u(x)$ следует принять $P(x)$, за $dv = \begin{cases} \sin ax \cdot dx; \\ \cos ax \cdot dx; \\ e^{ax} \cdot dx; \\ tgx \cdot dx; \\ ctgx \cdot dx \end{cases}$

2. **Интегралы вида**

$\int P(x) \ln x dx;\ \int P(x) \arcsin x\, dx;\ \int P(x) \arccos x\, dx;$

$\int P(x) \operatorname{arctg} x\, dx;\ \int P(x) \operatorname{arcctg} x\, dx,$

где $P(x)$ – многочлен. В интегралах второго вида за $u(x)$ при интегрировании по частям принимают функцию, являющуюся множителем при *P(x)*

3. **Интегралы вида**

$\int e^{ax} \sin bx\, dx;\ \int e^{ax} \cos bx\, dx,$ где a, b– числа.

Для этого вида используется двукратное интегрирование.

Пример 14. Найти интеграл $\int x \sin x\, dx.$

Полагая $u = x, \sin x dx = dv$, получаем $du = dx, v = -\cos x$. Далее выполним интегрирование по частям, причем полученный интеграл оказывается проще исходного.

Здесь уместна следующая запись:

$$\int x \sin x\, dx = \left\langle \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\rangle = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

.

Заметим, что, если бы изначальное разбиение подынтегрального выражения на сомножители было бы иным, то было бы получено

$$\int x\sin x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u=\sin x & du=\cos x dx \\ dv = xdx & v=-\dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\rangle = -\frac{x^2}{2}\sin x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx.$$

Такое разбиение подынтегрального выражения на произведение двух сомножителей следует признать неудачным, так как оно приводит к более сложному интегралу.

Пример 15. Найти интеграл

$$\int x^2 e^x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u=x^2 & dv=e^x dx \\ du=2xdx & v=e^x \end{matrix} \right\rangle = x^2e^x - 2\int xe^x dx = \left\langle \begin{matrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Пример 16. Найти интеграл

$$\int ln\, x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u=ln\, x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=x \end{matrix} \right\rangle = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C$$

Пример 17. Найти интеграл

$$\int (x^2-x+7)e^{2x}dx = \left\langle \begin{matrix} u=x^2-x+7 & dv=e^{2x}dx \\ du=(2x-1)dx & v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-x+7)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-x+7)e^{2x} - \frac{1}{2}I_1.$$

Последний интеграл того же типа, но степень многочлена на единицу меньше. Вновь интегрируя по частям, получаем

$$I_1 = \int (2x-1)e^{2x}dx = \left\langle \begin{matrix} u=2x-1 & dv=e^{2x}dx \\ du=2dx & v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Окончательно получаем

$$\int (x^2-x+7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-x+7)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - x + 4\right) + C$$

Пример 18. Найти интеграл $\int (2x^3+3x-5)\ln x dx$.

$$\int (2x^3+3x-5)\ln x dx = \left\langle \begin{matrix} u=\ln x & dv=(2x^3+3x-5)dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{3x^2}{2}-5x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}-5x\right)\ln x-\int\frac{x^4/2+3x^2/2-5x}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}-5x\right)\ln x-\frac{1}{2}\int x^3dx-\frac{3}{2}\int xdx+5\int dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}-5x\right)\ln x-\frac{x^4}{8}-\frac{3x^2}{4}+5x+C.$$

Пример 19. Найти интеграл $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

Интегралы третьего вида находятся двукратным интегрированием по частям

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \left\langle \begin{matrix} u=e^{2x} & dv=\cos xdx \\ du=2e^{2x}dx & v=\sin x \end{matrix} \right\rangle = e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x\,dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям

$$\int e^{2x}\sin xdx = \left\langle \begin{matrix} u=e^{2x} & dv=\sin x\,dx \\ du=2e^{2x}dx & v=-\cos x \end{matrix} \right\rangle = e^{2x}\left(-\cos x\right)+2\int e^{2x}\cos xdx$$

Таким образом, $\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}(\sin x+2\cos x)-4\int e^{2x}\cos x\,dx$

В правой части имеем интеграл аналогичный интегралу в левой части, следовательно

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}(\sin x+2\cos x),$$

отсюда

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{2x}(\sin x+2\cos x)}{5}+C.$$

6.6 Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называются дроби, приводящие к следующим двум типам: $I.\ \dfrac{A_n}{(x-a)^n}$; $II.\ \dfrac{M_nx+N_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}$,

где n - натуральное число; A,B,p,q,a - действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней (т.е. $q-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2>0$).

Интегрирование простейших дробей I типа

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$$

$$= -\frac{A}{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{} + C = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{A}{(x-a)^{1-n}} + C \quad (n>1)$$

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C \qquad (n=1)$$

Пример 20. $\int \frac{3}{x+5}dx = 3\int \frac{dx}{x+5} = 3\ln|x+5| + C$.

Пример 21. $\int \frac{5}{2x-7}dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x-\frac{7}{2}} = \frac{5}{2}\ln\left|x-\frac{7}{2}\right| + C$.

Пример 22. $\int \frac{4}{(x-3)^7}dx = 4\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^7} = 4\frac{(x-3)^{-6}}{-6} + C = \frac{-2}{3(x-3)^6} + C$

Интегрирование простейших дробей II типа

Для интегрирования дробей *II* типа выделим в знаменателе дроби полный квадрат

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\cdot\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Обозначим $\left(q - \frac{p^2}{4}\right) = a^2$ и выполним замену переменной

$$x + \frac{p}{2} = t \quad \to \quad x = t - \frac{p}{2} \quad \to \quad dx = dt.$$

Эту подстановку легко запомнить, если заметить, что t равно половине производной знаменателя.

Искомый интеграл преобразуется к сумме двух «табличных» интегралов

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t-\frac{p}{2}\right)+q}dt = \int \frac{Mt - \left(M\frac{p}{2} - N\right)}{t^2 - pt + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q}dt =$$

$$=\int \frac{Mt-\left(M\frac{p}{2}-N\right)}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt=\int \frac{Mt-\left(M\frac{p}{2}-N\right)}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int \frac{Mt}{t^2+a^2}dt-\int \frac{\left(M\frac{p}{2}-N\right)}{t^2+a^2}dt=M\int \frac{tdt}{t^2+a^2}-\left(M\frac{p}{2}-N\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|-\left(M\frac{p}{2}-N\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной интегрирования, получаем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{\left(N-M\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Несмотря на громоздкость интегрирования, нахождение конкретных интегралов не вызывает затруднений.

Пример 23. Найти $\int \frac{4x+5}{x^2+4x+13}dx$.

Решение. Перейдем к новой переменной

$$t=\frac{1}{2}(x^2+4x+13)'=x+2;\quad x=t-2;\ dx=dt$$

$$x^2+4x+13=(x+2)^2+9=t^2+9$$

$$\int \frac{4x+5}{x^2+4x+13}dx=\int \frac{4(t-2)+5}{t^2+9}dt=4\int \frac{t}{t^2+9}dt-3\int \frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=2\ln\left|t^2+9\right|-\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=2\ln\left|x^2+4x+13\right|-\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C$$

6.7 Метод неопределенных коэффициентов

Весьма существенное значение имеет разложение знаменателя рациональной дроби на произведение линейных и квадратичных множителей. Пусть для определенности имеем правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель разлагается на множители следующим образом:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)^t(x^2+px+q)^m.$$

Такую дробь можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_t}{(x-b)^t}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где A_i, B_i, M_i, N_i - действительные числа, для нахождения которых используется метод неопределенных коэффициентов.

Метод заключается в следующем:

1) приведение правой части последнего равенства к общему знаменателю и сравнению числителей левой ($P(x)$) и правой частей;

2) приравнивание коэффициентов при равных степенях x в правой и левой частях равенства (два многочлена тождественны друг другу тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x равны). Таким образом составляется система линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются A_i, B_i, M_i, N_i

Итоги по способам интегрирования рациональных дробей

1. Если рациональная дробь неправильна, то её представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;
2. Знаменатель правильной дроби разлагают на множители;
3. Правильную рациональную дробь разлагают на сумму простейших дробей.

Пример 24. Вычислить интеграл $\int\frac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x^2-4)}dx$.

Решение. Данная рациональная дробь $\frac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x^2-4)}$ - правильная, т.к. в числителе имеется полином второй степени, а в знаменателе – третьей.

Разложим дробь на сумму простейших дробей, используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x^2-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2};$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой частей выражения:

$$2x^2+9x-14=A(x+2)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+2);$$
$$2x^2+9x-14=(A+B+C)x^2+(-3B+C)x+(-4A+2B-2C).$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x

$$x^2\,\|\; 2=A+B+C$$
$$x\,\|\; 9=-3B+C$$
$$x^0\,\|\; -14=-4A+2B-2C$$

Получаем систему из трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными A, B и C

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -3B+C=9 \\ -4A+2B-2C=-14 \end{cases}$$

Решив (любым способом) данную систему уравнений, находим $A=1;\ B=-2;\ C=3$.

Окончательно, получаем $\dfrac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x^2-4)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}$.

В случае отсутствия кратных корней знаменателя (как в вышеприведенном случае) нахождение коэффициентов можно упростить. Так как данное разложение справедливо для любых значений x, рассмотрим промежуточную запись решения задачи

$$2x^2+9x-14=A(x+2)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+2)$$

и будем подставлять в левую и правую части равенства такие значения x, чтобы выражения в некоторых скобках обнулялись.

Получим

$x=1\ \|\ 2\cdot1^2+9\cdot1-14=A(1+2)(1-2);\quad -3=-3\cdot A;\quad A=1.$

$x=-2\ \|\ 2\cdot(-2)^2+9\cdot(-2)-14=B(-2-1)(-2-2);\quad -24=12\cdot B;\quad B=-2.$

$x=2\ \|\ 2\cdot2^2+9\cdot2-14=C(2-1)(2+2);\quad 12=4C;\quad C=3.$

Подставим полученные значения коэффициентов

$$\int\frac{2x^2+9x-14}{(x-1)(x^2-4)}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{2}{x+2}dx+\int\frac{3}{x-2}dx=$$

$$=\ln|x-1|-2\ln|x+2|+3\ln|x-2|+\ln C=\ln\left|\frac{C(x-1)(x-2)^3}{(x+2)^2}\right|.$$

Пример 25. Вычислить интеграл $\int\dfrac{3x(2x+5)}{(x+1)^3(x-2)}dx$.

Решение. Разложим правильную рациональную $\dfrac{3x(2x+5)}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{6x^2+15x}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2};$$

$$6x^2+15x=A(x+1)^2(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x-2)+D(x+1)^3;$$

$$6x^2+15x=(A+D)x^3+(B+3D)x^2+(-3A-B+C+3D)x+(-2A-2B-2C+D),$$

приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x:

$x^3\ \|\ 0=A+D$

$x^2\ \|\ 6=B+3D$

$x\ \|\ 15=-3A-B+C+3D$

$x^0\ \|\ 0=-2A-2B-2C+D$

Решение полученной системы уравнений даёт: $A=-2;\ B=0;\ C=3;\ D=2$.

Окончательно, подставив значения коэффициентов, получаем

$$\int\frac{6x^2+15x}{(x+1)^3(x-2)}dx=\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{3}{(x+1)^3}dx+\int\frac{2}{x-2}dx=$$

$$=-2\ln|x+1|+3\frac{(x+1)^{-2}}{-2}+2\ln|x-2|+C=$$

.

$$=2\ln|x-2|-2\ln|x+1|-\frac{6}{(x+1)^2}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\right|-\frac{6}{(x+1)^2}+C=\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-\frac{6}{(x+1)^2}+C.$$

Пример 26. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

Решение. Разложить на простейшие дроби $\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2};$$

$$x^2-5x+9=A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)^2;$$

$$x^2-5x+9=(A+M)x^3+(A+B-2M+N)x^2+$$

$$+(2B+M-2N)x+(-2A+2B+N)$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & A+M=0 \\ x^2 & A+B-2M+N=1 \\ x & 2B+M-2N=-5 \\ x^0 & -2A+2B+N=9 \end{array}\right\}$$

Решение полученной системы уравнений даёт: $A=\frac{-7}{5};\ B=1;\ M=\frac{7}{5};\ N=\frac{21}{5}.$.

Окончательно, подставив полученные коэффициенты, получаем:

$$\int\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx=\int\frac{\frac{-7}{5}}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=-\frac{7}{5}\int\frac{dx}{x-1}+\int(x-1)^{-2}dx+\frac{7}{5}\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx=$$

$$\left\langle x+3=\frac{1}{2}(2x+2)+2=\frac{1}{2}\cdot\left((2x+2)+1\right)\right\rangle$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\int\frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)}+\frac{7}{10}\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=$$

$$=-\frac{7}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\frac{7}{10}arctg(x+1)+C=$$

$$=\frac{7}{10}\left(\ln\left|x^2+2x+2\right|-2\ln|x-1|\right)-\frac{1}{x-1}+\frac{7}{10}arctg(x+1)+C=$$

$$=\frac{7}{10}\left(\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{(x-1)^2}\right|+arctg(x+1)\right)-\frac{1}{x-1}+C.$$

2.2 Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования «по частям».

1.1. $\int(4-3x)e^{-3x}dx.$

1.2. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx.$

1.3. $\int(3x+4)e^{3x}dx.$

1.4. $\int(4x-2)\cos 2xdx.$

1.5. $\int(4-16x)\sin 4xdx.$

1.6. $\int(5x-2)e^{3x}dx.$

1.7. $\int(1-6x)e^{2x}dx.$

1.8. $\int\ln\left(x^2+4\right)dx.$

1.9. $\int\ln\left(4x^2+1\right)dx.$

1.10. $\int(2-4x)\sin 2xdx.$

1.11. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx.$

1.12. $\int e^{-2x}(4x-3)dx.$

1.13. $\int e^{-3x}(2-9x)dx.$

1.14. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx.$

1.15. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}dx.$

1.16. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx.$

1.17. $\int(5x+6)\cos 2xdx.$

1.18. $\int(3x-2)\cos 5xdx.$

1.19. $\int\left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2xdx.$

1.20. $\int(4x+7)\cos 3xdx.$

1.21. $\int(2x-5)\cos 4xdx.$

1.22. $\int(8-3x)\cos 5xdx.$

1.23. $\int(x+5)\sin 3xdx.$

1.24. $\int(2-3x)\sin 2xdx.$

1.25. $\int(4x+3)\sin 5xdx.$

1.26. $\int(7x-10)\sin 4xdx.$

1.27. $\int\left(\sqrt{2}-8x\right)\sin 3xdx.$

1.28. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}.$

1.29. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}.$

1.30. $\int x\sin^2 xdx.$

Задача 2. Найти неопределенные интегралы.

2.1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

2.2. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

2.3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx.$

2.4. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx.$

2.2. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx.$

2.6. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx.$

2.7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

2.8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx.$

2.9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$

2.10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx.$

2.11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx.$

2.12. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx.$

2.13. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx.$

2.14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}dx.$

2.15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx.$

2.16. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$

2.17. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx.$

2.18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx.$

2.19. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}dx.$

2.20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}dx.$

2.21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}dx.$

2.22. $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x}dx.$

2.23. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$

2.24. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$

2.25. $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+2}{x(x-1)(x+2)}dx.$

2.26. $\int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)}dx.$

2.27. $\int \frac{x^5-x^4-6x^3+13x+6}{x(x-3)(x+2)}dx.$

2.28. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}dx.$

2.29. $\int \frac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x(x-1)(x+3)}dx.$

2.30. $\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx.$

Практическое занятие № 3. Интегрирование тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Теория

Рассмотрим интегралы от тригонометрических функций (неалгебраических функций), которые с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются, т.е., говорят, что интеграл рационализируется.

Алгебраической называется функция, значения которой можно получить, произведя над независимой переменной конечное число алгебраических действий: сложений, вычитаний, умножений, делений и возведения в степень с рациональным показателем.

Рациональной функцией называется такая алгебраическая функция, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корней.

Иррациональной функцией называется алгебраическая функция, не являющаяся рациональной.

Рационализация интеграла – это приведение неалгебраического интеграла с помощью подстановок к интегралу от рациональных функций.

Интегралы вида I: $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Запись $R(\sin x, \cos x)$ указывает, что над $\sin x$ и $\cos x$ производятся рациональные операции.

Интегралы указанного вида сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью «*универсальной тригонометрической подстановки» (УТП)*:

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = t}. \tag{3.1}$$

Выразим тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, а, следовательно, и через t.

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \tag{3.3}$$

$$\boxed{dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2}} \tag{3.4}$$

Таким образом, $\sin x$, $\cos x$ и dx выразились через t рационально. Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл типа I, получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\cdot dt}{1+t^2}. \qquad (3.5)$$

Пример 28. $\int \frac{dx}{\sin x}$

Полагая $tg\frac{x}{2}=t$ и, используя полученные формулы (3.2) и (3.4), получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\cdot dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

Окончательно, получим новый табличный интеграл, который внесем в таблицу интегралов:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C. \qquad (3.6)$$

Пример 29. $\int \frac{dx}{\cos x}$ (разобрать самостоятельно).

Аналогично, используя полученную формулу (6), получим следующий интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Внесем в таблицу интегралов

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C \qquad (3.7)$$

Данная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида I. Поэтому её называют «универсальной тригонометрической подстановкой».

Однако на практике, «универсальная тригонометрическая подстановка» часто приводит к слишком сложным тригонометрическим функциям.

Поэтому наряду «универсальной» используют и другие подстановки, которые быстрее приводят к цели.

Интегралы вида II. Для интегралов вида $\int \cos^{2n+1} x\,dx$, $\int \sin^{2n+1} x\,dx$ используются подстановки:

$\sin x = t$ - для нечетной степени $\cos x$ (3.8)

$\cos x = t$ - для нечетной степени $\sin x$ (3.9)

Пример 30.

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) = \int dt - \int t^2 \cdot dt =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Интегралы вида III. Для вычисления интегралов вида $\int \cos^{2n} x\,dx$, $\int \sin^{2n} x\,dx$ удобно пользоваться формулами тригонометрических соотношений для понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{3.10}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{3.11}$$

и вводить вспомогательную переменную $\cos 2x$: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ или $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Пример 31.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$$

Применим к третьему интегралу повторно формулу (3.10)

$$\int \cos^2 2x dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

Получаем:

$$\int \cos^4 x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Интегралы вида IV. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ (m и n - целые числа)

Для данного типа характерны следующие случаи

1 случай: один из показателей m, n *нечетное положительное* число

Если степень при $\sin x$, m – нечетное число, то вводят вспомогательную функцию $\cos x = t$

Если степень при $\cos x$, n– нечетное число, то вводят вспомогательную функцию $\sin x = t$

Пример 32. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x \cdot dx =$ (n=5 - нечетно, подставим, $\sin x = t$).

$$= \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^4 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cdot d\left(\sin x\right) = \left|\sin x = t\right|$$

$$=\int t^4\cdot\left(1-2t^2+t^4\right)\cdot d\left(t\right)==\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)\cdot d\left(t\right)==\frac{t^5}{5}-2\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C$$

$$=\frac{\sin^5 x}{5}-2\frac{\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+\tilde{N}$$

<u>2 случай:</u> *Одно из чисел m или n нечетное и положительное, а другое – любое действительное число.*

Используется аналогичный прием.

Пример 33. Найти интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$, n – нечетное положительное, $m=-\frac{2}{3}$ - отрицательное дробное; подстановка $t=\cos x$.

$$\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx=-\int\cos^{-2/3}x(1-\cos^2 x)d(\cos x)=-\int\left(t^{-2/3}-t^{4/3}\right)dt=$$

$$=\frac{-3t^{1/3}}{1}-\frac{3t^{7/3}}{7}+C=-3t^{1/3}\left(1+\frac{1}{7}t^2\right)+C=-3\sqrt[3]{\cos x}\left(1+\frac{\cos^2 x}{7}\right)+C$$

<u>3 случай:</u> оба показателя степени – (m и n) - четные неотрицательные четное положительное число (одно из чисел может быть равно нулю)

а) применяется подстановка $\boxed{tgx=t}$, (3.12)

$$\boxed{\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}; \qquad (3.13)$$

$$\boxed{\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}; \qquad (3.14)$$

Так как $tgx=t\to x=arctgt$; $\boxed{dx=\frac{dt}{1+t^2}}$. (3.15)

После подстановки получается интеграл от рациональной функции.

Пример 34.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$$

Подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Полагаем $tgx=t$, $x=arctgt$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Тогда, используя (3.13)-(3.15): $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ получим:

$$\int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\dfrac{1}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=$$

$$=\int \frac{dt}{\left(t^2+2t+1\right)-1-1}=\int \frac{dt}{\left(t+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

это табличный интеграл $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$, где $x=t+1, a=\sqrt{2}$.

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C$$

б) Интегрирование осуществляется путем снижения степени функций с использованием тригонометрических соотношений (3.10), (11):

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \qquad (3.16)$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) \qquad (3.17)$$

$$cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \qquad (3.18)$$

Пример 35. Найти интеграл $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$

$$\int \sin^4 x\cos^2 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)dx=$$

$$\left\langle(1-\cos 2x)(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)=(1-\cos 2x)(1^2-\cos^2 2x)=(1-\cos 2x)\sin^2 2x\right\rangle$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$$

Интегралы вида V:

$$\begin{cases}\int\left(\sin mx\cdot\cos nx\right)dx\\ \int\left(\sin mx\cdot\sin nx\right)dx\,,\\ \int\left(\cos mx\cdot\cos nx\right)dx\end{cases}$$

Для таких интегралов используются тригонометрические формулы:

$$sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (6.19)$$

$$cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)\right] \qquad (6.20)$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (6.21)$$

Пример 36.

$$\int sin2x \cdot \cos 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(2x+5x)+\sin(2x-5x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin 7x + \sin(-3x)\right]dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin(-3x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x \cdot d(7x)\cdot\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\int \sin(3x) d(3x)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{14}(-\cos 7x) + \frac{1}{6}(\cos(3x)) + \tilde{N} = \frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{14}\cos 7x + \tilde{N}$$

Интегралы вида VI. $\int tg^n x\, d,$ $\int ctg^n x dx$ (n - целое положительное число, большее единицы)

а) Для рационализации такого типа интегралов удобно выделить множитель $tg^2 x$ (или $ctg^2 x$).

$$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \qquad (3.22)$$

$$ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \qquad (3.23)$$

Пример 37. $\int tg^5 x dx$.

Выделяем множитель $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, получаем

$$\int tg^5 x \cdot dx = \int tg^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int tg^3 x \cdot dx.$$

Первый интеграл равен

$$\int tg^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int tg^3 x \cdot d(tgx) = |z = tgx| \int z^3 x \cdot d(z) = \frac{z^4}{4} + C_1 = \frac{tg^4 x}{4} + C_1$$

Второй интеграл вычисляется тем же приемом

$$\int tg^3x\cdot dx=\int tgx\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int tgx\cdot dx=\int tgx\cdot d\left(tgx\right)-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx=$$
$$=\frac{tg^2x}{2}-\int\frac{-d\left(\cos x\right)}{\cos x}=\frac{tg^2x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C_2$$
.

Окончательно:

$$\int tg^5xdx=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C$$

Запишите в таблицу интегралов новые табличные интегралы, полученные при решении примера 11:

$$\int tgx\cdot dx=-\ln\left|\cos x\right|+C,\quad\left(x\neq\frac{\pi}{2}\cdot\left(2k+1\right)\right)\tag{3.24}$$

$$\int ctgx\cdot dx=\ln\left|\sin x\right|+C,\quad\left(x\equiv\pi k\right).\tag{3.25}$$

б) Если подынтегральная функция зависит только от tgx, т.е. $\int R\left(tgx\right)dx$, то замена

$$tgx=t\,,\quad x=arctgt;\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\tag{3.26}$$

приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R\left(tgx\right)dx=\int R\left(t\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 38. $\int\frac{dx}{1+2tgx}$.

Выполним подстановку по формулам (3.26):

$$\int\frac{dx}{1+2tgx}=\int\frac{dt}{\left(1+2t\right)\left(1+t^2\right)}.$$

Найдем интеграл от рациональной дроби, для чего разложим рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{\left(1+2t\right)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{\left(1+2t\right)}+\frac{Bt+C}{\left(1+t^2\right)}.$$

Освободимся от знаменателя: $1=A\left(1+t^2\right)+\left(Bt+C\right)\left(1+2t\right)$.

$1=At^2+A+Bt+2Bt^2+C+2Ct;\ 1=t^2\left(A+2B\right)+t\left(t+2C\right)+\left(A+BC\right);$

Если многочлены равны, а это тождество, то равны коэффициенты при одинаковых степенях t. Из системы трех уравнений с тремя неизвестными найдем три коэффициента:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+2B;\\ x^1 & 0=B+2C;\\ x^0 & 1=A+BC;\end{array}\right|\Rightarrow\begin{cases}A+2B=0;\\ B+2C=0;\\ A+BC=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4C;\\ 4C+C=1;\end{cases}\Rightarrow A=\frac{4}{5};\ B=-\frac{2}{5};\ C=\frac{1}{5};$$

Итак, рациональная дробь преобразована к сумме простейших дробей:

(данный пример по пройденной ранее теме можно рекомендовать для самостоятельной работы).

$$\frac{1}{(1+2t)\left(1+t^2\right)}=\frac{4}{5(1+2t)}+\frac{-\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}}{\left(1+t^2\right)};\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1+2t)\left(1+t^2\right)}=\frac{4}{5(1+2t)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1-2t}{\left(1+t^2\right)}.$$

$$\int\frac{1}{(1+2t)\left(1+t^2\right)}=\frac{4}{5}\int\frac{dt}{(1+2t)}+\frac{1}{5}\int\cdot\frac{dt}{\left(1+t^2\right)}-\frac{1}{5}\int\cdot\frac{2t}{\left(1+t^2\right)}dt=$$

$$=\frac{2}{5}\ln|1+2t|+\frac{1}{5}arctgt-\frac{1}{5}\ln\left|1+t^2\right|+C=\frac{1}{5}\left(2\ln|1+2t|-\ln\left|1+t^2\right|+arctgt\right)+C$$

Подставим $tgx=t$ в полученное выражение

$$\frac{1}{5}\left(2\ln|1+2tgx|-\ln\left|1+tg^2x\right|+arctg\left(tgx\right)\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln\left(\left|\frac{\cos x+2\sin x}{\cos x}\right|\right)^2-\ln\left|\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right|+x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln\frac{\left(\left|\frac{\cos x+2\sin x}{\cos x}\right|\right)^2}{\left|\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right|}+x\right)+C=\frac{1}{5}\left(2\ln|\cos x+2\sin x|+x\right)+C$$

Задания для самостоятельной работы:

3.1 Найти интегралы, используя подходящую подстановку:

1. $\int(x^2+1)^5 2xdx$
2. $\int e^{2x^2+5}\cdot xdx$
3. $\int(2x^3-2)^6x^2dx$
4. $\int e^{-x^3}\cdot x^2dx$
5. $\int x\cdot\sin(x^2+1)dx$
6. $\int\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$
7. $\int\frac{\ln x}{x}dx$
8. $\int\frac{arctg^3x}{x^2+1}dx$
9. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$
10. $\int\frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

11. $\int \sqrt{x^2+6} \cdot x dx$

12. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx$

13. $\int \frac{arctgx + x}{1+x^2} dx$

14. $\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x} dx$

3.2 Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int (x+1)\sin x dx$
2. $\int xe^{2x} dx$
3. $\int (2x-2)\cos 3x dx$
4. $\int x^2 e^{-x} dx$
5. $\int x \cdot 2^x dx$
6. $\int x \ln x dx$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
8. $\int arctgx dx$
9. $\int x arctgx dx$
10. $\int (x+1)\ln x dx$

Рекомендуемая литература: [1] стр. 210-217, [4] стр. 333-343.

Практическое занятие № 4. Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница и замена переменной в определенном интеграле

Теория

Понятие определенного интеграла

*Определение***.** Если существует предел интегральных сумм, когда количество отрезков разбиения $n \to \infty$, и длина наибольшего из элементарных отрезков $\max \Delta x_i \to 0$ стремится к нулю; и если при этом интегральная сумма S_n имеет предел S, который не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число S называется *определенным интегралом*.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{4.1}$$

где: a и b – числа, соответственно нижний и верхний пределы интегрирования,

$f(x)$ – подынтегральная функцией,

$f(x)dx$ –подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$[a;b]$ –область (отрезок) интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью $0x$.

$$S_{aABb}=\int_a^b f(x)dx$$

Теорема существования

*Теорема Коши***.** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Функция $y=f(x)$, для которой существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется интегрируемой на этом отрезке.

Формула Ньютона - Лейбница

Теорема. Интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен приращению функции $F(x)$ на промежутке интегрирования

$$\mathrm{I}=\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a)$$

или:

если $F(x)$ есть какая-либо первообразная подынтегральной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{4.2}$$

Формула (4.2) называется формулой Ньютона-Лейбница, служит для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл.

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

*Правило***:** чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, надо найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, подставить в полученное выражение вместо х вначале верхний предел, затем нижний, и вычесть вторую величину из первой.

Замечание. Постоянное слагаемое С неопределенного интеграла можно не выписывать, т.к. оно уничтожается при вычитании.

Пример 39. $\int\limits_a^b 2xdx = 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = b^2 - a^2$

Пример 40. $\int\limits_1^3 3x^2dx = 3\int\limits_1^3 x^2dx = 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \left.x^3\right|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$

Пример 41. $\int\limits_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int\limits_0^4 dx + \int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \left.\left(x + 4e^{\frac{x}{4}}\right)\right|_0^4 = 4 - 4e - 4 = 4e$

Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

3. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $a < c < b$, то отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

4. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых

$$\int\limits_a^b\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, где с – постоянная.

1. «Теорема о среднем». Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$.

Геометрический смысл данного свойства: значение определенного интеграла равно, при некотором $c \in [a,b]$, площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b - a$.

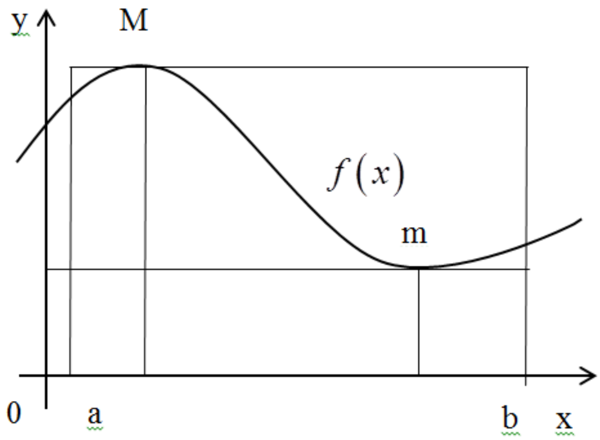


Рисунок 4.1 – Оценка определенного интеграла

Число $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

7. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ можно интегрировать. Так, если $f_1(x)\le f_2(x)$ при $x\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f_1(x)dx \le \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

8. Оценка определенного интеграла. Если m – наименьшее, а M - наибольшее значения функции $y=f(x)$ на интервале $[a;b]$ и $a<b$, то $m(b-a)<\int\limits_a^b f(x)dx<M(b-a)$.

Доказательство: т.к. для любого $x\in[a;b]$ имеет место неравенство $m\le f(x)\le M$, то согласно свойству 7:

$$\int\limits_a^b mdx<\int\limits_a^b f(x)dx<\int\limits_a^b Mdx.$$

Применяя к крайним интегралам свойство 6, получим

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

Если $f(x)$- неотрицательная функция, то свойство 8 иллюстрируется геометрически: площадь криволинейной трапеции (Рисунок 4.1) заключена между площадями прямоугольников, основание которых есть $[a;b]$, а высоты соответственно равны m и M .

9. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т.е.

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Это означает, что определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная подынтегральной функции.

Интегрирование методом замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F(t)dt,$$

где $x=\varphi(t)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной, $dx=\varphi'(t)dt$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta,\ a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$, а $f(\varphi(t))$ - функция, непрерывная на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Пример 42. Вычислить $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Введем новую переменную t $\left\langle \begin{matrix} \sqrt{1+3x}=t;\ x=\frac{t^2-1}{3}; \\ 1+3x=t^2;\quad dx=\frac{2}{3}t\cdot dt \end{matrix} \right\rangle$.

Определим для нее пределы интегрирования $\begin{matrix} x & 0 & 5 \\ t & 1 & 4 \end{matrix}$.

Подставляя, получим: $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2}{3}t\cdot dt}{t} = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 =$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{4^3-1^3}{3}-4+1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-3\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{63}{3}-3\right) = \frac{2}{9}\cdot 18 = 4$$

Интегрирование по частям определенного интеграла

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a;b]$.

Пример 43.

$$\int_0^1 ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u=ln(x+1) & du=\frac{1}{x+1}dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\cdot ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x+1}dx = 1\cdot ln(1+1) - 0\cdot ln(0+1) -$$

$$-\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = ln\,2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} =$$

$$= ln\,2 - x\Big|_0^1 + ln|x+1|\Big|_0^1 = ln\,2 - 1 + ln|1+1| - ln|0+1| =$$

$$= ln\,2 - 1 + ln\,2 - ln|1| = 2ln\,2 - 1 + 0 = 2ln\,2 - 1$$

Замечания:

1. При вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется.

2. Часто вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют подстановку $t=g(x)$.

3. Не следует забывать изменить пределы интегрирования при замене переменных.

Теоретические вопросы

1. Понятие определенного интеграла, его геометрический смысл.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Теорема о среднем.
4. Производная определенного интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.
5. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Задание для самостоятельной работы

4.1. $\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4.2. $\int\limits_0^1 e^{2x}dx.$

4.3. $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}.$

4.4. $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x+\cos x)dx.$

4.5. $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}+x^2)dx.$

4.6. $\int\limits_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx.$

Геометрические приложения определенного интеграла

Задача 15. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

$$\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$$

$$y=6 \quad (0<x<8\pi,\ \ y\geq 6).$$

Задача 16. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

16.1. $r=6\cos 3\varphi, \quad r=3 \quad (r\geq 3).$

16.2. $r=1/2+\sin\varphi.$

16.3. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.

16.4. $y=x^2+5x+6$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

16.5. $y=-x^2+2x+3$, $y=0$.

16.6. $y=x^7$, $x=2$, $y=0$.

16.7. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

16.8. $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq\pi$.

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

16.9. $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x \geq 0$, вокруг: 1) оси Ох; 2) оси Оу.
16.10. $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ вокруг: 1) оси Ох; 2) оси Оу.
16.11. $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ вокруг: 1) оси Ох; 2) оси Оу.

Задача 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями в прямоугольной системе координат.

17.1. $y=\ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$

17.2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2.$

17.3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, \quad 0 \leq x \leq 7/9.$

17.3. $y=\ln \dfrac{5}{2x}, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

17.5. $y=-\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

17.6. $y=e^x+6, \quad \ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}.$

17.7. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, \quad 1/4 \leq x \leq 1.$

17.8. $y=\ln\left(x^2-1\right), \quad 2 \leq x \leq 3.$

17.9. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x, \quad 0 \leq x \leq 8/9.$

17.10. $y=\ln\left(1-x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1/4.$

17.11. $y=2+\operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq 1.$

17.12. $y=1-\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/6.$

17.13. $y=e^x+13, \quad \ln\sqrt{15} \leq x \leq \ln\sqrt{24}.$

17.14. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1/4.$

17.15. $y=2-e^x, \quad \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8}.$

17.16. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 15/16.$

17.17. $y=1-\ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

17.18. $y=1-\ln\left(x^2-1\right), \quad 3 \leq x \leq 4.$

17.19. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5, \quad 1/9 \leq x \leq 1.$

17.20. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1, \quad 0 \leq x \leq 9/16.$

17.21. $y=\ln \sin x, \quad \pi/3 \leq x \leq \pi/2.$

17.22. $y=\ln 7-\ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$

17.23. $y=\operatorname{ch} x+3, \quad 0 \leq x \leq 1.$

17.24. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3/4.$

17.25. $y=\ln\cos x+2,\quad 0\le x\le \pi/6.$

17.26. $y=\mathrm{e}^x+26,\quad \ln\sqrt{8}\le x\le \ln\sqrt{24}.$

17.27. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}+3,\quad 0\le x\le 2.$

17.28. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4,\quad 0\le x\le 1/2.$

17.29. $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+3}{4},\quad 0\le x\le 2.$

17.30. $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e},\quad \ln\sqrt{3}\le x\le \ln\sqrt{15}.$

Задача 18. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox, в вариантах 17–31 ось вращения Oy.

18.1. $y=-x^2+5x-6,\quad y=0.$

18.2. $2x-x^2-y=0,\ \ 2x^2-4x+y=0.$

18.3. $y=3\sin x,\quad y=\sin x,\quad 0\le x\le \pi.$

18.4. $y=5\cos x,\ \ y=\cos x,\ \ x=0,\ \ x\ge 0.$

18.5. $y=\sin^2 x,\ \ x=\pi/2,\quad y=0.$

18.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ \ x=1,\quad y=1.$

18.7. $y=x\mathrm{e}^x,\quad y=0,\quad x=1.$

18.8. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2,\quad x=0.$

18.9. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2.$

18.10. $y=\mathrm{e}^{1-x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1.$

18.11. $y=x^2,\quad y^2-x=0.$

18.12. $x^2+\left(y-2\right)^2=1.$

18.13. $y=1-x^2,\quad x=0,\quad x=\sqrt{y-2},\quad x=1.$

18.14. $y=x^2,\quad y=1,\quad x=2.$

Литература :[1,4,6,9,10,12,13,14,15]

Учебно-методическая литература:[1]

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на константу.
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Какие правила применяются для вычисления неопределённого интеграла суммы функций, для вычисления $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$?

4. Выведите формулу интегрирования по частям.

5. Что называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Какая фигура называется криволинейной трапецией? По какой формуле вычисляется её площадь?

6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.

7. Какие свойства определённого интеграла Вам известны?

8. В чём состоят определение и геометрический смысл несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования?

4.2 Задания для самостоятельной работы.

I. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница и свойства определенного интеграла:

1. $\int_0^1 x^3 dx$
2. $\int_{-1}^2 x^2 dx$
3. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2} dx$
4. $\int_0^5 \frac{dx}{x+2}$
5. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
6. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$
7. $\int_0^{\pi/8} 4\cos 2x dx$
8. $\int_0^{2\pi} \sin x dx$
9. $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$
10. $\int_0^{\pi/2} (2\cos x + 3\sin x) dx$

II. Вычислить определенный интеграл, использую подходящую подстановку:

1. $\int_1^9 \frac{1}{5+2\sqrt{x}} dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$
3. $\int_0^{\sqrt[3]{2}} 3x^2 \cdot e^{x^3} dx$
4. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} ctg^4 x dx$
5. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$
6. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin x dx$
7. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{3tgx}}{\cos^2 x} dx$

Рекомендуемая литература: [1] стр. 243-246, [4] стр. 365.

Практическое занятие № 5 Несобственные интегралы 1-го рода и 2-го рода

Теория

Ранее мы рассматривали интегралы от функций, интегрируемых на конечных отрезках интегрирования, т.е. ограниченных. На практике возникает необходимость обобщения этих понятий на случаи, когда либо один из концов или оба отрезка интегрирования удалены в бесконечность, либо функция не ограничена на отрезке интегрирования. Такие интегралы называются *несобственными*.

Несобственные интегралы 1-го рода (интегралы с бесконечными пределами интегрирования)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях х таких, что $a \le x < +\infty$.

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на интервале $[a;+\infty)$и обозначают: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Следовательно, по определению имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (7.3)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (7.3), то в этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Если же указанный предел не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

При работе с несобственными интегралами обычно выделяют следующие две задачи:

а) исследование вопроса о сходимости заданного несобственного интеграла;

б) вычисление значения интеграла, если несобственный интеграл сходится.

Геометрический смысл несобственных интегралов

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ – определяет площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a, x = b$ при $f(x) \ge 0$, то

несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной (бесконечной) трапеции, заключенной между линиями $y=f(x),\ x=a$ и осью абсцисс.
Аналогично определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (7.4)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\tilde{n}} f(x)dx + \int\limits_{\tilde{n}}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (7.5)$$

где с – произвольное число.
В случае (7.5) интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Пример 44. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)=1,$

т.к. предел существует, то интеграл сходится.

Пример 45. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} ln\,x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} ln b - ln1 = \infty - 0 = \infty$, интеграл расходится.

Пример 46. $\int\limits_{-\infty}^{0} cos\,xdx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} cos\,xdx = \lim_{a\to-\infty} sin\,x\Big|_a^0 = 0 - \lim_{a\to-\infty} sin\,a$, интеграл расходится, т.к. при $a\to-\infty$ предел $\lim\limits_{a\to-\infty} sin\,a$ не существует.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int\limits_{\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, называемый *интегралом Эйлера-Пуассона*. Доказано, $\int\limits_{\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$. Другими словами, площадь S под кривой $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (получившей название кривой Гаусса) на интервале $(-\infty,+\infty)$ равна 1.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Теорема 1 (признак сравнения). Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Пример 47. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$.

Решение. При $x \ge 1$ имеем $\frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \frac{1}{x^2}$. Но интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, (см. пример 32). Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$ также сходится, его значение меньше 1.

Теорема 2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < \infty$, $\left(f(x) > 0 \text{ è } \varphi(x) > 0\right)$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся (т.е. ведут себя одинаково в смысле сходимости).

Пример 48. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Решение. Подынтегральная функция положительна в промежутке интегрирования. Для определения сходимости интеграла воспользуемся теоремой 2 и найдем предел отношений функций исходного интеграла и функции $\frac{1}{x^2}$ сходящегося интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (см. пример 9):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

т.к. предел существует, то интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ сходится. (Числитель дроби преобразован по теореме об эквивалентных бесконечно малых $\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) \sim \frac{1}{x^2+1}$).

Пример 49. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция четная, следовательно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to 0} 2\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to 0} arctgx\Big|_0^b = \lim_{b\to 0} arctgb = \frac{\pi}{2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится.

Пример 50**.** Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot e^{-x^2} dx$.

Решение.

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} x\cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{b^2}}\right] = \frac{1}{2}$$

Интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot e^{-x^2} dx$ сходится.

Несобственные интегралы 2-го рода **(интегралы от неограниченных функций)**

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x < b$, а при $x=b$ имеет бесконечный разрыв или не определена . Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Итак, по определению,

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{7.6}$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ *сходится*. Если же указанный интеграл не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ расходится.

Геометрически несобственный интеграл второго рода (при разрыве в точке $x = b$) можно представить как площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

Аналогично, если функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Если функция терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то несобственный интеграл определяется как

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода

1. Если на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны $\left(0 \le f(x) \le \varphi(x)\right)$, при $x = b$терпят бесконечный разрыв, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а если расходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

2. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на промежутке $[a;b)$ непрерывны, при $x = b$ терпят бесконечный разрыв и существует предел $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Задания для самостоятельной работы

Исследовать сходимость и вычислить сходящиеся интегралы:

5.1. 1) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^a}$, $a > 0$.

5.2. 1) $\int\limits_0^{+\infty} e^x dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx$.

5.3. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^2 x}$.

5.4. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

5.5. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - x}$.

5.6. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определенным интегралом от данной функции?

2. Как определяется площадь криволинейной трапеции при помощи интеграла?
3. Сформулируйте и докажите простейшие свойства определенного интеграла.
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла от данной функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$?
5. Чему равна производная от интеграла по его верхнему пределу? Доказать соответствующую теорему.
6. Что называется несобственным интегралом от разрывной функции по данному конечному интервалу?
7. Привести примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Задания для самостоятельного выполнения по теме «Несобственные интегралы»: [3] задачи №№ 1748-1752.

Список рекомендуемой литературы

[4] с.379-401; [2] с.283-323; [6] с.434-445; [1] с. 243-257, 167-176.

Практическое занятие № 6 Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат

1. Площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс (рисунок 6.1), где $y = f(x) \geq 0$ - уравнение линии, ограничивающей трапецию, равна определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx,$$

где пределы интегрирования a и b - абсциссы начала и конца линии.

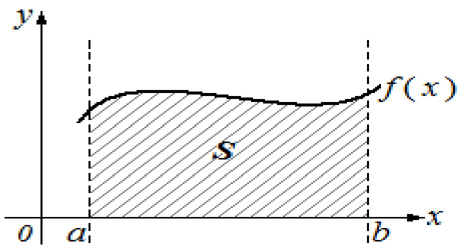


Рисунок 6.1 – Криволинейная трапеция

2. Если криволинейная трапеция расположена «ниже» оси Ох (рисунок 6.2) $(f(x) \leq 0)$, то ее площадь определяется:

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

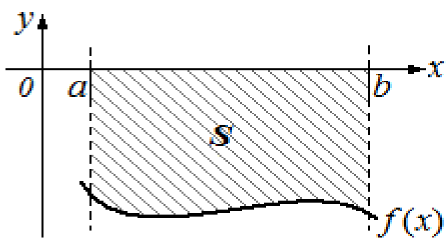


Рисунок 6.2– Криволинейная трапеция

3. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx .$$

4. Если плоская фигура имеет «сложную форму», то прямыми, параллельными оси Оу, ее следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы.

5. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t)$ $t \in (\alpha;\beta)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то ее площадь находится по формуле

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt \right|,$$

где α и β находятся из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.

Площадь плоской фигуры в полярной системе координат

Если линия, ограничивающая фигуру, задана уравнением в полярной системе координат, то в качестве основной фигуры принимается криволинейный сектор – фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$.

Площадь равна

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

1. Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ - гладкая (т.е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

2. При параметрическом задании кривой $x = x(t), y = y(t)$ ($x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой,

соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то длина дуги равна

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi.$$

Пример 51. Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=1$ $(y\ge 0)$.

Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, $L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx=\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}\cdot dx=$

$$=\int_0^1\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2}\cdot dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-1\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right)$$

Пример 52. Найти длину дуги кривой $x=cos^5t$, $y=sin^5t$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi/2$.

Решение. Найдем производные по параметру t: $x'=-5cos^4t\,sint$, $y'=5sin^4t\,cost$. Следовательно,

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-5cos^4t\,sint\right)^2+\left(5sin^4t\,cost\right)^2}dt=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}sint\,cost\sqrt{sin^6t+cos^6t}dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}cos^2 2t}dt=-\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3cos^2 2t}d\left(cos2t\right)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}cos2t\sqrt{1+3cos^2 2t}+\frac{1}{2}ln\left(\sqrt{3}cos2t+\sqrt{1+3cos^2 2t}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{8}\left[2-\frac{ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right].$$

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $0x$, может быть выражена как функция от x, т. е. в виде $S=S(x)$ $(a\le x\le b)$, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси $0x$ плоскостями $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной знакопостоянной функцией $y = f(x)$, прямыми: $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси $0x$, то в результате образуется «тело вращения» (рисунок 6.3), объем которого можно вычислить. На каждом частичном отрезке$[x_{n-1}, x_n]$, $i = 1, 2, ..., n$, выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_{n-1}, x_n]$ и вычислим значение функции в ней, т.е. величину $f(\xi_i)$.

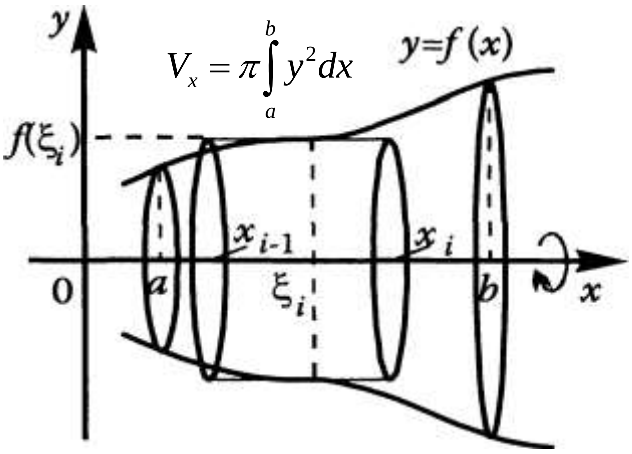


Рисунок 6.3 – «Тело вращения»

Если фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $\left[0 \le f_1(x) \le f_2(x)\right]$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения

$$V_x = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right) dx$$

Пример 53.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $0x$ фигуры (Рисунок 6.4), ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Решение.

$$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi (x-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{1}{4}\pi (\text{êóá.åä.})$$

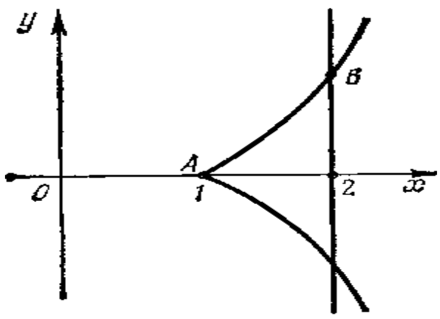


Рисунок 6.4

Задания для самостоятельной работы

Задача 6. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox, в вариантах 17–31 ось вращения Oy.

6.1. $y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$

6.2. $2x - x^2 - y = 0, \; 2x^2 - 4x + y = 0.$

6.3. $y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$

6.4. $y = 5\cos x, \; y = \cos x, \; x = 0, \; x \ge 0.$

6.5. $y = \sin^2 x, \; x = \pi/2, \quad y = 0.$

6.6. $x=\sqrt[3]{y-2},\quad x=1,\quad y=1.$

6.7. $y=x\mathrm{e}^{x},\quad y=0,\quad x=1.$

6.8. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2,\quad x=0.$

6.9. $y=2x-x^2,\quad y=-x+2.$

6.10. $y=\mathrm{e}^{1-x},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1.$

6.11. $y=x^2,\quad y^2-x=0.$

6.12. $x^2+\left(y-2\right)^2=1.$

6.13. $y=1-x^2,\quad x=0,\quad x=\sqrt{y-2},\quad x=1.$

6.14. $y=x^2,\quad y=1,\quad x=2.$

6.15. $y=x^3,\quad y=\sqrt{x}.$

6.16. $y=\sin\left(\pi x/2\right),\quad y=x^2.$

6.17. $y=\arccos\left(x/3\right),\quad y=\arccos x,\quad y=0.$

6.18. $y=\arcsin\left(x/5\right),\quad y=\arcsin x,\quad y=\pi/2.$

6.19. $y=x^2,\quad x=2,\quad y=0.$

6.20. $y=x^2+1,\quad y=x,\quad x=0,\quad y=0.$

6.21. $y=\sqrt{x-1},\quad y=0,\quad y=1,\quad x=0{,}5.$

6.22. $y=\ln x,\quad x=2,\quad y=0.$

6.23. $y=\left(x-1\right)^2,\quad y=1.$

6.24. $y^2=x-2,\quad y=0,\quad y=x^3,\quad y=1.$

6.25. $y=x^3,\quad y=x^2.$

6.26. $y=\arccos\left(x/5\right),\quad y=\arccos\left(x/3\right),\quad y=0.$

6.27. $y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,\quad y=0.$

6.28. $y=x^2-2x+1,\quad x=2,\quad y=0.$

6.29. $y=x^3,\quad y=x.$

6.30. $y=\arccos x,\quad y=\arcsin x,\quad x=0.$

6.31. $y=\left(x-1\right)^2,\quad x=0,\quad x=2,\quad y=0.$

Практическое занятие № 7 Двойной интеграл. Основные свойства и вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.

Теория

Рассмотрим замену декартовых координат *x* и *y* полярными координатами *r* и φ. Прямоугольные и полярные координаты связаны формулами

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

Формула замены переменных ***x, y*** в полярных координат будет иметь вид

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi\, dr,$$

D - область интегрирования.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяют тоже правило сведения его к двукратному интегралу

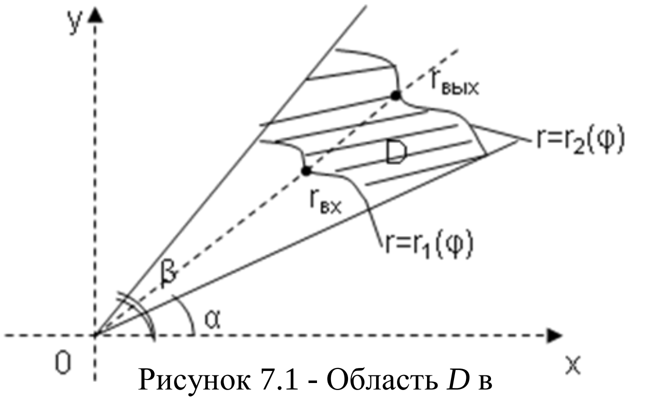


Рисунок 7.1 - Область *D* в полярных координатах

Если область D (рис. 7.1) ограниченна лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, где $\alpha<\beta$, и кривыми $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$, для любого $\varphi \in (\alpha;\beta)$, т.е. область D - правильная: то двойной интеграл в полярной системе координат вычисляется по следующей формуле

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot d\varphi\, dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, dr \ .$$

Внутренний интеграл берётся при φ - *const*

Замечание:

1) переход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$; область *D* - есть круг, кольцо или часть таковых;

2) на практике переход к полярным координатам осуществляется путём замены $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ dxdy = rd\varphi\, dr$. Уравнения линий, ограничивающих область *D*, так же преобразуются к полярным координатам. Пределы интегрирования по *r* и φ находят, совместив декартову и полярную системы координат.

Пример 54: Вычислить

$$\iint_D (9 - x^2 - y^2)dxdy \qquad D: x^2+y^2 \le 4 \text{ (Рис. 7.2)}.$$

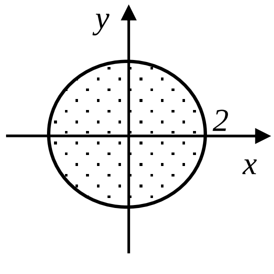


Рисунок 7.2 - Окружность

Переходим к полярным координатам

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, dxdy = rd\varphi\, dr$

Область *D* в полярной системе координат:

$x^2+y^2=4 \to r=2,\ r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Подынтегральная функция в полярной системе координат:

$9-x^2-y^2=9-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi=9-r^2.$

Вычисляем интеграл $\iint\limits_D (9-x^2-y^2)dxdy=\iint\limits_D (9-r^2)rd\varphi dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(9-r^2)rdr$,

$\int\limits_0^2(9-r^2)rdr=16$, $\int\limits_0^{2\pi}16d\varphi=32\pi$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$ область D ограничена линиями $D:(x-2)^2+y^2=4,\ y\ge 0$.
2. Найти площадь области ограниченной линиями
$$x^2-4x+y^2=0;\quad x^2-8x+y^2=0; y=0;\quad y=x.$$
3. Найти площадь области ограниченной линиями
$y^2-8y+x^2=0;\quad y^2-10y+x^2=0; \mathrm{y}=0;\quad y=x.$
4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 4.$
5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 1.$

Теоретические вопросы

1. Определение двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Двойной интеграл в полярных координатах.

Задача 7. Изменить порядок интегрирования.

7.1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx$.

7.2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx$.

7.3. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f\ dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx$.

7.4. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f\ dx$.

7.5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\ dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f\ dy$.

7.6. $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f\ dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f\ dx$.

7.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f\ dx$.

7.8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f\ dx$.

7.9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy$.

7.10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy$.

7.11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f\ dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f\ dy$.

7.12. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f\ dx$.

7.13. $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f\ dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f\ dx.$.

7.14. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f\ dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\ dy$.

7.15. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f\ dx$.

7.16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\ dx$.

7.17. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f\ dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx$.

7.18. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f\ dx$.

7.19. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\ dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\ dy$.

7.20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\ dx$.

7.21. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f\ dx$.

7.22. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy$.

7.23. $\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin x} f\ dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f\ dy$.

7.24. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f\ dx$.

7.25. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f\ dy$.

7.26. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy$.

7.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\ dy$.

7.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f\ dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy$.

7.29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx$.

7.30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f\ dy$.

Рекомендуемая литература: [2] стр. 10-13, [5] стр. 143-152, [6] стр. 214-217.

Практическое занятие № 8 Приложения двойного интеграла в инженерной практике

Краткие сведения из теории и примеры решения задач.

Объём тела

Объём цилиндрического тела находится по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

где $z = f(x;y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если в вышеуказанной формуле положить $f(x;y)=1$, то цилиндрическое тело превратится в прямой цилиндр с высотой *h=1*. Объём такого цилиндра численно равен площади *S* основания *D*. Получаем формулу для вычисления площади области *D* $\quad S = \iint\limits_D dxdy$.

В полярных координатах $\quad S = \iint\limits_D r \cdot d\varphi dr$.

Масса плоской пластины (физический смысл двойного интеграла).

Если плоская пластина *D* имеет плотность, определённую функцией $\mu = \mu(x;y)$, то масса пластины находится по формуле $\quad m = \iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$.

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры.

Статические моменты плоской фигуры *D* с переменной плотностью $\mu = \mu(x;y)$ относительно осей *Ox* и *Oy* могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint_D y \cdot \mu(x,y)dxdy \quad , \quad S_y = \iint_D x \cdot \mu(x,y)dxdy .$$

Координаты центра масс вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_D x \cdot \mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy} \quad , \quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint_D y \cdot \mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy} \quad .$$

Если пластина *D* однородная, то в формуле $\mu(x;y) = const$, тогда:

$$S_x = \iint_D ydxdy ; \; S_y = \iint_D xdxdy ; \; x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy} \; ; \; y_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy} .$$

Момент инерции плоской фигуры

Моменты инерции плоской фигуры относительно осей *Ox* и *Oy* могут быть вычислены по формулам

$$M_x = \iint_D y^2 \cdot \mu(x,y)dxdy \; ; \; M_x = \iint_y x^2 \cdot \mu(x,y)dxdy \quad .$$

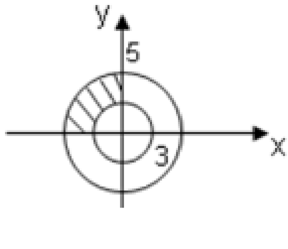


Рисунок 8.1 – Пластина *D*

Момент инерции фигуры относительно начала координат определяется по формуле $M_0 = M_x + M_y$.

Пример 55. Найти массу пластины, ограниченной областью $D: x^2 + y^2 = 9, \; x^2 + y^2 = 25, \; x \le 0, \; y \ge 0$ (рис. 8.1).

Плотность пластинки $\mu = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}$.

Массу вычисляем по формуле $m = \iint_D \mu(x,y)dxdy$.

$m = \iint_D \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2} dxdy$. Так как пластинка есть часть кольца, целесообразно перейти в полярную систему координат. Формулы перехода:

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, dxdy = rd\varphi\, dr$.

$$\mu = \frac{2r\sin\varphi - r\cos\varphi}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \frac{r(2\sin\varphi - \cos\varphi)}{r^2} = \frac{2\sin\varphi - \cos\varphi}{r}$$

- функция плотности в полярной системе координат, *r=3*, *r=5* –уравнения окружностей в полярной системе координат. Получаем:

$$m = \iint_D \frac{2\sin\varphi - \cos\varphi}{r} rd\varphi\, dr = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi \int_3^5 dr = 2\int_{\pi/2}^{\pi}(2\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi =$$

$$= 2(-2\cos\varphi - \sin\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2(-2\cos\pi - \sin\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) = 6 \text{ ед. массы.}$$

13.1 Задания для самостоятельной работы.

1. Найти площадь области ограниченной линиями
$$x = 27 - y^2;\ x = -6y.$$
2. Найти площадь области ограниченной линиями
$$x = y^2 - 2;\quad x = 7.$$
3. Найти площадь ограниченной линиями
$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x};\ y = \frac{3}{2x};\ x = 4.$$
4. Найти массу плоской пластины *D* с функцией плотности *ρ(x;y)*
$$D: x^2 + y^2 = 4;\ \mathrm{x}^2 + y^2 = 16;\ y = 0, x = 0;\ (\mathrm{x} \geq 0, y \leq 0),\ \rho(x;y) = \frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$$

5. Найти массу плоской пластины *D* с функцией плотности *ρ(x;y)*
$D: x = 1,\ y^2 = 4x;\quad y = 0\ \ (y \geq 0),\quad \rho(x;y) = 6x + 3y^2.$

6. Найти массу плоской пластины *D* с функцией плотности *ρ(x;y)*
$D: x^2 + y^2 = 4;\ \mathrm{x}^2 + y^2 = 25;\ y = 0, x = 0; (\mathrm{x} \geq 0, y \leq 0),\ \rho(x;y) = \dfrac{2x - 3y}{x^2 + y^2}.$

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$$y = x^2;\quad \mathrm{z} = y - 6;\quad z = 0.$$
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$$\mathrm{z} = 5 - x - y;\quad z = 0; y = 0; x = 2.$$
9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - y^2; z = 0,\ \mathrm{x} = 2;\ x = 0$.
10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$$x + 4y + z = 4;\quad x = 2;\ y = 1;\quad z = 0.$$
11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
$$y = x^2;\quad \mathrm{z} + y = 1;\quad z = 0.$$

Рекомендуемая литература: [2] стр. 14-20, [5] стр. 154, [6] стр. 414-418.

Практическое занятие № 9 Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула Остроградского-Грина.

Теория.

Понятие о криволинейном интеграле 1-го рода

*Определение***.** Кривая $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}\quad (a \leq t \leq b)$ называется *непрерывной кусочно-гладкой*, если функции φ, ψ и γ непрерывны на отрезке *[a,b]* и отрезок *[a,b]* можно разбить на конечное число частичных отрезков так, что на каждом из них функции φ, ψ и γ имеют непрерывные производные, не равные нулю одновременно.

Если определено не только разбиение кривой на частичные отрезки точками, но порядок этих точек, то кривая называется ***ориентированной*** кривой.

Ориентированная кривая называется *замкнутой*, если значения уравнения кривой в начальной и конечной точках совпадают

$$\vec{r}(a)=\vec{r}(b).$$

Рассмотрим в пространстве *XYZ* кривую АВ, в каждой точке которой определена произвольная функция $f(x,y,z)$.

Разобьем кривую на конечное число отрезков и рассмотрим произведение значения функции в каждой точке разбиения на длину соответствующего отрезка.

$$f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

Сложив все полученные таким образом произведения, получим так называемую *интегральную сумму функции f(x, y, z)*.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой на частичные отрезки существует предел интегральных сумм, то этот предел называется *криволинейным интегралом от функции f(x, y, z) по длине дуги АВ или криволинейным интегралом первого рода (24.1).*

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds \tag{9.1}$$

Свойства криволинейного интеграла первого рода:

1) Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой АВ.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла.

3) Криволинейный интеграл от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов от этих функций.

4) Если кривая АВ разбита на дуга АС и СВ, то

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds=\int_{AC} f(x,y,z)ds+\int_{CB} f(x,y,z)ds$$

5) Если в точках кривой АВ

$$f_1(x,y,z)\le f_2(x,y,z),$$

то

$$\int_{AB} f_1(x,y,z)ds \le \int_{AB} f_2(x,y,z)ds;$$

6) Справедливо неравенство:

$$\left|\int_{AB} f(x,y,z)ds\right| \le \int_{AB} |f(x,y,z| ds$$

7) Если $f(x, y, z) = 1$, то

$$\int_{AB} ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = S;$$

где: S – длина дуги кривой, λ - наибольшая из всех частичных дуг, на которые разбивается дуга АВ.

8) **Теорема о среднем.**

Если функция f(x, y, z) непрерывна на кривой АВ, то на этой кривой существует точка (x_1, y_1, z_1) такая, что

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = f(x_1,y_1,z_1)\cdot S$$

Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги.

Для вычисления криволинейного интеграла по длине дуги надо определить его связь с обыкновенным определенным интегралом.

Пусть кривая АВ задана параметрически уравнениями x = x(t), y = y(t), z = z(t),
$\alpha \le t \le \beta$, где функции x, y, z – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке А соответствует $t = \alpha$, а точке В соответствует $t = \beta$. Функция f(x, y, z) – непрерывна на всей кривой АВ.

Для любой точки M(x, y, z) кривой длина дуги АМ вычисляется по формуле

$$s = s(t) = \int_{\alpha}^{t}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

Длина всей кривой АВ равна:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

Криволинейный интеграл по длине дуги АВ будет находиться по формуле (9.2):

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt \qquad (9.2)$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода (по длине дуги AB) надо, используя параметрическое уравнение кривой выразить подынтегральную функцию через параметр t, заменить ds дифференциалом дуги в зависимости от параметра t и проинтегрировать полученное выражение по t.

Пример 56. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds$ по одному витку винтовой линии $x=\cos t;\quad y=\sin t;\quad z=t;\quad 0\le t\le 2\pi.$

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)ds=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+t^2)dt=$$
$$=2\sqrt{2}\pi\left(1+\frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Если интегрирование производится по длине плоской кривой, заданной уравнением $y=\varphi(x),\quad a\le x\le b,$ то получаем:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds=\int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx. \tag{9.3}$$

Криволинейные интегралы второго рода

Пусть AB – непрерывная кривая в пространстве *XYZ* (или на плоскости *XOY*), а точка P(x, y, z) – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем кривую точками $M(x_i,y_i,z_i)$ на конечное число частичных дуг. И рассмотрим сумму произведений значений функции в каждой точке на длину соответствующей частичной дуги.

$$\sum_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i\ ;\quad M(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta x_i$$

Определение. Если при стремлении к нулю шага разбиения кривой AB интегральные суммы имеют конечный предел, то этот предел называется *криволинейным интегралом по переменной x от функции P(x, y, z) по кривой AB в направлении от A к B* (24.4).

$$\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i \tag{9.4}$$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующую ось. (В рассмотренном выше случае – на ось OX).

Вообще говоря, криволинейные интегралы могут считаться также и по переменным y и z.

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

Сумму криволинейных интегралов также называют криволинейным интегралом второго рода.

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода:

1) Криволинейный интеграл при перемене направления кривой меняет знак.

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx$$

2) $\int_{AB} kP(x,y,z)dx = k\int_{AB} P(x,y,z)dx$;

3) $\int_{AB} (P_1(x,y,z)+P_2(x,y,z))dx = \int_{AB} P_1(x,y,z)dx + \int_{AB} P_2(x,y,z)dz$

4) $\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CA} P(x,y,z)dx$

5) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

6) Если AB – кривая, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси OX, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным y и z.

Теорема 9.1. *Если кривая AB – кусочно-гладкая, а функции P(x, y, z), Q(x, y, z) и R(x, y, z) – непрерывны на кривой AB, то криволинейные интегралы*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx; \quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy; \quad \int_{AB} R(x,y,z)dz;$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

существуют.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем преобразования их к определенным интегралам по формулам:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

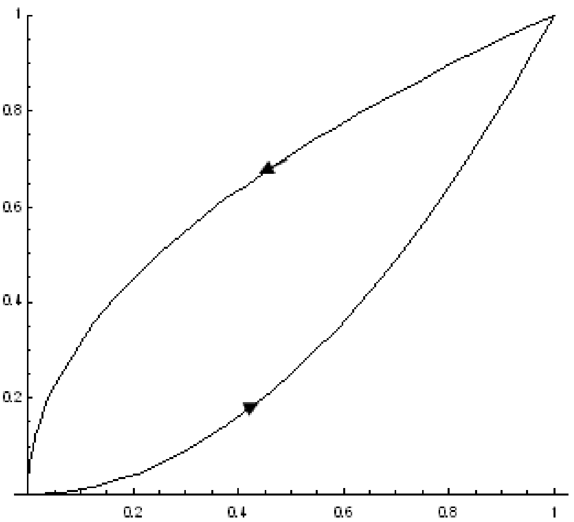
$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]dt$$

В том случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением *y = f(x),* то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x) + Q(x, f(x)) f'(x)\right]dx \qquad (9.5)$$

Пример 57. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L x^2 ydx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 ydx + x^3 dy = \int_{L_1} x^2 ydx + \int_{L_1} x^3 dy + \int_{L_2} x^2 ydx + \int_{L_2} x^3 dy =$$

$$= \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 x^3 \cdot 2xdx + \int_1^0 x^2 \sqrt{x} dx + \int_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

Формула Остроградского – Грина

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.

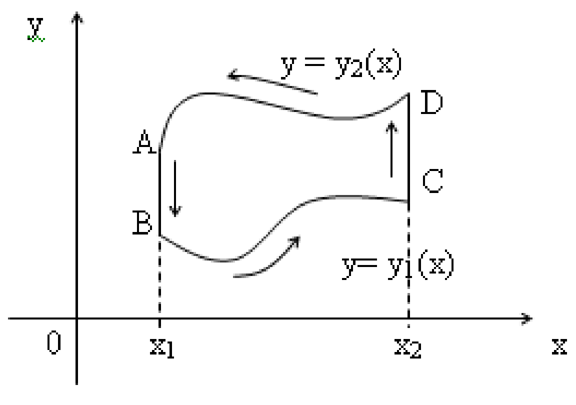


Рисунок 9.1. Замкнутый контур

Если замкнутый контур имеет вид, показанный на рисунке, то криволинейный интеграл по контуру L можно записать в виде:

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$\int_{AB} = \int_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx + \int_{x_2}^{x_1} P(x,y_2(x))dx = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1(x))dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_2(x))dx$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2} (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))dx$$

$$P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\oint_L P(x,y)dx = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = -\iint_\Delta \frac{\partial P}{\partial y} dydx$$

Если участки AB и CD контура принять за произвольные кривые, то, проведя аналогичные преобразования, получим формулу для контура произвольной формы:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dydx \qquad (9.6)$$

Формула (9.6) называется **формулой Остроградского – Грина**.

Формула Остроградского – Грина справедлива и в случае многосвязной области, т.е. области, внутри которой есть исключенные участки. В этом случае правая часть формулы будет представлять собой сумму интегралов по внешнему контуру области и интегралов по контурам всех исключенных участков, причем каждый из этих контуров интегрируется в таком направлении, чтобы область Δ все время оставалась по левую сторону линии обхода.

Криволинейный интеграл не зависит от формы пути, если он вдоль всех путей, соединяющих начальную и конечную точку, имеет одну и ту же величину.

Условием независимости криволинейного интеграла от формы пути равносильно равенству нулю этого интеграла по любому замкнутому контуру, содержащему начальную и конечную точки.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Это условие будет выполняться, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. выполняется условие тотальности.

Пример 58. Решим пример, рассмотренный выше, воспользовавшись формулой Остроградского – Грина.

$$\oint_L x^2 y dx + x^3 dy = \iint_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint_\Delta 2x^2 dydx = \int_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4)dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$

Формула Остроградского-Грина позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.
Пусть на плоскости Oxy задана правильная область D.
Теорема. Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dydx,$$

где L граница области D, интегрирование вдоль кривой производится в положительном направлении (при движении вдоль кривой L, область D остается слева).
Пример 59. Решим пример, рассмотренный выше (рис. 42), воспользовавшись формулой Остроградского – Грина.

$$\oint_L x^2 y dx + x^3 dy = \iint_D \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint_D 2x^2 dydx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2x^2 dy = \int_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4)dx = 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$

Формула Остроградского – Грина позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

Работа переменной силы

Переменная сила $\vec{F}\{P(x,y);Q(x,y)\}$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле $A = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

.

Пример 60: Найти работу силы $\vec{F} = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

$$A = \int_{OB} 4x^6 dx + xydy = \int_0^1 (4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2)dx = \int_0^1 7x^6 dx = 1.$$

9.1 Задания для самостоятельной работы.

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} xdy$ вдоль линии L.

$\boldsymbol{L}$ – контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки).

2.Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L.

$\int\limits_{L} ydx + xdy$, $L: x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

1. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L.

$\int\limits_{(L)} \left(x^2 - y^2\right)dx$, где $\boldsymbol{L}$ – дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$, $A(2;4)$

2. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L.

$\int\limits_{(L)} \left(x^2 + y^2\right)dy$, где $\boldsymbol{L}$ – контур четырехугольника с вершинами (указанными в порядке обхода) в точках $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;4)$ и $D(0;4)$

3. Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии L.

$$\int\limits_{L} (x+y)dx - xdy,\ L\text{: прямая OA, O(0;0), A(4; 2).}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L} (x^2 + y)dx + (y-2)dy$ L: ломаная OAB, O(0;0), A(3;0), B(3;1).

Рекомендуемая литература: [2] стр. 42-47, [5] стр. 200.

[2] стр. 56, [5] стр. 216.

Список использованной и рекомендуемой литературы

Основная

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебн. пособие.– 7-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование» 2008.- 816с.
2. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – 3-е изд., перер и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2007. – 479с.
3. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский. – М.: Физматлит, 2006. –336с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебн. пособие, т.1 / Н.С. Пискунов – М. Интеграл-пресс 2005. – 415с.

Дополнительная

5. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов – 11-е изд., стер./А.Ф. Бермант - СПб.: Лань, 2005. – 736с.
6. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике /М.Я.Выгодский - М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991с.
7. Крыньский, Х.Э. Математика для экономистов, перевод с польского В.Д. Меникера под ред М.И. Баренгольца /Х.Э Крыньский – М., «Статистика», 1970. – 583с.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебн. пособие, т.2 / Н.С. Пискунов – М. Интеграл-пресс 2005. –576с.

Ольга Георгиевна Подольская
Елена Николаевна Рябухо
Оксана Михайловна Растопчина

Математика
Практикум
Часть 2
к практическим занятиям и по самостоятельной работе
для студентов направления подготовки – 15.03.02
«Технологические машины и оборудование»
очной и заочной форм обучения

Тираж____экз. Подписано к печати _____
Заказ № _____. Объем 2,43 п.л.
Изд. ФГБОУ ВО «Керченский государственный морской технологический университет»
298309 г. Керчь, Орджоникидзе, 82.