O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

M. M.MIRSAIDOV, T.M.SOBIRJONOV

NAZARIY MEXANIKA

(Matematik dasturlashtirish asoslari bilan)

Ushbu darslik oliy o‘quv yurtlarining: 5320200 – “Mashinasozlik texnologiyasi, mashinasozlik ishlab chiqarishini jihozlash va avtomatlashtirish” yo’nalishi va 5430100 – “Qishloq xo’jaligini mexanizasiyalash” bakalavrlari uchun mo‘ljallangan

TOSHKENT – 2020

ANNOTATSIYA

Ushbu darslik Oliy o‘quv yurtlarining mashinasozlik, transport, qishloq va suv xo‘jaligini mexanizatsiyalish, qurilish va kasbiy ta’lim yo’nalishlari bo‘yicha bilim oluvchi bakalavriyat talabalari uchun mo‘ljallangan. Darslikda nazariy ma’lumotlar bakalavriyatura talablaridan kelib chiqqan holda bayon qilingan bo‘lib, fanning asosiy tushunchalari, qisqach, sodda va tushinarli qilib keltirilgan. Fanning statika, kinematika, dinamika va analitik mexanika elementlari ortiqcha tushuntirishlarsiz kreativ holda berilgan. Darslikning oxirgi qismida, mexanika masalalarining matematik modelini tuzish va MAPLE dasturi yordamida masalani kompyuter yordamida yechish usullari ko’rsatilgan.

Mazkur darslikda ko‘pgina masalalar Oliy o‘quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab, keltirilgan bo’lib, masala yechish jarayonida nazariyadan olingan bilimlardan foydalanish va natijalarni tahlil qilish ko‘rsatib berilgan. Darslikni yozishda mahalliy va horijiy adabiyotlarning boy tajribalaridan keng foydalanilgan.

АННОТАЦИЯ

Данный учебник предназначен для подготовки бакалавров технических ВУЗов, обучающихся по направлениям машиностроения, транспорта, механизации сельского и водного хозяйства и строительства. Учебник написан в соответствии с учебными программами вышеуказанных направлений, а также с использованием опыта и некоторых материалов, излагаемых в отечественной и зарубежной технической литературе. Основы статики, кинематики, динамики и элементы аналитической механики приведены в учебнике без многих, долгих доказательств и объяснений. При решении конкретных задач использованы теоретические предпосылки и проведен анализ полученных решений. Показано составление математических моделей для различных механических задач и

их решение на компьютере с использованием программы MAPLE. При этом некоторые задачи взаимствованы из известных отечественных и зарубежных источников технической литературы с учетом направления бакалавриата.

ABSTRACT

This textbook is intended for the training of bachelors of technical universities studying in the areas of mechanical engineering, transport, mechanization in agriculture and water management, construction. The textbook is written in accordance with the curricula of the above areas, as well as using experience and data presented in domestic and foreign technical literature. The basics of statics, kinematics, dynamics, and elements of analytical mechanics are given in the textbook without cumbersome proofs and explanations. In solving specific problems, theoretical preconditions were used and an analysis of the obtained solutions was carried out. Derivation of mathematical models for various mechanical problems and their solution on a computer using the MAPLE program are shown. Some problems are taken from well-known domestic and foreign sources of technical literatureconsidering the direction of undergraduate studies.

Taqrizchilar:

K.S.Sultanov – O’zR FA Mexanika va inshootlar siysmik mustahkamligi institutining bosh ilmiy xodimi, fizika-matematika fanlari doktori, professor;

M.L.Djalilov - Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti Farg‘ona filiali “Kompyuter injenering” kafedrasi mudiri, t.f.n., dotsent;

A.E.Teshaboyev- Farg‘ona politexnika instituti “Mashinasozlik texnologiyasi, mashinasozlik ishlab chiqarishini jihozlash va avtomatlashtirish” kafedrasi dotsenti, t.f.n.

M U N D A R I J A

KIRISH…….……10

I-BOB. ASOSIY TUSHUNCHALAR

1.1. Vektorlar algebrasi……..12

1.2. Mexanikanig asosiy tushunchalari, aksiomalari va qonunlari……..…16

1.3. Kuchlarning turlari……23

1.4. Bog‘lanishlar va bog‘lanish reaksiya kuchlari……..…27

II-BOB. STATIKA.

2.1. Moddiy nuqtaning muvozanati……..32

2.2. Qattiq jismning muvozanati……...…37

2.2.1. Yassi jismlarning muvozanati……...37

2.2.2. Fazoviy jismlarning muvozanati……...53

2.2.3. Bir jinsli jismlarning og‘irlik markazi……..67

2.3. Jismlar sistemasining muvozanat holati…….....76

2.3.1. Murakkab tuzilmalar turlari va hisoblash usullari……....76

2.3.2. Fermalardan iborat tuzilmalarning hisoblash usullari…….…..78

2.3.3. Ishqalanish kuchi ta’sir idagi jismlar muvozanati……...104

III-BOB. KINEMATIKA.

3.1. Moddiy nuqta harakatining kinematikasi…….…104

3.1.1. Kinematikaning asosiy tushunchalari va vazifalari……..104

3.1.2. Moddiy nuqtaning fazodagi harakati……....105

3.1.3. Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari……..117

3.2. Qattiq jism harakatining kinematikasi…….…123

3.2.1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati…….....124

3.2.2. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati….127

3.2.3. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati……139

3.2.4. Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakati.156

3.2.5. Qattiq jismning umumiy holdagi harakati……125

3.3. Moddiy nuqta va qattiq jismning murakkab harakati……...126

IV-BOB. DINAMIKA.

4.1. Moddiy nuqta harakatining dinamikasi……..191

4.1.1. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari….. …….191

4.1.2. Moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari……..…200

4.1.3. Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi teoremasi….……201

4.1.4. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema……203

4.1.5. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema ……..205

4.1.6. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqtaning harakati……211

4.1.7. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati…….213

4.1.8. Moddiy nuqtaning tebranma harakati……217

4.2. Jismlar sistemasi (Mexanik sistema) harakatining dinamikasi……..230

4.2.1. Mexanik sistema. Massalar markazi. Mexanik sistema massalar markazining harakati……230

4.2.2. Inersiya momenti. Inersiya momentini hisoblash usullari. Parallel o‘qlarga nisbatan inersiya momenti…….238

4.2.3. Qattiq jism dinamikasining umumiy teoremalari…….249

V-BOB. ANALITIK MEXANIKA.

5.1.1. Analitik mexanikaning vazifalari va tushunchalari……..271

5.1.2. Dinamik bog‘lanishlar……..……271

5.1.3. Dinamika prinsiplari…….……273

5.1.4. Lagranj tenglamalari…….. ……..287

VI-BOB. MEXANIKA MASALALARINING MATEMATIK MO‘DELI VA DASTURI.

6.1.1. Maple tizimining tarkibi va imkoniyatlari……...299

6.1.2. Statika masalalarini matematik dasturlash …….302

6.1.3. Kinematika masalalarini matematik dasturlash ……...…..306

6.1.4. Dinamika masalalarini matematik dasturlash……312

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati……...320

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ…….……10

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Алгебра векторов……..12

1.2. Основные понятия механики, аксиомы и законы ……...….16

1.3. Классификация сил…….…….23

1.4. Связи и реакции связей…….……..…27

II. СТАТИКА.

2.1. Равновесие материальной точки..……..32

2.2. Равновесие твёрдого тела..……...…37

2.2.1. Равновесие плоской фигуры……...37

2.2.2. Равновесие пространственного тела……..53

2.2.3. Центр тяжести однородного тела…..……67

2.3. Равновесие системы твёрдых тел…..…….....76

2.3.1. Равновесие сложных конструкций……..……..76

2.3.2. Статический расчёт конструкций, составленных из ферм.….78

2.3.3. Равновесие тел с учётом силы трения…….……..…90

III. КИНЕМАТИКА.

3.1. Кинематика материальной точки…….……..…104

3.1.1. Основные понятия кинематики……..……...104

3.1.2. Движение материальной точки в пространстве……..105

3.1.3. Частные случаи движение материальной точки ……117

3.2. Кинематика твёрдого тела…….…….….124

3.2.1. Поступательное движение твёрдого тела……124

3.2.2. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси……127

3.2.3. Плоскопараллельное движение твёрдого тела ……139

3.2.4. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки……....156

3.2.5. Сложное и общий случай движения твёрдого тела ……165

3.3. Сложное движение материальной точки и твёрдого тела……..168

IV. ДИНАМИКА.

4.1. Динамика материальной точки……..……..191

4.1.1. Дифференциальные уравнения движения точки…….191

4.1.2. Общие теоремы динамики материальной точки …….200

4.1.3. Теорема об изменения количества движения точки……201

4.1.4. Теорема об изменения момента количества движения материальной точки……...203

4.1.5. Теорема об изменения кинетической энергии точки……....205

4.1.6. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки…….211

4.1.7. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки …….213

4.1.8. Дифференциальные уравнения колебательного движения материальной точки ……..…217

4.2. Динамика твёрдого тела (механической системы) …….....230

4.2.1. Механическая система. Центр масс. Движение центра масс механической системы……..230

4.2.2. Моменты инерции тел. Способы вычисления момента инерции. Моменты инерции относительно параллельных осей……..238

4.2.3. Общие теоремы динамики твёрдого тела…..……...249

VI-ГЛАВА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

5.1.1. Основные задачи и понятия аналитической механики……..271

5.1.2. Динамические связи……..……271

5.1.2. Принципы динамики…….….273

5.1.3. Уравнения Лагранжа…….. ……...287

VII-ГЛАВА. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

6.1.1. Состав и возможности системы Maple…….……299

6.1.2. Математическое программирование задач статики……302

6.1.3. Математическое программирование задач кинематики ……306

6.1.4. Математическое программирование задач динамики ……...312

Список использованной литературы……320

KIRISH

Kuch ta’siridagi jismlarning harakatini va holatini o‘rganadigan fan ***mexanika*** deb ataladi. Fazodagi moddiy jismlar bir-birlariga nisbatan holatlarining vaqt mobaynidagi o‘zgarishi ***mexanik harakat*** deb ataladi. Mexanika fani jismlarning holatiga qarab, uch qismga bo‘linadi:

a) absolyut qattiq jism mexanikasi (“Nazariy mexanika” fanida o‘rganiladi);

b) deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar mexanikasi (“Materiallar qarshiligi”, “Elastiklik nazariyasi” va boshqa fanlarda o‘rganiladi);

d) suyuqliklar mexanikasi (“Gidromexanika”, “Gidravlika”, “Aeromexanika” va boshqa fanlarda o‘rganiladi).

Nazariy mexanika fani absolyut qattiq jism mexanikasi asoslarini o‘rgatib, keyinchalik deformatsiyalanuvchi jismlar mexanikasi va suyuqliklar mexanikasi fanlari uchun kerakli asos hisoblanadi. Demak, ***nazariy mexanika*** fani kuch ta’siridagi absolyut qattiq jismlarning harakatini va holatini o‘rganadi. Biz o‘rganayotgan nazariy mexanika fani Galiley - Nyuton qonunlariga asoslangan bo‘lib, ***klassik mexanika*** deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog‘liq emas hamda jismning massasi uning tezligiga bog‘liq emas deb qaraladi. Jismlarning harakati uch o‘lchovli Evklid geometriyasi asosida olinadi.

Bundan tashqari, Lagranj, Gamilton va Eynshteyn nazariyalariga asoslangan ***maxsus mexanika*** fanlari mavjud bo‘lib, klassik mexanika yecholmagan masalalarni tushuntirishga kerak bo‘ladi. Lekin, ular

orasida aniq chegara yo‘q, ya’ni klassik mexanikaning ba’zi masalalariga yuqoridagi nazariyalarning elementlari aralashib ketgan.

Mazkur darslik “Nazariy mexanika” fani bo‘yicha yangi avlod adabiyotlaridan hisoblanib, ortiqcha tushuntirishlar va isbotlarni hisobga olmay, qisqa va kreativ yo‘l orqali uning mazmuniga etib borishga harakat qilingan. Ikkinchidan, chet el adabiyotlaridagi kabi rangli va jonli misollar orqali talabalarga mexanika asoslarini o‘rganishga qaratilgan. Uchichidan, mexanika masalarining umumiy matematik modelini tuzish, kompyuterda yechish va rangli grafik-animatsiyalar yordamida mexanik jarayonning ochilmagan tomonlarini ko‘rsatish maqsad qilib qo‘yilgan.

I-BOB.

ASOSIY TUSHUNCHALAR

BOBNING MAQSADI:

- Vektorlar haqida tushuncha berish.
- Mexanikaning asosiy tushunchalarini aniqlash.
- Mexanikaning aksiomalari bilan tanishtirish.
- Nyuton qonunlarining jism harakatiga va holatiga ta'sirini o'rganish.
- Mexanikada uchraydigan kuchlarning turlari haqida tushuncha berish.
- Bog'lanishlar va bog'lanish reaksiya kuchlari bilan tanishtirish.

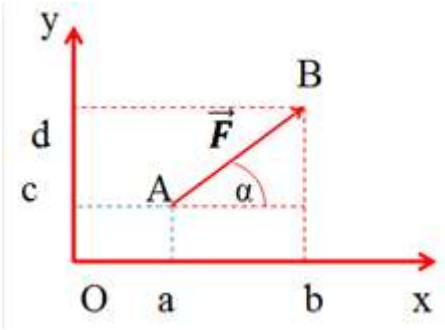
1.1. VEKTORLAR ALGEBRASI.

Nazariy mexanikada ham boshqa fanlarga o'xshab ***skalyar*** va ***vektor*** kattaliklar ishlatiladi. Skalyar qiymat deb, son qiymati bor , lekin yo'nalishga ega bo'lmagan kattaliklarga aytiladi. Masalan, massasi 1 kg bo'lgan yuk, yoki uzunligi 10 m bo'lgan yo'l va h.k. Vektor kattaliklar esa ham son qiymatiga, ham yo'nalishga ega bo'ladi. Masalan, raketaning tezligi 200 m/s bo'lib, vertikal yuqoriga yo'nalgan, avtomobilning tezlanishi 10 m/s^2 ga teng va gorizontal o'ng tomonga yo'nalgan.

Quyida vektorlar algebrasining eng asosiy tushunchalarini keltiramiz:

A. **VEKTORLARNI BELGILASH:** matematikada vektorlar lotin alifbosininng ikkita katta harflari $\overrightarrow{AB}$, yoki bitta kichik harfi $\vec{a}$ orqali belgilanadi. Mexanikada esa vektor kattaliklar ko'pligi uchun, ularni lotin alifbosining bitta katta harfi $\vec{P}$, yoki indeksli $\vec{F}_1$, $\vec{R}_{AD}$ belgilash qabul qilingan.

B. **VEKTORLARNING BERILISHI:** vektorlar uchta xususiyati bilan aniqlanadi: miqdori (moduli), yo'nalishi va qo'yilish nuqtasi bilan. Masalan $\vec{F}$ kuchi berilgan bo'lsa,



1.1-shakl

uning miqdori F=10 N, yo‘nalishi α=30° va A nuqtaning koordinatalari, masalan, a=2 m, c=1m berilgan bo‘lishi shart.

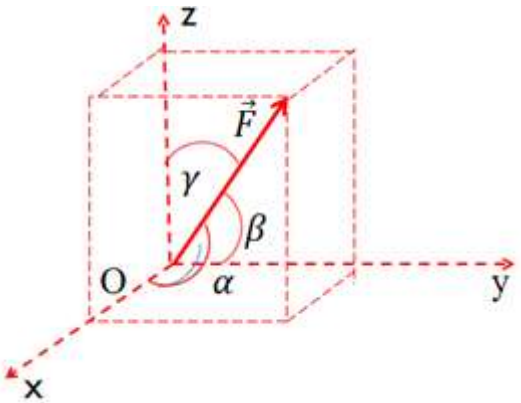
D.<u>VEKTORNING PROYEKSIYASI:</u> $\vec{a}$ vektorning chiziqdagi (o‘qdagi proyeksiyasi deb, vektorning boshidan va oxiridan tushirilgan perpendikulyar ajratgan biror kesmaning uzunligiga (son qiymatiga) aytiladi. Masalan, $\vec{F}$ kuchininng Ox va Oy o‘qlaridagi proyeksiyalari (1.1-shakl) pr($\vec{F}$)$_x$ = ab va pr($\vec{F}$)$_y$ = cd kesmalarga teng bo‘lib, quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$F_x=ab=AB\cdot\cos\alpha\ ,\ F_y=cd=AB\cdot\sin\alpha\ ,$$

yoki qisqacha

$$F_x= F\cdot\cos\alpha\ ,\quad \text{va}\quad F_y= F\cdot\sin\alpha\ . \qquad (1.1)$$

Agar vektor uch o‘lchovli fazoda berilgan bo‘lsa, uning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha aniqlanadi (1.2-shakl) :

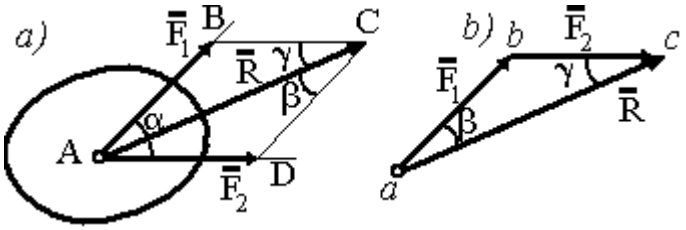


1.2-shakl.

$$F_x= F\cdot\cos\alpha\ ,\quad F_y= F\cdot\cos\beta\ ,\quad F_z= F\cdot\cos\gamma\ . \qquad (1.2)$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

E.**VEKTORLARNI GEOMETRIK QO‘SHISH:** ikki va undan ortiq vektorlar yig‘indisi yana vektor bo‘ladi, yoki berilgan vektorni bir necha vektorlarga ajratish mumkin. Ikki vektor parallelogram usuli yordamida qo‘shiladi(1.3-shakl).



1.3-shakl.

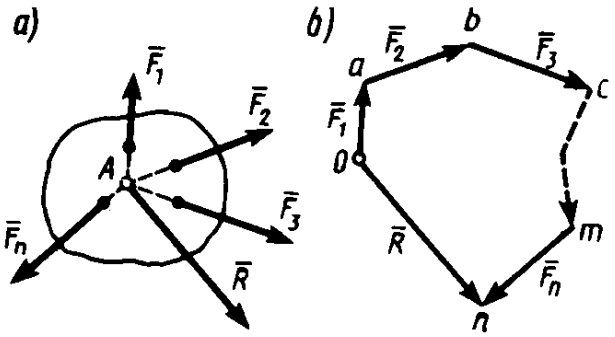
$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \quad . \tag{1.3}$$

Agar berilgan kuchlar orasidagi burchak α - ga teng bo‘lsa, u holda teng ta’sir etuvchining moduli R va uni kuchlar bilan tashkil qilgan burchaklari, ya’ni β va γ -larni quyidagi formulalar orqali aniqlanadi,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \tag{1.4}$$

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha} \tag{1.5}$$

Agar vektorlar ko‘p bo‘lsa, birin-ketin, ya’ni birining oxiriga ikkinchisining boshini joylashtirish bilan vektorlar ko‘pburchagi hosil qilinadi (1.4-shakl).



1.4-shakl.

Vektorlar yig‘indisining matematik ifodasi quyidagicha yoziladi,

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n,$$

yoki qisqacha

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \quad . \tag{1.6}$$

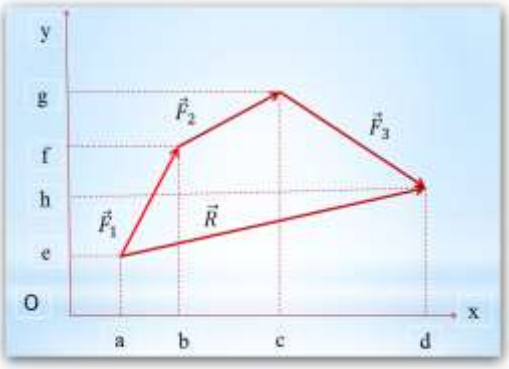
Bu yerda $\vec{R}$-vektorlar yig‘indisi, yoki mexanikada ***teng ta’sir etuvchi*** deb ataladi.

F. <u>VEKTORLARNI ANALITIK QO‘SHISH:</u> Amaliy masalar yechishda vektorlarni geometrik qo‘shish ba’zi bir qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun vektorlarni analitik qo‘shish qulay. “Analitik” so‘zi “tahlil qilish, hisoblash” ma’nosini anglatib, mexanikada kuchlarning tashkil etuvchilari, ya’ni proyeksiyalari orqali qo‘shiladi. Kuchlarning vektor bog‘lanishi bilan ularning proektsiyalarini bog‘lanishi geometriya fanidagi quyidagi teorema orqali ifodalanadi: ***yig‘indi vektorning biror o‘qqa proektsiyasi, yig‘indi vektorni tashkil etuvchi vektorlarning shu o‘qqa proektsiyalarining yig‘indisiga teng.***

Faraz qilaylik, uchta kuchlarning yig‘indisi

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{R}, \qquad (1.7)$$

bo‘lsin. Ularning proyeksiyalarini xy tekislikda ko‘ramiz(1.5-shakl):



1.5-shakl.

Teorema isbotini kesmalarning yig‘indisi orqali isbotlaymiz:

ab+bc+cd=ad yoki $F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=R_x$

ef+fg - gh=eh yoki $F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=R_y$, ($F_{3y}<0$).

Ushbu teoremaga asosan, agar $\vec{R}$ - vektori $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ vektorlarning yig‘indisidan iborat bo‘lsa, ya’ni $\vec{R}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k$ u holda:

$$R_x=\sum F_{kx}; \quad R_y=\sum F_{ky}; \quad R_z=\sum F_{kz}; \qquad (1.8)$$

shu sababli, R_x, R_y va R_z - larni bilgan holda , yig‘indi vektorning moduli va yo‘nalishining burchak kosinuslarini aniqlaymiz, ya’ni:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}, \tag{1.9}$$

Yuqoridagi (1.8) va (1.9) formulalar kuchlarni analitik qo‘shish uchun zarur bo‘lgan formulalarni tashkil etadi.

Berilgan kuchlar bitta tekislikda joylashgan kuchlardan iborat bo‘lsa, (1.9) formulalar ancha soddalashadi,

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \tag{1.10}$$

Demak, kuchlarni analitik qo‘shish uchun ularning qiymatlari va kuch bilan o‘q orasidagi burchaklari berilgan bo‘lishi kerak ekan.

1.2. MEXANIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI, AKSIOMALARI VA QONUNLARI.

A. <u>ASOSIY TUSHUNCHALAR.</u> Qattiq jism mexanikasi, ya’ni - Nazariy mexanika uch qismga bo‘lib o‘rganiladi [2]:

- moddiy nuqta mexanikasi;
- qattiq jism mexanikasi;
- mexanik sistema (nuqtalar yoki jismlar to‘plami) mexanikasi.

Ularning barchasida avval nisbiy muvozanati - ***statikasi*** o‘rganiladi, keyin harakatlanish qonunlari geometriyasi - ***kinematikasi*** va oxirida harakatlanish qonunlari chuqurroq o‘ganiladi - ***dinamikasi***. Kinematikada jismning massasi va ta’sir etuvchi kuchlari hisobga olinmay, faqat harakat qonuni (tryektoriyasi) va jism nuqtalarining tezlik-tezlanishlari aniqlanadi. Dinamika qismida jismning harakati to‘la, ya’ni massasi va ta’sir kuchlari hisobga olinib, tekshiriladi. Statika jismlarning muvozanatini, boshqacha aytganda, tinch turgan yoki o‘zgarmas tezlik

bilan harakatlanayotgan jismlarning holatini o‘rganadi. Statika dinamikaning hususiy holi bo‘lib, jismning tezlanishi nolga teng deb olinadi va muhandislik ishida muhim o‘rin egallaydi, chunki juda ko‘p ob’yektlar nisbiy tinchlik holatida bo‘ladi.

Ideyallashtirish (abstraksiya) **-** mexanikada nazariy tushunchalarni amaliyotga tadbiq qilish uchun modellar yordamida soddalashtiriladi. Tushunarli bo‘lishi uchun, quyida to‘rtta tushunchani abstraksiyalaymiz:

moddiy nuqta deb, massaga ega bolgan, o‘lchamlari, ya’ni hajmi hisobga olinmaydigan jismga aytiladi. Albatta bu tushuncha abstrakt-hayoliy ideallashtirish tushunchasi bo‘lib, jismlarning o‘lchamlari masaladagi boshqa o‘lchamlarga nisbatan juda kichik bo‘lgan holga to‘gri keladi (1.6-shakl);

1.6-shakl.
Halqaga ta’sir qilayotgan uchta kuch
1 ta nuqtaga ta’sir etadi deb, faraz qilinadi,
ya’ni halqaning o‘lchamlari hisobga olinmaydi.

absolyut qattiq jism deb, har qanday holatda jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofasi o‘zgarmay qolishiga aytiladi. Bu tushuncha ham abstract-hayoliy ideallashtirish tushunchasi bo‘lib, qattiq jism ko‘rsatilgan tashqi ta’sirlar natijasida u yoki, bu miqdorda o‘zining geometrik shaklini o‘zgartiradi (*masalan, egilish, siqilish, buralish, cho‘zilish va h.k.*). Bunday o‘zgarishlar ***deformatsiyalanish*** deb ataladi. Nazariy mexanikada yuqoridagi cheksiz kichik o‘zgarishlar hisobga olinmaydi (1.7-shakl);

1.7-shakl.

Po‘lat qattiq jism hisoblanib, kuch ta’sir ida juda kam deformatsiyalanadi. Shuning uchun g‘ildirak va relsning o‘zaro ta’sir i 1 ta bosim kuchi bilan ifodalanadi.

kuchlarning teng ta’sir etuvchisi **-** jismga ta’sir qiluvchi bir necha kuchlarni bitta kuch bilan almashtiruvchi kuchga aytiladi. Aslida kuchlar jismning kichik yuzasiga ta’sir qiladi, ammo biz ularni bir nuqtaga to‘plab, bitta kuch sifatida olamiz. Masalan, relsning bosim kuchi ko‘rinishida (1.7-shakl).

mexanik sistema deb, har birining harakati va holati boshqalarining harakati va holatiga uzviy bog‘liq bo‘lgan moddiy nuqtalar, yoki jismlar to‘plamiga aytiladi. Mexanikada ixtiyoriy mexanizm-mashinalar, quyosh planetalar sistemasi, yoki alohida bitta jism mexanik sistema bo‘lishi mumkin.

Ideyallashtirilgan (abstraksiyalashtirilgan) tushunchalar mexanikada juda ko‘p, qolganlariga kerakli joyda izoh berib ketiladi.

Mexanikada asosan to‘rtta o‘lchovlar juda ko‘p uchraydi:

Uzunlik **-** moddiy nuqtaning fazodagi o‘rnini va qattiq jismning, yoki mexanik sistemaning hajmini aniqlashga ishlatiladi. Keyinchalik uzunlik jismlar orasidagi masofa va ularning geometrik xususiyatlarini aniqlashda ishlatiladi;

Vaqt **-** uzluksiz davom etuvchi hodisa bo‘lib, jism harakatida asosiy rolni o‘ynaydi;

massa-o‘zgarmas kattalik bo‘lib, jismlarning miqdorini aniqlaydi. Jismlarning tezlanishi uning massasiga bog‘liq ravishda o‘zgaradi;

kuch-jismlarning o‘zaro ta’siri bo‘lib, miqdori, yo‘nalishi va qo‘yilish nuqtasi bilan aniqlanadi. Jismlarning bir-biriga ta’siri ularning to‘g‘ridan-to‘g‘ri tegib turganda yoki biror masofada turganida ham yuz berishi mumkin.

B. <u>MEXANIKA AKSIOMALARI.</u> Jismlarning tinch holatini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatini aniqlovchi, asrlar mobaynida kuzatishlar va tajribalardan aniqlangan, ba’zi bir tushunchalar mexanikada ***aksiomalar*** deb ataladi. Bu tushunchalar yordamida statikaning boshqa holatlari dinamika qonunlarisiz asoslanadi. Aksiomalarni tushuntirishdan avval jismga ta’sir qiluvchi kuchlarning ta’rifini beramiz:

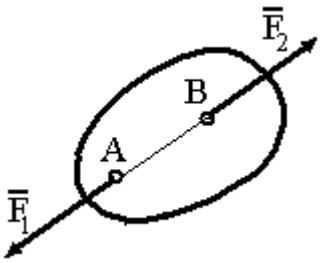
- jismga ta’sir etuvchi kuchlar to‘plami ***kuchlar sistemasi*** deb ataladi;

- jism kuchlar sistemasi ta’sirida tinch holatini yoki harakatini o‘zgartir-masa, bunday kuchlar ***muvozanatlashgan kuchlar sistemasi*** deyiladi.

- jismning holatini yoki harakatini o‘zgartirmay, ta’sir etuvchi kuchlar sistemasini boshqa kuchlar sistemasi bilan almashtirish mumkin bo‘lsa, bu sistemalar ***ekvivalent kuchlar sistemasi*** deb ataladi;

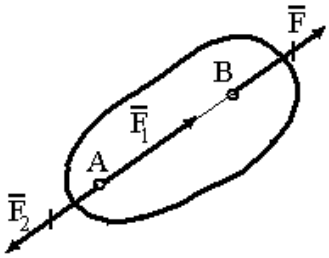
- jismga ta’sir etuvchi kuchlar sistemasiga bitta kuch ekvivalent bo‘lsa, bu kuch ***teng ta’sir etuvchi kuch*** deb ataladi.

1-aksioma: Absolyut qattiq jismga ta’sir qiluvchi ikki kuch miqdor jihatidan teng, qarama-qarshi yo‘nalgan va bir to‘g‘ri chiziqda yotsagina, jism tinch holatda bo‘ladi.



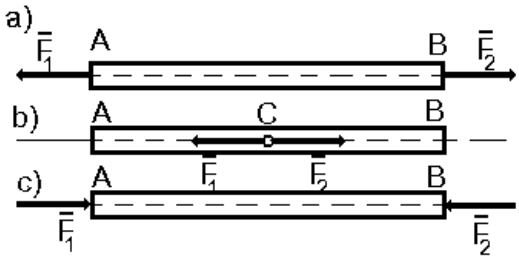
1.8-shakl.

2-aksioma: Biror jismga qo‘yilgan kuchlar sistemasiga qo‘shimcha ravishda o‘zaro muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini qo‘shsak yoki ularni sistemadan olib tashlasak, bu kuchlar sistemasining jismga ta’siri o‘zgarmaydi.



1.9-shakl.

3-aksioma: Agar kuchni o‘z ta’sir chizig‘i bo‘ylab bir nuqtadan ixtiyoriy ikkinchi nuqtaga ko‘chirsak, jismning mexanik holati o‘zgarmaydi.



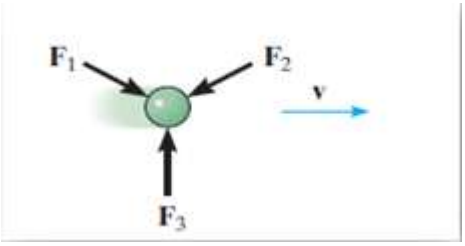
1.10-shakl.

4-aksioma: Muvozanat holatida bo‘lgan, shakli o‘zgaruvchan (deformatsiyalanuvchan) jism, qotib (absolyut qattiq holatga o‘tib) qolsa, uning muvozanat holati saqlanib qoladi.

Mazkur aksioma absolyut qattiq jismga qo‘yilgan kuchlarning muvozanat shartlari deformatsiyalanadigan jismlarga ham taalluqli ekanligini bildiradi. Bu aksioma yordamida shakli o‘zgaradigan arqon, ip, tros va sterjenlarning, ba’zi hollarda suyuqliklarning muvozanatiga oid masalalar yechishda foydalanish mumkin.

D. <u>MEXANIKA QONUNLARI.</u> Nazariy mexanika fani ”Nyuton qonunlari” deb ataluvchi tabiyat qonunlariga asoslanadi va barcha chiqarilgan qonun-qoidalar, formulalar shu qonunlar orqali isbotlanadi. Aslida bu qonunlar mohiyati haqida Nyutondan ancha oldin yashab o‘tgan olimlar Aristotel va Galiley asarlarida uchraydi. Faqat ular yuqoridagi qonunlarni tartibga solib, formulalar o‘rqali ifodalamagan. Mazkur qonunlar moddiy nuqtaning harakatiga nisbatan aytilgan bo‘lib, jismlarning turli harakatida ularga albatta murojaat qilinadi [2].

Birinchi qonun (inersiya qonuni): agar moddiy nuqta tinch holatda yoki o‘zgarmas tezlik bilan to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda bo‘lsa, ta’sir qiluvchi kuchlar albatta muvozanatlashuvchi kuchlar bo‘ladi(1.11-shakl).



1.11-shakl.

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$, ya’ni $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlar muvozanatlashuvchi kuchlar.

Ikkinchi qonun (mexanikaning asosiy qonuni): moddiy nuqtaga muvozanatlashmagan kuch ta’sir etsa, uning olgan tezlanishi va massasi shu kuchga proportsional bo‘ladi(1.12-shakl).

1.12-shakl.

Ushbu qonunning vektor ko‘rinishdagi matematik ifodasi, quyidagicha yoziladi

$$m\vec{a}=\vec{F}. \qquad (1.11)$$

Agar moddiy nuqtaga bir vaqtning o‘zida bir nechta kuchlar ta’sir etsa, kuchlarning parallelogrammi haqidagi qoidaga asosan, ular shu kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng bo‘lgan bitta teng ta’sir etuvchi $\vec{R}$ -kuchga ekvivalent bo‘ladi, u holda mexanikaning asosiy qonuni, quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$m\vec{a} = \vec{R}\text{, yoki} \quad m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\,. \qquad (1.12)$$

Uchinchi qonun (ta’sir va aks ta’sir qonuni): ikki moddiy nuqtaning o‘zaro ta’sir kuchlari qiymat jihatidan teng, yo‘nalishi qarama-qarshi va kollinear (bir to‘gri chiziqda yotgan) kuchlar bo‘ladi(1.13-shakl):

1.13-shakl.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \qquad (1.13)$$

Nyuton moddiy nuqtaning harakati haqidagi uch qonunlarini umumlashtirib, ikki moddiy nuqtaning gravitatsion maydonidagi tortilish qonunini yaratdi.

Nyutonning gravitatsiyon tortilish qonuni: ikki moddiy nuqtaning gravitatsion maydonidagi tortilish kuchi ularning massalariga to‘g‘ri proporsional, ular orasidagi masofaga teskari proporsiyonal:

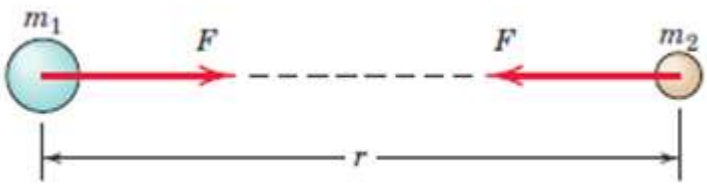
$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad , \qquad (1.14)$$

bu yerda F-ikki moddiy nuqtaning o‘zaro tortishish kuchi;

G-gravitatsion doimiysi, tajriba yordamida aniqlangan qiymati $G = 0{,}6673$ м^3/кг·сек^2;

m_1,m_2- moddiy nuqtalarning massasi;

r- moddiy nuqtalar orasidagi masofa.



1.14-shakl.

Og‘irlik kuchi: agar moddiy nuqta Yer shariga yaqin bo‘lsa, bu tortishish kuchi Yerning tortishish kuchiga aylanadi. (1.14) ifodadagi F o‘rniga P, m_1=m va m_2=M_{yer}, r- Yerning markazidan jismgacha bo‘lgan masofa deb,

$$P = G \cdot \frac{m \cdot M_{yer}}{r^2} \qquad (1.15)$$

va $$g=G\cdot\frac{M_{yer}}{r^2} \qquad (1.16)$$

ni g-erkin tushish tezlanishi (gravitatsion tezlanish) bilan almashtirib,

$$P=mg \qquad (1.17)$$

hosil bo‘ladi. Demak r masofaning o‘zgarishiga qarab, og‘irlik kuchi $\vec{P}$ ham o‘zgaradi(1.15-shakl). Ko‘p muhandislik hisoblarda og‘irlik kuchi Yer sharining suv sathiga va 45° geografik kengligidagi o‘rni “***standart holat joyi***” deb, g=9,81 m/sek^2 olinadi.

1.15-shakl.

Kosmonavtlarning og‘irligi Yerning gravitatsion maydonidan uzoqlashgan sari kamayadi.

1.3. KUCHLARNING TURLARI.

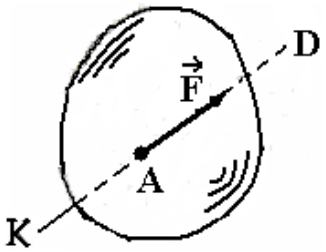
Kuchning yo‘nalishi va qo‘yilish nuqtasi jismlarning mexanik ta’siriga va ularning bir-biriga nisbatan joylashishlariga bog‘liq. Kuchning xalqaro birliklar sistemasidagi o‘lchov birligi N (Nyuton) qabul qilingan. (1.10) formula bo‘yicha

$$1\ N = 1\ kg\cdot 9{,}81\ m/sek^2 = 9{,}81\ kg\cdot m/sek^2$$

ga teng bo‘ladi.

Kuch vektor kattalik bo‘lganligi sababli, hamma vektorlar kabi, uning ustiga chiziqcha qo‘yilgan bosh harflar bilan belgilanadi (masalan,$\vec{F}$), ba’zi hollarda vektor belgisi “qalin” **F** ko’rinishida belgilanadi, kuchning son qiymati-modulini - $|\vec{F}|$ absolyut qiymat shaklida yoki ustida chiziqcha qo‘yilmagan holda, ya’ni oddiy - F harfi bilan belgilanadi. Shaklda kuch yo‘naltirilgan “strelka”

sifatida tasvirlanadi (1.16-shakl). Strelkaning uzunligi, tanlab olingan masshtabga bog‘liq ravishda uning son qiymatini belgilaydi. 1.16-shakldagi A nuqta kuchning jismga qo‘yilgan nuqtasini belgilaydi, KD to‘g‘ri chizig‘i kuch yotgan chiziqni belgilaydi, bu chiziqni mexanikada ***kuchning ta’sir chizig‘i*** deb ataladi.



1.16-shakl.

Umuman olganda, kuchlar turli xil va juda ko‘p faktorlarga bog‘liq bo‘ladi. Masalan shamol kuchi yoki Yer silkinishidagi seysmik kuchlar va h.k. Matematika tushunchasi bo‘yicha kuch funksiyasi murakkab bo‘ladi:

$$\vec{F}=\vec{F}(t,x,y,z,\vec{v},\vec{a},C,\ldots)\ , \qquad (1.18)$$

bu yerda t-vaqt; x,y,z- koordinatalar; $\vec{v}$- tezlik, $\vec{a}$- tezlanish,C-harorat.

Mexanikada kuch tushunchasi ham ideallashtiriladi, ya’ni soddalashtiriladi. Masalan yuqorida aytganimizdek, jismlarning og‘irlik kuchi Yer markazidan jismgacha bo‘lgan masofaga bog‘liq bo‘lib, (1.17) formula bo‘yicha aniqlanadi va g=9,81 m/sek^2 miqdor bilan o‘zgarmas kuch sifatida olinadi. Xuddi shunday muhitning qarshilik kuchi $\vec{v}$- tezlikka, prujinaning cho‘zilish-siqilish kuchi x-koordinataga va h.k. Bundan tashqari, kuchlarning turlari bilan tanishmasdan mexanikani o‘rganish ancha tushunmovchiliklarga olib kelishi mumkin.

Kuchlar sistemasi - agar bir vaqtning o‘zida bir jism (yoki jismlar)ga bir nechta kuchlar ta’sir etgan holga aytiladi va kuchlar to‘plami ko‘rinishida belgilanadi:

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3,\ldots,\vec{F}_n),\quad \text{yoki}\quad \{\vec{P}_1,\vec{P}_2,\vec{P}_3,\ldots,\vec{P}_k\}.$$

Tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi - kuchlarning ta’sir chiziqlari bir tekislikda yotgan holda bo‘ladi va tekislikda berilgan kuch quyidagicha belgilanadi:

$$\vec{F}=F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}\ , \qquad (1.19)$$

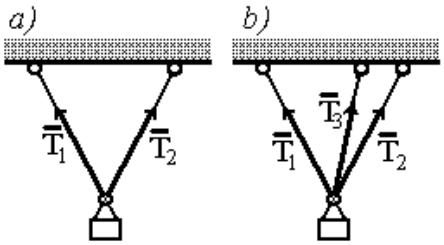
yoki ***fazoviy kuchlar sistemasi*** - kuchlarning ta'sir chiziqlari uch o'lchovli fazoda bo'lsa,

$$\vec{F}=F_x \cdot \vec{i}+F_y \cdot \vec{j}+F_z \cdot \vec{k} \quad , \qquad (1.20)$$

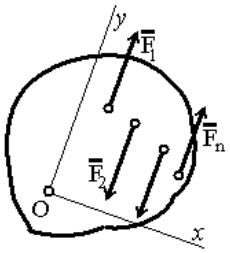
bunda F_x, F_y, F_z-kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari,

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$-koordinata o'qlarining yo'nalishlarini aniqlovchi birlik vektorlar.

Agarda barcha kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtadan o'tsa, bunday kuchlar ***kesishuvchi kuchlar sistemasi*** deyiladi (1.17,a,b-shakl). Kuchlarning ta'sir chiziqlari o'zaro parallel holda bo'lsa, bunday kuchlar ***parallel kuchlar sistemasi*** deb ataladi(1.18-shakl).



1.17- shakl .



1.18-shakl.

Yoyilgan kuchlar deb, biror yuzaga (yoki kesmaga) ta'sir qiluvchi parallel kuchlar sistemasiga aytiladi. Masalan, idishdagi suyuqlikning idish tubiga va devorlariga bosim kuchi. Yoki shamolning bino devorlariga va tomiga ta'siri. Aksariyat muhandislik hisoblash ishlarida birorta yuza bo'ylab ma'lum qonuniyat bo'yicha taqsimlangan yuklarni uchratish mumkin. Bir tekislikda joylashgan shunday yuklardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

Tekislikda taqsimlanib (yoyilib), joylashgan yuklar ***intensivligi*** bilan xarakterlanadilar, ya'ni har birlik masofaga tushayotgan kuch bilan xarakterlanadi. Intensivlik kuchning masofaga (uzunlikka) nisbatiga teng, (N/m) bilan o'lchanadi.

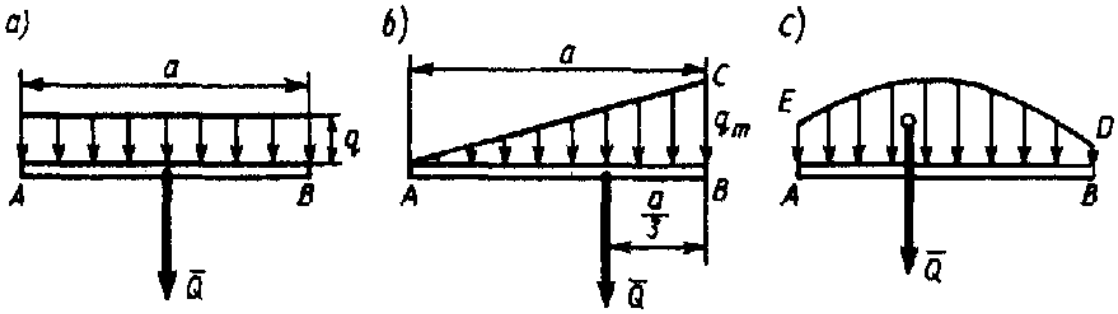
1) ***Ma'lum kesmada tekis yoyilgan kuchlar*** (1,19,a-shakl). Bunday kuchlar sistemasi uchun intensivlik q o'zgarmas qiymatga ega bo'ladi. Statik hisoblash ishlarida bunday kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchi $\vec{Q}$ kuch bilan almashtiriladi.

Bu kuchning miqdori

$$Q=a\cdot q \qquad (1.21)$$

formula orqali aniqlanadi va shu $\vec{Q}$ kuch AB kesmaning o‘rtasiga qo‘yiladi.

2) ***Ma‘lum kesmada chiziqli qonun bilan yoyilgan o‘zgaruvchi kuchlar*** (1.19,b-shakl). Bunga suvning plotina devoriga ko‘rsatadigan bosim kuchi misol bo‘lishi mumkin. Suvning bosim kuchining maksimumi suvning ostki yuzasida, minimumi (nol qiymati) suvning sathida bo‘ladi.



1.19-shakl.

Bunday kuchlar sistemasi uchun intensivlik *q* o‘zgaruvchan qiymatga ega bo‘lib, noldan maksimumgacha o‘zgaradi. Statik hisoblash ishlarida bunday kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi Q -ning qiymatini, bir jinsli ABC uchburchakli plastinaning og‘irlik markazini aniqlash kabi hisoblanadi.

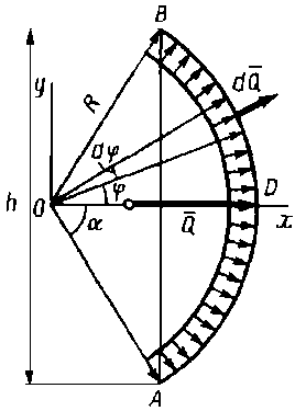
Bu kuch moduli bo‘yicha,

$$Q=a\cdot q/2 \qquad (1.22)$$

formula orqali aniqlanib, Q kuch ABC uchburchakning maksimum tomonidan *a/3* masofada qo‘yiladi.

3) ***Ma‘lum kesmada ixtiyoriy qonun bilan taqsimlangan o‘zgaruvchi kuchlar*** (1.19,c-rasm). Bunday kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi Q kuchning moduli shu ABDE shaklning yuzasiga bog‘liq bo‘lib, uning ta’sir chizig‘i og‘irlik markazini kesib o‘tadi.

4) ***Aylananing yoyi bo‘ylab bir xilda taqsimlangan kuchlar*** (1.20-shakl). Bunday kuchlarga silindrsimon idishlarga quyilgan suyuqliklarning yon devorlariga ko‘rsatadigan gidrostatik bosim kuchi misol bo‘la oladi.



1.20-shakl.

Agar yoyning radiusi R va ∠BOD =∠AOD=α bo‘lsin. OD- simmetriya o‘qi bo‘lib, *Ox* o‘qi shu o‘q bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lsin. Yoyga ta’sir qilayotgan kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta’sir etuvchisi $\overline{Q}$, albatta, shu simmetriya o‘qi *Ox* bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Uning moduli $Q=Q_x$.

Teng ta’sir etuvchi Q kuchning son qiymatini aniqlash uchun, yoyda kichkina element tanlab olamiz, uning o‘rni φ burchak orqali belgilanadi, elementar yuzachaning uzunligi ds=R·dφ bo‘ladi. Shu elementar yuzachaga ta’sir qilayotgan kuchning miqdori dQ=q·ds=q·R·dφ -ga teng bo‘lib, uning *Ox* o‘qidagi proyektsiyasi $dQ_x=dQ\cdot\cos\varphi=q\cdot R\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi$ bo‘ladi. $\overline{Q}$ kuchning moduli

$$Q = Q_x = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ = qR\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = 2qR\sin\alpha$$

1.20-shakldan ko‘rinib turibdiki, R·sinα=AB/2 bo‘lgani uchun

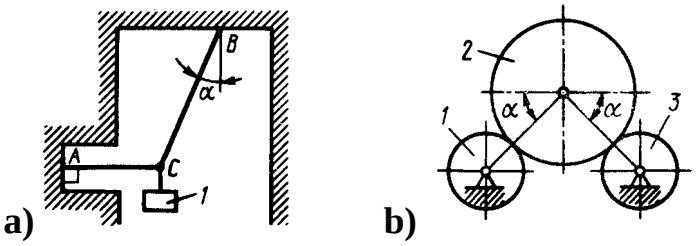
$$Q=q\cdot h \ , \qquad (1.23)$$

bu yerda h=AB, AB yoyni tortib turuvchi vatarning uzunligi; *q*-yukning intensivligi.

1.4. BOG‘LANISHLAR VA BOG‘LANISH REAKSIYA KUCHLARI.

Nazariy mexanikada berilgan jismning boshqa jismlarga nisbatan holatiga va harakatiga qarab, erkin va erkin bo‘lmagan jismlarga ajratiladi. Agar jism fazoning istalgan joyiga harakatlana olsa, bunday jism ***erkin jism*** deyiladi. Jismning holati yoki harakati biror to‘siq bilan (yoki ikkinchi jism bilan) chegaralangan bo‘lsa,

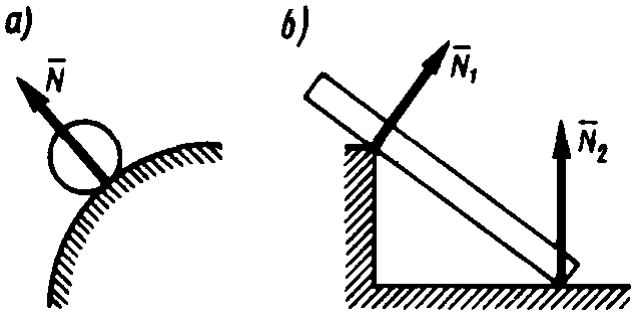
bunday jism ***erkin bo‘lmagan jism*** (yoki ***bog‘lanishdagi jism)*** deyiladi. Masalan, arqonlar yordamida osib qo‘yilgan 1-yuk (1.21-shakl,a), yoki 1- va 3- g‘ildiraklar yordamida muvozanatda ushlab turilgan 2-shar (1.21-shakl,b).



1.21-shakl.

Erkin bo‘lmagan jism holatini yoki harakatini chegaralab turuvchi to‘siqlar (arqonlar yoki g‘ildiraklar) ***bog‘lanishlar*** deb ataladi. Bu jismni erkin jismga aylantirish uchun bog‘lanishlarni tegishli kuchlar bilan almashtiriladi. Bog‘lanishlarni almashtiruvchi kuchlar ***reaksiya kuchlari*** deb ataladi. Reaksiya kuchlarining yo‘nalishlari va soni bog‘lanishlarning turlariga bog‘liq. Sodda va ko‘p uchraydigan bog‘lanishlar bilan tanishamiz:

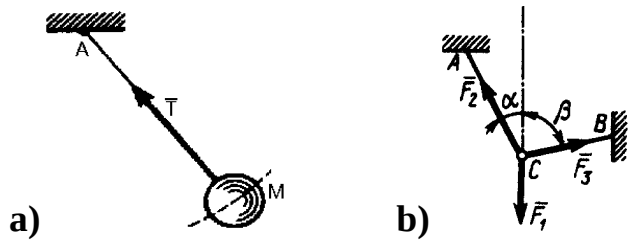
A. <u>ABSOLYUT SILLIQ SIRT.</u> Ishqalanish kuchi bo‘lmagan silliq sirt bilan chegaralangan jismlarga $\vec{N}$ - ***normal bosim kuchi*** ta’sir qiladi. Bu kuch silliq tekislikka perpendikulyar (1.22-shakl,b), yoki silliq sirtlarga o‘tkazilgan urinma o‘qqa perpendikulyar yo‘nalgan bo‘ladi (1.22-shakl,a).



1.22-shakl

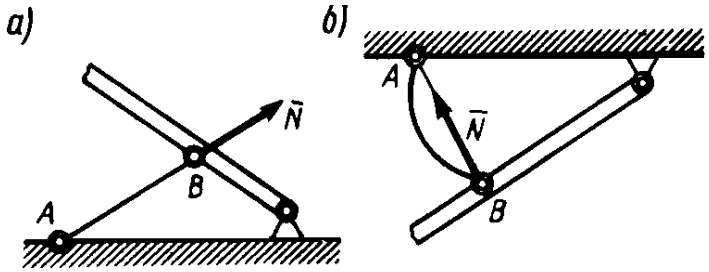
B. <u>ARQON, IP, TROS VA VAZNSIZ STERJEN</u>. Agar jism cho‘zilmaydigan arqon, ip , tros (po‘lat arqon) yoki sterjen yordamida ushlab

turilgan bo‘lsa, ularda $\vec{T}$ – ***taranglik kuchi*** hosil bo‘ladi. Bu kuch osilish nuqtasiga tomon yo‘nalgan bo‘ladi (1.23-shakl,a ,b).



1.23-shakl.

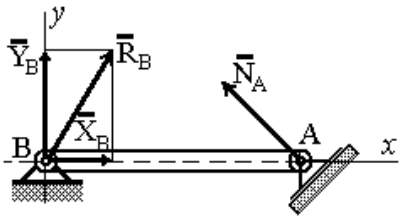
Vaznsiz sterjen deb, og‘irligi osib qo‘yilgan yuk og‘irligidan bir necha marta kam bo‘lgan uzun jismga aytiladi. Vaznsiz sterjenlarda ham bitta kuch hosil bo‘ladi, faqat uning siqilishga yoki cho‘zilishga qarshi ishlayotganini hisobga olish lozim. Egri sterjenlar ham bundan mustasno emas, bu holda taranglik (yoki siqilish) kuchi sterjen o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi (1.24 -shakl,a,b).



1.24-shakl

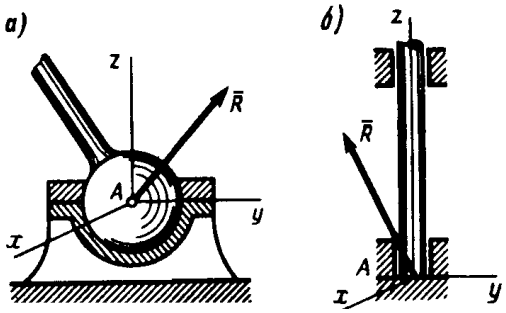
D. <u>SILINDRIK SHARNIR.</u> Mashina va mexanizmlarning juda ko‘p qismlari silindrik sharnir yordamida mahkamlanadi. Bunday sharnirlarga podshipniklar, boltli yoki parchin mixli va boshqacha bog‘lanishlar kiradi. Masalan ***qo‘zg‘aluvchan*** A ***sharnir*** va ***qo‘zg‘almas*** B ***sharnir*** (1.25-shakl). A tayanchda bitta reaksiya kuchi $\overrightarrow{N_A}$ (bu kuch tayanch tekisligiga perpendikulyar yo‘nalgan) va B tayanchda yo‘nalishi oldindan noma’lum $\vec{R}_B$ hosil bo‘ladi. Bu tayanchning $\vec{R}_B$ -reaksiya kuchi sharnirning o‘qiga qo‘yilgan bo‘lib, uning yo‘nalishi chizma tekisligida ixtiyoriy ravishda yo‘nalgan bo‘lishi mumkin. Shu sababli masalalarni yechishda $\vec{R}_B$-vektor o‘rniga, koordinata o‘qlari bo‘yicha yo‘nalgan tashkil etuvchilari $\vec{X}_B$ va $\vec{Y}_B$ lardan foydalaniladi. Agarda masalani

yechib, X_B va Y_B larning analitik ifodalari aniqlansa, $\vec{R}_B$-vektorning moduli $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$ - formula orqali aniqlanadi.



1.25-shakl.

E. <u>FAZOVIY (SFERASIMON) SHARNIR</u>. Sferasimon sharnir bilan biriktirilgan jismlar A nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy o‘q atrofida xoxlagan tomonga aylanishi mumkin. U holda jismning A nuqtasi (1.26-shakl) qo‘zg‘almas bo‘ladi. Shu sababli, *sferasimon sharnirdan iborat bog‘lanishning reaksiya kuchi* - $\bar{R}$, *A nuqtaga qo‘yilgan bo‘lib, u fazoning ixtiyoriy tomoniga yo‘nalgan bo‘lishi mumkin.* Bu holda ham yuqoridagi kabi $\bar{R}$ - reaksiya kuchining na modulini va Axyz o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklarni oldindan aniqlab bo‘lmaydi.



1.26-shakl

1.26,b- shaklda tasvirlangan ***tovon***-tayanch podshipnikdan iborat bog‘lanishning reaksiyasi $\vec{R}$ -ning fazodagi yo‘nalishini ham oldindan aniqlab bo‘lmaydi. Masalalar yechishda uning o‘rniga fazoviy tashkil etuvchilari- R_x, R_y, R_z olinadi va Pifagor formulasidan $R=\sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}$ aniqlanadi.

Umuman olganda, texnikada va inshootlarda juda ko‘p bog‘lanishlar mavjud (1.27-shakl). Ularning hammasini tahlil qilish juda ko‘p vaqtni talab qiladi. Shuning uchun, eng ko‘p uchraydiganlari haqida keyingi mavzularda ma’lumot beriladi.

1.27-shakl.

Nazorat savollari:

1) Skalyar va vektor qiymatlar deb qanday kattaliklarga aytiladi ?
   Skalyar va vektor qiymatlarga misollar keltiring ?
2) Kuch vektorining aniqlanish xususiyatlarini ayting ?
3) Kuchning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari qanday hisoblanadi ?
4) Kuchlarni qo‘shishning qanday usullari bor ?
5) Ikki kuchning vektorli (geometrik) qo‘shish qanday amalga oshiriladi ?
6) Kuchlarni analitik qo‘shish uchun kuchlarning qanday xususiyatlari berilishi lozim ?
7) Nazariy mexanikaning tarkibiy qismlarini ayting ?
8) Moddiy nuqta deb qanday jismga aytiladi ?
9) Absolyut qattiq jism deb qanday jismga aytiladi ?
10) Mexanikaning asosiy 4 ta o‘lchovlarini sanab bering ?
11) Mexanikaning (statikaning) aksiomalarini aytib bering ?
12) Klassik mexanikaning qonunlarini aytib bering ?
13) Mexanikada uchraydigan kuchlarning turlarini sanab bering ?
14) Bog‘lanish deb nimaga aytiladi ?
15) Erkin bo‘lmagan jismni erkin jismga aylantirish uchun nima qilish lozim?
16) Erkin jism deb qanday jismga aytiladi ?
17) Bog‘lanish turlarini ayting ?

II.BOB.

STATIKA

BOBNING MAQSADI:

- Moddiy nuqtaning muvozanat holatini o‘rganish.
- Qattiq jismning tekislikdagi va fazodagi muvozanat tenglamalarini tuzish va amalda qo‘llash.
- Qattiq jismning og‘irlik markazini aniqlash va og‘irlik markazining texnikadagi va qurilishdagi ahamiyatini tushuntirish.
- Jismlar sistemasining muvozanatini o‘rganish. Murakkab konstruksiyalarning statik hisobini bajarish.
- Fermalardan iborat konstruksiyalarning statik hisoblash.
- Jismlarning o‘zaro ta’sirida ishqalanish kuchini hisobga olish va amalda qo‘llashni o‘rgatish.

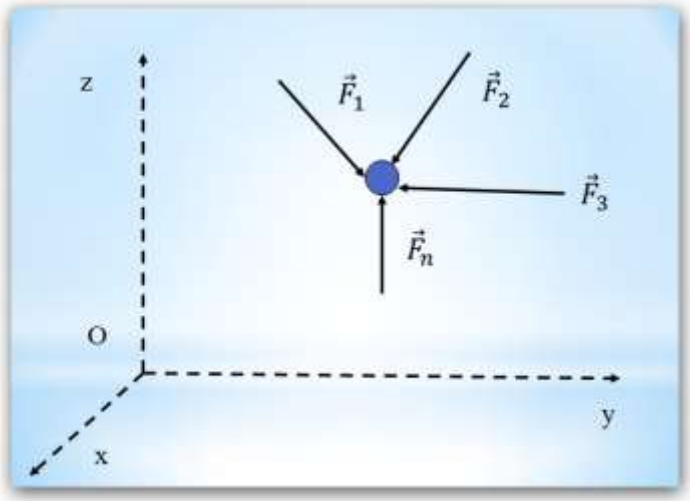
2.1. MODDIY NUQTANING MUVOZANAT HOLATI.

Agar moddiy nuqta boshqa jismlarga nisbatan tinch holatda yoki o‘zgarmas tezlik bilan harakat qilsa, ***moddiy nuqta muvozanat holatida*** deyiladi. Ko‘pincha “muvozanat” yoki “statik muvozanat” deganda faqat “tinch holat” tushiniladi. Aslida esa, Nyutonning 1-qonuniga asosan, agar moddiy nuqta muvozanatda bo‘lsa, unga ta’sir qiluvchi kuchlar yig‘indisi nolga teng.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \qquad (2.1)$$

bunda $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}$ – moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlarning yig‘indisi (2.1.-shakl). Moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlarni ***kesishuvchi kuchlar sistemasi*** deb hisoblash mumkin.

Ammo yuqoridagi tenglama muvozanatning zaruriy shartidir, yetarli sharti emas. Chunki Nyutonning 2-qonunidan $m\vec{a}=0$ bo‘lishi moddiy nuqtaning tezligi nolga yoki o‘zgarmas qiymatga teng bo‘lishi kelib chiqadi. Shuning uchun moddiy nuqta tinch holatda yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda bo‘ladi.



2.1-shakl.

Demak moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlar sistemasining muvozanat holatda bo‘lishligi uchun, ularning teng ta’sir etuvchisi, ya’ni ularning bosh vektori nolga teng bo‘lishi zaruriy hisoblanadi,

$$\vec{R}=0 \qquad \text{yoki} \qquad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k=0 \ . \tag{2.2}$$

Ushbu muvozanat shartlarning geometrik va analitik ifodalari quyidagicha bo‘ladi:

1. ***Muvozanatning geometrik sharti***. Kuchlar sistemasining bosh vektori $\vec{R}$ kuch ko‘pburchagini yopuvchi vektor bo‘lganligi sababli (1.4.- shakl), $\vec{R}$-nolga teng bo‘lishi uchun, oxirgi kuchning uchi birinchi kuchning boshi bilan uchrashishi shart bo‘ladi, ya’ni kuchlar ko‘pburchagi o‘z-o‘zidan yopiladi.

Demak, *kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo‘lishi uchun, shu kuch vektorlaridan qurilgan kuch ko‘pburchagi o‘z-o‘zidan yopiq ko‘pburchakni tashkil etishi zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.*

2. ***Muvozanatning analitik shartlari***. Bosh vektorning qiymati analitik usulda quyidagi formula bilan aniqlanadi,

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} \ . \tag{2.3}$$

Ildiz ostidagi, yig‘indilarning har biri musbat sonlardan iborat bo‘lganligi sababli, har bir yig‘indi bir vaqtning o‘zida $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$, ya’ni (2.2) formulaga asosan,

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad \sum F_{ky} = 0; \qquad \sum F_{kz} = 0; \qquad (2.4)$$

bo‘lgandagina bosh vektor R - ning moduli nolga teng bo‘ladi.

(2.4) tenglamalar sistemasi moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlar sistemasining muvozanat tenglamasi deyiladi, ya’ni *fazoda joylashgan moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlar sistemasining muvozanatda bo‘lishi uchun, kuchlarning uchta koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarining har bir o‘qdagi yig‘indilari nolga teng bo‘lishlari zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.*

Agar moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlar bir tekislikda joylashgan bo‘lsa, unday kuchlar *tekislikda joylashgan kuchlar sistemasi* deb ataladi va ularning muvozanat tenglamalarining soni ikkita bo‘ladi,

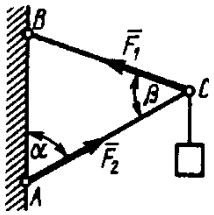
$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \qquad (2.5)$$

3. Uchta kuch haqidagi teorema. Ayrim hollarda masalalarni uchta kuch haqidagi teorema orqali yechish qulay bo‘ladi: *agar moddiy nuqtaga bir tekislikda yotgan va o‘zaro parallel bo‘lmagan uchta kuch ta’sir etib, moddiy nuqta muvozanat holatida bo‘lsa, bu kuchlardan tuzilgan uchburchak yopiq bo‘ladi.*

Bu teoremani isbotlash shart emas, sababi uchta kuchning ta’sir etishi n ta kuchlar ta’sir etishining hususiy holi hisoblanadi.

Moddiy nuqta muvozanatini amaliy masalalar yechish bilan mustahkamlaylik.

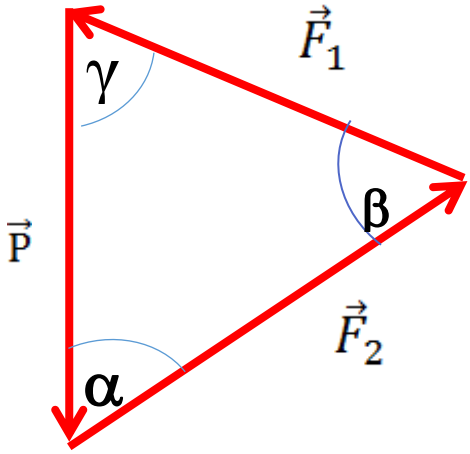
1-masala: Og‘irligi 100 N bo‘lgan yuk AC va BC vaznsiz sterjenlar yordamida devorga mahkamlangan. Agar AC sterjen devor bilan $\alpha=60°$, sterjenlar o‘zaro $\beta=45°$ burchak tashkil qilgan bo‘lsa, AC sterjenning siqilishi va BC sterjendagi zo‘riqishi hisoblansin.



2.2-shakl.

<u>Yechish.</u>* 1) *Geometrik usul:

C sharnirning muvozanatini ko‘ramiz. Unga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}$ kuchlar ta’sir etadi va 3 ta kuchlar haqidagi teoremadan kuchlar uchburchagi yopiq bo‘lishi shart.



2.3-shakl.

(1.5) tenglamadan foydalanib,

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin 75^\circ}. \qquad (1)$$

Bundan $$F_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot P = \frac{0{,}866}{0{,}707}\cdot 100 = 122{,}5\ \text{N},$$

$$F_2 = \frac{\sin 75^\circ}{\sin\beta}\cdot P = \frac{0{,}966}{0{,}707}\cdot 100 = 136{,}6\ \text{N}.$$

2) Analitik usul:

Gorizontal Ax va vertikal Ay koordinata o‘qlarini tanlab olib, (2.5) muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad P_x + F_{1x} + F_{2x} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad P_y + F_{1y} + F_{2y} = 0\,, \tag{3}$$

kuchlarning proyeksiyalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

2.1-jadval.

P_x	F_{1x}	F_{2x}	P_y	F_{1y}	F_{2y}
0	$-F_1 \cdot \cos 15°$	$F_2 \cdot \cos 30°$	- P	$F_1 \cdot \cos 75°$	$F_2 \cdot \cos 60°$

Tenglamalarga qo‘yib,

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad -F_1 \cdot \cos 15° + F_2 \cdot \cos 30° = 0, \tag{4}$$

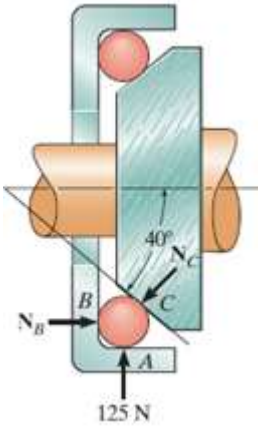
$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -P + F_1 \cdot \cos 75° + F_2 \cdot \cos 60° = 0, \tag{5}$$

birinchi tenglamadan $F_1 = \frac{\cos 30°}{\cos 15°} \cdot F_2 = \frac{0{,}866}{0{,}9659} \cdot F_2 = 0{,}8966\, F_2$ va ikkinchi tenglamaga qo‘yib,

$$-100 + 0{,}2588 \cdot 0{,}8966\, F_2 + 0{,}5 F_2 = 0$$

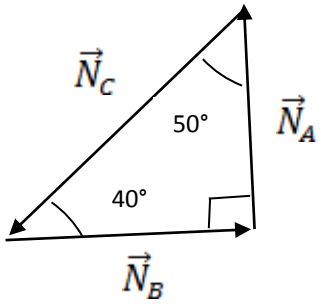
bundan F_2 = 136,6 N , F_1 = 122,48 N.

<u>2-masala:</u> Konussimon podshipnik sharchasiga uch tomondan bosim kuchlari $\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_C$ ta’sir etadi. Agar ularnung bittasi N_A=145 N va qiyalik burchagi 40° ma’lum bo‘lsa, qolgan bosim kuchlarining qiymatini toping. Sharchaning og‘irlik kuchi juda kichik bo‘lganligi uchun hisobga olinmasin.



2.4-shakl.

Yechish.*1) *Geometrik usul: Bosim kuchlarining vektorlarini parallel ko‘chirib, kuchlar uchburchagini quramiz:



2.5-shakl.

Sinuslar teoremasidan foydalanib,

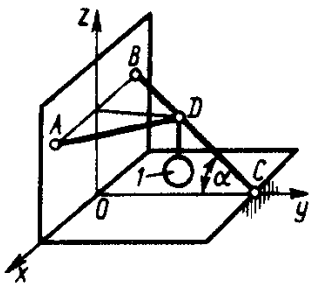
$$\frac{N_A}{\sin 40°} = \frac{N_B}{\sin 50°} = \frac{N_C}{\sin 90°}. \qquad (1)$$

Oxirgi proporsiyadan ikkita noma’lum bosim kuchlarini aniqlaymiz:

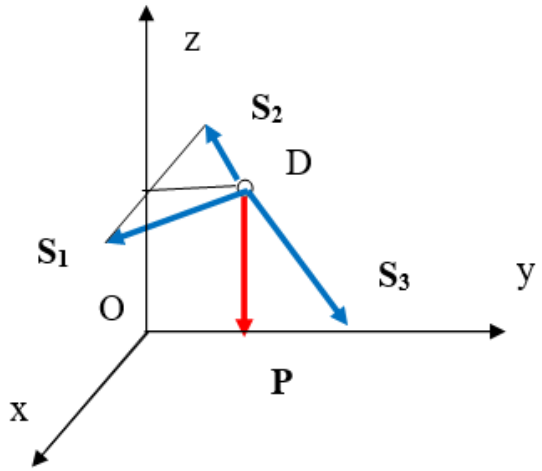
$$N_B = \frac{\sin 50°}{\sin 40°} \cdot N_A = \frac{0{,}766}{0{,}643} \cdot 145 = 172{,}74\ N,$$

$$N_C = \frac{\sin 90°}{\sin 40°} \cdot N_A = \frac{1}{0{,}643} \cdot 145 = 225{,}51\ N.$$

3-masala: Uchta sterjen AD, BD va CD sharnirlar bilan mahkamlangan bo‘lib, D sharnirga 20N li yuk osilgan bo‘lsa, sterjenlarning zo‘riqishlarini toping (α=45°,∠ABD=∠BAD=30°).



a)



b)

2.6-shakl.

Yechish: Sterjenlarni cho'zilishga qarshi ishlayapdi deb faraz qilib, reaksiya kuchlarini D nuqtadan A,B,C nuqtalar tomonga yo'naltiramiz. Bu masalada 4 ta kuchlar qatnashgani uchun geometrik usulni qo'llab bo'lmaydi. Uni fazoviy kuchlarning muvozanati shartlarini (2.4) tuzib yechamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad S_1 \cos 30° - S_2 \cos 30° = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -S_1 \cos 60° - S_2 \cos 60° + S_3 \cos 45° = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad - S_3 \cos 45° - P = 0. \qquad (3)$$

(3) tenglamadan S_3 =-P/cos 45° = -20/0,707 = -28,3 N,

(1) tenglamadan $S_1 = S_2$ va (2) dan $S_2 = S_3 \cos 45°/2 \cos 60°$ =-20 N.

Manfiy ishoralar uchchala sterjenlarning siqilishga qarshi ishlayotganini bildiradi.

2.2. QATTIQ JISMNING MUVOZANAT HOLATI.

2.2.1. Yassi jismning muvozanati.

Qattiq jismning muvozanatini tekshirish ancha murakkab bo'lib, avval bir tekislikda joylashgan tekis jismning ("tekis yuza" yoki "tekis shakl") muvozanatini ko'ramiz. Keyin esa bu tushunchalarni fazoviy jismga umumlashtiramiz.

A. KESISHUVCHI KUCHLAR TA'SIRIDAGI MUVOZANAT.

Yassi jismning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar ta'siridagi muvozanati moddiy nuqtaning muvozanatiga keltiriladi. Jismga ta'sir etayotgan kesishuvchi kuchlarni 3-aksiomaga asosan bir nuqtaga to'plab, teng ta'sir etuvchi $\vec{R}$ vektor topiladi va (2.1) ga asosan nolga tenglanadi, ya'ni

$$\vec{R} = 0 \quad \text{yoki} \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 . \qquad (2.6)$$

Oxirgi tengliklarni tekislikdagi Oxy o'qlariga proyeksiyalab,

$$R_x = 0, \; R_y = 0 \qquad (2.7)$$

$$\text{yoki} \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \qquad (2.8)$$

Demak, kesishuvchi kuchlar ta'siridagi yassi jism muvozanatda bo'lishi uchun, kuch vektorlarining yig'indisi - teng ta'sir etuvchi kuch nolga teng bo'lishi zarur,

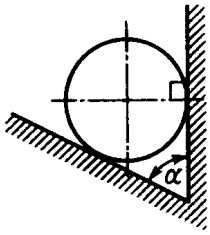
yoki kesishuvchi kuchlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi zarur.

Agar yassi jism uchta kesishuvchi kuchlar ta’sirida muvozanatda bo‘lsa, moddiy nuqta uchun aytilgan uchta kuch haqidagi teorema ham saqlanib qoladi.

Teorema: *Yassi jism parallel bo‘lmagan uchta kuch ta’sirida muvozanatda bo‘lsa, kuchlarning ta’sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi va kuch vektorlaridan qurilgan uchburchak yopiq bo‘ladi.*

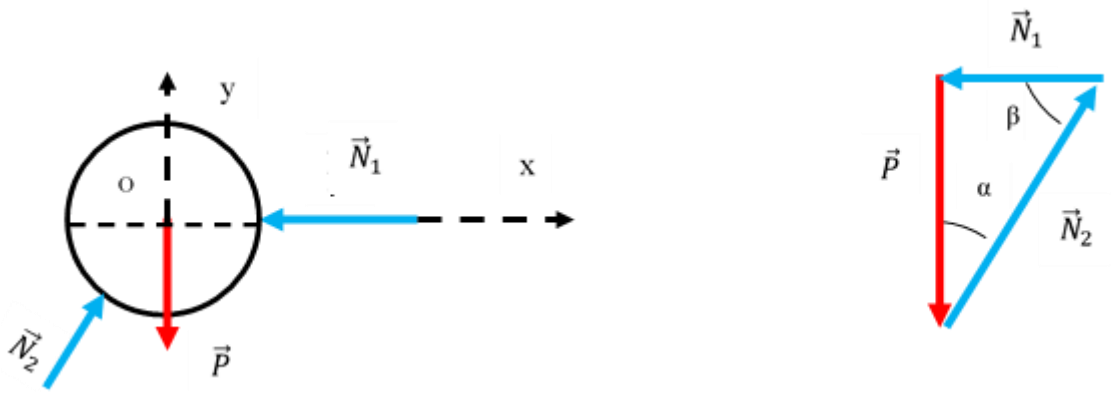
Yuqoridagi ma‘lumotlarni amalga tadbiq etamiz:

1-masala. Og‘irligi 100 N bo‘lgan bir jinsli shar o‘zaro α=60° burchak ostida joylashgan ikki tekislikka tiralgan holda muvozanatda turgan bo‘lsa, sharning tekisliklarga ko‘rsatayotgan bosim kuchlari aniqlansin.



2.7-shakl.

Yechish. 1) Geometrik usul. Kuchlar uchburchagini quramiz va sinuslar teoremasini qo‘llaymiz:



2.8-shakl.

bu yerda α=30°, β=60°

$$\frac{P}{\sin 60^\circ} = \frac{N_1}{\sin 30^\circ} = \frac{N_2}{\sin 90^\circ}, \qquad (1)$$

natijada

$$N_1 = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot P = \frac{0{,}5}{0{,}866} \cdot 100 = 57{,}74\ N$$

$$N_2 = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot P = \frac{1}{0{,}866} \cdot 100 = 115{,}47\ N\ .$$

2) Analitik usul. Gorizontal Ox va vertikal Oy koordinata o‘qlarini tanlab olib, (2.8) muvozanat tenglamalari tuziladi:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad P_x + N_{1x} + N_{2x} = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad P_y + N_{1y} + N_{2y} = 0\ , \tag{3}$$

kuchlarning proyeksiyalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

2.2-jadval.

F_{kx}	0	$N_1 \cdot \cos 180^\circ$	$N_2 \cdot \cos 60^\circ$
F_{ky}	- P	$N_1 \cdot \cos 90^\circ$	$N_2 \cdot \cos 30^\circ$

Tenglamalarga qo‘yib,

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad -N_1 + N_2 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -P + N_1 \cdot \cos 90^\circ + N_2 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

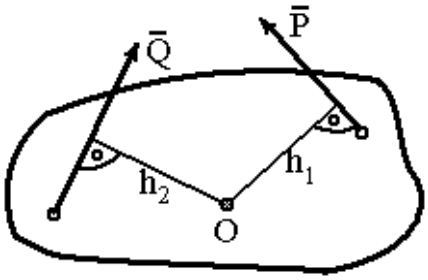
ikkinchi tenglamadan $N_2 = \frac{P}{\cos 30^\circ} = \frac{100}{0{,}866} = 115{,}47\ N$

va birinchi tenglamaga qo‘yib, $N_1 = N_2 \cdot \cos 60^\circ = 115{,}47 \cdot 0{,}5 = 57{,}74\ N$.

B. PARALLEL KUCHLAR TA’SIRIDAGI MUVOZANAT.

Ta’sir chiziqlari parallel bo‘l-gan kuchlarni qo‘shish yoki bir markazga keltirish va teng ta’sir etuvchisini topish uchun quyidagi tushunchalarni bilishimiz zarur:

1. Kuch momenti. Faraz qilaylik, tekis jism biror O nuqtasi bilan mahkamlab qo‘yilgan va $\vec{P}, \vec{Q}$ kuchlari ta’sirida aylanma harakat qilishi mumkin (3.3 -shakl). Mexanikada ta’sir etayotgan kuchning jism aylanma harakati qanday bo‘lishini ifodalaydigan kattalik “***kuch momenti***” deb ataladi. Boshqacha aytganda, jismning ilgarilanma harakatiga kuch asosiy sabab bo‘lsa, aylanma harakatda kuchdan tashqari uning qo‘yilish nuqtasi ham muhim ahamiyatga ega.



2.9-shakl.

Demak, ***kuch momenti deb,*** *kuch miqdori va kuch elkasi ko'paytmasiga teng bo'lgan skalyar miqdorga aytiladi:*

$$M_o(\vec{P}) = +P \cdot h_1 ,$$

$$M_o(\vec{Q}) = -Q \cdot h_2 .$$

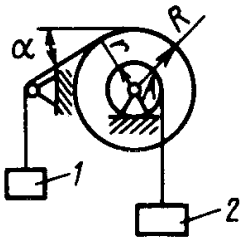
Musbat (+) va manfiy (-) ishoralarning qo'yilishiga sabab, berilgan kuchlar tekis jismni O nuqta atrofida ikki xil tomonga, soat mili aylanishi bo'yicha yoki soat mili aylanishiga teskari, aylantirishi mumkin. Nazariy mexanikada xuddi fizika fani kabi ***"o'ng vint qoidasi"*** – soat mili aylanishiga teskari harakatni (+), soat mili bo'yicha aylanishni (-) deb qabul qilingan. Chunki biz yashayotgan Yer shari ham shimoldan qaraganda o'z o'qi atrofida soat mili aylanishiga teskari aylanadi.

Kuch yelkasi *esa,* aylanish nuqtasi O dan kuchlarning ta'sir chizig'igacha bo'lgan ***eng yaqin masofa*** ekan. Oxirgi tengliklarni umumlashtirib, kuch momentining asosiy formulasiga ega bo'lamiz:

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h \quad . \qquad (2.9)$$

Kuch momentining birligi [N·m] hisoblanadi. Yuqoridagi tushunchani mustahkamlash uchun quyidagi misolni ko'raylik.

Misol : Radiuslari R = 0,3 m va r = 0,2 m bo'lgan g'ildirakga ikkita kuch P_1 = 8 N va P_2 = 10 N ta'sir etsa, uning qaysi tomonga aylanishini aniqlang.



2.10 -shakl.

Yechish: A nuqtaga nisbatan momentlarni hisoblaymiz

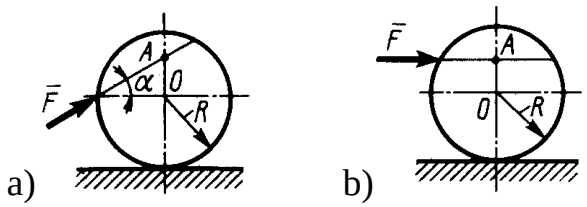
$$M_A(P_1) = +P_1 \cdot R = +8 \cdot 0{,}3 = +2{,}4\ N/m,$$

$$M_A(P_2) = -P_2 \cdot r = -10 \cdot 0{,}2 = -2\ N/m.$$

Demak, 2-yuk 1-yukdan og‘ir bo‘lishiga qaramay, g‘ildirak soat mili aylanishiga teskari tomonga aylanar ekan.

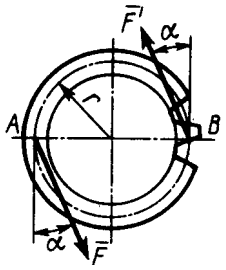
Agar kuchning ta’sir chizig‘i moment olinayotgan A nuqtadan -***moment markazidan*** o‘tsa, kuch yelkasi nolga teng va kuchning momenti ham nolga teng bo‘lishi mumkin (2.11-shakl,a,b), ya’ni

$$M_A(\vec{F}) = F \cdot 0 = 0.$$



2.11-shakl.

2. Juft kuch. Mashina va mexanizmlarda biror g‘ildirakni aylantirish uchun bitta emas, balki ikkita kuchlar qo‘yiladi. Bunung sababi, ish unumini oshirish uchun. Masalan, avtomobil rulini, velosiped charxini va tasmali uzatmalarda miqdorlari teng, yo‘nalishlari qarama-qarshi bo‘lgan ikkita kuchlar ishlatiladi. Mexanikada bunday kuchlar ***juft kuchlar*** deb nomlanadi va ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) ko‘rinishda belgilanadi (3.6. -shakl).



2.12-shakl.

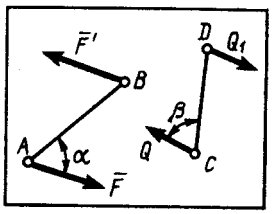
Demak, miqdorlari teng, yo‘nalishlari qarama-qarshi va bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan ikkita parallel kuch ***juft kuch*** deb ataladi. Juft kuchlar ham jismlarni aylantirishga harakat qilganligi uchun, ularning aylantirish kattaligi ham *juft momenti* bilan ifodalanadi. ***Juft kuch momenti*** deb, mos ishora bilan olingan juft

kuchlardan birining miqdori bilan juft kuchlar orasidagi eng yaqin masofasining ko‘paytmasiga teng bo‘lgan skalyar qiymatga aytiladi:

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot d = \pm F' \cdot d\ , \qquad (2.10)$$

bu yerda d=2r -g‘ildirak diyametri yoki ***juft yelkasi*** deb ataladi. Juft kuch momenti ham kuch momenti kabi [$N \cdot m$] birlikka ega.

Agar jismga bir necha juft kuchlar ta’sir etsa, ularning natijalovchisini (teng ta’sir etuvchisini) aniqlash uchun juft momentlarining algebraik yig‘indisini olish zarur:



2.13-shakl.

$$M = M(\vec{F}, \vec{F}') + M(\vec{Q}, \vec{Q}_1)\ .$$

Oxirgi tenglikni n-ta juft kuchlar $(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}'), \left(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}'\right), \ldots, (\vec{F}_n, \vec{F}_n{}')$ uchun umumlashtirish mumkin:

$$M = M_1(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}') + M_2(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}') + \ \ldots + M_n(\vec{F}_n, \vec{F}_n{}');$$

yoki qisqacha

$$M = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(\vec{F}_k, \vec{F}_k{}'\right). \qquad (2.11)$$

Juft kuchlarning texnikada ishlatilishi keng ko‘lamda bo‘lib, ularning quyidagi xususiyatlarini bilish talab etiladi:

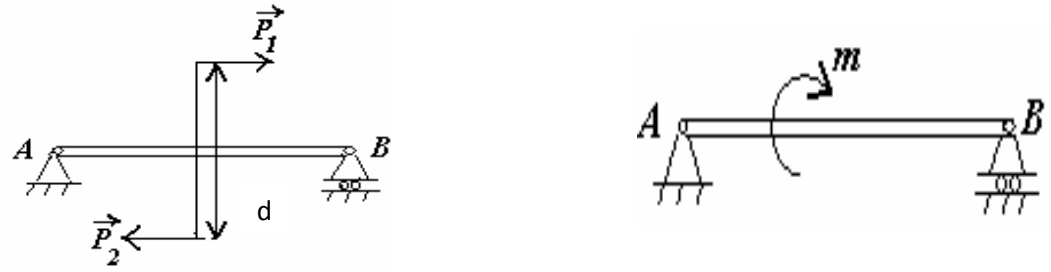
a) juft kuchning tashkil etuvchi kuchlarini ($\vec{F}$, $\vec{F}'$-larni) o‘z ta’sir chizig‘i bo‘ylab ixtiyoriy nuqtaga ko‘chirsak, ***juft momenti o‘zgarmaydi;***

b) juft momentining miqdori juftni tashkil etuvchi kuchlarga qurilgan ***paralellogramning yuziga teng***;

d) juft momenti miqdorini o‘zgartirmay uni ***ixtiyoriy yelkaga keltirish mumkin***;

e) juft momenti miqdorini o‘zgartirmay uni ***o‘z tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin***.

Nazariy mexanikada yuqoridagi xususiyatlarni hisobga olib, juft kuchni uning tashkil etuvchilari va juft elkasi ko‘rinishida ($P_1 = P_2 = 2\ N, d = 3\ m$) (2.14 -shakl,a), yoki soddaroq qilib, juft kuch momenti miqdori (M=6 N·m) va yo‘nalishi ko‘rsatiladi (2.14-shakl,b).

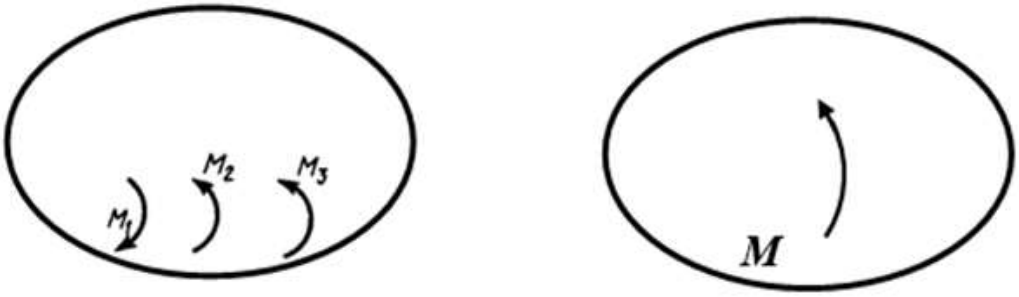


a) b)

2.14-shakl.

Juft kuch va uning momenti tushunchalarini mustahkamlash uchun quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz.

Misol: Tekis jismga uchta juft kuchlar sistemasi M_1=-4 $N{\cdot}m$, M_2=3 $N{\cdot}m$ va M_3=2 $N{\cdot}m$ ta’sir qilsa, ularni bitta juft kuch bilan almashtirish mumkinmi?



2.15-shakl.

Yechish. Juft kuchlarning teng ta’sir etuvchisi M ni aniqlash uchun berilgan juft momentlar miqdorlarini algebraik qo‘shamiz:

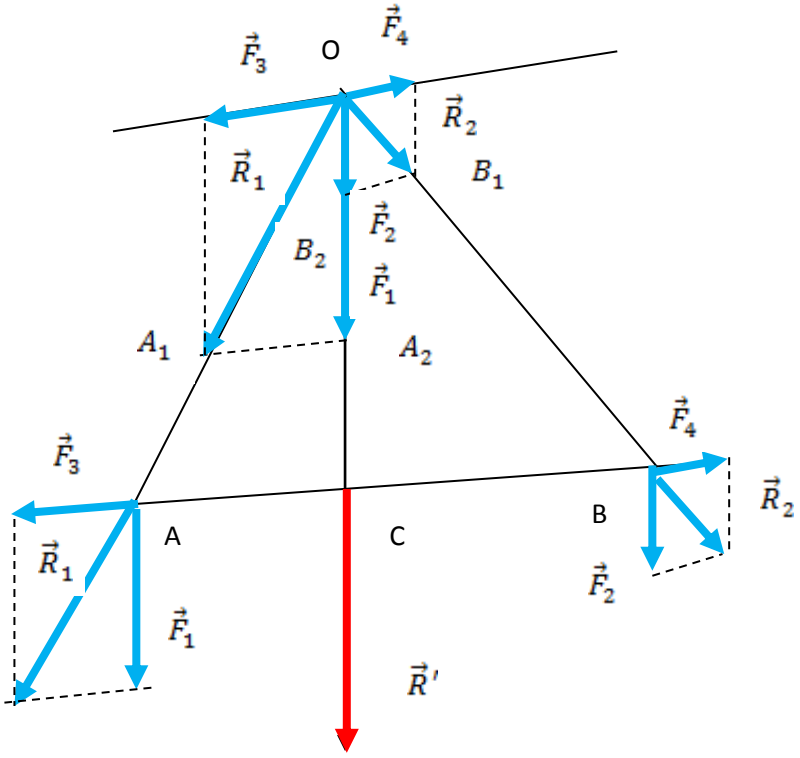
$$M = M_1+M_2+M_3 = -4+3+2 = 1\ N{\cdot}m.$$

3. Juft kuchlarning muvozanati. Agar tekis jismga ikkita va undan ortiq juft kuchlar ta’sir etsa, jism muvozanatda qolishi uchun juft kuchlarning teng ta’sir etuvchisining momenti nolga teng bo‘lishi zarur;

$$M = 0; \quad \text{yoki} \quad \sum_{k=1}^{n} M_k\left(\vec{F}_k, \vec{F}_k{}'\right)=0. \qquad (2.12)$$

D.PARALLEL KUCHLARNI QO‘SHISH.

Faraz qilaylik, yassi jismning A va B nuqtalariga bir tomonga yo‘nalgan $\vec{F}_1$va $\vec{F}_2$ parallel kuchlar berilgan (2.17 –shakl). Ularni qo‘shib, bitta teng ta’sir etuvchi $\vec{R}$ ga keltiramiz.



2.17-shakl.

Buning uchun AB kesma bo‘yicha yo‘nalgan $\vec{F}_3$va $\vec{F}_4$ muvozanatlashuvchi kuchlar olib ($\vec{F}_3$+$\vec{F}_4$ = 0), berilgan $\vec{F}_1$va $\vec{F}_2$ kuchlarga qo‘shamiz,

$$\vec{F}_1+\vec{F}_3 = \vec{R}_1 \quad \text{va} \quad \vec{F}_2+\vec{F}_4 = \vec{R}_2.$$

$\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ kuchlarning ta’sir chiziqlarini davom ettirib, ular kesishgan O nuqtani topamiz va 3-aksiomaga asosan, $\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ kuchlarni ko‘chirib, qo‘shamiz,

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R} \quad \text{yoki} \quad \vec{F}_1+\vec{F}_3+\vec{F}_2+\vec{F}_4=\vec{R},$$

$$\vec{F}_3+\vec{F}_4 = 0 \quad \text{bo‘lganligi uchun} \quad \vec{F}_1+\vec{F}_2 = \vec{R}.$$

Endi quyidagi uchburchaklarning o‘xshashligidan $\Delta OAC \sim \Delta OA_1A_2$ va $\Delta OCB \sim \Delta OB_1B_2$, kerakli proporsiyalarni tuzish mumkin :

$$\frac{AC}{F_3} = \frac{OC}{F_1} \quad \text{va} \quad \frac{CB}{F_4} = \frac{OC}{F_2},$$

bundan $F_3 = \frac{AC}{OC} \cdot F_1$ va $F_4 = \frac{CB}{OC} \cdot F_2$, $F_3 = F_4$ dan foydalanib,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC},$$

proporsiyalarning xossalaridan, $F_1 + F_2 = R$ va CB+AC = AB bo‘lganligi uchun

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} \qquad (2.13)$$

va

$$F_1 + F_2 = R \qquad \text{yoki} \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}. \qquad (2.14)$$

Demak, ixtiyoriy ikkita parallel kuchlarni qo‘shib, bitta teng ta’sir etuvchiga keltirish mumkin, faqat teng ta’sir etuchining qo‘yilish nuqtasi (2.13) proporsiyadan topiladi.

Agar parallel kuchlar qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan bo‘lsa, yuqoridagi munosabatlar uncha o‘zgarmaydi,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB} \qquad (2.15)$$

faqat $F_1 - F_2 = R$ ($F_1 > F_2$), yoki

$$F_2 - F_1 = R \quad (F_2 > F_1). \qquad (2.16)$$

E.<u>PARALLEL KUCHLAR TA’SIRIDAGI MUVOZANAT TENGLAMALARI</u>.

Agar yassi jismga ta’sir chiziqlari Oy o‘qiga parallel $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar ta’sir qilsa (1.18-shakl), ularni bitta teng ta’sir etuvchiga $\vec{R}$ ga keltirish mumkin ekan. Lekin $\vec{R}$ kuchining qo‘yilish nuqtasi turli joyda bo‘lishi muvozanat tenglamalarini tuzishda faqat $\vec{R}$ = 0 yetarli emas, balki $\vec{R}$ ning tekislikning biror nuqtasiga (masalan koordinatalar boshiga) nisbatan momenti ham nolga teng bo‘lishi talab etiladi, ya’ni $M_o(\vec{R}) = 0$. Demak, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{R}$ dan

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) + \ldots + M_o(\vec{F}_n),$$

yoki $M_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_o(\vec{F}_k)$.

U holda tekis jismning Oy o‘qiga parallel bo‘lgan kuchlar ta’siridagi muvozanati quyidagi shartlardan iborat bo‘ladi:

$$\vec{R} = 0 \text{ va } M_o(\vec{R}) = 0,$$

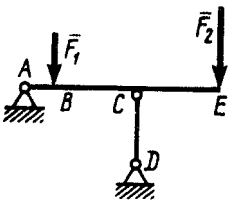
yoki $$R_y = 0 \text{ va } \sum_{k=1}^{n} M_o(\vec{F}_k) = 0. \qquad (2.17)$$

barcha kuchlar Ox o‘qiga perpendikulyar, shuning uchun $R_x = 0$ muvozanat shartlariga kirmaydi. $R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$ dan,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0 \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{n} M_o(\vec{F}_k) = 0. \qquad (2.18)$$

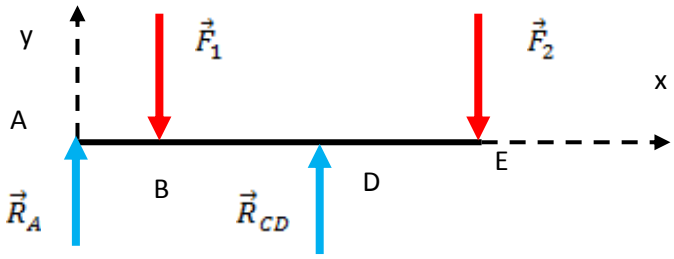
Yuqoridagi ma‘lumotlarni mustahkamlash uchun amaliy masalalar yechamiz:

1-masala. AE balka qo‘zg‘almas A sharnir va vertikal CD sterjen yordamida mahkamlangan bo‘lib, unga F_1=2kN va F_2=8kN kuchlar ta’sir etadi. Agar balkaning o‘lchamlari AB=1m, BC=CE=2m bo‘lsa, A sharnir va CD sterjenda hosil bo‘layotgan zo‘riqishni kN larda aniqlang.



2.18-shakl.

Yechish. 1) A sharnir va CD sterjenlarda hosil bo‘ladigan bog‘lanish reaksiya kuchlari $\vec{R}_A$ va $\vec{R}_{CD}$ ni qo‘yib, Axy koordinata o‘qlariga nisbatan (2.18) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



2.19-shakl.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0, \qquad R_A + R_{CD} - F_1 - F_2 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{R}_{CD}) + M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) = 0. \qquad (2)$$

Kuchlarning momentini A nuqtaga nisbatan hisoblaymiz:

$M_A(\vec{R}_A)= R_A\cdot 0=0$, $M_A(\vec{R}_{CD})= +R_{CD}\cdot AC$, $M_A(\vec{F}_1)= -F_1\cdot AB$, $M_A(\vec{F}_2) = -F_2\cdot AE$.

Son qiymatlarini qo‘yib, ikki noma’lumli ikkita tenglama hosil qilamiz:

$$R_A + R_{CD} - 2 - 8 = 0\ ;$$

$$3\,R_{CD} - 2\cdot 1 - 8\cdot 5 = 0,$$

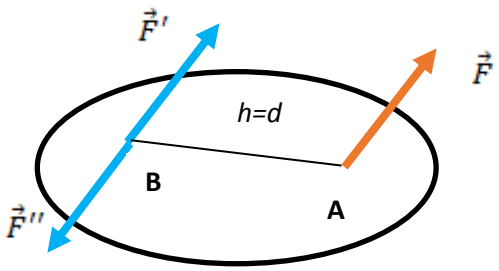
va noma’lumlarni aniqlaymiz,

$$R_{CD} = 42/3 = 14\ N, \quad R_A = -4\ N.$$

Natijadagi manfiy ishora $\vec{R}_A$ kuchining haqiqiy yo‘nalishi vertikal pastga ekanligini bildiradi.

I. <u>IXTIYORIY KUCHLAR TA’SIRIDAGI MUVOZANAT</u>.

Faraz qilaylik, yassi jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi ta’sir etsin. Bu kuchlarni qo‘shib, bitta kuchga-teng ta’sir etuvchiga keltirish mumkin emas, sababi ular turli nuqtalarda qo‘yilgan. Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga ko‘chirib, keyin bitta kuchga va bitta juft kuchga keltirish yo‘lini birinchi bo‘lib XVIII asrda yashagan fransuz olimi Puanso aniqlagan. ***Puanso lemmasi*** berilgan bitta kuchni ixtiyoriy markazga ko‘chirish haqida: *yassi jismga ta’sir qilayotgan kuchni, jismning holatini o‘zgartirmay, boshqa nuqtaga ko‘chirilsa, shu nuqtada berilgan kuchga teng kuch va unga qo‘shilgan juft kuchi hosil bo‘ladi* (2.20–shakl).



2.20–shakl.

Isbot: yassi jismning ixtiyoriy A nuqtasiga $\vec{F}$ kuchi ta’sir etayotgan bo‘lsin(2.20–shakl). 2-aksiomaga asosan, jismning B nuqtasida miqdorlari berilgan kuchga teng bo‘lgan ($F=F'=F''$), yo‘nalishlari $\vec{F}$ kuchiga parallel, muvozanatlashuvchi $\vec{F}'$ va $\vec{F}''$ ikkita kuchlarni qo‘shsak, jismning holati o‘zgarmaydi. Hosil bo‘lgan uchta kuchlardan iborat sistema berilgan $\vec{F}$ kuchiga

ekvivalent bo‘lib, $\vec{F}'$ kuchining A nuqtaga nisbatan momenti, ($\vec{F}, \vec{F}''$) juft kuchning momentiga teng ekan,

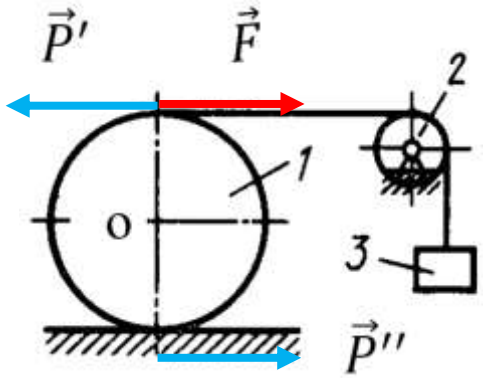
$$M_A(\vec{F}') = M(\vec{F}, \vec{F}'')$$

chunki $M_A(\vec{F}') = F' \cdot h$ va $M(\vec{F}, \vec{F}'') = F \cdot d$,

$F = F' = F''$ va $h = d$ ligidan $M_A(\vec{F}') = M(\vec{F}, \vec{F}'') = F \cdot h$ kelib chiqadi

Ushbu lemmani yaxshiroq tushuntirish uchun quyidagi misollarni ko‘rib chiqamiz.

Masala: go‘rizo‘ntal va silliq tekislikda joylashgan, radiusi 0,5 metr bo‘lgan disk (yassi g‘ildirak) ga 2-blok orqali og‘irligi 20 N bo‘lgan 3-yuk ta’sir etadi. Diskning to‘g‘iniga qancha miqdordagi juft kuch qo‘yilsa, u o‘z joyida qoladi.



2.20-shakl.

Yechish: diskning muvozanat shartini tuzamiz,

$$M(\vec{P}', \vec{P}'') - M_o(\vec{F}) = 0 \qquad (1)$$

$$P' \cdot 2r - F \cdot r = 0, \text{ yoki } P' \cdot 2 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot 0{,}5 = 0,$$

bundan $P' = P'' = 10\ N$.

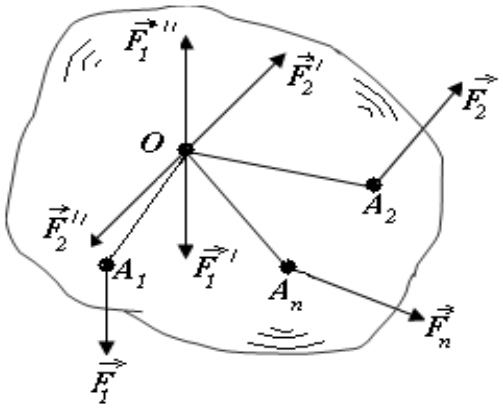
Faraz qilaylik, yassi jismning $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nuqtalariga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar ta’sir etsin. Puanso lemmasiga asosan, kuchlarni O nuqtaga ko‘chiramiz va berilgan kuchlarga mos ravishda $\vec{F}_1{}', \vec{F}_2{}', \ldots, \vec{F}_n{}'$ kuchlar va $(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}'')$,$(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}'')$,…, $(\vec{F}_n, \vec{F}_n{}'')$ juft kuchlar hosil bo‘ladi (2.21 –shakl).

Kuchlarni va juftlarning momentlarini qo‘shib,

$$\vec{R} = \vec{F}_1{}' + \vec{F}_2{}' + \vec{F}_3{}' + \ldots + \vec{F}_n{}',$$

$$M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}'') + M(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}'') + \ldots + M(\vec{F}_n, \vec{F}_n{}'')$$

hosil qilamiz.



2.21-shakl.

Kuchlarning tengligidan $F_1=F_1'=F_1''$, $F_2=F_2'=F_2''$, … , $F_n=F_n'=F_n''$ va momentlarning tengligidan $M_O(\vec{F}_1)=M(\vec{F}_1,\vec{F}_1'')$, $M_O(\vec{F}_2)=M(\vec{F}_2,\vec{F}_2'')$,…, $M_O(\vec{F}_n)=M(\vec{F}_n,\vec{F}_n'')$ quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n, \quad \text{yoki qisqacha}$$

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{2.19}$$

$$M = M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) + \ldots + M_O(\vec{F}_n), \text{ yoki qisqacha}$$

$$M = \sum_{k=1}^{n} M_o(\vec{F}_k). \tag{2.20}$$

Aniqlangan $\vec{R}$ va M berilgan kuchlar sistemasining ***bosh vektori*** va ***bosh momenti*** deb ataladi. Berilgan kuchlarni bitta bosh vektorga va bosh momentga keltirish mexanikada ***kuchlar sistemasini sodda holga keltirish*** deb ataladi.

Yassi jismning ixtiyoriy kuchlar ta’sirida muvozanati shartlari quyidagicha bo‘ladi:

$$\vec{R} = 0, \quad M = 0. \tag{2.21}$$

Oxirgi munosabatni Oxy o‘qlariga proyeksiyalab,

$$R_x = 0, \; R_y = 0, \; M = 0,$$

yoki (2.19) va (2.20) tengliklardan

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \; \sum_{k=1}^{n} M_o(\vec{F}_k) = 0. \tag{2.22}$$

Demak: *yassi jism ixtiyoriy kuchlar ta’sirida muvozanatda bo‘lishi uchun ta’sir etuvchi kuchlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarining algebraik*

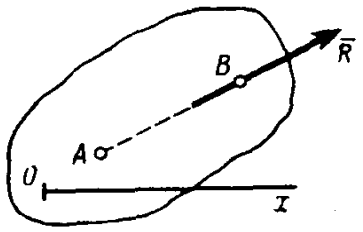
yig'indisi va kuchlarning koordinata boshiga nisbatan momentlarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur.

(2.22) muvozanat tenglamalarining boshqa shakllarini ham isbot qilish mumkin.

Muvozanat shartining ikkinchi xil ko'rinishi: *tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari shundan iboratki, barcha kuchlarning ixtiyoriy A va B markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indilari va AB chiziqqa perpendikulyar bo'lmagan o'qqa bo'lgan proyeksiyalarining yig'indilari nolga teng bo'lishi shart, ya'ni*

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0 \quad \sum m_B(\overline{F}_k)=0 \quad \sum F_{kx}=0; \qquad (2.23)$$

Agar shu uchala analitik shartlardan birontasi qanoatlanmasa, masalan, $\overline{R}\neq 0$ yoki $M_A\neq 0$ (yoki $M_B\neq 0$), kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lmaydi.



2.22-shakl

Ushbu shartni yetarli ekanligini isbot qilaylik. (2.23) muvozanat tenglamalar sistemasining faqat ikkitasi, $M_A=0$ *va* $M_B=0$ qanoatlansin. U holda bunday sistema muvozanatda bo'lmasligi mumkin. Chunki shu A va B nuqtalardan o'tuvchi bo'lgan teng ta'sir etuvchi kuch mavjud bo'lishi mumkin (2.22-shakl) va uni shu nuqtalarga nisbatan olingan momenti nolga teng bo'ladi, lekin muvozanat holati ta'minlanmaydi. Shu sababli (2.23)ning uchinchi tenglamasi ham $R_x=\sum F_{kx}=0$; qanoatlanishi shart. *Ox* o'qi AB chiziqqa perpendikulyar bo'lmaganligi uchun, uchinchi tenglama faqat $\overline{R}=0$ bo'lgandagina qanoatlanadi xolos.

Muvozanat shartining uchinchi xil ko'rinishi: (*uchta momentlar haqidagi teorema*) *tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanatda bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari shundan iboratki, barcha*

kuchlarning bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta A, B va C markazlarga nisbatan olingan momentlarining yig‘indilari nolga teng bo‘lishi shart, ya’ni

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0 \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0 \qquad (2.24)$$

Bularning qanoatlanishi zaruriy shart ekanligi o‘rinlidir. Ushbu shartlarning yetarli ekanligini isbotlash uchun shu (2.24) tenglamalar qanoatlangan holda sistema muvozanatda emas deb faraz qilaylik. U holda sistema teng ta’sir etuvchi vektorga ega bo‘lishi shart, ammo bitta teng ta’sir etuvchi vektor bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan o‘tishi aslo mumkin emas, demak ushbu (2.24) shartlar yetarli ekan.

Bularning qanoatlanishi zaruriy shart ekanligi o‘rinlidir. Ushbu shartlarning yetarli ekanligini isbotlash uchun shu (2.24) tenglamalar qanoatlangan holda sistema muvozanatda emas deb faraz qilaylik. U holda sistema teng ta’sir etuvchi vektorga ega bo‘lishi shart, ammo bitta teng ta’sir etuvchi vektor bitta to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan o‘tishi aslo mumkin emas, demak ushbu (2.24) shartlar yetarli ekan.

Yuqoridagilardan ko‘rinib turibdiki, muvozanat tenglamalari sistemasining uchala ko‘rinishi ham uchta tenglamalar sistemalaridan iborat ekan. Lekin (2.22) tenglamalar sistemasi asosiy hisoblanadi, chunki uni qo‘llashda keyingi ikkita ko‘rinishidagi (2.23) va (2.24) tenglamalar uchun qo‘yilayotgan qo‘shimcha shartlarning hojati yo‘q.

Muvozanat shartlarining qulay shaklini tanlash usullarini quyidagi masalalarda ko‘rib o‘tamiz.

1-masala: o‘lchamlari l=0,3m va h_1=0,4m bo‘lgan to‘g‘ri burchak shaklidagi rama $F = 50\ N$ gorizontal kuch ta’sirida muvozanatda turadi. Agar h_2=0,1m bo‘lsa, A,B va C tayanchlarning reaksiya kuchlarining miqdori aniqlansin.

Yechish: masalani eng kam hisoblashlar yordamida yechish uchun (2.22) muvozanat shartlaridan foydalanamiz:

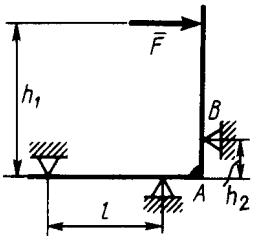
$$\sum_{K=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad F - N_B = 0, \qquad (1)$$

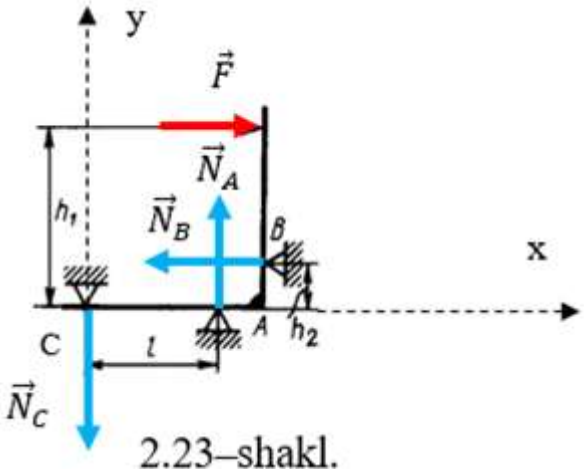
$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad N_A - N_C = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad N_B \cdot h_2 + N_C \cdot l - F \cdot h_1 = 0. \qquad (3)$$

Birinchi tenglamadan $N_B = F = 50\ N$, ikkinchi va uchinchi tenglamalardan

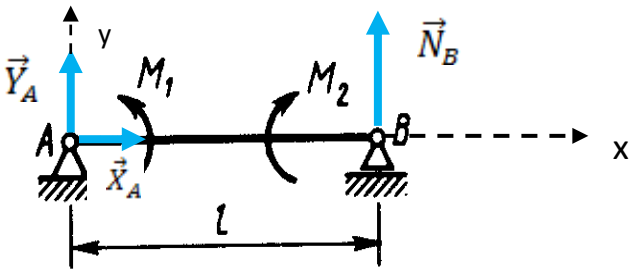
$N_A = N_C = F \cdot h_1/(h_2 + l) = 50 \cdot 0{,}4/(0{,}1+0{,}3) = 50\ N.$

a) 

b) 

2.23–shakl.

2-masala: Uzunligi l=3m bo‘lgan AB balkaga momentlari M_1=2 $kN \cdot m$ va M_2=8 $kN \cdot m$ bo‘lgan juft kuchlar ta’sir etsa, A va B tayanchlarda hosil bo‘ladigan reaksiya kuchlarini kN larda hisoblang.



2.24-shakl.

Yechish: bu masalada ikkinchi xil tenglamalar optimal hisoblanadi:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad X_A = 0; \qquad (1)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \qquad M_1 - M_2 + N_A \cdot AB = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \qquad M_1 - M_2 + Y_A \cdot AB = 0. \qquad (3)$$

Ikkinchi va uchinchi tengliklardan $Y_A = N_A = (M_2 - M_1)/AB = (8-2)/3 = 2\ kN$.

2.2.2. Fazoviy jismning muvozanati.

Fazoviy jismning muvozanatini tekshirish uchun yuqoridagi tushuncha-larni uch o‘lchovli fazoda ko‘rib chiqamiz.

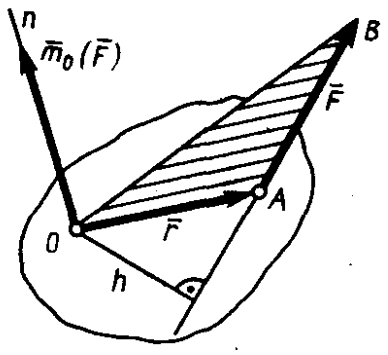
A.<u>FAZOVIY KUCHNING MOMENTI.</u>

Analitik geometriya fanidan ma’lumki, har qanday tekislikning fazodagi holati unga o‘tkazilgan no‘rmal (perpendikulyar)ning yo‘nalishi bilan aniqlanadi. Shunday qilib, kuchning markazga nisbatan momenti nafaqat uning moduli bilan, balki fazodagi yo‘nalishi bilan ham belgilanadi, ya‘ni kuchning momenti vektor qiymatdan iborat ekan.

$\vec{F}$-kuchning O markazga nisbatan momenti deb, kuch miqdorini kuch yelkasiga ko‘paytmasiga teng bo‘lgan, yo‘nalishi bo‘yicha, O markaz va $\vec{F}$ kuch vektori yotgan tekislikka perpendikulyar bo‘lgan va shu O markazga qo‘yilgan $\vec{m}_o(\vec{F})$-vektorga aytiladi. Shu $\vec{m}_o(\vec{F})$ vektorning uchidan qaraganimizda $\vec{F}$ kuch vektori O markaz atrofida soat mili aylanishiga teskari yo‘nalishda bo‘lishi shart (2.25- shakl). Shu qoidaga binoan,

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = F \cdot h = 2 \cdot S_{OAB}\,, \qquad (2.25)$$

bu yerdagi S_{OAB} - OAB uchburchakning yuzi. Oxirgi natija shuni belgilaydiki, S_{OAB}=AB·h/2=F·h/2 ga teng bo‘ladi.



2.25-shakl.

$\vec{m}_o(\vec{F})$ - vektorning ifodasini aniqlash uchun, $\overrightarrow{OA}$ vektorni $\vec{F}$ - vektorga vektor ko‘paytmasini, $\overrightarrow{OA}$x$\vec{F}$ ko‘paytmani yozib chiqamiz,

$$|\overrightarrow{OA}\text{x}\vec{F}| = 2 \cdot S_{OAB} = |\vec{m}_o(\vec{F})|\ . \qquad (2.26)$$

$\overrightarrow{OA}$x$\vec{F}$ vektor OAB tekisligiga perpendikulyar bo‘lib, shu vektorning uchidan qarab $\overrightarrow{OA}$ vektorni soat milining aylanishiga teskari tomonga burilganda 180° dan kam bo‘lgan burchakda $\vec{F}$-vektor bilan ustma-ust tushadi, ya‘ni $\vec{m}_o(\vec{F})$-vektor bilan bir xil ekanligi isbotlandi. Demak $\overrightarrow{OA}$x$\vec{F}$ va $\vec{m}_o(\vec{F})$ vektorlar ham yo‘nalishlari bo‘yicha, ham miqdori bo‘yicha bir xil vektorlar ekanligi isbotlandi, ya’ni bitta vektor ekanligi ma’lum bo‘ldi. Bunga asosan,

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OA}\text{x}\vec{F} \quad \textit{yoki} \quad \vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r}\text{x}\vec{F}\,, \tag{2.27}$$

bu yerda $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, A nuqtaning O markazdan o‘tkazilgan radius-vektori.

Shunday qilib, *$\vec{F}$-kuchning O markazga nisbatan olingan momenti, O markazdan kuch qo‘yilgan nuqtaga o‘tkazilgan radius vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$-ni kuch vektoriga vektor ko‘paytmasiga teng ekan.* Ushbu xulosa, kuchning markazga nisbatan olingan momentining ikkinchi ta’rifi bo‘lib xizmat qiladi.

Kuchning quyidagi xossalarini aytib o‘tamiz:

a) kuchning qo‘yilgan nuqtasini, uning ta’sir chizig‘i bo‘ylab o‘zgartirganimizda, momentning son qiymati o‘zgarmaydi;

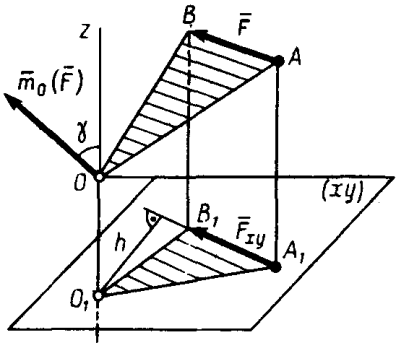
b) agar kuchning ta’sir chizig‘i O markazni kesib o‘tsa (kuchning yelkasi nolga teng bo‘ladi), yoki kuchning miqdori nolga teng bo‘lsa, kuchning momenti nolga teng bo‘ladi.

Amaliy masalalar yechishda (2.27) formulani qo‘llash ba’zi-bir qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Shuning uchun fazoviy kuchning momentini oddiyroq ko‘rinishini, ya‘ni fazoviy kuchni koordinata tekisliklariga proyeksiyalab, keyin O markazga nisbatan momentini hisoblaymiz.

Fazoviy kuchning momenti $\vec{m}_o(\vec{F})$ -dan iborat vektor bo‘lib (2.26-shakl), OAB tekislikka perpendikulyar yo‘nalgan bo‘ladi va uning miqdori (2.27) formula orqali aniqlanadi,

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = 2\cdot\Delta S_{OAB}\,,$$

bu yerdagi ΔS_{OAB} - OAB uchburchakning yuzi. Biz yuqorida kuchni o‘qlarga qanday proyeksiyalagan bo‘lsak, $\vec{m}_o(\vec{F})$-vektor ham koordinata o‘qlariga shu kabi proyeksiyalanadi.



2.26-shakl.

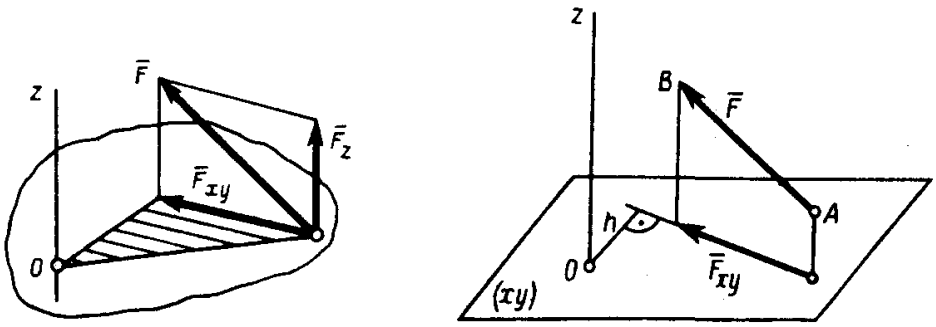
$\vec{F}$ kuchning O markazga nisbatan momentining, ya’ni $\vec{m}_o(\vec{F})$-vektorning O markazdan o‘tuvchi ixtiyoriy Oz o‘qqa proyeksiyasi yoki $\vec{F}$ kuchning Oz -o‘qqa nisbatan momenti quyidagicha yoziladi,

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_o(\vec{F})|_z \quad \text{yoki} \quad m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_o(\vec{F})|\cdot\cos\gamma \ , \qquad (2.28)$$

bu yerda $m_z(\vec{F})$- $\vec{F}$ kuchning Oz - o‘qiga nisbatan momenti; γ -Oz o‘q bilan $\vec{m}_o(\vec{F})$-vektor orasidagi burchak. Yuqoridagi ta’rifdan kelib chiqadiki, $m_z(\vec{F})$- *algebraik kattalik* bo‘lib, ixtiyoriy vektorning proyeksiyasi qanday aniqlansa, uning ishorasi ham shunday aniqlanadi.

Oxirgi tenglikning boshqacha ko‘rinishini yozamiz (2.27-shakl):

$$m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy}\cdot h \qquad (2.29)$$



2.27-shakl.

Demak $\vec{F}$*-kuchining z -o‘qiga nisbatan momenti, kuchning z - o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikdagi proyeksiyasining, shu tekislikni kesib o‘tgan z*

- *o'qining O_1 nuqtasiga nisbatan olingan momentning algebraik qiymatiga teng ekan.*

Xuddi shunday fazoviy kuchning Ox, Oy va Oz o'qlariga momentlarini quyidagicha yozish mumkin:

$$m_x(\vec{F}) = \pm F_{yz} \cdot h_1, \quad m_y(\vec{F}) = \pm F_{xz} \cdot h_2 \quad m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h_3, \qquad (2.30)$$

bunda h_1, h_2, h_3 - F_{yz}, F_{xz}, F_{xy} kuch proyeksiyalarining mos yelkalari.

Fazoviy kuchning uning proyeksiyalari orqali yozganimiz kabi (1.2),

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}$$

uning momentining miqdori ham shu ko'rinishda bo'ladi:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = \sqrt{[m_x(\vec{F})]^2 + [m_y(\vec{F})]^2 + [m_z(\vec{F})]^2}\ . \qquad (2.31)$$

Hisoblashlarni yana ham tezlashtirish uchun, quyidagi hulosalarni esda tutish lozim:

a) agar fazoviy kuch biror koordinata o'qiga parallel bo'lsa (masalan Ox o'qiga), uning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng, chunki mos proyeksiyasi $F_{yz} = 0$.

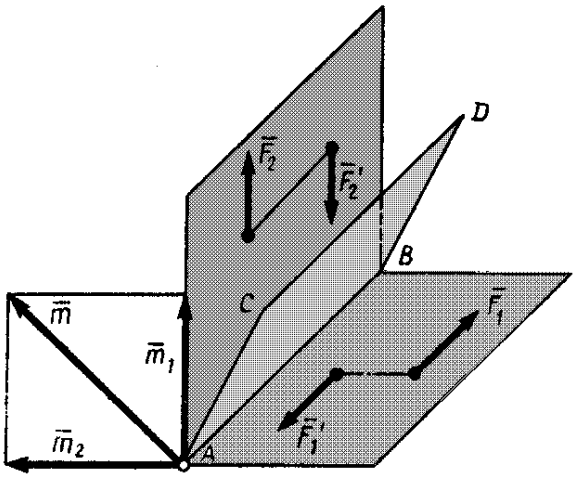
b) agar fazoviy kuchning ta'sir chizig'i biror koordinata o'qini kesib o'tsa (masalan Ox o'qini), uning shu o'qqa nisbatan momenti nolga teng, chunki mos yelkasi $h_1 = 0$.

Boshqa hollarda fazoviy kuchning momenti albatta noldan farqli qiymatga ega bo'ladi.

B. <u>FAZOVIY JUFT KUCHNING MOMENTI.</u>

Agar juft kuchlar fazoning turli tekisliklarida berilgan bo'lsa, ularni qo'shish uchun ularning momentini ham vektor sifatida ifodalaymiz. Masalan, o'zaro perpendikulyar tekisliklarda joylashgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}')$ va $(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}')$ juft kuchlarni qo'shish uchun ularning moment vektorlari qo'shiladi (2.28-shakl):

$$\vec{m} = \vec{m}_1(\vec{F}_1, \vec{F}_1{}') + \vec{m}_2(\vec{F}_2, \vec{F}_2{}'), \qquad (2.32)$$



2.28-shakl.

Demak, fazoviy juft kuch momenti vektorlari juft tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan bo'lib, uning uchidan qaraganda juft kuch tekislikni soat mili aylanishiga teskari bo'lishi lozim.

Yuqoridagi ma'lumotlarni *n*-ta juft kuchlar uchun umumlashtirish mumkin:

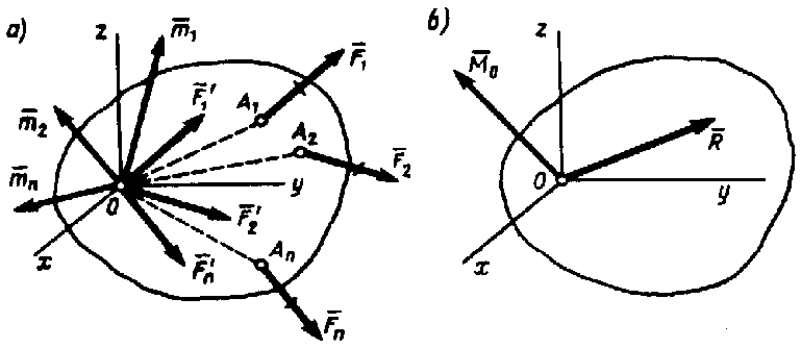
$$\vec{m} = \vec{m}_1(\vec{F}_1,\vec{F}_1{}') + \vec{m}_2(\vec{F}_2,\vec{F}_2{}') + \ldots + \vec{m}_n(\vec{F}_n,\vec{F}_n{}'),$$

yoki qisqa qilib, $\vec{m} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k(\vec{F}_k,\vec{F}_k{}')$. (2.33)

Xulosa: agar fazoviy jismga turli juft kuchlar ta'sir etsa, ularning vektorlarini qo'shib, bitta juft kuch momenti vektoriga keltirish mumkin ekan.

D. FAZODA JOYLASHGAN IXTIYORIY KUCHLARNI SODDA HOLGA KELTIRISH.

Faraz qilaylik fazoviy jismning $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ nuqtalariga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir qilsin. Kuchlar sistemasini sodda holga keltirish uchun Puanso lemmasiga asosan, berilgan kuchlarni koordinatalar boshiga ko'chiramiz va hosil bo'lgan kuchlar vektorlarini hamda juftlar momenti vektorlarini qo'shib, bosh vektor $\vec{R}$ va bosh moment $\vec{M}_O$ vektorlarini topamiz. Bu jarayon natijasi tekislikda bitta bosh vektor $\vec{R}$ va skalyar bosh moment M_O bo'lgan bo'lsa, fazoviy kuchlarda ikkita vektor qiymatlar olinadi (2.29-shakl).



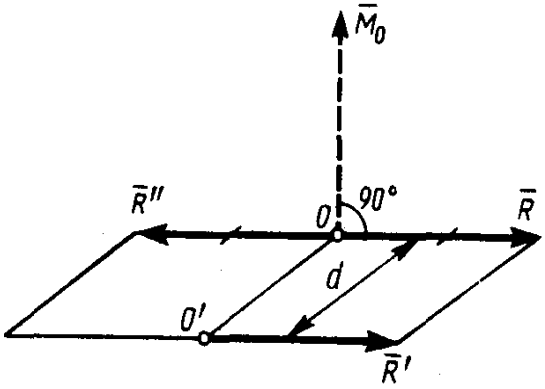
2.29-shakl.

Shunday qilib: *absolyut qattiq jismga ta'sir etuvchi ixtiyoriy kuchlar sistemasini birorta O markazga keltirganimizda, ularning o'rniga berilgan kuchlar sistemasining bosh vektoriga teng bo'lgan bitta* $\vec{R}$*-kuch va berilgan kuchlar sistemasining O markazga nisbatan olingan momentlarining vektor yig'indisidan iborat bo'lgan bitta* $\vec{M}_O$*-bosh moment bilan almashtirish mumkin ekan.*

Hosil bo'lgan bosh vektor $\vec{R}$ va bosh moment vektorlarining $\vec{M}_O$ o'zaro joylashishiga qarab, mexanikada quyidagi xulosalar chiqariladi:

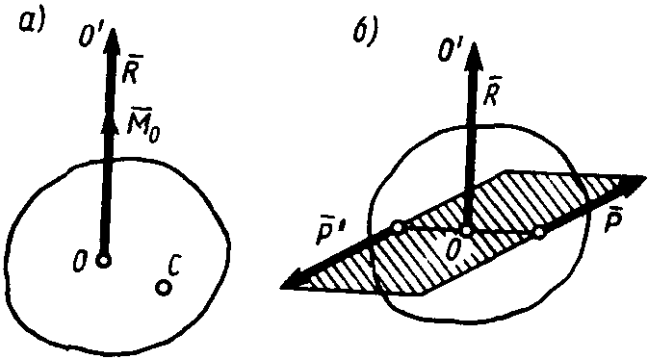
1) Agar $\vec{R} \neq 0$ va $\vec{M}_O \neq 0$ bo'lsa, jism ilgarilanma va aylanma harakatda bo'lishi mumkin. Buning xususiy holi ikki xil ko'rinishda kuzatiladi:

a) $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ bo'lsa, $\vec{M}_O$ ni $(\vec{R}', \vec{R}'')$ juftga almashtirib, bitta $\vec{R}'$ kuchga keltirish mumkin, chunki $\vec{R} = \vec{R}' = \vec{R}''$ va $\vec{R} + \vec{R}' = 0$, jism ilgarilanma harakatda (2.30-shakl);



2.30-shakl.

b) agar $\vec{R}$ va $\vec{M}_O$ parallel va bitta to'gri chiziqda yotsa, jism vint harakatida bo'ladi. Mexanikada bunday holat ***dinamik vint*** yoki ***dinamo*** deb ataladi (2.30-shakl);



2.31-shakl.

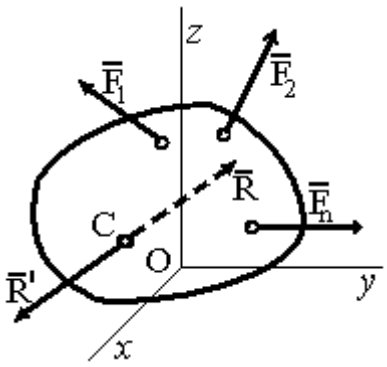
2) Agar $\vec{R}$ = 0 va $\vec{M}_O \neq$ 0 bo‘lsa, jism faqat aylanma harakatda bo‘ladi;

3) Agar $\vec{R} \neq$ 0 va $\vec{M}_O$= 0 bo‘lsa, jism faqat ilgarilanma harakatda bo‘ladi;

4) Agar $\vec{R}$ = 0 va $\vec{M}_O$= 0 (2.34) bo‘lsa, jism muvozanat holatida bo‘ladi.

E. <u>KUCHNING TASHKIL ETUVCHILARINING MOMENTI.</u>

Teng ta’sir etuvchi kuchning momenti haqidagi Varin’on teoremasi: *agar berilgan kuchlar sistemasi ta’sir etuvchiga ega bo‘lsa, teng ta’sir etuvchi kuchning ixtiyoriy olingan nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlarning o‘sha nuqtaga nisbatan olingan momentlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.*



2.32-shakl.

Isbot: Absolyut qattiq jismga qo‘yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi C nuqtadan o‘tuvchi va qiymati $\vec{R}$-vektordan iborat bo‘lgan teng ta’sir etuvchiga keltirilsin (2.32-shakl). Shu C nuqtaga teng ta’sir etuvchi vektorga teskari yo‘nalishda bo‘lgan moduli $\vec{R}$-ga teng bo‘lgan $\vec{R}'$-vektorni qo‘yaylik. U holda berilgan kuchlar sistemasi unga qo‘shimcha qo‘yilgan $\vec{R}'$- vektor bilan birgalikda muvozanatdagi kuchlar sistemasini tashkil etadi, chunki $\vec{M}_O$=0. (2.34) formulaga

asosan berilgan kuchlar sistemasi momentlarining yig‘indisi nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) + \sum_{k-1}^{n} \vec{M}_O(\vec{R}') = 0 .$$

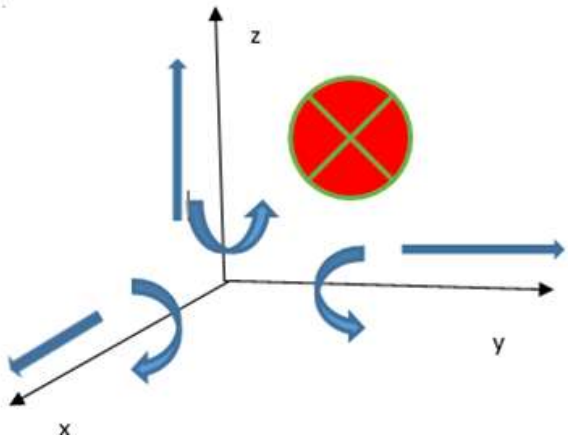
Lekin $\vec{R}$=-$\vec{R}'$ bo‘lgani uchun, $\vec{M}_O(\vec{R}') = -\vec{M}_O(\vec{R})$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shu sababli, yuqoridagilarga asosan,

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{k-1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) \qquad (2.35)$$

ekanligini isbot qildik. Shunday qilib teorema isbotlandi. Ushbu teoremaning natijasidan juda ko‘p hollarda foydalanish bir muncha qulayliklarga olib keladi.

I. FAZOVIY JISMNING MUVOZANATI SHARTLARI.

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqib, fazoviy jismning ixtiyoriy kuchlar ta’siridagi muvozanat shartlarini va uning hususiy hollarini aniqlaymiz. Avvalo jismning uch o‘lchovli fazodagi ixtiyoriy harakatini bir necha oddiy harakatlardan iboratligiga qiziqaylik. Faraz qilaylik futbol to‘pining harakati uch o‘lchovli fazoda takrorlan-maydigan qanday harakatlardan tuzilishi mumkinligi haqida o‘ylaylik



2.33-shakl.

Ko‘rinib turibdiki, futbol to‘pining fazodagi oddiy harakatlari Ox, Oy va Oz o‘qlari bo‘yicha 3 ta siljish va 3 ta aylanishdan, hammasi bo‘lib 6 ta, ya‘ni muvozanat shartlari ham 6 ta bo‘lishi shart ekan.

Demak, fazoviy jism muvozanatda bo‘lishi uchun bosh vektor va bosh moment vektorlari nolga teng bo‘lishi zarur.

$$\vec{R} = 0 \text{ va } \vec{M}_O = 0 \text{ , yoki } \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \text{ va } \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (2.36)$$

Oxirgi vektor tengliklarni Oxyz o‘qlariga proyeksiyalab, kutilgan 6 ta muvozanat shartlarini chiqaramiz:

$$\begin{cases} R_x = 0, \\ R_y = 0, \\ R_z = 0, \end{cases} \text{ va } \begin{cases} M_x = 0, \\ M_y = 0, \\ M_z = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\text{Yoki } \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \end{cases} \text{ va } \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Xulosa*: fazoviy jism muvozanati haqidagi masalalarni yechish uchun 6 ta muvozanat tenglamalarini tuzish zarur ekan.*

Shu paytgacha tuzilgan muvozanat shartlarini eslab qolish uchun ularni tartibga solib, jadval ko‘rinishga keltiramiz(2.3 va 2.4-jadvallar):

2.3-jadval

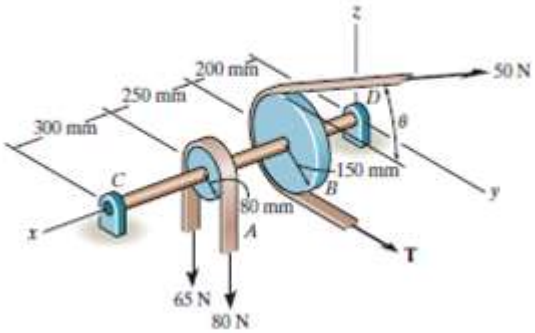
Fazoviy jismning muvozanati shartlari				
1	Ixtiyoriy kuchlar	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$		
2	Kesishcchi kuchlar	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \end{cases}$		
3	Parallel kuchlar (Ox, Oy, Oz)	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \end{cases}$
4	Juft kuchlar	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$		

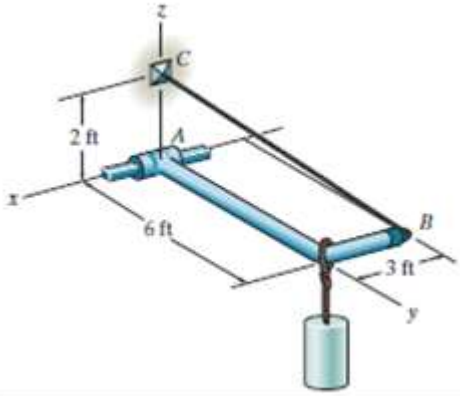
2.4-jadval

Yassi jismning muvozanati shartlari				
1	Ixtiyory kuchlar	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. \\ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. \\ \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0. \\ \sum_{k=1}^{n} m_C(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$
2	Kesishcchi kuchlar	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \end{cases}$		
3	Parallel kuchlar (Ox, Oy)	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases}$	
4	Juft kuchlar	$\sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0.$		

Fazoviy jismlarning muvozanatiga oid misollarning texnikada uchrashi quyidagi tasvirlarda keltirilgan (2.34-shakl)[2].

a) b) d)

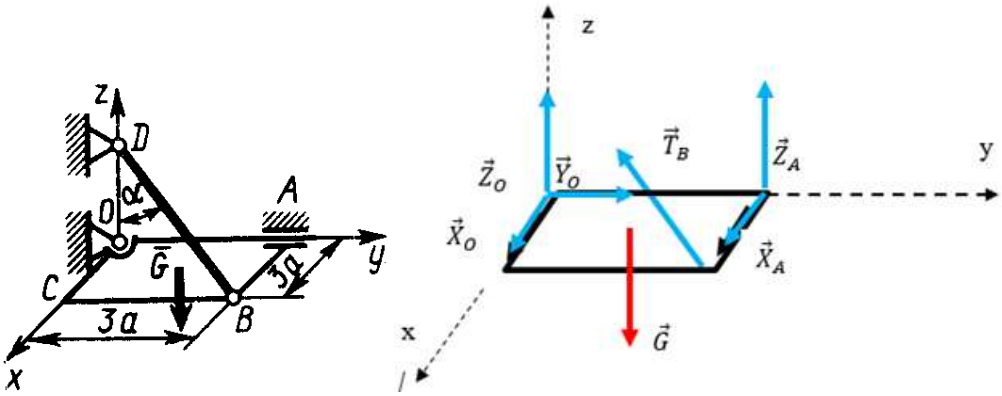
e) 

f) 

2.34-shakl.

Fazoviy jism muvozanatiga oid masalalar bilan nazariy bilimlarni mustahkamlaymiz:

1-masala: O‘lchamlari *a*=2m, og‘irligi G=30N bo‘lgan bir jinsli OABC plita polat arqon BD vositasida va O-fazoviy sharnir va A-podshipnik yordamida gorizontal mahkamlangan (2.35-shakl). Sharnir reaksiya kuchlarini va BD arqonning taranglik kuchini aniqlang. Bunda $\alpha=60^0$.



a) b)

2.35-shakl.

Yechish: Og‘irlik kuchi-$\vec{G}$, trosning taranglik kuchi-$\vec{T}_{BD}$ va reaksiya kuchlarini -$\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O, \vec{X}_A, \vec{Z}_A$ yo‘naltirib, fazoviy kuchlarning (2.38) muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_O + X_A - T_{BD} \cdot \cos 30° \cos 45° = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_O - T_{BD} \cdot \cos 30° \sin 45° = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad Z_O + Z_A - G + T_{BD} \cos 60° = 0; & (3) \end{cases}$$

Noma’lumlarni aniqlaymiz:

(6) dan $X_A = 0$; (5) tenglikdan $T_{BD} = G = 30\ N$;

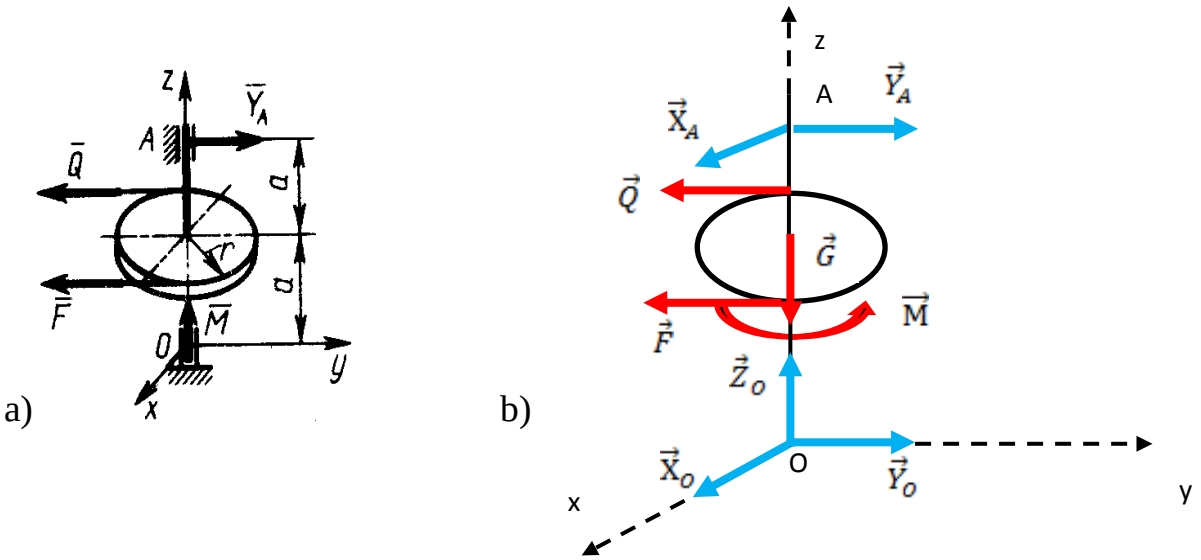
(1) dan $X_O = T_{BD} \cdot \cos 30° \cos 45° = 30 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}707 = 18{,}37\ N$;

(4) dan $Z_A = \frac{G}{2} - T_{BD} \cos 60° = 15 - 30 \cdot 0{,}5 = 0$;

(2) dan $Y_O = T_{BD} \cdot \cos 30° \sin 45° = 30 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}707 = 18{,}37\ N$

(3) dan $Z_O = -Z_A + G - T_{BD} \cos 60° = 0 + 30 - 30 \cdot 0{,}5 = 15\ N$.

2-masala: Og‘irligi G=100 *N*, radiusi r=0,3 m li shkiv o‘lchamlari *a*=0,3 m bo‘lgan vertikal o‘qqa o‘rnatilgan bo‘lib, F=2Q=120N kuchlar va momenti M=18 N·m juft kuch ta’sirida muvozanatda bo‘ladi (2.36-shakl,a). A podshipnikning va O fazoviy sharnirning reaksiya kuchlarini toping. Bunda $\bar{F} \parallel \bar{Q} \parallel$Oy.



2.36-shakl .

Yechish: A podshipnik va O fazoviy sharnirda hosil bo‘ladigan tayanch reaksiya kuchlarini-$\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{Z}_O$ ko‘rsatib, (2.28) muvozanat shartlarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_O + X_A = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_O + Y_A - F - Q = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad Z_O - G = 0; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad -Y_A \cdot 2a + F \cdot a + Q \cdot a = 0; & (4) \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad X_A \cdot 2a = 0; & (5) \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0. \quad M - F \cdot r + Q \cdot r = 0. & (6) \end{cases}$$

Noma’lumlarni aniqlaymiz:

(5) va (1) tenglikdan $X_A = X_O = 0$,

(3) dan $Z_O = G = 100\ N$,

(4) dan

$$Y_A = \frac{F + Q}{2} = \frac{120 + 60}{2} = 90\ N,$$

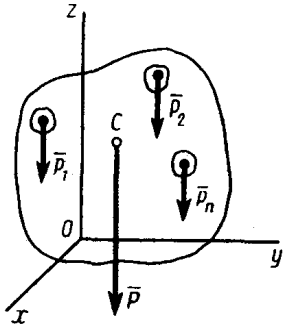
(2) dan $Y_O = F + Q - Y_A$ =120+60-90=90 N.

2.2.3. Bir jinsli jismlarning og‘irlik markazi.

Bir xil material (temir, yog‘och, alyumin va h.k.)dan tayyorlangan jismlar ***bir jinsli jismlar*** deb ataladi. Klassik mexanikaning ta’sir-aks ta’sir qonuniga asosan, jismlarning o‘zaro tortishish kuchlari (1.14) formula bilan, jismlarning og‘irlik kuchi esa (1.17) tenglik yordamida aniqlanadi. Bino-inshoot va mashina-mexanizmlar qurishda og‘irlik markazi muhim ahamiyatga ega. Masalan baland inshootlar, ko‘priklar va zamonaviy arxitektura binolari qurilishida og‘irlik markazining Yerga yaqinroq, simmetriya o‘qida bo‘lishi talab etiladi. Mashina-

mexanizmlarda esa, harakat tezliklarining juda yuqori bo‘lishi munosabati bilan, og‘irlik markazi, inersiya kuchlari va balansirlash masalalarini to‘g‘ri hal etish texnik nosozliklar va avariyalarning oldini oladi. Fazoning har bir nuqtasiga qo‘yilgan moddiy zarrachalarning turgan o‘rinlariga (koordinatasiga) bog‘liq ravishda tegishli kuch ta’sir etuvchi ma’lum bir qismiga ***kuch maydoni*** deb ataladi. Masalan, Yerning tortish kuchidan iborat kuch maydoni shunga misol bo‘la oladi.

Yer sirtiga yaqin bo‘lgan qattiq jismning har qaysi bo‘lagiga Yer markaziga qarab yo‘nalgan og‘irlik kuchi ta’sir etadi. Tekshirilayotgan jism o‘lchamlari Yer o‘lchamlariga nisbatan juda kichik bo‘lgani uchun ta’sir etuvchi og‘irlik kuchlarini parallel deb qarash mumkin. Demak, ***jismning og‘irlik markazi*** deb, jism zarrachalari og‘irlik kuchlarining teng ta’sir etuvchi vektori qo‘yilgan C nuqtaga aytiladi (2.37-shakl).



2.37-shakl.

Agar jismning og‘irligi bo‘laklarning og‘irliklarining vektor yig‘indisiga teng bo‘lsa,

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots + \vec{P}_n,$$

ularning Oy o‘qiga nisbatan momentlari ham (2.35)ga asosan teng bo‘lishi shart.

$$M_y(\vec{P}) = M_y(\vec{P}_1) + M_y(\vec{P}_2) + M_y(\vec{P}_3) + \cdots + M_y(\vec{P}_n),$$

yoki

$$P \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \cdots + P_n \cdot x_n \ .$$

Bundan

$$x_C = (P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \cdots + P_n \cdot x_n)/\ P,$$

qisqacha

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{P}.$$

Koordinata o‘qlarining o‘rnini almashtirib, oxirgi tenglikni Oy va Oz o‘qlarga nisbatan yozish mumkin, ya’ni

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{P}; \\ y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k}{P}; \\ z_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k}{P}. \end{cases} \qquad (2.39)$$

Ba’zi hollarda jismning og‘irligi emas, uning hajmi-V, yuzasi-S yoki uzunligi-*l* ma’lum bo‘lsa, (3.31) formuladagi jism bo‘laklarining og‘irliklarini

$$P_k = \gamma V_k \; ; \; P_k = \gamma S_k \; ; \quad P_k = \gamma l_k ,$$

(γ-solishtirma og‘irlik) ifodalab, (2.39) o‘rniga hajmga ega bo‘lgan jismlarning og‘irlik markazini aniqlash,

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V_k \cdot x_k}{V}; \\ y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V_k \cdot y_k}{V}; \\ z_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} V_k \cdot z_k}{V}. \end{cases} \qquad (2.40)$$

Tekis yuzali jismlarning og‘irlik markazini aniqlash,

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S_k \cdot x_k}{S}; \\ y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S_k \cdot y_k}{S}; \\ z_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} S \cdot z_k}{S}. \end{cases} \qquad (2.41)$$

Uzunlikka ega bo‘lgan jismlarning og‘irlik markazini aniqlash formulalariga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} l_k \cdot x_k}{l}; \\ y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} l_k \cdot y_k}{l}; \\ z_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} l \cdot z_k}{l}. \end{cases} \qquad (2.42)$$

Yuqoridagi munosabatlarni umumiy holda integral formulasini chiqarish mumkin. Buning uchun jismni elementar bo‘laklarga bo‘lib, hajmiy-V, yuza bo‘yicha-S va uzunlik bo‘yich integral olinadi:

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint x dV; \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint y dV; \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint z dV, \qquad (2.43)$$

$$x_c = \frac{1}{S}\iint x dS; \quad y_c = \frac{1}{S}\iint y dS; \quad z_c = \frac{1}{S}\iint z dS \qquad (2.44)$$

$$x_c = \frac{1}{l}\int x dl; \quad y = \frac{1}{l}\int y dl; \quad z_c = \frac{1}{l}\int z dl \qquad (2.45)$$

Yuqorida keltirib chiqarilgan formulalarga asoslangan holda, turli jismlarning og‘irlik markazlarini aniqlashning amaliy usullarini ko‘rib chiqamiz.

1. *Simmetriya usuli.* Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligiga yoki simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, bu jismning og‘irlik markazi simmetriya tekislikda yoki simmetriya o‘qida joylashadi. Simmetriyaning xossasiga ko‘ra: bir jinsli halqaning, yumaloq yoki to‘g‘ri burchakli plastinaning, to‘g‘ri burchakli parallelopipedning, sharning va boshqa bir jinsli simmetrik jismlarning og‘irlik markazlari, ularning geometrik markazlarida joylashadi (simmetriya markazida yotadi).

2. *Bo‘laklarga ajratish.* Agar bir jinsli jismni, og‘irlik markazlari aniq bo‘lgan bir necha oddiy qismlarga ajratish mumkin bo‘lsa, bu jismning og‘irlik markazini koordinatalari (2.40-2.42) formulalar orqali hisoblanadi. Ushbu formulalardagi yig‘indilar soni, jismning bo‘lingan qismlar soniga teng bo‘ladi.

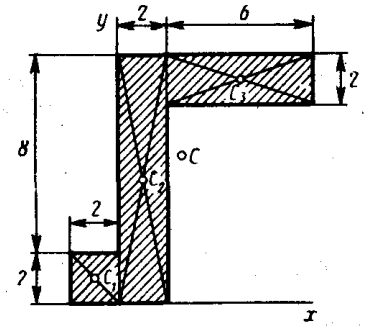
1-masala. 3.30-shaklda tasvirlangan bir jinsli plastina og‘irlik markazining koordinatalari hisoblansin. Hamma o‘lchamlar santimetrlarda berilgan.

Yechish. Koordinata o‘qlarini o‘tkazamiz va plastinani uchta to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat qismlarga ajratiladi. Har bir to‘g‘ri to‘rtburchakning og‘irlik markazlarining koordinatalari va ularning yuzalarini hisoblab, jadvalga yozib chiqamiz(2.5-jadval).

2.5-jadval.

№	1	2	3
x_k	—1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12

2.3-jadval.



2.38-shakl.

Berilgan qiymatlarni (2.41) formulaga qo‘yib, quyidagilarni aniqlaymiz:

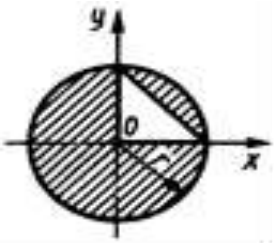
$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 12 \cdot 5}{4 + 20 + 12} = \frac{76}{36} = 2{,}11\ sm;$$

$$y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4 \cdot 1 + 20 \cdot 5 + 12 \cdot 9}{4 + 20 + 12} = \frac{212}{36} = 5{,}9\ sm.$$

Og‘irlik markazining aniqlangan o‘rni shaklda ko‘rsatilgan; C markaz plastinadan tashqarida joylashar ekan.

3. *Manfiy qismlar (hajmlar, yuzalar yoki uzunliklar) usuli.* Agar bir jinsli jismning biror qismi qirqib olingan bo‘lsa, shu qism uchun formulalardagi yig‘indilar o‘rniga manfiy ishoralar qo‘yiladi.

2-masala. Radiusi r=30 sm bo‘lgan shtrixlangan plastinaning (2.39-shakl) og‘irlik markazi x_C va y_C koordinatasini aniqlang.



2.39-shakl.

Yechish. Shtrixlangan plastina ikki qismdan-doira va uchburchakdan iborat, shuning uchun ularning yuzalari va og'irlik markazlarini aniqlaymiz:

$$S_1 = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 30^2 = 2826\ sm^2; \quad S_2 = \frac{1}{2}\ ah = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450\ sm^2;$$

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{2}{3}\ a = 20\ sm;$$

$$y_1 = 0; \qquad y_2 = \frac{2}{3}\ h = 20\ sm.$$

(2.41) formula asosida

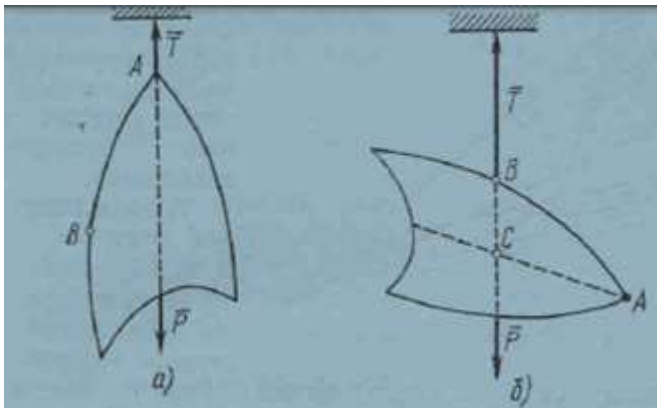
$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S_1 - S_2} = \frac{2826 \cdot 0 - 450 \cdot 20}{2820 - 450} = -3{,}8 \text{ sm};$$

$$y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2}{S_1 - S_2} = \frac{2826 \cdot 0 - 450 \cdot 20}{2820 - 450} = -3{,}8 \text{ sm}.$$

Demak plastina og'irlik markazi Oxy o'qlarining III-kvadrantida joylashgan ekan.

4. *Tajriba usuli*. Bir jinsli bo'lmagan murakkab shaklli jismlarning (samolyot, parovoz, avtomobil va b.) og'irlik markazlarini tajriba usulida aniqlanadi:

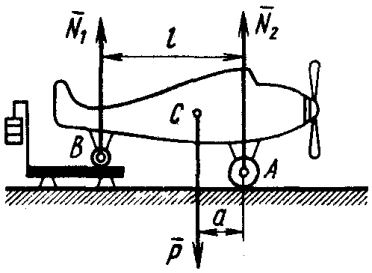
a) *osib qo'yish usuli.* Jismning bir nechta nuqtalaridan ipga yoki trosga osib qo'yiladi. Har safar ipning yo'nalishi og'irlik markazining yo'nalishini belgilaydi, shu chiziqlarning kesishgan nuqtasi jismning og'irlik markazi hisoblanadi.



2.40-shakl.

b) *tortib ko'rish usuli:* Jismning biror qismini tortib, statikaning muvozanat tenglamalari yordamida noma'lum masofa aniqlanadi.

2-masala. Samolyotning umumiy og'irligi 100 kN, g'ildiraklari orasidagi masofa AB=*l*=8 m va orqa qismining og'irligi tarozida tortilganda 40 kN bo'lsa, *a* masofani toping (2.41-shakl).



2.41-shakl.

Yechish. A nuqtaga nisbatan moment olib,

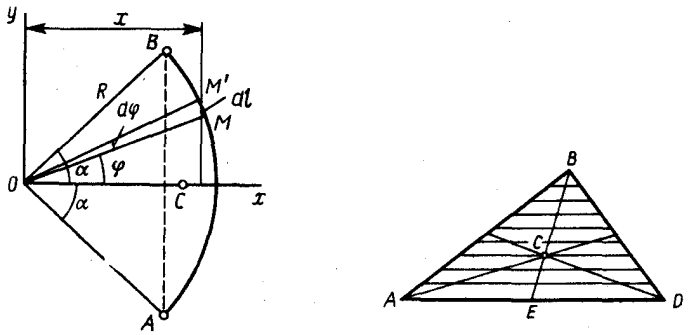
$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot a - N_1 \cdot l = 0;$$

bundan

$$a = \frac{N_1 \cdot l}{P} = \frac{40 \cdot 8}{100} = 3{,}2\, m.$$

5. *Integrallash usuli.* Geometrik shaklga ega bo‘lgan jismlarning og‘irlik markazini integrallash usuli yordamida (2.43-2.45) formulalardan aniqlanadi.

a) *Aylana yoyining og‘irlik markazi.* R - radiusli aylananing markaziy burchagi ∠AOB=2α teng bo‘lgan AB yoyining og‘irlik markazini aniqlash kerak bo‘lsin (2.42-shakl).



2.42-shakl.

AB yoy simmetriya o‘qiga ega bo‘lganligi uchun, og‘irlik markazi shu o‘qda yotadi. Koordinata o‘qlarini o‘tkazamiz, x o‘qini simmetriya chizig‘i bo‘ylab yo‘naltiramiz, x_C - ning qiymatini (2.45) formula orqali aniqlaymiz. AB yoydan uzunligi $dl=Rd\varphi$ bo‘lgan elementar MM' yoy ajratib olamiz, uning o‘rni φ burchak orqali belgilanadi. Elementar yoy MM' -ni to‘g‘ri chiziq deb faraz qilsak, uning og‘irlik markazi shu yoyning o‘rtasida joylashgan bo‘ladi, uning Ox -o‘qidagi koordinatasi $x=R\cos\varphi$ formula orqali aniqlanadi. Ushbu x va dl -ning

qiymatlarini (2.45) formulaga keltirib qo‘yamiz hamda integralning chegarasini butun yoy bo‘yicha olamiz, natijada

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

bu yerda L - AB yoyning uzunligi bo‘lib, L= R·2α. Bu qiymatni oxirgi tenglamaga qo‘ysak,

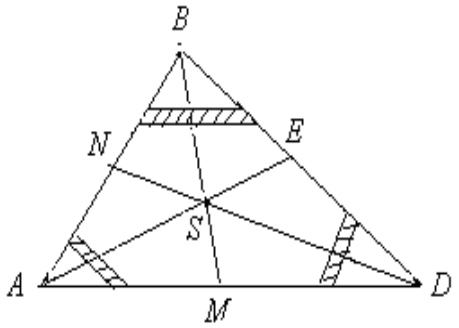
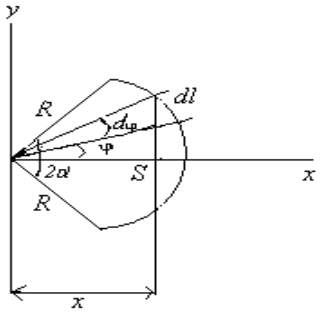
$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

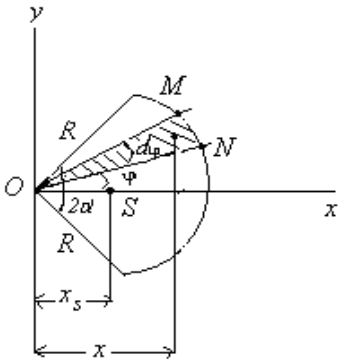
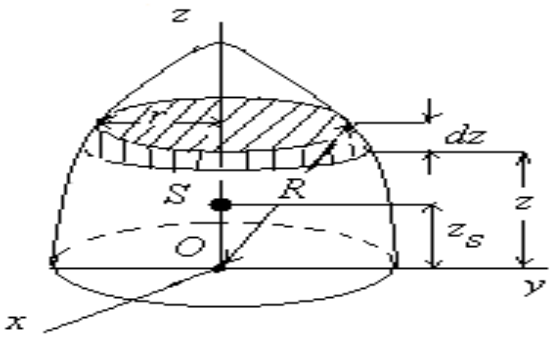
bo‘ladi.

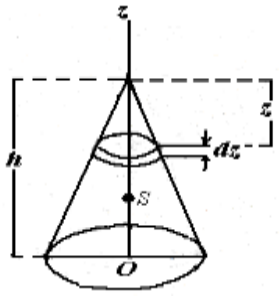
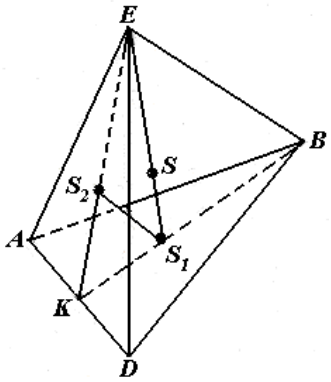
Demak, *aylana yoyining og‘irlik markazi C, uning simmetriya o‘qida joylashgan bo‘lib, uning geometrik markazi O nuqtadan* x_C *masofada yotar ekan.*

Quyidagi jadvalda geometrik shaklga ega bo‘lgan ba’zi bir jismlarning og‘irlik markazlari koordinatalari keltirilgan(2.6-jadval).

2.6-jadval.

T/r	Jismlar shakli	Og‘irlik markazi
1	Ixtiyoriy uchburchak yuzi 	SM = $\frac{1}{3}$ BM; SN = $\frac{1}{3}$ DN; SE = $\frac{1}{3}$ AE.
2	Aylana yoyi 	$x_C = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ Yarim aylana uchun $x_C = 2R/\pi$

3	Doira sektori yuzi 	$x_C = \dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$
4	Yarim shar hajmi 	$x_C = 0;$ $y_C = 0;$ $z_C = 3R/8.$

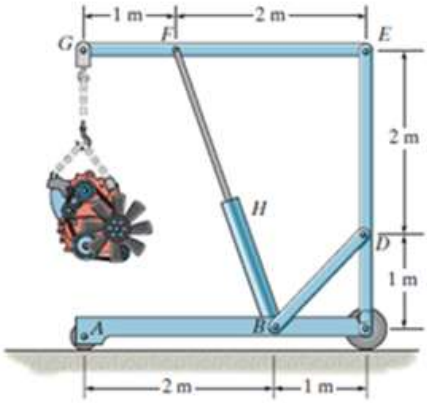
5	Konus hajmi 	$x_C = 0;$ $y_C = 0;$ $z_C = 3h/4.$
6	Piramida hajmi 	$SS_1 = \dfrac{SE}{3} = \dfrac{S_1E}{4}.$

2.3. JISMLAR SISTEMASINING MUVOZANAT HOLATI.

2.3.1. Murakkab tuzilmalarning turlari va hisoblash usullari.

A. <u>MURAKKAB TUZILMALARNING TURLARI.</u> Bino-inshootlar va mashina-mexanizmlar bir necha qismlardan iborat bo‘lib, bu qismlar turli vositalar yordamida bir-biriga bog‘langan bo‘ladi. Nazariy mexanika fani bunday sistemalarni butunligicha yoki bo‘laklarga bo‘lib, alohida-alohida muvozanatini tekshiradi. Quyidagi tasvirlarda turli inshootlar va texnikada uchraydigan jismlar majmuasi keltirilgan (2.43-shakl)[2].

a) b) d)

e) j) i) 

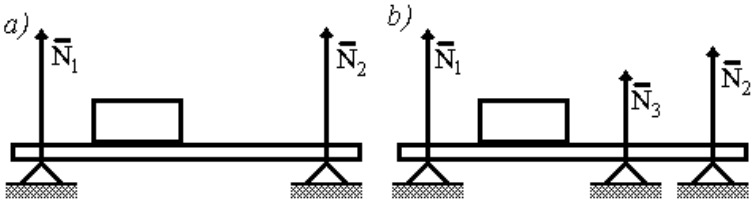
2.43-shakl.

B. <u>HISOBLASH USULLARI</u>. Nazariy mexanika fanida fazoviy jismlar sistemasi ko‘pincha soddalashtirish uchun tekislikdagi jismlar sistemasiga keltiriladi. Uning ikki xilini ko‘rib o‘tamiz:

a) sistema qismlarining birikish nuqtalarida (sharnir, parchin mix, podshipnik, ro‘lik-g‘ildirak, payvandlangan va h.k.) bo‘laklarga bo‘linib, alohida muvozanat shartlari tuziladi. Bunda faqat klassik mexanikaning ta’sir va aks ta’sir qonuni hisobga olinadi. Bu usul mexanikada ***qismlarga ajratish usuli*** yoki ***tugun kesish usuli*** deb ataladi.

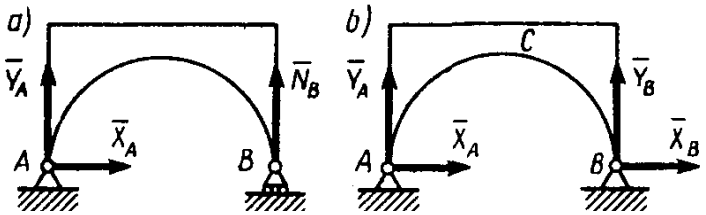
b) ikkinchi usul, ixtiyoriy fazoviy sistemani biror tekislik bilan kesib olib, alohida kesimlar muvozanati tahlil qilinadi va olingan natijalar umumlashtiriladi. Bunday usul ***kesimlar usuli*** yoki ***kesish usuli*** deb ataladi.

D. <u>STATIK ANIQ VA NOANIQ MASALALAR</u>. Matematika fanidan ma‘lumki, noma’lum qiymatlarni aniqlash uchun ularning soniga teng tenglamalar tuziladi. Nazariy mexanika fanining statika qismida noma’lum qiymatlar muvozanat tenglamalari orqali aniqlanadi. Yechilayotgan masalalardagi noma’lum qiymatlar va muvozanat tenglamalari soni o‘zaro mos kelishi talab etiladi. Shuning uchun qo‘yilgan muammo yoki masala statik tahlil qilinadi va yechish mumkinmi, yo‘qmi tekshiriladi. Agar masalada noma’lum qiymatlar soni muvozanat tenglamalari soniga teng yoki kam bo‘lsa, bunday masalalar ***statik aniq masalalar*** deb ataladi. Noma’lum qiymatlar soni ko‘p bo‘lib, muvozanat tenglamalari soni kam holda masala oxirigacha yechilmaydi va ***statik noaniq masalalar*** deb ataladi.



2.44-shakl.

Masalan 2.44,a-shaklda 2 ta noma’lum qiymatlar-N_1 va N_2 uchun tekislikda joylashgan parallel kuchlarning 2 ta muvozanat shartlari tuziladi (2.5-jadval). Lekin 2.44,b-shakldagi 3 ta noma’lumlar-N_1, N_2 va N_3 uchun 2 ta tenglama yetarli bo‘lmaydi.



2.45-shakl.

Xuddi shunday, 2.45,a-shakldagi 3 ta noma’lum-X_A,Y_A va $N_B$uchun tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlarning 3 ta muvozanat shartlari tuzilsa (2.5-jadval),

2.45,b-shakldagi 4 ta noma'lum qiymatlar- X_A, Y_A, X_B va Y_B uchun 3 ta tenglama yetarli bo'lmaydi.

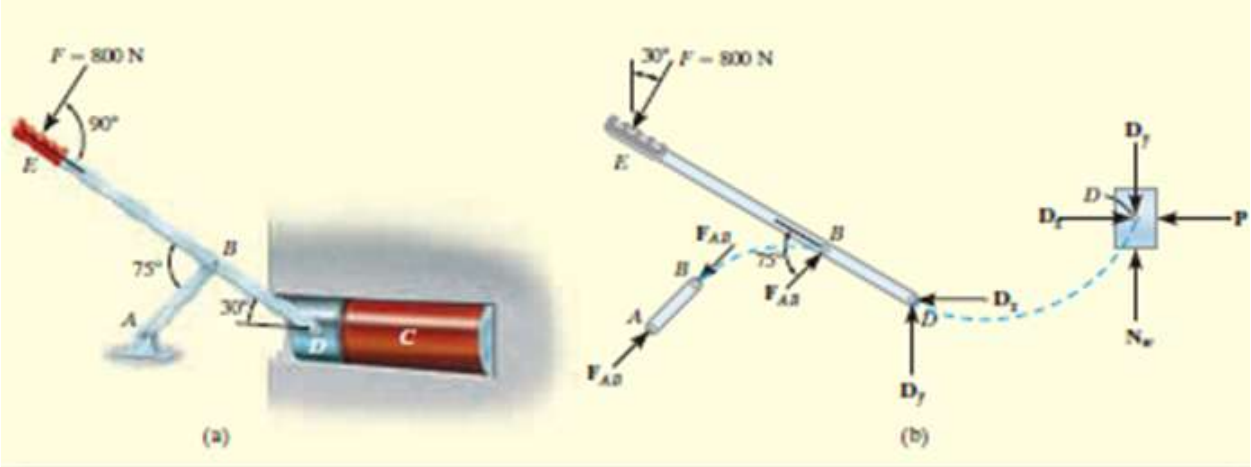
Bir necha qismlardan iborat tuzilmalarni statik hisoblaganda ham echishdan oldin ularni bo'laklarga bo'linadi, yuqoridagidek tahlil qilinadi va tenglamalar soni yetarli bo'lganda, hisob-kitob oxiriga yetkaziladi. Statik noaniq masalalarning ba'zi-birlari boshqa fanlarda (materiallar qarshiligi, gidravlika va h.k.) qo'shimcha tenglamalar tuzish yordamida yechiladi.

Yuqoridagi ma'lumotlarni aniq misol va masalalarda mustahkamlaymiz.

1-masala [2]: Richag-po'lzunli mexanizm dastagiga F=800 *N* kuch ta'sir etadi (2.46,a-shakl). Agar mexanizmning o'lchamlari 2DB=BE= 0,4 m va burchaklar berilgan bo'lsa, AB sterjenda, D sharnirda va C po'lzunda hosil bo'ladigan reyaktsiya kuchlarining qiymatini toping.

Yechish: mexanizmni qismlarga ajratib, noma'lum kuchlar sonini tahlil qilamiz (2.46,b-shakl) va muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

1) DE dastakda 3 ta noma'lum kuchlar-D_x,D_y va F_{AB} bo'lib (chet el adabiyotida reaksiya kuchlari X_D,Y_D emas, balki D_x,D_y ko'rinishida yoziladi), tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlarning muvozanat shartlarini tuzamiz:



2.46-shakl.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & -D_x - F\cos 60° + F_{AB}\cos 45° = 0; \quad (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -D_y - F\cos 30° + F_{AB}\sin 45° = 0; \quad (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_D(\vec{F}_k) = 0. & F{\cdot}DE - F_{AB}\cos 15°{\cdot}BD = 0. \quad (3) \end{cases}$$

noma'lumlarni aniqlaymiz:

(3) tenglamadan

$$F_{AB} = (F{\cdot}DE)/(BD{\cdot}\cos 15°) = \frac{800{\cdot}0{,}6}{0{,}2{\cdot}0{,}966} = 2484{,}47\ N;$$

(1) tenglamadan

$$D_x = -F{\cdot}\cos 60° + F_{AB}\cos 45° = -800{\cdot}0{,}5 + 2484{,}47{\cdot}0{,}707 = 1356{,}52\ N;$$

(2) tenglamadan

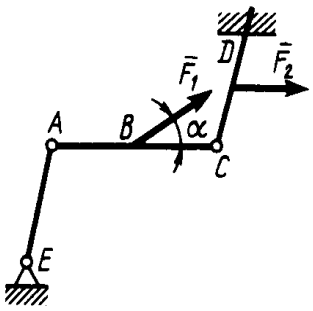
$$D_y = -F{\cdot}\cos 30° + F_{AB}\sin 45° = -800{\cdot}0{,}866 + 2484{,}47{\cdot}0{,}707 = 1063{,}72\ N.$$

2) Po'lzunning muvozanatini tekshiramiz. Unga 4 ta kuch ta'sir qilib, 2 tasi noma'lum- P va N_C. Shuning uchun tekislikda joylashgan kesishuvchi kuchlarning muvozanati tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & D_x - P = 0; \quad (4) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -D_y + N_C = 0. \quad (5) \end{cases}$$

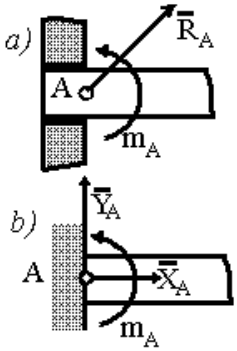
bundan P = D_x = 1356,52 N, $N_C = D_y = 1063{,}72\ N.$

2-masala: O'lchamlari AE=3 *m*, AB=BC=2 *m*, DC=3 *m* bo'lgan tuzilmaning B nuqtasiga go'rizontal DC sterjenga α=30° burchak ostida F_1=80 N kuch, qiyaligi 60° bo'lgan DC sterjenning o'rtasiga esa gorizontal F_2=60 N ta'sir qiladi (2.47-shakl). A, C, E sharnirlarda va qistirib mahkamlangan D tayanchda hosil bo'ladigan reaksiya kuchlarining qiymatini toping.



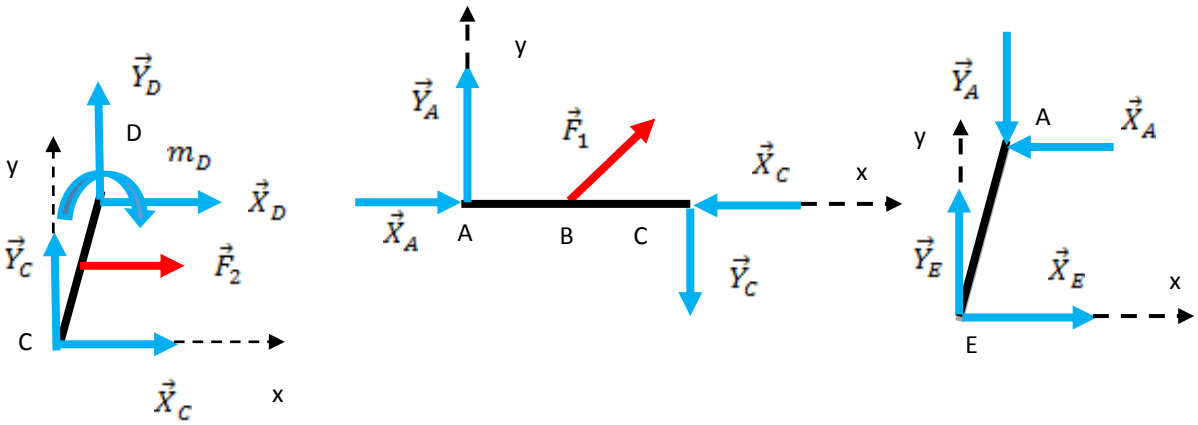
2.47-shakl.

Yechish: tuzilma 3 qismdan iborat, shuning uchun muvozanat tenglamalari soni 3x3= 9 ta bo‘ladi. Noma’lum kuchlar soni esa, A da $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, C da $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$, E da $\vec{X}_E, \vec{Y}_E$. Qistirib mahkamlangan D tayanchda esa 3 ta-$\vec{X}_D, \vec{Y}_D$, m_D-juft kuch momenti hosil bo‘ladi (2.48-shakl). Demak hammasi- 9 ta . Masala statik aniq.



2.48-shakl.

1) AC qismining muvozanat tenglamalarini tuzamiz (2.49,a-shakl):



a) b) d)

2.49-shakl.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad X_D + X_C + F_2 = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad Y_D + Y_C = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_D(\vec{F}_k) = 0. \quad F_2 \cos 30° \cdot \frac{DC}{2} + X_C \cos 30° \cdot DC - Y_C \cos 60° \cdot DC - m_D = 0. & (3) \end{cases}$$

2) CD qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz (2.49,b-shakl):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad X_A - X_C + F_1 \cos\alpha = 0; & (4) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad Y_A - Y_C + F_1 \sin\alpha = 0; & (5) \\ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. \quad F_1 \cos 60° \cdot AC/2 + Y_C \cdot AC = 0. & (6) \end{cases}$$

DE qismi uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz (2.49,d-shakl):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad X_E - X_A = 0; & (7) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad Y_E - Y_A = 0; & (8) \\ \sum_{k=1}^{n} m_E(\vec{F}_k) = 0. \quad X_A \cos 30° \cdot AE - Y_A \cos 60° \cdot AE = 0. & (9) \end{cases}$$

Noma'lumlarni aniqlash:

(6) tenglamadan $Y_C = F_1 \cos 60° = 80 \cdot 0{,}5 = 40\ N;$

(5) tenglamadan $Y_A = Y_C - F_1 \sin\alpha = 40 - 80 \cdot 0{,}5 = 0\ N;$

(8) tenglamadan $Y_E = Y_A = 0;$ (9) dan $X_A = 0\ N;$

(7) dan X_E=0;

(4) tenglamadan $X_C = X_A + F_1 \cos\alpha$ =0+80·0,866= 69,28 N;

(1) tenglamadan $X_D = -X_C - F_2$= -69,28-60 = 129,28 N;

(2) tenglamadan $Y_D = -Y_C = -40\ N;$

(3)tenglamadan

$m_D = F_2 \cos 30^0 \cdot CD/2 + X_C \cos 30^0 \cdot CD - Y_C \cos 60^0 \cdot CD =$

$= 60 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 + 129{,}28 \cdot 0{,}866 \cdot 3 - 40 \cdot 0{,}5 \cdot 3 = 353{,}8\ N \cdot m.$

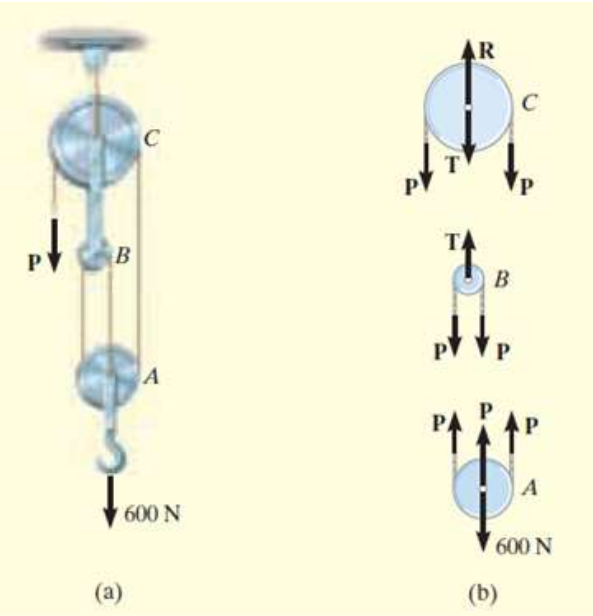
3-masala[2]: og‘ir yuklarni ko‘tarishga mo‘ljallangan moslamaga 600 N li og‘ir jism osilgan (2.50,a-shakl). Agar A,C shkivlar va B blo‘k radiuslari mos ravishda $r_A = 0{,}3\ m, r_B = 0{,}2\ m, r_C = 0{,}5\ m$ bo‘lsa, jismni tinch holatda ushlab turish uchun $\vec{P}$ kuchning qiymatini toping.

Yechish: mexanizmni 3 qismga bo‘lib olib, alohida muvozanat tenglamalarini tuzamiz (2.50,b-shakl):

1) A shkivda qiymatlari bir xil bo‘lgan 3 ta noma’lum kuchlar bor, shuning uchun parallel kuchlarning muvozanat shartlarining bittasi yetarli bo‘ladi,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ \ 3P - 600 = 0;$$

demak P = 200 *N*.



2.50-shakl.

2) B blo‘kda 1 ta noma’lum $\vec{T}$, demak

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ T - 2P = 0;$$

bundan T = 2P = 400 *N*.

3) C skivda esa 1 ta noma’lum $\vec{R}$, shuning uchun,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad R - T - 2P = 0,$$

demak R = T+2P = 400+400 = 800 *N*.

2.3.2. Fermalardan iborat tuzilmalarni hisoblash usullari.

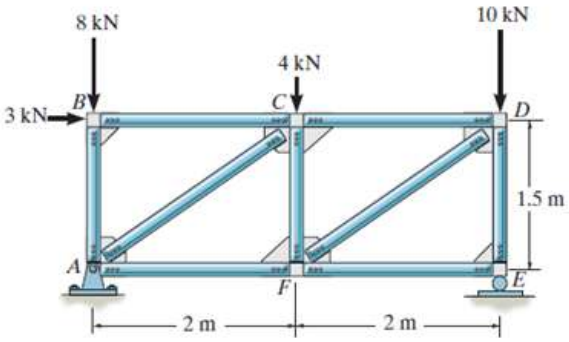
Bino-inshoot va mashina-mexanizmlarning qismlarini butun jismlardan tayyorlash ularning og‘irligini va iqtisodiy qiymatini oshirib yuborishi mumkin. Ikkinchidan ilmiy tajribalar shuni ko‘rsatdiki, ichki zo‘riqishlar asosan jismning ma‘lum yo‘nalishlarida hosil bo‘lar ekan. Bu ma‘lumotlar materiallar qarshiligi fanida isbot qilinadi. Shuning uchun juda ko‘p tuzilmalar og‘irligi hisobga olinmaydigan ***sterjenlar*** va ***sharnirlardan*** tashkil topadi (2.51-shakl).

Demak to‘g‘ri sterjenlar va sharnirlardan iborat tuzilmalar ***fermalar*** yoki ***fermalardan iborat tuzilmalar*** deb ataladi (2.51-shakl).

a) b)

2.51-shakl.

Ferma so‘zi fransuz tilidan olingan bo‘lib, “freme”-“mustahkam” ma‘nosini beradi. Agar fermaning barcha sterjenlari bitta tekislikda joylashgan bo‘lsa, bunday fermalar ***tekis fermalar*** deb ataladi (2.52-shakl) [2]. Gorizontal sterjenlar - AF,FE,BC va CD ***belbog‘lar***, vertikal sterjenlar – AB,CF va DE ***ustunlar***, qiya sterlenlar – AC va FD esa ***tirgaklar*** deb ataladi.



2.52-shakl.

Fermalar hisobida ikkita cheklanish (absolyutlashtirish) mavjud bo‘lib, ular hisob-kitoblarni qisqartirish va soddalashtirishga olib keladi. Lekin olingan natijalar haqiqiysidan farq qilmaydi:

a) barcha yuklar va tashqi kuchlar faqat fermaning tugunlariga (sharnirlariga) qo‘yilishi shart;
b) tugunlardagi ishlqalanish kuchlari va sterjenning og‘rlik kuchlari e‘tiborga olinmaydi yoki tugunlardagi kuchlarga qo‘shib yuboriladi.

Demak *ferma sterjenlari faqat cho‘zilishga yoki siqilishga ishlaydi.*

Geometriya fanidan ma‘lumki, uchburchak eng mustahkam shakl hisoblanadi. Shuning uchun aksari fermalar uchburchaklardan iborat bo‘ladi. Ikkinchidan, fermalarning mustahkamligi va optimalligi (kam yoki ortiqcha qismlari bor-yo‘qligi) quyidagi bog‘lanishdan aniqlanadi:

$$k=2n-3\,, \qquad (2.45)$$

bunda k-sterjenlar soni, n-sharnir(tugun)lar soni.

Nazariy mexanikada ***fermalar hisobi*** quyidagi bosqichlardan iborat bo‘ladi:

a) fermalarning mustahkamligi va optimalligi (2.45) formula yordamida tekshiriladi;
b) ferma tayanchlaridagi reaksiya kuchlari aniqlanadi;
d) ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlar aniqlanadi.

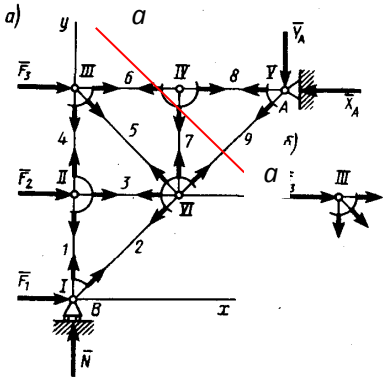
Ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlar uch usulda topiladi:

a) tugun (sharnir) kesish usuli;
b) sterjenlarni qirqish (kesimlar) usuli (Ritter usuli);
d) geometrik (diagrammalar) usuli (Maksvell - Kremoni usuli).

Yuqoridagi usullarning qo‘llanilishi birinchidan, natijalarni tekshirishga yordam bersa, ikkinchidan tugun kesish usuli tuzilmani boshidan oxirigacha hisoblashni, sterjenlarni qirqish usuli ixtiyoriy sterjendagi zo‘riqishni qisqa yo‘l bilan aniqlashga qulay. Maksvell-Kremoni usuli “Qurilish mexanikasi” fanida to‘liq o‘rganiladi. Muvozanat tenglamalari sonining cheklanganligi tufayli kesilayotgan tugunda noma’lumlar soni 2 tadan, qirqilayotgan sterjenlar soni 3

tadan ortmasligi lozim. Olingan bilimlarni mustahkamlash uchun amaliy masalalar yechamiz.

1-masala: 2.53-shakldagi bir necha teng yonli (*a*-metr) uchburchaklardan tashkil topgan ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlari aniqlansin. Fermaning tugunlariga qo‘yilgan kuchlar o‘zaro parallel va teng bo‘lib, ular F_1=F_2= F_3= 20 kN dan iborat bo‘lsin.



2.53-shakl.

Yechish: 1) Berilgan fermaning sterjenlarini va sharnirlarini pastdan-yuqoriga, chapdan-o‘ngga raqamlar bilan belgilab chiqamiz. Demak sterjenlar soni k=9 ta, sharnirlar soni n=6 ta ekan. U holda (2.45) shartning bajarilishini tekshiramiz:

$$k = 2n-3,$$

$$9 = 2\cdot 6 -3,$$

$$9 = 9.$$

2) Tayanch reaksiya kuchlarini ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ va $\vec{N}$) aniqlash uchun tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlarning muvozanat shartlarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad -X_A + F_1 + F_2 + F_3 = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad -Y_A + N = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. \quad F_1\cdot 2a + F_2\cdot a - N\cdot 2a = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) tenglamadan $X_A = F_1 + F_2 + F_3$ =60 *N*,

(3) dan N = $F_1 + F_2/2$= 30 *N* va (2) dan $Y_A = N$ = 30 *N*.

3) ***Tugunlarni kesish usuli*** yordamida ferma sterjenlaridagi zo‘riqishlarni aniqlaymiz. Tugunlardagi kuchlar kesishuvchi kuchlar sistemasi bo‘lganligi uchun 2 ta muvozanat shartlari tuziladi va tugunlardagi noma’lumlar soni ham 2 tadan ortmasligi shart.

a) I-tugunni kesamiz, sterjenlar cho‘zilishga qarshi ishlayabdi deb faraz qilib, sterjenlar zo‘riqish kuchlarini uning boshlanishidan markaziga tomon yo‘naltiramiz. Muvozanat shartlari quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & F_1 + S_2 \cos 45° = 0; \quad (4) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & N + S_1 + S_2 \sin 45° = 0. \quad (5) \end{cases}$$

(4) tenglamadan $S_2 = -F_1/\cos 45° = -20/0{,}707 = -28{,}3\ N$,

(5) dan $S_1 = -N - S_2 \sin 45° = -30 + 28{,}3 \cdot 0{,}707 = -10\ N$.

b) II-tugunni kesamiz, bunda 2 ta noma’lum $\vec{S}_3$ va $\vec{S}_4$ bo‘lib, ta’sir-aks ta’sir qonuniga muvofiq $\vec{S}_1 = -\vec{S}'_1$.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & F_2 + S_3 = 0; \quad (6) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -S'_1 + S_4 = 0. \quad (7) \end{cases}$$

Demak $S_3 = -F_2 = -20\ N$, $S_4 = S'_1 = S_1 = -10\ N$.

d) III-tugunni kesamiz, bunda 2 ta noma’lum $\vec{S}_5$ va $\vec{S}_6$ bo‘lib, ta’sir-aks ta’sir qonuniga muvofiq $\vec{S}_4 = -\vec{S}'_4$.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & F_3 + S_5 \cos 45° + S_6 = 0; \quad (8) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -S'_4 - S_5 \sin 45° = 0. \quad (9) \end{cases}$$

Demak $S_5 = -S'_4/\sin 45° = 10/0{,}707 = 14{,}1\ N$,

$S_6 = -F_3 - S_5 \cos 45° = -20 - 14{,}1 \cdot 0{,}707 = -30\ N$.

e) IV- tugunni kesamiz, bunda 2 ta noma'lum $\vec{S}_7$ va $\vec{S}_8$ bo'lib, ta'sir-aks ta'sir qonuniga muvofiq $\vec{S}_6 = -\vec{S}'_6$.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & -S_6 + S_8 = 0; \quad (10) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -S_7 = 0. \quad (11) \end{cases}$$

Demak $S_7 = 0$, $S_8 = -S_6$=30 *N*.

f) VI- tugunni kesamiz, bunda 1 ta noma'lum $\vec{S}_9$ bo'lib, ta'sir-aks ta'sir qonuniga muvofiq $\vec{S}_2 = -\vec{S}'_2$, $\vec{S}_3 = -\vec{S}'_3$, $\vec{S}_5 = -\vec{S}'_5$, $\vec{S}_7 = -\vec{S}'_7$.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad -S_3 - S_2 \cos 45° - S_5 \cos 45° + S_9 \cos 45° = 0; \qquad (12)$$

Bundan $S_9 = S_3 / \cos 45° + S_2 + S_5$ =-20/0,707-28,3+14,1=-42,48 *N*.

Hisoblangan natijalarni jadval ko'rinishida keltiramiz (2.7-jadval):

2.7-jadval.

sterjen №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zo'riqish, kN.	-10	-28,3	-20	-10	+14,1	-30	0	30	-42,48

Demak berilgan kuchlar ta'sirida 1,2,3,4,6 va 9-sterjenlar siqilishga, 5 va 8-sterjenlar cho'zilishga qarshi ishlar ekan. 7-sterjen esa ***nol sterjen*** deb ataladi.

1) Sterjenlarni qirqish (kesimlar) usuli (Ritter usuli). Yuqoridagi natijalarni tekshirish uchun *a-a* kesim yordamida 6,7 va 9- sterjenlarni qirqib, tuzilmaning o'ng qismining muvozanatini ko'ramiz. Tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlarning muvozanati tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & -X_A - S_6 - S_9 \cos 45° = 0; \quad (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & -Y_A - S_7 - S_9 \sin 45° = 0; \quad (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. & S_7 \cdot a = 0\,. \quad (3) \end{cases}$$

(3) tenglamadan $S_7 = 0$, (2) dan $S_9 = -Y_A / \sin 45°$= -30/0,707= -42,43 *N*,

(1) dan $S_6 = -X_A - S_9 \cos 45° = -60 + 42{,}43 \cdot 0{,}707 = -30\ N$.

Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, S_6, S_7 va S_9 sterjenlardagi zo‘riqishlar ikkala usulda ham bir xil ekan.

Agar ferma sterjenlari uch o‘lchovli fazoda joylashgan bo‘lsa, bunday fermalar ***fazoviy fermalar*** deb ataladi. Fazoviy fermalar hisobi ham xuddi tekis fermalar kabi olib boriladi, faqat muvozanat shartlari fazoviy kuchlar uchun tuzilishi shart.

2-masala [2]: Fazoviy fermaning A tuguniga $\vec{P}$ = -4$\vec{j}$, B tuguniga $\vec{Q}$ = -2$\vec{k}$ kuchlar ta’sir qilsa, AB, AC, AE, BC, BD va BE sterjenlardagi zo‘riqishlarni aniqlang (2.54-shakl,*a*) [2].

Yechish: A tugunni kesib, fazoviy kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlarini tuzamiz (2.54-shakl,b):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad F_{AE} \cos(\angle AEC) \cdot \cos 45° = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad F_{AB} + F_{AE} \cos(\angle AEC) \cdot \sin 45° - 4 = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad -F_{AC} - F_{AE} \sin(\angle AEC) = 0; & (3) \end{cases}$$

bunda $\sin(\angle AEC)$ = AC/AE = 2/$\sqrt{12} = 0{,}577$;

$\cos(\angle AEC)$ = AC/CE = $\sqrt{8}/\sqrt{12} = 0{,}81$;

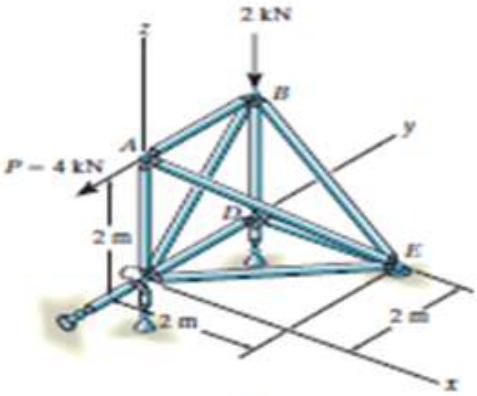
(1) va (3) dan $F_{AE} = F_{AC}$=0, (2) dan $F_{AB} = 4$.

B tugunni kesib, quyidagi tenglamalarni tuzamiz (2.54-shakl,d):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad F_{BE} \cos(\angle BED) = 0; & (4) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad -F_{AB} + F_{BC} \cos 45° = 0; & (5) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad -2 - F_{BD} - F_{BC} \sin 45° - F_{BE} \cos 45° = 0; & (6) \end{cases}$$

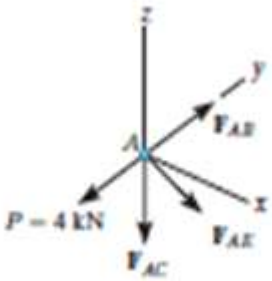
(4) tenglamadan $F_{BE} = 0$, (5) dan F_{BC}=$F_{AB} / \cos 45°$ =4/0,707=5,66 *N*,

(6) dan $F_{BD} = -2 - F_{BC} \sin 45° = -2+5{,}66 \cdot 0{,}707 = 2\ N$.



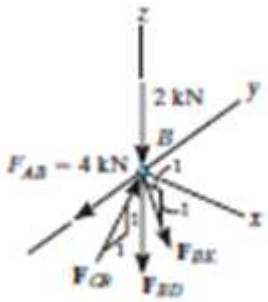
(a)

a)



(b)

в)



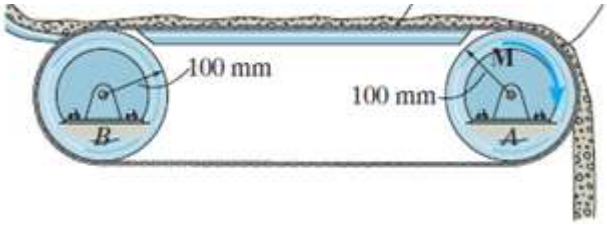
(c)

d)

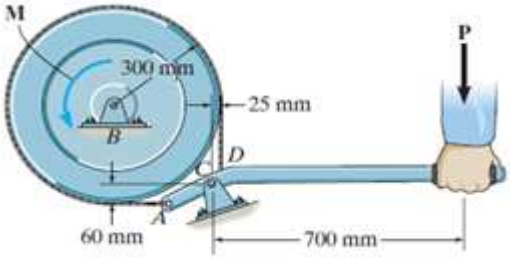
2.54-shakl.

2.3.3. Ishqalanish kuchi ta’siridagi jismlar muvozanati.

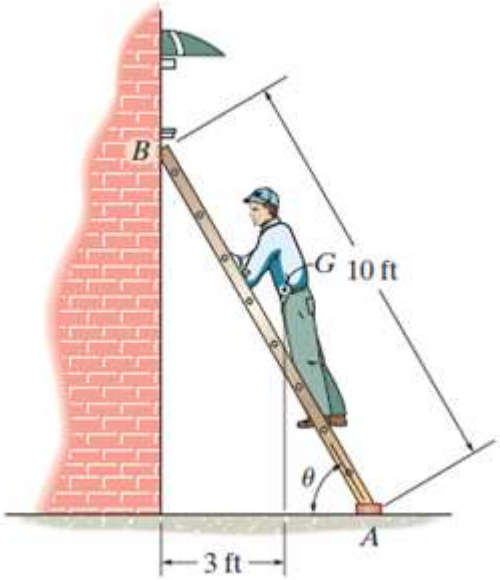
Shu paytgacha jismlarning sirtlari ideal silliq sirt deb hisoblandi. Lekin tabiatda va texnikada jismlarning sirtlari ma’lum darajada g‘adir-budur va yopishqoqlikka ega. Ikkinchidan, mexanizmlarning juda ko‘p qismi ishqalanish kuchi ta’sirida harakatga keladi yoki muvozanatda bo‘ladi. Masalan tasmali uzatmalar va tormoz tizimlari ishqalanish kuchi ta’sirida ishlaydi (2.55-shakl,a,b). Qiya tekislikdagi jismlarning muvozanati va press mexanizmlarida ishqalanish kuchi muhim ahamiyatga ega (2.55-shakl,d,e). Shuning uchun nazariy mexanikada ishqalanish kuchi albatta hisobga olinadi.



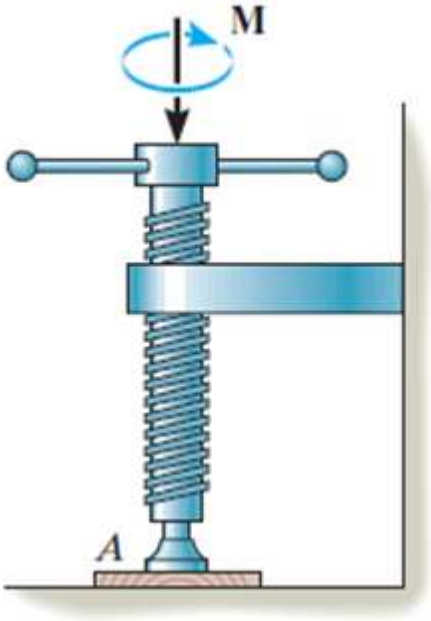
a)



b)



d)



e)

2.55-shakl.

Ishqalanish hodisasi, umuman olganda murakkab muammolardan biri hisoblanib, ularning mukammal nazariyasi nazariy mexanika fanidan tashqari,

alohida o‘rganiladi. Nazariy mexanika fanida quyidagi ikki xil ishqalanish kuchlari o‘rganilib, asosan tajribalar orqali aniqlangan, empirik-taxminiy formulalar yordamida hisob-kitoblar olib boriladi:

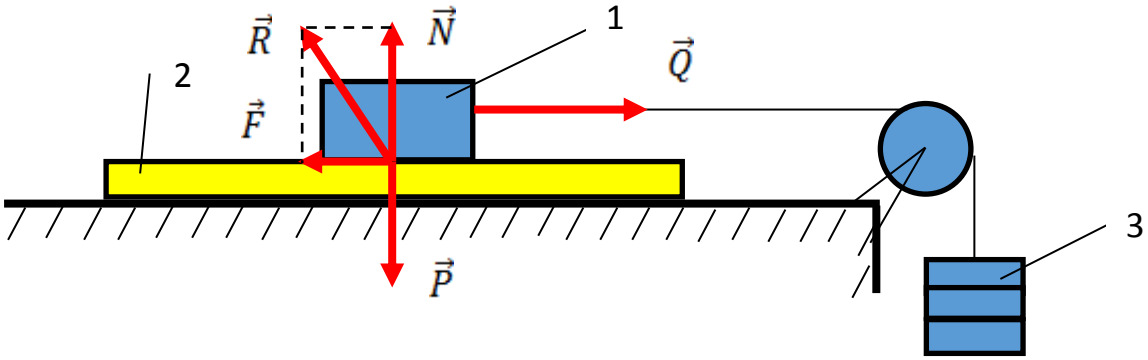
a) sirpanib ishqalanish kuchi;

b) dumalab ishqalanish kuchi.

Shunga qaramay, olingan nazariy natijalar tajriba natijalariga juda yaqin va yetarli darajada aniqlikka ega.

A. SIRPANIB ISHQALANISH KUCHI.

Bir jismning ikkinchi jism sirtida aylanmasdan sirpanishida hosil bo‘lgan kuchga ***sirpanib ishqalanish kuchi*** deb ataladi. Bu kuch vektori harakatga teskari va jismlar sirtiga urinma bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi. Sirpanib ishqalanish kuchini XXVII-XXVIII asrlarda yashab o‘tgan fransuz olimlari Kulon[12], G. Amonton[13] va A. Morenlar[14] tajribalar yordamida aniqlashgan. Gorizontal stolda joylashgan turli materialdan tayyorlangan 1-yuk va 2-asos bo‘lib, blok orqali osilgan 3-yuklar yordamida tortiladi (2.56-shakl).



2.56-shakl.

Tajriba natijalari qyidagi xususiyatlar orqali keltirilgan:

a) sirpanib ishqalanish kuchi jismlarning materialiga, sirtlarning g‘adir-budirligiga, tezligi, harorati va juda ko‘p fizikaviy-kimyoviy xususiyatlariga bogliq;

b) sirpanib ishqalanish kuchi jismlarning ishqalanuvchi sirt o‘lchamlariga (yuzalariga) bog‘liq emas;

d) jism harakati paytidagi ishqalaninsh kuchi tinch holatdagi ishqalanish kuchidan kichik bo‘ladi;

e) maksimal ishqalanish kuchi jismning tinch holati va harakati boshlanishi chegarasida bo‘ladi va normal bosimga proporsiyonal:

$$F_{ish} = f \cdot N\,; \qquad (2.46)$$

bunda f- ishqalanish koeffisienti ($0 < f < 1$),

N-normal bosim kuchi.

c) tinch holatdagi (statik) ishqalanish kuch harakatdagi (dinamik) ishqalanish kuchidan katta bo‘ladi:

$$F_{ish}^{stat} > F_{ish}^{din}\ .$$

Lekin nazariy mexanikaning statika qismida ham dinamika qismida ham sirpanib ishqalanish kuchi (2.46) formula orqali aniqlanadi. Boshqacha aytganda, dinamika qismida sirpanib ishqalanish kuchi kerakligidan ortiqroq olinadi.

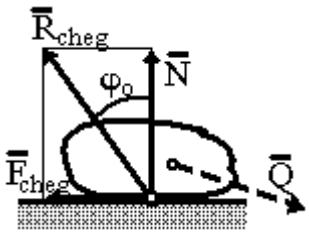
Sirpanib ishqalanish koeffitsienti f turli materiyallar uchun turlicha bo‘lib, uning qiymati tajribalar yordamida aniqlangan va maxsus ma’lumot jadvallarida keltiriladi(2.8-jadval).

2.8-jadval.

T/r	Ishqalanuvchi jismlarning materiali	*f* ning qiymati
1	yog‘och bilan yog‘och sirt uchun	0,4 - 0,7
2	metall sirt bilan metall sirt uchun	0,15 - 0,25
3	polat muzning ustida sirpansa	0,027

B. SIRPANIB ISHQALANISH KUCHI TA’SIRIDAGI JISMLAR MUVOZANATI.

Ishqalanish kuchi ta’siridagi jismlarni o‘rnidan qo‘zg‘atish uchun ikkita kuchlar – ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ va no‘rmal bosim $\vec{N}$ kuchlarini yengib o‘tish zarur (2.57-shakl).



2.57-shakl.

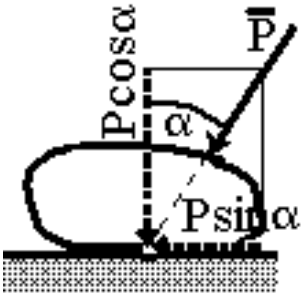
Ya’ni real qarshilik kuchi $\vec{R}$ ikkala kuchlarning vektor yig‘indisidan iborat bo‘ladi

$$\vec{R} = \vec{F}_{ish} + \vec{N}. \qquad (2.47)$$

Normal bosim va qarshilik kuchi orasidagi burchak φ_0 esa ***ishqalanish burchagi*** deb ataladi. Ko‘rinib turibdiki, ishqalanish kuchi qancha katta bo‘lsa, ishqalanish burchagi ham shuncha katta bo‘ladi va jismni harakatga keltirish shuncha qiyin bo‘ladi:

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_{ish}}{N} = \frac{fN}{N} = f. \qquad (2.48)$$

Agar jismni g‘adir-budur yuzaga qo‘yib, unga normal bilan α burchak tashkil qiluvchi $\vec{P}$-kuch bilan ta’sir qilsak (2.58-shakl), jism siljimasligi ham mumkin. Uning siljishi uchun suruvchi kuchning harakat o‘qidagi proyeksiyasi- Rsinα chegaraviy ishqalanish kuchi F_{ish} =f Rcosα dan katta bo‘lishligi shart (bu yerda N=Rcosα, va og‘irlik kuchi e’tiborga olinmagan).

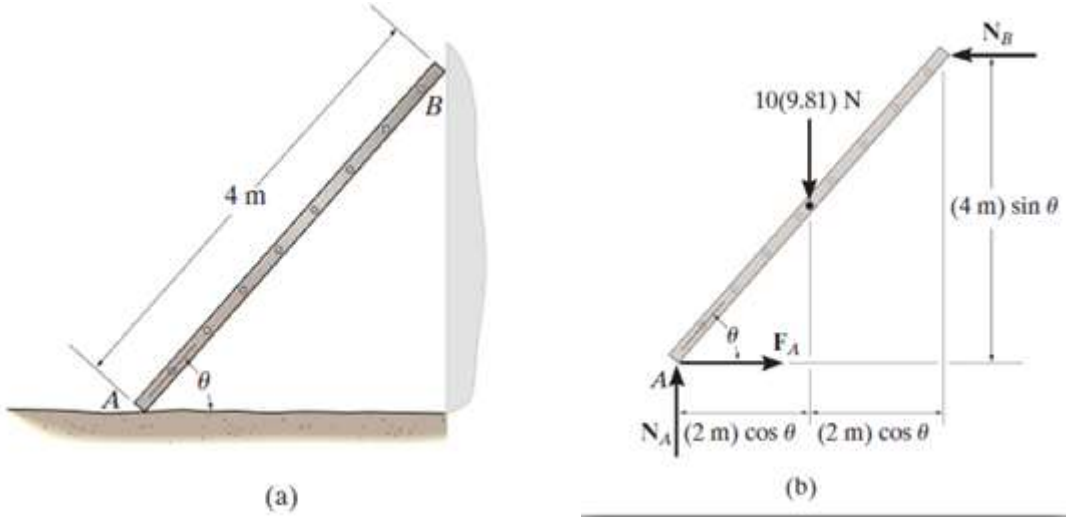


2.58-shakl.

Lekin Rsinα > f Rcosα tengsizlik qanoatlanishi uchun, (f=tgφ_0 ekanligini e’tiborga olsak) tgα>tgφ_0 bo‘lishi kerak, yani α>φ_0 . Demak, agar α<φ_0 bo‘lsa jismga ta’sir etuvchi kuch qanday katta bo‘lishidan qat’iy nazar u sirpanmas ekan. Shu sababli, jismlar o‘z-o‘zidan tormozlanib, yoki tiqilib qolish hodisalari sodir bo‘ladi.

Sirpanib ishqalanish kuchi ta’siridagi jismlar muvozanatiga bag‘ishlangan amaliy masalalar yechishda berilgan kuchlar qatoriga (2.46) formula orqali aniqlangan ishqalanish kuchi qo‘shiladi va 2.5-jadvalda keltirilgan muvozanat shartlari tuziladi. Bu jarayonni aniq misollarda ko‘rib chiqamiz [2].

1-masala (chet el adabiyotidan olindi[2]): Uzunligi 4m, og‘irligi 10N bo‘lgan narvon A nuqtasi bilan g‘adir-budur asosga va B nuqtasi bilan silliq devorga tegib turibdi. Agar asosdagi sirpanib ishqalanish koeffitsiyenti 0,3 bo‘lsa, A va B nuqtalardagi bosim kuchlari va narvon muvozanatining maksimal burchagi θ ni aniqlang (2.59-shakl,a).



2.59-shakl.

Yechish: Narvon muvozanatida ishtirok etuvchi $\vec{P}$ -og‘irlik kuchi, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ –bosim kuchlari va $\vec{F}_A$ – asosdagi ishqalanish kuchlarini belgilab, tekislikda joylashgan ixtiyoriy kuchlarning muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad F_A - N_B = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad -P + N_A = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0. \quad N_B \cdot 4\sin\theta - P \cdot 2\cos\theta = 0\,. & (3) \end{cases}$$

(2) tenglamadan $N_A = P = 10\,N;$ ishqalanish kuchi esa $F_A = f \cdot N_A = 0{,}3 \cdot 10 = 3N;$

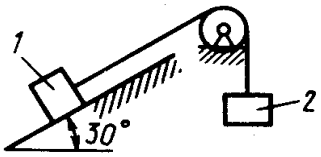
(1) dan $F_A = N_B = 3N;$

(3) tenglamani $2\cos\theta$ ga bolib,

$$\text{tg}\,\theta = \frac{P}{2N_B} = \frac{10}{2 \cdot 3} = 1{,}67.$$

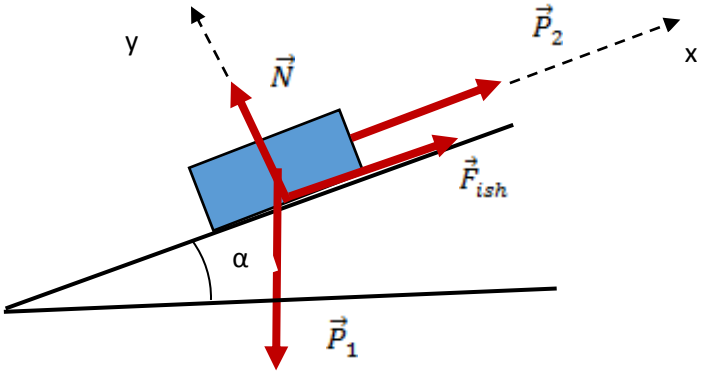
Demak muvozanatining maksimal burchagi θ ≈ 59°.

2-masala: Og‘irligi 100 N bo‘lgan 1-yuk ip yordamida 2-yuk bilan blok orqali bog‘langan. Agar 1-yuk va tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsienti f=0,3 va α=30° bo‘lib, 1 yuk o‘z joyida qolishi uchun 2 – yukning maksimal qiymatini toping?



2.60-shakl.

Yechish: 1-yukning qiya tekislikdagi muvozanatini ko‘ramiz. Yuk pastga harakat qilishi mumkin (2.61-shakl).



2.61-shakl.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, & P_2 - P_1 \sin\alpha + F_{ish} = 0; \quad (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, & N - P_1 \cos\alpha = 0. \quad (2) \end{cases}$$

(2) tenglamadan

$$N = P_1 \cos\alpha = 100 \cdot 0{,}866 = 86{,}6\ N;$$

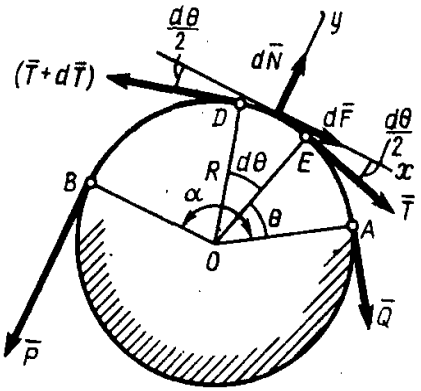
sirpanib ishqalanish kuchi esa

$$F_{ish} = f \cdot N = 0{,}3 \cdot 86{,}6 = 25{,}98\ N;$$

(1) dan $$P_2 = P_1 \sin\alpha - F_{ish} = 100 \cdot 0{,}5 - 25{,}98 = 24{,}02\ N$$

D. IPNING SILINDRIK SIRT USTIDAGI ISHQALANISHI.

Silindrik valning sirtiga tashlab qo‘yilgan ipning bir uchiga (2.62-shakl) $\vec{P}$ kuch qo‘yilgan. Agar ip bilan silindrning sirti orasidagi ishqalanish koeffitsienti f bo‘lsa, markaziy burchak AOB ga teng bo‘lgan yoy sirtidagi ipni muvozanatda ushlab turishi uchun uning ikkinchi uchiga qo‘yilishi zarur bo‘lgan $\vec{Q}$ kuchning minimal qiymati aniqlansin.



2.62 -shakl.

Masalani yechish uchun ipning uzunligi dl=R·dθ bo‘lgan DE elementining muvozanat holatini ko‘rib chiqaylik, bu yerda R - valning radiusi. Ipning D va E nuqtalaridagi tortilish kuchlarining farqi dT, ishqalanish kuchi

$$dF=fdN,$$

bunda dN -silindrik sirtning normal reaksiyasi hisobiga Q ning eng kichkina qiymatida ip muvozanatda bo‘ladi.

Demak

$$dT=f_0dN,$$

dN- ning qiymatini aniqlash uchun kuchlar sistemasini y - o‘qiga proyeksiyalarini nolga tenglaymiz. Sinusning kichkina qiymatlarida u burchakka teng

$$\sin d\theta=d\theta.$$

U holda dT·dθ=0 ni e’tiborga olib,

$$dN=T\sin(d\theta/2)+(T+dT)\sin(d\theta/2)=2dT/2=Td\theta,$$

bu qiymatni yuqoridagi tenglamaga qo‘ysak,

$$dT=f\cdot Td\theta$$

tenglamani ikkala tomonini T - ga bo‘lib yuborsak va θ -ning o‘zgarishi 0 dan α gacha, T ning o‘zgarishi Q dan R gacha deb hisoblab, aniq integral olsak (θ=0 bo‘lgandagi nuqtada tortilish kuchi Q, θ=α bo‘lganda R bo‘ladi):

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f \int_0^\alpha d\theta \; ; \quad \text{dan} \quad \ln\frac{P}{Q} = f\alpha \, ,$$

bundan

$$\frac{P}{Q} = e^{f\alpha} \qquad \text{yoki} \qquad Q = Pe^{f\alpha} \tag{2.49}$$

bo‘ladi. Bundan ko‘rinib turibdiki, izlanayotgan Q kuchning son qiymati faqat, ishqalanish koeffisientiga va markaziy burchakning kattaligiga bog‘liq ekan.

Agar ishqalanish yo‘q bo‘lsa (f=0), Q=R bo‘ladi. Eng muhimi, shu narsa aniqlandiki, ishqalanish koeffisienti saqlangan holda ipni valga o‘rab borib, ya’ni markaziy burchakning qiymatini orttira borib, Q kuchining istalgancha kichkina qiymatidagi muvozanat holatni ta’minlash mumkin ekan, bu haqda 2.9-jadvalga qarang.

2.9-Jadval.

Aylanishlar soni	α	Q/P= $e^{-f_0\alpha}$
0,5 aylanish....	π	0,238
1 aylanish.....…	2π	0,043
1,5 aylanish.....	3π	0,009
2 aylanish.....	4π	0,002

f=0,5 bo‘lganda arqonni yog‘och ustunga o‘ralgandagi Q/R ning qiymatlari.

Masalan, (2.9-jadval), 1000 N li tortilish kuchini 2 N kuch bilan muvozanatlashtirish mumkin ekan, buning uchun arqonni yog‘och valning atrofida atigi ikki marta aylantirib o‘rab chiqish kifoya ekan.

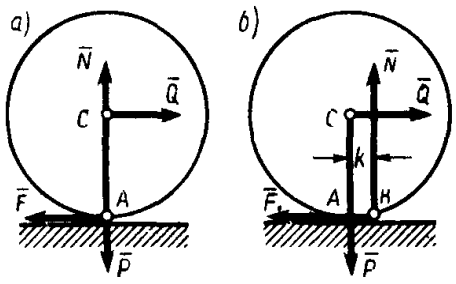
(2.49) formula orqali, sirpanmay aylanma harakat qilayotgan tasmali uzatmalarning (yetaklovchi) R va (yetaklanuvchi) Q tomonlaridagi tortilish kuchlarini aniqlash mumkin. Masalan, markaziy burchak $\alpha=\pi$ bo‘lganda, qayishdan iborat bo‘lgan tasma choyan shkivning sirtida aylanma harakat qilsa f=0,3 , Q/R ning qiymati

$$\frac{Q}{P} = e^{-0,3\pi} \approx 0,4 \quad \text{bo‘ladi.}$$

E. DUMALAB ISHQALANISH KUCHI.

Bir jismning ustida, ikkinchi bir jism dumalab harakatlanishiga qarshi bo‘lgan kuch, ***dumalab ishqalanish*** qarshilik kuchi deb ataladi.

Radiusi R-ga teng bo‘lgan silindrik g‘ildirak, g‘adir-budur gorizontal tekislik ustida to‘xtab turgan bo‘lsin. G‘ildirakning markaziga (2.63-shakl,*a*) F_{ish} dan kichikroq miqdordagi $\vec{Q}$ kuchni qo‘yaylik.



2.63-shakl.

U holda A nuqtada son qiymati $\vec{Q}$-ga teng bo‘lgan ishqalanish kuchi $\vec{F}$- paydo bo‘lib, g‘ildirakni tekislik ustida sirpanishiga qarshilik ko‘rsatadi. Agar normal reaksiya kuchi -$\vec{N}$ ni ham A nuqtaga qo‘yilgan deb hisoblasak, u kuch og‘irlik kuchi $\vec{P}$ bilan o‘zaro muvozanatlashib qoladi. $\vec{Q}$ va $\vec{F}$ kuchlari esa g‘ildirakni aylantiruvchi juft kuchlarga aylanib qoladi. 2.63-shakldan ko‘rinib turibdiki, bunday holatda har qanday kichkina $\vec{Q}$ kuch ham g‘ildirakni aylantira olishi mumkin bo‘ladi.

Tajribalar shuni ko‘rsatdiki, bunday holat aslo ro‘y bermas ekan. Sababi g‘ildirak bilan tekislik deformatsiyalanishi oqibatida bir nuqtada emas, balki

ma’lum AB yuza orqali tutashadi (2.63-shakl,b). $\vec{Q}$ kuchning ta’sirida A nuqtadagi bosim kuchi kamayib, B nuqtadagi bosim ortib boradi. Natijada tekislikning reaksiya kuchi $\vec{N}$ yo‘nalishi o‘zgarmagan holda o‘ziga parallel ravishda harakat tomonga qarab siljiy boshlaydi.

$\vec{Q}$ -ning qiymati ortib borgan sari, siljish orta boradi va nihoyat tegishli k – masofaga yetadi va g‘ildirak aylana boshlaydi.

Shunday qilib, chegaraviy holatda g‘ildirakka ikkita juft kuch ta’sir qiladi, ularning birinchisi $\vec{Q}_{cheg}$ va $\vec{F}$ bo‘lib, uning momenti $R \cdot Q_{cheg}$, ikkinchisi esa muvozanatlovchi $\vec{Q}$, $\vec{P}$ juft bo‘lib, uning momenti N·k -ga teng. Aylantiruvchi va qarshilik qiluvchi momentlar, chegaraviy holatda o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni

$$Q_{cheg} \cdot R = N \cdot k$$

yoki $$Q_{cheg} = kN/R .$$

Demak dumalab ishqalanish kuchi

$$F_{dum} = F = \frac{k}{R} N , \qquad (2.50)$$

$Q<Q_{cheg}$ qanoatlansa g‘ildirak muvozanat holatda bo‘ladi; $Q>Q_{cheg}$ bo‘lgandan keyin g‘ildirak aylana boshlaydi.

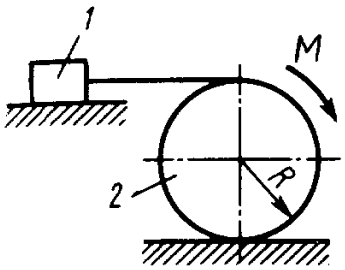
(2.50) formula chiziqli funksiyadan iborat bo‘lib, *k* - ***dumalab ishqalanish koeffitsienti*** deb ataladi. Uning o‘lchov birligi –***metr(millimetr)***. Dumalab ishqalanish koeffitsienti dumalovchi va asos sirtlarning materiali qattiqligiga bog‘liq bo‘lib, uning qiymati tajriba orqali aniqlanadi. Quyida ba’zi-bir ko‘p uchraydigan materiallardan tayyorlangan sirtlar uchun dumalab ishqalanish koeffitsientining qiymatlarini metrlarda keltiramiz(2.10-jadval):

2.10-jadval.

T/r	Ishqalanuvchi jismlarning materiali	*k* ning qiymati (m)
1	Yog‘och ustida yog‘och aylansa	0,005÷0,008
2	Yumshoq po‘lat po‘lat ustida (po‘lat g‘ildirak rels ustida)	0,0005
3	Toblangan po‘lat po‘lat ustida (sharikli podshipnik)	0,0001

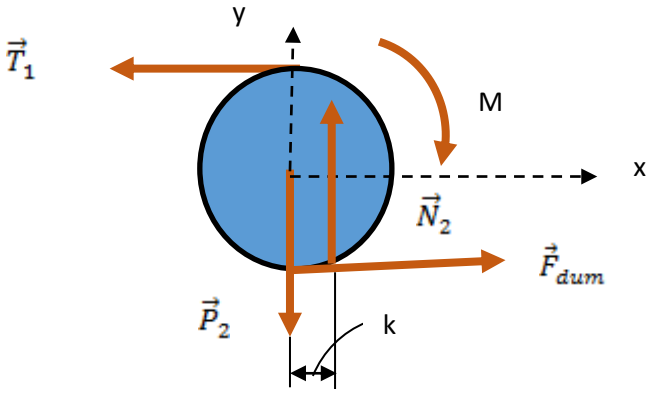
Bu formuladagi k/R nisbat, ko‘pchilik materiallar uchun statik ishqalanish koeffisient *f* - dan bir muncha kichkina bo‘ladi. Shu sababli texnikada, iloji bo‘lgan hollarda sirpanishni dumalash bilan almashtirish ma’qul (masalan, g‘ildirak, sharik podshipniklar va boshqalar).

1-masala: Og‘irligi 4 kN, radiusi R=0,5 m bo‘lgan bir jinsli 2-g‘ildirak-ka momenti M=50N·m li juft kuch ta’sir etadi. G‘ildirakka ip yordamida 1-yuk bog‘langan bo‘lib, yuk va g‘ildirak uchun tekislik bilan sirpanib ishqalanish koeffisiyenti f=0,2 ga teng. Agar dumalab ishqalanish koeffisienti k=0,005 m bo‘lsa, g‘ildirak dumalay boshlashi uchun 1-yukning mumkin bo‘lgan maksimal og‘irligini aniqlang?



2.65-shakl.

Yechish: 1) G‘ildirakning muvozanatini ko‘ramiz:



2.66-shakl.

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad -T_1 + F_{dum} = 0; & (1) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad N_2 - P_2 = 0; & (2) \\ \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0. \quad T_1 \cdot R + F_{dum} \cdot R - M + N_2 \cdot k = 0\,. & (3) \end{cases}$$

(1) va (2) tenglamadan $F_{dum} = T_1$, $N_2 = P_2$,

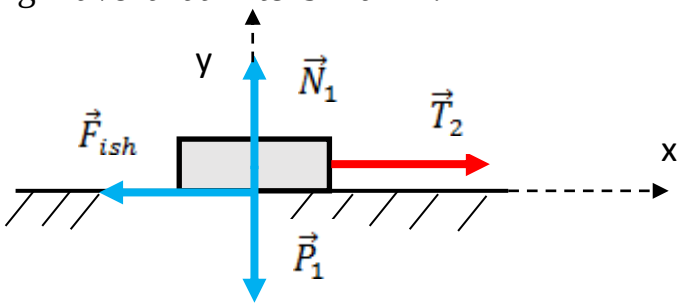
dumalab ishqalanish kuchi (2.50) formuladan aniqlanadi:

$$F_{dum} = \frac{k}{R} N_2 = \frac{0{,}005}{0{,}5} \cdot 4000 = 40\ N,$$

(3) dan

$$T_1 = \frac{M}{2R} - \frac{k}{2R} N_2 = \frac{50}{2 \cdot 0.5} - \frac{0{,}005}{2 \cdot 0{,}5} \cdot 4000 = 30\ N.$$

3) 1-yukning muvozanatini tekshiramiz:



2.67-shakl.

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad T_2 - F_{ish} = 0; & (4) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad N_1 - P_1 = 0. & (5) \end{cases}$$

Ta’sir-aks ta’sir qonunidan $T_2 = T_1 = 30\ N$,

sirpanib ishqalanish kuchi esa $F_{ish} = f \cdot N_1$,

u holda (4) ni hisobga olib, $N_1 = \frac{T_2}{f} = \frac{30}{0{,}2} = 150\ N$,

va (5) tenglamadan $P_1 = N_1 = 150\ N.$

Nazorat savollari

1. Qanday ko‘pburchak kuchlar ko‘pburchagi deyiladi?
2. Kuch o‘qqa qanday proyeksiyalanadi?
3. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4. Kesishuvchi kuchlar qanday qilib geometrik qo‘shiladi?
5. Bir nuqtaga qo‘yilgan kuchlarni analitik qo‘shish usulini tushuntirib bering.
6. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti qanday?
7. Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartlari qanday yoziladi?
8. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi? Uning ishorasi qanday tanlanadi?
9. Qanday holda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo‘ladi?
10. Kuchning o‘z ta’sir chizig‘i bo‘ylab ko‘chirilganda uning momenti qanday o‘zgaradi?
11. Kuchning o‘qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
12. Qanday holda kuchning o‘qqa nisbatan momenti nolga teng bo‘ladi?
13. Nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan o‘qqa nisbatan kuch momenti orasida qanday munosabat bor?
14. Nuqtaga nisbatan kuch momentining vektorligini tushuntirib bering.
15. O‘qqa nisbatan kuch momentining analitik ifodasi qanday yoziladi?
16. Varin’yon teoremasini ta’riflang.
17. Juft kuch va juft kuch momenti nima?
18. Juft kuch momenti vektori qanday yo‘nalgan va uning miqdori nimaga teng?
19. Qanday shart bajarilganda ikkita juft kuch ekvivalent bo‘ladi?
20. Tekislikda joylashgan juft kuchlar qanday qo‘shiladi?
21. Fazoda joylashgan juft kuchlar qanday qo‘shiladi?
22. Fazodagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?
23. Tekislikdagi juft kuchlar muvozanat sharti qanday?

24. Puanso lemmasi qanday ta’riflanadi?

25. Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga keltirishni tushuntiring.

26. Bosh vektor va bosh moment nima?

27. Dinamo yoki dinamik vint nima?

28. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday ta’riflanadi va yoziladi?

29. Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar muvozanat shartlarini ta’riflang va yozing.

30. Ikkita parallel kuch qanday qo‘shiladi?

31. Birqancha parallel kuchlar qanday qo‘shiladi?

32. Jismning og‘irlik markazi nima?

33. Uchburchak va trapetsiya yuzining og‘irlik markazi qanday aniqlanadi?

34. Aylana yoyi uzunligi og‘irlik markazini aniqlash formulasini yozing.

35. Doira bo‘lagi og‘irlik markazini aniqlash formulasini yozing.

36. Murakkab jismlar og‘irlik markazi qanday topiladi?

37. Og‘irlik markazini aniqlash usullarini ta’riflang.

38. Statik aniq va statik noaniq masala deb qanday masalalarga aytiladi?

39. Murakkab konstruksiyalar qanday statik hisoblanadi?

40. Ferma deb qanday tuzilmaga aytiladi?

41. Fermali konstruksiyalarning statik hisobi qanday bosqichlardan iborat?

42. Tugun kesish usulining qanday sharti bor?

43. Ritter usulining qanday shartini bilasiz?

44. Sirpanishdagi ishqalanish kuchi nima?

45. Dumalashdagi ishqalanish kuchi nima?

46. Ishqalanish burchagi deb nimaga aytiladi?

47. Jism harakatga kelishi uchun ta’sir qilayotgan kuchning normal bilan tashkil qilgan burchagi va ishqalanish burchagi orasidagi munosabat qanday bo‘lishi kerak?

48. Jism dumalanishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

III-BOB.

KINEMATIKA

BOBNING MAQSADI:

• Kinematikaning asosiy vazifalari bilan tanishtirish.

• Moddiy nuqta harakat qonunining berilish usullarini o‘rganish va uning tezligi, hamda tezlanishlarini aniqlash.

• Moddiy nuqta harakatining xususiy hollarini ko‘rib chiqish.

• Qattiq jismning eng sodda harakatlari: ilgarilanma va qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatlarida kinematik xususiyatlarini aniqlash.

• Qattiq jismning tekislikka parallel harakatini o‘rganish va amaliy masalarga qo‘llash.

• Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakatida Eyler tenglamalari bilan tanishtirish.

• Qattiq jismning umumiy harakati-murakkab harakatini ilgarilanma va aylanma harakatlar orqali tushuntirish.

• Moddiy nuqta va qattiq jismning nisbiy harakatini ko‘rib chiqish, hamda nisbiy harakat tenglamalarini tabiat masalariga tadbiq qilish.

3.1. MODDIY NUQTA HARAKATINING KINEMATIKASI.

3.1.1. Kinematikaning asosiy tushunchalari va vazifalari.

Nazariy mexanikaning ***kinematika*** qismi jismlarning harakatini harakat sabablariga, harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga va jism massasiga, bog‘lamay o‘rganadi. Boshqacha aytganda, jism harakatining geometrik xususiyatlarini ***kinematika*** aniqlaydi. Shuning uchun ba’zida kinematikani “4 o‘lchovli geometriya deb atashadi”. Kinematika so‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “kinema-harakat” ma’nosini beradi. Kinematikaning asosiy tushunchalari quyidagilardan iborat:

- ***mexanik harakat*** – bir jismning boshqa jismga nisbatan tutgan o‘rnining o‘zgarishiga aytiladi;

- ***hisob sistemasi*** – jismning harakati paytida fazodagi o‘rnini aniqlovchi, boshqa jismga bog‘langan koordinatalar sistemasiga aytiladi. Hisob sistemasini o‘zaro perpendikulyarl holda uch tomonga yo‘nalgan o‘qlar orqali tasvirlanadi, lekin shu o‘q mahkamlangan jism tasvirlanmaydi. Masalan, aksariyat o‘qlar Yer shariga mahkamlanadi, lekin yerning shakli tasvirlanmaydi;
- ***harakat qonuni*** – jism harakatida koordinatalar va vaqt orasidagi bog‘lanishni aniqlovchi qonunga aytiladi;
- ***boshlang‘ich vaqt*** – harakatning boshlanish payti (vaqt t=0 sekund deb olinadi);
- ***vaqt oralig‘i*** – avvalgi vaqt bilan keying vaqt farqiga aytiladi;
- ***trayektoriya*** – jism nuqtasining harakat davomida fazoda qoldirgan iziga aytiladi;
- ***uch o‘lchovli Evklid fazosi*** – Evklid geometriyasiga asoslangan, uzunlik- ***l metrlar***da, vaqt- ***t sekundlarda*** o‘lchanuvchi uch o‘lchovli fazoga aytiladi.

Kinematikaning asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

- jism harakat qonunini aniqlash va harakat grafigini chizish;
- harakat qo‘nuni bo‘yicha qism nuqtalarining tezligi va tezlanishlarini aniqlash;
- aniqlangan kinematik xususiyatlarni amaliy jarayonga, mashina-mexanizmlar hisobiga tadbiq qilish.

Kinematika tajribalar va amalda sinab ko‘rilgan bilimlarga tayangan bo‘lib, ular asosan geometriyaning aksiomalaridan olingan. Kinematikani o‘rganishda ulardan tashqari hech qanday aksioma va qo‘shimcha qonunlar talab qilinmaydi.

Kinematikani o‘rganish eng sodda ob’ekt – moddiy nuqta kinematikasidan boshlanadi, keyin esa qattiq jism kinematikasi o‘rganiladi.

3.1.2. Moddiy nuqtaning fazodagi harakati.

Moddiy nuqtaning fazodagi harakati vaqtga bog‘liq bo‘lib, uning o‘rnini turli usullarda aniqlash mumkin:

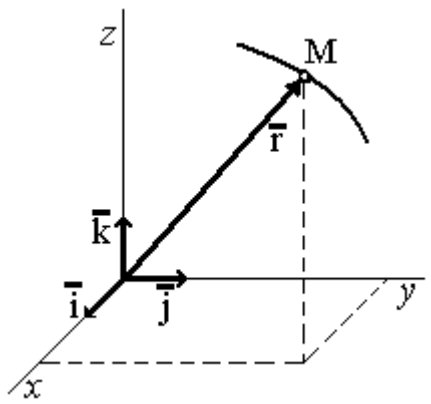
- vekto‘r usulda;
- Dekart koordinatalari usulida;
- tabiiy koordinatalar yordamida.

A. <u>MODDIY NUQTA HARAKAT QONUNINING VEKTOR USULI:</u>

1. Harakat qonuni. Faraz qilaylik, ixtiyoriy M nuqta biror *Oxyz* hisob sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo‘lsin. Agar koordinata boshi O nuqtadan harakatlanayotgan M nuqtagacha radius-vektor $\vec{r}$ nuqtaning ixtiyoriy vaqt momenti uchun holatini aniqlaydi (3.1-shakl).

M nuqtaning harakatida vektor $\vec{r}$ - vaqtga bog‘liq ravishda ham yo‘nalishi bo‘yicha, ham moduli bo‘yicha o‘zgarib boradi. Demak, $\vec{r}$ - o‘zgaruvchan vektor bo‘lib, t -vaqtga bog‘liq bo‘ladi, ya'ni

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t) \qquad (3.1)$$



3.1-shakl.

vektor tenglik nuqtaning harakat qonunining vektor shakli hisoblanadi.

Ushbu tenglama orqali nuqtaning ixtiyoriy vaqt uchun $\vec{r}$ - vektorni shaklda tasvirlab beradi va koordanata o‘qlaridagi o‘rnini aniqlab beradi.

Radius vektor $\vec{r}$ -ning oxirini birlashtiruvchi egri chiziq ***godograf*** deb ataladi va harakatlanayotgan nuqtaning *trayektoriyasini* belgilaydi.

2. Nuqta tezligini vektor usulida aniqlash. Nuqta harakatining kinematik asosiy vektor qiymatlaridan biri, nuqtaning tezligi hisoblanadi. Avvalo nuqtaning ma’lum vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligi tushunchasini ko‘rib chiqaylik.

Harakatlanayotgan nuqta t – vaqtda $\vec{r}$ - radius vektor orqali belgilangan M holatda bo‘lsin. So‘ngra u harakat qilib t_1- vaqt davomida $\vec{r}$ - radius vektor orqali belgilangan M_1 holatga o‘tgan bo‘lsin (3.2-shakl). U holda nuqta $\Delta t=t_1-t$ vaqt oralig‘idagi harakati, ***nuqtaning ko‘chishdagi vektori*** deb ataladigan $\overrightarrow{MM_1}$ vektordan iborat bo‘lsin. Agar nuqta egri chiziq bo‘ylab harakatlansa, u trayektoriya vatardan iborat bo‘ladi (3.2-shakl,a). Agar nuqta to‘g‘ri chiziqli trayektoriya bo‘ylab harakatlansa, u trayektoriya bo‘ylab yo‘nalgan bo‘ladi (3.2-shakl,b).

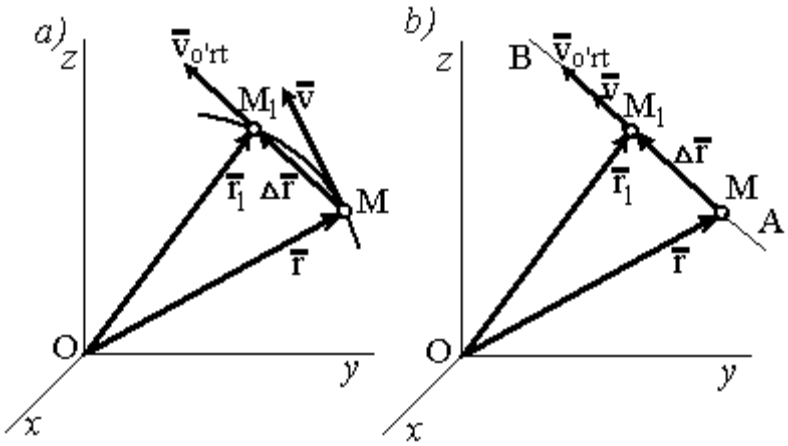
OMM_1 uchburchakdan ko‘rinib turibdiki, $\vec{r} + \overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1$, bundan

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}$$

bo‘ladi. Ko‘chish vektorining shu ko‘chishga sarflangan vaqtga nisbati, Δt vaqt oralig‘idagi ***o‘rtacha tezlik*** deb ataladi

$$\vec{V}_{o'rt} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

$\vec{V}_{o'rt}$-vektorning yo‘nalishi $\overrightarrow{MM_1}$ vektorning yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi, ya'ni egri chiziqli trayektoriyada harakat tomonga yo‘nalgan tegishli vatardan iborat bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqli harakatda- trayektoriyaning o‘zida yotadi.



3.2-shakl.

Yuqoridagi 3.2-shakldan ko‘rinib turibdiki, qanchalik Δt - vaqt oralig‘i cheksiz kichik olinsa, $\vec{V}_{o'rt}$ -vektorning qiymati va yo‘nalishi haqiqiy harakatning qiymati va yo‘nalishiga yaqinlashib boradi. Harakatning aniq xarakteristikasini o‘rganish uchun nuqtaning tezligi degan tushuncha kiritamiz. ***Moddiy nuqtaning tezligi*** deb, $\Delta\vec{r}$ – radius-vektor orttirmasining Δt - cheksiz kichik vaqt mobaynida o‘zgarishiga aytiladi, ya‘ni

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{o'rt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

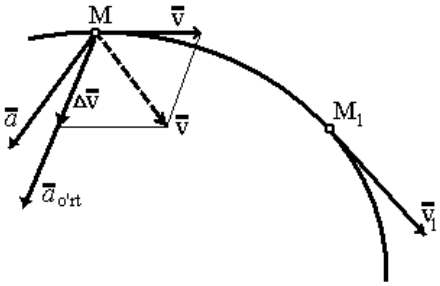
Hosilaning ta'rifiga asosan, bu ifoda quyidagicha yoziladi

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (3.3)$$

Demak, radius-vektordan vaqt buyicha olingan birinchi hosila, nuqta harakatining shu ondagi ***tezligi*** deb ataladi.

3. Nuqta tezlanishining vektor usulida berilishi.

Faraz qilaylik, M moddiy nuqta ixtiyoriy olingan t - vaqtda $\vec{V}$-tezlikka ega va Δt -vaqt o'tgach, u M_1 holatga ko'chib o'tgan bo'lsin (3.3-shakl).



3.3-shakl.

U holda $\Delta t = t_1 - t$ vaqt davomida tezlik vektori ham tegishlicha $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ orttirma oladi. $\Delta\vec{V}$-vektorni shaklda ifodalash uchun, M nuqtaga $\vec{V}$ va $\vec{V}_1$ tezlik vektorlarini qo'yamiz, u holda $\vec{V}_1$-vektori $\Delta\vec{V}+\vec{V}$ vektorlarning yig'indisidan iborat ekanligini ko'ramiz, ya'ni $\vec{V}_1 = \Delta\vec{V}+\vec{V}$ ekan. Shakldan ko'rinib turibdiki, $\Delta\vec{V}$ - vektori har doim egri chiziqli trayektoriyaning botiq tomoniga yo'nalgan bo'lar ekan, agar trayektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, u shu to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalar ekan.

Demak, ***moddiy nuqtaning o'rtacha tezlanishi*** $\Delta\vec{V}$ –tezlik orttirmasining shu o'tgan Δt vaqtga nisbatiga aytiladi,

$$\vec{a}_{o'rt} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \qquad (3.4)$$

O‘rtacha tezlanish vektorining yo‘nalishi $\Delta\vec{V}$-vektorining yo‘nalishi bilan bir-xil bo‘lar ekan, ya‘ni har doim trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘nalar ekan.

Nuqtaning haqiqiy tezlanishi $\vec{a}$ esa, Δt cheksiz kichik, nolga intilgandagi limitiga aytiladi, ya‘ni

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

va (3.3) formulaga asosan,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (3.5)$$

Demak, nuqtaning shu ondagi ***tezlanish vektori***, tezlik vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilaga yoki radius vektordan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosilaga teng ekan. Boshqacha aytganda, moddiy nuqtaning tezlanishi deb, vaqt mobaynidagi tezlikning moduli va yo‘nalishini belgilovchi vektor qiymatga aytiladi.

Endi tezlanish vektori -$\vec{a}$ ning trayektoriyadagi yo‘nalishini aniqlaymiz. Nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakatida, uning yo‘nalishi shu to‘g‘ri chiziqda yotadi. Agar nuqtaning trayektoriyasi tekislikda joylashgan egri chiziqdan iborat bo‘lsa, u holda tezlanish vektori $-\vec{a}$, o‘rtacha tezlanish vektori $\vec{a}_{o'rt}$-kabi shu tekislikda joylashgan bo‘lib, trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘nalgan bo‘ladi.

Agar trayektoriya fazoda joylashgan egri chiziqdan iborat bo‘lsa, $\vec{a}_{o'rt}$-vektorning yo‘nalishi trayektoriyaning M nuqtasiga o‘tkazilgan urinma va M_1 nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaga parallel bo‘lgan chiziqdan o‘tgan tekislikda joylashadi (3.3-shakl).

Demak, nuqtaning $\vec{a}$ tezlanish vektori, urinma tekislikda joylashgan bo‘lib, trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘nalgan bo‘lar ekan.

B. MODDIY NUQTA HARAKAT QONUNINING KOORDINATALAR USULI:

1. Harakat qonuni. Harakat analitik usulda berilganda, uning qonuniyati radius vektorning koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalari orqali ifodalanadi:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \qquad (3.6)$$

Agar nuqtaning harakatini uning *x,y,z* koordinatalari vaqtning funktsiyasi sifatida berilgan bo‘lsa, t vaqtni parametr deb, ***moddiy nuqtaning koordinatalar ko‘rinishidagi harakat qonuni*** quyidagicha ifodalanadi:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \ . \qquad (3.7)$$

(3) tenglamalar sistemasi *nuqta harakatining to‘g‘ri burchakli dekart koordinata o‘qlaridagi tenglamalari* deb ataladi. Ular harakatni koordinata usulda berilgandagi harakat qonunlari hisoblanadi.

Agar nuqtaning harakati har doim birorta tekislik ustida sodir bo‘lsa, bu tekislikni *Oxy* deb hisoblab, nuqtaning harakat qonuni ikkita tenglamadan iborat bo‘ladi,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \qquad (3.8)$$

Agar nuqta faqat to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsa, bu chiziqni *Ox* koordinata o‘qi deb hisoblasak, nuqtaning harakat qonuni bitta tenglamadan iborat bo‘ladi,

$$x = f_1(t), \qquad (3.9)$$

(3.8) va (3.9) tenglamalar sistemasi, bir vaqtni o‘zida ***nuqta harakati trayektoriyasining parametrik ko‘rinishdagi tenglamalari*** hisoblanadi. Ushbu tenglamalar sistemasidan t -vaqtni yo‘qotib,

$$f(x,y,z) = 0 \qquad (3.10)$$

moddiy nuqtaning trayektoriya tenglamasi topiladi.

2. Moddiy nuqta tezligining koordinatalar usulida berilishi.

(3.3) va (3.6) formulalarga asosan, radiys-vektordan hosila olib,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k} + x\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + y\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + z\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Birlik vektorlar o‘zgarmas bo‘lganligi uchun

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0,$$

demak

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k} = V_x\cdot\vec{i} + V_y\cdot\vec{j} + V_z\cdot\vec{k}, \qquad (3.11)$$

bundan

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \qquad (3.12)$$

bu yerdagi harflarning ustiga qo‘yilgan nuqta vaqt bo‘yicha differentsiallashning belgisi hisoblanadi. Pifagor formulasidan, umumiy tezlikning qiymati aniqlanadi:

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}\,. \qquad (3.13)$$

Demak, ***moddiy nuqta tezligining koordinata o‘qlardagi proyektsiyalari***, nuqtaning shu o‘qlardagi koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan hosilalariga teng ekan.

Tezlikning proyektsiyalarini bilgan holda, uning yo‘nalishi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V}; \quad \cos\beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos\gamma = \frac{V_z}{V}. \qquad (3.14)$$

bu yerda α,β,γ- tezlik vektori bilan koordinata o‘qlari orasidagi burchaklar.

3. Moddiy nuqta tezlanishining koordinatalar usulida berilishi.

Moddiy nuqta tezlanishini aniqlash uchun tezlikdan yana bir bor differentsiyal olib , quyidagi tengliklar hosil bo‘ladi:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vec{k} = \frac{dV_x}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\cdot\vec{k}, \qquad (3.15)$$

bundan $a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$, (3.16)

yoki qisqacha $a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\,; \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}\,; \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}\,.$ (3.17)

Demak ***moddiy nuqta tezlanishining o‘qlarga proyektsiyalari***, tezlikning proyektsiyalaridan olingan birinchi hosilaga yoki uning koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosilaga teng ekan.

Umumiy tezlanish miqdori va yo‘nalishi quyidagi munosabatlardan aniqlanadi:

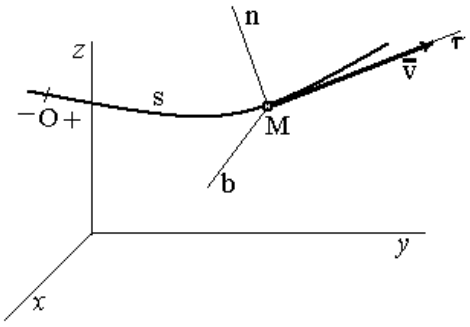
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ , \qquad (3.18)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{a}; \qquad (3.19)$$

bu yerda α_1, β_1, γ_1 - tezlanish vektori bilan koordinata o‘qlari orasidagi burchaklar.

D. MODDIY NUQTA HARAKATINING TABIIY USULDA BERILISHI.

1. Harakat qonuni. Harakat qonuni bu usulda berilganda, tezlik $-\vec{V}$ va tezlanish - $\vec{a}$ vektorlari ularning qo‘zg‘almas *Oxyz* o‘qlaridagi proyektsiyalari orqali emas, balki M nuqta bilan birga harakatlanuvchi *Mτnb* ***tabiiy o‘qlardagi*** proyektsiyalari orqali aniqlanadi (3.4-shakl).



3.4-shakl.

Bu o‘qlar uchyoqli tabiiy o‘qlar deb atalib, quyidagicha yo‘nalgan bo‘ladi: Mτ -o‘qi trayektoriyaga urinma holda bo‘lib, hisob sistemasi s -ning musbat tomoniga qarab yo‘naladi; Mn - o‘qi trayektoriyaning normali bo‘yicha yo‘nalib, yondoshgan tekislikda joylashadi va har doim trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi; Mb -o‘qi oldingi ikki o‘qlarga perpendikulyarl holda yo‘nalib, ular bilan o‘ng qo‘l hisob sistemasini tashkil etadi. Mτ -o‘qi ***urinma o‘q***, Mn -o‘qi ***bosh normal o‘qi***, va unga perpendikulyarl bo‘lgan Mb -o‘q ***binormal o‘q*** deb ataladi.

M nuqtaning ixtiyoriy vaqt uchun shu trayektoriyadagi o‘rnini aniqlash uchun,

$$s=f(t) \qquad (3.25)$$

qonuniyat berilishi kerak bo‘ladi. (3.25) tenglama M nuqtaning trayektoriya bo‘ylab ***harakat qonuni*** deb ataladi.

Demak, nuqta harakatini tabiiy o‘qlarda berilishi uchun:

- nuqtaning trayektoriyasi;

- shu trayektoriyadagi hisob boshining O‘ nuqtasi va tabiiy o‘qning musbat va manfiy yo‘nalishini belgilanishi;

-nuqtaning shu trayektoriya bo‘ylab *s=f(t)* ko‘rinishdagi harakat qonuni berilishi shart.

B. *Nuqta tezligining tabiiy usulida berilishi.*

Mτnb -o‘qlarda nuqtaning tezlik vektori faqat bitta o‘qqa (3.24-shakl), ya‘ni urinma *Mτ* -o‘qqa V_τ -proyektsiyalanadi xolos. Demak, V_τ-tezlikning moduli bilan bir xil bo‘lishi mumkin yoki ishorasi teskari bo‘lishi mumkin. Shu sababli, bundan keyin V_τ -ni faqat v -orqali belgilaymiz, ya‘ni τ -indeksni tashlab yuboramiz va uni tezlikning algebraik qiymati deb ataymiz.

Hosila ta’rifiga asosan, vaqt va yo‘lga orttirmalar berib,

$$\Delta t = t_1 - t; \qquad \Delta s = \breve{s}_1 - \breve{s}\,,$$

Moddiy nuqtaning ***o‘rtacha tezligi*** deb, yo‘l orttirmasini vaqt orttirmasiga nisbatiga aytiladi

$$V_{o'rt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,. \qquad (3.26)$$

Haqiqiy tezlik esa o‘rtacha tezlikning vaqt orttirmasi cheksiz kichik holatidagi limitiga teng bo‘ladi:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{o'rt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\,. \qquad (3.27)$$

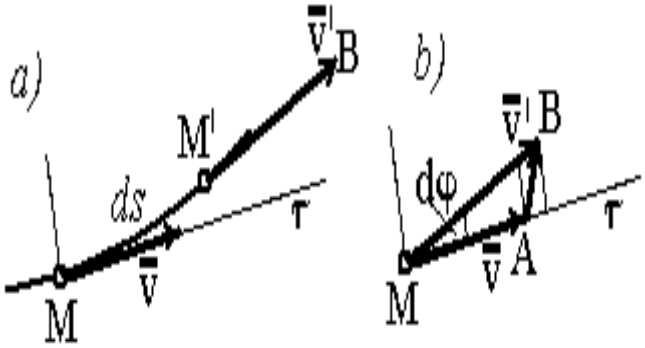
Demak, ***moddiy nuqtaning tezligi yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan hosilaga teng*** ekan:

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,. \qquad (3.28)$$

E. NUQTA TEZLANISHINING TABIIY USULIDA BERILISHI.

Moddiy nuqtaning tezlanish vektori -$\vec{a}$, tabiiy o‘qlarning $M\tau n$ -tekisligida joylashadi. Demak, tezlanish vektori $\vec{a}$ -ning binormal Mb -o‘qdagi proyektsiyasi nolga (a_b=0) teng bo‘ladi. Endi tezlanishning boshqa ikkita o‘qdagi proyektsiyasini aniqlaymiz. (3.5) tenglikning ikkala tomonini Mτ va Mn -o‘qlarga proyektsiyalaymiz va ularni tegishlicha $(d\bar{v})_\tau$ va $(d\bar{v})_n$ -belgilar bilan ifodalaymiz. U holda tezlik vektorining elementar o‘zgarishi d$\vec{V}$ -ni Mτ va Mn -o‘qlardagi proyektsiyalari:

$$a_\tau = (d\bar{v})_\tau / dt \quad \text{va} \quad a_n = (d\bar{v})_n / dt \qquad (3.29)$$



3.5-shakl.

bo‘ladi. d$\vec{V}$-vektori yonma yon joylashgan M va M' nuqtalardagi tezlik vektorlarning ayirmasidan iborat, ya‘ni d$\vec{V} = \vec{V}' - \vec{V}$ bo‘ladi. Umumiy nuqta M-dan $\vec{V} = \overrightarrow{MA}$ va $\vec{V}' = \overrightarrow{M'B}$ (3.5-shakl,b) vektorlarni qo‘yaylik; u holda d$\vec{V}$ = $\overrightarrow{AB}$ bo‘ladi va cheksiz kichkina dφ - burchakda ACBD yuzachani to‘g‘ri to‘rt burchak deb hisoblash mumkin. Shu sababli $(d\bar{v})_\tau$ =AC=DB=MB-MA=v'-v=dv bo‘ladi, bu yerda dv -tezlik vektorining elementar orttirmasi.

Cheksiz kichik markaziy burchak uchun yoyning nisbatini shu yoyni tortib turuvchi vatarga nisbati birga teng bo‘lganligi uchun, AD -ni MA radiusli yoy deb qabul qilish mumkin. U holda shu AD yoyning uzunligi AD= $(d\bar{v})_\tau$ =MA·dφ=v·dφ bo‘ladi. Aniqlangan $(d\bar{v})_\tau$ va $(d\bar{v})_n$ qiymatlarni (3.29) tenglamaga qo‘ysak,

$$a_\tau = dv/dt, \; a_n = v \cdot d\varphi/dt \qquad (3.30)$$

bo‘ladi.

Egri chiziqning yonma-yon ikki nuqtasidagi urinmalar orasidagi burchak ***qo‘shni burchaklar*** deb ataladi; u holda dφ -elementar qo‘shni burchak bo‘ladi; Shuni eslatib o‘tish lozimki, dφ -ning ds=MM' -ga nisbati, M nuqtadagi ***egrilik*** deb ataladi va k - qiymat nuqtaning shu joydagi ***egrilik radiusi ρ ning*** teskari nisbatiga teng bo‘ladi, ya‘ni

$$d\varphi/ds=k=1/\rho \qquad (3.31)$$

bo‘ladi. Bu qiymatni (3.30) tenglamalarning ikkinchisiga qo‘yamiz va (3.28) ni e’tiborga olgan holda o‘zgartirish kiritamiz,

$$a_n = v\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v = \frac{v^2}{\rho}$$

Yuqoridagilarga asosan, tezlanishning tabiiy o‘qlardagi proyektsiyalarini aniqlash uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqardik, ya‘ni

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \qquad a_b = 0; \qquad (3.32)$$

Shunday qilib, ***nuqtaning tezlanishini urinma o‘qqa proyektsiyasi*** tezlikning son qiymati (moduli)dan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilaga yoki masofa (egri chiziqli koordinata) s -dan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosilaga teng ekan. ***Nuqta tezlanishining normal o‘qdagi proyektsiyasi*** esa tezlikning son qiymatini kvadratini, shu nuqtadagi egrilik radiusi ρ -ga nisbatiga teng ekan;. ***Tezlanishning binormal o‘qdagi proyektsiyasi*** har doim nolga teng bo‘lar ekan. Bular kinematikaning eng asosiy teoremalaridan biri hisoblanadi. a_τ va a_n - kattaliklar nuqtaning ***urinma va normal tezlanishlari*** deb ataladi.

Agar M nuqta bitta tekislikda yotuvchi egri chiziq bo‘ylab harakatlansa $M\tau$ - urinma o‘q, binormal Mb - o‘q atrofida ω=dφ/dt burchakli tezlik bilan aylanma harakat qiladi. Shu sababli (3.30) sistemaning ikkinchi formulasi orqali muhandislik hisoblarida ko‘p foydalaniladigan normal tezlanishning qiymatini aniqlovchi tenglikni keltirib chiqaramiz, ya‘ni

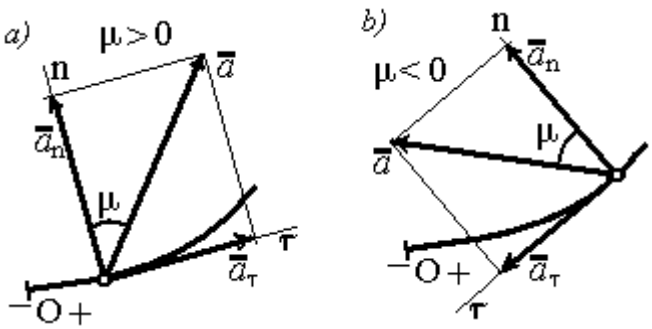
$$a_n = v\cdot\omega \qquad (3.33)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, nuqtaning normal tezlanishi uning tezligini, trayektoriyaga urinma bo‘lgan o‘qning shu nuqta atrofida aylanishidagi burchakli tezlikka algebraik ko‘paytmasiga teng bo‘lar ekan.

To‘liq tezlanishning trayektoriyaga urinma -$M\tau$ bo‘ylab tashkil etuvchi vektori $\vec{a}_\tau$ - ni va Mn -normal o‘q bo‘ylab normal tashkil etuvchi vektori $\vec{a}_n$ - ni shaklga keltirib qo‘yamiz (3.6-shakl). Tezlanishning normal tashkil etuvchisining moduli hech qachon manfiy bo‘lmaydi, ya‘ni har doim $a_n > 0$ bo‘ladi, shuning uchun uning yo‘nalishi trayektoriyaning faqat botiq tomoniga yo‘nalgan bo‘ladi.

Urinma tezlanish $\bar{a}_\tau$-vektorning son qiymati ham manfiy, ham musbat ishoralar qabul qilishi mumkin, shu sababli u a_τ -ning ishorasiga bog‘liq ravishda yo‘nalishi $M\tau$ o‘qining tegishlicha musbat yoki manfiy tomoniga yo‘nalgan bo‘ladi (3.6-shakl,a,b).

To‘liq tezlanish vektori $\vec{a}$, urinma -$\vec{a}_\tau$ va normal - $\vec{a}_n$ tezlanish vektorlariga qurilgan parallelogrammning diagonaliga teng bo‘lar ekan. $\vec{a}_\tau$ va $\vec{a}_n$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar yo‘nalgan bo‘lganligi uchun, $\vec{a}$ -vektorning qiymati va uning normal Mn -o‘q bilan tashkil qilgan μ -burchagi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:



3.6- shakl.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} \qquad (3.34)$$

bu yerda -π/2 ≤ μ ≤ π/2; μ>0 bo‘lganda to‘liq tezlanish vektori -$\vec{a}$, *Mn* - o‘qidan $M\tau$ o‘qi tomonga og‘adi (3.6-shakl,a), agar μ<0 bo‘lsa, teskari tomonga og‘adi (3.6-shakl,b).

Amaliy masalalar yechishda urinma tezlanishning dekart koordinatalari orqali fo‘rmulasi qulay:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\sqrt{V^2{}_x + V^2{}_y + V^2{}_z}}{dt} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y + V_z \cdot a_z}{\sqrt{V^2{}_x + V^2{}_y + V^2{}_z}} . \qquad (3.35)$$

Shunday qilib, agar nuqtaning harakati tabiiy o‘qlarda berilgan bo‘lsa, *s=f(t)* (3.28-3.35) formulalar orqali nuqtaning ixtiyoriy vaqtidagi tezlik va tezlanishlarining qiymatlarini aniqlash mukin ekan.

3.1.3. Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari.

Yuqorida aniqlangan natijalardan foydalanib, nuqta harakatining ba‘zi bir xususiy hollarini ko‘rib chiqamiz.

1. ***To‘g‘ri chiziqli harakat.*** Agar nuqtaning trayektoriyasito‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, u holda harakat qonuni

$$x = x(t), \text{ yoki } \quad s = x(t). \qquad (3.36)$$

va nuqtaning tezligi

$$V = \dot{x} = \dot{s}. \qquad (3.37)$$

Geometriyadan ma’lumki, to‘gri chiziq-radiusi cheksizga teng bo‘lgan aylananing yoyi, ya’ni $\rho=\infty$ bo‘ladi.

Shu sababli $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ bo‘ladi va nuqtaning to‘liq tezlanishi faqat urinma tezlanishdan iborat bo‘ladi, ya‘ni

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad . \qquad (3.38)$$

Bunday harakatda tezlik vektori faqat moduli bo‘yicha o‘zgarishini e’tiborga olsak, urinma tezlanish faqat tezlikning son qiymatini o‘zgarishini belgilar ekan xolos.

a) ***To‘g‘ri chiziqli tekis harakat.*** Agar $a = 0$ va $V = const$ bo‘lsa, nuqtaning harakati ***tekis harakat*** deb ataladi. U holda

$$V = \frac{ds}{dt} \text{ ni integrallab, } \int_{s_0}^{s} ds = V \int_0^t dt$$

va tanish formulani hosil qilamiz:

$$s = s_0 + V \cdot t; \quad \text{yoki} \quad x = x_0 + Vt\,. \tag{3.39}$$

(3.39) tenglik-***to'gri chiziqli tekis harakat qonuni*** deb ataladi.

b) ***To'g'ri chiziqli o'zgaruvchan harakat.*** Agar a=const bo'lsa, nuqtaning harakati ***tezlanuvchan harakat*** deb ataladi. U holda

$$a = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ ni integrallab, } \int_{V_0}^{V} dV = a \int_0^t dt$$

va tekis tezlanuvchan harakatdagi tezlikni aniqlash formulasi kelib chiqadi:

$$V = V_0 + at. \tag{3.40}$$

(3.40) tenglikdagi tezlikni $V = \frac{ds}{dt}$ deb, yana bir marta integrallanadi:

$$\int_{s_0}^{s} ds = V_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt,$$

va ***tezlanuvchan harakat qonuni*** topiladi:

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}\,. \tag{3.41}$$

2. <u>*Egri chiziqli tekis harakat.*</u> Agar nuqtaning egri chiziqli harakatida, uning tezligini son qiymati (moduli) o'zgarmas bo'lsa, bunday harakat egri chiziqli tekis harakat deb ataladi; ya'ni v=const bo'lsa, u holda

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

bo'ladi va to'liq tezlanish faqat normal tezlanishdan iborat bo'ladi, ya'ni

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho} \quad , \tag{3.42}$$

Nuqtaning tezlanish vektori har doim trayektoriyaning normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bunday harakatda tezlanish vektori faqat tezlik vektorining yo'nalishini o'zgarishi hisobiga paydo bo'lar ekan, shu sababli normal tezlanish tezlik vektorining yo'nalishini xarakterlar ekan. Egri chiziqli tekis harakat qonuni

$$s = s_0 + V \cdot t; \tag{3.43}$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. <u>*Egri chiziqli tekis o'zgaruvchan harakat.*</u> Agar nuqtaning egri chiziqli harakatida urinma tezlanishning son qiymati o'zgarmas (ya'ni

$a_\tau = \text{const}$) bo‘lsa, bunday harakat egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakat deb ataladi. Harakatni kuzatishni boshlaganimizda, ya‘ni t=0 sekda nuqta trayektoriyaning $s = s_0$ holatida $V = V_0$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, shu nuqtaning harakat qonunini aniqlaylik. (3.32) tenglamalarning birinchisidan dV = $a_\tau \cdot dt$ ekanligini aniqlaymiz. So‘ngra ushbu tenglikning ikkala tomonidan tegishli chegaralarda aniq integral olsak, $a_\tau = \text{const}$ ekanligi sababli

$$V = V_0 + a_\tau t \qquad (3.43)$$

aniqlaymiz. (3.43) tenglamani, quyidagicha yozib olamiz, $V = \frac{ds}{dt}$ dan

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + a_\tau t \qquad \text{yoki} \qquad ds = V_0 dt + a_\tau t \cdot dt$$

bu tenglamani tegishli chegaralarda yana bir marta integrallasak, egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakatning qonunini aniqlayiz, ya‘ni

$$s = s_0 + V_0 t + a_\tau \cdot \frac{t^2}{2} \qquad (3.44)$$

bunday harakatdagi nuqtaning tezligi (3.43) formula orqali aniqlanadi.

Agar nuqtaning egri chiziqli harakatida uning tezlik moduli ortib borsa, bunday harakat ***tezlanuvchan harakat*** deb ataladi, agar tezlikning moduli kamaya borsa ***sekinlanuvchan harakat*** deb ataladi.

Moddiy nuqta harakatining kinematik harakteristikalarini aniqlashga aniq masalalar ko‘rib o‘taylik.

1-masala. Moddiy nuqtaning harakati $\bar{r} = t^2\bar{i} + 2t^2\bar{j} + 3t^2\bar{k}$ radius-vektor orqali berilgan bo‘lsa, t=2s paytida nuqtaning tezligini, urinma, no‘rmal va to‘la tezlanishini toping.

Yechish: **1) Vekto‘r usuli.**

Radius vekto‘rdan vaqt bo‘yicha hosila olib, nuqtaning tezligini aniqlaymiz:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + 4t\vec{j} + 6t\vec{k}. \qquad (1)$$

Tezlik vekto‘ridan yana bir marta hosila olib, nuqtaning tezlanishini topamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}. \qquad (2)$$

2) Koordinatalar usuli.

Harakat qonunini yozib olamiz: $x = t^2$; $y = 2t^2$; $z = 3t^2$.

Vaqt bo‘yicha hosila olib, nuqtaning tezligini hisoblaymiz:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 2t\ ; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = 4t\ ; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = 6t\ ;$$

$$V = \sqrt{V^2{}_x + V^2{}_y + V^2{}_z} = \sqrt{4t^2 + 16t^2 + 36t^2} = \sqrt{56}t = 7{,}485\ t, \qquad (3)$$

t = 2 sek da $V_x = 4$ m/s ; $V_y = 8$ m/s ; $V_z = 12$ m/s ;

Umumiy tezlik esa V = 14,97 m/s.

Tezlikdan vaqt bo‘yicha yana bir marta hosila olib, tezlanishni hisoblymiz:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 2\ ; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = 4\ ; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = 6\ ;$$

Umumiy tezlanish esa,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4 + 64 + 144} = \sqrt{212} = 14{,}56\ \text{m/s}^2. \qquad (4)$$

3) Tabiiy koordinatalar usuli.

Urinma tezlanishni hisoblaymiz,

$$a_\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y + V_z \cdot a_z}{\sqrt{V^2{}_x + V^2{}_y + V^2{}_z}} = \frac{4 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 12 \cdot 6}{14{,}97} = 7{,}48\ \text{m/s}^2\ . \qquad (5)$$

No‘rmal tezlanish esa umumiy tezlanish orqali aniqlanadi:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a^2{}_\tau} = \sqrt{14{,}56^2 - 7{,}48^2} = \sqrt{156{,}05} = 12{,}5\ \text{m/s}^2. \qquad (6)$$

Masala echimidan ko‘rinib turibdiki, moddiy nuqtaning harakatini tekshirishda yuqoridagi usullar bir-birini to‘ldirar ekan.

2-masala. Moddiy nuqta vertikal tekislikda x = 4 sin t, y = 3cos t,(x,y-metrlarda) qonun bo‘yicha harakat qiladi. Uning trayekto‘riyasini, t = π/3 sekunddagi tezligini, urinma, no‘rmal va to‘la tezlanishlari, hamda egrilik radiusi aniqlansin.

Yechish: Moddiy nuqtaning trayekto‘riyasini topish uchun t parametrni harakat qonunidan chiqarib, tashlaymiz. Trigo‘no‘metriyaning $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ fo‘rmulasidan foydalanish uchun, birinchi tenglamani 4 ga, ikkinchi tenglamani 3 ga bo‘lamiz va kvadratga ko‘taib, ularni hadma-had qo‘shamiz:

$$\begin{cases} (\frac{x}{4})^2 = (\sin t)^2 \\ (\frac{y}{3})^2 = (\cos t)^2 \end{cases} \qquad (1)$$

hosil bo‘lgan tenglama $x^2/16 + y^2/9 = 1$ ellips egri chizig‘i hisoblanadi.

Moddiy nuqtaning tezligini topish uchun, harakat qonunidan t vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 4\cos t, \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = -3\sin t,$$

Umumiy tezlik esa,

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{16cos^2t + 9sin^2t} = \sqrt{9 + 7cos^2t}\,. \qquad (2)$$

Moddiy nuqtaning tezlanishini aniqlash uchun tezlikdan hosila olinadi:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -4\sin t\,, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -3\cos t\,,$$

To‘la tezlanish esa

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} = \sqrt{16sin^2t + 9cos^2t} = \sqrt{9 + 7sin^2t}\,. \qquad (3)$$

Urinma va no‘rmal tezlanishlarni hisoblaymiz:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14\cos t \cdot \sin t}{\sqrt{9+7cos^2t}} = \frac{7sint \cdot cost}{\sqrt{9+7cos^2t}}, \qquad (4)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^{\,2}} = \sqrt{9 + 7sin^2\,t - \frac{49sin^2t \cdot cos^2t}{9+7cos^2t}} = 12/\sqrt{9 + 7sin^2t}\,. \qquad (5)$$

$t = \frac{\pi}{3}$ sekundda kinematik kattaliklarning jadvalini tuzamiz:

3.1-jadval.

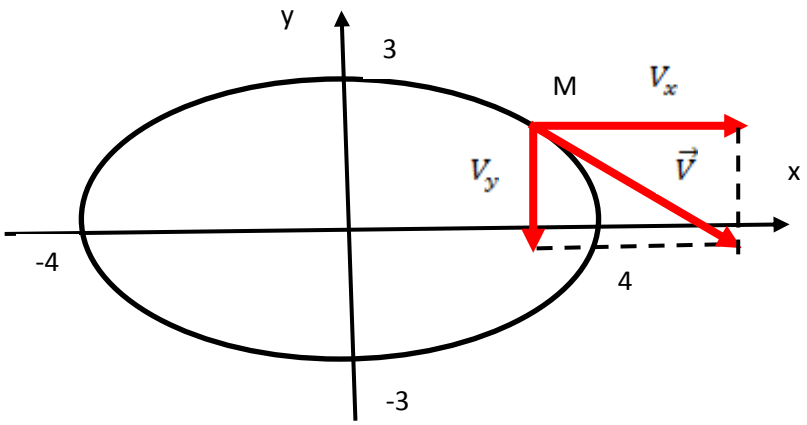
x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a_τ	a_n
m		m/s			m/s^2				
3,464	1,5	2	-2,6	3,28	-3,464	-1,5	3,77	-0,92	3,18

Moddiy nuqta harakatining grafigini chizamiz: M(x,y) nuqtaning t = $\frac{\pi}{3}$ sekunddagi o‘rnini topib,

x=4sin$\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}464\, m$; $y = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5\, m$; tezliklar va tezlanishlar masshtabi tanlab,

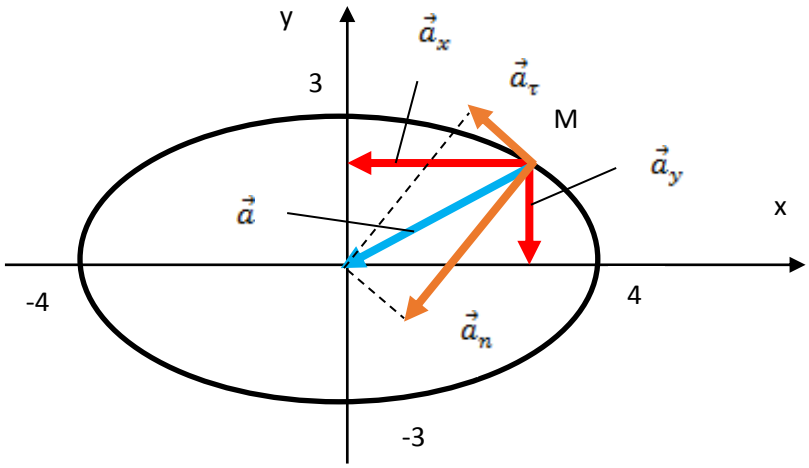
$$\mu_V = \frac{V_x}{MA} = \frac{2\frac{m}{s}}{2\frac{m}{s}} = 1; \qquad \mu_a = \frac{a_x}{MC} = \frac{-3{,}464}{-3{,}464} = 1.$$

Tezliklar grafigini trayektoriyaga joylaymiz:



3.7-shakl.

Tezlanish grafigi esa quyidagicha bo‘ladi:



3.8-shakl.

3-masala. s=0,2t^2+0,3t qonun bo‘yicha egri chiziqli harakat qilayotgan nuqta t=3s da qanday to‘la tezlanishga ega bo‘ladi? Shu paytda egrilik radiusi ρ=1,5m deb olinsin.

Yechish: Moddiy nuqtaning tezligini topish uchun yo‘ldan vaqt bo‘yicha hosila olinadi,

$$V = \frac{ds}{dt} = (0{,}2t^2 + 0{,}3t\,)' = 0{,}4t + 0{,}3\,. \qquad (1)$$

Urinma tezlanish tezlikdan vaqt bo‘yicha olingan hosilaga teng:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = (0{,}4t + 0{,}3\,)' = 0{,}4\ m/s^2\,. \qquad (2)$$

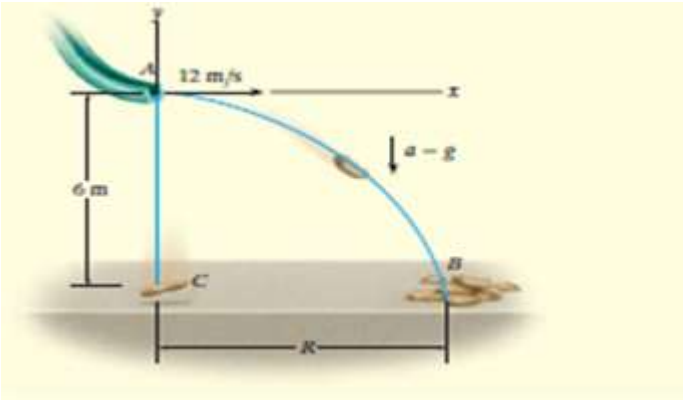
Urinma tezlanish esa

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(\,0{,}4t+0{,}3\,)^2}{1{,}5} = \frac{(\,0{,}4\cdot 3+0{,}3\,)^2}{1{,}5} = 1{,}5\ \frac{m}{s^2}.$$

Umumiy tezlanish (3.34) formuladan aniqlanadi:

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{2{,}41} = 1{,}55\frac{m}{s^2}.$$

4-masala: (chet el adabiyotidan olingan [2]) Ezilmaydigan narsalar bilan to‘ldirilgan qoplar balandligi 6 metrli qiyalikdan 12 m/sek gorizontal tezlik bilan uchib chiqmoq-da (3.9-shakl). Havoning qarshiligini hisobga olmay va qoplar faqat og‘irlik kuchi ta’sirida harakat qiladi deb, ularning gorizontan uchish uzoqligi-R ni toping.



3.9-shakl.

***Yechish*:** Axy dekart koordinata o‘qlarini tanlab olinadi. Qopni moddiy nuqta deb hisoblab, uning gorizontal-vertikal harakati koordinatalarini tezlik va tezlanishlar orqali ifodalaymiz:

$$\begin{cases} x_B = x_A + V_{Ax}\cdot t_{AB} = 0 + 12t_{AB}\ , \\ y_B = y_A + V_{Ay}\cdot t_{AB} + \frac{g\cdot t^2}{2} = 6 + 0\cdot t_{AB} + \frac{-9{,}81}{2}\cdot (t_{AB})^2. \end{cases} \qquad (1)$$

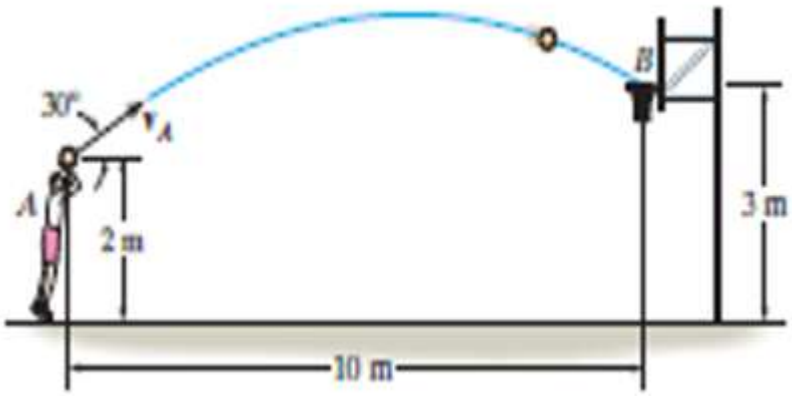
Masala shartiga ko‘ra : $x_A = y_A = 0$; $x_B = R$, $y_B = -6$, u holda

$$\begin{cases} R = 12 \cdot t_{AB} \\ -6 = -4{,}905(t_{AB})^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Demak qoplarning uchish vaqti: $t_{AB} = 1{,}1\ sek$,

uzoqqa uchishi esa R = 13,2 m.

5-masala: (chet el adabiyotidan olingan [2]) Basketbolchi to‘pni 2 metr balandlikda va halqadan 10 metr uzoqlikda ushlab turibdi (3,10-shakl). To‘pni α=30° qiyalatib qanday tezlik bilan otsa, to‘p 3 metr balandlikdagi halqaga tushadi? Havoning qarshilagi hisobga olinmasin.



3.10-shakl.

Yechish: Koordinata boshini A nuqtada tanlab olib, to‘pning uchish harakat qonunini tuzish mumkin:

$$\begin{cases} x_B = x_A + V_A \cdot \cos\alpha \cdot t_{AB}, \\ y_B = y_A + V_A \cdot \sin\alpha \cdot t_{AB} - \frac{g(t_{AB})^2}{2}; \end{cases} \qquad (1)$$

Masalaning boshlang‘ich va chegaraviy shartlarini $x_A = y_A = 0$; $x_B = 10\ m$, $y_B = 1\ m$, (1) tenglamaga qo‘yib, to‘pning uchish vaqti va boshlang‘ich tezligini aniqlash mumkin:

$$\begin{cases} 10 = \frac{\sqrt{3}}{2} V_A \cdot t_{AB}, \\ 1 = \frac{1}{2} V_A \cdot t_{AB} - \frac{9{,}81}{2} (t_{AB})^2. \end{cases} \qquad (2)$$

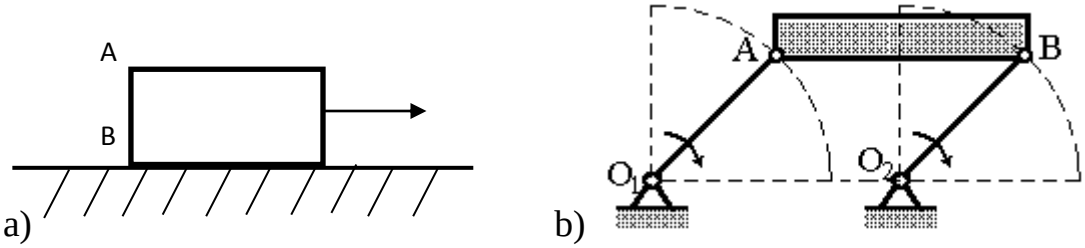
Ikkita chiziqli tenglamalar sistemasidan ikkita noma’lumlar aniqlanadi:

$t_{AB} = 1{,}68\ sek$; $V_A = 6{,}85$ m/sek.

3.2. QATTIQ JISM HARAKATINING KINEMATIKASI.

3.2.1. Qattiq jismning ilqarilanma harakati.

Moddiy nuqtaning ilgarilanma harakati deganda to‘g‘ri chiziqli harakat tushuniladi. Lekin qattiq jismning ilgarilanma harakati murakkabroq bo‘lib, bunday harakatda uning nuqtalari to‘g‘ri chiziqli yoki egri chiziqli trayektoriya chizishi mumkin. Qattiq jismning ***ilgarilanma harakati*** deb, jismda olingan ixtiyoriy biror kesma harakat davomida o‘z-o‘ziga parallel qolgan holga aytiladi. Masalan, jismning gorizontal yo‘ldagi harakati (3.11-shakl,a). Velosiped pedaliga o‘xshash harakat qiladigan krivoshipli mexanizmning aylanma harakatidagi AB “tsapfa”ning ilgarilanma harakati(3.11-shakl,b) va “charxipalak” kabinasining ilgarilanma harakati misol bo‘ladi (3.12-shakl).



3.11-shakl.

3.12-shakl.

Ilgarilanma harakatning xossasi quyidagi teorema orqali aniqlanadi: *Qattiq jismning ilgarilanma harakatida, uning barcha nuqtalari bir xil trayektoriyalar bo'yicha harakatlanadi, hamda barcha nuqtalarining tezlik va tezlanish vektorlari miqdori va yo'nalishi jihatidan bir xil bo'ladi.*

Bu teoremani isbot qilish uchun, *Oxyz* hisob sistemasida ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismni olib ko'raylik. Ushbu jismda ixtiyoriy A va B nuqtalarni tanlab olaylik. Koordinata boshidan bu nuqtalarga tegishlicha $\vec{r}_A$ va $\vec{r}_B$ radius vektorlar va shu nuqtalarni birlashtiruvchi $\overrightarrow{AB}$ vektor o'tkazaylik (3.13-shakl). U holda

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \qquad (3.45)$$

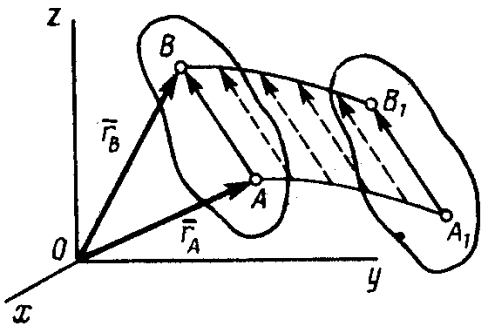
A va B nuqtalar orasidagi masofa o'zgarmas, undan tashqari $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari ham o'zgarmaydi, chunki qattiq jism ilgarilanma harakat qilmoqda. Shunga asosan, aytish mumkinki $\overrightarrow{AB}$ vektor qattiq jismning har qanday ilgarilanma harakatida o'z yo'nalishi va qiymatini o'zgartirmas ekan (ya'ni $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$). Demak (3.45) tenglikka asosan (va bevosita 3.13-shakldan ko'rinib turganidek) B nuqtaning trayektoriyasiA nuqtaning trayektoriyasibilan bir-xil bo'lib, faqat undan o'zgarmas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$ vektorga siljigan ekan xolos. Shu sababli A va B nuqtalarning trayektoriyalari (agar ustma-ust qo'yilsa, bir-birini yopadi) mutloq bir xil egri chiziqlardan iborat ekan.

A va B nuqtalarning tezliklarini aniqlash uchun (3.45) tenglikning ikkala tomonidan vaqt bo'yicha hosila olamiz,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} \quad .$$

Lekin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$ o'zgarmas vektordan vaqt bo'yicha olingan hosila nolga teng. $\vec{r}_A$ va $\vec{r}_B$ -radius vektorlardan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila, B va A nuqtalarning tezlik vektorlaridan iborat bo'ladi. Natijada,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \qquad (3.46)$$

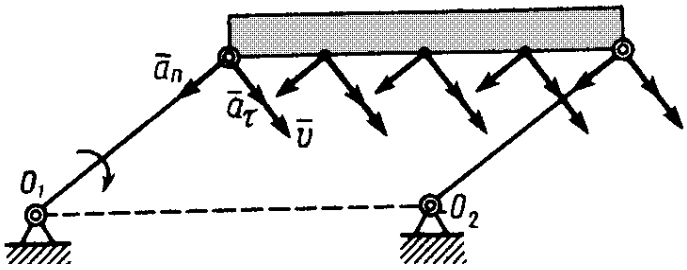


3.13-shakl

ekanligini aniqlaymiz, ya’ni qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning ixtiyoriy olingan ikkita nuqtasining tezliklari, ham son qiymatlari, ham yo‘nalishlari bo‘yicha bir xil ekan. Oxirgi tenglikdan vaqt bo‘yicha yana bir marta hosila olsak, shu nuqtalarning tezlanishini aniqlaymiz, ya’ni

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}\ , \quad \text{yoki} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A\ . \qquad (3.47)$$

Demak, ***qattiq jismning ilgarilanma harakatida, uning ixtiyoriy A va B nuqtalarining tezliklari va tezlanishlari qiymatlari va yo‘nalishlari bo‘yicha bir xil bo‘lar ekan.***



3.14-shakl.

A va B nuqtalarni ixtiyoriy ravishda tanlab olganligimiz sababli, qattiq jismning ilgarilanma harakatida uning barcha nuqtalarining istalgan vaqtdagi tezlik va tezlanish vektorlari bir-biriga teng ekan.

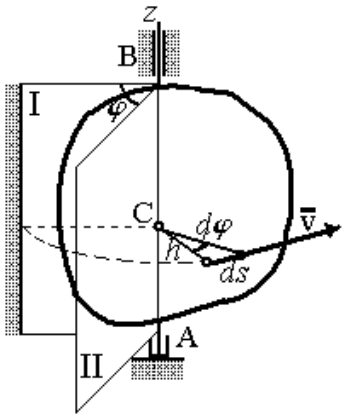
Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan, ilgarilanma harakat qilayotgan qattiq jismning tezlik va tezlanish vektorlarining maydonlari bir jinsli bo‘lar ekan (3.14-shakl), lekin nostatsionar, ya’ni vaqt oralig‘ida o‘zgaruvchan bo‘lar ekan.

Shuni ta’kidlash lozimki, jismning tezligi va tezlanishi degan iborani qattiq jismning *faqat ilgarilanma harakatidagina* ishlatish mumkin xolos. Qattiq jismning qolgan barcha harakatlarida bunday - «*jismning tezligi*» va «*jismning tezlanishi*» kabi so‘zlar o‘rinsiz bo‘ladi, chunki jismning har bir nuqtasining tezligi va tezlanishlari turlicha bo‘ladi.

3.2.2. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati

A. <u>HARAKAT QONUNI.</u> Harakat davomida jismning kamida ikkita nuqtasi harakatsiz qolsa, jismning bunday harakati ***qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakat*** deb ataladi. Albatta, bu ta’rif juda mukammal emas, lekin shu

nuqtalardan o‘tgan o‘q jismning ***aylanish o‘qi*** deb qabul qilinsa, haqiqatga yaqinroq bo‘ladi (3.15-shakl.)



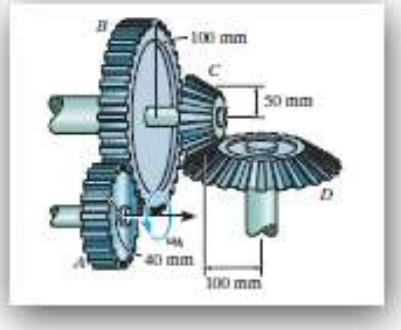
3.15-shakl.

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatiga misollar juda ko‘p bo‘lib, mashina-mexanizmlarning aksariyat qismi shunday harakat qiladi (3.16-shakl).

a)

b)

c)



d)

3.16-shakl.

Qattiq jismning nuqtalari orasidagi masofalar harakat davomida o‘zgarmay qolgani uchun, aylanish o‘qida yotuvchi barcha nuqtalar qo‘zg‘almas bo‘ladi.

Aylanish o‘qida yotmagan barcha nuqtalarning trayektoriyalari aylanish o‘qiga perpendikulyarl tekisliklarda joylashadi va markazlari aylanish o‘qida joylashgan tegishli radiusli yoylardan iborat bo‘ladi.

Aylanma harakat qilayotgan qattiq jismning holatini aniqlash uchun, aylanish o‘qidan o‘tuvchi ikkita tekislik tanlab olamiz: ulardan biri qo‘zg‘almas I-yarim tekislik, ikkinchisi jismning aylanish o‘qini kesib o‘tuvchi va jism bilan birgalikda aylanma harakat qiluvchi II-yarim tekislikdan iborat bo‘lsin (3.15-shakl).

U holda jismning ixtiyoriy holati, uning aylanma harakatida II-yarim tekislikning Az - o‘q atrofida burilishi natijasida qo‘zg‘almas I-yarim tekislik bilan hosil qiladigan φ -burchak orqali aniqlanishi mumkin. Ushbu φ-burchakni ***jismning burilish burchagi*** deb ataladi. Agar aylanish o‘qining musbat tomonidan qaraganimizda, II-yarim tekislik Az - o‘q atrofida soat mili aylanishiga teskari tomonga aylansa, bunday harakat ***musbat burilish*** burchagi deb ataladi, agar soat miliga teskari tomonga aylansa, ***manfiy burilish*** deb qabul qilingan.

Burilish burchagini ***radian***larda o‘lchash qabul qilingan. Aylanma harakatdagi jismning istalgan vaqtdagi holatini aniqlash uchun, burilish burchagi φ -ning vaqt t-ga bog‘liq bo‘lgan funksiyasi berilgan bo‘lishi lozim, ya’ni

$$\varphi=f(t) \quad . \qquad (3.48)$$

(3.48) tenglama, ***qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakat qonuni*** deb ataladi.

B. <u>BURCHAKLI TEZLIK VA BURCHAKLI TEZLANISH.</u>

1) ***Jismning burchakli tezligi.*** Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatining asosiy kinematik xossalari burchakli tezlik -ω va burchakli tezlanish -ε lardan iborat bo‘ladi. Bu kattaliklar butun jismga tegishli bo‘lib, barcha nuqtalari uchun bir xil belgilanadi, masalan bir necha jismlar uchun $\omega_1, \varepsilon_2, \omega_3$ va h.k.

Agar qattiq jism $\Delta t=t_1-t$ vaqt oralig‘ida $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi$ burchakka burilsa, o‘rtacha burchakli tezlik deb, $\omega_{o'rt}=\Delta\varphi/\Delta t$ va $\Delta t\to 0$ intilganda, o‘rtacha burchakli tezlik haqiqiy burchakli tezlikka aylanadi, ya’ni

$$\omega=d\varphi/dt\,, \quad \text{yoki} \quad \omega=\dot{\varphi}\,. \tag{3.49}$$

Shunday qilib, *qattiq jismning burilish burchagidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila jismning istalgan vaqtdagi* ***burchakli tezligi****ning son qiymatini* aniqlab berar ekan. (3.49) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, jismning burchakli tezligi -ω, elementar burilish burchagi dφ -ni, shu elementar burilishga sarflangan vaqt dt - ga nisbatiga teng ekan. Burchakli tezlik ω-ning ishorasi aylanishning yo‘nalishini aniqlab beradi. Masalan, agar jism soat mili aylanishiga teskari aulansa $\omega>0$ bo‘ladi, aks holda $\omega<0$.

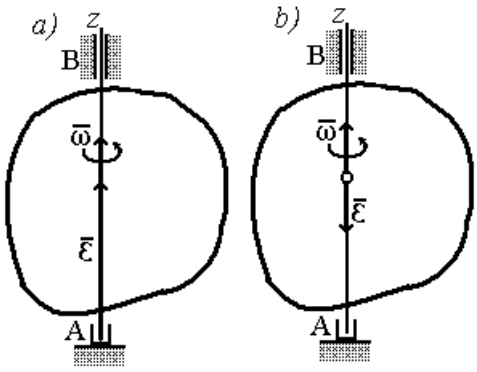
2) *Jismning burchakli tezlanishi.* Qattiq jismning burchakli tezlanishi burchakli tezlikning vaqt birligi ichidagi o‘zgarishini ifodalab beradi. Agar $\Delta t=t_1-t$ vaqt oralig‘ida burchakli tezlik $\Delta\omega=\omega_1-\omega$ qiymatga o‘zgarsa, burchakli tezlanishning o‘rtacha qiymati $\varepsilon_{o'rt}=\Delta\omega/\Delta t$ -ga teng bo‘ladi. Agar $\Delta t\to 0$ intilganda o‘rtacha burchakli tezlanish haqiqiy burchakli tezlanishga aylanadi va (3.49) tenglikni e’tiborga olgan holda,

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2t}{dt^2} \qquad \text{yoki} \quad \varepsilon=\dot{\omega}=\ddot{\varphi} \tag{3.50}$$

aniqlanadi. Shunday qilib, ***burchakli tezlanishning son qiymati*** *burchakli tezlikdan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilaga teng yoki burilish burchagidan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.*

Burchakli tezlikning o‘lchov birligi *rad/s* yoki 1/s (s^{-1}) shaklda, burchakli tezlanishning o‘lchov birligi esa, rad/s^2, yoki 1/s^2 (s^{-2}) iifodalanadi, radian-o‘lchovsiz qiymatdan iborat.

Agar burchakli tezlikning miqdori ortib borsa, aylanma harakat ***tezlanuvchan*** deb ataladi, agar kamayib borsa aylanma harakat ***sekinlanuvchan*** deb ataladi.



3.17-shakl.

Agar jismning aylanma harakati fazoda yuz bersa, burchakli tezlik va burchakli tezlanishni vektor sifatida ifodalash qulay. Bunday vektor bir vaqtning o‘zida qattiq jismning aylanma harakatining ham yo‘nalishi, ham miqdorini aniqlab beradi. Burchakli tezlik vektori $\vec{\omega}$ - aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lib, uning uchidan qaraganda aylanish soat mili aylanishiga teskari tomonga bo‘lishi lozim (3.17-shakl,a,b). Burchakli tezlanish vektori $\vec{\varepsilon}$ ham aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lib, tezlanuvchan harakatda $\vec{\omega}$ vektori tomoniga (3.17-shakl,a), sekinlanuvchan harakatda esa $\vec{\omega}$ vektoriga teskari tomoniga yonalgan (3.17-shakl,b).

Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatida quyidagi xususiy xollar yuz berishi mumkin:

a)Agar $\omega = const$, $\varepsilon = 0$ bo‘lsa ***tekis aylanma harakat*** hosil bo‘ladi.

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ dan integral olib,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt$$

yoki $$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad . \qquad (3.51)$$

(3.51) ifoda ***tekis aylanma harakat qonuni*** deb ataladi.

Texnikada aylanma harakatning burchakli tezligini 1 minut ichidagi aylanishlar soni orqali ifodalanadi va uni ***n (ayl/min)*** bilan belgilanadi. Jism aylanish o‘qi atrofida bir marta to‘liq aylansa, u 2π burchakka burilgan bo‘ladi va n - marta aylangan bo‘lsa demak, jism jami bo‘lib $2\pi n$ burchakka burilgan bo‘ladi;

ushbu burilish t=1minut=60 sekund vaqt mobaynida sodir bo‘lgan. Bu qiymatlarni (3.49) formulaga qo‘ysak,

$$\omega=\pi n/30\approx 0{,}1n \qquad (3.52)$$

tenglama orqali bog‘langan bo‘lar ekan.

b) Agar $\varepsilon = const$ bo‘lsa, ***tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat*** yuz beradi.

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ dan integral olib,

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$$

yoki $$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (3.52)$$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ deb, yana bir bor integral olib,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt$$

yoki $$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2 \quad . \qquad (3.53)$$

(3.53) tenglama ***tekis o‘zgaruvchan (tezlanuvchan*** yoki ***sekinlanuvchan) aylanma harakat qonuni*** deb ataladi.

D. CHIZIQLI TEZLIK VA CHIZIQLI TEZLANISH.

Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakat qilayotgan jismning nuqtalari aylana trayektoriyalar chizadi. Ularning radiuslari turlicha bo‘lganligi uchun chiziqli tezligi va chiziqli tezlanishi o‘zgaruvchan qiymat bo‘ladi. Shuning uchun jismning har bir nuqtasi uchun alohida belgilash kiritiladi, masalan: $\vec{V}_A, \vec{a}_B, \vec{V}_C$ va h.k.

1. Qattiq jism nuqtalarining chiziqli tezligi. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan qattiq jismning aylanish o‘qidan h - masofada joylashgan ixtiyoriy M nuqtasining harakatini olib ko‘raylik (3.14-shakl). Qattiq jismning aylanma harakatida shu M nuqta markazi aylanish o‘qida yotuvchi S nuqta atrofida radiusi h-ga teng bo‘lgan aylana chizadi. Bu aylana aylanish o‘qiga perpendikulyarl bo‘lgan tekislikda yotadi.

Agar jism dt -vaqt oralig‘ida dφ burchakka burilsa, u holda M nuqta o‘zining trayektoriyasi bo‘ylab qilgan harakatida elementar ds=h·dφ masofani bosib o‘tadi.

Shunga ko‘ra, M nuqtaning chiziqli tezligi ds -ni dt-ga nisbatiga teng bo‘ladi, ya’ni

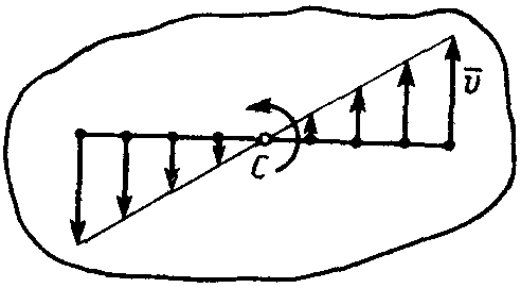
$$V = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

yoki

$$V = h \cdot \omega \qquad (3.54)$$

M nuqtaning tezligini jismning burchakli tezligidan farqlab, ***chiziqli tezlik*** yoki ***aylanma tezlik*** deb ataladi.

Shunday qilib, *aylanma harakatdagi* ***qattiq jism nuqtasining chiziqli tezligi*** *son qiymati, shu jismning burchakli tezligini uning aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofasiga ko‘paytmasiga teng ekan*.



3.18-shakl

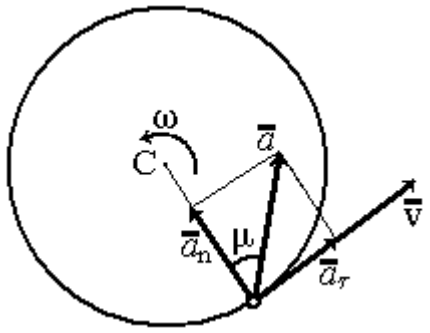
M nuqtaning tezligi shu nuqtaning trayektoriyasiga urinma holda yo‘nalib, M nuqta va aylanish o‘qidan o‘tuvchi tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

Jismning burchakli tezligi -ω uning nuqtalariga bog‘liq bo‘lmaganligi sababli, (3.54) formuladan ko‘rinib turibdiki, aylanayotgan qattiq jism nuqtalarining tezliklari ularning aylanish o‘qlarigacha bo‘lgan masofaga proportsional ravishda o‘zgarar ekan. Aylanayotgan qattiq jism nuqtalari tezliklarining maydoni 3.18-shaklda tasvirlangandek bo‘lar ekan.

2. ***Qattiq jism nuqtalarining chiziqli tezlanishi.***

M nuqtaning tezlanishini aniqlash uchun (3.32) $a_\tau = dv/dt$ va $a_n = v^2/\rho$ formulalardan foydalanamiz.

Hozirgi holatda egrilik radiusi aylanish radiusiga teng, yani ρ=h.



3.19-shakl

Tezlik v -ning qiymatini (3.54) tenglikdan olib kelib, a_τ va a_n -larning aniqlash formulalariga qo‘ysak,

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

va nihoyat,

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2 \tag{3.55}$$

bo‘lar ekan.

Urinma tezlanish - $\vec{a}_\tau$ nuqtaning trayektoriyasiga urinma holda (agar harakat tezlanuvchan bo‘lsa harakat tomonga, sekinlanuvchan bo‘lsa teskari tomonga) yo‘nalgan bo‘ladi; normal tezlanish - $\vec{a}_n$ esa har doim MC radius bo‘ylab aylanish o‘qi tomonga qarab yo‘nalgan bo‘ladi (3.19-shakl).

M nuqtaning to‘la tezlanishining miqdori, (3.34) formulaning birinchi tenglamasidan aniqlanadi

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

yoki

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{3.56}$$

formula orqali aniqlanadi.

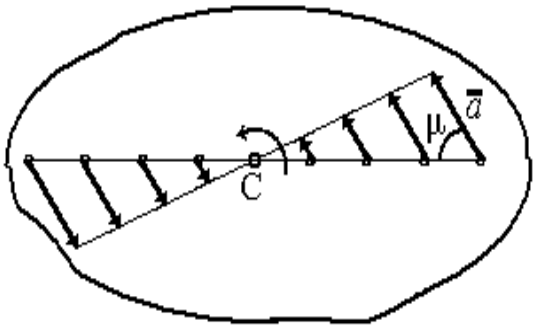
To‘la tezlanish vektorining MC radius bilan hosil qilgan μ -burchagi (3.34) formulaning ikkinchi tenglamasi

$$\text{tg}\mu = a_\tau / a_n$$

orqali aniqlanadi; a_τ va a_n -larning qiymatlarini (3.55)dan qo‘ysak,

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2 \qquad (3.57)$$

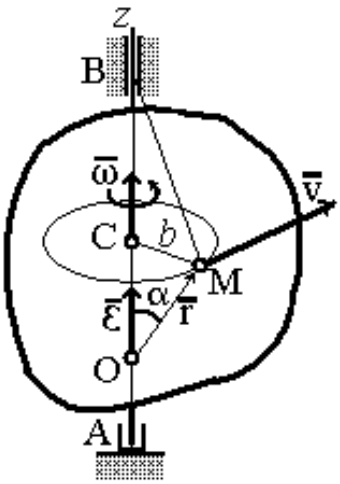
Demak, jism nuqtalarining to‘la tezlanishi, burchakli tezlik-ω va burchakli tezlanish - ε jismning barcha nuqtalari uchun bir xil bo‘lganligi sababli, nuqtalarning aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa-*h* ga proportsional ravishda bo‘lib, ularning yo‘nalishlari aylanish radiuslari bilan bir xil μ - burchak tashkil etar ekan. Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatida nuqtalarining ***tezlanish maydoni*** 3.20-shakldagi kabi tasvirlanadi.



3.20-shakl

3) ***Qattiq jism nuqtalarining chiziqli tezlik va chiziqli tezlanish vektorlari.***

Ixtiyoriy M nuqtaning tezlik -$\vec{V}$ va tezlanish - $\vec{a}$ vektorlari ifodalarini aniqlash uchun, AB aylanish o‘qining ixtiyoriy O nuqtasidan $\vec{r}$-radius vector o‘tkazamiz (3.21-shakl).



3.21-shakl

U holda h=r·sinα va (3.) formulaga asosan,

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha$$

yoki

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} \qquad (3.58)$$

Shunday qilib, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ -vektor ko‘paytmaning miqdori, M nuqta tezligining moduliga teng ekanligi isbotlandi. $\vec{\omega} \times \vec{r}$ va $\vec{V}$ vektorlarning yo‘nalishlari OMB tekisligiga perpendikulyar yo‘nalgan ekan.

Demak *aylanayotgan jismning ixtiyoriy nuqtasining* ***tezlik vektori****, jismning burchakli tezlik vektorini shu nuqtaning radius vektoriga bo‘lgan vektor ko‘paytmasiga teng ekan.*

(3.58) formulaning ikkala tomonidan vaqt bo‘yicha bir marta hosila olsak,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt})$$

yoki

$$\vec{a} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \vec{V}). \qquad (3.59)$$

(3.58),(3.59) formulalar ***Eyler formulasi*** deb ataladi.

Demak qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatida nuqtalarining tezlanishi urinma (aylanma) va normal (markazga intilma) tezlanishlarning vektor yig‘indisidan iborat. Urinma tezlanish M nuqta urinmasi boylab, normal tezlanish esa MC chizig‘i bo‘ylab aylanish o‘qiga yonalgan bo‘ladi (3.17-shakl va 3.19-shakl).

Nazariy ma’lumotlarni mustahkamlash uchun amaliy masalalar yechishga o‘tamiz.

1-masala. Val n=90 ayl/min burchakli tezlik bilan aylanma harakat qilmoqda. Shu valni aylantirayotgan yuritmani o‘chirib qo‘yilgandan keyin u sekinlanuvchan harakat qilib, t_1=40 sek vaqt o‘tgandan keyin to‘xtaydi. Shu val o‘z o‘qi atrofida 40 sek vaqt ichida necha marta aylanganligi aniqlansin.

Yechish. Aylanma harakat tekis sekinlanuvchan harakat bo‘lganligi uchun,

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (2)$$

Boshlang‘ich burchakli tezlikni rad/s - lar orqali aniqlaymiz, yuritma o‘chirilguncha

$$\omega_0 = \frac{n\pi}{30} = \frac{90\pi}{30} = 3\pi.$$

Val aylanishdan to‘xtaguncha $t=t_1$ sek vaqt o‘tib $\omega=0$ bo‘lgan. Ushbu qiymatlarni (a) formulaning ikkinchi tenglamasiga qo‘ysak,

$$0=3\pi+\varepsilon t_1 \quad \text{bundan} \quad \varepsilon= -3\pi/t_1 = -\frac{3\pi}{40}.$$

(1)- formulaga qo‘yib,

$$\varphi = 3\pi \cdot 40 - \frac{3\pi}{40} \cdot \frac{40^2}{2} = 120\pi - 60\pi = 60\pi.$$

Demak, har aylanishi 2π bo‘lsa, val 40 sekund davomida 30 marta aylanib, to‘xtar ekan.

2-masala. Radiusi R=0,6 m bo‘lgan maxovik n=90 ayl/min tezlik bilan tekis aylanma harakat qilmoqda. Maxovik gardishidagi nuqtaning tezlik va tezlanishi aniqlansin.

Yechish. Maxovikning gardishidagi tezlik V=Rω formula orqali hisoblanadi. Masalada, burchakli tezlik ayl/min -larda berilgan, shu sababli uni rad/s -larga aylantiramiz. U holda $\omega=\pi n/30=3\pi$ va $V=R\cdot 3\pi\approx 5{,}7$ m/s.

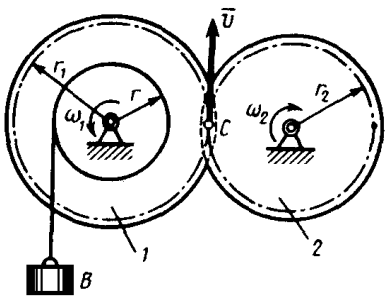
ω=const bo‘lgani uchun ε=0 va $a_\tau=R\cdot\varepsilon=0$ bo‘ladi, shunga ko‘ra,

$$a = a_n = R\omega^2 = R\cdot 9\pi^2 \approx 53{,}3\,\mathrm{m/s^2}$$

Nuqtaning tezlanish vektori M nuqtadan aylanish o‘qiga qarab yo‘nalgan bo‘ladi.

3-masala. B yuk (3.22-shakl) radiusi r -ga teng bo‘lgan valni aylanma harakatga keltirmoqda, bu val esa radiusi r_1 - teng bo‘lgan tishli g‘ildirak 1-ga mahkamlangan bo‘lib, ular bitta o‘q atrofida aylanma harakat qiladi. Yukning boshlang‘ich tezligi nolga teng bo‘lib, o‘zgarmas *a*- tezlanish bilan harakat qilmoqda. 1-tishli g‘ildirak bilan tishlashib turgan r_2 - radiusli shesternya 2-ning harakat qonuni aniqlansin.

Yechish. B yukning boshlang‘ich tezligi nolga teng bo‘lgani uchun ixtiyoriy t -vaqtdagi tezligi $V_B = at$ -qonun orqali aniqlanadi. 1 -g‘ildirakning gardishidagi nuqtalar ham xuddi shunday chiziqli tezlik bilan harakat qiladi. Ikkinchi tomondan olsak 1 -g‘ildirakning gardishidagi nuqtalarning tezliklari $r\omega_1$ -ga teng bo‘ladi, bu yerda ω_1 - val bilan 1 -g‘ildirakning burchakli tezligi. Demak, $r\omega_1= at$, bundan $\omega_1= at/r$ bo‘ladi.



3.22-shakl.

Endi 2 -shestyernyaning burchakli tezligini aniqlaymiz. 1-g‘ildirak bilan 2-shesternyalar tishlashib turgan C nuqtaning tezliklari o‘zaro teng bo‘lganligi sababli $v_C=\omega_1 r_1=\omega_2 r_2$, bundan

$$\omega_2=(r_1/r_2)\omega_1=(r_1 a/r_2 r)t$$

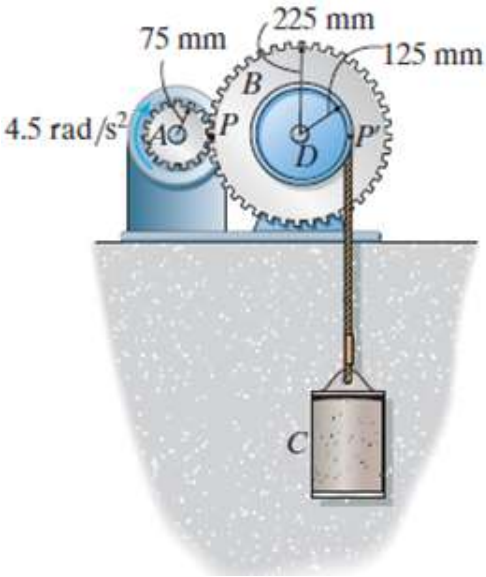
Shunday qilib, 2 -shesternyaning burchakli tezligi vaqtga proportsional ravishda o‘zgarar ekan. $\omega_2=d\varphi_2/dt$ (φ_2 - 2 shesternyaning burilish burchagi) ekanligidan foydalanib,

$$d\varphi_2=(r_1 a/r_2 r)tdt$$

aniqlaymiz. So‘ngra t=0 s da $\varphi_2=0$ ekanligini e’tiborga olib, oxirgi tenglamaning ikkala tomonini integrallab, 2 -shesternyaning tekis o‘zgaruvchan aylanma harakat qonuni keltirib chiqariladi,

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{2r_2 r} at^2.$$

4-masala (horijiy adabiyotdan olindi [2]: Radiusi r_A =75 mm bo‘lgan A shesternya dvigatel yordamida tinch holatdan ε= 4.5 rad/sek^2 o‘zgarmas burchakli tezlanish bilan aylanib, radiusi r_B = 225mm li B shesternyani harakatga keltiradi. B shesternyaga radiusi r_D = 125 mm bo‘lgan shkiv o‘rnatilgan bo‘lib, u C yukni yuqoriga tortadi. Uch sekundda C yukning qancha masofaga ko‘talishi va uning tezligi aniqlansin.



3.23-shakl.

Yechish: 1) A shesternya tekis aylanma harakatda, shuning uchun 3-sekunddagi burchakli tezligi:

$$\omega_A = \omega_0 + \varepsilon t = 0 + 4{,}5 \cdot 3 = 13{,}5 \text{ rad/sek.}$$

P nuqta A va B shesternyalarga tegishli, uning tezligi ikkala shesternya uchun

$$V_P = r_A \cdot \omega_A = r_B \cdot \omega_B\,, \qquad (1)$$

bundan

$$\omega_B = \frac{r_A}{r_B} \cdot \omega_A = \frac{75}{225} \cdot 13{,}5 = 4{,}5 \text{ rad/sek.}$$

B shesternya va D shkiv o‘zaro mahkamlanganligi uchun $\omega_D = \omega_B = 4{,}5\frac{rad}{sek}$.

C yuk D shkivga osilganligan,

$$V_{P'} = V_C = \omega_D \cdot r_D = 4{,}5 \cdot 0{,}125 = 0{,}5625 \text{ m/sek.}$$

2) A shesternya 3 sekundda qanch burchakka burilishini aniqlaymiz:

$$\varphi_A = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} = 0 \cdot 3 + \frac{4{,}5 \cdot 3^2}{2} = 20{,}25 \text{ rad,}$$

burchakli tezlik $-\omega$ bilan burchakli funksya $-\varphi$ chiziqli bog‘liq, yani

$V = r\omega$ dan integral olib, $S = r\varphi$ hosil qilish mumkin,

shuning uchun (1) munosabatdagi ω ni φ almashtirib,

$$\varphi_B = \frac{r_A}{r_B} \cdot \varphi_A = \frac{75}{225} \cdot 20{,}25 = 6{,}75 \text{ rad.}$$

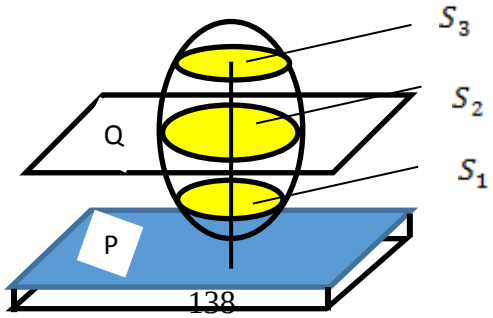
B shesternya va D shkiv o‘zaro mahkamlanganligi uchun $\varphi_D = \varphi_B = 6{,}75$ rad.

C yukning qanchaga ko‘tarilishi esa

$$S_C = \check{S}_{P'} = r_D \cdot \varphi_D = 0{,}125 \cdot 6{,}75 = 0{,}84375 \text{ m.}$$

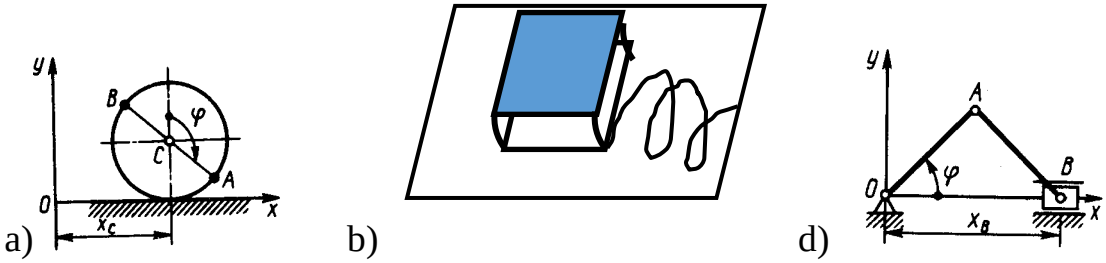
3.2.3. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati

A. <u>HARAKAT QONUNI.</u> Qattiq jismning ***tekislikka parallel harakati*** deb, harakat davomida jismda olingan barcha nuqtalar biror qo‘zg‘almas tekislik P ga parallel trayektoriya chizgan harakatga aytiladi (3.24-shakl).



3.24-shakl.

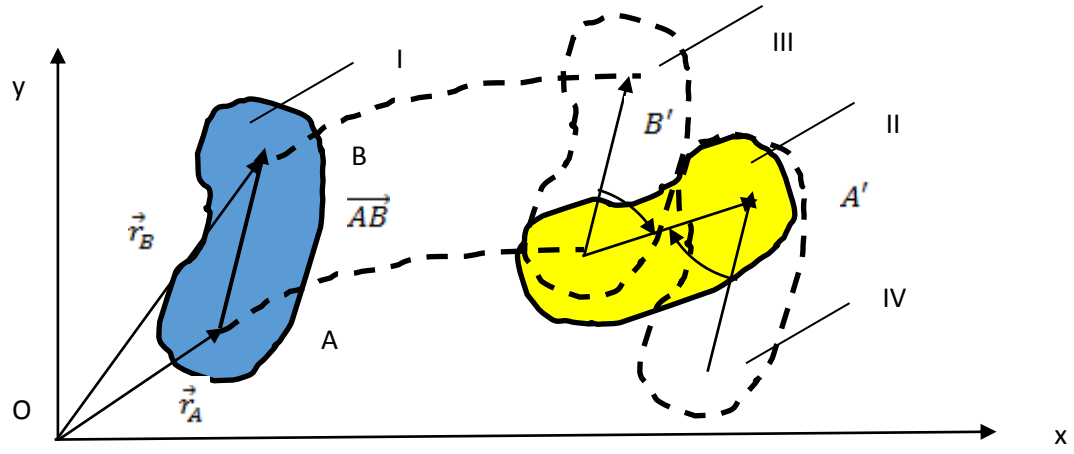
Masalan, avtomobilning g‘idiragi vertikal tekislikka nisbatan parallel harakat qiladi(3.24-shakl,a). Stol ustidagi kitobning stol tekisligidagi ixtiyoriy harakati(3.25-shakl,b) va nihoyat krivoship-polzunli mexanizm AB shatunining harakati tekislikka parallel harakatga misol bo‘ladi(3.25-shakl,d).



3.25-shakl.

Umuman olganda, qattiq jismning tekislikka parallel harakati fazoviy harakat bo‘lib, harakat qonunini chiqarish uchun, soddalashtirib, tekislikdagi harakatga keltirib olamiz. Buning sababi, 3.24-shakldagi jismga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqda olingan S_1, S_2, S_3 yuzalardagi nuqtalar bir xil harakat qiladi, yoki (3.25-shakl,b) dagi kitobning harakatida uning hamma varaqlari bir xil harakat qilganligi uchun bittasining harakatini tekshirish kifoya qiladi. Demak, jismning fazodagi tekis parallel harakati uning biror S yuzasining Oxy tekislikdagi harakatiga keltirilishi mumkin ekan. Harakati ko‘rilayotgan S yuza ***tekis shakl*** deb ataladi. Tekis shakl harakatini undagi kinematik holati aniq bo‘lgan nuqta harakatiga bog‘lab o‘rganish qulay bo‘ladi: bu nuqta ***qutb nuqta*** deb ataladi. Endi S tekis shaklning Oxy tekisligidagi harakatini tekshiramiz va uning harakat qonunini keltirib chiqaramiz (3.26-shakl). Faraz qilaylik, S tekis shakl biror t vaqt ichida I- holatdan II-holatga o‘tib qolsin. Uning bu ko‘chishini bitta ilgarilanma va bitta aylanma ko‘chishlarning yig‘indisidan iboratligi haqidagi quyidagi teoremani isbot qilamiz:

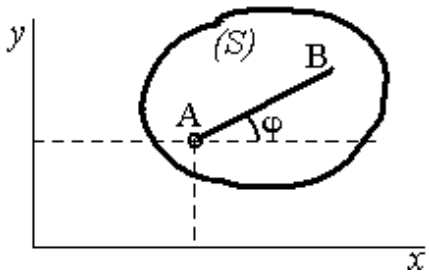
Teorema (Shall teoremasi): *Tekis shaklning Oxy tekisligidagi ixtiyoriy ko‘chishini qutb nuqta bilan birgalikdagi ilgarilanma va qutb atrofidagi aylanma ko‘chishlarning yig‘indisidan iborat deb qarash mumkin.*



3.26-shakl.

Isbot: Faraz qilaylik, tekis shakl t vaqt davomida I-holatdan II-holatga o‘tgan bo‘lsin. Tekis shaklda biror AB kesma olib, A nuqtani qutb nuqta deb tanlab, I-holatdan III-holatga ilgarilanma kochish qilamiz va A atrofida aylantirib, II-holatga olib kelamiz. Yoki B nuqtani qutb deb tanlab, I-holatdan IV-holatga ilgarilanma va B atrofida aylantirib, II-holatga erishiladi. Demak, teorema geometrik ravishda isbot qilindi.

Tekis shakl S ning Oxy tekislikdagi o‘rnini aniqlash uchun AB kesma va φ burchak tanlab olib, harakat qonunini aniqlaymiz (3.27-shakl).



3.27-shakl.

A nuqtaning kinematik xususiyati ma’lum deb, qutb deb olamiz va teoremaga asosan,

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) . \qquad (3.60)$$

(3.60) tenglamalar qattiq jismning ***tekis parallel harakat qonuni*** deb ataladi.

Bunda x_A va y_A A qutb nuqtaning ilgarilanma harakatini, φ esa A qutb atrofida aylanma harakatini ifodalaydi.

B. TEKIS PARALLEL HARAKATDAGI JISM NUQTALARINING TEZLIKLARI.

Tekis parallel harakat qilayotgan jism nuqtalarining tezliklarini 4 xil usulda aniqlash mumkin:

1) Vektor usulida.
2) Proyeksiyalar usulida.
3) Tezliklar oniy markazi usulida.
4) Geometrik usulda (tezliklar plani).

1) Vektor usuli:

Faraz qilaylik, tekis shakl A nuqtasining tezligi ma'lum bo'lib, B nuqtasining tezligini aniqlash talab etilsin (3.26-shakl). Yuqorida isbot etilgan teoremaga asosan,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \qquad (3.61)$$

bunda $\vec{r}_A$ va $\vec{r}_B$ – A va B nuqtalarning radius vektori;

$\overrightarrow{AB}$ – AB kesma vektori.

Tezlikni aniqlash uchun oxirgi ifodadan t vaqt bo'yicha hosila olamiz,

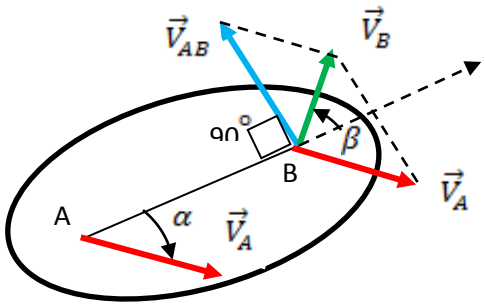
$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt},$$

yoki

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB}\ , \qquad (3.62)$$

bunda $$\vec{V}_{AB} = \overrightarrow{AB}\ x\ \vec{\omega}_{AB} \qquad (3.63)$$

Demak, *tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori qutb nuqtaning ilgarilanma harakatdagi tezligi va qutb atrofidagi aylanma harakat tezliklarining vektor yig'indisidan iborat ekan* (3.28-shakl).



3.28-shakl.

2) Proyeksiyalar usuli:

Amaliy masalalar yechishda (3.26) vektor tenglamani qo‘llash bir qancha qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun (3.26) ifodani AB chiziqdan o‘tgan o‘qqa proyeksiyalab,

$$(\vec{V}_B)_{AB} = (\vec{V}_A)_{AB} + (\vec{V}_{AB})_{AB}$$

$\vec{V}_{AB}$ vector AB ga perpendikulyar, shuning uchun $(\vec{V}_{AB})_{AB} = 0$.

Oxirgi tenglikni e’tiborga olsak,

$$(\vec{V}_B)_{AB} = (\vec{V}_A)_{AB} ,$$

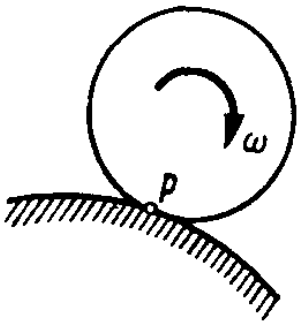
yoki $$V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta . \qquad (3.64)$$

Demak, *A va B nuqtalarning tezlik vektorlarining mazkur nuqtalardan o‘tgan o‘qqa proyeksiyalari o‘zaro teng ekan.*

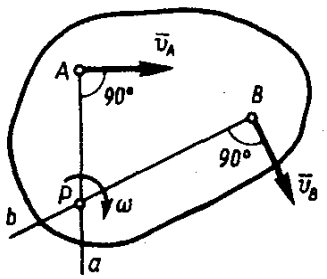
3) Tezliklar oniy markazi usuli:

Tekis parallel harakatdagi jism nuqtalari tezligini aniqlashning yana bir sodda usuli tezliklar oniy markazi usuli hisoblanadi. Tekis parallel harakatdagi jism qisqa vaqt oraligida biror markaz atrofida aylanishi mumkin. Aylanish nuqtasini topib, bu nuqtani qutb nuqta sifatida qabul qilib, qolgan nuqtalarining tezliklarini aniqlaymiz.

Qisqa (oniy) vaqt ichida tezligi no‘lga teng bo‘lgan nutaga ***tezliklar oniy markazi*** yoki ***oniy aylanish markazi*** deb ataladi. Tezliklar oniy markazi geometrik usulda, quyidagi ko‘rinishlarda aniqlanadi:



3.29-shakl.

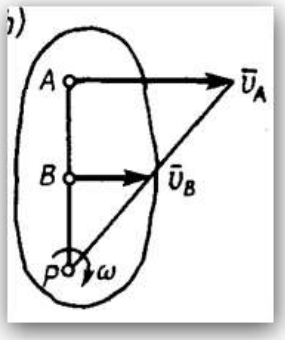


3.30-shakl.

1) bir jismning ustida ikkinchi jism sirpanmasdan dumalasa, ularning bir-biriga tegib turgan nuqtasi *P* tezliklar oniy markazi bo‘ladi (3.29-shakl).

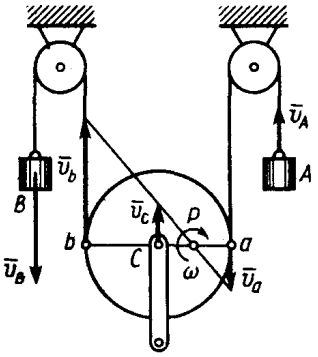
2) agar tekis shakl A nuqtasining tezligi $\vec{V}_A$ va B nuqtasining tezligi $\vec{V}_B$ yo‘nalishi ma’lum bo‘lsa, ularga perpendikulyar chiziqlar o‘tkazib, kesishish nuqtasi - *P* tezliklar oniy markazi topiladi (3.30-shakl).

3) agar tekis shakl A va B nuqtalarining tezlik vektorlari o‘zaro parallel va bir tomonga yo‘nalgan bo‘lsa, ularning boshlang‘ich tomonidan perpendikulyar va uchlarini tutashtirish yordamida *P* tezliklar oniy markazi topiladi (3.31-shakl).



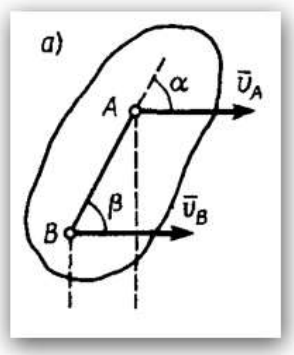
3.31-shakl.

4) agar tekis shakl A va B nuqtalarining tezlik vektorlari o‘zaro parallel, va turli tomonga yo‘nalgan bo‘lsa, ularning boshlang‘ich tomonidan perpendikulyar va uchlarini tutashtirish yordamida *P* tezliklar oniy markazi topiladi (3.32-shakl).



3.32-shakl.

5) agar tekis shakl A va B nuqtalarining tezlik vektorlari o‘zaro parallel, bir tomonga yo‘nalgan va qiymatlari teng bo‘lsa, ularning boshlang‘ich tomonidan va uchlaridan perpendikulyar chiqarsak, ular kesishmaydi, demak tezliklar oniy markazi ∞ da , yani jism ilgarilanma harakatda bo‘ladi (3.33-shakl).



3.33-shakl.

Tezliklar oniy markazi usulining asosiy formulasi aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezligi formulasidan

$$V = R\cdot \omega$$

keltirib chiqariladi: 3.30-shakldan

$$V_A = AP\cdot \omega \quad \text{va} \quad V_B = BP\cdot \omega$$

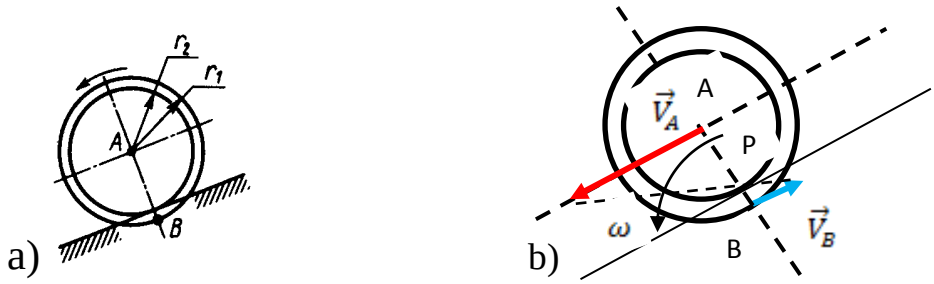
demak

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (3.65)$$

4) Geometrik usul (tezliklar plani):

(3.62) va (3.63) vektor tengliklar ma'lum masshtabda millimetrli o'lchov qog'oziga chiziladi. Bu usulning yaxshi tomoni hisob-kitoblar kam bo'lib, asosan chizma yordamida jism nuqtalari tezliklari yonalishi va qiymatlari aniqlanadi. Quyida amaliy masalalar yechishda bu usul kengroq ko'rib o'tiladi.

1-masala: Qiya tekislik bo'ylab sirpanmasdan dumalayotgan pog'onali g'ildirakning radiuslari r_1=0,6m va r_2=0,5m bo'lib, A nuqtasining tezligi v_A=2m/sek bo'lsa, B nuqtasining tezligini aniqlang.



3.35-shakl.

Yechish: Tezliklar oniy markazini aniqlashning 1-usuliga asosan, pog'onali gildirak va tekislik

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (1)$$

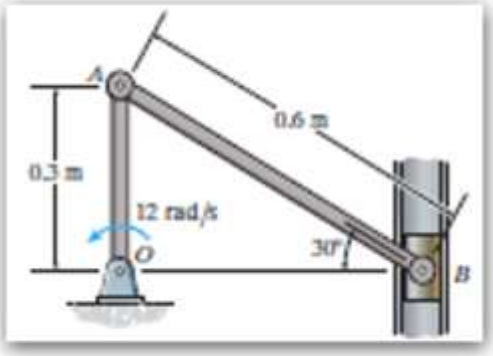
Son qiymatlarini qo‘yib,

$$\omega = \frac{2}{0,5} = \frac{V_B}{0,1}$$

noma’lumlarni aniqlaymiz:

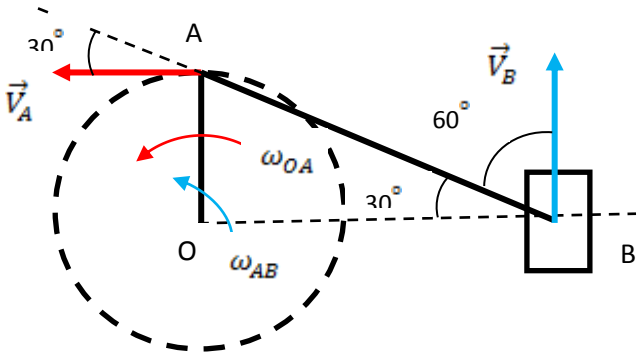
$$\omega = 4 \text{ rad/sek}, \quad V_B = 0,4\frac{m}{sek}.$$

2-masala (horijiy adabiyotdan olindi [2]): Krivoship-polzunli mexanizmning OA krivoshipi 12 rad/sek burchakli tezlik bilan aylanadi. Agar mexanizmning o‘lchamlari va holati berilgan bo‘lsa (3.36-shakl), AB shatunning burchakli tezligi va B polzunning tezligi topilsin.ning tegishib turgan *P* nuqtasi oniy markaz bo‘ladi:



3.36-shakl.

Yechish: 1) <u>Proyeksiyalar usuli.</u> A nuqta O markaz atrofida aylanma harakat qilganligi uchun uning tezligi OA krivoshipga perpendikulyar, ya'ni aylanaga urinma yo'nalgan (3.37-shakl).



3.37-shakl.

Uning qiymati esa

$$V_A = OA \cdot \omega_{OA} = 0{,}3 \cdot 12 = 3{,}6 \text{ m/s}. \qquad (2)$$

(3.64) ifodaga asosan, A va B nuqta tezlik vektorlarining AB dan o'tgan o'qqa proyeksiyalari o'zaro teng, ya'ni

$$(\vec{V}_A)_{AB} = (\vec{V}_B)_{AB} \qquad (3)$$

yoki

$$V_A \cdot \cos 30° = V_B \cdot \cos 60°, \qquad (4)$$

bundan

$$V_B = \frac{\cos 30°}{\cos 60°} \cdot V_A = \frac{0{,}866}{0{,}5} \cdot 3{,}6 = 6{,}23 \text{ m/s}.$$

2) <u>Tezliklar oniy markazi usulu.</u> $\vec{V}_A$ va $\vec{V}_B$ vektorlarga perpendikulyar chiziqlar chiqarib, O markaz AB krivoship uchun tezliklar oniy markazi ekanligi aniqlanadi. (3.65) proportsiyaga asosan,

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AO} = \frac{V_B}{BO} \qquad (5)$$

va son qiymatlarini qo'yib,

$$\omega_{AB} = \frac{3{,}6}{0{,}3} = \frac{V_B}{\sqrt{0{,}6^2 - 0{,}3^2}}.$$

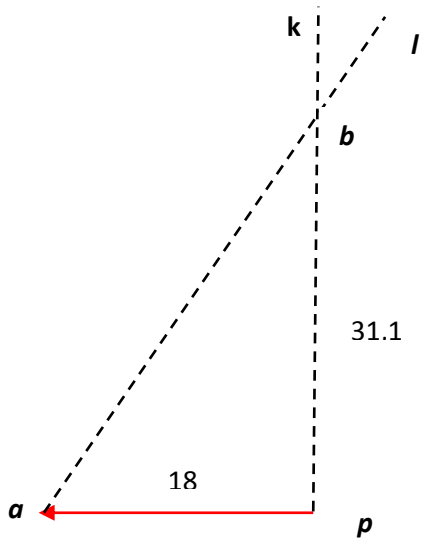
Demak $\omega_{AB} = 12$ rad/s ,

$$V_B = 1{,}2 \cdot \sqrt{0{,}6^2 - 0{,}3^2} = 6{,}23 \text{ m/s}.$$

2) <u>Tezliklar plani usulu.</u> Tezliklar planini qurish uchun ***tezlik masshtabi*** tanlab olinadi. Tezlik masshtabi V_A ning qiymatiga va millimetrli qog‘ozning o‘lchamlariga bog‘liq. Masalan, V_A = 3,6 m/s ni 18 sm li chiziq bilan ifodalash mumkin, ya’ni

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{3{,}6\ m/s}{18\ sm} = 0{,}2 \text{ m/sm·sek}, \qquad (6)$$

bunda *pa* $\vec{V}_A$ vektorning mashtabli qog‘ozdagi aksi (3.38-shakl).



3.38-shakl.

V_B ning qiymatini aniqlash uchun ***p*** nuqtadan $\vec{V}_B$ vektorga parallel ***pk*** chiziq va ***a*** nuqtadan AB shatunga perpendikulyar (yoki $\vec{V}_{AB}$ vektorga parallel) ***al*** chiziq o‘tkazamiz va ularning kesishgan nuqtasi ***b*** $\vec{V}_{AB}$ vektorni ifodalaydi. Masshtab bo‘yicha u 31,1 sm chiqishi kerak, ya’ni ***pb*** = 31,1 sm, u holda

$$V_B = pb \cdot \mu_V = 31{,}1 \cdot 0{,}2 = 6{,}22 \text{ m/s}.$$

D. *Tekis parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezlanishlari.*

Tekis parallel harakat qilayotgan jism nuqtalarining tezlanishlari 4 xil usulda aniqlanadi:

1) Vektor usulida.
2) Proyeksiyalar usuli (grafo-analitik usul).
3) Tezlanishlar oniy markazi usulida.
4) Geometrik usulda (tezlanishlar plani).

1. Jism nuqtalarining tezlanishlarini vektor usulida aniqlash.

Tekislikka parallel harakatdagi jism nuqtalarining tezlanishlari xuddi tezlik vektoriga o‘xshab, ilgarilanma va aylanma harakatlar tezlanishlaridan iborat bo‘ladi, ya’ni tezlik vektoridan

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{AB} \text{x} \vec{\omega}_{AB}$$

yana bir marta hosila olib,

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \text{ x } \vec{\omega}_{AB} + \overrightarrow{AB} \text{ x } \frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{V}_{AB} \quad , \frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt} = \vec{\varepsilon}_{AB} \text{ deb belgilab,}$$

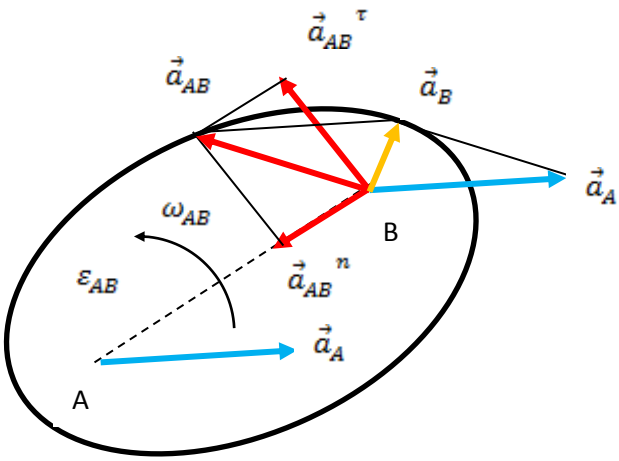
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{V}_{AB} \text{ x } \vec{\omega}_{AB} + \overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{\varepsilon}_{AB}, \qquad (3.66)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}{}^{n} + \vec{a}_{AB}{}^{\tau}. \qquad (3.67)$$

Yoki $\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AB}{}^{n} + \vec{a}_{AB}{}^{\tau}$ deb belgilab, (3.68)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}. \qquad (3.69)$$

Demak, *tekis parallel harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi qutb nuqtaning tezlanishi bilan qutb atrofidagi aylanma harakat normal va urinma tezlanishlarining vektor yig‘indisidan iborat ekan* (3.39-shakl).



3.39-shakl.

(3.68) formuladagi normal va urinma tezlanishlarning qiymati (3.55) ifodaga asosan hisoblanadi:

$$\begin{cases} a_{AB}{}^{n} = AB \cdot \omega_{AB}{}^{2}; \\ a_{AB}{}^{\tau} = AB \cdot \varepsilon_{AB}. \end{cases} \qquad (3.70)$$

2. Proyeksiyalar usuli (grafo-analitik usul). Amaliy masalalar yechishda 3.66-3.69 vektor formulalardan 2 ta noma’lumlarni aniqlash uchun

ularni Ox va Oy o‘qlarga proyeksiyalanadi. Quyida amaliy masalalar yechishda bu usul kengroq ko‘rib o‘tiladi.

3. *Tezlanishlar oniy markazi usuli.*

Tekis parallel harakatdagi jism nuqtalari biror markazga nisbatan aylanma harakatda bo‘lsa, xuddi tezliklar oniy markaziga o‘xshab, tezlanishlar oniy markazi ham mavjud va uning yordamida boshqa nuqtalarining tezlanishlari aniqlanadi.

Tezlanishlar oniy markazi deb, qisqa (oniy) vaqt ichida tezlanishi no‘lga teng bo‘lgan nuqtaga aytiladi. Tezlanishlar oniy markazi tezliklar oniy markazidan farqli ravishda algebraik hisob-kitob va geometrik chizish-o‘lchash yordamida quyidagicha aniqlanadi:

1) Biror A qutb nuqtaning tezlanishi $\vec{a}_A$ miqdori va yo‘nalishi ma’lum bo‘lishi shart.
2) Jismning burchakli tezlik ω va burchakli tezlanishi ε berilgan bo‘lsa,

$$tg\,\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (3.71)$$

formuladan μ burchak aniqlanadi.

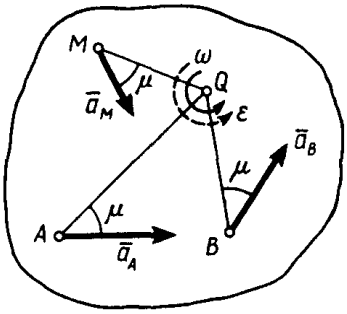
3) A qutb nuqtadan tezlanishlar oniy markazigacha bo‘lgan masofa aniqlanadi:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}\,. \qquad (3.72)$$

4) Ixtiyoriy B nuqtaning tezlanishi esa BQ masofaga bog‘liq ravishda aniqlanadi:

$$a_B = BQ\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}. \qquad (3.73)$$

Tezlanishlar oniy markazi ham aylanish markazini ifodalaydi, faqat uning yo‘nalishi $\vec{\varepsilon}$ ning yo‘nalishiga bog‘liq bo‘ladi (3.40-shakl). Juda kam hollarda tezliklar oniy markazi va tezlanishlar oniy markazi bir nuqtada joylashgan bo‘ladi, sababi μ burchak va AQ masofa miqdorlari turlicha chiqishi mumkin.

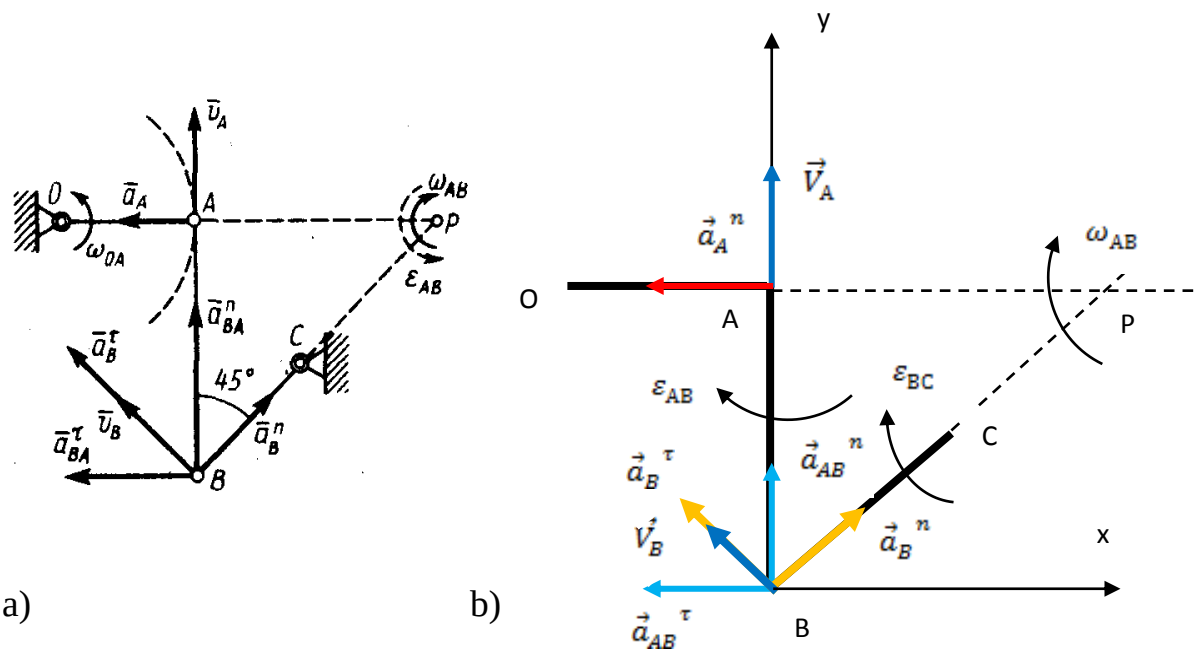


3.40-shakl.

4) Geometrik usul (tezlanishlar plani):

(3.66-3.69) vektor tengliklar ma’lum masshtabda millimetrli o‘lchov qog‘oziga chiziladi. Bu usulning yaxshi tomoni hisob-kitoblar kam bo‘lib, asosan chizma yordamida jism nuqtalari tezlanishlari yonalishi va qiymatlari aniqlanadi. Quyida amaliy masalalar yechishda bu usul kengroq ko‘rib o‘tiladi.

1-masala: To‘rt zvenoli mexanizm OA-krivoship, AB-shatun va BC-koromislodan iborat. Agar krivoship qo‘zg‘almas O o‘q atrofida ω_{OA}=4 rad/sek o‘zgarmas burchakli tezlik bilan tekis aylanma harakat qilsa, o‘lchamlarini OA=0,5 m, AB=1 m, BC= 0,7 m deb, A va B nuqtalarining tezlanishini va OA krivoship va BC koromisloning burchakli tezlanishini hisoblang (3.41-shakl,a).



a) b)

3.41-shakl.

Yechish: 1) A nuqtaning tezligini aniqlaymiz:

$$V_A = OA\cdot \omega_{OA} = 0{,}5\cdot 4 = 2 \text{ m/s}.$$

Tezlanishi esa

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A{}^n + \vec{a}_A{}^\tau \qquad (1)$$

bunda

$$\begin{cases} a_A{}^n = OA\cdot \omega_{OA}{}^2 = 0{,}5\cdot 4^2 = 8\frac{m}{s^2}; \\ a_A{}^\tau = OA\cdot \varepsilon_{OA} = 0{,}5\cdot 0 = 0; \end{cases}$$

demak $a_A = a_A{}^n = 8$ m/s.

2) B nuqtaning tezligini tezliklar oniy markazi usulida aniqlaymiz. Buning uchun $\vec{V}_A$ vektorga va $\vec{V}_B$ vektorga (B nuqta C atrofida aylanma harakat qilgani uchun $\vec{V}_B \perp BC$) perpendikulyarlar chiziqlar chiqarib, AB shatun uchun tezliklar oniy markazi P ni aniqlaymiz. (3.65) formulaga asosan

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP},$$

bunda ΔABP dan AP = AB = 1 m, BP = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$ =1,41 m, son qiymatlarini qoyib,

$$\omega_{AB} = \frac{2}{1} = \frac{V_B}{1{,}41},$$

demak ω_{AB} = 2 rad/sek, $V_B = 2{,}82$ m/s.

3) A nuqtani qutb nuqta deb qabul qilib, B nuqtaning tezlanishi quyidagicha ifodalash mumkin

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$

A va B nuqtalar aylanma harakat qilgani uchun

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A{}^n + \vec{a}_A{}^\tau \quad , \quad \vec{a}_B = \vec{a}_B{}^n + \vec{a}_B{}^\tau \ ,$$

demak

$$\vec{a}_B{}^n + \vec{a}_B{}^\tau = \vec{a}_A{}^n + \vec{a}_A{}^\tau + \vec{a}_{AB}{}^n + \vec{a}_{AB}{}^\tau \quad , \qquad (2)$$

bunda

$$a_B{}^n = \frac{V_B{}^2}{BC} = \frac{2{,}82^2}{0{,}7} = 11{,}36 \text{ m}/s^2, \qquad a_B{}^\tau = BC\cdot \varepsilon_{BC};$$

$$a_A{}^n = 8 \text{ m/s}, \qquad a_A{}^\tau = 0 \text{ m/s},$$

$$a^n{}_{AB} = AB \cdot \omega_{AB}{}^2 = 1 \cdot 2{,}82^2 = 7{,}95 \text{ m}/s^2 \qquad a^\tau{}_{AB} = AB \cdot \varepsilon_{AB}$$

Ko‘rinib turibdiki, 2 ta noma’lum miqdorlar - $a_B{}^\tau$ va $a^\tau{}_{AB}$ mavjud ekan.

(2) vektor tenglamadan 2 ta noma’lumlarni aniqlash uchun bu tenglamani Bx va By koordinata oqlariga proyeksiyalaymiz (3.41-shakl,b):

Bx: $$a_B{}^n \cdot \cos 45^\circ - a_B{}^\tau \cdot \cos 45^\circ = -a^\tau{}_{AB}; \qquad (3)$$

By: $$a_B{}^n \cdot \cos 45^\circ + a_B{}^\tau \cdot \cos 45^\circ = a^n{}_{AB}; \qquad (4)$$

son qiymatlarini qo‘yib,

$$7{,}95\cdot 0{,}707 - a_B{}^\tau \cdot 0{,}707 = -a^\tau{}_{AB};$$

$$7{,}95\cdot 0{,}707 + a_B{}^{\tau}\cdot 0{,}707 = 11{,}36\ ;$$

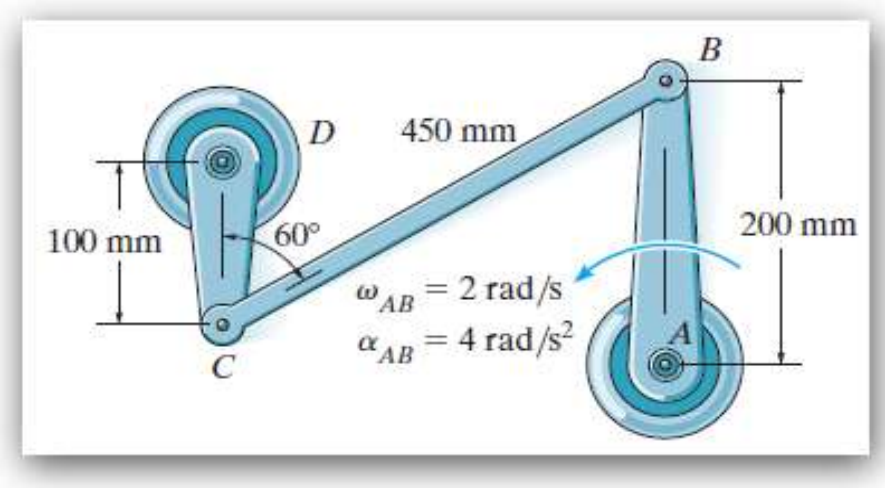
demak $a_B{}^{\tau}$ = 8,12 m/s^2 ; $a^{\tau}{}_{AB}$ = -0,12 m/s^2. Yuqoridagi ifodalardan

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}{}_{AB}}{AB} = \frac{-0{,}12}{1} = -0{,}12\,\text{rad}/s^2;$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a^{\tau}{}_{B}}{BC} = \frac{8{,}12}{0{,}7} = 11{,}6\,\text{rad}/s^2.$$

$a^{\tau}{}_{AB}$ va ε_{AB} qiymatlaridagi manfiy ishoralar ularning haqiqiy yo‘nalishlari 3.41-shakl,b dagi taxmin qilinganiga teskari tomonga bo‘lishini bildiradi.

2-masala (horijiy adabiyotdan olindi [2]): To‘rt zvenoli mexanizm AB va CD krivoship, AC-shatundan iborat. Agar AB krivoship qo‘zg‘almas A o‘q atrofida ω_{AB}=2 rad/sek burchakli tezlik bilan va ε_{AB}=4 rad/sek^2 burchakli tezlanish bilan aylanma harakat qilsa, o‘lchamlarini AB=200mm, BC=450mm, CD=100mm va $\angle ABC = \angle BCD = 60°$ hisoblab, B va C nuqtalarning tezligi va tezlanishini, hamda BC va CD zvenolarning burchakli tezligi hamda burchakli tezlanishlari aniqlansin(3.42-shakl).



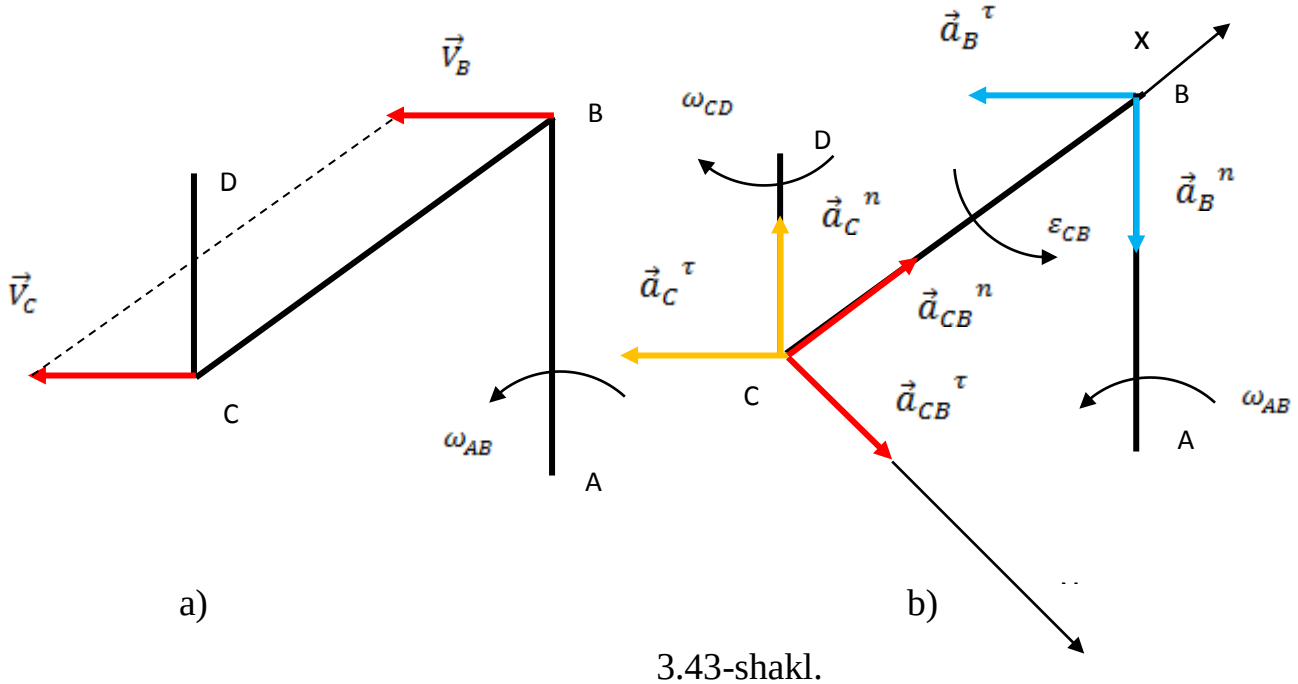
3.42-shakl.

Yechish: 1) Tezliklar oniy markazi yordamida B, C nuqtalarning tezliklarini va BC, CD zvenolarning burchakli tezliklarini aniqlaymiz:

$$V_B = AB\cdot \omega_{AB} = 0{,}2\cdot 2 = 0{,}4\,\text{m/s}.$$

$\vec{V}_B$ va $\vec{V}_C$ tezliklar AB va CD zvenolarga perpendikulyar yo‘nalgan, shuning uchun ular o‘zaro parallel, demak AB zvenoning tezliklar oniy markazi ∞ da bo‘lar ekan(3.43-shakl,a). Bundan

$$V_B = V_C = 0{,}4\,\text{m/s, va}\ \omega_{CB} = 0\ .$$



a) b)

3.43-shakl.

2) B nuqtani qutb deb olib, C nuqtaning tezlanishini quyidagi vektor tenglikdan aniqlanadi(3.43-shakl,b):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}\,, \tag{1}$$

B va C nuqtalar aylanma harakat qilgani uchun

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C{}^n + \vec{a}_C{}^\tau\,, \quad \text{va} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_B{}^n + \vec{a}_B{}^\tau\,. \tag{2}$$

BC shatunning B qutb atrofidagi aylanma harakati tezlanishi esa,

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CB}{}^n + \vec{a}_{CB}{}^\tau\,. \tag{3}$$

(2) va (3) tengliklarni (1) ga qoyib,

$$\vec{a}_C{}^n + \vec{a}_C{}^\tau = \vec{a}_B{}^n + \vec{a}_B{}^\tau + \vec{a}_{CB}{}^n + \vec{a}_{CB}{}^\tau. \tag{4}$$

Yuqoridagi tenglikda

$$a_C{}^n = \frac{V_C{}^2}{CD} = \frac{0{,}16}{0{,}1} = 1{,}6\ \text{m}/s^2; \tag{5}$$

$$a_C{}^\tau = \text{CD}\cdot\ \varepsilon_{CD}, \tag{6}$$

$$a_B{}^n = \frac{V_B{}^2}{AB} = \frac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8\ \text{m}/s^2; \tag{7}$$

$$a_B{}^\tau = \text{AB}\cdot\ \varepsilon_{AB} = 0{,}2\cdot 4 = 0{,}8\ \text{m}/s^2; \tag{8}$$

$$a_{CB}{}^n = BC\cdot\omega_{CB}{}^2 = 0{,}45\cdot 0 = 0; \tag{9}$$

$$a_{CB}{}^\tau = \text{BC}\cdot\ \varepsilon_{CB}. \tag{10}$$

(4) vektor tenglikni Cxy o‘qlariga proyeksiyalab, 2 ta noma’lum- $a_C{}^{\tau}$ va $a_{CB}{}^{\tau}$ larni aniqlash mumkin:

$$\text{Cx:} \quad a_C{}^{n} \cdot \cos 60^\circ - a_C{}^{\tau} \cdot \cos 30^\circ =$$
$$= -a_B{}^{n} \cdot \cos 60^\circ - a_B{}^{\tau} \cdot \cos 30^\circ + a_{CB}{}^{n};$$
$$\text{Cy:} \quad -a_C{}^{n} \cdot \cos 30^\circ - a_C{}^{\tau} \cdot \cos 60^\circ =$$
$$= a_B{}^{n} \cdot \cos 30^\circ - a_B{}^{\tau} \cdot \cos 60^\circ + a_{CB}{}^{\tau};$$

son qiymatlarini qoyib,

$$1{,}6 \cdot 0{,}5 - 0{,}866 a_{CD}{}^{\tau} = -0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}866 + 0\ ;$$
$$-1{,}6 \cdot 0{,}866 - 0{,}5 a_{CD}{}^{\tau} = 0{,}8 \cdot 0{,}866 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 + a_{CB}{}^{\tau}\ .$$

demak $a_C{}^{\tau} = 2{,}186\ \text{m}/s^2$; $a_{CB}{}^{\tau} = -\ 2{,}77\ \text{m}/s^2$,

bundan $\varepsilon_{CD} = a_C{}^{\tau}/\text{CD} = 2{,}186 / 0{,}1 = 21{,}86\ s^{-2}$;

$\varepsilon_{CB} = a_{CB}{}^{\tau}/\text{CB} = -2{,}77 / 0{,}45 = -6{,}16\ s^{-2}$.

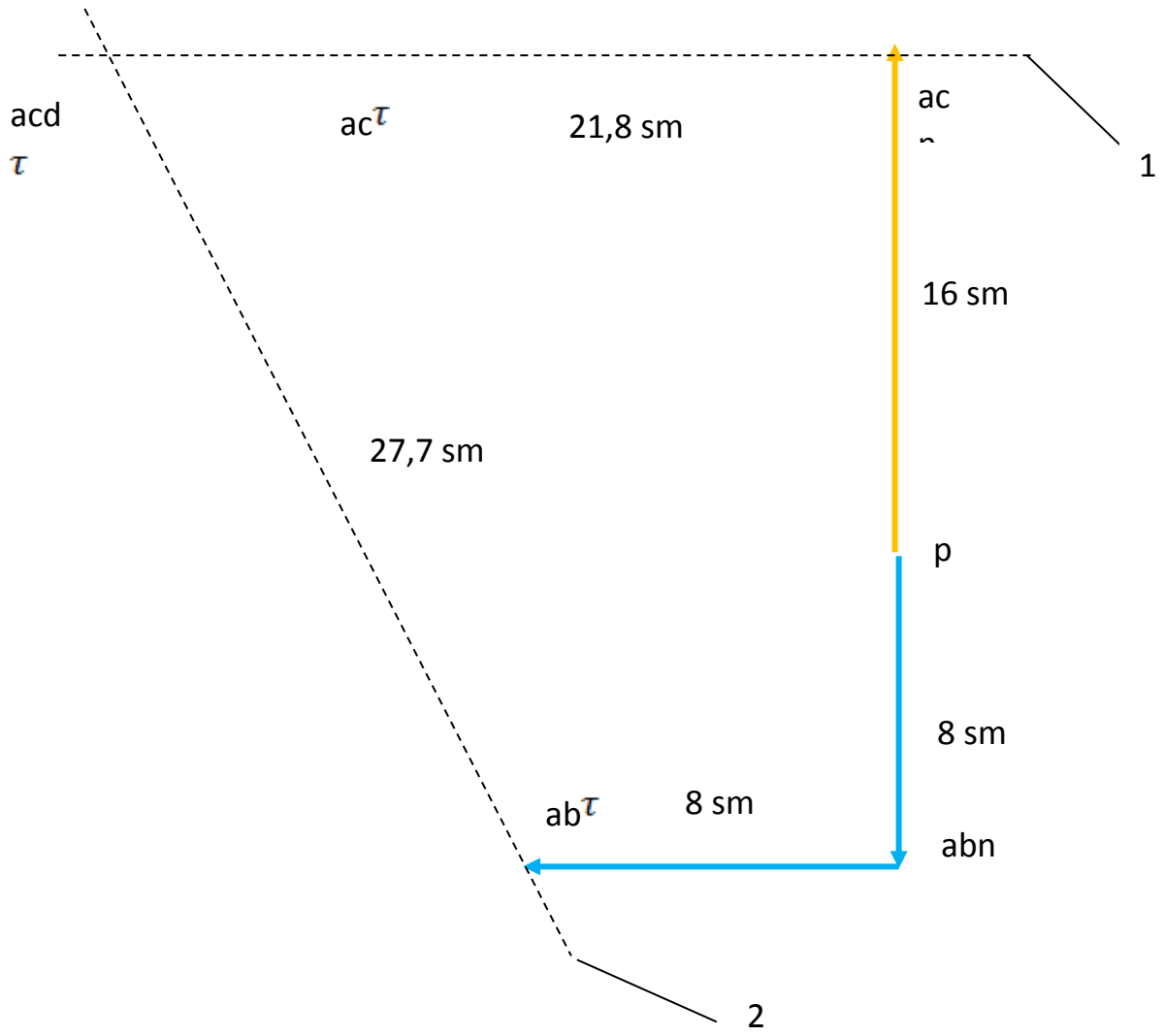
Manfiy ishoralar $\vec{a}_{CB}{}^{\tau}$ va ε_{CB} larning haqiqiy yo‘nalishlari (3.43-shakl,b) dagi yo‘nalishga teskari ekanligini bildiradi.

3) Tezlanishlar planini chizish uchun tezlanishlar masshtabi tanlanadi:

$$\mu_a = \frac{a_C{}^{n}}{pacn} = \frac{1{,}6\ m/s^2}{16\ sm} = 0{,}1\ \text{m/sm} \cdot s^2.$$

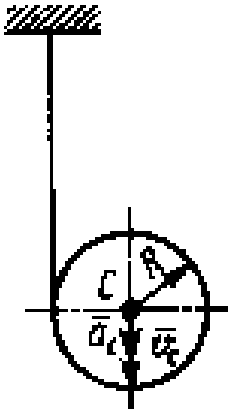
(4) vektor tenglamadagi 6 ta qo‘shiluvchidan son qiymati aniq bo‘lganlarini (5,7,8,9) parallel chizib, noma’lumlari $\vec{a}_C{}^{\tau}$ ni esa $\vec{a}_C{}^{n}$ ga perpendikulyar 1-shtrix chiziq chiqarib, va $\vec{a}_{CB}{}^{\tau}$ni esa CB ga perpendikulyar 2-shtrix chiziq chiqarib, ularning kesishish nuqtasidan topiladi: acτ = 21,8 sm va acdτ = 27,7 sm, ularni masshtabga ko‘paytirib,

$$a_C{}^{\tau} = \text{ac}\tau \cdot \mu_a = 21{,}8 \cdot 0{,}1 = 2{,}18\ \text{m}/s^2,$$
$$a_{CB}{}^{\tau} = \text{acd}\tau \cdot \mu_a = 27{,}7 \cdot 0{,}1 = 2{,}77\ \text{m}/s^2.$$



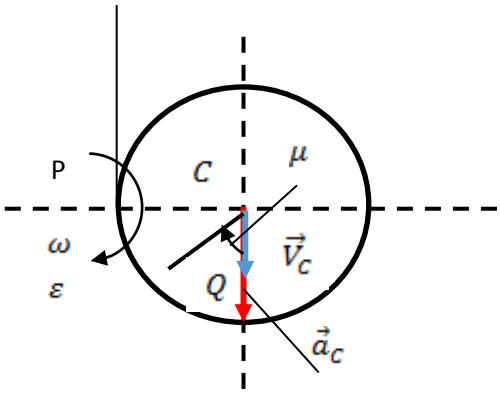
3.44-shakl.

3-masala: Radiusi R=0,066 m bo‘lgan, ip o‘ralgan tsilindr pastga tushadi. Agar berilgan paytda uning markazi v_C=0,66 m/sek tezlikka va a_C =6,6m/sek^2 tezlanishga ega bo‘lsa, C markazdan tezlanishlar oniy markazigacha bo‘lgan masofani toping.



3.45-shakl.

Yechish: Tsilindrning burchakli tezligi ω va burchakli tezlanishi ε ni hisoblash uchun uning tezliklar oniy markazi P ni aniqlaymiz(3.46-shakl):



3.46-shakl.

U holda $\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{0,66}{0,066} = 10$ rad/sek,

$$\varepsilon = \frac{a_C}{CP} = \frac{6,6}{0,066} = 100 \text{ rad}/sek^2 ,$$

bundan

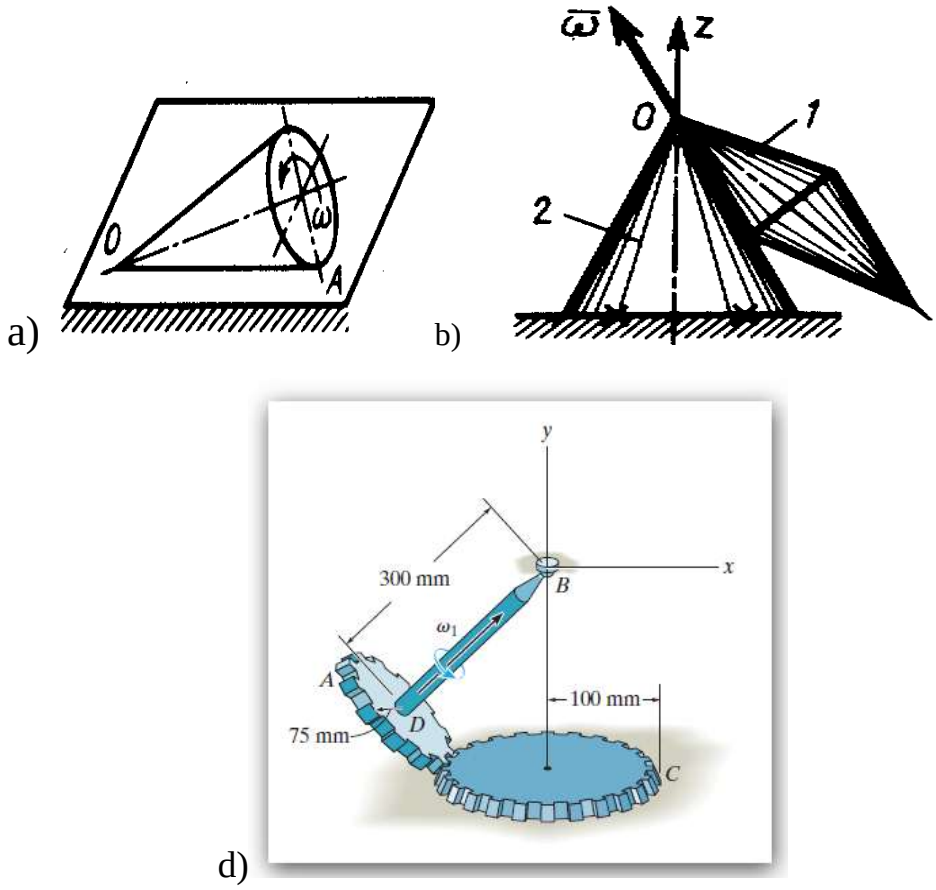
$$\text{tg}\,\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{100}{10^2} = 1,$$

demak $\mu = 45^\circ$ ekan (3.46-shakl). C nuqtadan tezlanishlar oniy markazi Q gacha bo‘lgan masofani hisoblaymiz:

$$CQ = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} = \frac{6,6}{\sqrt{100^2+10^4}} = 0,0468\,m.$$

3.2.4. Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakati.

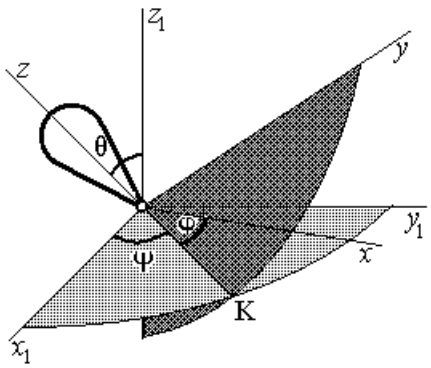
A. *HARAKAT QONUNI.* Harakati davomida jismning bitta nuqtasi qo‘zg‘almay qolsa, bunday harakat ***qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakati*** deyiladi. Masalan bolalar o‘yinchog‘i “pildiroq”, konusning tekislikdagi aylanma harakati (3.47-shakl,a), ikki yoqlama konusning konus atrofidagi aylanishi (3.47-shakl,b) va tishli g‘ildirakning konussimon harakati qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakatiga misol bo‘ladi.



3.47-shakl.

Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakatini o‘rganish osmon jismlarining harakatini, uchish apparatlarini loyihalash va mashina-mexanizmlarning ba’zi bir qismlarining harakatini tadqiq qilishda muhim ahamiyatga ega. Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakatini nemis millatiga mansub, Peterburg akademiyasida ishlagan olim Eyler[12] tekshirgan.

Buning uchun qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ va qo‘zg‘aluvchan Oxyz o‘qlari olinib, 3 ta burchaklar φ, ψ va θ ga nisbatan aylanma harakat tenglamalari tuziladi (3.48-shakl).



3.48-shakl.

Oxy tekisligi bilan Ox_1y_1 -tekiligining kesishgan chizig‘i-OK ***tugunlar chizig‘i*** deb ataladi. U holda jismning yoki unga mahkam bog‘langan Oxyz -o‘qlarning $Ox_1y_1z_1$ -o‘qlardagi o‘rnini quyidagi burchaklar orqali aniqlash mumkin:

$$\varphi=\angle KOx, \quad \psi=\angle x_1OK, \quad \theta=\angle z_1Oz.$$

Ushbu burchaklar, ***Eyler burchaklari*** deb ataladi va osmon mexanikasida tegishlicha quyidagi nomlar bilan ataladi: φ - ***xususiy aylanish burchagi***, ψ -***pretsessiya burchagi***, θ - ***nutatsiya burchagi***.

Jismning harakatini aniqlash uchun, ixtiyoriy vaqt uchun $Ox_1y_1z_1$ -o‘qlardagi holatini bilish zarur, yoki quyidagi tenglamalar aniq bo‘lishi zarur:

$$\varphi=f_1(t), \qquad \psi=f_2(t), \qquad \theta=f_3(t) \ . \tag{3.74}$$

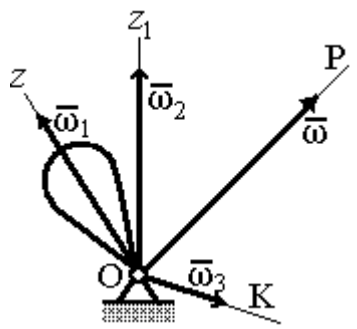
Bu tenglamalar ***qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakat tenglamalari*** deb ataladi.

B. JISMNING BURCHAKLI TEZLIGI.

Agar jism faqat Oz -o‘qi atrofida (xususiy aylanish) φ -burchakka burilib harakat qilsa, uning burchakli tezligi $\omega_1 = \dot{\varphi}$ bo‘ladi; agar jism faqat Oz_1 -o‘qi atrofida ψ (pretsessiya) burchakka burilsa, uning burchakli tezligi $\omega_2 = \dot{\psi}$ bo‘ladi; agar jism faqat OK -tugunlar chizig‘i (nutatsiya) atrofida θ -burchakka aylansa, uning burchakli tezligi $\omega_3 = \dot{\theta}$ bo‘ladi; $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ -burchakli tezliklar tegishli ravishda Oz, Oz_1 va OK o‘qlar (3.48-shakl) bo‘yicha yo‘naladi. Umuman olganda qattiq jismning harakatida hamma burchaklar bo‘yicha ham burilish mumkin ekanligini hisobga olsak, jismning umumiy burchakli tezligi ω, uchala burchakli tezliklarning geometrik yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3. \tag{3.75}$$

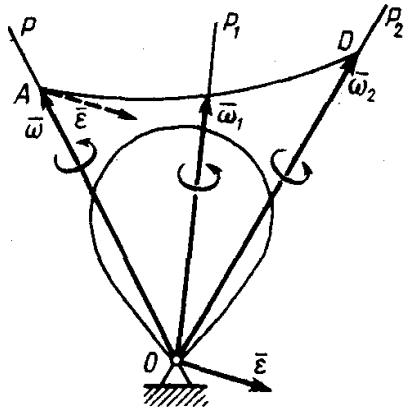
Lekin $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$-burchakli tezliklarning qiymati jismning harakatiga bog‘liq ravishda, ham son qiymatlari bo‘yicha, ham yo‘nalishlari bo‘yicha uzluksiz o‘zgarib turishi mumkin. Shu sababli $\vec{\omega}$- ***oniy burchakli tezlik*** deb ataladi.



3.49-shakl

Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakatini geometrik nuqtai nazardan quyidagicha tasavvur qilish mumkin. Agar jism shu daqiqada ω- burchakli tezlik bilan harakat qilayotgan bo‘lsa, u holda elementar dt -vaqt ichida ω-vektori bo‘ylab yo‘nalgan OP o‘q atrofida elementar dη=ω·dt burchakka buriladi (3.49-shakl). Bu o‘q ***oniy aylanish o‘qi*** deb ataladi. Demak, oniy aylanish o‘qi, shunday o‘q ekanki, jism shu o‘q atrofida hozirgi holatidan cheksiz kichkina bo‘lgan qo‘shni holatga o‘tar ekan. Qo‘zg‘almas o‘q bilan oniy aylanish o‘qining farqi shundaki, oniy aylanish o‘qi o‘zining fazodagi holatini muntazam o‘zgartirib boradi.

Jism OP oniy o‘q atrofida cheksiz kichkina burchakka burilgandan so‘ng, u yangi OP_1-oniy aylanish o‘qi bo‘ylab undan keyingi elementar burchakka buriladi va h. Shunday qilib, jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi harakati, qo‘zg‘almas nuqtadan o‘tuvchi cheksiz sonli oniy aylanish o‘qlari atrofidagi qator elementar burilishlardan iborat bo‘lar ekan (3.50-shakl).



3.50-shakl.

D. <u>JISMNING BURCHAKLI TEZLANISHI.</u> Elementar vaqt mobaynida burchakli tezlikning son qiymati va yo‘nalishini o‘zgarishini belgilovchi,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (3.76)$$

vektor qiymat, jismning shu ondagi ***burchakli tezlanishi***, yoki ***oniy burchakli tezlanish*** deb ataladi.

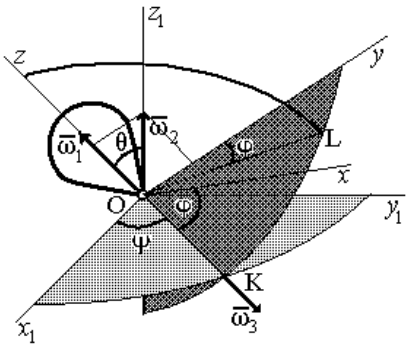
Jismning burchakli tezlik vektori $\vec{\omega}$-ning uchi vaqt mobaynidagi yo‘nalishi va modulining o‘zgarishiga bog‘liq ravishda fazoda qandaydir egri chiziqli AD iz qoldiradi, ushbu izni $\vec{\omega}$-vektorning ***godografi*** deb ataladi (3.50-shakl). U holda (3.74) tenglikni $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ formula bilan solishtirib, shuni aniqlaymizki, jismning burchakli tezlanish vektori -$\vec{\varepsilon}$, burchakli tezlik vektori $\vec{\omega}$-ning uchini AD egri chiziq bo‘ylab qilgan harakatidagi tezlik vektoridan iborat ekan.

Ko‘rinib turganidek, xususiy holdagi kabi, ya’ni jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatidagiga o‘xshab, $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ vektorlari bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘nalmas ekanlar.

Bir nuqtasi qo‘zg‘almas bo‘lgan jismning harakatida $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ vektorlar asosiy kinematik xarakteristikalar bo‘lib xizmat qiladi.

E. EYLERNING KINEMATIK TENGLAMALARI.

Burchakli tezlik vektori $\overline{\omega}$ -ni aniqlash uchun, uning qo‘zg‘aluvchi Oxyz -o‘qlardagi proyektsiyalarini aniqlaymiz (3.51-shakl). Yuqoridagi ko‘rsatilganidek burchakli tezlik vektorini quyidagicha ifodalaymiz,



3.51-shakl.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 \qquad (3.77)$$

qiymatlari esa

$$\omega_1 = \varphi', \quad \omega_2 = \psi', \quad \omega_3 = \theta' \qquad (3.78)$$

(3.77) tenglamaning ikkala tarafini x, y, z -o‘qlarga proyeksiyalab,

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}\,; \\ \omega_y = \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}\,; \\ \omega_z = \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}\,. \end{cases} \qquad (3.79)$$

(3.78) dagi belgilashga asosan

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0, \quad \omega_{1z} = \varphi',$$

$$\omega_{3x} = \theta' \cdot \cos\varphi, \quad \omega_{3y} = -\theta' \cdot \sin\varphi, \quad \omega_{3z} = 0$$

$\vec{\omega}_2$ –vektorning proyeksiyasini aniqlash uchun Oz_1 va Oz o‘qlardan o‘tuvchi tekislik bilan Oxy tekisligining kesishgan chizig‘ida yotuvchi OL o‘qni o‘tkazamiz. OK chizig‘i zOz_1 -tekisligiga perpendikulyar bo‘lganligi uchun, u OL chizig‘iga ham perpendikulyarl bo‘ladi (∠KOL=90° va ∠LOy=φ). U holda, $\vec{\omega}_2$-vektorni OL chizig‘iga proyektsiyalab va shu proyektsiya’ni o‘z navbatida Ox va Oy o‘qlarga proyeksiyalasak:

$$\omega_{2x}=\psi'\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\quad \omega_{2y}=\psi'\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\quad \omega_{2z}=\psi'\cdot\cos\theta$$

Ushbu aniqlangan qiymatlarni (3.79) formulaga qo‘ysak,

$$\begin{cases}\omega_x = \psi'\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi+\theta'\cdot\cos\varphi;\\ \omega_y = \psi'\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi-\theta'\cdot\sin\varphi;\\ \omega_z = \psi'\cdot\cos\theta+\varphi'.\end{cases}\qquad(3.80)$$

(3.80) tenglamalar sistemasi ***Eylerning kinematik tenglamalari*** deb ataladi.

Bu tenglamalar sistemasi $\vec{\omega}$-vektorning Eyler burchaklari orqali ifodalangan qo‘zg‘aluvchi Oxyz o‘qlardagi proyeksiyalari hisoblanadi va ular orqali $\vec{\omega}$-vektori aniqlanadi.

Shunga o‘xshab $\vec{\omega}$-vektorning qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$-o‘qlardagi proyektsiyalarini ham aniqlash mumkin bo‘ladi. Ular quyidagilardan iborat bo‘ladi:

$$\begin{cases}\omega_{x_1} = \varphi'\cdot\sin\theta\cdot\sin\psi+\theta'\cdot\cos\psi;\\ \omega_{y_1} = -\varphi'\cdot\sin\theta\cdot\cos\psi+\theta'\cdot\sin\psi;\\ \omega_{z_1} = \varphi'\cdot\cos\theta+\psi'.\end{cases}\qquad(3.81)$$

(3.81) formulalardan foydalanib, burchakli tezlanish vektori $\vec{\varepsilon}$-ning qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ -o‘qlardagi proyektsiyalarini ham aniqlash mumkin bo‘ladi. $\vec{\varepsilon}$-ning qiymatlari (3.76) formulalar orqali aniqlanadi:

$$\varepsilon_{x_1}=\omega'_{x_1};\ \varepsilon_{y_1}=\omega'_{y_1};\ \varepsilon_{z_1}=\omega'_{z_1}.\qquad(3.82)$$

Shunday qilib, jismning harakat tenglamalari (3.74) -ni bilgan holda, yuqoridagi formulalar orqali $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ larni hisoblash mumkin ekan.

I. JISM NUQTALARINING CHIZIQLI TEZLIGI VA CHIZIQLI TEZLANISHI .

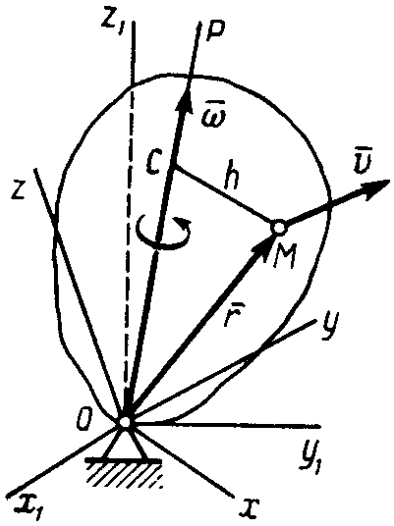
Aylanma harakatdagi jism nuqtalarining chiziqli tezligining miqdori

$$V = \omega \cdot r \ ,$$

vektori esa

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (3.83)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Faqat qo‘zg‘almas nuqta atrofida aylanma harakatda burchakli tezlik ω har bir daqiqadagi oniy burchakli tezlik bo‘lishi shart. Bunda OP aylanish o‘qi har onda o‘zgarib turadi(3.52-shakl).



3.52-shakl.

Yuqoridagi ifodalarda $\vec{r}$ qo‘zg‘almas O nuqtadan M nuqtaga o‘tkazilagan radius vektor. Nuqtaning tezlik vektori M nuqta va OP o‘qni kesib o‘tuvchi MOP tekislikka perpendikulyar bo‘lib, jismning aylanayotgan tomoniga yo‘nalgan bo‘ladi:

$$V = \omega \cdot h \ , \qquad (3.84)$$

bunda *h*- nuqtadan OP o‘qqacha bo‘lgan eng yaqin masofa.

Vektor ifodasi esa

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} . \qquad (3.85)$$

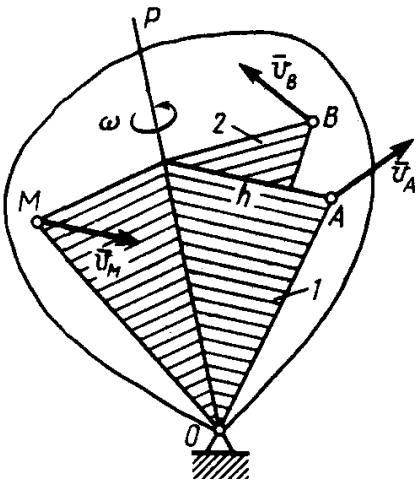
bu yerda $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - qo‘zg‘aluvchi o‘qlardagi birlik vektorlar,

ω_x , ω_y , ω_z - oniy burchakli tezlikning Oxyz o‘qlardagi proyeksiyalari,

x , y , z – radius vektorning Oxyz o‘qlarga nisbatan koordinatalari.

Jism M nuqtasining shu ondagi tezligini geometrik usulda aniqlash uchun, uning boshqa birorta A nuqtasining tezlik vektori $\vec{V}_A$- ni va ixtiyoriy B nuqtasining tezligini yo‘nalishi ma’lum bo‘lishi shart. Aytaylik, jismning tezlik vektori - $\vec{V}_A$ va B nuqtasi tezligining yo‘nalishi ma’lum bo‘lsin. U holda, A nuqtadan $\vec{V}_A$-vektorga perpendikulyarl bo‘lgan 1 -tekislik o‘tkazamiz (3.53-shakl). Yuqorida ta’kidlanganidek (3.52-shakl), OP -oniy aylanish o‘qi shu tekislikda yotadi. Lekin oniy aylanish o‘qi -OP bir vaqtning o‘zida B nuqtadan $\vec{V}_B$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan 2-tekislikda ham yotishi shart.

Demak, shu 1 va 2 tekisliklarning o‘zaro kesishgan chizig‘i oniy aylanish o‘qi OP dan iborat bo‘ladi. A nuqtadan OP o‘qqacha bo‘lgan qisqa masofa h-ni hisoblab olib, (3.84) formula orqali shu jismning oniy burchakli tezligi ω -ni aniqlaymiz: $\omega = v_A/h$.



3.53-shakl

So‘ngra, jismning ixtiyoriy M nuqtasi tezligining son qiymati -v_M (3.84) formula orqali hisoblanadi, uning yo‘nalishi esa OMP tekisligiga perpendikulyar bo‘ladi.

Xususiy holda, masalan, jismning birorta nuqtasining shu ondagi tezligi nolga teng bo‘lsa, u holda shu nuqta va qo‘zg‘almas O nuqtadan o‘tuvchi chiziq, oniy aylanishlar o‘qi hisoblanadi, natijada masalalarni yechish ancha soddalashadi .

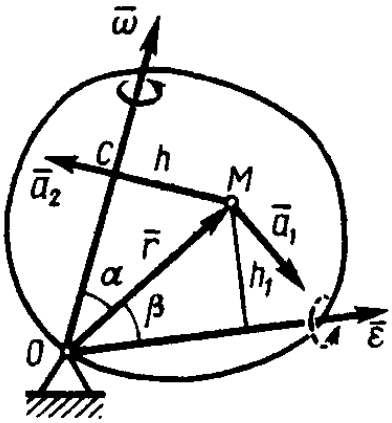
(3.85) formulani 1-qator elementlari bo‘yicha yoyib chiqsak va

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

ekanligini e’tiborga olsak, ularning har biri uchun quyidagilarni yozamiz,

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \qquad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \qquad v_z = \omega_x y - \omega_y x . \qquad (3.86)$$

Ushbu formulalarni (3.80) formula kabi ***Eyler formulalari*** deb ataladi. Har-bir tenglikni olish uchun o‘zidan oldingi tenglikdagi x, y, z -harflarni aylantirib qo‘yish orqali olish mumkin bo‘ladi.



3.54-shakl

(3.84) formula xususiy holda, qattiq jismning qo‘zg‘almas z -o‘qi atrofidagi aylanma harakatida ham o‘rinli bo‘ladi. U holda $\omega_x=\omega_y=0$ va $\omega_z=\omega$ bo‘ladi, hamda

$$v_x=-\omega y \qquad v_y=\omega x \qquad v_z=0 \qquad (3.85)$$

M nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz. (3.83) tenglamaning ikkala tarafidan vaqt bo‘yicha bir marta hosila olsak,

$$\vec{a} = \vec{V}' = (\vec{\omega}' \times \vec{r}\,) + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

hamda $\vec{\omega}' = \vec{\varepsilon}$ va $\vec{r}\,' = \vec{V}$ ekanligini e’tiborga olsak, chiziqli tezlanish formulasi hosil bo‘ladi :

$$\vec{a} = \vec{V}' = (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,) + (\vec{\omega} \times \vec{V}) \ . \qquad (3.86)$$

Oxirgi ifodadagi birinchi qo‘shiluvchi

$$\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

aylanma tezlanish deb ataladi, ikkinchisi esa,

$$\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{V}$$

M nuqtaning o‘qqa intilma tezlanishi deb ataladi. $\vec{a}_1$-tezlanishning yo‘nalishi M nuqta va $\vec{\varepsilon}$-vektoridan o‘tuvchi tekislikka perpendikulyar ravishda yo‘nalgan bo‘ladi (178 shakl), uning moduli esa $a_1=\varepsilon\cdot r\cdot\sin\beta=\varepsilon\cdot h_1$, bu yerda h_1- M nuqtadan $\vec{\varepsilon}$-vektorining ta’sir chizig‘igacha bo‘lgan masofa. $\vec{a}_2$-vektor esa $\vec{\omega}$ va $\vec{V}$-vektorlari yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda MC chiziq bo‘ylab yo‘naladi (3.54-shakl), moduli esa

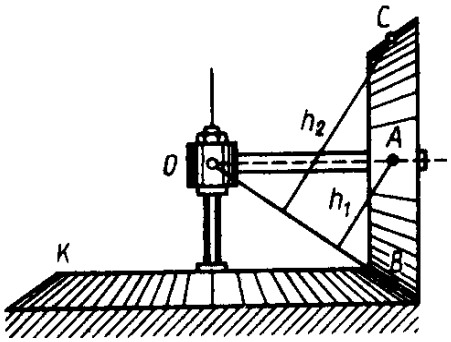
$$a_2=\omega\cdot v\cdot\sin 90°=\omega^2\cdot h,$$

chunki $v=\omega\cdot h$.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, bu yerdagi $\vec{a}_1 = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ -tezlanish vektori M nuqtaning urinma tezlanishi (urinma o‘q bo‘ylab tezlik vektori

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ yo‘naladi, $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$-vektorning yo‘nalishi esa boshqacha) bo‘lmaydi; shu sababli $\vec{\omega} \times \vec{V}$ tezlanish ham M nuqtaning normal tezlanishi bo‘lmaydi.

1-masala: A markazi OA radiusli aylana bo‘ylab v_A-tezlik bilan harakatlanayotgan konussimon katokning B va C nuqtalarining tezliklari aniqlansin (3.55-shakl). Katok konussimon yuzali qo‘zg‘almas K sirt ustida sirpanmasdan dumalab harakat qilmoqda.



3.55-shakl.

Yechish: Katok qo‘zg‘almas O nuqta atrofida harakat qilmoqda. Katok K sirt ustidagi sirpanmasdan dumalab harakatlanganida, uning OB chizig‘ida yotuvchi nuqtalarining shu oniy tezliklari nolga teng bo‘ladi, shu sababli OB ***oniy aylanishlar o‘qi*** deb ataladi. U holda, $v_A = \omega \cdot h_1$, bu yerda ω- katokning OB o‘q atrofidagi aylanma harakatidagi burchakli tezligi, h_1- A nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa. Bundan

$$\omega = v_A/h_1$$

bo‘ladi.

C nuqtaning tezligi esa

$$v_C = \omega \cdot h_2$$

bo‘ladi, bu yerda h_2- C nuqtadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa.

Shakldan ko‘rinib turganidek, $h_2 = 2h_1$ bo‘lganligi uchun

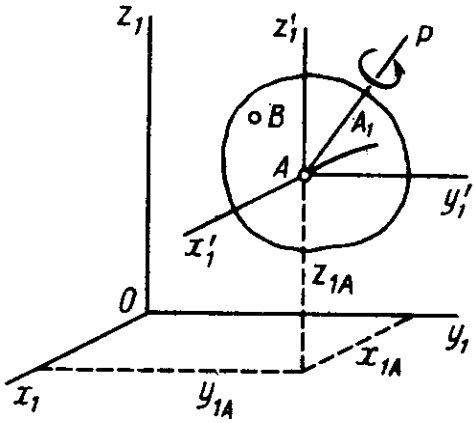
$$v_C = 2v_A.$$

B nuqta oniy aylanish o‘qida yotganligi uchun uning shu ondagi tezligi $v_B=0$ bo‘ladi.

3.2.5. Qattiq jismning umumiy holdagi harakati.

A. <u>HARAKAT TENGLAMASI.</u>

Qattiq jismning umumiy holdagi erkin harakati qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ -o‘qlar va qo‘zg‘aluvchan $Ax_1'y_1'z_1'$ -o‘qlarga nisbatan o‘rganiladi(3.56-shakl). Qattiq jism ixtiyoriy tomonga hohlagan harakatini bajarishi mumkin bo‘lsin.

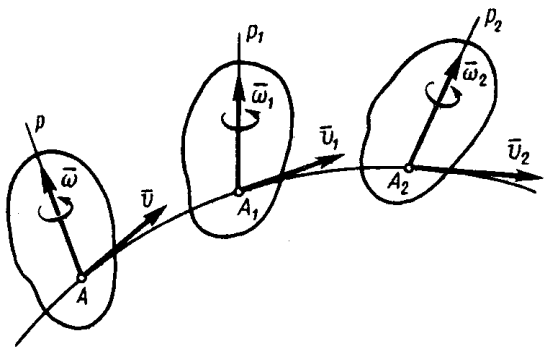


3.56-shakl.

Qattiq jismning birorta A nuqtasini qutb deb tanlab olamiz va B nuqtaning harakatini $Ax_1'y_1'z_1'$ koordinata o‘qlari bilan ilgarilanma va Ax_1', Ay_1', Az_1' o‘qlar atrofidagi aylanma harakatlarga ajratish mumkin. U holda ilgarilanma harakat uchun x_{1A} , y_{1A}, z_{1A} – koordinatalari va aylanma harakat uchun φ, ψ, θ Eyler burchaklarini tanlab olib, jismning umumiy holdagi harakati tenglamalarini chiqarish mumkin:

$$\begin{cases} x_{1A} = f_1(t); \quad y_{1A} = f_2(t); \quad z_{1A} = f_3(t); \\ \varphi = f_4(t); \quad \psi = f_5(t); \quad \theta = f_6(t). \end{cases} \qquad (3.87)$$

Demak, umumiy holda *qattiq jismning umumiy harakati ikkita harakatlarning yig‘indisidan: qutb sifatida tanlab olingan ixtiyoriy A nuqta bilan birgalikdagi* v_A *-tezlik bilan* ***ilgarilanma*** *harakatdan, ikkinchisi esa* ω *-burchakli tezlik bilan shu A qutbni kesib o‘tuvchi oniy aylanish o‘qlari atrofidagi elementar* ***aylanma*** *harakatlarning yig‘indisidan iborat ekan.*



3.57-shakl

Masalan, osmonga otilgan jismning, oliy pilotajlik (mohir uchuvchilik) mahoratini namoish qilayotgan samolyotning, artileriya snaryadining va boshqa shunga o‘xshash harakatlar bunga misol bo‘ladi(3.57-shakl).

Bunday harakatlarning asosiy kinematik xaraktyeristikalari jismning qutb bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat tezligi $\vec{V}_A$ va tezlanishi $\vec{a}_A$, hamda jismning qutb nuqtasidan o‘tuvchi oniy aylanish o‘qlar atrofidagi aylanma harakatlarining burchak tezligi - $\vec{\omega}$ va burchak tezlanishi - $\vec{\varepsilon}$ lar hisoblanadi. Ixtiyoriy vaqt uchun, bu qiymatlarni (3.84) formulalar orqali hisoblash mumkin.

Agar qutbni boshqa B nuqtada tanlab olsak, u holda $\vec{V}_B$ va $\vec{a}_B$ larning qiymatlari, avvalgi qutb A ning tezligi $\vec{V}_A$ va tezlanishi $\vec{a}_A$ lardan albatta farq qiladi. Lekin jism bilan birgalikda harakat qilayotgan qo‘zg‘aluvchi o‘qlarni A nuqtadan B nuqtaga parallel holda ko‘chirib qo‘ysak, φ, ψ, θ -dan iborat bo‘lgan Eyler burchaklarining qiymatlari o‘zgarmasdan qoladi. Demak, qattiq jismning erkin harakatida uning aylanma harakatidagi kinematik xarakteristikalari, ya’ni $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ larning o‘zgarishi qutbga bog‘liq emas ekan.

Har qanday tekislikka parallel harakat, qattiq jismning erkin harakatini xususiy holidan iborat bo‘lib, $\vec{\omega}$ va $\vec{\varepsilon}$ -vektorlar har doim harakat tekisligiga perpendikulyar ravishda yo‘nalgan bo‘lar ekan.

B. JISM NUQTALARINING TEZLIK VA TEZLANISHLARI.

Erkin harakatdagi jism M nuqtasining tezligi $\vec{V}_M$ tekis harakatdagi kabi ikkita yig‘indidan, ya’ni qutb A bilan birgalikdagi ilgarilanma harakat tezligi $\vec{V}_A$ va nuqtaning jism bilan birgalikda qutb A atrofidagi aylanma harakatdan oladigan $\vec{V}_{MA}$-tezliklarning geometrik yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan. Tekis harakatda qutb atrofida sodir bo‘ladigan aylanma harakat kabi, A qutb nuqta atrofida ham xuddi shu kabi harakatlar sodir bo‘ladi. Shu sababli $\vec{V}_{MA}$-tezlik vektori (3.83) formula orqali hisoblanadi, ya’ni

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} \qquad (3.88)$$

bu yerda $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$. Shunday qilib,

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$$

yoki $$\vec{V}_M = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}) \quad . \qquad (3.89)$$

Ushbu tenglamalarning isboti yuqoridagiga o‘xshab aniqlanadi.

Xuddi shu kabi qattiq jismning ixtiyoriy M nuqtasining tezlanishi esa

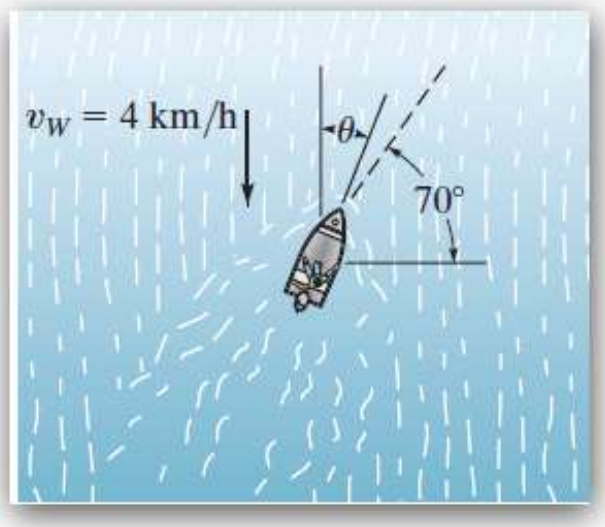
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \quad , \qquad (3.90)$$

bu yerdagi $\vec{a}_{MA}$- vektori M nuqtaning jism bilan birgalikda A qutb atrofidagi harakatidan oladigan tezlanishidan iborat bo‘lib, u (3.88) formula orqali aniqlanadi.

3.3. MODDIY NUQTA VA QATTIQ JISMNING MURAKKAB HARAKATI.

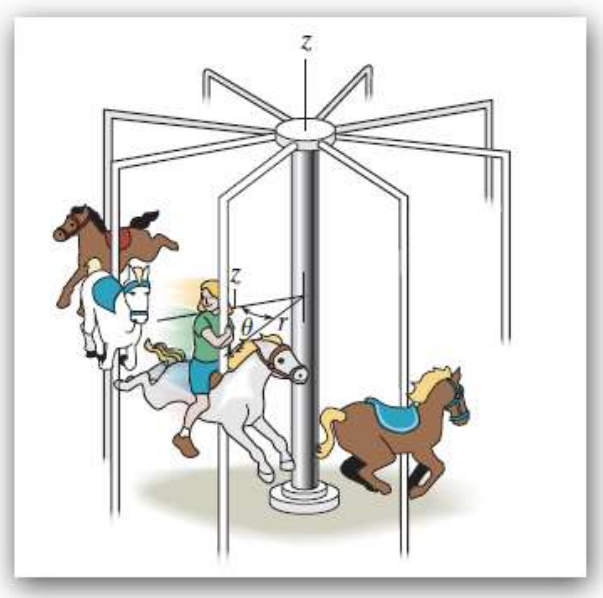
A. MODDIY NUQTANING MURAKKAB HARAKATI.

Yuqorida moddiy nuqtaning oddiy harakatlari, boshqacha aytganda bitta sanoq sistemasiga nisbatan harakatlari, o‘rganildi. Lekin moddiy nuqta bir vaqtning o‘zida bir necha harakatlarda va bir necha sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanishi mumkin. Agar moddiy nuqta bir vaqtda bir necha harakatlarda ishtirok etsa, bunday harakat ***murakkab harakat*** deb ataladi. Masalan, daryoda harakatlanayotgan qayiqning harakati (3.58-shakl). Qayiq biror tezlik bilan suv harakatiga qarshi suzsa, uning harakati ikkata to‘g‘ri chiziqli harakatlarning vektor yig‘indisidan iborat bo‘ladi.



3.58-shakl.

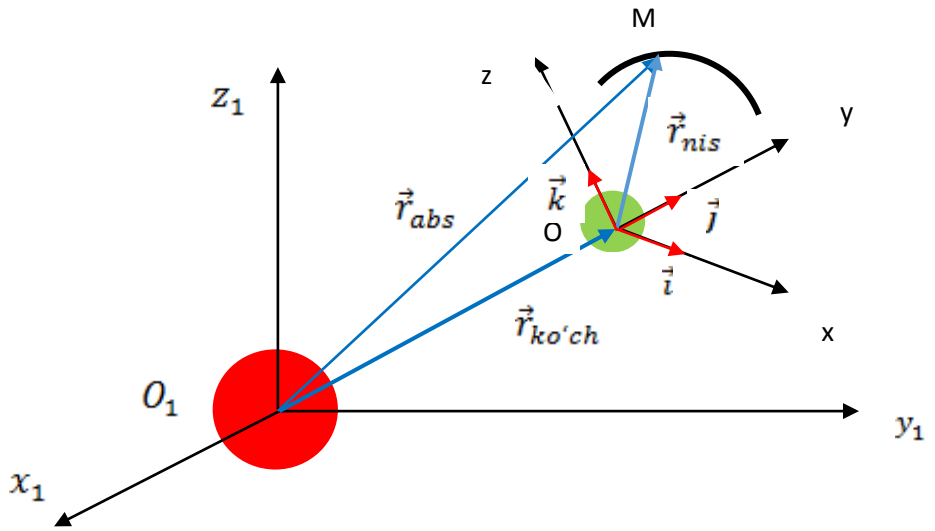
Bolalar attraksionidagi “ot o‘yinnig” harakatida (3.59-shakl) aylanma va qayta-ilgarilanma harakatlari qo‘shiladi.



3.59-shakl.

Ikkinchidan, moddiy nuqtaning harakati bir vaqtning o‘zida bir necha hisob sistemasiga nisbatan tekshirilsa ham, uning harakati ***murakkab harakat*** deb ataladi. Masalan, Yer shariga nisbatan tinch holatda turgan jism quyoshga nisbatan ikkita aylanma harakatlarda ishtirok etadi.

Shu paytgacha moddiy nuqta yoki qattiq jismning harakati Yer shari bilan bog‘langan qo‘zg‘almas hisob sistemasiga nisbatan tekshirildi. Lekin Yer shari o‘z o‘qi atrofida va Quyosh atrofida aylanma harakat qiladi. Shuning uchun “Nazariy mexanika” fanida murakkab harakatni (yoki absolyut harakatni) o‘rganish uchun Quyosh bilan bog‘langan “qo‘zg‘almas” $Ox_1y_1z_1$ va Yer bilan bog‘langan qo‘zg‘aluvchan Oxyz koordinatalar hisob sistemasi olinadi (3.60-shakl). Klassik mexanikada $Ox_1y_1z_1$ o‘qlar ***inersiyal sanoq sistemasi*** deb ataladi. Sababi, Quyosh planetalar sistemasi inersiyal harakatda bo‘ladi.



3.60-shakl.

Moddiy nuqta M ning murakkab harakati 3 ta harakatlarga bo‘lib o‘rganiladi:

a)M nuqtaning Yer ga nisbatan harakati ***nisbiy harakat;***

b) Yerning Quyoshga nisbatan harakati ***ko‘chirma harakat;***

d) M nuqtaning Quyoshga nisbatan harakati ***absolyut harakati.***

Vektorlar algebrasidan foydalanib, M nuqtaning ixtiyoriy vaqtdagi o‘rnini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{r}_{abs} = \vec{r}_{ko'ch} + \vec{r}_{nis} \quad . \tag{3.91}$$

Moddiy nuqtaning murakkab harakatida tezligini aniqlash uchun Oxyz qo‘zg‘aluvchan koordinatalar sistemasida $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ yo‘naltiruvchi birlik vektorlar olib, nisbiy harakat radius-vektorini

$$\vec{r}_{nis} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \tag{3.92}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikni (3.91)ga qo‘yib, t vaqt bo‘yicha hosila olinadi:

$$\frac{d\vec{r}_{abs}}{dt} = \frac{dr_{ko'ch}}{dt} + \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}),$$

yoki

$$\frac{d\vec{r}_{abs}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{ko'ch}}{dt} + (\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}) + (x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}),$$

Oxyz qo‘zg‘aluvchi o‘qlar bo‘lganligi uchun birlik vektorlarning t vaqt bo‘yicha differensiyali Puasson-Eyler formulalaridan

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{i}\,, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{j}\,, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{k}\,, \qquad (3.93)$$

ga teng bo‘lib, geometrik ma’nosi- birlik vektorlarning qo‘zg‘almas $Ox_1y_1z_1$ o‘qlar atrofida aylanishini bildiradi. Demak

$$\frac{d\vec{r}_{abs}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{ko'ch}}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}\right) + \vec{\omega}_{ko'ch} \times (x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}).$$

Birinchi va uchinchi yig‘iluvchilarni ko‘chirma tezlik deb hisoblasak,

$$\vec{V}_{ko'ch} = \frac{d\vec{r}_{ko'ch}}{dt} + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \left(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\right); \qquad (3.94)$$

ikkinchi yig‘indi esa nisbiy harakat tezligini bildiradi

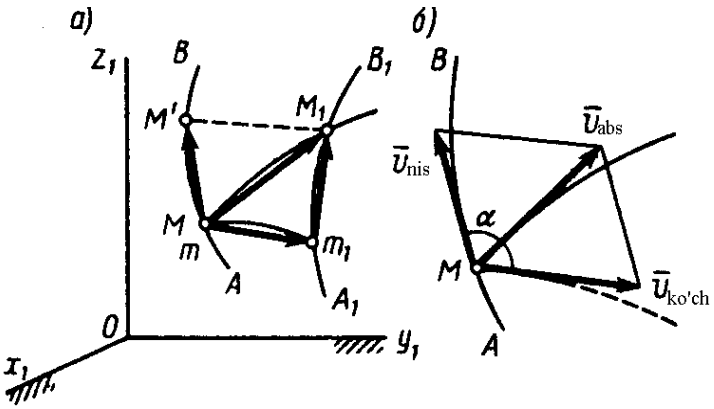
$$\vec{V}_{nis} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}\ . \qquad (3.95)$$

U holda tezliklarni qo‘shish teoremasining ifodasi hosil bo‘ladi

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{ko'ch} + \vec{V}_{nis}. \qquad (3.96)$$

Teorema: *Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezligi ko‘chirma va nisbiy harakat tezlik vektorlarining yig‘indisidan iborat.*

Tezliklarning yo‘nalishini aniqlash uchun nuqtaning nisbiy AB, ko‘chirma Mm_1 va absolyut harakat MM_1 trayektoriyalarini shartli chizib olib, (3.96) ga asosan ko‘rsatamiz (3.61-shakl).



3.61-shakl.

Absolyut tezlikning miqdori kosinuslar teoremasidan topiladi:

$$V_{abs} = \sqrt{V_{ko'ch}{}^2 + V_{nis}{}^2 + 2V_{ko'ch}V_{nis}\cos\alpha}\ . \qquad (3.97)$$

Moddiy nuqtaning murakkab harakatida tezlanishini aniqlash uchun (3.96) dan t vaqt bo‘yicha differensiyal olinadi:

$$\frac{d\vec{V}_{abs}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{ko'ch}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{nis}}{dt} \; ;$$

(3.94) va (3.95) ni hisobga olib,

$$\frac{d\vec{V}_{ko'ch}}{dt} =$$

$$\frac{d^2\vec{r}_{ko'ch}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}_{ko'ch}}{dt} \times \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\right) + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \left[\left(\frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}\right) + \left(x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right];$$

(3.92),(3.93) va (3.95) ifodalardan,

$$\frac{d\vec{V}_{ko'ch}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{ko'ch}}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{ko'ch} \times \vec{r}_{nis} + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{V}_{nis} + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{V}_{nis} \; ;$$

nisbiy tezlik vektoridan t vaqt bo‘yicha olingan differensiyal esa

$$\frac{d\vec{V}_{nis}}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}\right) + \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}\right);$$

(3.93) ni hisobga olib,

$$\frac{d\vec{V}_{nis}}{dt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}\right) + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{V}_{nis} \; .$$

Quyidagi belgilashlarni kiritib,

$$\vec{a}_{ko'ch} = \frac{d^2\vec{r}_{ko'ch}}{dt^2} + \vec{\varepsilon}_{ko'ch} \times \vec{r}_{nis} + \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{V}_{nis} \; ; \quad (3.98)$$

$$\vec{a}_{nis} = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{k}\right); \quad (3.99)$$

$$\vec{a}_{kor} = 2\,(\vec{\omega}_{ko'ch} \times \vec{V}_{nis}) \quad (3.100)$$

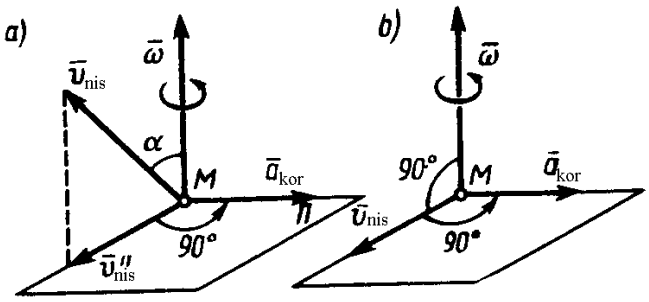
tezlanishlarni qo‘shish haqidagi teorema ifodasiga ega bo‘lish mumkin:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{ko'ch} + \vec{a}_{nis} + \vec{a}_{kor} \; . \quad (3.101)$$

Teorema: *Murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi ko‘chirma, nisbiy va koriolis tezlanishlarning vektor yig‘indisidan iborat.*

(3.101) tenglikni birinchi bo‘lib fransuz muhandisi G.C.Koriolis isbot qilgan, shuning uchun teorema va (3.100) formula ***Koriolis teoremasi*** va ***Koriolis tezlanishi*** deb ataladi. Koriolis tezlanishining yo‘nalishi Jukovskiy[14] usuli, fizika fanidagi “o‘ng vint qoidasi” asosida aniqlanadi, y’ani $\vec{a}_{kor}$ –koriolis tezlanishi

$\vec{\omega}_{ko'ch}$-ko‘chirma harakat burchakli tezligi va $\vec{V}_{nis}$-nisbiy tezlik vektorlari tekisligiga perpendikyular shunday yo‘nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{\omega}_{ko'ch}$ dan $\vec{V}_{nis}$ ga o‘tish soat mili aylanishiga teskari bo‘lishi lozim (3.62-shakl).



3.62-shakl.

Koriolis tezlanishining miqdori esa quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$a_{kor} = 2\omega_{ko'ch} \cdot V_{nis} \cdot \sin\alpha \quad . \qquad (3.102)$$

Koriolis tezlanish quyidagi hollarda nolga teng bo‘ladi:

a) agar ko‘chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo‘lsa, $\omega_{ko'ch}$=0 va a_{kor}=0;

b) agar nisbiy harakat tezligi V_{nis}=0 bo‘lsa, a_{kor}=0;

d) agar $\vec{\omega}_{ko'ch}$-ko‘chirma harakat burchakli tezligi va $\vec{V}_{nis}$-nisbiy tezlik vektorlari o‘zaro parallel bo‘lsa, yoki $\alpha = 0°, \alpha$=180°,y’ani $\sin\alpha$ = 0.

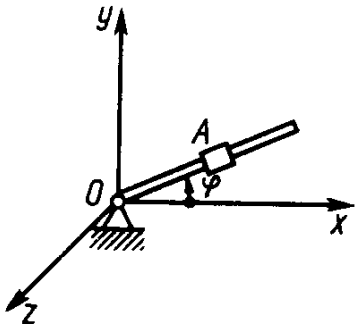
U holda (3.101) tenglik

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{ko'ch} + \vec{a}_{nis}, \qquad (3.103)$$

ko‘rinishga keladi.

Yuqoridagi nazariy ma’lumotlarni masalalar yechish bilan mustahkamlaymiz.

1-masala: Oz o‘qi atrofida $\varphi = \frac{\pi}{9}(2t^2+t)$, rad qonun bo‘yicha aylanayotgan sterjen bo‘ylab A polzun OA=$3t^2$, m tenglama asosida harakat qilsa, polzunning o‘lchamlarini hisobga olmay, t=1 sek paytdagi polzunning absolyut tezligini va absolyut tezlanishini hisoblang.



3.63-shakl.

Yechish: 1) Polzunning t=1 sek paytdagi o‘rnini aniqlaymiz:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{9} \cdot (2 \cdot 1 + 1) = \frac{\pi}{3};$$

OA= 3· $1 = 3\ m.$

2) Polzunning OA bo‘ylab harakati nisbiy harakat bo‘lib, uning tezligi va tezlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$V_{nis} = (OA)' = (3t^2)' = 6t; \quad (1)$$

$$a_{nis} = (V_{nis})' = (6t)' = 6\frac{m}{s^2}. \quad (2)$$

t=1sekda V_{nis} = 6 m/s.

3) Polzunning OA sterjen bilan aylanma harakati ko‘chirma harakat bo‘lib, uning burchakli tezligi va burchakli tezlanishini topamiz:

$$\omega_{ko'ch} = \varphi' = \left[\frac{\pi}{9}(2t^2 + t)\right]' = \frac{\pi}{9}(4t + 1);$$

$$\varepsilon_{ko'ch} = \omega_{ko'ch}{}' = \frac{4\pi}{9};$$

t=1 sekda $\omega_{ko'ch}$ =1,74 rad/sek, $\varepsilon_{ko'ch} = 1{,}4\frac{rad}{sek^2}$.

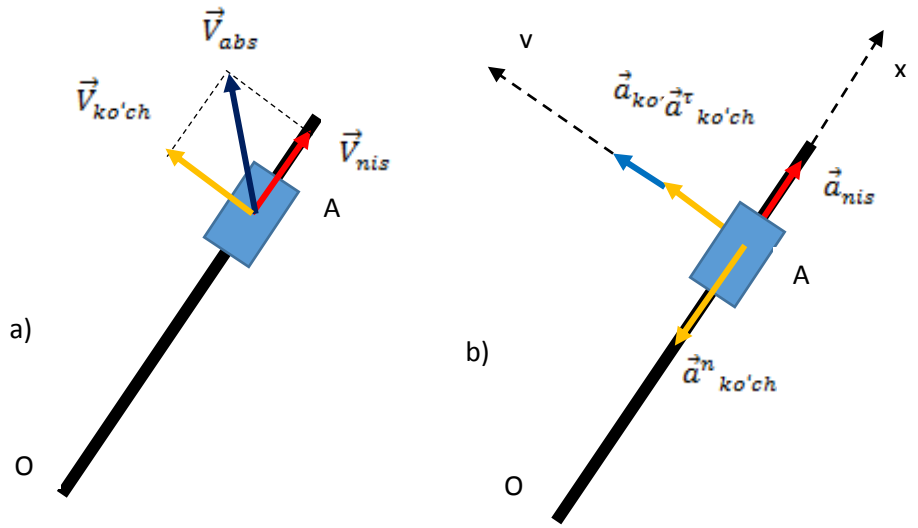
Ko‘chirma tezlik va tezlanish esa

$$V_{ko'ch} = OA \cdot \omega_{ko'ch} = 3 \cdot 1{,}74 = 5{,}22 \text{ m/sek}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{ko'ch}{}^{\tau} = OA \cdot \varepsilon_{ko'ch} = 3 \cdot 1{,}4 = 4{,}2\frac{m}{sek^2}; \\ a_{ko'ch}{}^{n} = OA \cdot \omega_{ko'ch}{}^{2} = 3 \cdot (1{,}74)^2 = 9{,}08\frac{m}{sek^2}. \end{cases} \quad (4)$$

4) Polzunning absolyut tezligi pifagor formulasidan aniqlanadi, chunki $\vec{V}_{nis} \perp \vec{V}_{ko'ch}$ (3.64-shakl):

$$V_{abs} = \sqrt{V^2{}_{nis} + V^2{}_{ko'ch}} = \sqrt{6^2 + (5{,}22)^2} = 7{,}95\frac{m}{sek}.$$



3.64-shakl.

5) Polzunning koriolis tezlanishini topamiz:

$$a_{kor} = 2\omega_{ko'ch} \cdot V_{nis} \cdot \sin 90° = 2 \cdot 1{,}74 \cdot 6 \cdot 1 = 20{,}88\, m/s^2,$$

uning yonalishi esa $\vec{\omega}_{ko'ch}$($\vec{\omega}_{ko'ch}$ –chizma tekisligiga perpendikulyar yuqoriga yo‘nalgan) va $\vec{V}_{nis}$ ga perpendikulyar yo‘nalgan bo‘ladi.

6) Polzunning absolyut tezlanishini topish uchun (3.101) tenglikni Axy o‘qlariga proyeksiyalab,

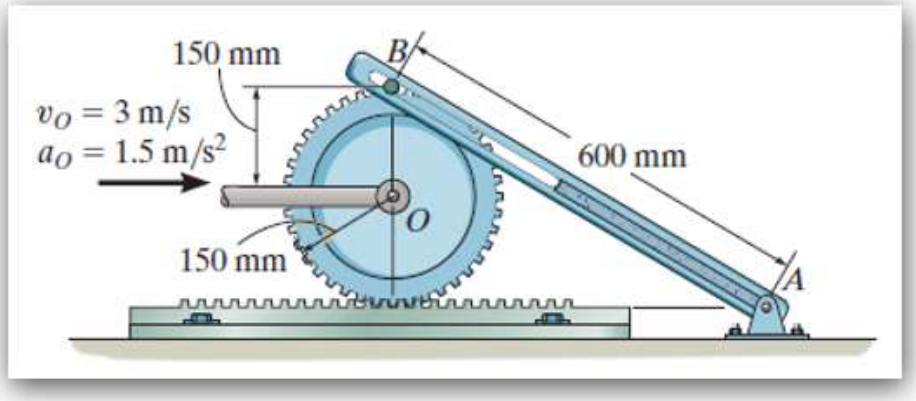
x: $a_{absx} = a_{nis} - a^{n}{}_{ko'ch} = 6 - 9{,}08 = -3{,}08\,\mathrm{m}/s^2;$

y: $a_{absy} = a_{kor} + a_{ko'ch}{}^{\tau} = 20{,}88 + 4{,}2 = 25{,}08\,\frac{\mathrm{m}}{s^2},$

umumiy qiymati hisoblanadi:

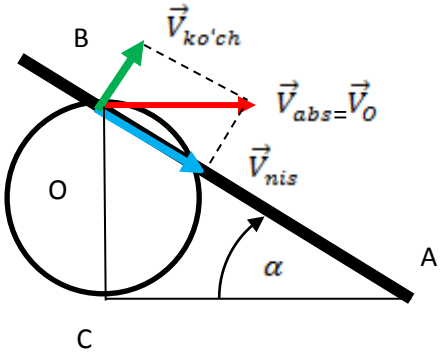
$$a_{abs} = \sqrt{(a_{absx})^2 + (a_{absy})^2} = \sqrt{(-3{,}08)^2 + (25{,}08)^2} = 25{,}27\,\mathrm{m}/s^2.$$

1-masala. Chet el adabiyotidan olindi[2]: Tishli g‘ildirak-shesternyaga mahkamlanga B sharcha AB yo‘naltiruvchi boylab sirpanadi (3.65-shakl). AB yonaltiruvchi esa A sharnir atrofida aylanadi. Agar shesternyaning markazi O 3 m/s tezlikka va 1,5 m/s^2 tezlanishga ega bo‘lsa, AB yo‘naltiruvchining A sharnir atrofida aylanma burchakli tezligi va burchakli tezlanishi aniqlansin.



3.65-shakl.

Yechish: Sharchaning AB yo‘naltiruvchi bo‘ylab harakati ***nisbiy*** va AB ning A sharnir atrofidagi aylanma harakati ***ko‘chirma*** bo‘lganligi ucun, ularning vektor yig‘indisi $\vec{V}_O$ bo‘ladi (3.66-shakl).



3.66-shakl.

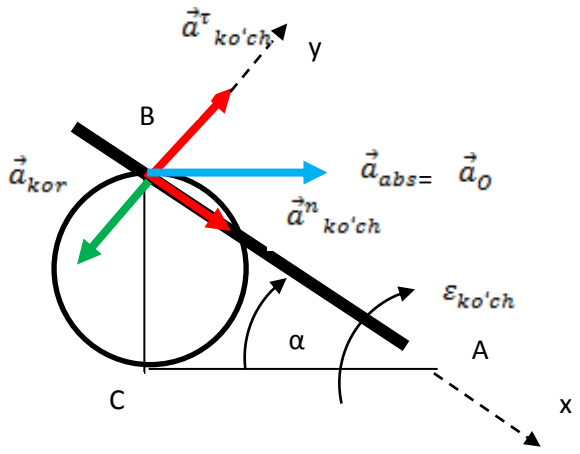
ΔABC dan AB=600 mm, BC=300 mm bo‘lsa, α=30° va

$$V_{nis} = V_O \cos 30° = 3 \cdot 0{,}866 = 2{,}6 \text{ m/s}, \qquad (1)$$

$$V_{ko'ch} = V_O \cos 60° = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5\frac{m}{s}. \qquad (2)$$

AB yo‘naltiruvchining burchakli tezligi esa

$$\omega_{ko'ch} = \frac{V_{ko'ch}}{AB} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5 \text{ rad/sek}. \qquad (3)$$



3.66-shakl.

AB yo‘naltiruvchining burchakli tezlanishini aniqlash uchun B sharchaning absolyut tezlanishi $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_o$ deb olib, uning ko‘chirma va koriolis tezlanishlarini aniqlaymiz:

$$\begin{cases} a^{n}{}_{ko'ch} = AB \cdot \omega^{2}{}_{ko'ch} = 0{,}6 \cdot (2{,}5)^2 = 3{,}75\frac{m}{s^2}; \\ a^{\tau}{}_{ko'ch} = AB \cdot \varepsilon_{ko'ch}; \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{kor} = 2 \cdot \omega_{ko'ch} \cdot V_{nis} \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}6 = 13\, m/s^2. \quad (5)$$

(3.101) tenglikni Bxy o‘qlariga proyeksiyalab,

x: $a_{abs} \cos 30^\circ = a^{n}{}_{ko'ch}$; (6)

y: $a_{abs} \cos 60^\circ = a^{\tau}{}_{ko'ch} - a_{kor}$; (7)

(7) tenglikdan

$$a^{\tau}{}_{ko'ch} = a_{abs} \cos 60^\circ + a_{kor} = 1{,}5 \cdot 0{,}5 + 13 = 13{,}75\frac{m}{s^2};$$

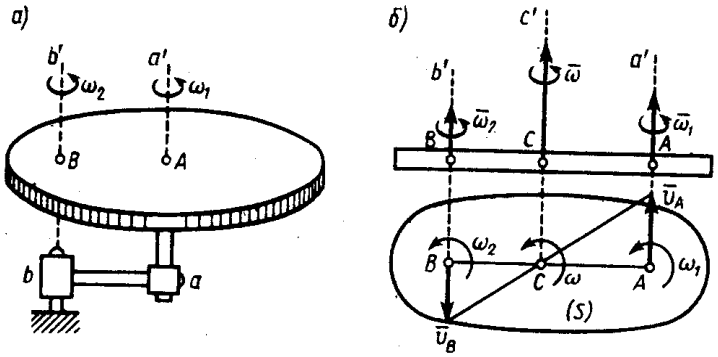
(4) tehglikdan

$$\varepsilon_{ko'ch} = \frac{a^{\tau}{}_{ko'ch}}{AB} = \frac{13{,}75}{0{,}6} = 22{,}92\frac{rad}{sek^2}.$$

B. <u>QATTIQ JISMNING MURAKKAB HARAKATI.</u> Qattiq jismning murakkab harakati ham xuddi moddiy nuqtaning murakkab harakati kabi ro‘y beradi. Faqat qattiq jismning tekis parallel harakatiday ixtiyoriy harakatni ilgarilanma va aylanma harakatlarning yig‘indisidan iborat deb qaraladi. Qattiq jismning murakkab harakati “Osmon jismlari mexanikasi” fanida to‘liq o‘rganiladi. Bizning holimizda texnikada ko‘p uchraydigan harakatlarni ko‘ramiz.

1. O‘zaro parallel ikkita o‘q atrofidagi aylanma harakatlarni qo‘shish.

Faraz qilaylik, aylana shaklidagi disk ikkita aylanma harakatda ishtirok etsin(3.67-shakl,a). Uning Az o‘qi atrofidagi aylanishi-***nisbiy harakat,*** Az o‘qining Bz_1 o‘qi atrofidagi aylanishi-***ko‘chirma harakat,*** diskning ikkala aylanma harakatlar yig‘indisi-***absolyut harakat*** bo‘ladi.



3.67-shakl.

Agar ikkala o‘q atrofidagi aylanish bir tomonga bo‘lsa, burchakli tezliklar algebraik qo‘shiladi:

$$\omega_{abs} = \omega_{ko'ch} + \omega_{nis},$$

yoki

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (3.104)$$

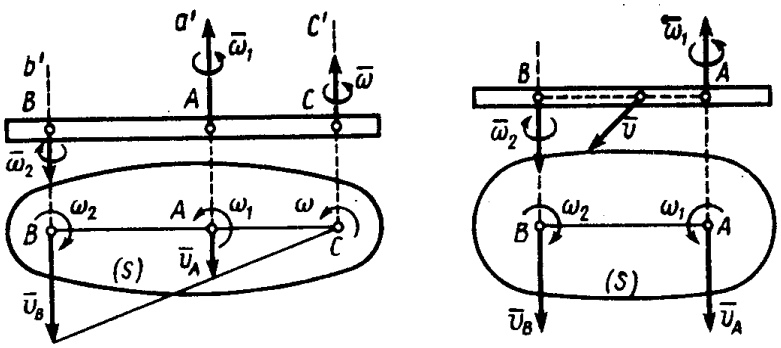
Agar bir necha parallel o‘qlar bo‘lsa,

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k. \qquad (3.105)$$

Agar ikkala o‘q atrofidagi aylanish qarama-qarshi tomonga bo‘lsa, burchakli tezliklar algebraik ayriladi:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \qquad (3.106)$$

bunda $\omega_1 > \omega_2$.



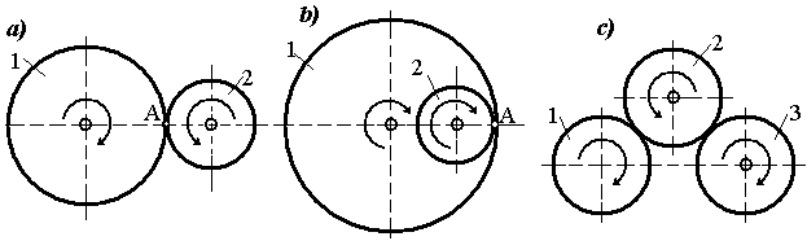
3.68-shakl.

Vaqt mobaynida oniy aylanish o‘qi Cz' o‘zining o‘rnini tsilindrik sirtdan iborat bo‘lgan yuza bo‘ylab o‘zgartirib turadi. Oniy aylanish o‘qining o‘rni esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (3.107)$$

Yuqoridagi ifodalar mashina-mexanizmlarning turli uzatmalarida qo‘llaniladi. Ularning ba’zi birlari bilan tanishamiz:

a)Oddiy uzatmalar. Bunday uzatmada qatnashuvchi g‘ildiraklarning barcha o‘qlari qo‘zg‘almas bo‘ladi. Hamda shu g‘ildiraklardan bittasi (masalan, 3.69-shakldagi 1-g‘ildirak) yetaklovchi bo‘ladi, qolganlari esa yetaklanuvchi hisoblanadi. Ikkita g‘ildirakning tashqi (3.69-shakl,a) ilashishlarida yoki ichki (3.69-shakl,b) ilashishlarida, ilashish nuqtasi A - ning tezliklarini o‘zaro tengligidan foydalanib $|\omega_1|\cdot r_1 = |\omega_2|\cdot r_2$ ekanligini aniqlaymiz. Tishlar soni g‘ildiraklarning radiuslariga proportsional ekanligidan foydalanib, hamda ichki ilashishda



3.69-shakl.

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{tashqi} = \frac{-r_2}{r_1} = \frac{-z_2}{z_1}; \qquad (3.108)$$

va

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{ichki} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (3.109)$$

Uchta g‘ildiraklarning tashqi ilashishlarida (3.69-shakl,c) uzatmalar sonini aniqlaymiz,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-r_2}{r_1}; \qquad (3.110)$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{-r_3}{r_2}; \qquad (3.111)$$

va

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}. \qquad (3.112)$$

Shunday qilib, chekkadagi g‘ildiraklarning burchakli tezliklarining nisbatlari, ularning radiuslarining (tishlar sonining) nisbatiga teskari proportsional ekan va oraliq g‘ildiraklarning radiuslariga bog‘liq emas ekan.

Olingan natijalarga asosan, g‘ildiraklarning oddiy ilashishlarida,

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \cdot \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1}. \qquad (3.113)$$

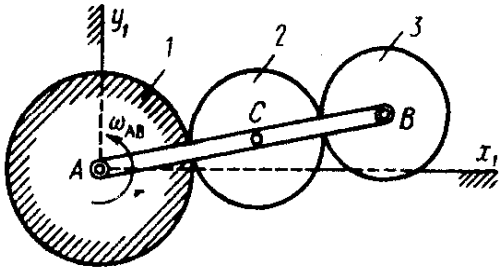
bu yerda k - *tashqi* ilashishlar soni (3.69-shakl,a)da bitta ilashish tasvirlangan; (3.69-shakl,c)da ikkita tashqi ilashish tasvirlangan; (3.69-shakl,b)da tashqi ilashish yo‘q.

Tishli uzatmalarning ***uzatishlar soni*** deb, etaklovchi g‘ildirakning burchakli tezligini etaklanuvchi g‘ildirakning burchakli tezligiga bo‘lgan nisbatiga aytiladi va i_{1n}-harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \qquad (3.114)$$

Oddiy uzatmalar uchun i_{1n}-ning qiymati (3.113) formula orqali aniqlanadi.

b)*Planetar uzatma.* Planetar uzatmalarda 1-g‘ildirak qo‘zg‘almas bo‘ladi. Qolgan g‘ildiraklarning o‘qlari birinchi g‘ildirakning A o‘qi atrofida aylanuvchi AB krivoshipga o‘rnatilgan bo‘ladi (3.70-shakl).



3.70-shakl.

d)Differentsial uzatma. Differentsial uzatmaning planetar uzatmadan farqi shuki, 1-g‘ildirak A o‘q atrofida AB krivoshipning harakatiga bog‘liq bo‘lmagan holda bevosita aylanma harakat qila oladi.

Planetar va differentsial uzatmalarni hisoblash uchun, qo‘zg‘almas Ax_1y_1 o‘qlarni A o‘q atrofida AB krivoshipning burchakli tezligiga teng bo‘lgan, lekin

teskari yo‘nalishda, ya’ni $-\omega_{AB}$ burchakli tezlik bilan xayolan aylantiriladi. Bu usulni ***to‘xtatish usuli*** yoki ***Villis usuli*** deb ataladi. U holda, yuqorida olingan natijalarga asosan bunday murakkab harakatda krivoship qo‘zg‘almas bo‘lib qoladi va ixtiyoriy olingan r_k -radiusli tishli g‘ildirakning burchakli tezligi quyidagi formula orqali aniqlanadi,

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB}$$

bu yerda ω_k -g‘ildirakning qo‘zg‘almas Ax_1y_1 o‘qlarga nisbatan absolyut burchakli tezligi (3.70-shakl). Bu holda hamma tishli g‘ildiraklarning o‘qlari qo‘zg‘almas bo‘ladi va $\tilde{\omega}_k$ bilan bo‘lgan bog‘liqlikni aniqlash uchun, tishlarning ilashgan nuqtalardagi tezliklarini teng ekanligidan yoki bo‘lmasa (3.113) formula orqali bevosita aniqlanilishi mumkin.

Planetar va differentsial uzatmalarni hisoblash ishlarini oniy tezliklar markazi orqali ham olib borish mumkin.

1-masala. Planetar mexanizmning (3.70-shakl) radiusi r_1 -ga teng bo‘lgan 1 g‘ildiragi qo‘zg‘almas bo‘lib, AB krivoship ω_{AB} burchakli tezlik bilan aylanmoqda. Radiusi r_3-ga teng bo‘lgan 3 g‘ildirakning burchakli tezligi aniqlansin.

Yechish: G‘ildiraklarning qo‘zg‘almas Ax_1y_1 o‘qlarga nisbatan absolyut burchakli tezliklarini ω_1 ($\omega_1=0$), ω_2 va ω_3 lar orqali belgilaymiz. Ax_1y_1 o‘qlar tekisligini A nuqta atrofida $-\omega_{AB}$ burchakli tezlik bilan xayolan aylantiramiz, natijada quyidagi ifodalarni olamiz,

$$\tilde{\omega}_1=0-\omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_2=\omega_2-\omega_{AB} \quad \text{va} \quad \tilde{\omega}_3=\omega_3-\omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_{AB}=0$$

Yuqoridagi natijalarda g‘ildiraklarning o‘qlari qo‘zg‘almas va tashqi ilashishlar soni k=2 ga teng. U holda (3.113) formula orqali,

$$\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_3=r_3/r_1 \quad \text{yoki} \quad -\omega_{AB}/(\omega_3-\omega_{AB})=r_3/r_1,$$

Bundan 3 g‘ildirakning absolyut burchakli tezligini aniqlaymiz,

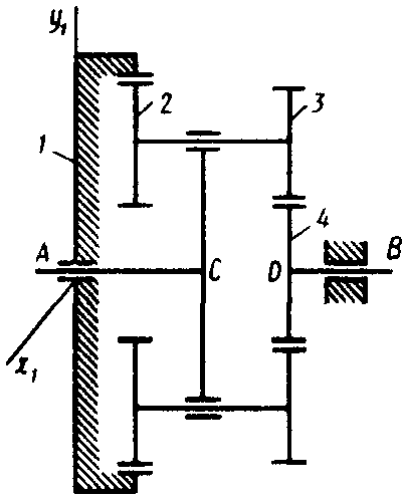
$$\omega_3=(1-r_1/r_3)\omega_{AB}\ .$$

Agar $r_3>r_1$ bo‘lsa, u holda 3 g‘ildirak krivoshipning aylanishi tomoniga harakatlanadi, agar $r_3<r_1$ bo‘lsa krivoshipning aylanishiga teskari bo‘ladi. Agar $r_3=r_1$ bo‘lsa $\omega_3=0$ bo‘ladi. Bunday holda 3 g‘ildirak ilgarilanma harakatda bo‘ladi. 3-g‘ildirakning nisbiy burchakli (AB krivoshipga nisbatan) tezligini (3.109) formula orqali aniqlanadi. Absolyut burchakli tezlik $\omega_3=(\omega_3)_{nis}+\omega_{AB}$ (krivoshipning burchakli tezligi 3 g‘ildirak uchun ko‘chirma harakat hisoblanadi) bo‘lgani uchun,

$$(\omega_3)_{nis} =\omega_3-\omega_{AB}=-(r_1/r_3)\omega_{AB}$$

$r_3=r_1$ bo‘lganda $(\omega_3)_{nis} =\omega_{AB}$ bo‘ladi. Shu sababli nisbiy $-(\omega_3)_{nis}$ va ko‘chirma - ω_{AB} burchakli tezliklar aylanish juftini tashkil etadilar. Shu sababli 3 g‘ildirak $v=\omega_{AB}\cdot AB$ tezlik bilan ilgarilanma harakat qiladi, ya’ni yuqoridagi natijani boshqa usul bilan aniqladik.

2-masala. Tezliklar reduktori (3.71-shakl): a) qo‘zg‘almas shesternya 1 dan; b) 2 va 3 juft g‘ildiraklar o‘rnatilgan krivoshipdan tashkil topib, ular yetaklovchi AC val bilan tishlashib turibdilar (2 va 1 g‘ildiraklar ichki ilashishda qatnashmoqda); v) yetaklanuvchi BD valga o‘rnatilgan tishli g‘ildirak -4 dan iborat. G‘ildiraklarning tishlari soni: $z_1=120$, $z_2=40$, $z_3=30$, $z_4=50$. Yetaklovchi valning aylanishlar soni $n_A=1500$ ayl/min. Yetaklanuvchi B valning bir minutdagi aylanishlar soni aniqlansin.



3.71-shakl.

Yechish: Burchakli tezliklarning absolyut qiymatlarini: AC val bilan krivoshipning ω_A, BD val bilan 4 g‘ildirakning ω_B, 2 va 3 (ular bir birlariga mahkamlangan) g‘ildiraklarning ω_{23}, harflar bilan belgilaymiz. 1 tishli g‘ildirak qo‘zg‘almaydi, shuning uchun $\omega_1=0$ bo‘ladi. Mexanizmni o‘zining tekisligida Ax_1y_1 o‘qlar biilan birgalikda $-\omega_A$ burchakli tezlik bilan aylantiramiz. Bunday harakatda krivoship qo‘zg‘almas bo‘ladi ($\omega_A=0$) va tishli g‘ildiraklarning burchakli tezliklari Villis formulasiga asosan quyidagicha yoziladi,

$$\tilde{\omega}_1=0-\omega_A,\ \tilde{\omega}_{23}=\omega_{23}-\omega_A,\ \tilde{\omega}_4=\omega_B-\omega_A$$

1 va 2 hamda 3 va 4 g‘ildiraklar uchun (3.113) formulaga asosan tenglamalar tuzamiz,

$$\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_{23}=z_2/z_1;\qquad \tilde{\omega}_{23}/\tilde{\omega}_4=-z_4/z_3.$$

Ushbu tenglamalarni bir birlariga ko‘paytiramiz, natijada

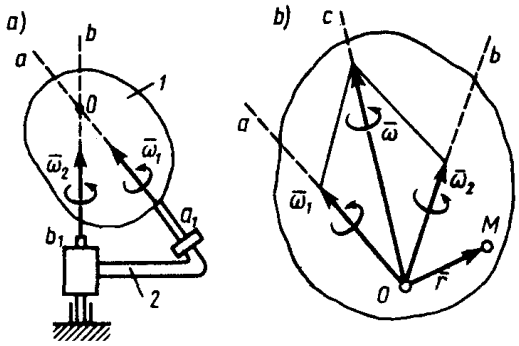
$$\tilde{\omega}_1/\tilde{\omega}_4=-z_2\cdot z_4/z_1\cdot z_3 \quad \text{yoki} \quad \omega_A/(\omega_B-\omega_A)=z_2\cdot z_4/z_1\cdot z_3$$

Aylanishlar soni n -ayl/min burchakli tezlik ω -ga proportsional ekanligiga asoslanib, $n_B=(1+z_1z_3/z_2z_4)n_A=4200$ ayl/min bo‘lar ekan.

2.O‘zaro kesishuvchi o‘qlar atrofidagi aylanishlarni qo‘shish.

a)Burchakli tezliklarni qo‘shish.

Krivoship 2 -ga o‘rnatilgan a_1a qo‘zg‘aluvchi o‘q atrofidagi $\vec{\omega}_1$ burchakli tezlik bilan aylanayotgan jismning harakatini nisbiy harakat deb hisoblaylik (3.72-shakl,a). Qo‘zg‘aluvchi a_1a o‘q bilan O nuqtada kesishuvchi qo‘zg‘almas b_1b o‘q atrofida $\vec{\omega}_2$-burchakli tezlik bilan aylanuvchi krivoshipning harakatini ko‘chirma harakat deb hisoblaylik. O‘zaro kesishuvchi o‘qlar atrofidagi bunday harakatlarning sxematik ko‘rinishi (3.72-shakl,b)da tasvirlangan.



3.72-shakl.

O‘z-o‘zidan ma’lumki o‘qlarning kesishgan nuqtasidagi tezlik nolga teng bo‘ladi va jismning harakati qo‘zg‘almas O nuqtaning atrofidagi harakatidan iborat bo‘ladi. U holda jismning shu ondagi burchakli tezligi $\vec{\omega}$- bo‘lib, O nuqtadan o‘tuvchi oniy aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘naladi.

Jismning absolyut burchakli tezligi $\vec{\omega}$-ni aniqlash uchun, uning radius vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ bo‘lgan ixtiyoriy M nuqtasining tezligini aniqlaymiz. M nuqta o‘zining nisbiy harakatida (Oa o‘q atrofidagi aylanishda) (3.106) formulaga asosan

$\vec{V}_{nis} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}$ tezlik oladi, ko‘chirma harakatida esa $\vec{V}_{ko'ch} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$ bo‘ladi. U holda M nuqtaning absolyut tezligi, quyidagicha bo‘ladi

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{nis} + \vec{V}_{ko'ch} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \qquad (3.115)$$

Lekin, natijaviy harakat oniy aylanish o‘qi atrofidagi $\vec{\omega}$-burchakli tezlik bilan aylanma harakat bo‘lganligi uchun, nuqtaning absolyut tezligi quyidagicha bo‘ladi,

$$\vec{V}_{abs} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (3.116)$$

M nuqta ixtiyoriy ravishda olinganligi uchun, yuqoridagi tengliklar barcha nuqtalar uchun o‘rinli bo‘ladi va jismning absolyut tezligi

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \qquad (3.117)$$

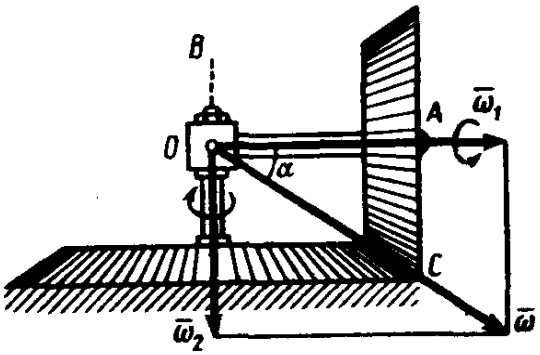
bo‘ladi. Shu sababli, O nuqtada kesishuvchi o‘qlar atrofidagi ikkita aylanma harakatning yig‘indisi, shu O nuqtadan o‘tuvchi Oc oniy aylanish o‘qi atrofidagi aylanma harakatga teng bo‘lar ekan va bunday aylanma harakatning burchakli tezlik vektori nisbiy va ko‘chirma harakatlarning burchakli tezliklarining vektor yig‘indisiga teng bo‘lar ekan. Os oniy aylanish o‘qi, $\vec{\omega}_1$ va $\vec{\omega}_2$ vektorlarga

qurilgan parallelogrammning diagonali bo‘ylab yo‘nalar ekan, ya’ni absolyut burchakli tezlik vektori $\vec{\omega}$- bo‘ylab yo‘nalar ekan.

Vaqt o‘tishi bilan oniy aylanish o‘qi Os o‘zining yo‘nalishini asta sekin o‘zgartirib boradi va boshi O nuqtada joylashgan konussimon yuzali sirt ustida harakat qiladi.

Agar jism O nuqtada kesishuvchi bir necha o‘qlar atrofidagi aylanma harakatlarda ishtirok etsa, u holda (103) formulani birin ketin qo‘llash natijasida, shu berilgan aylanishlarning vektor yig‘indisi (teng ta’sir etuvchisi) $\vec{\omega}$ bo‘ylab yo‘nalgan, oniy aylanish o‘q atrofidagi yakuniy harakatdan iborat bo‘ladi, ya’ni

$$\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\omega}_k \qquad (3.118)$$



3.73-shakl.

1-masala. Radiusi R -ga teng bo‘lgan bo‘lgan konussimon katokning absolyut burchakli tezligi - $\vec{\omega}$ aniqlansin. OA=*l* masofa A nuqtaning tezligi -v_A berilgan (3.73-shakl).

Yechish. Katokning absolyut harakati: qo‘zg‘aluvchi OA o‘q atrofidagi $\vec{\omega}_1$-burchakli tezlik bilan aylanayotgan nisbiy va qo‘zg‘almas OB o‘q atrofidagi OA $\vec{\omega}_2$-burchakli tezlik bilan aylanayotgan krivoshipning ko‘chirma harakatlarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi; hamda $\omega_2=v_A/l$ bo‘ladi.

Katokning oniy aylanish o‘qi va absolyut burchakli tezlik vektori -$\vec{\omega}$, OC chiziq bo‘ylab yo‘nalgan, chunki C nuqtaning tezligi nolga teng. Burchakli tezlik vektorlaridan parallelogramm quramiz va absolyut burchakli tezlikning son qiymatini aniqlaymiz, ya’ni

$$\omega=\omega_2/\sin\alpha$$

ga teng bo‘ladi. Hamda

$$\sin\alpha=R/\sqrt{l^2+R^2}$$

bo‘lgani uchun

$$\omega=(v_A/R)\cdot\sqrt{1+R^2/l^2}\,.$$

Ushbu natijani boshqa usul bilan ham aniqlash mumkin. (OC -oniy aylanish o‘qi ekanligiga asoslanib) $v_A=\omega\cdot h$ tenglikdan $\omega=v_A/h$; bu yerda $h=l\cdot\sin\alpha$.

Katokning harakati OC -oniy aylanish o‘qi atrofidagi qator elementar burilishlardan iborat bo‘lib, shu OC -oniy aylanish o‘qlarining har ondagi o‘rinlarining uchi O nuqtada bo‘lgan konusdan iborat bo‘ladi.

b) Burchakli tezlanishlarni qo‘shish.

Faraz qilaylik, burchakli tezliklar o‘zgaruvchan bo‘lsin, ya’ni burchakli tezlanishlar mavjud bo‘lsin. U holda $\vec{\varepsilon}_1$-nisbiy va $\vec{\varepsilon}_2$-ko‘chirma burchakli tezlanishlar bilan belgilaymiz. Absolyut burchakli tezlanish $\bar{\varepsilon}$ -ni aniqlaylik. (3.117) tenglikdan,

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}; \qquad (3.118)$$

bu yerda $\vec{\omega}_1$-nisbiy, $\vec{\omega}_2$-ko‘chirma burchakli tezlik vektorlari.

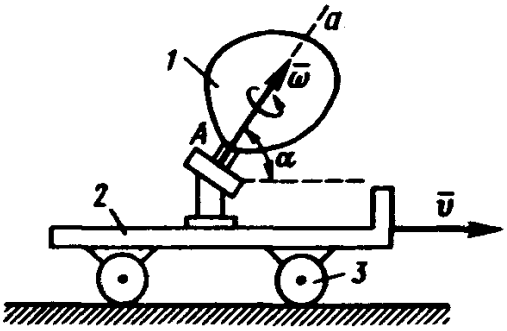
Yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozamiz,

$$\vec{\varepsilon}=\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2+(\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_1). \qquad (3.119)$$

(3.119) formuladan o‘zaro kesishuvchi o‘qlar atrofidagi aylanma harakatlarning absolyut burchakli tezlanishlarini aniqlashda keng foydalaniladi.

d) Ilgarilanma va aylanma harakatlarni qo‘shish. Vintsmon harakat.

Qattiq jismning harakati ilgarilanma va aylanma harakatlardan iborat bo‘lsin. Bunga tezligi $\vec{V}$ bo‘lgan 2-aravachaga o‘rnatilgan 1-aylanuvchi qurilma misol bo‘ladi(3.74-shakl).

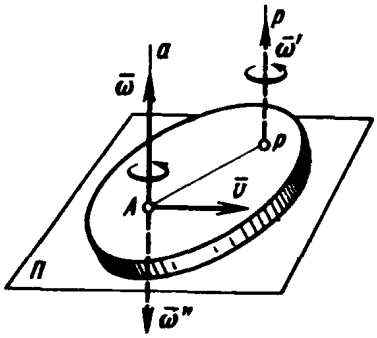


3.74-shakl.

$\vec{V}$ va $\vec{\omega}$ vektorlar orasidagi burchak α ning turli qiymatlarida turlicha harakatlar hosil bo‘ladi.

a)Ilgarilanma harakatning tezlik vektori aylanish o‘qiga perpendikulyar ($\vec{V} \perp \vec{\omega}$).

Jismning murakkab harakati Aa o‘q atrofidagi $\overline{\omega}$ -burchakli tezlikka ega bo‘lgan aylanma va aylanish o‘qiga perpendikulyarl bo‘lgan yo‘nalishdagi $\overline{V}$ - tezlik bilan ilgarilanma harakatlardan iborat bo‘lsin (3.75-shakl).



3.75-shakl.

Shakldan ko‘rinib turibdiki, bunday harakat (Aa aylanish o‘qiga perpendikulyarl bo‘lgan P tekislikka nisbatan) tekislikka parallel harakatdan iborat bo‘lib, XI bobda batafsil ko‘rib o‘tilgan. Agar A nuqtani qutb deb qabul qilsak, har qanday tekis harakat kabi qutb bilan birgalikdagi $\vec{V}_A = \vec{V}$ tezlik bilan ilgarilanma harakat va qutbdan o‘tuvchi Aa o‘q atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo‘lar ekan.

Ilgarilanma harakatdagi tezlik vektori $\vec{V}$-ni $\vec{\omega}'$ va $\vec{\omega}''$ lardan tashkil topgan aylanish jufti bilan almashtiramiz . Lekin $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, va $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ qiymatda olamiz.

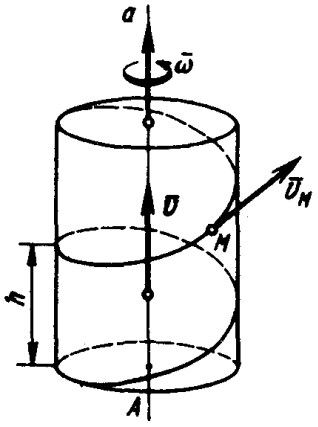
Bu holda aylanish juftlarining AP yelkasi v=ω'·AP tenglik orqali aniqlanadi, bundan

$$AP=V/\omega \qquad (3.120)$$

$\vec{\omega}$ va $\vec{\omega}'$ vektorlarining yig‘indisi nol bo‘ladi. U holda jismning harakatini oniy Pp o‘q atrofidagi $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ burchakli tezlik bilan aylanayotgan harakatdan iborat deb hisoblash mumkin. Ushbu natija ilgari boshqa usul bilan aniqlangan edi. P nuqta S yuzali kesim uchun oniy tezliklar markazidan iborat ekan, yana shuni tahkidlash lozimki jismning A*a* va Pp o‘qlar atrofidagi burilishlari bir xil $\vec{\omega}$-burchakli tezlik bilan sodir bo‘lar ekan, ya’ni aylanma harakat qutbga bog‘liq bo‘lmas ekan.

b) Vintsimon harakat **($\vec{V}$ ||$\vec{\omega}$).**

Jismning murakkab harakati A*a* o‘q atrofidagi $\vec{\omega}$ -burchakli tezlikka ega bo‘lgan aylanma va A*a* aylanish o‘qiga parallel bo‘lgan yo‘nalishdagi $\vec{V}$-tezlik bilan ilgarilanma harakatlardan iborat bo‘lsa (3.76-shakl), bunday harakat ***vintsimon harakat*** deb ataladi. A*a* o‘q ***vintning o‘qi*** deb ataladi. Agarda $\vec{\omega}$ va $\vec{V}$ vektorlari bir tomonga yo‘nalsa, biz qabul qilgan belgilashlarga asosan ***o‘ng vint*** bo‘ladi; agar qarama-qarshi tomonga yo‘nalsalar ***chap vint*** deb ataladi.



3.76-shakl.

Jismning aylanish o‘qi atrofidagi bir to‘la aylanishida ilgarilanma harakatda o‘tilgan masofa, ***vintning qadami*** deb ataladi va h -harfi bilan belgilanadi. Agar v va ω o‘zgarmas qiymatlar bo‘lsa, vintning qadami o‘zgarmas bo‘ladi. Bir marta

aylanishga ketgan vaqtni T -harfi bilan belgilasak, u holda $V \cdot T=h$ va $\omega \cdot T=2\pi$ bo‘ladi, bulardan

$$h=2\pi V/\omega \qquad (3.121)$$

ekanligini aniqlaymiz.

O‘zgarmas qadamli vintsimon harakatdagi jismning aylanish o‘qida yotmagan ixtiyoriy M nuqtasi vintsimon chiziq bo‘ylab harakatlanadi. Aylanish o‘qidan r -masofada joylashgan ixtiyoriy M nuqtaning tezligi, $\vec{V}$-tezlikka ega bo‘lgan ilgarilanma harakat va unga perpendikulyarl ravishda yo‘nalgan aylanma harakatdan oladigan $\omega \cdot r$ tezlikning geometrik yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Demak,

$$V_M=\sqrt{v^2+\omega^2 r^2}\,, \qquad (3.122)$$

$\vec{V}_M$-tezlik vektorining yo‘nalishi vint chizig‘iga urinma bo‘ylab yo‘naladi.

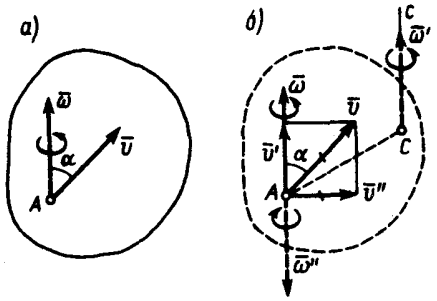
Agar vintsimon harakatdagi M nuqtaning trayektoriyasi joylashgan silindrsimon sirtni uning yasovchisi bo‘yicha kesib, so‘ngra yoyib yuborsak, u holda vint chiziqlari silindrning asosiga α burchak ostida

$$tg\alpha=h/2\pi r \qquad (3.123)$$

yo‘nalgan to‘g‘ri chiziqlarga aylanib qoladi.

d) Ilgarilanma harakat tezlik vektori aylanish o‘qi bilan ixtiyoriy burchak ostida yo‘nalgan bo‘lsa.

Bunday holdagi murakkab harakat (3.76-shakl) qattiq jismning umumiy harakatdan iborat bo‘ladi.



3.76-shakl.

Ilgarilanma tezlik vektori $\vec{V}$-ni (3.76-shakl,a) ikkita tashkil etuvchilarga ajratib yuboramiz. Ulardan biri $\vec{V}'$-bo‘lib, u ($V' = V\cos\alpha$) $\vec{\omega}$-vektor bo‘ylab yo‘naladi, ikkinchisi esa $\vec{V}''$($V'' = V \cdot \sin\alpha$)bo‘lib, $\vec{\omega}$-ga perpendikulyar ravishda yo‘naltiramiz. So‘ngra $\vec{V}''$-ni $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, va $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ lardan tashkil topgan aylaniish jufti bilan (3.76-shakl qarang) almashtiramiz. $\vec{\omega}''$ va $\vec{\omega}$ vektorlari o‘zaro

muvozanatlashuvchi bo‘lganligi uchun ularni tashlab yuboramiz. AC masofani (3.120) formula orqali aniqlaymiz:

$$AC = \frac{V''}{\omega} = \frac{V \cdot \sin\alpha}{\omega}. \qquad (3.124)$$

U holda jismga faqat ikkita burchakli tezlik vektorlari ta’sir etib, ulardan biri $\vec{\omega}'$-ga teng bo‘lgan burchakli tezlik, ikkinchisi esa ilgarilanma harakatning $\vec{V}'$-tezlik vektoridan iborat. Shu sababli, tezliklarning tarqalishi yuqorida ko‘rib o‘tilgan vintsimon harakatdagi tezliklarga o‘xshaydi, ya’ni Cc o‘q atrofidagi burchakli tezligi $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ ga teng bo‘lgan aylanma, hamda moduli $V' = V \cdot \cos\alpha$-ga teng aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘nalgan ilgarilanma harakatlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Yuqorida bajargan amallarimiz natijasida (3.76-shakl,b) qutbni A nuqtadan C nuqtaga ko‘chirildi. Natijalar shuni tasdiqlaydiki, qattiq jismning umumiy harakatida uning aylanma harakatining moduli ham, yo‘nalishi ham (ya’ni, $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$) saqlanib qolar ekan, lekin ilgarilanma harakatning ($\vec{V}' \neq \vec{V}$) tezlik vektori o‘zgarar ekan.

Erkin qattiq jismning umumiy harakatida $\vec{V}$,$\vec{\omega}$ va α qiymatlar har doim o‘zgarib turishi mumkin, shunga ko‘ra aylanish o‘qi Cc ham o‘z yo‘nalishini muntazam ravishda o‘zgartirib boradi, shu sababli bu o‘qni ***oniy vint o‘qi*** deb ataladi.

Shunday qilib, erkin qattiq jismning harakatini muntazam o‘zgarib boruvchi qator oniy vint o‘qlari atrofidagi aylanma harakatlarning yig‘indilaridan iborat ekan deb hisoblash mumkin bo‘ladi.

IV-BOB.

DINAMIKA.

BOBNING MAQSADI:

- Dinamika haqida tushuncha berish.
- Dinamikaning asosiy masalalari va vazifalarini aniqlash.
- Moddiy nuqta harakat differensial tehglamalarini tuzish.
- Moddiy nuqtaning turli harakatlari dinamikasini o‘rganish.
- Dinamikaning umumiy teoremalari bilan tanishtirish.
- Qattiq jismlar yoki mexanik sistema dinamikasini o‘rganish.

4.1. Moddiy nuqta harakatining dinamikasi.

Dinamika so‘zi ingliz tilidan olingan bo‘lib, “o‘zgaruvchan”, “harakat”, “aktiv”, “energiya” va boshqa juda ko‘p ma’nolarni bildiradi. Bu so‘z barcha fanlarda ishlatilib, o‘zgaruvchi jarayonlarning xususiyatlarini aniqlaydi.

Mexanika fanida ***dinamika*** *– kuch ta’siridagi jismlarning harakatini to‘liq o‘rganadigan qismiga aytiladi.* Chet el adabiyotida mexanikaning juda ko’p qismi, hatto butun “Nazariy mexanika” fani ham ba’zida “Dinamika” deb nomlanadi, sababi statika va kinematika qismlari dinamikaning xususiy xoli hisoblanadi. Nazariy mexanikaning dinamika qismi ham shartli ravishda ikkiga bo‘linadi:

1. Moddiy nuqta dinamikasi.
2. Qattiq jismlar (mexanik sistema) dinamikasi.

Dinamikaning asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

a. moddiy nuqtaga (jismga) ta’sir etuvchi kuchlarni aniqlash;
b. harakat differensiyal tenglamalarini tuzish;
d. harakat qonunini differensiyallash (hosila olish) yoki harakat differensial tenglamalarini integrallash yordamida dinamik kattaliklarni aniqlash.

Moddiy nuqta yoki qattiq jism harakati differensial tenglamalarini tuzishning ikki usuli mavjud:

1. Nyutonning 2-qonuni ifodasi-dinamikaning asosiy formulasi yordamida dekart koordinatalari ko‘rinishida.
2. Analitik mexanika bo‘limidagi Lagranj tenglamalari, kinetik energiya va umulashgan koordinatalar, ko‘rinishida.

4.1.1. Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari.

A. <u>DINAMIK KUCHLARNING TURLARI</u>. Kinematika qismida moddiy nuqtaning harakatini yuzaki, ya’ni uning massasi va ta’sir etuvchi kuchlarini e’tiborga olmasdan o‘rganildi. Dinamika esa bu kattaliklarni asosiy-hal qiluvchi kattalik deb qaraydi. Ayniqsa kuch tushunchasi dinamikada asosiy kattalik bo‘lib, uning qanday kattaliklarga bog‘liqligi juda muhim. Og‘irlik kuchi, ishqalanish kuchi va jismlarning o‘zaro tortishish kuchlari haqida I va II-boblarda ma’lumot berilgan. Shuning uchun dinamikada uchraydigan o‘zgaruvchan kuchlar haqida ma’lumot beramiz:

E l a s t i k l i k k u c h i . Bu kuch masofaga bog‘liq holda o‘zgaradi. Uning miqdori Guk[16] qonuniga binoan aniqlanadi, y’ani kuchlanish (kuchning yuza birligiga nisbati) deformatsiyaga to‘g‘ri proportsional bo‘ladi. Masalan, prujina elastiklik kuchining qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$F=c\cdot x \tag{4.1}$$

bu yerda x-prujinaning cho‘zilishi (yoki siqilishi); c -prujinaning bikrligi (qattiqlik koeffitsienti, SI sistemasida N/m bilan o‘lchanadi). Aslida elastiklik kuchi juda murakkab bo‘lib, cho‘zilish (yoki siqilish) ning x^2, x^3 va boshqa darajalariga bog‘liq. Nazariy mexanikada elastiklik kuchi faqat chiziqli funksiya ko‘rinishida olinadi. Bunga sabab, mashina-mexanizmlarda foydalanilgan prujinalar chiziqlilik chegarasigacha ishlaydi.

Y o p i s h q o q i s h q a l a n i s h k u c h i . Bu kuch jismning tezligiga bog‘liq bo‘lib, yopishqoq suyuq (yoki gazsimon) muhitdagi harakatlarda paydo bo‘ladi va quyidagicha ifodalanadi

$$R=\mu\cdot V\ , \tag{4.2}$$

bu yerda *V*- jismning tezligi, μ - qarshilik koeffitsienti. Qarshilik koeffitsiyenti muhit yopishqoqligiga bog‘liq bo‘lib, havo, suv va shunga o‘xshash yopishqoqligi kam muhitlar uchun (4.2) ifoda o‘rinli bo‘ladi.

Aerodinamik (gidrodinamik) qarshilik kuchi. Bunday kuch ham tezlikka bog‘liq bo‘lib, havoda yoki suv(suyuqlik)da harakatlanayotgan jismlarga ta’sir etadi. Amalda uning qiymatini quyidagi tenglama orqali aniqlanadi,

$$R=\frac{1}{2}c_x\cdot\rho\cdot S\cdot V^2 \ , \qquad (4.3)$$

bu yerda ρ -muhitning zichligi; S -jism shaklining harakat yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikka proyektsiyasining yuzasi (midel yuzasi); c_x - qarshilik koeffitsienti, o‘lchovsiz birlik bo‘lib, uning qiymati jismning shakliga va harakat yo‘nalishiga qarab, qanday holatda ekanligiga bog‘liq holda tajribalar yordamida topiladi.

B. <u>HARAKAT DIFFERENSIAL TENGLAMALARI.</u> Massasi *m* bo‘lgan moddiy nuqta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar ta’sirida uch o‘lchovli (2.1-shakl) fazodagi harakati differensiyal tenglamasi (1.12) tenglikdagi

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (4.4)$$

$\vec{a}$ - tezlanish o‘rniga $\vec{V}$ – tezlik yoki $\vec{r}$ – radius-vektorni qo‘yib, hosil qilinadi:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \ ; \qquad (4.5)$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \ . \qquad (4.6)$$

Yuqoridagi tengliklarni Oxyz-dekart koordinatalar sistemasiga va Mτnb-tabiiy o‘qlarga proyeksiyalab, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$ma_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,; \quad ma_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,; \quad ma_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,, \qquad (4.7)$$

yoki

$$ma_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}\,; \quad ma_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}\,; \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}\,. \qquad (4.8)$$

Urinma va normal tezlanishlarni $a_\tau = \frac{d\vec{V}}{dt}$; $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, ifodalar bilan almashtirib,

$$m\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}\,; \quad m\frac{V^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}\,; \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}\,. \qquad (4.9)$$

(4.5) va (4.6) ifodalar esa Oxyz-dekart koordinata sistemasiga nisbatan quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,; \quad m\frac{dV_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,; \quad m\frac{dV_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,, \quad (4.10)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,. \quad (4.11)$$

(4.4) tenglama ***dinamikaning asosiy tenglamasi*** deb ataladi. Sababi- dinamikaning barcha teoremalari va hulosalari ushbu formuladan keltirib chiqariladi. Hosil bo‘lgan (4.5-4.11) tenglamalar ***moddiy nuqta harakatining differensiyal tenglamalari*** deb ataladi.

Demak *moddiy nuqtaning harakatini o‘rganish uchun fazoda 3 ta tenglama, tekislikda 2 ta va to‘g‘ri chiziqli harakatda 1 ta tenglama tuzish kerak ekan.*

D. <u>DINAMIKANING IKKI ASOSIY MASALASI</u>. Yuqoridagi tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, dinamikada asosan 3 ta kattaliklar-massa-*m*, harakat qonuni-x,y,z, (yoki tezlik-*V*, yoki tezlanish-*a*) va ta’sir etuvchi kuch-*F* qatnashmoqda. Shuning uchun echilayotgan barcha masalalar ikki turga bo‘linadi:

a) moddiy nuqtaning massasi-*m* va harakat qonuni-x,y,z, (yoki tezlik-*V*, yoki tezlanish-*a*) berilgan bo‘lib, ta’sir etuvchi kuch-*F* ni aniqlash;

b) moddiy nuqtaning massasi-*m* va ta’sir etuvchi kuch-*F* berilgan bo‘lib, uning harakat qonuni-x,y,z, (yoki tezlik-*V*, yoki tezlanish-*a*) ni aniqlash lozim bo‘ladi.

Dinamikaning 1-masalasi asosan, harakat qonunini t vaqt bo‘yicha **differensiyallash** va tezlik, yoki tezlanishni aniqlab, massaga ko‘paytirib, kuchni toppish bo‘lsa, 2-masalasi, teskari masala hisoblanib, harakat qonuni-x,y,z, (yoki tezlik-*V*) ni aniqlash uchun tuziigan differnsial tenglamani **integrallashga** to‘g‘ri keladi.

Yuqoridagi mulohazalarni yaxshiroq tushunish uchun, aniq masalalar yechimini ko‘raylik.

1-masala: massasi m=200 kg bo‘lgan Yerning sun’iy yo‘ldoshi orbital tekislikda x = 4sint va y = 3cost (x,y-metrlarda) qonun asosida harakat qiladi. Unga ta’sir etuvchi kuchning qiymatini t=$\frac{\pi}{4}$ sek paytda toping.

Yechish: harakat qonunidan t vaqt bo‘yicha hosila olib, moddiy nuqtaning tezlanishi aniqlanadi

$$\begin{cases} a_x = x'' = -4\sin t; \\ a_y = y'' = -3\cos t. \end{cases} \qquad (1)$$

Massaga ko‘paytirib, ta’sir etuvchi kuch aniqlanadi:

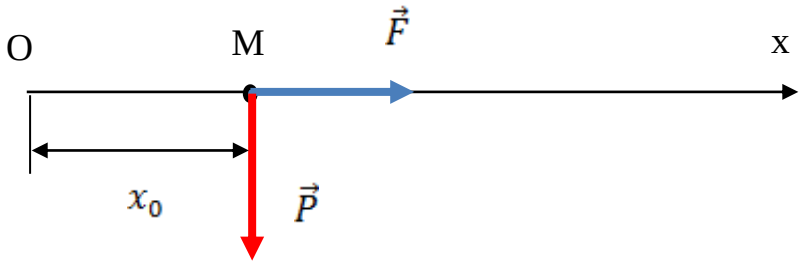
$$\begin{cases} F_x = ma_x = -800\sin t; \\ F_y = ma_y = -600\cos t. \end{cases}$$

Umumiy kuch esa

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = 100\sqrt{36 + 28sin^2 t}. \qquad (2)$$

t=$\frac{\pi}{4}$ sek paytda $F = 100\sqrt{50} = 707\ N.$

2-masala: massasi m = 2 kg bo‘lgan M moddiy nuqta F = 12t , N kuch ta’sirida gorizontal to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qiladi (4.1-shakl). Agar boshlang‘ich payt t=0 sek.da x_0=2 m, $V_0 = 3\ m/s.$ bo‘lsa, t=5 sek. dagi nuqtaning tezligi va bosib o‘tgan yo‘li topilsin.



4.1-shakl.

Yechish: M moddiy nuqtaning harakat differensiyal tenglamasi tuziladi

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_x \ ; \ \text{yoki} \quad m\frac{dV_x}{dt} = F \ ;$$

son qiymatlarini qo‘yib,

$$2\cdot\frac{dV_x}{dt} = 12t; \quad \text{yoki} \quad \frac{dV}{dt} = 6t.$$

Oxirgi ifodani tezlik va vaqt bo‘yicha integrallab,

$$\int_{V_0}^{V} dV = 6\int_0^t t\cdot dt\,,$$

$$V - V_0 = 3\cdot t^2, \qquad (1)$$

t = 5 sek. da $\quad V = V_0 + 3\cdot t^2 = 3 + 3\cdot 5^2 = 78\frac{m}{s}.$

$V = \frac{dx}{dt}$ deb, (1) ifodani yana bir marta integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^{x} dx = V_0\int_0^t dt + 3\int_0^t t^2\cdot dt\,,$$

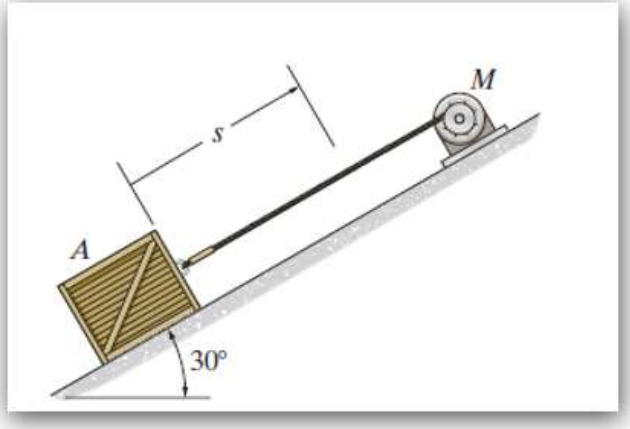
$$x = x_0 + V_0\cdot t + t^3. \qquad (2)$$

t = 5 sek. da $\quad x = 2 + 3\cdot 5 + 5^3 = 142\,m.$

Yuqoridagi masala yechimidan ko‘rinib turibdiki, integrallash jarayoni ta’sir etuvchi $\vec{F}$ kuchining murakkabligiga bog‘liq. Agar kuchning tarkibi juda murakkab bo‘lsa yoki uzilishlarga ega bo‘lgan funksiyadan iborat bo‘lsa, oliy matematikaning cheksiz yaqinlashish usullari yordamida maxsus kompyuter dasturlari asosida yechiladi.

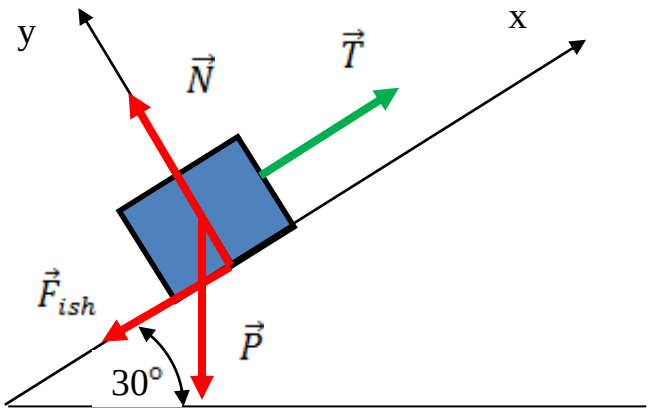
Ba’zi masalarda chegaraviy shartlar etarli bo‘lmasa noaniq integraldan foydalanishga to‘gri keladi. Shunga o‘xshash ba’zi hollarini ko‘raylik.

3-masala: (chet el adabiyotidan olindi [2]) massasi 20 kg li tinch holadagi A yukni M motor qiya tekislik bo‘ylab torta boshladi. Agar qiyalik α=30°, yuk va tekislik orasidai ishqalanish koeffisienti *f=0,3* va 3 sekund ichida motor yukni 6 metr masofaga tortgan bo‘lsa, po‘lat arqonda hosil bo‘lgan taranglik kuchini hisoblang (4.2-shakl).



4.2-shakl.

Yechish: A yuk 4 ta kuchlar ta'sirida harakat qiladi, P=mg - og'irlik kuchi, N-normal bosim kuchi, $F_{ish} = f \cdot N$ –ishqalanish kuchi va T –taranglik kuchi (4.3-shakl).



4.3-shakl.

Koordinata o'qlarini tanlab olib, tekislikdagi harakat differensiyal tenglamalarini tuzamiz:

$$m \cdot a_x = \sum_{k=1}^{4} F_{kx}; \quad \text{va} \quad m \cdot a_y = \sum_{k=1}^{4} F_{ky}, \qquad (1)$$

yoki $m \cdot a_x = T - F_{ish} - P\cos 60°$; va $m \cdot a_y = N - P\cos 30°$, (2)

bunda yukning tezlanishi

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + a_x \cdot t^2/2 \quad \text{formuladan}$$

($s_0 = 0,\ V_0 = 0$)ni hisobga olib,

$$a_x = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 6}{3^2} = 1{,}33\frac{m}{s^2}; \quad \text{va} \quad a_y = 0. \qquad (3)$$

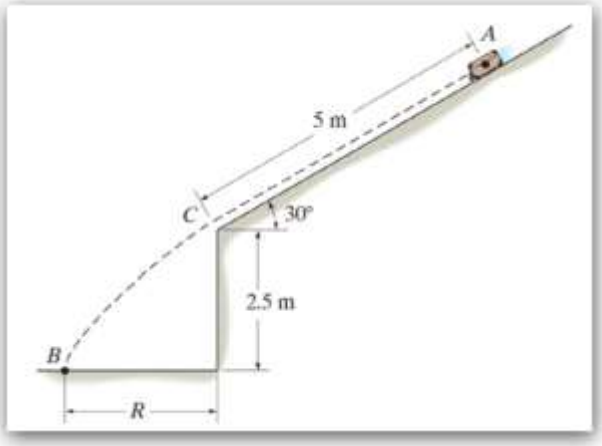
(2) tenglamalardan $N = P\cos 30° = 20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}866 = 170\ N$,

ishqalanish kuchi esa $F_{ish} = f \cdot N = 0{,}3 \cdot 170 = 51\ N$.

Demak polat arqonning taranglik kuchi

$T = m \cdot a_x + F_{ish} + P\cos 60° = 20 \cdot 1{,}33 + 51 + 20 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = 175{,}7\ N$.

4-masala: (chet el adabiyotidan olindi [2]) Massasi 60 kg bo'lgan chemodan (yo'l haltasi) qiya tekislikning A nuqtasida $V_A = 2\ m/s$ tezlik bilan 5 m masofa bosib o'tib, C nuqtadan CB egri chiziq bo'ylab erkin tushadi (4.4-shakl). Agar tekislikning qiyaligi α = 30°, AC yo'ldagi sirpanib ishqalanish koeffisiyenti *f* = 0,2 va C nuqtaning balandligi h = 2,5 m bo'lsa, AC masofani bosib o'tish vaqti t_1, C nuqtadagi tezlik V_C va uzoqqa uchish masofasi R topilsin.



4.4-shakl.

Yechish: Moddiy nuqtaning harakatini ikki qismga AC va CB qismga bo‘lib o‘rganamiz. AC qiya tekislikdagi to‘g‘ri chiziqli harakatda moddiy nuqtaga P = mg - og‘irlik kuchi, N – normal bosim, F_{ish} –sirpanib ishqalanish kuchi ($F_{ish} = f \cdot N$) ta’sir etadi (4.5-shakl). Az koordinata o‘qini tanlab olib, harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

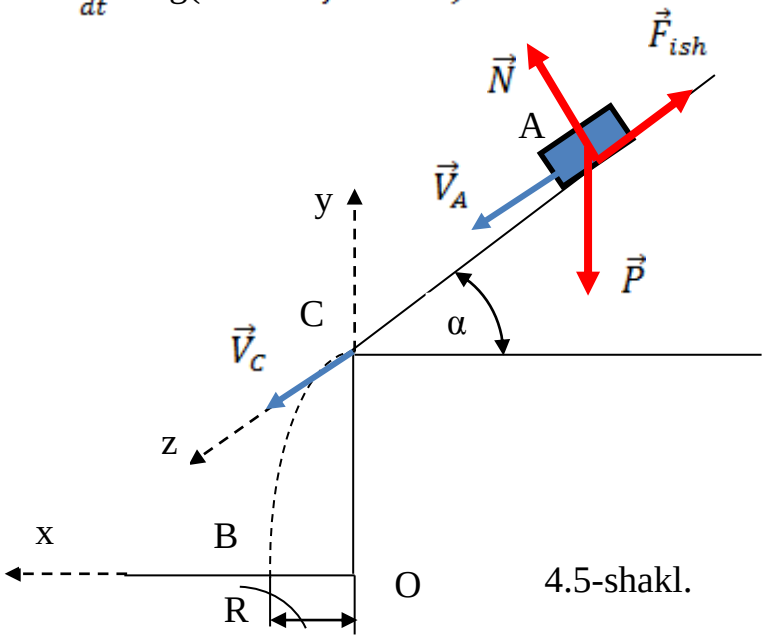
$$m \cdot \frac{dV_z}{dt} = \sum_{k=1}^{3} F_{kz}; \qquad \text{yoki} \qquad m \cdot \frac{dV_z}{dt} = P\sin\alpha - F_{ish}$$

bunda $V_z = V$, $F_{ish} = f \cdot N = f \cdot P\cos\alpha$ ni hisobga olib,

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = P\sin\alpha - f \cdot P\cos\alpha,$$

massaga bo‘lib yuborib,

$$\frac{dV}{dt} = g(\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)\ . \qquad (1)$$



4.5-shakl.

(1) tenglamani tezlik V va baqt t bo‘yicha integrallab,

$$V = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)t + C_1; \qquad (2)$$

$V = \frac{dz}{dt}$ ni hisobga olib, (2) tenglamani z va t bo‘yicha integrallaymiz

$$z = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (3)$$

interallash doimiylari C_1 va C_2 quyidagi boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi:

$$t = 0 \text{ sek. da} \qquad V = V_0 = V_A\ ; \qquad z = z_0 = 0\ . \qquad (4)$$

(4) ni (2) va (1) ga qo‘yib,

$$C_1 = V_A\ , \quad C_2 = 0.$$

Demak

$$V = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)t + V_A\ ; \qquad (5)$$

$$z = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_A t\ . \qquad (6)$$

Nuqta C ga kelgandagi chegaraviy shartlardan foydalanib, V_C va AC masofani bosib o‘tish uchun ketgan vaqt t_1 ni aniqlaymiz:

$$t = t_1 \text{sek. da} \qquad V = V_C\ ; \qquad z = AC = 5 \text{ m}. \qquad (7)$$

(7) ni (5) va (6) ga qo‘yib,

$$V_C = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\, t_1 + V_A\ ; \qquad (8)$$

$$AC = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\frac{{t_1}^2}{2} + V_A t_1. \qquad (9)$$

(9) dan $5 = 9{,}81\cdot(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)\frac{{t_1}^2}{2} + 2t_1$ kvadrat tenglamaning musbat ildizini olamiz, ya’ni $t_1 = 1{,}25$ sek, (8) ifodadan esa $V_C = 6$ m/s.

BC yo‘lda nuqtaga faqat P - og‘irlik kuchi ta’sir qiladi. Oxy o‘qlarini tanlab olib, BC egri chiziqli harakat differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$m\cdot\frac{dV_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\ ; \qquad \text{va} \qquad m\cdot\frac{dV_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\ ;$$

yoki $$m\cdot\frac{dV_x}{dt} = 0\ ; \qquad \text{va} \qquad m\cdot\frac{dV_y}{dt} = -P\ , \qquad (10)$$

m massaga bo‘lib, tezlik V va baqt t bo‘yicha integrallab

$$V_x = C_3; \qquad \text{va} \qquad V_y = -gt + C_4; \qquad (11)$$

$V_x = \frac{dx}{dt}$; va $V_y = \frac{dy}{dt}$ ni hisobga olib, (10) tenglamani x,y va t bo‘yicha integrallaymiz :

$$x = C_3 t + C_5; \quad \text{va} \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6. \qquad (12)$$

Integrallash doimiylarini, CB qism uchun, quyidagi boshlang‘ich shartlardan aniqlaymiz:

$$t = 0 \text{ da} \quad \begin{cases} x_0 = 0; & y_0 = OC = h = 2{,}5\ m; \\ V_{ox} = V_C \cos\alpha; & V_{oy} = V_C \sin\alpha. \end{cases} \qquad (13)$$

(13) ni (11) va (12) ga qo‘yib, $C_3 = V_C \cos\alpha$; $C_4 = V_C \sin\alpha$; $C_5 = 0$; $C_6 = 2{,}5\ m$;

Demak

$$x = V_C\, t \cos\alpha; \quad \text{va} \quad y = -\frac{gt^2}{2} + V_C t \sin\alpha + h, \qquad (14)$$

CB qismidagi trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun oxirgi ifodalardan t vaqtni yo‘qotamiz:

$$y = -\frac{gx^2}{2V_C{}^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha + h. \qquad (15)$$

(15) tenglamaga B nuqtaning koordinatalari $x = x_B = R$, va $y = y_B = 0$, qoyib, hosil bo‘lgan kvadrat tenglamaning musbat ildizini olamiz:

$$R = 5{,}61 \text{ m}.$$

4.1.2. Moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari.

Yuqoridagi masalalar yechish jarayonidan ma’lum bo‘ldiki, moddiy nuqta-ning harakati differensial tenglamasini tuzish, integrallash, integral doimiylarini aniqlash va nom’lum dinamik kattaliklarni topish harakatni to‘la tekshirishga yordam bersa ham juda ko‘p vaqt va hisoblashlar talab etadi. Qo‘yilgan muammoni tez va qisqa yo‘l bilan hal etishga dinamikaning umumiy teoremalari yordam beradi. Dinamikaning umumiy teoremalari quyidagilardan iborat:

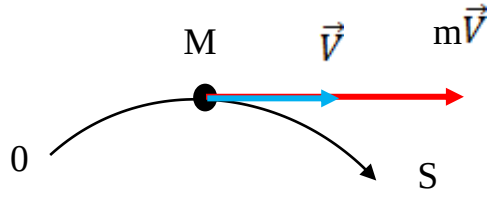
1. Moddiy nuqta harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema.
2. Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema.
3. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema.

Umumiy teoremalarda nuqta harakatini ixtiyoriy ikki A va B joyidagi shartlar yordamida tenglama tuziladi hamda noma'lum aniqlanadi. Ularning kamchiligi (cheklanganligi) shundaki, faqat 1 ta tenglama tuziladi va 1 ta noma'lum topiladi.

4.1.3.Moddiy nuqta harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema.

A. <u>MODDIY NUQTANING HARAKAT MIQDORI</u>. ***Moddiy nuqtaning harakat miqdori*** deb, nuqtaning massasini tezlik vektoriga ko'paytmasiga teng bo'lgan vektor qiymatga aytiladi:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{V} \quad . \qquad (4.12)$$



4.6-shakl.

Harakat miqdori nuqtaning tezlik vektori $\vec{V}$ bilan bir xil yo'nalgan bo'lib, qiymati uning massasiga bog'liq (4.6-shakl). Birligi esa [kg· m/s] da o'lchanadi. Harakat miqdori xuddi kinetik energiyaga o'xshab, dinamikada muhim ahamiyatga ega. Ayniqsa bir necha nuqtalar (mexanik sistema) dinamikasida bu yaqqol ko'rinadi.

B. <u>MODDIY NUQTAGA TA'SIR ETUVCHI KUCHNING IMPULSI.</u>

Kuchning elementar impulsi deb, kuch vektori $\vec{F}$ ni kuch ta'sir etayotgan biror kichik vaqt oraligi Δt ga ko'paytmasiga teng bo'lgan vektor kattalikka aytiladi:

$$\Delta \vec{S} = \vec{F} \cdot \Delta t \, , \qquad (4.13)$$

bunda $\Delta t = t_1 - t_0$.

Agar kuch miqdori va yo'lishi jihatidan o'zgarmasa,

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot \tau \, , \qquad (4.14)$$

kuch miqdori va yo'lishi jihatidan vaqt davomida o'zgaruvchan bo'lsa, integral formuladan aniqlanadi:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot dt. \qquad (4.15)$$

Kuch impulsining birligi [$N\cdot sek$] bo‘lib, dinamikada kuchning ta’sir doirasini aniqlaydi. Agar ta’sir etuvchi kuchlar n-ta bo‘lsa, $\vec{F}$ kuchini ularning teng ta’sir etuvchisi deb qarash mumkin:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \qquad (4.16)$$

D. MODDIY NUQTA HARAKAT MIQDORINING O‘ZGARISH TEOREMASI.

Teorema: *Moddiy nuqta harakat miqdorining biror vaqt ichidagi o‘zgarishi ta’sir etuvchi kuchlarning impulsiga teng.*

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \vec{S}. \qquad (4.17)$$

Isboti: dinamikaning asosiy formulasi

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

dan $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ va massani differensial belgisi ostiga kiritib va (4.16) ni hisobga olib,

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}, \qquad (4.18)$$

tezlik va vaqt bo‘yicha integrallab,

$$\int_{V_0}^{V_1} d(m\vec{V}) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt,$$

demak $$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \vec{S}.$$

(4.18) ifodadan teoremaning differensial shaklini aytish mumkin: *moddiy nuqta harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan hosila ta’sir etuvchi kuchlarning bosh vektoriga teng.*

Amaliy masalalar yechishda yuqoridagi vektor tengliklar dekart koordinata o‘qlariga proyeksiyalanadi:

$$\begin{cases} mV_{1x} - mV_{0x} = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt\,; \\ mV_{1y} - mV_{0y} = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt\,; \\ mV_{1z} - mV_{0z} = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt\,. \end{cases} \qquad (4.19)$$

Demak, *moddiy nuqta harakat miqdorining biror o‘qlarga nisbatan proyeksiyalari-ning o‘zgarishi ta’sir etuvchi kuchning mazkur o‘qqa proyeksiyasi impulsiga teng ekan.*

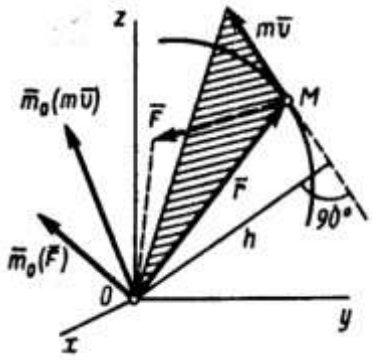
4.1.4.Moddiy nuqta harakat miqdori momentining o‘zgarishi haqidagi teorema.

Aylanma harakatlarning ko‘p qismida harakat miqdori momenti muhim ahamiyatga ega. Sababi ta’sir etayotgan kuchning aylantirish effekti ham statika qismida moment deb olingan edi. Ushbu mavzuda moddiy nuqtaning harakat miqdori momenti ta’sir etuvchi kuchlar momentiga teng ekanligini isbotlaymiz.

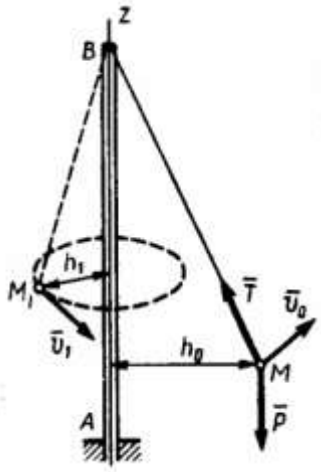
Moddiy nuqtaning biror markazga nisbatan harakat miqdori momenti deb, nuqta radius-vektori $\vec{r}$ ning harakat miqdoriga vektorli ko‘paytmasiga teng bo‘lgan vektor qiymatga aytiladi:

$$\vec{m}_O(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}\,. \qquad (4.20)$$

Uning yo‘nalishi $\vec{r}$ va $m\vec{V}$ vektorlarning tekisligiga perpendikulyar bo‘ladi (4.7-shakl)



4.7-shakl.



4.8-shakl.

Buni yaxshiroq tushunish uchun kuch momentining vektor ifodasini esga olamiz:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (4.21)$$

kuch momenti vektori ham $\vec{r}$ va $\vec{F}$ vektorlari tekisligiga perpendikulyar yo‘nalgan bo‘ladi (4.7-shakl).

Teorema: *moddiy nuqta harakat miqdori momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila unga ta’sir etuvchi kuchlarning mazkur nuqtaga nisbatan momentiga teng.*

Isboti: moddiy nuqta harakat miqdori momentining (4.20) ifodasidan t vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{d[\vec{m}_O(m\vec{V})]}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \times \vec{V} + \vec{r} \times m\vec{a},$$

parallel vektorlarning vektor ko‘paytmasi no‘lga teng $\vec{V} \times \vec{V} = 0$ va $m\vec{a} = \vec{F}$ dan

$$\frac{d[\vec{m}_O(m\vec{V})]}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (4.22)$$

Demak

$$\frac{d[\vec{m}_O(m\vec{V})]}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}). \qquad (4.23)$$

Amaliy masalalar yechishda (4.23) vektor formula dekart koordinata o‘qlariga nisbatan momentlar ko‘rinishida ifodalanadi:

$$\begin{cases} \frac{d[m_x(m\vec{V})]}{dt} = M_x(\vec{F}); \\ \frac{d[m_y(m\vec{V})]}{dt} = M_y(\vec{F}); \\ \frac{d[m_z(m\vec{V})]}{dt} = M_z(\vec{F}). \end{cases} \qquad (4.24)$$

Demak, *moddiy nuqta harakat miqdorining biror o‘qga nisbatan momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila ta’sir etuvchi kuchlarning mazkur o‘qga nisbatan momentiga teng ekan.*

Hususiy holda moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuchning biror o‘qga nisbatan momenti nolga teng bo‘lsa, masalan $M_z(\vec{F}) = 0$, u holda

$$m_z(m\vec{V}) = const. \qquad (4.25)$$

Xulosa: *moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlarning biror o‘qga nisbatan momentlari nolga teng bo‘lsa, uning mazkur o‘qga nisbatan harakat miqdori momenti o‘zgarmas bo‘ladi.*

4.1.5. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema.

A. MODDIY NUQTANING KINETIK ENERGIYASI.

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb, uning massasi va tezlik kvadrati ko‘paytmasiga teng bo‘lgan skalyar miqdorga aytiladi:

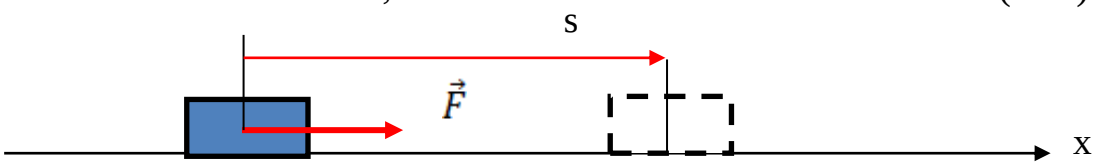
$$T = \frac{1}{2} \cdot mV^2 \ . \qquad (4.26)$$

Kinetik energiya tushunchasi ham asosiy dinamik kattalik hisoblanib, juda ko‘p teorema va qoidalarni isbotlashda qo‘llaniladi. Uning birligi [kg·m^2/s^2] yoki [$N \cdot m$].

B. MODDIY NUQTAGA TA’SIR ETUVCHI KUCHNING BAJARGAN ISHI.

O‘zgarmas kuchning bajargan ishi deb, kuch miqdorini bosib o‘tgan yo‘lga ko‘paytmasiga teng bo‘lgan skalyar miqdorga aytiladi (4.9-shakl):

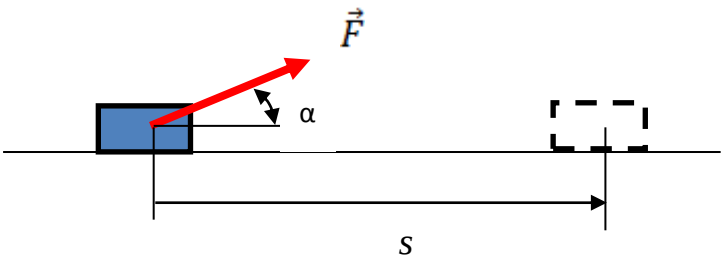
$$A = F \cdot s \ , \qquad (4.27)$$



4.9-shakl.

Agar kuch $\vec{F}$ va bosib o‘tilgan yol *s* orasidagi burchak α 0° dan farqli bo‘lsa, kuch vektorini yolga proyeksiyalashga to‘g‘ri keladi(4.10-shakl):

$$A = F \cdot \cos\alpha \cdot s \ , \qquad (4.28)$$



4.10-shakl.

(4.28) formuladan ko‘rinib turibdiki, α = 90° bo‘lsa, kuchning bajargan ishi nolga teng,

$A = 0$. Masalan, normal bosim kuchi har doim harakat tekisligiga perpendikulyar bo‘lgani uchun

$$A = N \cdot s \cdot \cos 90° = 0.$$

Agar $90° < \alpha < 180°$ intervalda bo‘lsa, kuchning bajargan ishi manfiy qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, ishqalanish kuchining ishi doim manfiy bo‘ladi:

$$A = -F_{ishq} \cdot s\ .$$

Egri chiziqli harakatda o‘zgarmas kuchning bajargan elementar ishi kuch vektori va elementar ko‘chish vektorlarining skalyar ko‘paytmasiga teng (4.11-shakl):

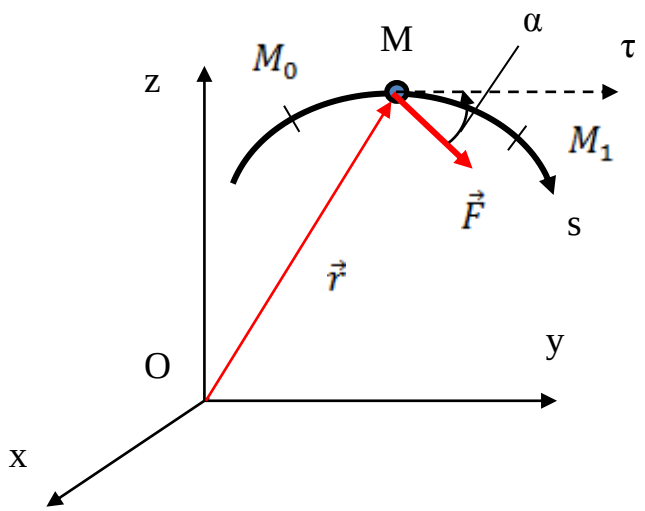
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}\ , \qquad (4.29)$$

bunda s = M_0M - bosib o‘tilgan yo‘l, $d\vec{s}$- esa kichik vaqt oralig‘idagi elementar yo‘l (ko‘chish, siljish).

O‘zgaruvchan kuchning bajargan elementar ishi ham (4.29) formula orqali aniqlanadi va M_0M_1 yo‘ldagi ishning haqiqiy qiymati integral yordamida hisoblanadi:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau \cdot ds\ , \qquad (4.30)$$

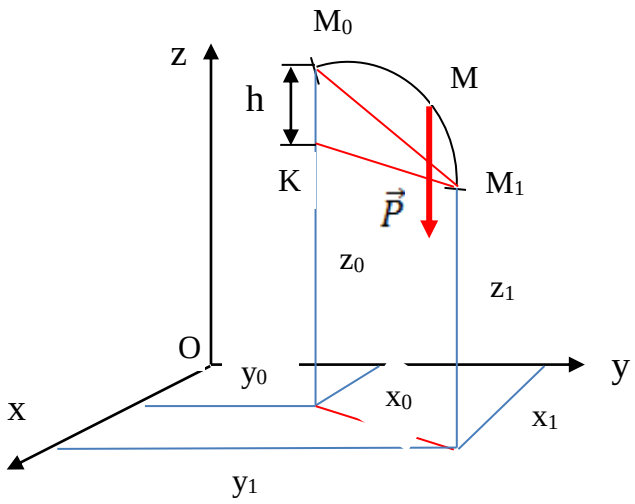
bu yerda $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$.



4.11-shakl.

Yuqoridagi tushunchalarni mustahkamlash uchun moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan ba’zi bir kuchlarning bajargan ishini hisoblanishini ko‘raylik:

1. ***Og‘irlik kuchining bajargan ishi.*** Og‘irlik kuchini o‘zgarmas deb olib, M_0M_1 yo‘ldagi ishining qiymati hisolash uchun (4.29) formuladan foydalanamiz (4.12-shakl).



4.12-shakl.

$$A = \vec{P} \cdot d\vec{s} = P \cdot \cos(\angle KM_0M_1) \cdot d\vec{s},$$

bunda M_0M_1 oralikni cheksiz kichik deb, $d\vec{s} = \overline{M_oM_1} \approx M_0M_1$ va $M_0M_1 \cdot \cos(\angle KM_0M_1) = h$ ga tengligidan

$$A = P \cdot h \ .$$

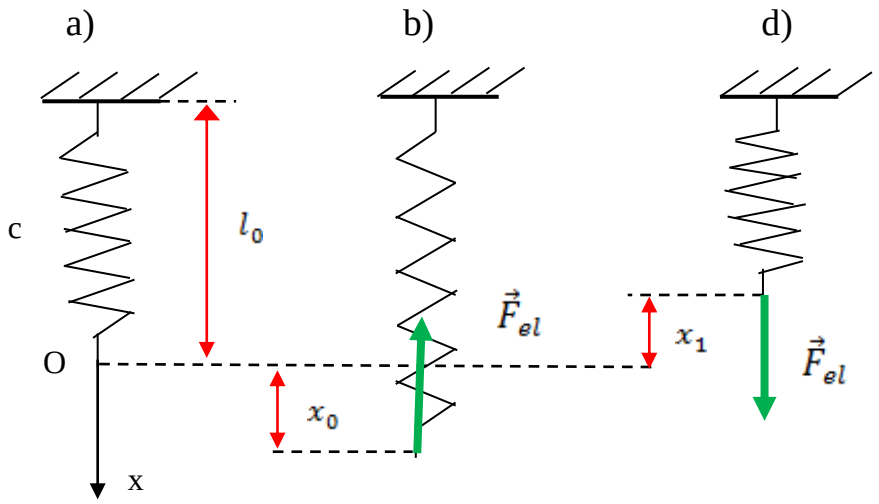
Ma’lumki, og‘irlik kuchi har doim vertikal boylab yo‘nalgan va harakat yuqoriga bo‘lganda bu kuch ish bajarishga qarshilik qilgani uchun (-), pastga tushganda ish bajarishga yordam bergani uchun (+) ishora olinadi:

$$A = \pm P \cdot h = \pm mgh \ . \qquad (4.31)$$

2. ***Prujina elastiklik kuchining bajargan ishi:*** Prujinaning elastiklik kuchi o‘zgaruvchan kuch hisoblanib, cho‘zilishning (yoki siqilishning) chiziqli funksiyasi ko‘rinishida olinadi (4.13-shakl)

$$F_{el} = |c \cdot x| \ , \qquad (4.32)$$

bu yerda *c*- prujinaning bikrligi, *x*- prujinaning cho‘zilishi (yoki siqilishi).



4.13-shakl.

(4.32) formulani (4.30) ga qo‘yib (4.13,b-shakl) uchun:

$$A = -c\int_{x_0}^{x_1} x \cdot dx = \frac{c}{2}(x_0{}^2 - x_1{}^2) \qquad (4.33)$$

hosil qilamiz. Bu yerda x_0 , x_1 – prujinaning boshlang‘ich va oxirgi cho‘zilishi (siqilishi), l_0 – esa prujinaning erkin holatdagi uzunligi.

3. *Ishqalanish kuchining bajargan ishi:*

a) Sirpanib ishqalanish kuchi har doim harakat yo‘nalishiga teskari bo‘lgani uchun uning bajargan ishi manfiy bo‘ladi :

$$A = -F_{ish} \cdot s = -f \cdot N \cdot s. \qquad (4.34)$$

b) Dumalab ishqalanish kuchining bajargan ishi ham manfiy bo‘lib, faqat bosib o‘tilgan yo‘l o‘rniga $s = R \cdot \varphi$, ya’ni g‘ildirak radiusi –R va aylanish burchagi - φ ga almashtiriladi xolos:

$$A = -F_{dum} \cdot s = -\frac{\delta}{R} \cdot N \cdot R \cdot \varphi = -\delta \cdot N \cdot \varphi. \qquad (4.35)$$

D. MODDIY NUQTA KINETIK ENERGIYASINING O‘ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA.

Faraz qilaylik, massasi *m* bo‘lgan M moddiy nuqta $\vec{F}$ kuchi ta’sirida fazoda harakatlansin (4.11-shakl). Uning M_o nuqtadagi tezligi V_0 bo‘lib, M_1 nuqtaga V_1 tezlik bilan etib kelgan bo‘lsin. Moddiy nuqta kinetik energiyasi bilan ta’sir etuvchi kuch orasidagi munosabatni aniqlash uchun M_oM_1 yo‘ldagi harakat differensiyal tenglamasi (4.8) ni urinma o‘qqa nisbatan tuzaylik:

$$m \cdot a_\tau = F \cdot cos\alpha \quad , \quad \text{yoki} \quad m \cdot \frac{dV}{dt} = F \cdot cos\alpha.$$

Ushbu tenglikdagi urinma tezlanishni quyidagicha yozib olamiz,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \cdot \frac{dV}{ds}.$$

Natijada, yuqoridagi tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi,

$$mV \cdot \frac{dV}{ds} = F \cdot cos\alpha, \quad \text{yoki} \quad mV \cdot dV = F \cdot cos\alpha \cdot ds.$$

m massani differensiyal ostiga kiritib,

$$d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = F \cdot cos\alpha \cdot ds,$$

tezlik va vaqt bo‘yicha integral olsak:

$$\int_{V_0}^{V_1} d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = \int_0^s F \cdot cos\alpha \cdot ds,$$

demak $$\frac{1}{2}m{V_1}^2 - \frac{1}{2}m{V_0}^2 = A. \qquad (4.36)$$

Teorema: *moddiy nuqta kinetik energiyasining biror yo‘ldagi o‘zgarishi, ta’sir etuvchi kuchning shu yo‘ldagi bajargan ishiga teng ekan.*

Yuqoridagi nazariy ma’lumotlarni mustahkamlash uchun amaliy masalalar ko‘ramiz. Oldingi mavzudagi 4-masalaning 1-qismini qisqa yo‘l, ya’ni umumiy teoremalarni qo‘llab yechamiz.

1-masala: (chet el adabiyotidan olindi [x]) Massasi 60 kg bo‘lgan chemodan (yo‘l haltasi) qiya tekislikning A nuqtasida $V_A = 2\ m/s$ tezlik bilan 5 m masofa bosib o‘tadi (4.4-shakl). Agar tekislikning qiyaligi α = 30°, AC yo‘ldagi sirpanib ishqalanish koeffisiyenti *f* = 0,2 bo‘lsa, AC masofani bosib o‘tish vaqti t_1 va C nuqtadagi tezlik V_C topilsin.

Yechish: moddiy nuqta harakat differensiyal tenglamasini tuzib, uning integralini hisoblab vaqt ketkazmay, harakat miqdori (4.19) va kinetik energiya teoremalarini (4.36) AC yo‘lni bosib o‘tish uchun qo‘llaymiz :

$$mV_C - mV_A = \int_0^{t_1} F_z dt. \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m{V_C}^2 - \frac{1}{2}m{V_A}^2 = A. \qquad (2)$$

bu yerda F_z- ta'sir etuvchi kuchlarning Az o'qidagi proyeksiyalari yig'indisi;

A- ta'sir etuvchi kuchlarning AC yo'ldagi bajargan ishlarining yig'indisi:

$$F_z = P\cos 60° - F_{ish} = mg\cos 60° - fmg\cos 30° = mg(\cos 60° - f\cos 30°);$$

$$A = P\cos 60° \cdot AC - F_{ish} \cdot AC = mg \cdot AC(\cos 60° - f\cos 30°).$$

Bu ifodalarni (1) va (2) ga qo'yib,

$$mV_C - mV_A = mgt_1(\cos 60° - f\cos 30°);$$

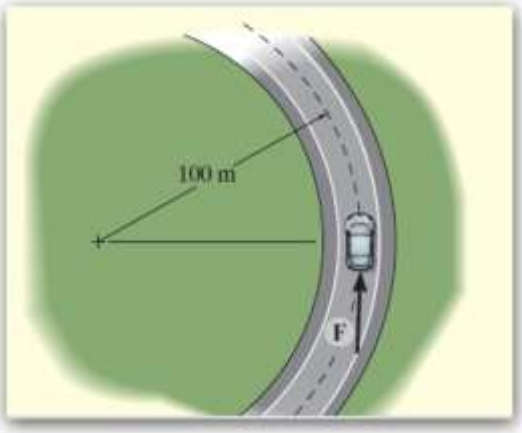
$$\frac{1}{2}mV_C{}^2 - \frac{1}{2}mV_A{}^2 = mg \cdot AC(\cos 60° - f\cos 30°);$$

m massaga bo'lib yuborib, t_1 va V_C larni topamiz:

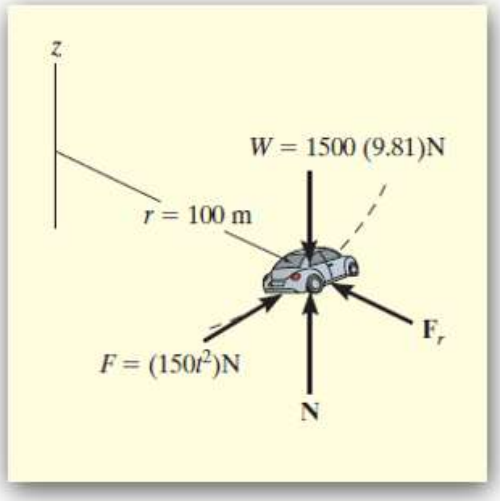
$$V_C = \sqrt{2g \cdot AC(\cos 60° - f\cos 30°) + V_A{}^2} = 6 \text{ m/s};$$

$$t_1 = \frac{V_C - V_A}{g(\cos 60° - f\cos 30°)} = 1{,}25 \text{ s}.$$

2-masala: (chet el adabiyotidan olindi [x]) Egri chiziqli yo'lda ketayotgan avtomobilga $F = 150t^2$ *N* motor kuch ta'sir qiladi (4.14,a-shakl). Agar yo'lning egrilik radiusi 100 *m*, avtomobilning massasi *m = 1500 kg* va boshlang'ich tezligi 5 *m/s* bo'lsa, *t =5s* dan keyin avtomobil qancha tezlikka erishadi?



a)



b)

4.14-shakl.

Yechish: avtomobilni moddiy nuqta deb qabul qilib, harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\frac{d[m_z(m\vec{V})]}{dt} = M_z(\vec{F}),$$

ya'ni moddiy nuqta z o'qiga nisbatan harakat miqdori momentining biror vaqt ichidagi o'zgarishi ta'sir etuvchi kuchlarning shu o'qqa nisbatan momentlarining yig'indisiga teng.

$$m_z(mV_1) - m_z(mV_0) = \int_0^{t_1} F \cdot r \cdot dt,$$

yoki

$$mV_1 r - mV_0 r = \int_0^{t_1} 150t^2 \cdot r \cdot dt$$

r ga qisqartirib,

$$mV_1 - mV_0 = 50t^3,$$

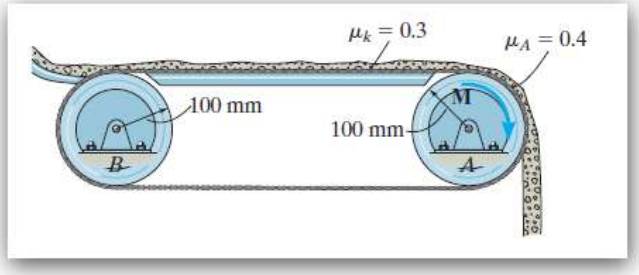
bundan

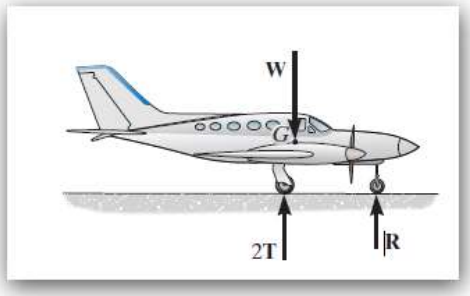
$$V_1 = \frac{mV_0 + 50t^3}{m} = \frac{1500 \cdot 5 + 50 \cdot 125}{1500} = 9{,}17\ m/s.$$

4.1.6. Erkin bo'lmagan moddiy nuqtaning harakati.

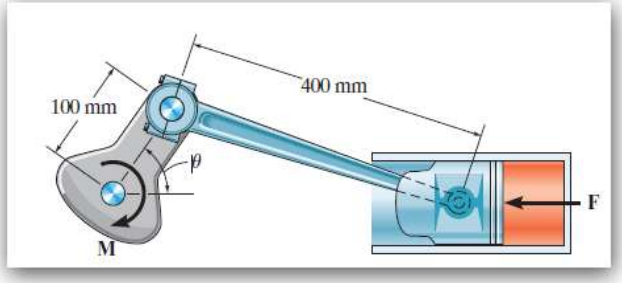
Nazariy mexanikada ***erkin jism (erkin moddiy nuqta)*** deb, fazoning ixtiyoriy joyiga harakatlana oladigan jismga aytiladi. Lekin tabiatdagi va texnikadagi barcha jismlar bir-biriga bog'liq boladi. Demak, harakatlari biror to'siq (chek, boshqa jism va h.k.) bilan chegaralangan jism ***erkin bo'lmagan jism*** deb ataladi. Masalan, ko'mir rudasining lentali konveyerdagi harakati, yerga qo'nayotgan samolyotning gorizontal harakati, krivoship-polzunli mexanizda porshenining harakati va bir-biriga bog'langan ikki jismning harakati (4-15,a,b,d,e-shakl).

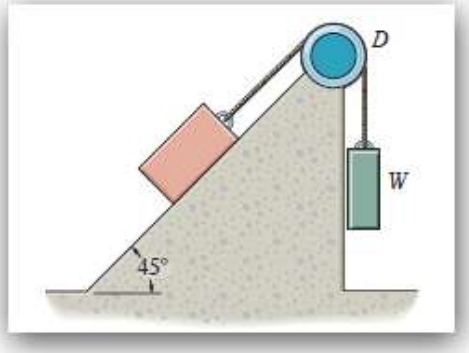
a) b)





d) e)





4.15-shakl.

Nazariy mexanikada harakati ko‘rilayotgan jism (moddiy nuqta) erkin jismga aylantirib olinadi, ya’ni harakatga to‘sqinlik qilayotgan bog‘lanishlar olib tashlanib, ta’sir kuchlari qatoriga bog‘lanish reaksiya va ishqalanish kuchlari qo‘shiladi. Shuning uchun jismga ta’sir qiluvchi kuchlar ikki xilga ajratiladi:

- aktiv kuchlar;
- passiv kuchlar.

Jismga ta’sir qilib, unga harakat bera oladigan kuchlar ***aktiv kuchlar*** deb ataladi. Masalan, og‘irlik kuchi, prujinaning elastiklik kuchi, gazlarning bosim kuchlari va h.k.

Jismga ta’sir qilib, unga harakat bera olmaydigan kuchlar ***passiv kuchlar*** deb ataladi. Masalan, bog‘lanish reaksiya kuchlari, ishqalanish kuchlari va h.k. Demak, *jismni erkin jismga aylantirish ucun* ***aktiv kuchlar*** *qatoriga* ***passiv kuchlarni*** *qo‘shish kerak bo‘ladi.* Shuning uchun dinamikaning asosiy tenglamasi (4.4) erkin bo‘lmagan jism uchun quyidagich bo‘ladi:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,p} \quad . \qquad (4.37)$$

Ko‘pchilik adabiyotlarda bu ifoda soddaroq ko‘rinishda yoziladi:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} + \vec{N}, \qquad (4.38)$$

bu yerda $\vec{N}$- bog‘lanish reaksiya kuchlari.

Qolgan barcha dinamika tenglamalariga (4.6-4.11) oxirgi yigindi mos ravishda qo‘shiladi.

4.1.7. Moddiy nuqtaning nisbiy harakati.

Klassik mexanikaning barcha qonunlari va tenglamalari “qo‘zg‘almas” deb olingan, “inersiyal” sanoq sistemalariga nisbatan chiqarilgan. Lekin tabiatda va mashina-mexanizmlarda ko‘pincha jismning (moddiy nuqtaning) “qo‘zg‘aluvchan” o‘qlarga nisbatan harakati, ya’ni “nisbiy” harakatini tekshirishga to‘g‘ri keladi. Demak, Yer shariga nisbatan harakatlanayotgan nuqtaning harakatini tekshirish uchun dinamikaning asosiy tenglamasiga (4.4)

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Yer sharining o‘z o‘qi atrofidagi va quyosh atrofidagi aylanma harakatlarning ta’sirini qo‘shish kerak ekan. Buning uchun tezlanish vektori $\vec{a}$ o‘rniga kinematikadagi absolyut tezlanish ifodasini (3.101)

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{ko'ch} + \vec{a}_{nis} + \vec{a}_{kor} \ .$$

almashtirish kerak. U holda yuqoridagi dinamikaning asosiy formulasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$m\vec{a}_{ko'ch} + m\vec{a}_{nis} + m\vec{a}_{kor} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

yoki

$$m\vec{a}_{nis} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k - m\vec{a}_{ko'ch} - m\vec{a}_{kor},$$

inersiya kuchlarini bitta harf bilan belgilab,

$$\vec{F}_{ko'ch}{}^{in} = -m\vec{a}_{ko'ch} \quad \text{va} \quad \vec{F}_{kor}{}^{in} = -\ m\vec{a}_{kor}, \qquad (4.39)$$

oxirgi natijaga kelinadi:

$$m\vec{a}_{nis} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{F}_{ko'ch}{}^{in} + \vec{F}_{kor}{}^{in} \ . \qquad (4.40)$$

Demak: *nuqtaning nisbiy harakatida mexanikaning barcha tenglamalari va teoremalari, xuddi nuqtaning absolyut harakatidagi kabi tuziladi, lekin nuqtaga boshqa jismlarning ta’sirlaridan iborat bo‘lgan kuchlar qatoriga* ***ko‘chirma*** *va* ***koriolis inersiya*** *kuchlarini ham qo‘shish lozim.*

Ba’zi bir xususiy hollar yuz berishi mumkin:

1. Agar ko‘chirma harakat ilgarilanma bo‘lsa $\vec{\omega}_{ko'ch} = 0$, koriolis tezlanish

$$\vec{a}_{kor} = 2\vec{\omega}_{ko'ch} x \vec{V}_{nis} = 0$$

nolga teng va (4.40) ifoda quyidagi ko‘rinish oladi:

$$m\vec{a}_{nis} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{F}_{ko'ch}^{\ in}. \qquad (4.41)$$

2. Agar ko‘chirma harakat ilgarilanma va to‘g‘ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo‘lsa,

$$\vec{F}_{ko'ch}^{\ in} = 0; \qquad \vec{F}_{kor}^{\ in} = 0, \qquad (4.42)$$

u holda (4.40) tenglama $m\vec{a}_{nis} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ (4.43)

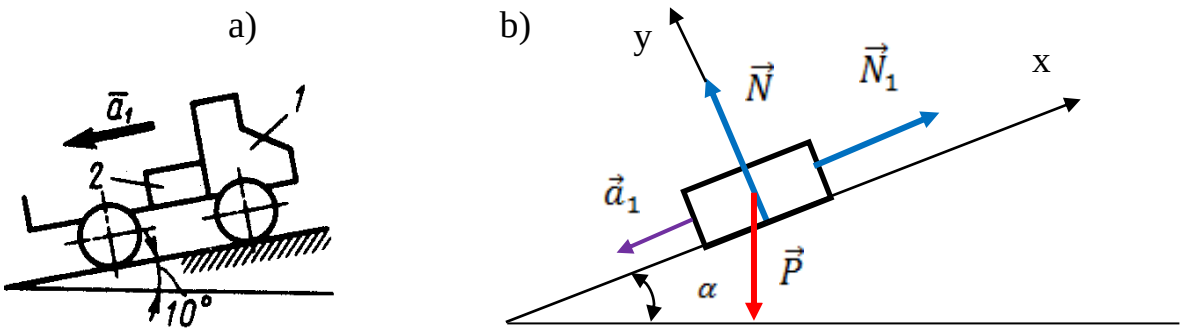
shaklga ega bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, (4.43) tenglama xuddi (4.4) – dinamikaning asosiy tenglamasiga shaklan o‘xshash, shuning uchun Galiley tomonidan ochilgan klassik mexanikaning “***Nisbiylik prinsipi*** ” kelib chiqadi: *Hech qanday kuzatishlar va tajribalar jismning tinch holatini yoki to‘g‘ri chiziqli tekis harakatini aniqlab berolmaydi, chunki hamma harakatlar nisbiydir.*

3. Agar nisbiy harakat nolga teng bo‘lsa, $\vec{a}_{nis} = 0$ va $\vec{V}_{nis} = 0$ ga teng bo‘lib, (4.40) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{F}_{ko'ch}^{\ in} + \vec{F}_{kor}^{\ in} = 0. \qquad (4.44)$$

Oxirgi tenglama ***nisbiy muvozanat tenglamasi*** deb ataladi.

1-masala: Yuk avtomobili -1 a_1=2m/s^2 o‘zgarmas sekinlanish bilan qiyalikka ko‘tarilayapti. Avtomobil yukxonasidagi massasi 200kg bo‘lgan 2-yuk avtomobil old kabina devoriga va yukxona asosiga qanday bosim kuchlari hosil qilishini aniqlang (4.16,a-shakl).



4.16-shakl.

Yechish: 2-yukning 1-avtomobilga nisbatan nisbiy harakat differensial tenglamasini xy o‘qlarga nisbatan tuziladi:

$$m_2 a_x = \text{-Pcos80}^\circ + N_1;$$

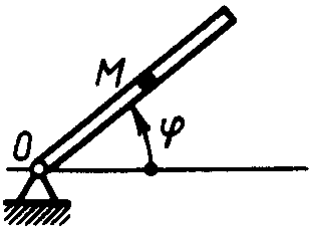
$$m_2 a_y = \text{-Pcos10}^\circ + N,$$

bunda $a_x = -a_1$; $a_y = 0$, birinchi tenglamadan

$$N_1 = \text{Pcos80}^\circ - m_2 a_1 = m_2(g\cos 80^\circ - a_1) = -59{,}3\ N;$$

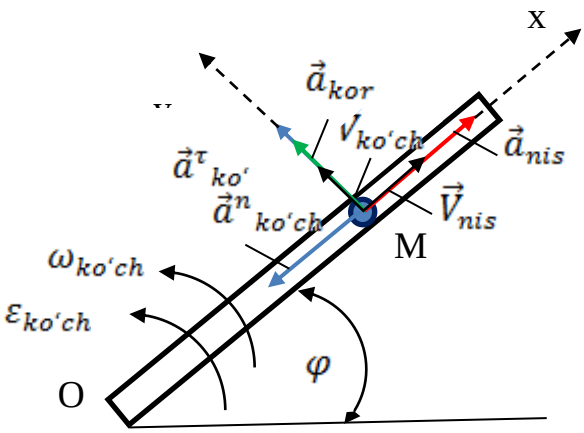
$$N = \text{Pcos10}^\circ = m_2 g\cos 10^\circ = 1932\ N.$$

2-masala: Massasi m=0,1kg bo‘lgan M sharcha O nuqta atrofida $\varphi=t^2$ qonun bo‘yicha aylanayotgan naychada $OM=S=0{,}2t^3$ qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakat qilsa, sharchaga ta’sir qilayotgan t=1s paytdagi ko‘chirma, koriolis inersiya kuchlarining qiymatini va sharchaning naychaga bosim kuchini toping.



4.17-shakl.

Yechish: 1) M sharchaning murakkab harakati kinematikasi tahlil qilinadi (4.18-shakl):



4.18-shakl.

M sharchaning naycha bo‘ylab nisbiy harakati tezligi va tezlanishi aniqlanadi:

$$V_{nis} = S' = (0{,}2t^3)' = 0{,}6t^2; \qquad a_{nis} = V'_{nis} = (0{,}6t^2)' = 1{,}2t.$$

t=1 sek.da $V_{nis} = 0{,}6\frac{m}{s}$; $a_{nis} = 1{,}2\frac{m}{s^2}$.

M sharchaning O o‘q atrofida OM naycha bilan ko‘chirma aylanma harakati burchakli tezligi va burchakli tezlanishi aniqlanadi:

$$\omega_{ko'ch} = \varphi' = 2t; \qquad \varepsilon_{ko'ch} = \omega'_{ko'ch} = 2,$$

t=1 sek.da $\omega_{ko'ch} = 2\,\frac{1}{s}$; $\varepsilon_{ko'ch} = 2\,\frac{1}{s^2}$.

M sharchaning O o‘q atrofida OM naycha bilan ko‘chirma aylanma harakati chiziqli tezligi va chiziqli tezlanishi aniqlanadi:

$$V_{ko'ch} = OM \cdot \omega_{ko'ch} = 0{,}2t^3 \cdot 2t = 0{,}4t^4;$$

$$\begin{cases} a^{\tau}{}_{ko'ch} = OM \cdot \varepsilon_{ko'ch} = 0{,}2t^3 \cdot\ 2 = 0{,}4t^3; \\ a^{n}{}_{ko'ch} = OM \cdot \omega_{ko'ch}{}^2 = 0{,}2t^3 \cdot\ 4t^2 = 0{,}8t^5, \end{cases}$$

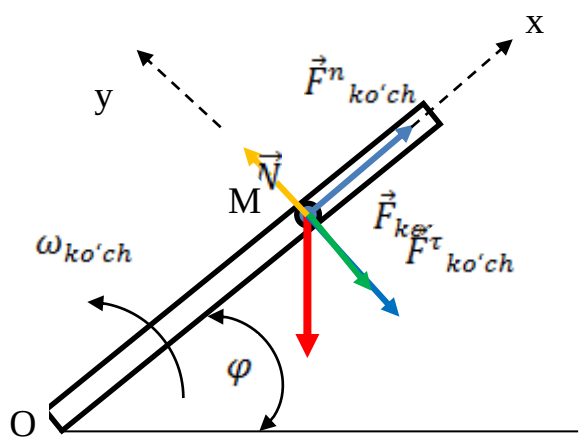
t=1 sek.da $V_{ko'ch} = 0{,}4\frac{m}{s}$; $a^{\tau}{}_{ko'ch} = 0{,}4\frac{m}{s^2}$; $a^{n}{}_{ko'ch} = 0{,}8\,m/s^2$.

M sharchaning koriolis tezlanishi aniqlanadi:

$$a_{kor} = 2\omega_{ko'ch} \cdot V_{nis} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}6 = 2{,}4\frac{m}{s^2},$$

uning yo‘nalishi esa $\vec{\omega}_{ko'ch}$ va $\vec{V}_{nis}$ vektorlariga ⊥ bo‘lib, Jukovskiy qoidasi bo‘yicha aniqlanadi (4.18-shakl).

3) M sharchaning murakkab harakati dinamikasi tahlil qilinadi (4.19-shakl):



4.19-shakl.

Ko‘chirma inersiya kuchlarining qiymati aniqlanadi:

$$\begin{cases} F^{\tau}{}_{ko'ch} = m \cdot a^{\tau}{}_{ko'ch} = 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04\ N; \\ F^{n}{}_{ko'ch} = m \cdot a^{n}{}_{ko'ch} = 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}08\ N; \end{cases}$$

Koriolis inersiya kuchining qiymati aniqlanadi:

$$F_{kor} = m \cdot a_{kor} = 0{,}1 \cdot 2{,}4 = 0{,}24\ N.$$

3) Shakl tekisligidagi xy koordinata o‘qlariga nisbatan nisbiy harakat differensiyal tenglamalari tuziladi:

$$\begin{cases} ma_{x\,nis} = -P sin\varphi + F^{n}{}_{ko'ch}; \\ ma_{y\,nis} = -P cos\varphi + N - F^{\tau}{}_{ko'ch} - F_{kor}, \end{cases}$$

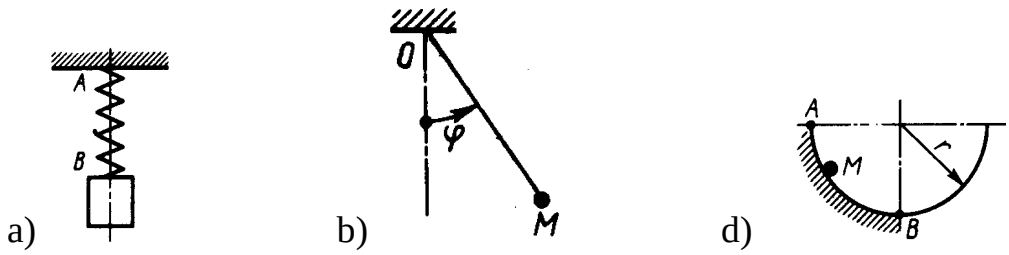
oxirgi tenglikdan $a_{y\,nis} = 0$ deb olib, normal bosim kuchi topiladi:

$$N = P cos\varphi + F^{\tau}{}_{ko'ch} + F_{kor} = 0{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot cos1 + 0{,}04 + 0{,}24 = 0{,}81\ N.$$

4.1.8. Moddiy nuqtaning tebranma harakati.

Tebranma harakat nazariyasi tabiat va texnikaning qator ilmiy asoslarini o‘rganishda ishlatiladi. Turli sohalardagi tebranma harakatlar bir-biridan shakli, mazmuni va mohiyati bilan farq qiladi. Lekin tebranma harakatning asosiy qonunlari hamma joyda bir xil qolar ekan. ***Tebranma harakat*** deb, davriy takrorlanuvchi, muvozanat atrofidagi kichik siljish (ko‘chish, o‘zgarish)larga aytiladi. Masalan, tabiatdagi fasl almashinishlari va dengiz to‘lqinlarining o‘zgarishi, zoologiyadagi qushlarning miqratsiyasi, radiotexnikadagi to‘lqinlarning tarqalishi vaqt birligi ichida bir xil qonuniyatlarga boysunadi. Ularni o‘rganish, qonunlarini aniqlash va tenglama-larini tuzish hamda echimlarini topish mazkur fan rivojida katta yutuq hisoblanadi.

Texnikada ham tebranma harakat juda ahamiyatli bo‘lib, mashina-mexanizm-larning ko‘p qismi uning qonunlariga bo‘ysunadi. Masalan, prujinaga osilgan yukning tebranma harakati, matematik mayatnikning tebranishi yoki yarim tsilindr ishidagi sharchaning harakatlari (4.20-shakl) va h.k.



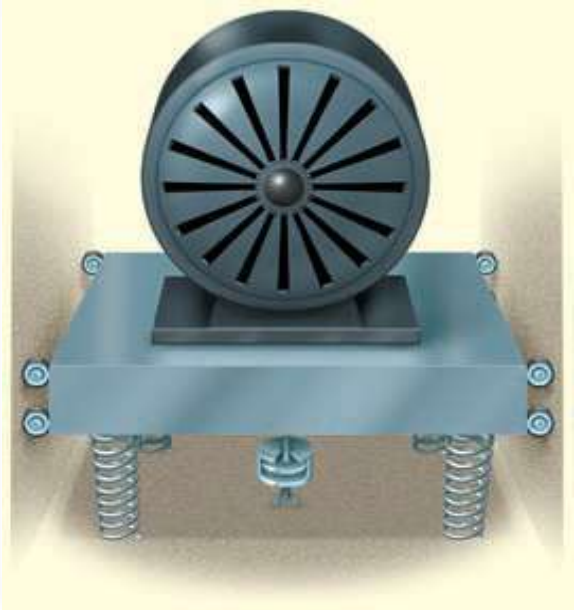
a) b) d)

4.20-shakl.

Mexanikada esa “Tebranishlar nazariyasi” alohida fan hisoblanadi. Bu fanning asoslari mashina-mexanizmlar va ularning silkinishlari, seysmik silkinishlar va bino-inshootlar dinamikasida juda katta ahamiyat kasb etadi. Zamonaviy texnikalarning juda ko‘p qismlari prujinalar, ressorlar va pnevmoporshenli qaytargichlar yordamida ishlaydi. Masalan, poyezd vagonlarining prujinalari (4.21,a-shakl), pnevmoporshenli vibrostend (4.21,b-shakl), elektrozichlagich (4.21,d-shakl) va elektroventilyator (4.21,e-shakl) to‘g‘ri chiziqli tebranma harakatga misol bo‘ladi.

a) b)

d) e)



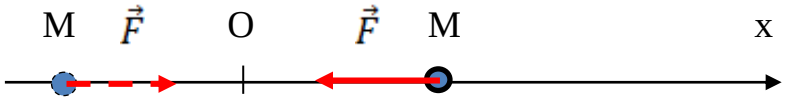
4.21-shakl.

Nazariy mexanika fanida tebranma harakatning eng soddasi- bir to‘g‘ri chiziqda ro‘y beradigan- ***to‘g‘ri chiziqli tebranma harakatning*** uch xili o‘rganiladi:

- muhit qarshiligisiz ***erkin tebranma harakat***;
- muhit qarshiligi ta’siridagi ***so‘nuvchi tebranma harakat***;
- ***majburiy tebranma harakat***.

A. <u>ERKIN TEBRANMA HARAKAT.</u>

Faraz qilaylik, massasi *m* bo‘lgan M moddiy nuqtaga faqat bitta- *muvozanatlovchi (muvozanatga qaytaruvchi)* $\vec{F}$ kuchi qo‘yilgan (4.22-shakl).



4.22-shakl.

Muvozanatlovchi $\vec{F}$ kuchining yo‘nalishi o‘zgaruvchan bo‘lib, har doim muvozanat markazi O ga tomon yo‘nalgan va qiymati esa OM = x masofaga to‘g‘ri proporsional bo‘lsin:

$$F = -cx\,, \qquad (4.45)$$

bunda *c-proporsionallik koeffisienti* (masalan, *c-prujinaning bikrligi, qattiqligi*).

Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat differensial tenglamasini Ox o‘qiga nisbatan tuzamiz:

$$ma_x = -F, \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = -cx\,,$$

massaga bolib yuborib va

$$\frac{c}{m} = k^2 \quad \text{belgilash kiritib,}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (4.46)$$

ni hosil qilamiz. (4.46) tenglama ***erkin tebranma harakat differensial tenglamasi*** deb ataladi.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (4.47)$$

esa erkin tebranma harakatning ***doiraviy chastotasi (takrorlanish soni)*** deb ataladi. (4.46) differensial tenglamaning umumiy yechimi oliy matematika fanidagi kabi Eyler usulida yechiladi:

$$x = e^{\lambda t}, \qquad (4.48)$$

bu yerda $\lambda = a + bi$ –kompleks son, a va b haqiqiy sonlar, $i = \sqrt{-1}$. (4.48) ni (4.46) qo‘ysak va $e^{\lambda t}$ga qisqartirib, harakteristik tenglama hosil qilinadi:

$$\lambda^2 + k^2 = 0;$$

bundan $\lambda = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki$, ($a = 0;\ b = \pm k$) demak umumiy yechim quyidagi shaklga ega bo‘lar ekan:

$$x = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \qquad (4.49)$$

bunda C_1, C_2 – integral doimiylari. Ular quyidagi boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi:

$$t = 0\ sek.\ \text{da}\ x_0 = -\lambda_{st} = -\frac{mg}{c}\ ;\ V_0 = \dot{x}_0, \qquad (4.50)$$

bu yerda x_0, λ_{st} –boshlang‘ich statik cho‘zilish, V_0 –boshlang‘ich tezlik. U holda (4.49) dan t bo‘yicha hosila olib,

$$\dot{x} = C_1 k \cos(kt) - C_2 k \sin(kt) \qquad (4.51)$$

(4.50) ni (4.49) va (4.51) ga qo‘yib, $C_1 = V_0/k$; $C_2 = x_0$, demak

$$x = \frac{V_0}{k}\sin(kt) + x_0 \cos(kt). \qquad (4.52)$$

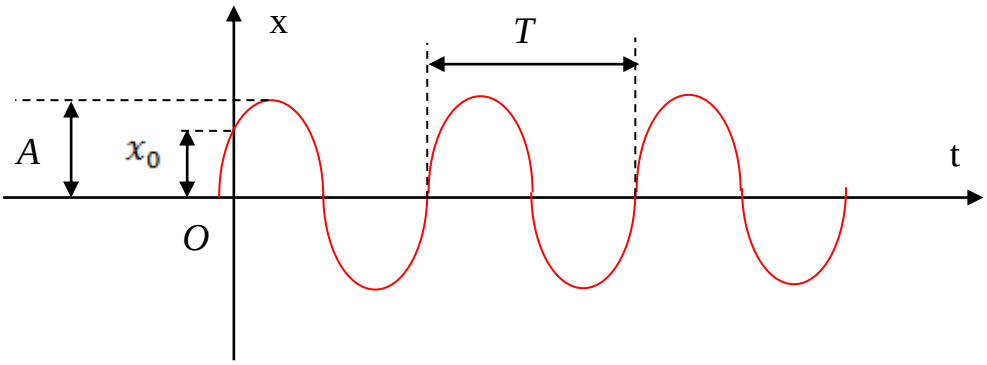
(4.52) tenglik ***erkin tebranma harakat qonuni*** deb ataladi. Uning grafigini osonroq chizish uchun

$$\frac{V_0}{k} = A\cos\alpha;\ \text{va}\quad x_0 = A\sin\alpha, \qquad (4.53)$$

belgilash kiritib,

$$x = A\sin(kt + \alpha) \qquad (4.54)$$

hosil qilinadi (4.23-shakl).



4.23-shakl.

(4.53) tengliklarning ikkala tomonlarini kvadratga ko‘tarib, hadma-had qo‘shib, A ni topish mumkin

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{V_0}^2}{k^2}}\,. \qquad (4.55)$$

A-***erkin tebranishlar amplitudasi*** (muvozanat holatidan eng katta og‘ishi) deb ataladi. Bir marta to‘la tebranishga ketgan vaqt esa

$$T = \frac{2\pi}{k} \qquad (4.56)$$

erkin tebranishlar davri deb ataladi. $(kt + \alpha) = \varphi$ ifoda ***tebranish fazasi*** deb ataladi. α esa ***boshlang‘ich faza*** deb ataladi. Bu kattaliklar tebranma harakatning xossalarini aniqlashda yordam beradi. Boshlang‘ich faza α ning qiymatini aniqlash uchun (4.53) dagi ikkinchi tenglikni birinchi tenglikka hadma-had bo‘linadi

$$\alpha = arctg\,\frac{kx_0}{V_0}\,. \qquad (4.57)$$

Yuqoridagi tengliklardan ***erkin tebranma harakatning*** quyidagi ***xossalari*** kelib chiqadi:

1) amplituda ***A*** va boshlang‘ich faza ***α***, boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga ***bog‘liq bo‘ladi***;

2) chastota ***k*** va o‘z navbatida davr ***T*** boshlang‘ich (yoki chegaraviy) shartlarga ***bog‘liq bo‘lmaydi*** .

Demak, erkin tebranma harakatni ***boshqarish (o‘zgartirish)*** uchun jism (moddiy nuqta) ning massasi ***m*** va prujinaning bikrligi ***c*** asosiy kattaliklar hisoblanar ekan.

B. SO‘NUVCHI TEBRANMA HARAKAT.

Erkin tebranma harakat biror muhit (havo, suyuqlik, gaz va h.k.) ta’sirida yuz bersa, uning xossalari o‘zgarib, so‘nishi yoki butunlay boshqacha harakatlarga (davriy bo‘lmagan-***aperiodik***) aylanib ketishi mumkin. Bunga asosan, muhitning qarshilik kuchi (yopishqoqligi, suyuq-qo‘yiqligi, zichligi va h.k.) ning qiymatiga bog‘liq. Muhitning qarshilik kuchlari ham murakkab bo‘lib, uning fizik-kimyoviy hususiyatlariga bog‘liq. Mexanikada muhit qarshiligi soddaroq tarzda, harakat tezligi orqali aniqlanadi:

a) yopishqoqligi kam, suyuqroq muhitlar uchun $\vec{R} = -\mu\vec{V}$, ya’ni tezlikka proporsional;

b) yopishqoqligi yuqori, qo‘yiqroq muhitlar uchun $R = \mu V^2$, ya’ni tezlik kvadratiga proporsional.

Faraz qilaylik, massasi *m* bolgan M moddiy nuqta muhit qarshilik kuchi $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ ta’sirida tebranma harakatda bo‘lsin. Uning harakat differensiyal tenglamasini tuzamiz (4.23-shakl):

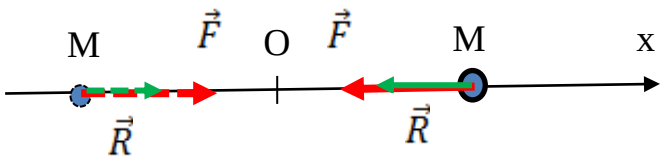
$$ma_x = -F - R, \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = -cx - \mu V,$$

massaga bo‘lib yuborib va

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n \quad \text{belgilash kiritib,}$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (4.58)$$

ikkinchi tartibli bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.



4.24-shakl.

(4.58) tenglama ***so‘nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasi*** deb ataladi.

Bunda $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ –***erkin tebranma harakat doiraviy chastotasi,***

$$n = \frac{\mu}{2m}; \qquad (4.59)$$

esa ***so'nuvchi tebranma harakatning qarshilik koeffitsienti*** deb ataladi. (4.58) tenglamani ham Eyler usulida umumiy yechimini aniqlaymiz. (4.48) ni (4.58)ga qo'yib, harakteristik tenglamani hosil qilamiz:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$, demak, so'nuvchi tebranma harakatning umumiy yechimi $\boldsymbol{n}$ va $\boldsymbol{k}$ larning qiymatiga qarab, uch xil ko'rinishda bo'ladi:

a) $k > n$, -kichik qarshiliklar holi, $\lambda = -n \pm \sqrt{k^2 - n^2}i$, umumiy yechimi

$$x = e^{-nt}\left(C_1 sin\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 cos\sqrt{k^2 - n^2}t\right). \quad (4.60)$$

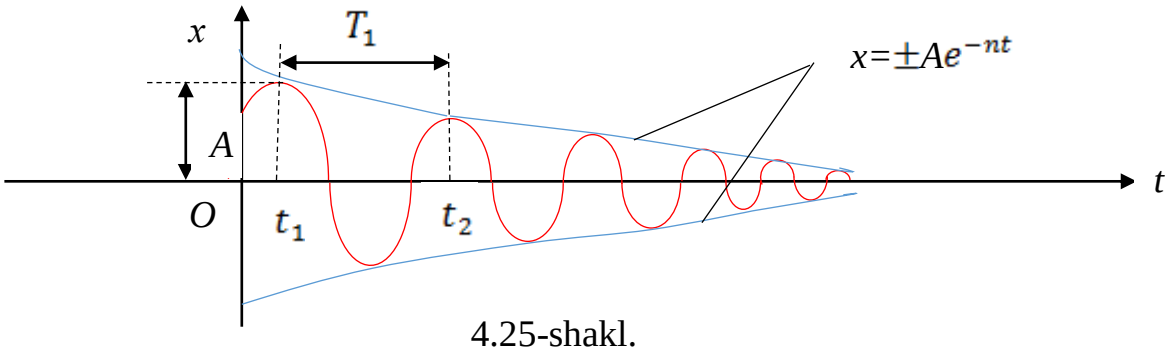
Integral doimiylarini

$$C_1 = Acos\alpha \text{ va } C_2 = Asin\alpha$$

deb belgilab, quyidagini hosil qilamiz:

$$x = A\, e^{-nt} sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha) \quad (4.61)$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, so'nuvchi tebranma harakat grafigi e^{-nt}-exponensial va trigonometrik (sin,cos) funksialarning ko'paytmasidan iborat bo'ladi (4.25-shakl).



4.25-shakl.

So'nuvchi tebranma harakatni aniqlovchi asosiy kattaliklar ***tebranish davri***

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} \quad (4.62)$$

va ***so'nish dekrementi***

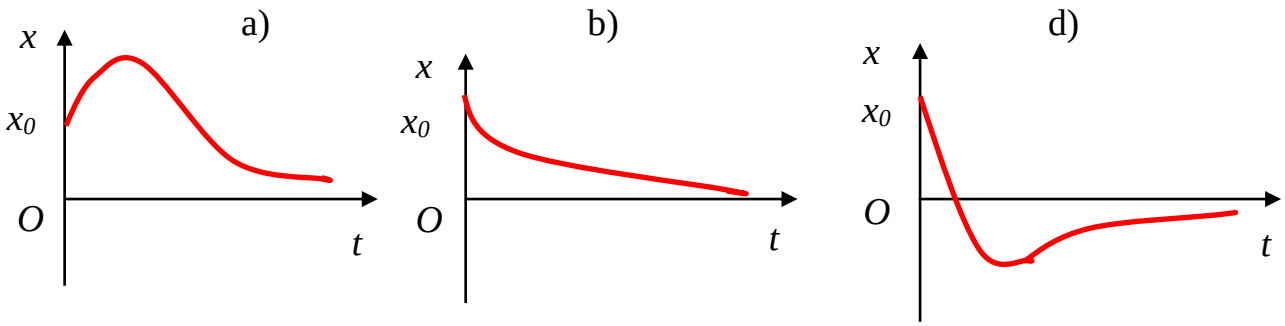
$$\nu = e^{-nT_1} \quad (4.63)$$

bo'lib, nT_1 kattalik esa ***logarifmik dekrement*** deb ataladi.

b) $k < n$, -katta qarshiliklar holi, $\lambda = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}i$, umumiy yechimi

$$x = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}) . \qquad (4.64)$$

Bu harakat davriy harakat bo‘lmagani uchun ***aperiodik – davriy bo‘lmagan harakat*** deb ataladi. Uning grafigi turlicha bo‘lib, *t* vaqt o‘tishi bilan $x \to 0$ (4.26-shakl).



4.26-shakl.

d) $k = n$ bo‘lganda $\lambda_1 = \lambda_2 = -n$ bo‘ladi va umumiy echim

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) . \qquad (4.65)$$

Ushbu holat ***kritik holat*** deb ataladi va juda kam uchraydi. Uning grafigi ham davriy bo‘lmagan 4.26-shakldagi kabi tasvirlanadi.

Demak, *so‘nuvchi tebranma harakat vaqt o‘tishi bilan nolga yaqinlashib borar ekan, uning tez yoki sekin bo‘lishi* ***m-nuqta massasiga, c-prujinaning bikrligiga va μ-muhit qarshiligiga*** bog‘liq ekan.

D. MAJBURIY TEBRANMA HARAKAT.

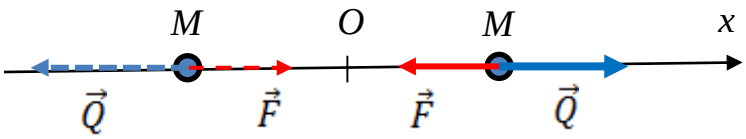
Tebranma harakat qilayotgan moddiy nuqtaga biror garmonik kuch (davriy takrorlanuvchi, trigonometrik funksiyalarga bog‘liq kuch) ta’sir etsa, bunday harakat ***majburiy tebranma harakat*** deb ataladi. Majburiy tebranma harakat tabiatda va texnikada juda ko‘p uchraydi. Majburiy tebranma harakatni hosil qiluvchi kuch ***majburlovchi (uyg‘otuvchi) kuch*** deb ataladi va uning ko‘rinishi turlicha bo‘ladi, masalan, zilzila paytidagi seysmik kuchlar, beton quyishdagi vibratorlarnig va qattiq devorlarni teshishda ishlatiladigan perforatorlarning

elektromagnit kuchlari va h.k. Shuning uchun majburiy tebranma harakatni o‘rganish, kerakli joylarda undan foydalanish, insonlarga va bino-inshootlarga zararli holatlarda uning ta’sirini kamaytirish dolzarb masala hisoblanadi.

Faraz qilaylik, massasi *m* bo‘lgan M moddiy nuqtaga prujinaning elastiklik kuchi $F = -cx$ va

$$Q = H\sin(pt) \qquad (4.66)$$

ko‘rinishdagi uyg‘otuvchi kuch tasir qilsin. Bunda ***H-uyg‘otuvchi kuchning amplitudasi***, ***p- uyg‘otuvchi kuchning chastotasi*** deb ataladi. U holda bunday harakatning differentsiyal tenglamasi quyidagicha tuziladi (4.27-shakl):



4.27-shakl.

$$ma_x = -F + Q\,, \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt),$$

massaga bo‘lib yuborib va

$$\frac{c}{m} = k^2\,, \quad \frac{H}{m} = h \quad \text{belgilash kiritib,}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt) \qquad (4.67)$$

ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan differentsiyal tenglama hosil bo‘ladi. (4.67) tenglama ***majburiy tebranma harakatning differentsiyal tenglamasi*** deb ataladi. Uning umumiy yechimi ikki qismdan iborat:

$$x = x_1 + x_2\,,$$

x_1 – bir jinsli erkin tebranma harakat differentsiyal tenglamasining (4.46) umumiy yechimi, x_2 –xususiy yechim. Hususiy yechimni aniqlash uchun (4.67) ga

$$x_2 = a\sin(pt) + b\cos(pt)$$

ifodani qo‘yib, *a* va *b* noma’lum koeffitsiyentlar topiladi:

$$\dot{x}_2 = ap\cos(pt) - bp\sin(pt),$$

$$\ddot{x}_2 = -ap^2\sin(pt) - bp^2\cos(pt),$$

$a = \frac{h}{k^2-p^2}$ va $b = 0$. U holda

$$x_2 = \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt). \qquad (4.68)$$

(4.68) ifoda ***majburiy tebranma harakat qonuni*** deb ataladi.

$$B = \frac{h}{k^2-p^2} \qquad (4.69)$$

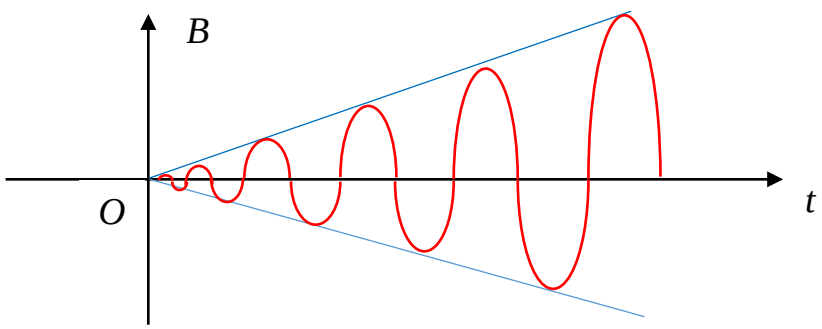
nisbat esa ***majburiy tebranma harakat amplitudasi*** deb ataladi. (4.54) va (4.68) ifodadan

$$x = A\sin(kt+\alpha) + \frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt)\,. \qquad (4.70)$$

Xulosa: *majburiy tebranma harakatning grafigi ikki qismdan, ya'ni* ***erkin*** *va* ***majburiy*** *tebranma harakatlarning yig'indisidan iborat ekan.*

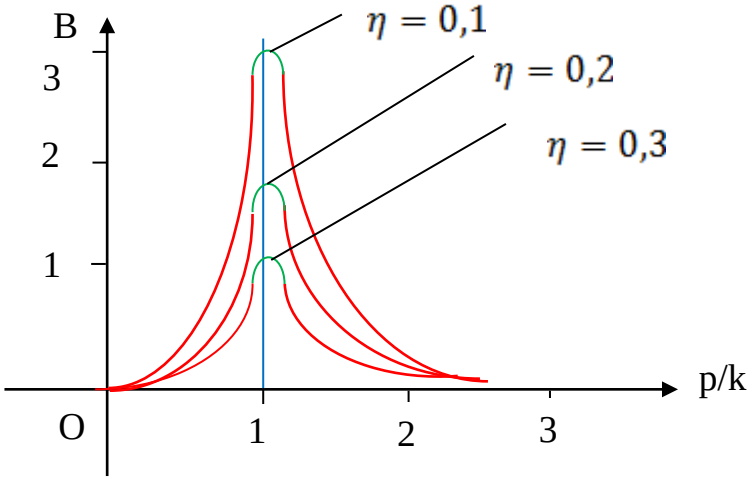
Majburiy tebranma harakat grafigi turli xil bo'lib, ***k****- erkin tebranma harakat doiraviy chastotasiga*, ***p****- uyg'otuvchi kuch chastotasiga* va ***h****=H/m- uyg'otuvchi kuch amplitudasiga* bog'liq bo'ladi. Shuning uchun majburiy tebranma harakat qilayotgan bino-inshootlar va mashina-mexanizmlar albatta rezonansga tekshiriladi.

Rezonans hodisasi deb qisqa vaqt ichida tebranish amplitudasining keskin ortib ketishiga aytiladi. Bu hodisa bino-inshootlarga jiddiy talofat etkazishi, mashina-mexanizmlarning ishdan chiqishiga sababchi bo'lishi mumkin. (4.69) nisbatdan ko'rinib turibdiki, $(k^2-p^2)\to 0$, $B\to\infty$, ya'ni ***k****- erkin tebranma harakat doiraviy chastotasi* ***p****- uyg'otuvchi kuch chastotasiga* teng bo'lganda, majburiy tebranma harakat amplitudasi ***B*** keskin ortib ketadi (4.28-shakl) va turli hil avariya holatlariga olib keladi.



4.28-shakl.

Ko‘pgina mashina-mexanizmlarni yoqish va o‘chirishda albatta rezonans holatidan o‘tiladi, shuning uchun ularda turli xil moslamalar (muftalar, prujinalar, ressorlar va h.k.) o‘rnatiladi. Bino-inshootlarda esa qo‘shimcha seysmokamarlar va trosli moslamalar ko‘zda tutilgan bo‘ladi. Bu moslamalar amplitudaning maksimal holatidan silliq o‘tishga yordam beradi (4.29-shakl).



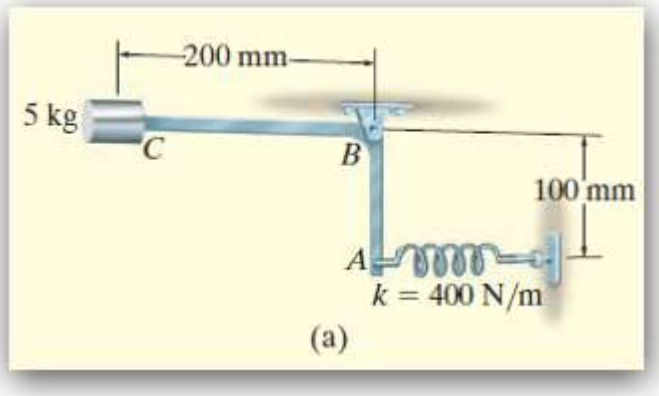
4.29-shakl.

4.29-shakldagi $\boldsymbol{\eta = n/k}$ **-** so‘ndirish koeffitsiyenti. Majburiy tebranma harakatni aniqlovchi yana bir kattalik dinamik koeffitsiyent hisoblanadi. ***Dinamik koeffitsiyent*** deb majburiy tebranma harakatga muhit qarshiligi ta’sir etgan holda majburiy tebranma harakat amplitudasi ***B*** ning statik cho‘zilish (siqilish) $\boldsymbol{B_{st}} = \frac{H}{c}$ dan qancha katta (yoki kichik) ekanligini bildiradi:

$$\lambda = \frac{B}{B_{st}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \ . \qquad (4.71)$$

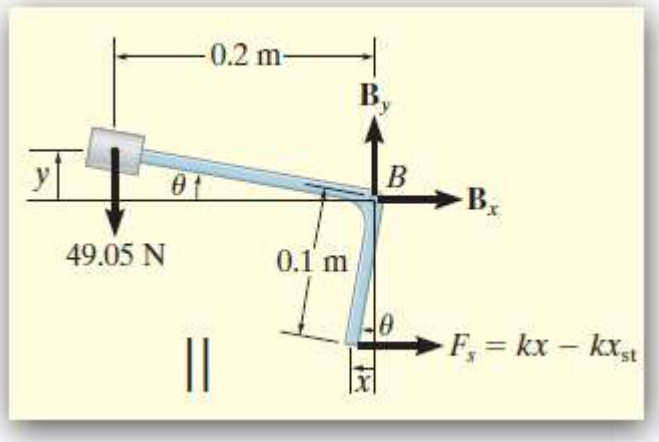
Yuqoridagi nazariy ma’lumotlarni mustahkamlash uchun amaliy masalalar echaylik.

1-masala: O‘lchamlari AB=100 *mm* va BC=200 *mm* bo‘lgan richagning A uchiga bikrligi 400 *N/m* li prujina, C uchiga esa 5 *kg* li yuk mahkamlangan. Agar richgni B qo‘zg‘almas sharnir atrofida muvozanatdan chiqarib, qo‘yib yuborilsa, uning tebranma harakat davrini toping. Richagning vazni hisobga olinmasin.



4.30-shakl.

Yechish: Richagga ta'sir etuvchi kuchlarni ko'rsatamiz: B_x , B_y – sharnirning reaksiya kuchlari, P = 49,05 *N* –yukning og'irlik kuchi, F_s – prujinaning elastiklik kuchi (4.31-shakl).



4.31-shakl.

Richagni cheksiz kichik θ burchakka burib, qo'yib yuboramiz va moddiy nuqtaning harakat miqdori momentining o'zgarishi haqidagi teoremaga asosan, (4.24) tenglamalarni B markazga nisbatan tuzamiz:

$$\frac{d[m_B(m\vec{V})]}{dt} = M_B(\vec{F}),$$

$\frac{dV_C}{dt} = a_{c\tau}$ ni hisobga olib,

$$ma_{c\tau} \cdot 0{,}2 = F_s \cdot 0{,}1 + P \cdot 0{,}2 \ .$$

C nuqtaning urinma tezlanishi $a_{c\tau} = BC \cdot \varepsilon = 0{,}2\ddot{\theta}$, $F_s = cx - cx_{st} = cx - P$, dan va s=r$\varphi$ formulaga asosan *x*=*AC*· θ, y=BC· θ demak

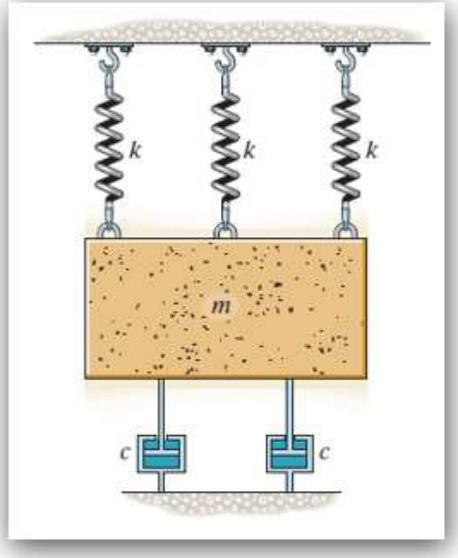
$$5a_{c\tau} \cdot BC = cx \cdot AC,$$

$$5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot \ddot{\theta} = 400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} + 20 \cdot \theta = 0;$$

demak $k^2 = 20$, bundan $k = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ sek^{-1}$, $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6{,}28}{4{,}47} = 1{,}4\ sek.$

2-masala: Massasi 25 *kg* bo‘lgan jism (moddiy nuqta) bikrliklari bir xil 100 *N/m* uchta prujina va muhit qarshiligi koeffitsiyenti 200 $N \cdot s/m$ li ikkita so‘ndirgich kuchlari ta’sirida harakat qilsa, uning harakat differential tenglamasini tuzinq (4.32-shakl). Davriy tebranma harakat bo‘lishi uchun muhit qarshiligi koeffitsiyentining maksimal qiymatini toping.



4.32-shakl.

Yechish: 4.24-shaklga asosan (4.58) tenglamani tuzamiz:

$$ma_x = -3F - 2R \quad \text{yoki} \quad m\ddot{x} = -3cx - 2\mu V$$

son qiymatlarini qo‘yib,

$$25\,\ddot{x} + 400\dot{x} + 300x = 0.$$

Massaga bo‘lib yuborib,

$$\ddot{x} + 16\dot{x} + 12x = 0,$$

yoki (4.58) dan *2n=16;* $k^2 = 12$,demak $n = 8, k = 3{,}46$. Bunda $k < n$ bo‘lgani uchun *aperiodik* – davriy bo‘lmagan harakat ekan. Davriy , ya’ni tebranma harakat bo‘lishi uchun $k > n$, yoki (4.58) dan

$$3c > 4\mu\,,\ \mu < \frac{3}{4}\,c = 75\frac{N\cdot s}{m}.$$

3-masala: Gorizontal platforma va unga mahkamlangan uskunaning massasi 20 *kg* bo‘lib, bikrliklari 800 *N/m* li to‘rtta prujinaga joylashtirilgan (4.33-shakl). Agar platforma va uskunaning birgalikda gorizontal tebranishlari qonuni *y = 10 sin (8t) mm* bo‘lsa, tebranish amplitudasini toping. Uskunaning rezonansga kirish chastotasini toping.

4.33-shakl.

Yechish: Erkin tebranishlar doiraviy chastotasini aniqlaymiz:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{4\cdot 800}{20}} = 12{,}65\frac{rad}{sek}.$$

Majburiy tebranishlar amplitudasini topamiz:

$$B = \frac{h}{1-\frac{p^2}{k^2}} = \frac{10}{1-\frac{64}{160}} = 16{,}7\ mm.$$

Rezonans *k = p =12,65 rad/sek* da yuz beradi.

4.2. QATTIQ JISMLAR SISTEMASINING (MEXANIK SISTEMA) HARAKATINING DINAMIKASI.

4.2.1. Mexanik sistema. Massalar markazi. Mexanik sistema massalar markazining harakati.

A. **<u>MEXANIK SISTEMA.</u>** Tabiyatda va texnikada jismlar bir-biriga bog‘liq bo‘ladi. Ularning harakatini o‘rganish uchun ular orasidagi bog‘lanishlarni

va ular orasidagi ta’sir kuchlarini to‘la aniqlashga to‘g‘ri keladi. Nazariy mexanikada alohida jismning yoki “jismlar to‘plami”ning harakati o‘rganiladi. “Jismlar to‘plami” yoki ***mexanik sistema*** deb, har bir qismining holati va harakati boshqa qismlarining holati va harakatiga bog‘liq bo‘lgan jismlar yoki moddiy nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Masalan, quyosh planetalar sistemasi, avtomobil, absolyut qattiq jism va h.k. Mexanik sistema bo‘lishi uchun uning har bir qismi boshqa qismlari bilan uzviy bog‘lanishi zarur. Masalan avtomobilning barcha qismlari bolt, kamar, zanjirli uzatma, tishli uzatma va h. k. lar bilan bog‘langan.

Mexanik sistemaning massasi uning *n*-ta qismlari massalarining algebraik yig‘indisiga teng:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n \,,$$

yoki qisqacha

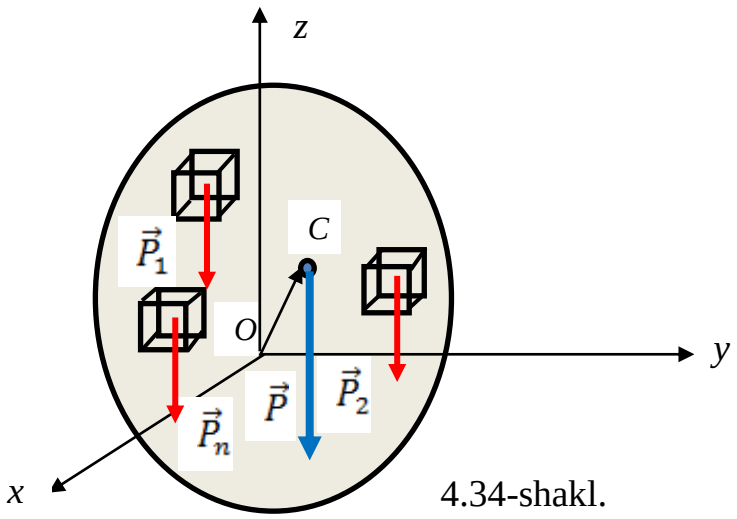
$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \,. \qquad (4.73)$$

Massalar markazi deb, mexanik sistemaning butun massasini bir nuqtaga to‘plangan joyiga aytiladi. Og‘irlik kuchi, og‘irlik markazi Yer sharidagi jismlarga tegishli bo‘lgani uchun, mexanikada undan umumiyroq tushuncha- jismning massassi orqali barcha qonunlar va formulalar ishlab chiqiladi. Mexanik sistemaning massalar markazi dinamikada juda ahamiyatli bo‘lib, sistemaning harakati soddalashtirish uchun yana nuqtaning harakatiga keltiriladi. Massalar markazini aniqlash formulalari xuddi statika qismidagi og‘irlik markazini aniqlash bilan bir xil, faqat $P = mg$ ifoda yordamida og‘irlik massaga almashtiriladi. Masalan massa markazini C harfi orqali belgilab, uning radius-vektori $\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C$ quyidagi formula bilan aniqlanadi(4.34-shakl):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M} \,, \qquad (4.74)$$

bunda m_k – mexanik sistema qismlarining massalari;

$\vec{r}_k$ – mexanik sistema qismlari massa markazlaining radius-vektorlari.



4.34-shakl.

Oxirgi ifodani *x*,*y*,*z* oqlariga proyeksiyalab,

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \\ y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \\ z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}. \end{cases} \quad (4.75)$$

massa markazini topish formulalari aniqlanadi.

Mexanik sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarni ikki guruhga ajratiladi:

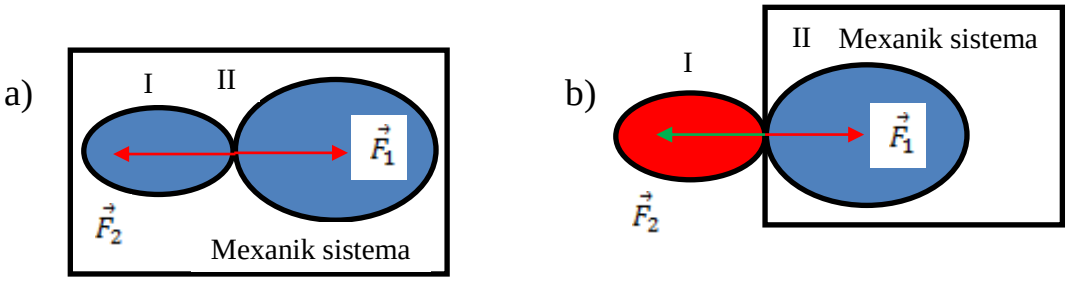
- tashqi kuchlar;
- ichki kuchlar.

Tashqi kuchlar deb, sistemaga kirmagan jismlarning ta’sir kuchlariga aytiladi.

Ichki kuchlar esa sistemaga kirgan jismlarning ta’sir kuchlari hisoblanadi.

Masalan ikki jism o‘zaro bir-biriga ta’sir qilayotgan bo‘lsa, birinchi holda $\vec{F}_1$ – ichki kuch, ikkinchi holda esa $\vec{F}_1$ – tashqi kuch bo‘ladi(4.35-shakl). Demak, kuchlarning tashqi yoki ichki bo‘lishi sistemaning qanday olinishiga bog‘liq ekan.

Nazariy mexanikada tashqi kuchlar $\vec{F}^e$-lotincha *exterior-tashqi*, ichki kuchlar esa $\vec{F}^i$-lotincha *interior-ichki* ko‘rinishda belgilash kiritilgan.



4.35-shakl.

Klassik mexanikaning yoki Nyutonning uchinchi qonunidan ichki kuchlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

a) *mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining geometrik yig'indisi (bosh vektori) nolga teng bo'ladi*;

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} = 0; \qquad (4.76)$$

b) *mexanik sistemaning barcha ichki kuchlarining ixtiyoriy markazga yoki o'qqa nisbatan olingan momentlarining yig'indisi (bosh momenti) nolga teng bo'ladi*.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^{\,i}) = 0. \qquad (4.77)$$

Oxirgi tengliklarni isbot qilish shart emas, chunki ta'sir va aks-ta'sir kuchlari miqdor jihatidan teng, yo'nalishlari qarama-qarshi va bir to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun ularning yig'indisi ham, momentlarining yig'indisi ham juft-jufti bilan yeyishib ketadi. Shunga qaramay ichki kuchlar sistema harakatida ishtirok etadi, sababi sistemaning harakatini tuzganda har bir qismiga alohida-alohida tenglamalar tuziladi.

B. MEXANIK SISTEMANING HARAKAT DIFFERENTSIYAL TENGLAMALARI.

Faraz qilaylik, mexanik sistemaning *n*-ta qismi bo'lib, ularning massalari mos ravishda $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ bo'lsin va ularga $\vec{F}_1^{\,e}, \vec{F}_1^{\,i}; \vec{F}_2^{\,e}, \vec{F}_2^{\,i}; \vec{F}_3^{\,e}, \vec{F}_3^{\,i}; \ldots; \vec{F}_n^{\,e}, \vec{F}_n^{\,i}$ tashqi va ichki kuchlar ta'sir etsin. Dinamikaning asosiy tenglamasini har bir qism uchun alohida-alohida tuzamiz:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{\,e} + \vec{F}_1^{\,i}; \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{\,e} + \vec{F}_2^{\,i}; \\ m_3\vec{a}_3 = \vec{F}_3^{\,e} + \vec{F}_3^{\,i}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^{\,e} + \vec{F}_n^{\,i}. \end{cases} \qquad (4.78)$$

(4.78) tenglamalar, *mexanik sistema harakatining vektor ko'rinishdagi* ***differentsial tenglamalari*** *deb ataladi.* Oxirgi ifodalarni *x,y,z* oqlariga proyeksiyalab, *3n* ta tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Sistema qismlari soni ko'p bo'lib, kuchlarning shakli murakkab bo'lsa, bunday tenglamalarni yechish vaqt va kuch talab qiladi. Shuning uchun bu masalalar maxsus dasturlar asosida kompyuter yordamida yechiladi. Lekin juda ko'p mexanika masalalarida alohida qismlarning harakati va kattaliklari emas, balki butun sistemaning harakati va kattaliklari so'raladi. Shu sababli sistemaning harakatini tekshirish soddalashtirish uchun uning massa markazi harakatiga fikran keltiriladi, yoki dinamikaning umumiy teoremalari yordamida yechiladi.

D. MEXANIK SISTEMA MASSALAR MARKAZINING HARAKATI HAQIDAGI TEOREMA.

(4.74) tenglamani

$$M\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k$$

ko'rinishida yozib olib, ikki marotaba vaqt ***t*** bo'yicha hosila olinadi:

$$M\ddot{\vec{r}}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k\ddot{\vec{r}}_k, \quad \text{yoki} \quad M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{a}_k. \qquad (4.79)$$

(4.78) tenglamalar sistemasi o'ng va chap tomonlarini hadma-had qo'shib,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i};$$

bunda $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} = 0$ va (4.79) dan

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e}. \qquad (4.80)$$

Teorema: *mexanik sistemaning M massasini uning massa markazi tezlanishi* $\vec{a}_C$ *ga ko'paytmasi, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan.*

Oxirgi ifodani *x,y,z* oqlariga proyeksiyalab,

$$\begin{cases} Ma_{Cx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{\,e}; \\ Ma_{Cy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{\,e}; \\ Ma_{Cz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^{\,e}. \end{cases} \qquad (4.81)$$

Demak, *sistemaning massalar markazi* ***C****, massasi sistemaning massasiga teng bo'lgan va sistemaga qo'yilgan barcha tashqi kuchlar ta'siridagi moddiy nuqta kabi harakatda bo'lar ekan.*

Ushbu tenglamalar, ***mexanik sistema massalar markazi harakati differentsial tenglamasining dekart koordinata o'qlaridagi proyektsiyalari*** hisoblanadi.

Yuqoridagi teoremaning amaliy mohiyati quyidagilardan iborat:

1) Teorema nuqta dinamikasining usullariga asos bo'lib xizmat qiladi. Xususiy holda, agar jism ilgarilanma harakatda bo'lsa, massa markazining harakati jismning harakatini to'liq ravishda ifodalaydi.

2) Ushbu teorema orqali, bizga noma'lum bo'lgan ichki kuchlarni e'tiborga olmagan holda massa markazinng harakatini aniqlash mumkin ekan.

Xususiy hollar:

a) Sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsin

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} = 0,$$

u holda $M\vec{a}_C = 0$, yoki $M \neq 0$ dan $\vec{V}_C = \overrightarrow{const}$.

Demak, *agar sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning geometrik yig'indisi nolga teng bo'lsa, sistemaning massa markazi tezligining*

son qiymati va yo‘nalishi o‘zgarmas bo‘lar ekan, ya’ni tekis va to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lar ekan.

b) Jismga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning yig‘indisi nolga teng emas, lekin ularning birorta koordinata o‘qidagi (masalan, x o‘qidagi) proyektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsin, ya’ni

$$\sum F_{kx}^{e} = 0$$

U holda, $\ddot{x}_C = 0$, yoki $V_{Cx} = const.$

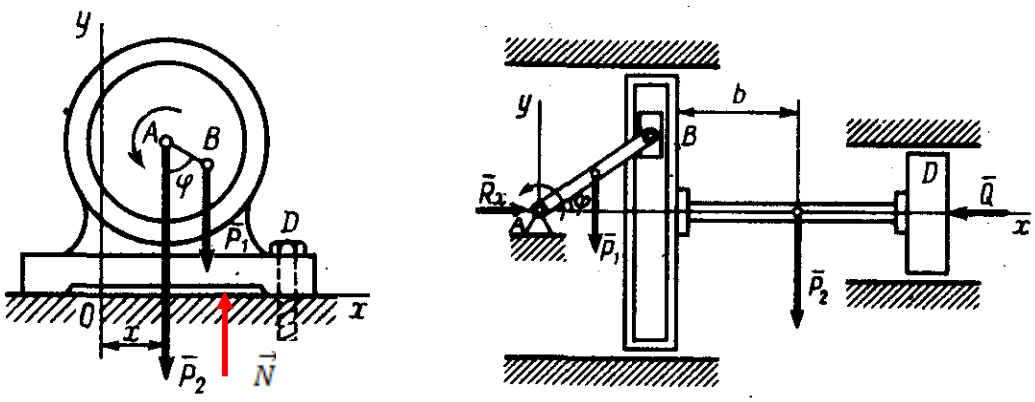
Demak, *agar sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning biror o‘qdagi proyektsiyalarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa, massalar markazining tezligini shu o‘qdagi proyektsiyasi o‘zgarmas bo‘lar ekan*.

Agar $V_{Cx} = 0$ bo‘lsa,

$$Mx_C = const \qquad (4.82)$$

Yuqoridagi ifoda, ***massalar markazi harakatining saqlanish qonuni***ni ifodalaydi. Bu nazariy ma’lumotlarning amaliy masalalarga tadbiqini ko‘raylik.

1-masala: Motor valining massalar markazi, aylanish o‘qidan AB=***b*** masofaga siljitilgan (4.36-shakl). Valning massasi - m_1, uning qolgan qismlarining massasi - m_2. Agar val, o‘zgarmas ω-burchakli tezlik bilan aylanma harakatda bo‘lsa, silliq gorizontal tekislikda joylashgan motorning harakat qonuni aniqlansin va uning fundamentga qo‘zg‘almas qilib mahkamlansa, D nuqtadagi boltning maksimal zo‘riqishi aniqlansin.



4.36-shakl.

Yechish: Mahkamlanmagan motor va valni mexanik sistema deb olib, unga ta'sir etayotgan tashqi kuchlarni aniqlaymiz: $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ –valning va motorning og'irlik kuchlari, $\vec{N}$ –tekislikning bosim kuchi. Mazkur kuchlar *Ox* o'qiga perpendikulyar, shuning uchun A va B nuqtalarning harakat tenglamalarida qatnashmaydi:

$$m_1\ddot{x}_B + m_2\ddot{x}_A = 0,$$

bunda $x_A = x$, $x_B = x + b sin\omega t$, demak

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = m_1 b\omega^2 \sin(\omega t)\,,$$

ikki marta integrallab,

$$x = -\frac{m_1 b}{m_1 + m_2} \sin(\omega t)\,.$$

Shunday qilib, sistemaning massa markazi garmonik tebranma harakat qilar ekan.

Agar motor D bolt bilan mahkamlab qo'yilsa,

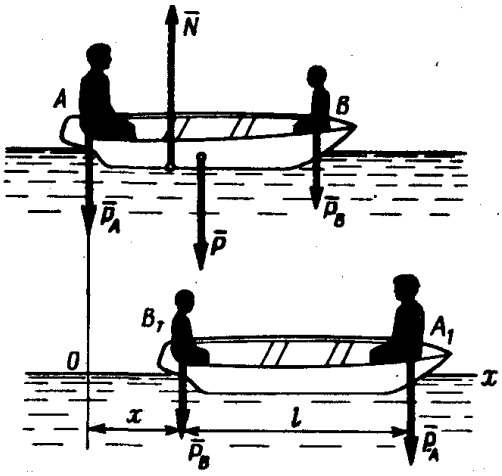
$$R_x = M\ddot{x}_C = m_1\ddot{x}_B = -m_1 b\omega^2 \sin\omega t\,,$$

uning maksimal qiymati esa

$$R_x = m_1 b\omega^2.$$

Motorning ishlash jarayonida, boltga nisbatan zarba bo'lmasligini oldini olib, boltni mahkamlab qotirilgan Q-kuchning qiymati shunday bo'lishi lozimki, tekislik bilan motor orasidagi ishqalanish kuchi $fQ \geq m_1 b\omega^2$ bo'lishi shart.

2-masala: Og'irligi *P* bo'lgan qayiqning oldingi qismida og'irligi P_B -bo'lgan bola va qayiqning orqa qismida og'irligi P_A -bo'lgan katta odam o'tiribdi (4.37-shakl). Agar, ular o'zlarining o'rinlarini almashtirsalar, suvning qarshiligini hisobga olmagan holda, qayiqning qancha masofaga va qaysi tomonga qarab siljishi aniqlansin.



4.37-shakl.

Yechish: Qayiq va undagi odamlarni mexanik sistema deb, ta’sir etayotgan tashqi kuchlarni ko‘rsatamiz: $\vec{P}$ –qayiqning og‘irlik kuchi, $\vec{P}_A, \vec{P}_B$ –katta odam va bolaning og‘irlik kuchlari, $\vec{N}$- normal bosim. Suvning qarshilik kuchi va odam oyog‘ining qayiqqa ishqalanish kuchlari juda kichkinaligi uchun hisobga olinmaydi. Barcha kuchlar *Ox* o‘qiga perpendikulyar, shuning uchun

$$\sum F_{kx}^{e} = 0 \quad \text{, demak}$$

$V_{Cx} = 0$ bo‘lsa, $Mx_C = const$, sistemaning massa markazi vertikalga nisbatan o‘zgarmas ekan. Birinchi holat uchun massa markazi:

$$Mx_C{}^{I} = m_A \cdot 0 + m_B \cdot l + m \cdot \frac{l}{2};$$

ikkinchi holat uchun esa

$$Mx_C{}^{II} = m_A \cdot (x + l) + m_B \cdot x + m \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right).$$

Ikkala tenglikning o‘ng tomonini tenglashtirib, noma’lum *x* ni aniqlaymiz:

$$x = \frac{(m_B - m_A)l}{m_A + m_B + m}.$$

Oxirgi tenglik manfiy bo‘lganligi uchun ($m_A > m_B$), qayiq chap tomonga siljir ekan.

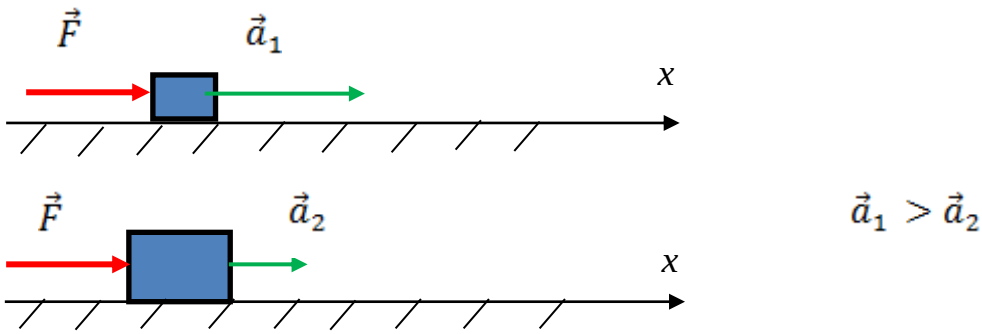
4.2.2. Inersiya momenti. Inersiya momentini hisoblash usullari. Parallel o‘qlarga nisbatan inersiya momenti.

A. **<u>JISMNING INERTLIGI</u>**. ***Jismning inertligi*** deb, ichki kuchlar ta’sirida jismning o‘z tezlanishini tez yoki sekin o‘zgartira olish xususiyatiga aytiladi.

Jismning inertligi uning harakati turiga bog‘liq:

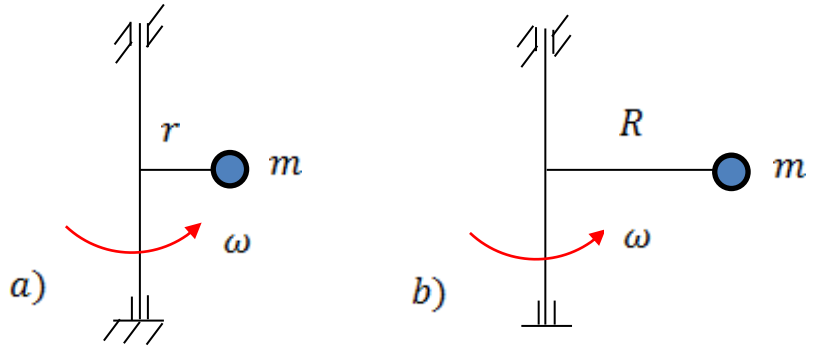
a) ilgarilanma harakatda jismning massasi inertlikning asosiy belgisi hisoblanadi. Masalan 1 kg va 10 kg jismlarga bir hil 10 N kuch ta’sir qilsa, ularning olgan tezlanishlari turlicha bo‘ladi

(4.37-shakl):



4.38-shakl.

b) aylanma harakatda esa faqat massa emas, balki jismning aylanish o‘qidan (aylanish markazidan) qanchalik uzoq masofasi kvadrati ham inertlikning belgisi hisoblanadi. Masalan, 1 kg sharcha turli radiuslar r = 10 sm, R = 100 sm ega va bir hil burchakli tezlik bilan aylanayotgan bo‘sin. Albatta 2-mexanizni to‘xtatish 1-chisidan qiyinroq, chunki uning inertligi kattaroq (4.39-shakl).



4.39-shakl.

B. <u>JISMNING INERTSIYA MOMENTI</u>. Jismlarning aylanma harakatini izohlash uchun inertsiya momenti tushunchasi kiritilgan. Moddiy nuqtaning ***inertsiya momenti*** deb, uning massasini aylanish radiusi kvadratiga ko‘paytmasiga teng bo‘lgan skalyar miqdorga aytiladi:

$$I = m \cdot R^2 . \qquad (4.83)$$

Inertsiya momentining birligi $N \cdot m^2$ bo‘lib, mexanik sistema uchun alohida qismlari bo‘yicha hisoblanadi va algebraik qo‘shiladi:

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k{}^2, \qquad (4.84)$$

bu yerda m_k –qismlarinig massasi;

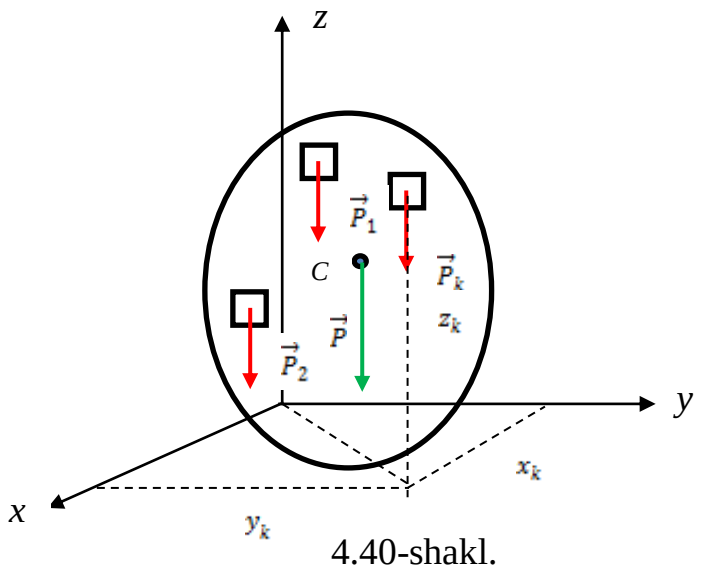
h_k – qismlari massa markazidan aylanish o‘qigacha bo‘lgan masofa.

Qattiq jismning inertsiya momentlari undagi massalarning turli tarqalishi (zichligi, bir jinsliligi va h.k.), uning shakli va qaysi o‘qlarga nisbatan aylanishiga qarab, turlicha hisoblanadi. Qattiq jismning inertsiya momenti ikki xil usul orqali aniqlanadi:

a) nazariy usul;

b) tajriba usuli.

Agar qattiq jism geometrik shaklga ega bolsa, uni elementar kubiklarga bo‘lib, inertsiya momentini integral amali yordamida nazariy hisoblasa bo‘ladi (4.40-shakl):



4.40-shakl.

O‘qqa nisbatan inertsiya momentlarini hisoblash uchun, o‘qlardan jismning nuqtalarigacha bo‘lgan masofalarni ularning x_k, y_k, z_k koordinatalari orqali ifodalanadi. U holda, Oxyz o‘qlariga nisbatan inertsiya momentlari Pifagor formulalari orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k ({y_k}^2 + {z_k}^2); \\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k ({x_k}^2 + {z_k}^2); \\ I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2). \end{cases} \quad (4.84)$$

Koordinatalar boshi O ga nisbatan inertsiya momenti esa

$$I_o = \sum_{k=1}^{n} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2 + {z_k}^2). \quad (4.85)$$

(4.84) ifodaning o‘ng tomonlarini hadma-had qo‘shib, qattiq jismning koordina o‘qlariga nisbatan inertsiya momentlari bilan koordinata boshiga nisbatan inertsiya momenti orasidagi bog‘lanishni topish mumkin:

$$2I_o = I_x + I_y + I_z. \quad (4.86)$$

Markazdan qochma inertsiya momentlari deb

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k; \\ I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k; \\ I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k. \end{cases} \quad (4.87)$$

Markazdan qochma inertsiya momentlari, o‘qlarga nisbatan momentlardan farqli ravishda, musbat yoki manfiy qiymatlarga ega bo‘lishi ham mumkin va xususiy holda maxsus yo‘naltirilgan Oxyz o‘qlarga nisbatan nolga teng bo‘lishi ham mumkin.

Markazdan qochma inertsiya momenti nolga teng bo‘lgan J_{xz} va J_{yz} qiymatlarning indekslarida ishtirok etgan Oz o‘q, jismning O nuqtadagi bosh ***inertsiya o‘qi*** *deb ataladi.*

Agar barcha markazdan qochma inertsiya momentlari, ya’ni

$$J_{xy}=0, \quad J_{yz}=0, \quad J_{zx}=0 \tag{4.88}$$

bo‘lsa, u holda har bir koordinata o‘qlari, jismning O nuqta (koordinata boshi) dagi ***bosh inertsiya o‘qi*** *hisoblanadi.*

Bosh inertsiya o‘qlarini topib olish texnikada juda ahamiyati katta bo‘lib, dinamik tenglamalar o‘ta soddalashadi va dinamik balansirlash, zarba markazini aniqlash hamda boshqa muammolarni hal qilishda yordam beradi.

Agar jism tekislikka nisbatan aylanayotgan bo‘lsa, u holda inertsiya momentlari quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{cases} I_{(Oxy)} = \sum_{k=1}^{n} m_k {z_k}^2; \\ I_{(Oyz)} = \sum_{k=1}^{n} m_k {x_k}^2; \\ I_{(Oxz)} = \sum_{k=1}^{n} m_k {y_k}^2. \end{cases} \tag{4.89}$$

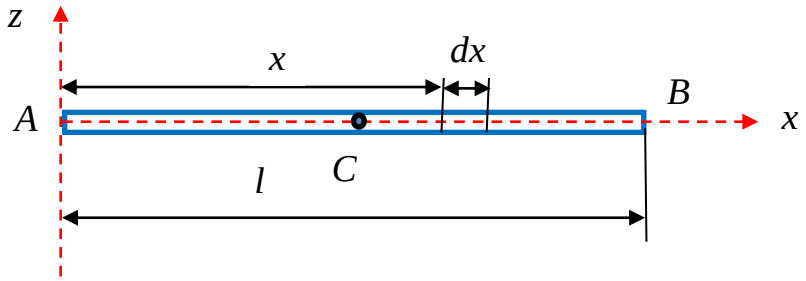
Nazariy formulalarni xos integrallar orqali ham ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} I_x = \iiint \rho(y^2+z^2)dV; \\ I_y = \iiint \rho(z^2+x^2)dV; \\ I_z = \iiint \rho(x^2+y^2)dV. \end{cases} \quad \begin{cases} I_x = \iint \rho_1 y^2 dS; \\ I_y = \iint \rho_1 x^2 dS\ . \end{cases} \quad I_z = \int \rho_2 x^2 dl. \tag{4.90}$$

bu yerda *V*-hajm, *S*-yuza, *l* –uzunlik, ρ, ρ_1, ρ_2- hajm, yuza va uzunlik birligining zichligi. Integral formulalarning amalda qo‘llanilishi quyidagi misollarda ko‘raylik.

1-Misol. Bir jinsli ingichka sterjenning inertsiya momenti.

Massasi ***m*** va uzunligi ***l*** bo‘lgan bir jinsli ingichka sterjen berilgan (4.41-shakl). Uning uchidan o‘tuvchi ***z*** o‘qiga nisbatan inertsiya momentini hisoblash uchun AB sterjen bo‘ylab ***x*** o‘qini o‘tkazamiz. U holda $\rho_2 = m/l$ – uzunlik birligi zichligini massa orqali ifodalab, uzunlik bo‘yicha integral olamiz:

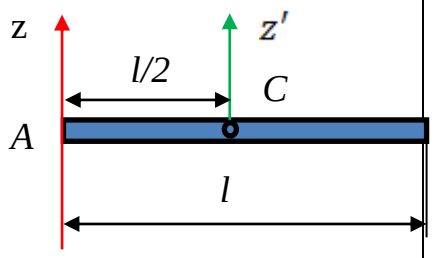


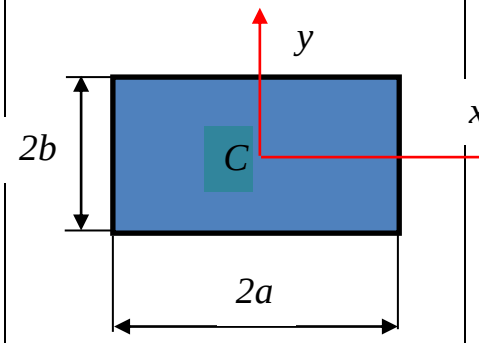
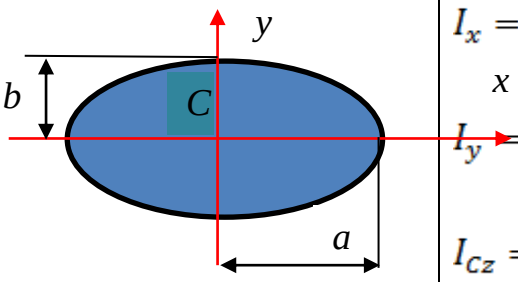
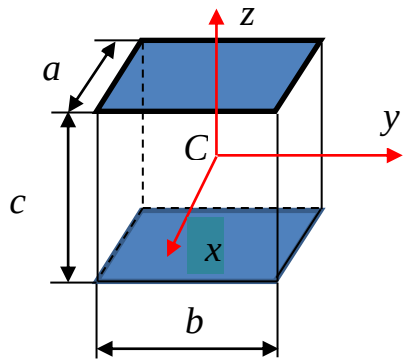
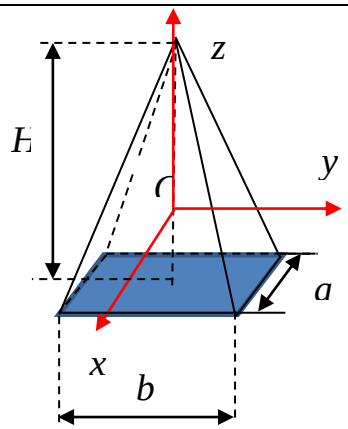
4.41-shakl.

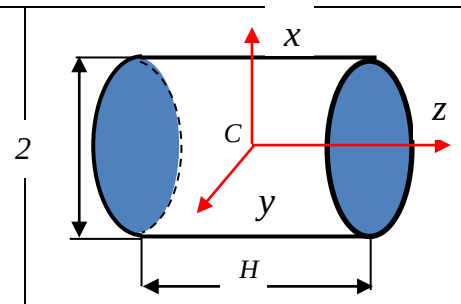
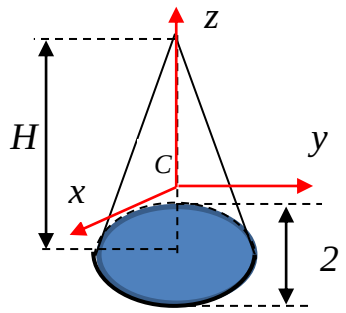
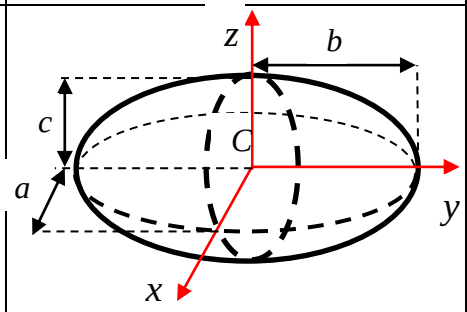
$$I_z = \int \rho_2 x^2 dl = \frac{m}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{ml^2}{3}.$$

Albatta bu hisob-kitoblar ko‘p vaqt talab qiladi. Shuning uchun geometrik shaklga ega bo‘lgan bir jinsli jismlarning inertsiya momentlari maxsus ma’lumotnoma kitoblarida 4.1-jadval ko‘rinishida keltirilgan.

4.1-jadval.

Jismning nomi	**Jismning shakli**	**Inertsiya momenti**
Ingichka sterjen		$I_B = \frac{ml^2}{3}$ $I_{z'} = \frac{ml^2}{12}$

To‘g‘ri to‘rtburchak		$I_x = \frac{mb^2}{3}$ $I_y = \frac{ma^2}{3}$ $I_{Cz} = \frac{m(a^2+b^2)}{3}$
Ellips		$I_x = \frac{mb^2}{4}$ $I_y = \frac{ma^2}{4}$ $I_{Cz} = \frac{m(a^2+b^2)}{4}$
To‘g‘ri to‘rtburchakli paralellopiped		$I_x = \frac{m(b^2+c^2)}{3}$ $I_y = \frac{m(a^2+c^2)}{3}$ $I_z = \frac{m(a^2+b^2)}{3}$
To‘g‘ri burchakli piramida		$I_x = \frac{m}{20}(\frac{3}{4}H^2 + 4b^2)$ $I_y = \frac{m}{20}\left(\frac{3}{4}H^2 + 4a^2\right)$ $I_z = \frac{m}{5}(a^2+b^2)$

Doiraviy tsilindr		$I_x = I_y = \frac{m}{4}(\frac{1}{3}H^2 + R^2)$ $I_z = \frac{mR^2}{2}$
Doiraviy konus		$I_x = I_y = \frac{3m}{20}(\frac{1}{4}H^2 + R^2)$ $I_z = \frac{3mR^2}{10}$
Ellipsoid		$I_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{5}$ $I_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{5}$ $I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{5}$

Aksariyat, hisoblash ishlarida ***inertsiya radiusi*** degan iboradan foydalaniladi. Oz o‘qiga nisbatan ***inertsiya radusi*** ρ_z deb, quyidagi musbat skalyar ifodaga aytiladi

$$J_z = M\rho_z^2 \qquad (4.91)$$

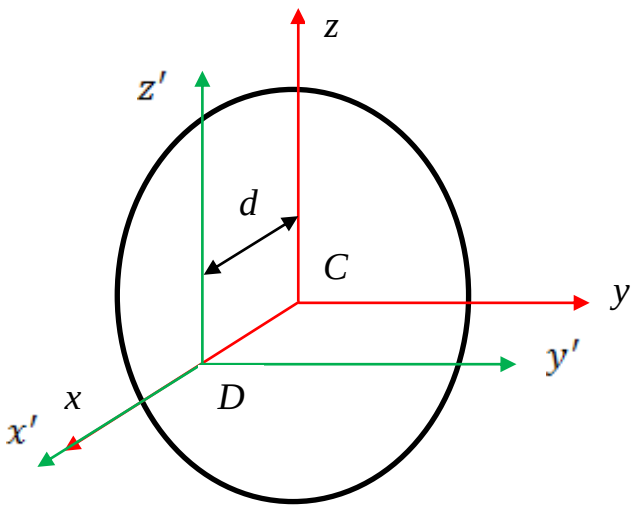
bu yerda M - jismning massasi. Yuqoridagi ifodadan ko‘rinib turibdiki, inertsiya radiusi bu Oz o‘qidan shunday nuqtagacha bo‘lgan masofadan iborat ekanki, jismning butun massasini shu nuqtaga joylashtirib, so‘ngra shu massaning Oz o‘qiga nisbatan olingan inertsiya momentiga teng ekan. Inertsiya radiusining birligi *m, sm, mm.*

Inertsiya radiusini bilgan holda, (4.91) formula orqali inertsiya momentini aniqlash mumkin yoki inertsiya momentini bilgan holda inertsiya radiusini aniqlash mumkin.

D. PARALLEL VA IXTIYORIY O‘QLARGA NISBATAN JISMNING INERTSIYA MOMENTI.

1-jadvalda keltirilgan turli jismlarning inertsiya momentlari C-massalar markaziga nisbtan hisoblangan. Lekin ko‘pincha amaliyotda jismning boshqa o‘qlariga nisbatan ham inertsiya momentlarini hisoblash kerak bo‘lib qoladi. Gollandiyalik olim Gyuygens va nemis olimi Shteyner bunday hollar uchun quyidagi formulalarni aniqlashgan.

Faraz qilaylik jismning C-massalar markaziga nisbatan inertsiya momentlari I_x , I_y, I_z ma’lum bo‘lsin. (4.84) formulalardan foydalanib, *x*, *y*, *z* o‘qlariga parallel bo‘lgan x', y', z' o‘qlarga nisbatan inertsiya momenti formulalarini topamiz (4.42-shakl).



4.42-shakl.

(4.84) formulalarga asosan

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k ({x_k}^2 + {y_k}^2), \quad \text{va}$$

$$I_{z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left({x'_k}^2 + {y'_k}^2\right).$$

4.42-shakldan $x'_k = x_k + d$; $y'_k = y_k$ masofalarni oxirgi formulaga qo‘ysak,

$$I_{z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k[(x_k + d)^2 + y_k{}^2),$$

yoki

$$I_{z'} = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k{}^2 + y_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k d + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2;$$

ma’lumki $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = M x_C$ va C nuqtaning koordinatalari

$$x_C = y_C = z_C = 0, \text{ demak } \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0.$$

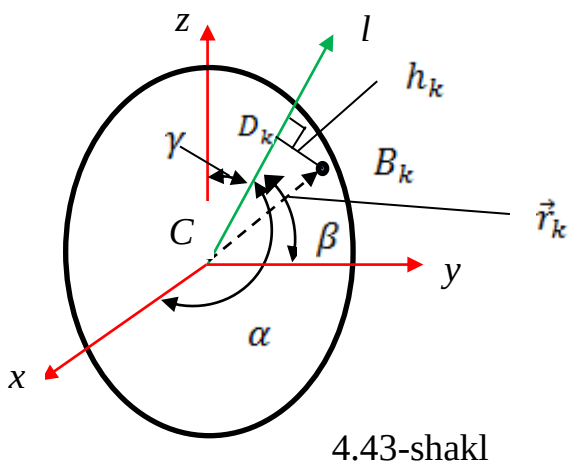
U holda $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$ dan

$$I_{z'} = I_z + Md^2. \qquad (4.92)$$

Teorema: *jismning berilgan o‘qqa nisbatan inertsiya momenti, shu o‘qqa parallel ravishda massa markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inertsiya momenti va jismning umumiy massasini o‘qlar orasidagi masofa kvadratiga ko‘paytmasining yig‘indisiga teng ekan.*

(4.92) formulani *x* va *y* o‘qlariga nisbatan ham yozish mumkin. Bu formula ***Gyuygens-Shteyner formulasi*** deyiladi.

Endi ixtiyoriy joylashgan o‘qqa nisbatan inertsiya momentini hisoblash formulasini aniqlaylik. Faraz qilaylik jismning C-massalar markaziga nisbatan inertsiya momentlari I_x , I_y, I_z ma’lum bo‘lsin. C dan o‘tuvchi *Cl* o‘qi *x*, *y*, *z* o‘qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar tashkil etsin (4.43-shakl).



4.43-shakl

(4.84) formulaga asosan

$$I_l = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k{}^2,$$

bu yerda $h_k{}^2 = r_k{}^2 - (OD_k)^2$, r_k –radius-vektor esa

$$\vec{r}_k = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

OD_k masofa $\vec{r}_k$ vektorning *Ol* o‘qidagi proyeksiyasi bo‘lgani uchun

$$\begin{cases} |x \cdot \vec{i}| = x \cdot \cos\alpha; \\ |y \cdot \vec{j}| = y \cdot \cos\beta; \\ |z \cdot \vec{k}| = z \cdot \cos\gamma; \end{cases}$$

ekanligini e’tiborga olsak

$$I_l = \sum_{k=1}^{n} m_k [x^2 + y^2 + z^2 - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2],$$

Agar, 1- $\cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, 1- $\cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma$ va 1 - $\cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$ ekanligi sababli, kosinuslar kvadratlari va kosinuslarning ko‘paytmalarini qavsdan tashqariga chiqarib, (4.84) va (4.87) formulalarni e’tiborga olsak, yuqoridagi formula quyidagi ko‘rinishga keladi

$$I_l = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma -$$

$$-2I_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2\, I_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2I_{zx} \cos\gamma \cos\alpha \,, \qquad (4.93)$$

Agar *Cxyz* o‘qlari o‘rniga bosh inertsiya o‘qlarini tanlab olsak, (4.88) ga asosan

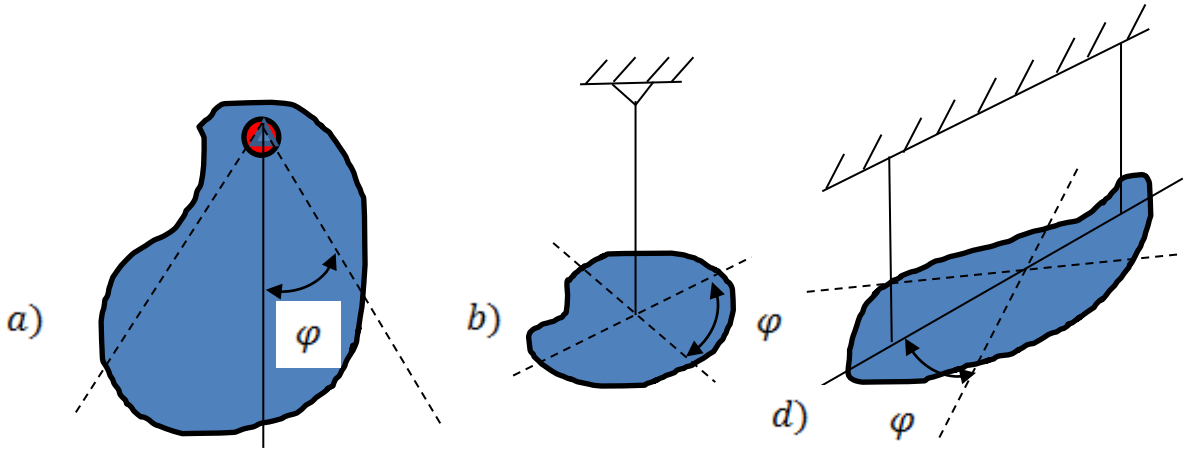
$$I_l = I_x cos^2\alpha + I_y cos^2\beta + I_z cos^2\gamma \,. \qquad (4.94)$$

E. QATTIQ JISMNING INERTSIYA MOMENTINI TAJRIBA USULIDA ANIQLASH.

Geometrik shaklga ega bo‘lmagan jismlarning inertsiya momentlari laboratoriya sharoitida tajriba usulida va empirik formulalar orqali aniqlanadi. Bu usullarning bir necha xilini ko‘rib o‘tamiz:

1. Fizik mayatnik usuli.
2. Bitta ipga osish (buralma tebranish) usuli.
3. Ikki ipga osish usuli.

Fizik mayatnik usulida ixtiyoriy shakldagi jismni biror teshigi orqali uchli prizmaga yoki biror gorizontal o‘qqa osib, uning tebranma harakat davri yordamida inertsiya momenti hisoblanadi (4.44,a-shakl).



4.44-shakl

Inertsiya momentlarini aniqlash zarur bo‘lgan detallar tuzilishi turlicha bo‘lib, osilish o‘qi yoki prizmaga ilinadigan teshigi bo‘lmasligi mumkin. Ikkinchidan uning massalari simmetrik tarzda joylashmagan bo‘lsa, fizik tebrangich usuludan foydalanib bo‘lmaydi. Bu hollarda jism bitta yoki ikkita ipga (trosga) osish yo‘li bilan buralma tebranma harakatga keltiriladi va inertsiya momenti hisoblanadi(4.44,b,d-shakl). Bu ma’lumotlar “Nazariy mexanika” dan keyingi fan “Mashina mexanizmlar nazariyasi” da to‘liq o‘rganiladi.

4.2.3. Qattiq jism (mexanik sistema) dinamikasining umumiy teoremalari.

Moddiy nuqta dinamikasida aytilganidek umumiy teoremalar masalani qisqa yo‘l bilan, ya’ni differentsial tenglamalarini tuzib o‘tirmay, harakatning bosh-lang‘ich va chegaraviy shartlaridan foydalanib yechadi. Mexanik sistema uchun vektor ko‘rinishida *n*-ta, koordinatalar shaklida esa *3n*-ta tenglama tuzish, integrallash va integral doimiylarini aniqlash juda ko‘p kuch va vaqt talab qiladi. Undan tashqari, noma’lum bo‘lgan ichki kuchlarning xossalariga asosan ishtirok etmasligi masalaning yechimini yana ham soddalashtiradi. Moddiy nuqta dinamikasida tanishganimizday mexanik sistema uchun harakat miqdori, harakat miqdori momenti va kinetik energiya teoremalarini ko‘rib chiqamiz.

A. MEXANIK SISTEMA HARAKAT MIQDORINING O‘ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA.

Faraz qilaylik, mexanik sistemaning massalari $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ nuqtalardan iborat bo‘lib, ularning tezliklari mos ravishda $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \ldots, \vec{V}_n$ bo‘lsa, ***sistemaning harakat midori*** deb, *sistema nuqtalari harakat miqdorlarining geometrik yig‘indisi (bosh vektori)ga teng bo‘lgan* $\vec{Q}$ *-vektorga aytiladi*:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k. \qquad (4.95)$$

Uning birligi ham ***kg·*** $\boldsymbol{m/sek}$ bo‘lib, yo‘nalishi tezlik vektori yo‘nalishi bo‘yicha yo‘naladi. Oxirgi tenglikni yana ham soddalashtirish uchun (4.74) tenglamani

$$M\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k$$

ko‘rinishida yozib olamiz va vaqt ***t*** bo‘yicha bir marta hosila olib,

$$M\vec{V}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k \text{ , yoki } \vec{Q}_C = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k.$$

Mexanik sistema uchun ***kuch impulsi*** ham moddiy nuqta uchun kuch impulsi kabi hisoblanadi, faqat sistemada tashqi kuchlar olinadi:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}^e dt. \qquad (4.96)$$

Teorema: *sistemaning harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosila, sistemaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning geometrik yig‘indisiga teng*.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} . \qquad (4.97)$$

Isboti: (4.95) dan vaqt bo‘yicha hosila olib,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k,$$

yoki $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = M\vec{a}_c$ dan $M\vec{a}_c = \vec{F}^e$ da

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e}.$$

(4.97) formulani integral shaklida yozish mumkin:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{F}^e dt. \qquad (4.98)$$

Oxirgi tengliklarni koordinata o‘qlariga proyeksiyalab,

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}{}^{e}; \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}{}^{e}; \\ \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}{}^{e}; \end{cases} \qquad (4.90)$$

va

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \int_0^t F_{kx}{}^{e}; \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \int_0^t F_{ky}{}^{e}; \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \int_0^t F_{kz}{}^{e}. \end{cases} \qquad (4.91)$$

Xususiy hollar: 1) Agar $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k{}^{e} = 0$ bo‘lsa, $\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$ va

$$\vec{Q} = \overrightarrow{const}. \qquad (4.92)$$

Demak, agar sistemaga ta’sir etayotgan tasqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdori o‘zgarmaydi.

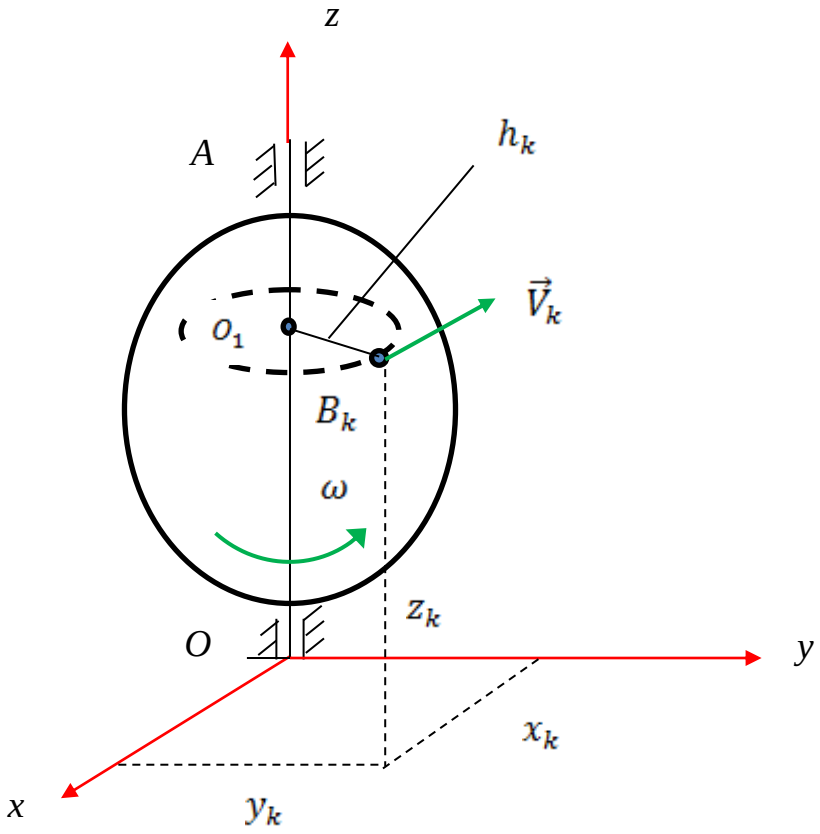
2) Agar $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}{}^{e} = 0$ bo‘lsa, $\frac{dQ_x}{dt} = 0$ va

$$Q_x = const. \qquad (4.93)$$

bosh vektori biror o‘qdagi proyeksiyasi nolga teng bo‘lsa, sistemaning harakat miqdorining shu o‘qqa proyeksiyasi ham o‘zgarmaydi.

B. MEXANIK SISTEMA HARAKAT MIQDORI MOMENTINING O‘ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA.

Aylanma harakat qilayotgan mexanik sistemaning harakati ko‘pincha mazkur teorema orqali tekshiriladi. *Sistemaning O markazga nisbatan* ***harakat miqdorining bosh momenti*** *deb, sistemaning barcha nuqtalarining harakat miqdorlarini shu markazga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisidan iborat bo‘lgan vektor qiymatiga aytiladi* (4.45-shakl)*:*



4.45-shakl.

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(m_k \vec{V}_k). \qquad (4.94)$$

Ko‘pincha bu miqdor mexanik sistemaning ***kinetik momenti*** ham deb ataladi. Uning birligi $\boldsymbol{kg \cdot m^2/sek}$ bo‘lib, aylanish o‘qi bo‘ylab yo‘naladi.

Kinetik momentning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{cases} K_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(m_k V_k); \\ K_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(m_k V_k); \\ K_z = \sum_{k=1}^{n} M_z(m_k V_k); \end{cases} \qquad (4.95)$$

bu yerda

$$V_k = h_k \cdot \omega,$$

va *Oz* o‘qiga nisbatan moment olib (4.45-shakl),

$$M_z(m_k V_k) = m_k \cdot V_k \cdot h_k = m_k \cdot {h_k}^2 \cdot \omega = I_{kz} \cdot \omega,$$

yoki soddaroq qilib,

$$K_z = I_z \cdot \omega \qquad (4.96)$$

Shunday qilib, *aylanayotgan jismning aylanish o‘qiga nisbatan kinetik momenti, jismning shu o‘qqa nisbatan inertsiya momentini uning burchakli tezligiga bo‘lgan ko‘paytmasiga teng ekan*.

Teorema: *ixtiyoriy qo‘zg‘almas nuqtaga nisbatan sistemaning harakat miqdorini bosh momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila, sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan olingan momentlarining geometrik yig‘indisiga teng ekan.*

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^{\,e}). \qquad (4.97)$$

Isboti: kinetik momentni faqat B_k nuqta uchun yozib olamiz

$$K_z = M_z(m_k V_k) = m_k \cdot V_k \cdot h_k;$$

vaqt bo‘yicha hosila olib,

$$\frac{dK_z}{dt} = m_k \cdot \frac{dV_k}{dt} \cdot h_k = m_k \cdot a_k \cdot h_k = F_k \cdot h_k = M_z(F_k).$$

Demak bitta nuqta uchun teorema isbot qilindi. Endi uni butun sistemaga umumlashtirish mumkin. Mexanik sistema uchun umumlashtirganimizda ichki kuchlarning xossalariga asosan

$$\sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^{\,i}\right) = 0\,,$$

bundan

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{\,e}).$$

Boshqa o‘qlar uchun ham shu isbotni amalga oshirish mumkin. Koordinata boshiga nisbatan ham oxirgi ifodani umumlashtirish mumkin:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k^{\,e}).$$

Koordinata o‘qlariga proyeksiyalab,

$$\begin{cases} \frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k^{\,e}\right); \\ \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k^{\,e}); \\ \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{\,e}), \end{cases} \qquad (4.98)$$

ko‘rinishdagi tenglamalarni hosil qilamiz. Bu teoremada quyidagi xususiy hollar yuz berishi mumkin:

1) Agar $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} = 0$ bo‘lsa, $\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0$ bo‘ladi va

$$\vec{K}_O = \overrightarrow{const}. \qquad (4.99)$$

Sistema ***kinetik momenti vektorining saqlanish qonuni*** yuz beradi.

2) Agar $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{\,e} = 0$ bo‘lsa, $\frac{dK_x}{dt} = 0$ va

$$K_x = const. \qquad (4.100)$$

Sistema ***kinetik momentining Ox o‘qiga nisbatan saqlanish qonuni*** hosil bo‘ladi.

D. MEXANIK SISTEMA KINETIK ENERGIYASINING O‘ZGARISHI HAQIDAGI TEOREMA.

Mexanik sistemaning kinetik energiyasi *deb, sistema nuqtalarining kinetik energiyalarining algebraik yig‘indisining yarmiga teng bo‘lgan skalyar qiymatga aytiladi:*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^{\,2}\,. \qquad (4.101)$$

Kinetik energiya sistemaning $\vec{Q}$ –harakat miqdori va $\vec{K}$ –kinetik momentlardan ikki jihati bilan farq qiladi:

- kinetik energiya musbat skalyar miqdor;
- ichki kuchlar harakat miqdori va kinetik momentni o‘zgartir-maydi, kinetik energiani o‘zgartirishi mumkin.

Teorema: *sistemaning ma’lum biror ko‘chishidagi kinetik energiyasining o‘zgarishi, sistemaga qo‘yilgan barcha tashqi va ichki kuchlarning shu ko‘chishda bajargan ishlarining yig‘indisiga teng.*

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) + \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^{\,i}\right). \qquad (4.101)$$

Isboti: (4.78) tenglamalar sistemasini hadma-had qo‘shib,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i};$$

ni hosil qilamiz. Buni τ urinma o‘qqa proyeksiyalab,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\, a_{k\tau} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{e} + \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{i};$$

va

$$a_{k\tau} = \frac{dV_k}{dt} = \frac{dV_k}{ds_k} \cdot \frac{ds_k}{dt} = V_k \cdot \frac{dV_k}{ds_k}$$

deb, massani ham differentsial belgisi ostiga kiritamiz,

$$\frac{d}{ds_k}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k V_K{}^{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{e} + \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{i};$$

ds_k ni o‘ng tomoniga ko‘paytirib,

$$d\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k V_K{}^{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{e} \cdot ds_k + \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{i} \cdot ds_k;$$

yoki

$$dT = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k{}^{e}\right) + \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k{}^{i}\right). \qquad (4.102)$$

Demak *mexanik sistema kinetik energiyasining differentsiyali unga ta’sir qiluvchi barcha tashqi va ichki kuchlar elementar ishlarining yig‘indisiga teng.* (4.102) ***ifoda mexanik sistema kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema-ning differentsiyal shakli*** deb ataladi.

E. MEXANIK SISTEMANING POTENSIAL ENERGIYASI. ENERGIYANING SAQLANISH QONUNI.

Agar ta’sir etayotgan kuch fazoning biror qismida (maydonida) belgilangan qonun bilan o‘zgarsa bu maydon ***kuch maydoni*** deb ataladi. Masalan Yerning sharining tortishish kuch maydoni jismning joylashishiga bog‘liq bo‘lib, koordinata-larning funksiyasi sifatida ifodalanishi mumkin. Ikkinchi misol, magnit kuchi ham jismning holatiga bog‘liq bo‘lib, unga yaqinlashgan sari magnit kuchining miqdori ortib borsa, uzoqlashgan sari kamayib boradi.

Bunday kuchlarning bajargan elementar ishi

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \qquad (4.103)$$

ifoda orqali hisoblanadi.

Agar bajarilgan ish jismning harakat qonuniga emas, balki faqat holatiga bog‘liq bo‘lsa, bunday kuchlar ***potensialli kuchlar*** deb ataladi:

$$U = U(x, y, z) \quad , \qquad (4.104)$$

u holda (4.103) tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$dA = dU \, . \qquad (4.105)$$

Kuchning proyeksiyalari potensialli kuch funksiyasi orqali xususiy differensial ko‘rinishida hisoblanadi:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \, . \qquad (4.106)$$

Kuchning proyeksiyalarining xususiy hosilalari esa

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

aralash hususiy hosilalari kerakli natijalar beradi:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \, .$$

Oxirgi tengliklardan ko‘rinib turibdiki,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \, . \qquad (4.107)$$

(4.107) tengliklar berilgan kuchning potensialli bo‘lishining ***zaruriy va etarli shartlari*** hisoblanadi.

Potensialli kuchlarni yaxshiroq tushunish uchun aniq misollar keltiramiz:

a) Yer sharidagi og‘irlik kuchi $U = -P \cdot z$;

   bunda z- vertikal balandlik;

b) prujinaning elastiklik kuchi $U = -c \cdot \frac{x^2}{2}$;

   bunda prujinaning cho‘zilishi (siqilishi) Ox o‘qi bo‘ylab;

d) jismning Yer shariga tortilish kuchi esa $U = -m \cdot g \cdot R^2 / r$;

bunda R – Yerning radiusi, r- Yerning markazidan jismgacha bo‘lgan masofa.

“Potensial” so‘zi fransuz tilidan olingan bo‘lib, “***potentiel*** ” – “***imkoniyatli***” yoki “***mumkin bo‘lgan***” ma’nolarini beradi. Mexanikada ham ***potensial energiya*** tushunchasi jismning biror kuch ta’sirida muvozanat holatida ham “***qo‘shimcha ish***” bajarishi mumkinligini bildiradi. Potensial energiyaning qiymati jismning boshlang‘ich va oxirgi holatlariga bog‘liq bo‘ladi.

Demak, *potentsial kuchning bajargan ishi, harakatlanayotgan nuqtaning boshlang‘ich va keyingi holatlaridagi potentsial energiyalarining ayirmasiga teng ekan.*

$$dA = U_0 - U_1;$$

bu yerda $U_0 = 0$ bo‘lgani uchun

$$dA = -U.$$

Potensial energiyani “***P*** ” harfi bilan belgilab,

$$P = -U; \qquad (4.108)$$

yoki potensial funksiyadan olingan xususiy hosilaga teng ekan.

Mexanik sistema uchun, *mexanik sistemaning mazkur holatidagi potentsial energiyasi P, sistemaning mazkur holatdan nol holatga ko‘chishda bajarilishi mumkin bo‘lgan ishning qiymatiga teng bo‘ladi*:

$$P = \sum_{k=1}^{n} A_{(M_k O_k)} \quad . \qquad (4.109)$$

Sistemaning potensial energiyasi va potensial kuch funksiyasi orasidagi munosabatni quyidagicha yozish mumkin:

$$P\,(x_1,\ y_1,\ z_1; \ldots; x_n,\ y_n,\ z_n) = -\,U\,(x_1,\ y_1,\ z_1; \ldots; x_n,\ y_n,\ z_n).$$

(4.110)

Faraz qilaylik, mexanik sistema potensialli kuch maydonida joylashgan. Unga ta’sir qilayotgan ichki va tashqi kuchlarning bajargan ishlarining yig‘indisi potensial energiyalarning ayirmasiga teng bo‘lsa,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = P_0 - P_1,$$

bu ifodani mexanik sistema kinetik energiya teoremasiga olib borib, qo‘ysak,

$$T_1 - T_0 = P_0 - P_1,$$

yoki

$$T_1 + P_1 = T_0 + P_0.$$

Demak *potensialli kuch maydonida kinetik va potensial energiyalarning yig'ndisi o'zgarmas ekan*:

$$T + P = const. \qquad (4.111)$$

(4.111) tenglik ***energiyaning saqlanish qonuni*** deb ataladi.

I. DINAMIKA UMUMIY TEOREMALARINING QATTIQ JISMGA TADBIQI.

Dinamika umumiy teoremalarining nazariy formulalarini mashina-mexanizmlarga qo'llash uchun mazkur ifodalarni qattiq jismnning turli harakatlariga bog'lab olish lozim. Sababi mexanik sistemaga chiqarilgan tenglamalar qattiq jismning harakatiga qarab, turli shaklda soddalashadi. Shuning uchun qattiq jismning barcha harakatlarini dinamik nuqtai-nazardan ko'rib chiqamiz. Kinematika qismida oniy aylanish nuqtasi sifatida ixtiyoriy nuqta olingan bo'lsa, dinamikada oniy aylanish nuqtasi sifatida faqat massalar markazi C nuqta olinadi.

1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati.

Qattiq jismning ilgarilanma harakati xuddi moddiy nuqtaning harakatiga mos bo'lib, barcha formulalar moddiy nuqta uchun chiqarilgan formulalarga o'xshash bo'ladi, faqat uning massasi ***m*** emas, balki ***M*** olinadi. Masalan ***qattiq jismning harakat miqdori***

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C\,, \qquad (4.112)$$

bunda $\vec{V}_C$ – jism massa markazining tezligi.

Qattiq jismning kinetik energiyasi

$$T = \frac{1}{2} M \cdot V_C{}^2\,. \qquad (4.113)$$

Qattiq jismning ilgarilanma harakati differensial tenglamasi massa markazi orqali ifodalanadi:

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} \quad . \tag{4.114}$$

Qattiq jismning harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi teorema ilgarilanma harakat uchun quyidagicha bo‘ladi:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{F}^e dt. \tag{4.115}$$

Qattiq jism kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema ilgarilanma harakat uchun quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \tag{4.116}$$

Umumiy teoremalarning formulalari o‘zgarishsiz qoladi.

2. *Qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati.*

Faraz qilaylik qattiq jism *Oz* o‘qi atrofida aylanma harakatda bo‘lsin. (4.96) ifodaga asosan ***jismning kinetik momenti***

$$K_z = I_z \cdot \omega, \tag{4.117}$$

vaqt bo‘yicha hosila olib,

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon \ .$$

Kinetik momentning o‘zgarishi haqidagi teoremadan

$$I_z \cdot \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{\,e}). \tag{4.118}$$

Agar $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ bilan almashtirilsa, ***qattiq jismning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakat differentsial tenglamasi*** hosil bo‘ladi:

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{\,e}). \tag{4.119}$$

Qattiq jismning qo‘zg‘almas *Oz* o‘qi atrofidagi aylanma harakatida uning ***kinetik energiyasi*** uning inersiya momenti $-I_z$ va aylanish burchakli tezligi $-\omega_z$ orqali hisoblanadi:

$$T = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega_z{}^2 . \qquad (4.120)$$

Qattiq jism kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema aylanma harakat uchun o‘zgarishsiz qoladi:

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k{}^{e}\right) . \qquad (4.116)$$

3. Qattiq jismning tekislikka parallel harakati.

Kinematika qismida ta’kidlaganimizdek, qattiq jismning tekislikka parallel harakati ilgarilanma va aylanma harakatlarning yig‘indisidan iborat. Uning harakat qonuni

$$\begin{cases} x_C = x(t); \\ y_C = y(t); \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \qquad (4.121)$$

bo‘lsa, ikki marta hosila olib, ***qattiq jismning tekislikka parallel harakati differentsial tenglamalari hosil qilinadi:***

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}{}^{e}; \\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}{}^{e}; \\ I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_C\left(\vec{F}_k{}^{e}\right). \end{cases} \qquad (4.122)$$

Bu tenglamalarning birinchi ikkitasi jism massa markazi C ning ilgarilanma harakatini ifodalaydi, oxirgi tenglama esa jismning massa markazi atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Tabiiy Cτnb o‘qlarga nisbatan yuqoridagi tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘lai:

$$\begin{cases} M\frac{dV_C}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}{}^{e}; \\ M\frac{V_C{}^2}{\rho_C} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn}{}^{e}; \\ I_{Cb}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_{Cb}\left(\vec{F}_k{}^{e}\right). \end{cases} \qquad (4.123)$$

Qattiq jismning tekislikka parallel harakatida uning kinetik energiyasi ham ikki qismdan iborat bo‘ladi:

$$T = T^{ilg} + T^{ayl} = \frac{1}{2} M \cdot V_C{}^2 + \frac{1}{2} I_z \cdot \omega_z{}^2 \ . \qquad (4.124)$$

Qattiq jism kinetik energiyasining o‘zgarishi haqidagi teorema tekislikka parallel harakat uchun o‘zgarishsiz qoladi:

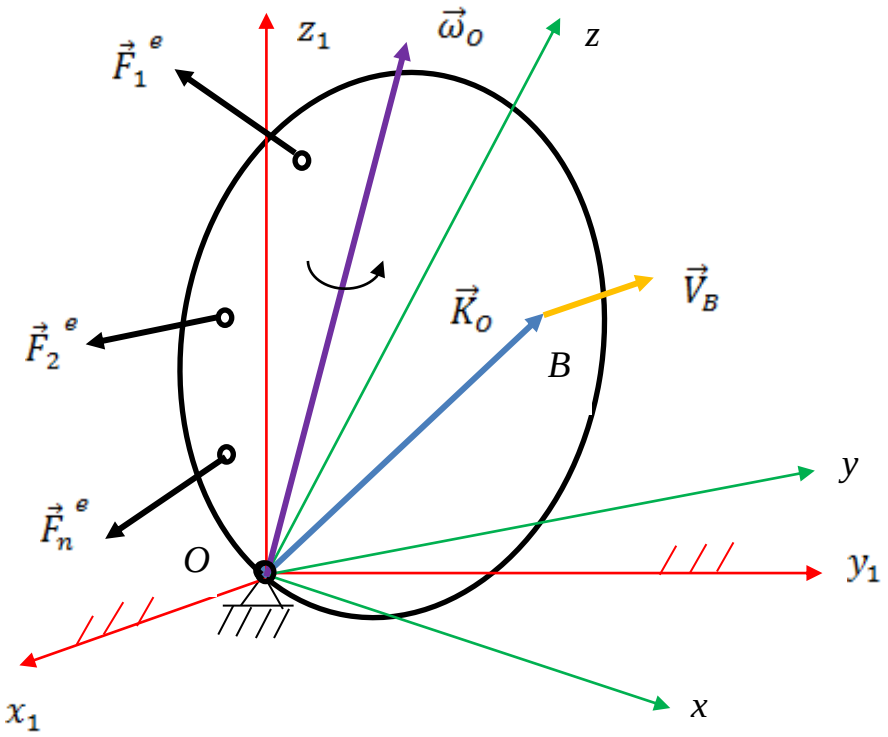
$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k{}^{e}\right). \qquad (4.117)$$

4. *Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakati.*

Qattiq jismning qo‘zg‘almas nuqta atrofidagi aylanma harakati Eylerning kinematik tenglamalari orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} \omega_x = \psi' \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \theta' \cdot \cos\varphi; \\ \omega_y = \psi' \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - \theta' \cdot \sin\varphi; \\ \omega_z = \psi' \cdot \cos\theta + \varphi'. \end{cases} \qquad (4.125)$$

Uning dinamik tenglamalarini tuzish uchun jismning kinetik momentini va kinetik energiyasini aniqlash zarur. Faraz qilaylik, massasi *M* bo‘lgan qattiq jism qo‘z-g‘almas koordinata o‘qlari $Ox_1y_1z_1$ ga nisbatan *O* nuqta atrofida qo‘zg‘aluvchi *Oxyz* o‘qlarga nisbatan $\vec{F}_1{}^{e}, \vec{F}_2{}^{e}, \vec{F}_3{}^{e}, \ldots, \vec{F}_1{}^{e}$ tashqi kuchlar ta’sirida aylansin (4.46-shakl).



4.46-shakl.

Uning O nuqtaga nisbatan kinetik momenti $\vec{K}_O$ ni proyeksiyalari K_x, K_y, K_z lar orqali aniqlaymiz:

$$M_x\left(m_k \cdot \vec{V}_k\right) = m_k\left(V_{kz} \cdot y_k - V_{ky} \cdot z_k\right).$$

Lekin Eyler formulasiga asosan

$$V_{ky} = \omega_z \cdot x_k - \omega_x \cdot z_k\,;$$

$$V_{kz} = \omega_x \cdot y_k - \omega_y \cdot x_k\ .$$

Bu yerdagi ω_x, ω_y, ω_z-lar, jismning oniy burchakli tezligini Oxyz o‘qlardagi proyektsiyalari; x_k, y_k, z_k lar jism nuqtalarining koordinatalari.

Ushbu v_{ky}, v_{kz} qiymatlarni oldingi tenglamaga keltirib qo‘yamiz; Oxyz o‘qlari bosh markaziy o‘qlar bo‘lganligi sababli, markazdan qochma inertsiya momentlari nolga teng bo‘ladi, shu sababli bu tenglamada paydo bo‘ladigan koordinatalarning ko‘paytmalarini tashlab yuboramiz, ya’ni

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k \cdot y_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k \cdot z_k = 0$$

bo‘ladi. Natijada umumiy ko‘paytma bo‘lgan ω_x qavsdan chiqarib, quyidagini yozamiz

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(m_k \cdot \vec{V}_k\right) = [\sum_{k=1}^{n} m_k\left({y_k}^2 + {z_k}^2\right)] \cdot \omega_x\,,$$

bu yerdagi kvadrat qavslarning ichidagi qiymat, Ox o‘qiga nisbatan inertsiya momentining ifodasi. Shu kabi hisoblarni olib borib, K_y va K_z larni ham aniqlaymiz, natijada:

$$\begin{cases} K_x = I_x \cdot \omega_x ; \\ K_y = I_y \cdot \omega_y ; \\ K_z = I_z \cdot \omega_z . \end{cases} \qquad (4.126)$$

(4.125) formulalar $\vec{K}_O$ vektorning O nuqta uchun bosh inertsiya o‘qlaridagi proyektsiyalarining ifodalaridan iborat.

Agar, Oxyz o‘qlar bosh o‘qlar bo‘lmasa, u holda (4.125) formula murakkabroq bo‘lgan ko‘rinishga keladi, ya’ni

$$\begin{cases} K_x = I_x \cdot \omega_x - I_{xy} \cdot \omega_y - I_{xz} \cdot \omega_z ; \\ K_y = -I_{xy} \cdot \omega_y + I_y \cdot \omega_y - I_{yz} \cdot \omega_z ; \\ K_z = -I_{xz} \cdot \omega_y - I_{yz} \cdot \omega_z + I_z \cdot \omega_z . \end{cases} \qquad (4.127)$$

Qattiq jismning qo‘zg‘almas *O* nuqta atrofidagi har qanday elementar ko‘chishi, faqat *O* nuqtadan o‘tuvchi *Ol* oniy o‘q atrofidagi $\vec{\omega}$ burchakli tezlik bilan sodir bo‘ladigan elementar burilishlardan iborat bo‘ladi. Shu sababli uning kinetik energiyasi

$$T = \frac{1}{2} I_l \cdot \omega^2 .$$

I_l ning qiymatini (4.93) yoki (4.94) formulalardan keltirib qo‘yamiz :

$$T = \frac{1}{2} (I_x \cdot \omega_x{}^2 + I_y \cdot \omega_y{}^2 + I_z \cdot \omega_z{}^2) , \qquad (4.128)$$

Agar, Oxyz o‘qlar bosh o‘qlar bo‘lmasa, u holda (4.120) formula murakkabroq bo‘lgan ko‘rinishga keladi, ya’ni

$$T = \frac{1}{2} (I_x \cdot \omega_x{}^2 + I_y \cdot \omega_y{}^2 + I_z \cdot \omega_z{}^2 -$$

$$-2I_{xy} \cdot \omega_x \cdot \omega_y - 2I_{yz} \cdot \omega_y \cdot \omega_z - 2I_{zx} \cdot \omega_z \cdot \omega_x); \qquad (4.129)$$

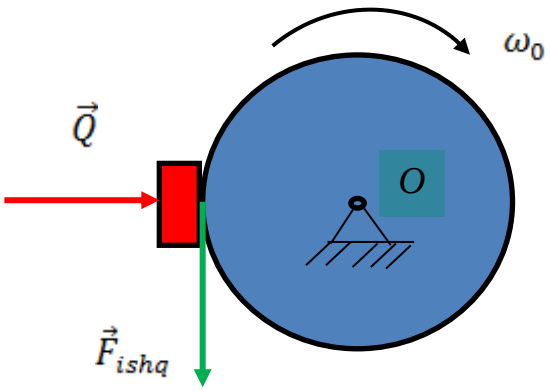
Aniqlangan kinetik moment va kinetik energiya formulalardan foydalanib, quyidagi dinamik tenglamalarni chiqarish mumkin :

$$\begin{cases} I_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \cdot \omega_z \cdot \omega_y = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k^{\,e}\right); \\ I_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k^{\,e}\right); \\ I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \cdot \omega_y \cdot \omega_x = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \end{cases} \qquad (4.130)$$

(4.130) tenglamalar ***Eylerning dinamik tenglamalari*** deb ataladi.

(4.124) va (4.130) tenglamalar birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar hisoblanib, ularni integrallash matematik nuqtai nazaridan ba'zi bir qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun taqribiy usullaridan foydalaniladi. Yuqoridagi qattiq jism dinamikasining formulalarini texnikadagi tadbiqini aniq masalalarda ko'rib o'taylik.

1-masala : Massasi ***m*** , radiusi ***R*** bo'lgan g'ildirak O o'q atrofida $\boldsymbol{\omega_0}$ burchakli tezlik bilan aylanadi. Ma'lum bir vaqtdan keyin, tormozlash yostiqchalari $\vec{Q}$ kuch bilan g'ildirakka bosiladi. Agar tormozlashdagi ishqalanish koeffitsiyenti ***f*** bo'lsa va g'ildirak *R* radiusli halqa deb, aylanish o'qidagi ishqalanishni hisobga olmay, g'ildirakning qancha vaqtda to'xtashi aniqlansin (4.47-shakl).



4.47-shakl.

Yechish : qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakat differentsial tenglamasi (4.128) tuziladi:

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^{\,e}).$$

$$I_O \cdot \frac{d\omega}{dt} = -F_{ishq} \cdot R \ ,$$

bu yerda $F_{ishq} = f \cdot Q,\ I_O = m \cdot R^2$, demak

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f \cdot Q}{m \cdot R} \ .$$

Bir marta integrallab,

$$\omega = -\frac{f \cdot Q}{m \cdot R} \cdot t + C_1 \ ,$$

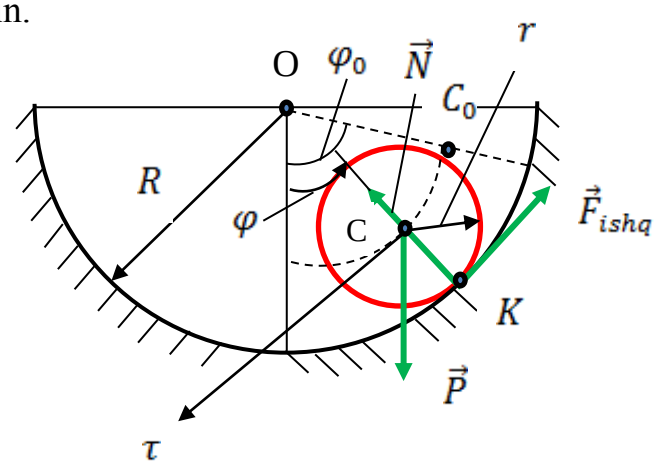
boshlang‘ich paytda *t=0* sekda $\omega = \omega_0$, demak $C_1 = \omega_0$.

Tormoz vaqti esa $t = t_1$ da $\omega = 0$ deb,

$$t_1 = \frac{m \cdot R \cdot \omega_0}{f \cdot Q}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

2-masala : Massasi ***m*** , radiusi ***r*** bo‘lgan bir jinsli tsilindr yarim doira shaklidagi, radiusi ***R*** bo‘lgan g‘adir-budir tsilidrik sirt ustida harakat qilmoqda (4.48-shakl). Agar harakatning boshlanishi $\boldsymbol{\varphi_0}$ dan va sirpanishdagi ishqalanish koeffitsienti ***f*** ga teng bo‘lsa, dumalashdagi qarshilikni hisobga olmay, tsilindrning harakat qonuni aniqlansin. $\boldsymbol{\varphi_0}$ ning qanday qiymatida sirpanishsiz dumalash sodir bo‘lishi aniqlansin.



4.48-shakl.

Yechish : Tsilindr markazi C dan τnb tabiiy o‘qlar o‘tkazib, (4.130) tenglamalarning birinchi va uchinchi tengliklarini tuzamiz :

$$\begin{cases} M\frac{dV_C}{dt} = P\cdot\sin\varphi - F_{ishq}; \\ I_{Cb}\cdot\frac{d\omega}{dt} = F_{ishq}\cdot r, \end{cases}$$

bunda $I_{Cb} = M\cdot r^2/2$ va K nuqta tezliklar oniy markazi bo‘lganligi uchun,

$$V_C = -(R-r)\cdot\dot{\varphi} \quad \text{dan} \quad \omega = \frac{V_C}{r} = -\frac{R-r}{r}\cdot\dot{\varphi}$$

Vaqt bo‘yicha hosila olib,

$$\frac{dV_C}{dt} = -(R-r)\cdot\ddot{\varphi} \quad ,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{R-r}{r}\cdot\ddot{\varphi}.$$

Tsilindrning pastga harakati φ burchakning kamayishiga olib kelgani uchun, V_C ning qiymati manfiy ishora bilan olinadi :

$$\begin{cases} M[-(R-r)\cdot\ddot{\varphi}] = M\cdot g\cdot\sin\varphi - F_{ishq}; \\ \frac{M\cdot r^2}{2}\cdot[-\frac{R-r}{r}\cdot\ddot{\varphi}] = F_{ishq}\cdot r, \end{cases}$$

Ishqalanish kuchi F_{ishq} ni chiqarib, harakat qonunini aniqlaymiz :

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)}\cdot\sin\varphi = 0.$$

Demak tebranma harakat doiraviy chastotasi

$$k^2 = \frac{2g}{3(R-r)}$$

ga teng ekan. Tebranish davri esa

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Endi φ ning juda kichik qiymatida vertikal tsilindrning yoyini to‘g‘ri chiziq deb olib, $N = P = Mg$ hisoblab, ishqalanish kuchini topamiz. Buning uchun tenglamalar sistemasi tenglamalarini hadma-had qo‘shib,

$$0 = M \cdot g \cdot \sin\varphi - F_{ishq} - 2F_{ishq};$$

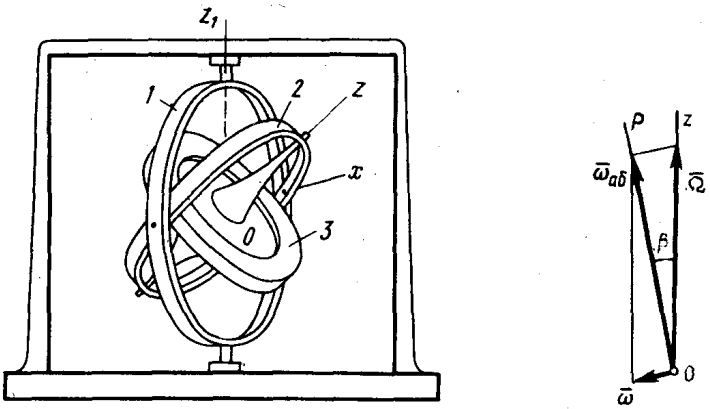
φ ning juda kichik qiymatida $\sin\varphi \approx \varphi$ va

$$F_{ishq} = M \cdot g \cdot \varphi/3 .$$

Demak, $F_{ishq} \leq f \cdot Mg$ dan, $\varphi \leq 3f$.

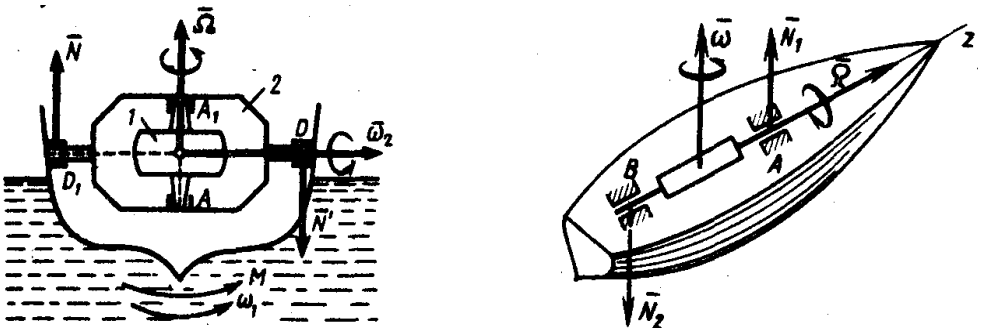
Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, $\varphi_0 \leq 3f$ da tsilindrning dumalanishi sirpanishsiz sodir bo‘lar ekan.

3-masala : Og‘irlik markazi qo‘zg‘almas, erkinlik darajasi 3 ga teng bo‘lgan giroskopning harakat tenglamasi tuzilsin. Og‘irlik kuchidan boshqa tashqi kuchlar hisobga olinmasin (4.49-shakl).



4.49-shakl.

Yechish : Oz simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan va shu o‘q atrofida Ω burchakli tezlik bilan harakatlanuvchi bir jinsli va birorta O nuqtasi qo‘zg‘almas bo‘lgan qattiq jism ***giroskop*** deb ataladi. Fransuz olimi J.Fuko[18] Yer sharining o‘z o‘qi atrofida aylanishini tajribada ko‘rsatish uchun 1852 yilda 4.49-shakldagiga o‘xshagan uskuna tayyorlagan va uni giroskop (yunon tilidagi “***gyreuo”*** - aylanaman va “***skoreo”*** -ko‘rmoqdaman, kuzatmoqdaman) deb atagan edi. Keyinchalik giroskopning texnikadagi o‘rni juda ommalashib ketdi, sababi unda hosil qilingan ***giroskopik moment kuchi*** havo va suyuqlikda harakatlanuvchi samolyot va kemalarni burishda yoki ularni bir xil yo‘nalishda harakatlanishida ishlatiladi (4.50-shakl).



4.50-shakl.

Kinetik momentning o‘zgarishi haqidagi teoremadan :

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_k{}^{e}).$$

Koordinata boshi og‘irlik markazidan o‘tgani uchun va boshqa tashqi kuchlar hisobga olinmagani uchun,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k{}^{e}\right) = 0,$$

demak

$$\vec{K}_o = \overrightarrow{const}\,.$$

Oz_1 o‘qni $\vec{K}_O$ bo‘ylab yo‘naltirsak, Oz ni esa simmetriya o‘qida olsak,

$$I_x = I_y\,,$$

va $M_z = O$ bo‘lganligi uchun

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 0,$$

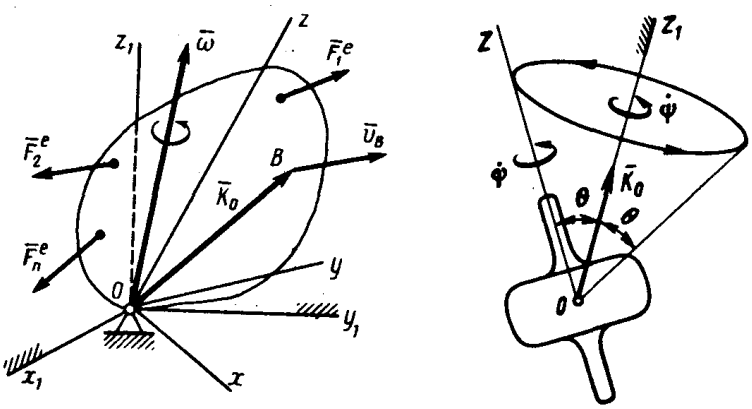
bundan $\omega_z = const$ va $K_z = I_z \cdot \omega_z = const.$

Lekin 4.51-shakl dan ko‘rinib turibdiki,

$$K_z = K_O \cdot \cos\theta.$$

Bu yerda $\theta = \angle z_1 Oz$ –nutasiya burchagi, $K_O = const$ dan $\cos\theta = const,$ yoki

$$\theta = const.$$



4.51-shakl.

Endi Eylerning dinamik tenglamalarini

$$\begin{cases} I_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \cdot \omega_z \cdot \omega_y = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k^{\,e}\right); \\ I_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k^{\,e}\right); \\ I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \cdot \omega_y \cdot \omega_x = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k^{\,e}\right). \end{cases}$$

birinchisini ω_x ga ikkinchisini ω_y ga ko‘paytirib, hadma-had qo‘shsak, $I_x = I_y$ ni va $M_x = M_y = 0$ ni hisobga olib,

$$I_x(\omega_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt}) = 0.$$

Bir marta integrallab va I_x ga bo‘lib,

$$\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 = const.$$

ω_x va ω_y larni, Eylerning kinematik tenglamalaridagi qiymatlari bilan almashtirsak,

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

bundan

$$\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 = \dot{\psi}^2 \cdot sin^2\theta.$$

$\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 = const$ va $\cos\theta = \sin\theta = const$ dan

$$\dot{\psi} = const.$$

Va nihoyat, Eylerning kinematik tenglamalarining oxirgisidan

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta$$

bo‘ladi. Bu yerdagi ω_z, $\dot{\psi}$ va cosθ lar o‘zgarmas qiymatlar. Demak,

$$\dot{\varphi} = \text{const} = \dot{\varphi}_0$$

Shunday qilib, har qanday boshlang‘ich shartlardan qat’iy nazar, giroskop o‘zining simmetriya o‘qi atrofida o‘zgarmas $\dot{\varphi}_0$ burchakli tezlik bilan harakat qilar ekan. O‘z navbatida shu simmetriya o‘qi esa qo‘zg‘almas Oz_1 o‘q atrofida $\dot{\psi}$ burchakli tezlik bilan uchidagi $2\theta_0$ burchakli konussimon sirt bo‘ylab harakat qilar ekan (4.51-shakl). Giroskopning bunday harakati, ***regulyar pretsessiya*** harkati deb ataladi.

V-BOB.

ANALITIK MEXANIKA.

BOBNING MAQSADI:

- Analitik mexanika haqida tushuncha berish.
- Mexanikaning asosiy prinsiplari bilan tanishtirish.
- Lagranj tenglamalari bilan tanishtirish.

5.1.1. Analitik mexanikaning vazifalari va tushunchalari.

Har bir fanni rivojlantirgan olimlar mazkur fan uchun umumlashgan formulalar va umumlashgan teoremalar yaratishga harakat qilishgan. Bunday harakatlar mexanika fani tarixida ham bo‘lgan. Ayniqsa XVII-XIX asrlarda yashab o‘tgan Yevropalik olimlar J.Dalamber, J.Lagranj va boshqalar, XVIII-XIX asrlarda yashagan Rossiyalik olimlar L.Eyler, M.B.Lomonosov, M.B.Ostragradskiy, P.L.Chebishev, S.B.Kovalev-skaya, A.M. Lyapunov va boshqalar mexanikaning analitik usullari, ya’ni differentsial va integral hisoblariga asoslangan usullarini rivojlantirishgan. Dalamber va Lagranj asoslagan analitik mexanika elementlari hozirgi kungacha dolzarb va zamonaviy hisoblanadi. Hatto ular yaratgan prinsiplar va formulalar bosqa fanlardagi o‘zgaruv-chan jarayonlarni tadqiq qilishda juda qo‘l keladi. Buning sababi bu prinsiplar va formulalar birlikka ega bo‘lmagan kattaliklarda (yoki ixtiyoriy o‘lchov kattaligi uchun) ishlab chiqilgan. Analitik mexanikaning bo‘lajak muhandislar uchun asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

1) Ko‘p qismlardan iborat, murakkab tuzilmalar uchun statikadagi muvozanat tenglamalarini qisqa va hisoblashlari yengil bo‘lgan usullarni yaratish.
2) Mexanik sistemalar uchun ichki kuchlar va passiv kuchlarni hisobga olmay, harakat differentsial tenglamalarini tuzish hamda maxsus dasturlar asosida kompyuter yordamida integrallash.

3) Analitik mexanika elementlarini elektrodinamik analoglar yordamida boshqa sohalarga tadbiq etishni o‘rganish.

5.1.2. Dinamik bog‘lanishlar.

Statika qismida turli xil tayanchlarda uchraydigan bog‘lanishlar bilan tanistirildi. Lekin jism harakatiga qo‘yilgan chek (to‘siq) va chegaralar (yo‘naltiruvchi va boshq.) turlicha bo‘lishi mumkin. Shuning uchun dinamikada ***bog‘lanishlar*** deb, sistemaga ta’sir etayotgan kuchlarning qanday bo‘lishligidan qat’iy nazar, mexanik sistema nuqtalarining holatlariga va ularning tezliklariga qo‘yiladigan chegaralanishga aytiladi. Bunday bog‘lanishlarning turlarini ko‘rib o‘tamiz:

- ideal va ideal bo‘lmagan bog‘lanishlar;
- statsionar va nostatsiyonar bog‘lanishlar;
- geometrik, kinematik va differentsial bog‘lanishlar;
- integrallanuvchi va integrallanmaydigan bog‘lanishlar;
- golonom va nogolonom bog‘lanishlar;
- ishlab turuvchi va ishlab tura olmaydigan bog‘lanishlar va h.k.

Ideal bog‘lanishlar deb, sistemaning cheksik kichik ko‘chishida passiv kuchlarning (ishqalanish va reaksiya kuchlarining) bajargan ishlari nolga teng bo‘lgan bog‘lanishlarga aytiladi. Masalan juda yaxshi yog‘langan podshipniklar va muftalar,porshenlar, silliq sirt, bunga misol bo‘la oladi. Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan bog‘lanishlarni, ***statsionar*** bog‘lanishlar deb ataladi, vaqtga bog‘liq holda o‘zgaruvchi bog‘lanishlarni ***nostatsionar*** bog‘lanishlar deb ataladi. Statsionar bog‘lanishlar matematik funksiya sifatida quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (5.1)$$

nostatsionar bog‘lanishlar esa

$$f(x, y, z, t) = 0. \qquad (5.2)$$

Masalan vaqtga bog‘liq ravishda ishlaydigan klapanlar, tormozlash va ishga tushuruvchi moslamalar. ***Geometrik bog‘lanishlar*** deb, sistema nuqtalarining faqat holatlarini chegaralovchi bog‘lanishlarga aytiladi. Turli tayanchlar, ipli, sterjenli va

h.k. lar. Agar bog‘lanish sistema nuqtalarining koordinatalaridan tashqari uning tezligini ham cheklasa, bunday bog‘lanishlar ***kinematik yoki differentsial bog‘lanish*** deb ataladi. Masalan prujinalar, ochilb-yopiluvchi kranlar, tormozlash tizimlari va h.k. lar. ***Integrallanuvchi bog‘lanishlar*** deb, sistema nuqtalarining tezliklarini uning koordinatalarining to‘liq differentsiali sifatida ifodalay olish mumkin bo‘lgan bog‘lanishlarga aytiladi. ***Golonom bog‘lanishlar*** deb, bir vaqtning o‘zida ham geometrik, ham integrallanadigan differentsial bog‘lanishlarga aytiladi. Va nihoyat, ***ushlab tura oluvchi*** (bunday chegaralar sistemaning ixtiyoriy holatida ham ta’sir etadigan) va ***ushlab tura ololmaydigan***, ya’ni yuqorigiday xossaga ega bo‘lmagan (sistema bunday bog‘lanishlardan «ozod bo‘la olishi» mumkin bo‘lgan) bog‘lanishlarga ajaraladi.

Umuman olganda, zamonaviy mashina-mexanizmlarda turli xil aralash moslamalar o‘rnatilgan bo‘lib, hisob-kitoblarda ularning xossalari, soddalashtirish uchun, yuqoridagi xususiyatlarga bo‘lib olinadi va nazariy ma’lumotlar albatta tajriba natijalari bilan solishtiriladi.

5.1.3. Dinamika prinsiplari.

Prinsip so‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “qoida” yoki “qonun” ma’nolarini anglatadi. Mexanikada ham bir necha “qoida”lar mavjud bo‘lib, ular mexanika masalalarini “virtual”-“hayoliy-fikran” (lotincha “virtus”- kuch, quvvat, ta’sir va h.k.) farazlar orqali juda sodda yo‘l bilan hal qiladi. Moddiy nuqta uchun bu prinsiplar oddiy almashtirishdek tuyulsa ham, mexanik sistema uchun juda katta ijobiy natijalarga va soddalashtirishlarga olib keladi. Mexanikadagi prinsiplar quyidagilardan iborat bo‘lib, o‘zaro bir-biri bilan chambars-chars bog‘liq:

1) Dalamber prinsipi.
2) Lagranjning mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi.
3) Dalamber-Lagranj prinsipi.

A. DALAMBER PRINSIPI.

Dalamber prinsipining ***ma'nosi***- jismning harakati "hayolan-fikran" to'xtatilib, ta'sir etayotgan kuchlar qatoriga inersiya kuchlarini qo'shib, dinamika masalasi statika masalasiga keltiriladi. Bu usul mexanikada ***"kinetostatika"*** - "harakatni to'xtatish" usuli deb yuritiladi.

Faraz qilaylik erkin bo'lmagan moddiy nuqta aktiv va reasiya kuchlari ta'sirida harakat qilsin. Uning harakat differensial tenglamasi (4.38) korinishga ega bo'ladi:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} + \vec{N}.$$

Chap tomondagi $m\vec{a}$ ifodani o'ngga o'tkazib,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} + \vec{N} - m\vec{a} = 0,$$

ni hosil qilamiz va ***inersiya kuchlari*** uchun

$$\vec{F}^{in} = -m\vec{a} \qquad (5.1)$$

belgilash kiritib,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} + \vec{N} + \vec{F}^{in} = 0,$$

yoki qisqacha

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{in} = 0. \qquad (5.2)$$

Demak, *moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga inersiya kuchlarini qo'shsak, hosil bo'lgan kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi.* (5.2) tenglik moddiy nuqta uchun ***Dalamber prinsipini*** ifodalaydi. Statika qoidalariga asosan mazkur kuchlar uchun muvozanat shartlarini tuzish mumkin:

$$F_x + N_x + F_x^{\,in} = 0; \qquad F_y + N_y + F_y^{\,in} = 0; \quad F_z + N_z + F_z^{\,in} = 0; \qquad (5.3)$$

proyeksiya tenglamalari va

$$\begin{cases} m_x(\vec{F}) + m_x(\vec{N}) + m_x(\vec{F}^{in}) = 0; \\ m_y(\vec{F}) + m_y(\vec{N}) + m_y(\vec{F}^{in}) = 0; \\ m_z(\vec{F}) + m_z(\vec{N}) + m_z(\vec{F}^{in}) = 0, \end{cases} \qquad (5.4)$$

moment tenglamalari tuziladi va noma'lumlar aniqlanadi.

Mexanik sistemaning k-ni nuqtasi uchun Dalamber printsipi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i} + \vec{F}_k^{\,in} = 0,$$

bu yerda $\vec{F}_k^{\,e}$ –ta'sir etuvchi tashqi kuchlar; $\vec{F}_k^{\,i}$ –ta'sir etuvchi ichki kuchlar;

$\vec{F}_k^{\,in}$ –ta'sir etuvchi inersiya kuchlari.

Butun mexanik sistema uchun ichki kuchlarning xossalariga asosan $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,i} = 0$, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,in} = 0. \qquad (5.5)$$

Demak, *mexanik sistemaga ta'sir etayotgan tashqi kuchlar qatoriga inersiya kuchlarini qo'shsak, bu kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi.*

(5.3) va (5.4) tenglamalar mexanik sistema uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

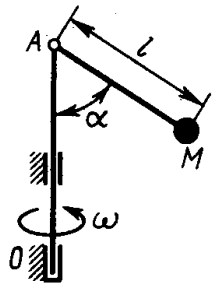
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{\,in} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^{\,in} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^{\,in} = 0, \end{cases} \qquad (5.6)$$

moment tenglamalari esa

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k^{\,in}) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k^{\,in}) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k^{\,in}) = 0. \end{cases} \qquad (5.7)$$

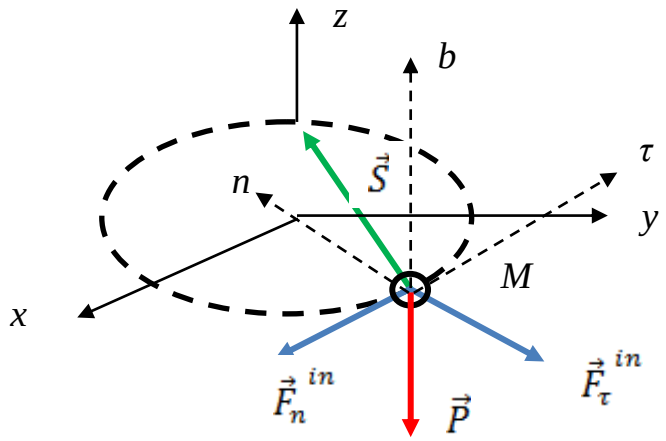
Yuqoridagi nazariy ma’lumotlarni amaliy masalalarga tadbiqini ko‘rib chiqamiz.

1-masala: Uzunligi *l*=0,981m bo‘lgan sterjen uchidagi *m=2kg* massali M moddiy nuqta OA=1,5*l* vertikal o‘q atrofida *ω*=4,47rad/s burchak tezlik bilan tekis aylanadi (5.1-shakl). OA va MA sterjenlarning massasini hisobga olmay, tayanchlardagi gorizontal reaksiya kuchlari va sterjenning vertikal bilan hosil qilgan burchagini graduslarda toping. Tayanchlar orasi 0,5*l* ga teng.



5.1-shakl.

Yechish: Moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan tashqi kuchlar $\vec{P}$ –og‘irlik kuchi, sterjenning zo‘riqishi $\vec{S}$ va inersiya kuchlari $\vec{F}_n^{\,in}$, $\vec{F}_\tau^{\,in}$ ni chizmada tasvirlaymiz (5.2-shakl).



5.2-shakl.

Mτnb o‘qlarga nisbatan muvozanat shartlari tuziladi:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} = 0; & -F_{\tau}^{in} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kn} = 0; & -F_{n}^{in} + S \cdot sin\alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kb} = 0; & S \cdot \cos\alpha - P = 0, \end{cases} \quad (1)$$

bu yerdagi markazdan qochma inertsiya kuchi

$$F_{n}^{in} = m \cdot a_n = m \cdot l \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2 = 2 \cdot 0{,}981 \cdot 0{,}866 \cdot 4{,}47^2 = 33{,}94\ N, \quad (2)$$

bo‘lgani uchun, sistemaning 2-tenglamasidan

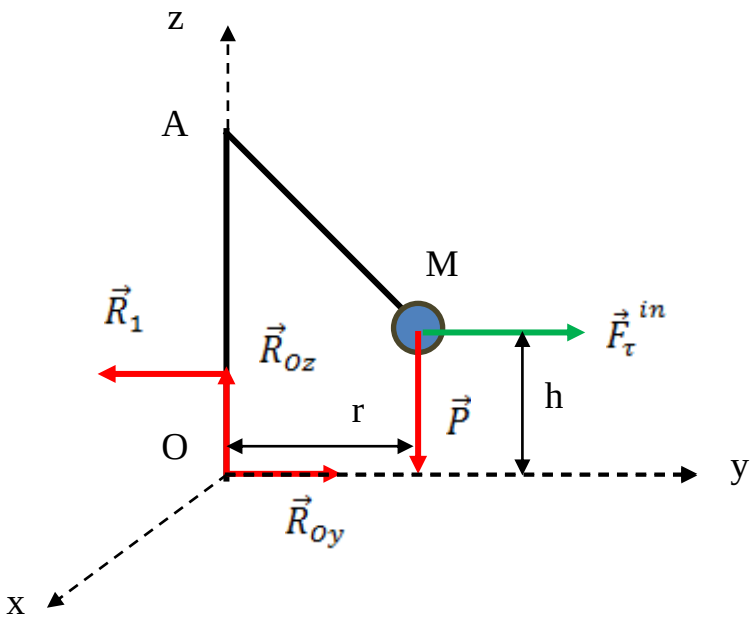
$$S = m \cdot l \cdot \omega^2.$$

sistemaning 3-tenglamasidan

$$\cos\alpha = \frac{P}{S} = \frac{g}{l \cdot \omega^2} = \frac{9{,}81}{0{,}981 \cdot 4{,}47^2} = 0{,}5$$

demak $\alpha = 60°$.

3) OA va MA sterjen hamda M moddiy nuqtani sistema deb olib, ta’sir etyotgan tashqi kuchlar qatoriga inertsiya kuchlarini qo‘shamiz va muvozanat shartlarini tuzamiz (5.3-shakl). MA sterjenning zo‘riqishi $\vec{S}$ sistema uchun ichki kuch bo‘lib qoladi.



5.3-shakl.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad F_{\tau}^{in} - R_1 + R_{Oy} = 0; & (d) \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \quad R_O - P = 0; & (e) \\ \sum_{k=1}^{n} m_O(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_{\tau}^{in} \cdot h - P \cdot r + R_1 \cdot 0{,}5l = 0; & (f) \end{cases}$$

bu yerda $h = OA\text{-}MA \cdot \cos\alpha = 1{,}5l - l \cdot cos60° = l;$

$r = MA \cdot \sin 60° = 0{,}866l,$

u holda uchinch tenglamadan

$$R_1 = \frac{m(l \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2 + 0{,}866g)}{0{,}5} = \frac{2 \cdot (0{,}981 \cdot 0{,}866 \cdot 4{,}47^2 + 0{,}866 \cdot 9{,}81)}{0{,}5} = 101{,}88\,N$$

birinch tenglamadan $R_{Oy} = R_1 - F_{\tau}^{in} = 101{,}88 - 33{,}94 = 67{,}94\,N.$

B. MUMKIN BO‘LGAN KO‘CHISH PRINSIPI.

Statika qismida tuzilgan muvozanat shartlari muvozanatning ***zaruriy*** shartlari hisoblanadi. Mumkin bo‘lgan ko‘chish (ingliz tilida –virtual-“hayoliy-fikran”) prinsipi mexanik sistema muvozanatining ***zaruriy*** va ***etarli*** shartlari hisoblanadi. Bir necha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini tekshirishda Lagranj yaratgan mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi juda yaxshi natija beradi.

Jismlar sistemasiga (mexanik sistemaga) qo‘yilgan bog‘lanishlar shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday cheksiz kichik ko‘chishlar to‘plami ***mumkin bo‘lgan ko‘chishlar*** deyiladi. Nazariy mexanikada haqiqiy ko‘chishlar $d\vec{r}$, dφ, ds, dx, dy, dz harflar bilan, mumkin bo‘lgan ko‘chishlar esa $\delta\vec{r}$, $\delta\varphi$, δs, δx, δy, δz ko‘rinishda belgilanadi. Haqiqiy va mumkin bo‘lgan ko‘chishlarni farqlash uchun quyidagi jadvalni havola etamiz:

5.1-jadval.

T/r	haqiqiy ko‘chishlar	mumkin bo‘lgan ko‘chishlar
1	Elementar kichik qiymatga ega (bog‘lanishlarning mazmuni va shakli elementar o‘zgarishi mumkin, masalan, mexanizmlarning geometrik holati juda kichik o‘zgarishi mumkin)	Cheksiz kichik qiymatga ega (bog‘lanishlarning mazmuni va shakli o‘zgarmaydi, masalan, mexanizmlarning geometrik holati o‘zgarmaydi)
2	Statsionar bog‘lanishlarda (5.1) haqiqiy va mumkin bo‘lgan ko‘chishlar bir xil bo‘ladi.	
3	Nostatsionar bog‘lanishlarda (5.2) haqiqiy va mumkin bo‘lgan ko‘chishlar farq qiladi.	

Agar sistema M_k nuqtasining koordinatalarini x_k, y_k, z_k bilan belgilasak, uning mumkin bo‘lgan ko‘chish vektori

$$\delta\vec{r}_k = \delta x_k \cdot \vec{i} + \delta y_k \cdot \vec{j} + \delta z_k \cdot \vec{k} \qquad (5.3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda δx_k, δy_k, δz_k mumkin bo‘lgan ko‘chish $\delta\vec{r}_k$ ning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari.

Analitik mexanikada sistemaning harakatini yoki muvozanatini tekshirishda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan yana bir tushuncha-***berilgan kuchning mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi ishi*** tushinchasi kiritiladi. $\vec{F}$ kuchining $\delta\vec{r}$ mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi elementar ishi quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}\,, \qquad (5.4)$$

yoki

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z. \qquad (5.5)$$

Agar sistemaning har qanday mumkin bo‘lgan ko‘chishida sistema nuqtalariga qo‘yilgan reaksiya kuchlari bajargan ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lsa,

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0\,, \qquad (5.6)$$

bunday bog‘lanishlar ***ideal bog‘lanishlar*** deb ataladi. Ideal bog‘lanishli sistemalar mashina-mexanizmlarda va boshqa konstruksiyalarda juda ko‘p uchraydi. Masalan, ideal siiliq sirtdagi jismlar, qo‘zg‘almas nuqtasi atrofida aylanma harakat qilayotgan jism, krivoship-polzunli mexanizm va h.k.

Teorema. *Ideal, bo‘shatmaydigan, statsionar bog‘lanishlar qo‘yilgan sistema muvozanatda bo‘lishi uchun sistemaning har qanday mumkin bo‘lgan ko‘chishida unga qo‘yilgan aktiv kuchlar ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lishi zarur va etarli:*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{a} = 0, \text{ yoki } \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k{}^{a} \cdot \delta \vec{r}_k = 0\,. \qquad (5.7)$$

Oxirgi tenglikning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}{}^{a} \cdot \delta x_k + F_{ky}{}^{a} \cdot \delta y_k + F_{kz}{}^{a} \cdot \delta z_k) = 0 \qquad (5.8)$$

Isbot: faraz qilaylik, mexanik sistemaning M_k nuqtasiga $\vec{F}_k$ kuch ta’sir qilsin. Ma’lumki, kuch aktiv va passiv kuchlarga ajratilgan. Passiv kuchlarga esa reaksiya kuchlari kiradi:

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k{}^{a} + \vec{N}_k$$

Sistema nuqtasiga $\delta \vec{r}_k$mumkin bo‘lgan ko‘chish berib,

$$(\vec{F}_k{}^{a} + \vec{N}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

Butun sistema uchun yig‘indi olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k{}^{a} + \vec{N}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

yoki $$\sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k{}^{a} \cdot \delta \vec{r}_k + \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k) = 0$$

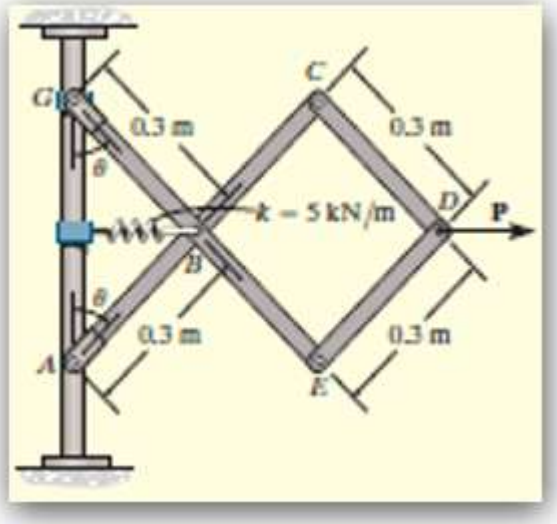
(5.6) ga asosan $\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$, demak

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k{}^{a} \cdot \delta \vec{r}_k = 0\,. \qquad (5.9)$$

(5.7) va (5.8) tenglamalar ***statikaning umumiy tenglamalari*** deb ataladi, chunki ular yordamida statikaning barcha masalalarini yechsa boladi.

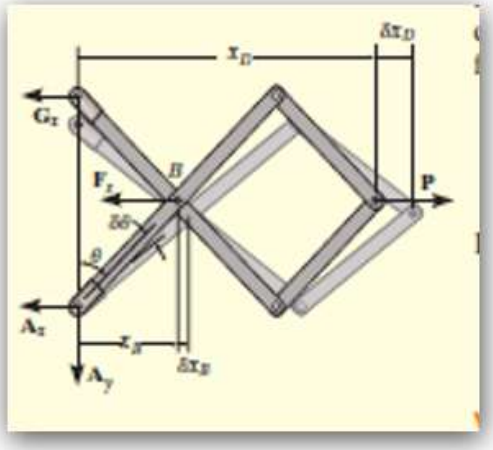
Amaliy masalalar yechimi orqali mumkin bo‘lgan ko‘cish prinsipining qanchalik qulayligini ko‘ramiz.

1-masala: (chet el adabiyotidan olindi). Qaychisimon mexanizmning o‘lchamlari va prujinasining bikrligi berilgan (5.4-shakl). Agar mexanizm $\theta = 30°$ holatda muvozanatda turgan bo‘lsa, sterjenlarning og‘irliklarini hisobga olmay, uni $\theta = 60°$ holatga keltirish uchun qanday $\vec{P}$ kuchi kerak bo‘lishini aniqlansin ?



5.4-shakl.

Yechish: Mexanizmga ta’sir qiluvchi aktiv kuchlarga $\vec{P}$ -cho‘zuvchi kuch va prujinaning bikrlik kuchi $\vec{F}_x$ kiradi. $\theta = 30°$ holatdan $\theta = 60°$ holatgacha mexanizmga mumkin bo‘lgan ko‘chish berib, aktiv kuchlarning ishini nolga tenglaymiz(5.5-shakl):



5.5-shakl.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,a} \cdot \delta\vec{r}_k = 0\,, \qquad (1)$$

yoki

$$P \cdot \delta x_D + F_x \cdot \delta x_B = 0. \qquad (2)$$

bu yerda δx_B va δx_D- B va D nuqtalarning mumkin bo‘lgan ko‘chishlari:

$$\delta x_B = 0{,}3 \cdot \sin\theta\,;$$

$$\delta x_D = 0{,}9 \cdot \sin\theta\,.$$

Prujinaning bikrlik kuchi esa

$$F_x = kx = 5000 \cdot (0{,}3 \cdot \sin\theta - 0{,}3 \cdot \sin 30°).$$

$\theta = 60°\ da\ F_x = 5000 \cdot (0{,}3 \cdot \sin 60° - 0{,}3 \cdot \sin 30°) = 549\ N.$

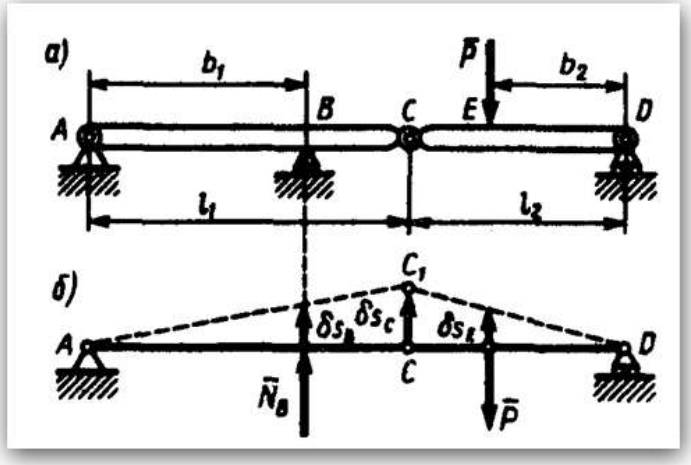
$$\delta x_B = 0{,}3 \cdot \sin 60° = 0{,}2598\ m;$$

$$\delta x_D = 0{,}9 \cdot \sin 60° = 0{,}7794\ m.$$

Bu qiymatlarni (*b*) tenglamaga qo‘yib, noma’lum kuchni aniqlaymiz:

$$P = F_x \cdot \frac{\delta x_B}{\delta x_D} = 549 \cdot \frac{0{,}2598}{0{,}7794} = 183\ N.$$

1-masala: C nuqtada sharnir orqali biriktirilgan ikki qismdan iborat qo‘shma konstruksiyaga P = 9 N kuch ta’sir qilsa, A va B tayanchdagi reaksiya kuchlari hisoblansin(5.6,a-shakl). O‘lchamlarning qiymati $l_1 = 8m;\ l_2 = 6m;$ $b_1 = 6m;$ va $b_2 = 4m$ deb olinsin.



5.6.-shakl.

Yechish: 1) B tayanchdagi $\vec{N}_B$ reaksiya kuchini aniqlash uchun C sharnili nuqtaga δs_C mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz va (5.8) tenglamalarni tuzamiz:

$$N_B \cdot \delta s_B - P \cdot \delta s_E = 0 \qquad (1)$$

δs_B va δs_E mumkin bo‘lgan ko‘chishlarni o‘zaro bog‘lash uchun, ΔACC_1 va ΔDCC_1 o‘xshashligidan foydalanamiz:

$$\frac{\delta s_C}{l_1} = \frac{\delta s_B}{b_1}; \qquad \text{va} \qquad \frac{\delta s_C}{l_2} = \frac{\delta s_E}{b_2};$$

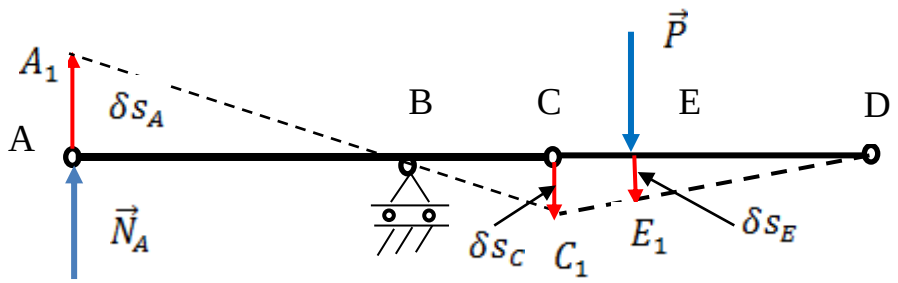
$$\text{bundan} \quad \delta s_C = \frac{l_1}{b_1} \cdot \delta s_B = \frac{8}{6} \cdot \delta s_B = \frac{4}{3} \cdot \delta s_B; \quad \text{va}$$

$$\delta s_C = \frac{l_2}{b_2} \cdot \delta s_E = \frac{6}{4} \cdot \delta s_E = \frac{3}{2} \cdot \delta s_E;$$

demak $\delta s_B = \frac{9}{8} \cdot \delta s_E$; bu qiymatni (*a*) tenglikka qo‘yib, δs_E ga qisqartirib, noma’lumni topamiz:

$$N_B = \frac{8}{9} \cdot P = \frac{8}{9} \cdot 9 = 8 \text{ N}.$$

2) A tayanch reaksiya kuchini topish uchun, B tayanchni o‘z joyida qoldirib, A tayanchga δs_A mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz (5.7-shakl).



5.7-shakl ю

$$N_A \cdot \delta s_A + P \cdot \delta s_E = 0, \qquad (2)$$

ΔABA_1 , ΔBCC_1 va ΔDCC_1 o‘xshashligidan

$$\frac{\delta s_C}{l_1-b_1}=\frac{\delta s_A}{b_1}; \qquad \text{va} \qquad \frac{\delta s_C}{l_2}=\frac{\delta s_E}{l_2-b_2};$$

bundan $\delta s_C=\frac{l_1-b_1}{b_1}\cdot\delta s_A=\frac{2}{6}\cdot\delta s_A=\frac{1}{3}\cdot\delta s_A;$

va $\delta s_C=\frac{l_2}{l_2-b_2}\cdot\delta s_E=\frac{6}{2}\cdot\delta s_E=3\cdot\delta s_E;$

demak $\delta s_A=9\cdot\delta s_E;$ bu qiymatni (2) tenglikka qo‘yib, δs_E ga qisqartirib, noma’lumni topamiz:

$$N_A=-\frac{1}{9}\cdot P=-\frac{1}{9}\cdot 9=-1\ N.$$

Manfiy ishora $\vec{N}_A$ kuchining haqiqiy yo‘nalish 5.7-shaklda ko‘rsatilganiga qarama-qarshi bo‘lishini bildiradi.

D. DALAMBER-LAGRANJ PRINSIPI.

Dalamber-Lagranj prinsipida mexanik sistemaga birinchi kinetostatika usuli qo‘llaniladi, ya’ni harakat fikran to‘xtatilib, ta’sir kuchlari qatoriga inersiya kuchlari qo‘shiladi va ikkinchi mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladi. Boshqachasiga aytganda, mexanik sistemaga yuqoridagi ikki prinsip birdaniga qo‘llaniladi.

Faraz qilaylik, ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Uning har bir nuqtasiga $\vec{F}_k^{\,a}$ aktiv kuchlar, bog‘lanish reaksiya kuchlari-$\vec{N}_k$ va Dalamber prinsipiga asosan, inertsiya kuchlari-$\vec{F}_k^{\,in}$ ta’sir qilsin. Shu holatda sistema muvozanatda bo‘ladi. Endi sistema nuqtalariga mumkin bo‘lgan ko‘chish berib, elementar ishlar yig‘indisini nolga tenglaymiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{\,a}+\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{\,in}+\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{\,r}=0.$$

Lekin (5.6) tenglikka asosan, reaksiya kuchlarining mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{\,r}=0.$$

U holda yuqoridagi tenglik

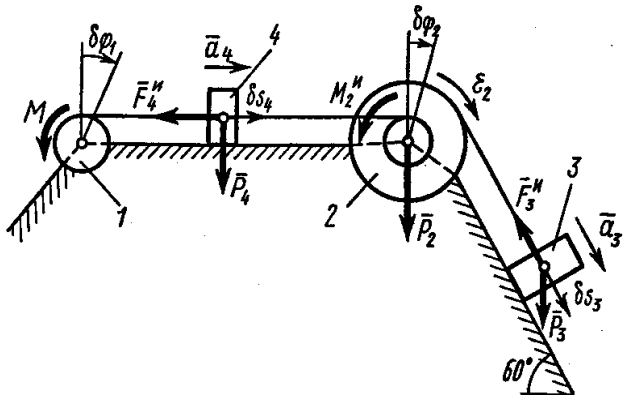
$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{a} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{in} = 0 \qquad (5.10)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Olingan natijadan ***Dalamber-Lagranj prinsipi*** kelib chiqadi: *ideal bog‘lanishlar qo‘yilgan mexanik sistemaning harakatida, ixtiyoriy olingan vaqt uchun unga ta’sir etuvchi aktiv kuchlarning va inertsiya kuchlarining mumkin bo‘lgan ko‘chishlaridagi bajargan ishlarining yig‘indisi nolga teng bo‘lar ekan.*

(5.10) tenglama ***dinamikaning umumiy tenglamasi*** deb ataladi. Dalamber-Lagranj prinsipi yordamida masalalar yechish juda qulay bolib, passiv kuchlar- bog‘lanish reaksiya kuchlari va ishqalanish kuchlari masala yechimida hisobga olinmaydi.

Dinamika prinsiplari yordamida juda ko‘p amaliy masalalarni yechish mumkin, faqat tuzilgan tenglamalar soni bitta (mumkin bo‘lgan ko‘chishda ikkita yoki uchta) bo‘lganligi uchun noma’lumlar soni chegaralangan.

1-masala: mexanik sistema chozilmaydigan iplar yordamida radiusi $R_1 = 0{,}15m$ bo‘lgan 1-vaznsiz blokdan, 2-pog‘onali shkivdan, 3 ba 4-yuklardan iborat (5.8.-shakl). Sistema og‘irlik kuchlari va 1-blokga qo‘yilgan juft kuch momenti M = 40 N· m ta’sirida vertikal tekislikda harakat qiladi. Shkivning katta va kichik radiuslari $R_2 = 0{,}3m$ va $r_2 = 0{,}1m$; inersiya radiusi $\rho_2 = 0{,}2m$ga teng. Og‘irlik kuchlari esa mos ravishda $P_1 = 0\ N$; $P_2 = 20\ N$; $P_3 = 30\ N$; $P_4 = 10\ N$. 3-yukning tezlanishi aniqlansin.



5.8-shakl.

Yechish: 1) Sistemaga ta'sir etayotgan aktiv kuchlarni ko'rsatamiz: M, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$.

2) 3-yukning tezlanishi pastga yo'nalgan deb faraz qilib,sistemaning harakatini fikran to'xtatamiz va inersiya kuchlarini hamda shkivning aylanma harakatdagi inersiya momentini chizamiz: $\vec{F}_3^{\,in}$, $\vec{F}_4^{\,in}$, $M_2^{\,in}$. Ularning miqdori quyidagi formulalar asosida aniqlanadi:

$$F_3^{\,in} = m_3 \cdot a_3 \;\; ; \;\; F_4^{\,in} = m_4 \cdot a_4 \;\; ; \qquad M_2^{\,in} = m_2 \cdot \rho_2^{\,2} \cdot \varepsilon_2 \,. \qquad (1)$$

Barcha tezlanishlarni noma'lum tezlanish a_3 orqali ifodalaymiz. Kinematikadan ma'lumki,

$$a_3 = R_2 \cdot \varepsilon_2, \text{ bundan } \varepsilon_2 = a_3/R_2;$$

$$a_4 = r_2 \cdot \varepsilon_2 \text{ , bundan } a_4 = r_2 \cdot \frac{a_3}{R_2} = \frac{r_2}{R_2} \cdot a_3.$$

U holda inersiya kuchlari

$$F_4^{\,in} = m_4 \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot a_3; \qquad \text{va} \qquad M_2^{\,in} = m_2 \cdot \rho_3^{\,2} \cdot \frac{a_3}{R_2}. \qquad (2)$$

3) Sistemaga δs_3 mumkin bo'lgan ko'chish berib, dinamikaning umumiy tenglamasini (5.10) ko'rinishida tuzamiz:

$$P_3 \cdot \cos 30° \cdot \delta s_3 - F_3^{\,in} \cdot \delta s_3 - M_2^{\,in} \cdot \delta\varphi_2 - F_4^{\,in} \cdot \delta s_4 - M \cdot \delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Barcha mumkin bo'lgan ko'chishlarni $\delta\varphi_2$ orqali ifodalaymiz:

$$\delta s_3 = R_2 \cdot \delta\varphi_2; \qquad \delta s_4 = r_2 \cdot \delta\varphi_2 \;; \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta s_4}{R_1} = \frac{r_2}{R_1} \cdot \delta s_4 = \frac{r_2}{R_1} \cdot \delta\varphi_2, \qquad (4)$$

(*1*) , (*2*) va (*4*) larni (*3*) ga qoyib, noma'lum a_3 ning qiymatini aniqlaymiz:

$$P_3 \cdot \cos 30° \cdot R_2 \cdot \delta\varphi_2 - \frac{P_3}{g} \cdot a_3 \cdot R_2 \cdot \delta\varphi_2 - \frac{P_2}{g} \cdot \rho_2^{\,2} \cdot \frac{a_3}{R_2} \cdot \delta\varphi_2 -$$

$$- \frac{P_4}{g} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot a_3 \cdot r_2 \cdot \delta\varphi_2 - M \cdot \frac{r_2}{R_1} \cdot \delta\varphi_2 = 0. \qquad (5)$$

Oxirgi tenglikni $\delta\varphi_2$ qisqartiramiz:

$$a_3 = \frac{P_3 \cdot \cos 30° \cdot R_2 - M \cdot r_2/R_1}{P_3 \cdot R_2 + P_2 \cdot \frac{\rho_3{}^2}{R_2} + P_4 \cdot r_2{}^2/R_2} = \frac{30 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}3 - 40 \cdot 0{,}1/0{,}15}{30 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot \frac{0{,}04}{0{,}3} + 10 \cdot 0{,}01/0{,}3} = \frac{-18{,}873}{12} = -1{,}57\ \frac{m}{s^2}$$

. Manfiy ishora a_3 tezlanishning haqiqiy yo‘nalishi 5.8-shakldagiga qarama-qarshi ekanligini bildiradi.

5.1.4. Lagranj tenglamalari.

A. UMUMIY TUSHUNCHALAR.

Buyuk fransuz olimi J.Lagranj analitik mexanikada juda katta kashfiyotlarni amalga oshirdi. U yaratgan tenglamalarni faqat mexankada emas, balki o‘zgaruvchan jarayonlarni tekshiruvchi barcha fanlarda qo‘llash mumkin. Sababi bu tenglamalar-dagi o‘zgaruvchilar umumlashgan koordinatalar va umumlasgan kuchlar deb atalib, birliksiz kattaliklar hisoblanadi. Boshqacha aytganda, bu tenglamalarni elektrodina-mikada yopiq konturda tok aylanishi jarayoni, biologiyada qushlarning migratsiya jarayonlarini tekshirish, kimyoda reaksiyalarning tezlashuv yoki sekinlashuv jarayon-larini kuzatish va h.k.larda qo‘llash mumkin. Chet el adabiyotida Lagranj tenglamalari ko‘pincha “energetik usul” deb yuritiladi.

Nazariy mexanikada Lagranj tenglamalarini mexanik sistema muvozanati shartlarini yoki harakatining differensial tenglamalarini tuzishning eng “qisqa yo‘li” deb aytish mumkin.

B. ERKINLIK DARAJASI. UMUMLASHGAN KOORDINATALAR.

Avval ta’kidlaganimizday, fazodagi erkin moddiy nuqta 3 ta (Ox, Oy, Oz o‘qlari bo‘lab), qattiq jism esa 6ta (Ox, Oy, Oz o‘qlari bo‘lab 3 ta ilgarilanma va o‘qlar atrofidagi 3 ta aylanma) erkin koordinatalarga ega. Erkin bo‘lmagan moddiy nuqta esa, bog‘lanishning turiga qarab, 6 tadan kam erkin koordinatalarga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, matematik mayatnik 1 ta (φ-burchak), tekislikda harakat qilayotgan moddiy nuqta 2 ta (x va y –koordinatalar), tekis parallel harakat qilayotgan jism 3 ta (ilgarilanma-x_A,y_A va aylanma- φ) erkin koordinatalarga ega.

Qolgan koordinatalar esa erkin koordinatalar orqali matematik formulalardan topiladi. Demak ***jismning erkinlik darajasi*** deb, bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan, jism harakatini to‘la aniqlaydigan, erkin koordinatalar soniga aytiladi.

Analitik mexanikadagi tenglamalar aynan shu erkin koordinatalar orqali chiqariladi. Bu koordinatalar ***umumlashgan koordinatalar*** deb ataladi va $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\nu$ harflar bilan belgilanadi. Umumlashgan koordinatalar sifatida uzunlik, burchak va boshqa kattaliklar bo‘lishi mumkin. Umumlashgan koordinatalar birliksiz qabul qilingan. Ulardan t vaqt bo‘yicha olingan hosilalar ***umumlashgan tezliklar*** deb ataladi:

$$\frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1;\ \frac{dq_2}{dt} = \dot{q}_2;\ \frac{dq_3}{dt} = \dot{q}_3; \ldots,\ \frac{dq_\nu}{dt} = \dot{q}_\nu\ . \qquad (5.11)$$

Umumlashgan koordinatalardan t vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosila yoki umumlashgan tezliklardan olingan t vaqt bo‘yicha birinchi hosila ***umumlashgan tezlanishlar*** deb ataladi:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = \frac{d\dot{q}_1}{dt} = \ddot{q}_1;\ \frac{d^2q_2}{dt^2} = \frac{d\dot{q}_2}{dt} = \ddot{q}_2;\ \frac{d^2q_3}{dt^2} = \frac{d\dot{q}_3}{dt} = \ddot{q}_3; \ldots; \frac{d^2q_\nu}{dt^2} = \frac{d\dot{q}_\nu}{dt} = \ddot{q}_\nu. \qquad (5.12)$$

D.UMUMLASHGAN KUCHLAR.

Umumlashgan koordinatalarga mos keluvchi kuchlar ***umumlashgan kuchlar*** deb ataladi. Umumlashgan kuchni hisoblash uchun sistema erkin koordinatalariga mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladi va elementar ish hisoblanib, undan umumlash-gan koordinatalar bo‘yicha hosila olinadi. Umumlashgan kuchlar $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\nu$ harflar bilan belgilanadi.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipi sistemaning M_ν nuqtasi uchun umum-lashgan koordinatalarida quyidagicha yoziladi:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu. \qquad (5.13)$$

Bunda

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\,\delta q_j;$$

demak

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \delta q_j \,. \qquad (5.14)$$

Quyidagi belgilash kiritib,

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}, \qquad (5.15)$$

koordinatalar ko‘rinishida umumlashgan kuch quyida

demak

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} Q_j \cdot \delta q_j. \qquad (5.16)$$

(5.16) formuladagi q_j koordinatalarga mos keluvchi Q_j-umumlashgan kuchlar.

Agar ta’sir etuvchi kuchlar potensiyalli kuch bo‘lsa, umumlashgan kuch umumlashgan koordinatalardan iborat argumentli potensialli funksiya U(q_1, q_2, q_3,…, q_ν) ning to‘liq differensiyali sifatida aniqlanadi.

$$\delta A = \delta U = \frac{\partial U_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U_2}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial U_3}{\partial q_3} \delta q_3 + \cdots + \frac{\partial U_\nu}{\partial q_\nu} \delta q_\nu;$$

yoki $$\delta A = \delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \cdots + Q_\nu \delta q_\nu; \qquad (5.17)$$

Umumlashgan kuchlar esa

$$Q_1 = \frac{\partial U_1}{\partial q_1}\,; \quad Q_2 = \frac{\partial U_2}{\partial q_2}\,; \quad Q_3 = \frac{\partial U_3}{\partial q_3}\,; \quad \ldots \quad ; \quad Q_\nu = \frac{\partial U_\nu}{\partial q_\nu}\,; \qquad (5.18)$$

ifodalardan aniqlanadi.

Ilgari tasdiqlanganiga ko‘ra P – potensial energiya teskari ishora bilan potensial funksiyaga teng

P = - U(q_1, q_2, q_3,…, q_ν) .

Demak, *sistemaga ta’sir etuvchi barcha kuchlar potentsial kuchlardan iborat bo‘lsa, umumlashgan kuchlar kuch funktsiyasidan (yoki potentsial energiyasidan manfiy ishora bilan) tegishli umumlashgan koordinatalar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarga teng ekan.*

E. LAGRANJNING I-TUR TENGLAMALARI.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipiga asosan, ideal bog‘lanishli sistemaning mumkin bo‘lgan ko‘chishdagi aktiv kuchlarning bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng:

$$\delta A = 0; \quad \text{yoki} \quad Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + Q_3\delta q_3 + \cdots + Q_\nu\delta q_\nu = 0.$$

mumkin bo‘lgan ko‘chishlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = 0; \quad Q_3 = 0; \quad \ldots \; ; \quad Q_\nu = 0. \tag{5.19}$$

Shunday qilib, *mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistema uchun tanlab olingan barcha umumlashgan koordinatalarga mos bo‘lgan umumlashgan kuchlarning har biri nolga teng bo‘lishi shart ekan.*

Bu tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, muvozanat *tenglamalarning soni, sistemaning erkinlik darajasiga teng* ekan.

Potensial kuchlar ta’siridagi sistemaning muvozanat shartlari quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial U_2}{\partial q_2} = 0; \quad \frac{\partial U_3}{\partial q_3} = 0; \; \ldots; \; \frac{\partial U_\nu}{\partial q_\nu} = 0. \tag{5.20}$$

Demak *mexanik sistema muvozanatda bo‘lishining zaruriy va etarli sharti shundan iborat ekanki, sistema uchun tanlab olingan barcha umumlashgan koordinatalarga mos bo‘lgan umumlashgan funksiyasidan mos koordinatalar bo‘yicha olingan xususiy hosilalari nolga teng bo‘lishi shart ekan.*

(5.19) va (5.20) tenglamalar ***sistema muvozanatining umumlashgan koordi-natalari ko‘rinishidagi tenglamalari*** deb ataladi.

J. LAGRANJNING II-TUR TENGLAMALARI.

Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalaridagi harakat tenglamalarini tuzish uchun dinamikaning umumiy tenglamasi (5.10) dan foydalaniladi:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{a} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{in} = 0 \qquad (5.21)$$

Faraz qilaylik, ideal bog‘lanishlarga ega bo‘lgan sistema ν-ta erkinlik darajasiga ega bo‘lsin. U holda (5.17) formuladan

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{a} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \cdots + Q_\nu \delta q_\nu;$$

Inersiya kuchlarining bajargan ishlarini ham umumlashgan koordinatalarda ifodalaymiz:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k{}^{in} = Q_1{}^{in} \delta q_1 + Q_1{}^{in} \delta q_2 + Q_1{}^{in} \delta q_3 + \cdots + Q_1{}^{in} \delta q_\nu;$$

Oxirgi tengliklarni (5.21) ga qo‘yib, nolga tenglaymiz:

$$(Q_1 - Q_1{}^{in})\delta q_1 + (Q_2 - Q_2{}^{in})\delta q_2 + (Q_3 - Q_3{}^{in})\delta q_3 + \cdots + (Q_\nu - Q_\nu{}^{in})\delta q_\nu = 0;$$

mumkin bo‘lgan ko‘chishlar bir-biriga bog‘liq bo‘lmaganligi uchun

$$Q_1 - Q_1{}^{in} = 0; \quad Q_2 - Q_2{}^{in} = 0; \quad Q_3 - Q_3{}^{in} = 0; \quad \ldots; \quad Q_\nu - Q_\nu{}^{in} = 0. \qquad (5.22)$$

Soddalashtirish uchun inersiya kuchlarining ishini kinetik energiya orqali ifodalaymiz:

$$\vec{F}_k{}^{in} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt};$$

(5.15) formuladan umumlashgan inersiya kuchi

$$Q_k{}^{in} = \vec{F}_k{}^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k} = -m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k}$$

ifodaga teng. Bundan esa

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}(\vec{V}_k\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_k})-\vec{V}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_k}\right). \qquad (5.23)$$

Differentsiallarning o‘rnini almashtirib,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_k})=\frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{d\vec{r}_k}{dt})=\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial q_k},$$

umumlashgan tezlikni esa umumlashgan koordinatalar orqali yozib olib,

$$\vec{V}_k=\frac{d\vec{r}_k}{dt}=\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1+\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2+\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_3}\cdot\dot{q}_3+\cdots+\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_\nu}\cdot\dot{q}_\nu,$$

u holda

$$\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}$$

ga teng bo‘lar ekan. Demak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)=\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial q_1}.$$

oxirgi ifodalarni (5.23) ga qo‘yib,

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k\cdot\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial\dot{q}_1}\right)-\vec{V}_k\cdot\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial\dot{q}_1}^2\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial\vec{V}_k}{\partial q_1}^2;$$

hosilalarning yig‘indisi yig‘indining hosilasiga teng bo‘lishi va $\vec{V}_k^{\,2}=V_k^{\,2}$ ekanligini e’tiborga olsak, (5.23) formuladan

$$-Q_1^{\,in}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_kV_k^{\,2}}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_kV_k^{\,2}}{2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}.$$

Bu amallarni butun sistema uchun yozish mumkin, u holda (5.22) tenglamadan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_3}=Q_3; \qquad (5.24)$$

.....

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu.$$

(5.24) formula, *sistema harakatining umumlashgan koordinatalardagi differentsial tenglamalari yoki Lagranjningning II-tur tenglamalari* deb ataladi. Tenglamalarning soni sistemaning erkinlik darajasiga teng bo‘ladi. Lagranj tenglamalari dinamika masalalarini bir xil, hamda sodda bo‘lgan yechimini yaratishga imkon beradi. Eng muhim tomonlaridan yana biri shuki, tenglamalarning ko‘rinishi va ularning soni, mexanik sistemani tashkil etuvchi jism (nuqta)larning soniga va ularning qanday harakatda ekanligiga bog‘liq bo‘lmas ekan, balki Lagranj tenglamalari soni faqat uning erkinlik darajasiga bog‘liq ekan.

Agar sistemaga ta’sir etuvchi kuchlar potentsial kuchlardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda (5.18) formuladan foydalanib, (5.24) tenglamalarning birinchisini quyidagicha yozib olishimiz mumkin bo‘ladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{\partial P}{\partial q_1}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-P)}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial (T-P)}{\partial q_1}=0$$

Oxirgi tenglik o‘rinli bo‘ladi, chunki potentsial energiya P faqat umumlashgan q_1, q_2,...,q_s koordinatalarga bog‘liq bo‘ladi xolos, umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lmaydi, shu sababli $\partial P/\partial \dot{q}_1=0$ bo‘ladi.

(5.24) ning qolgan tenglamalarini ham shu tarzda o‘zgartiriladi. Quyidagi

$$L=T-P \qquad (5.25)$$

funktsiyani kiritamiz. Sistemaning kinetik va potentsial energiyasining ayirmasidan iborat bo‘lgan, hamda umumlashgan koordinatalarga va umumlashgan tezliklarga bog‘liq bo‘lgan L funktsiyani ***Lagranj funksiyasi*** yoki ***kinetik potentsial*** deb ataladi. U holda, potentsial kuchlardan iborat bo‘lgan sistema uchun, Lagranjning tenglamalari quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0; \qquad (5.26)$$

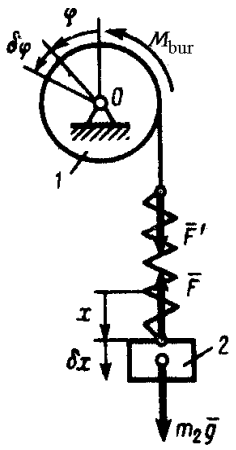
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0.$$

Olingan natijalardan ko‘rinib turibdiki, potentsial kuchlar ta’siridagi mexanik sistemaning holati, faqat bitta Lagranj funksiyasi orqali berilar ekan, shu sababli ushbu funksiya ma’lum bo‘lsa sistemaning differentsial tenglamasini tuzish mumkin ekan.

Ushbu tushunchalarni tegishlicha umumlashtirsak, Lagranjning funktsiyasiga o‘xshash bo‘lgan funktsiyalar turli fizik sistemalarning holatlarini ifodalab beradi(uzluksiz muhitni, gravitatsion yoki elektr maydonini va h.k.). Shu sababli, (5.26) ko‘rinishdagi Lagranj tenglamalari fizikaning qator sohalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

1-masala. Massasi m_1 gardishi bo‘ylab tarqalgan, R radiusli baraban 1 -ga, tros o‘ralib, trosning uchiga qattiqligi C bo‘lgan prujina orqali, m_2 massali yuk osilgan (5.9-shakl). Barabanga momenti M_{bur} bo‘lgan juft qo‘yilgan. Shu sistema uchun Lagranj tenglamasi tuzilsin va yukning harakatidagi tebranishlarning chastotasi aniqlansin.



5.9-shakl.

Yechish. Sistema ikkita erkinlik darajasiga ega. Umumlashgan koordinatalar sifatida, barabanning burilish burchagi φ va prujinaning uzayishi x ni tanlab olamiz ($q_1=\varphi$, $q_2=x$). U holda Lagranj tenglamalari

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad (2)$$

Sistemaga ta’sir etuvchi kuchlarni shaklda tasvirlaymiz: prujinaning elastiklik kuchlari; son qiymtlari $F=F'=cx$). Umumlashgan kuchlarni Q_1 va Q_2 larni aniqlaymiz.

Sistemaga $\delta\varphi>0$ mumkin bo‘lgan ko‘chish beramiz va $x=const$ deb hisoblaymiz, bunday ko‘chishda va kuchlarning bajargan ishlari nolga teng bo‘ladi, shu sababli bunday ko‘chishdagi elementar bajarilgan ish

$$\delta A_1=(M_{bur}-m_2gR)\delta\varphi.$$

Erkin o‘zgaruvchi ikkinchi umumlashgan koordinata (δx>0, φ=const)ning o‘zgarishidagi

$$\delta A_2=(m_2g-cx)\delta x$$

bo‘ladi. Shu sababli,

$$Q_1=M_{bur}-m_2gR,$$

$$Q_2= m_2g-cx.$$

Sistemaning kinetik energiyasi, $T=T_1+T_2$, bu yerdagi

$$T_1=\frac{1}{2}I_1{}^2\dot{\varphi}^2\,; \quad T_2=\frac{1}{2}m_2V_2{}^2.$$

Ushbu masalada

$$I_1=m_1R^2,\ V_2=V_{nis}+V_{ko'ch}\ \text{ va }\ V_2=\dot{x}-R\dot{\varphi}.$$

U holda,

$$T=m_1R^2\dot{\varphi}^2/2+m_2(\dot{x}-R\dot{\varphi})^2/2.$$

xususiy hosilalar olib,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m_1R^2\dot{\varphi}-m_2R(\dot{x}-R\dot{\varphi});$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m_2(\dot{x}-R\dot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=\frac{\partial T}{\partial x}=0$$

hosil bo‘lgan ifodalarni (1) va (2) ga qo‘ysak:

$$(m_1+m_2)R\ddot{\varphi}-m_2\ddot{x}=\frac{M_{bur}}{R}-m_2g, \qquad (3)$$

$$-m_2R\ddot{\varphi}+m_2\ddot{x}=m_2g-cx. \qquad (4)$$

Izlanayotgan tenglamalar shulardan iborat. Oxirgi ikkita tenglamani hadma-had qo‘shsak,

$$m_1R\ddot{\varphi}=M_{bur}/R-cx,$$

ushbu tenglikdan va (d,e) tenglamadan $R\ddot{\varphi}$ ni chiqarib tashlasak, yukning nisbiy tebranma harakatining differentsial tenglamasini olamiz, uning tebranish chastotasi k ga teng bo‘ladi

$$\ddot{x}+k^2x=\frac{M_{bur}}{m_1R}+g, \qquad k=\sqrt{c\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}.$$

Yukning absolyut harakati $s=x-R\varphi$ qonuniyat bo‘yicha sodir bo‘ladi. Ushbu harakat ham, k -chastotali tebranish bilan sodir bo‘ladi. Barabanning aylanma harakati ham shunday tebranishlar bilan sodir bo‘ladi.

VI. MEXANIKA MASALALARINING MATEMATIK MO‘DELI VA DASTURI.

6.1.1. Maple tizimining tarkibi va imkoniyatlari.

Hozirgi kunda kompyuter matematikasi keng miqiyosda rivojlanib bormoqda. Kompyuter matematikasining yetakchi o‘rinlardan birini hozirgi kunda egallab turgan simvolli matematik dasturlash tizimi Maple tez rivojlanib bormoqda. Maple kuchli foydalanuvchi interfeysiga ega bo‘lib, u oddiy va murakkab matematik masalalarni analitik yechish imkoniyatiga ega.

Maplening keyingi avlodlari Maple -8, 9, 10, 11 larda simvolli matematik hisoblar foydalanuvchilar uchun yanada qulay holga keltirilgan. Maple matematik paketi yordamida matematik masalalardan tashqari boshqa texnika fanlari masalalarini ham analitik va grafik ko‘rinishlarda yechish mumkin. Bundan tashqari Maple ko‘plab mexanizmlarning harakatini ko‘rsatish, animatsiyalarini hosil qilish uchun juda qulay dasturlash vositasi hisoblanadi.

Maple elektron hujjatlarni tayyorlash va grafik vizuallashtirish vositalariga ham ega. Maple kompyuter matematikasini chuqur o‘rganish dasturchiga turli fan va texnika masalalarini yechishda katta imkoniyatlar ochib beradi.

Maple — tipik integrallashgan tizim bo‘lib, uning tarkibiga quyidagi vositalar kiradi:

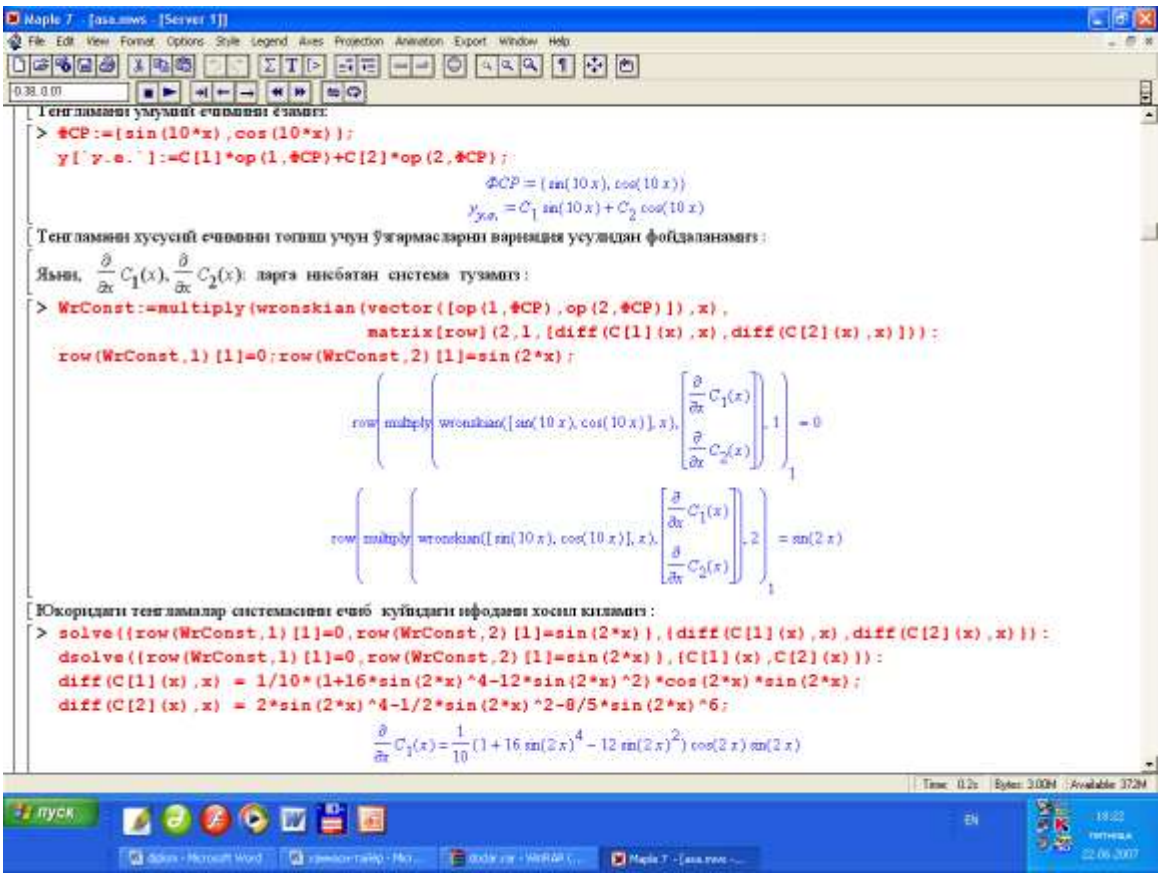
- kuchli dasturlash tili (u tizim bilan interaktiv muloqot qilish vositasi hamdir);
- dasturlar va hujjatlarni tahrir qilish va tayyorlash uchun tahrirlagich;
- dialog rejimida ishlash imkoniyatini beruvchi zamonaviy ko‘p oynali interfeys;
- minglab namunalarga ega bo‘lgan kuchli ma’lumotlar tizimi;
- algoritmlar va matematik ifodalarni o‘zgartirish qoidalarini o‘z tarkibiga oluvchi tizimning yadrosi;
- sonli va simvolli protsessorlar;

- diagnostika tizimi;
- biriktirilgan va qo‘shimcha funktsiyalarning kutubxonasi;
- foydalanuvchilar funktsiyalarini va boshqa ayrim dasturlash tillari va dasturlarni qo‘llab quvvatlash paketlari.

Yuqorida keltirilgan vositalarning barchasiga Maple dasturi orqali bevosita kirish mumkin.

Maple tizimi o‘zining uchta xususiy: kirish, amalga oshirish va dasturlash tillariga ega. Uning kirish tili o‘ta yuqori darajadagi til bo‘lib, har qanday murakkablikdagi matematik, fizik va mexanik masalalarni yechishga yo‘naltirilgan. Bu til tizimga sovol, ya’ni qayta ishlanuvchi kirish ma’lumotlarini berish uchun xizmat qiladi va o‘zining ideologiyasi bo‘yicha “Basic” tiliga o‘xshab ketadi. Kirish tili katta miqdordagi oldindan aniqlangan matematik va grafik funktsiyalarga, hamda zarur bo‘lganda qo‘shiladigan kutubxonalariga ega.

Maple tizimi an’anaviy tarkibiy dasturlash vositalarini hamda kirish tilining buyruq va funktsiyalarini o‘z ichiga oluvchi “protseduraviy” dasturlash tili—Maple-tiliga ham ega. Maple tizimini amalga oshirish tili bo‘lib, eng kuchli va universal tillardan biri bo‘lgan “Si” dasturlash tili xizmat qilgan. Uning yordamida tizim yadro‘sining dasturi yozilgan. Umuman olganda, Maple tizimi vositalarining taxminan 5 dan 10% gacha qismi “Si” dasturlash tilida, qolgan 90-95% esa Maple-tilida yozilgan. Maple-tilidagi dasturlarni biriktirilgan tahrirlagichdan tashqari tashqi tahrirlagichlarda (masalan “Word”da) ham tayyorlash mumkin. Maple tizimining biriktirilgan tahrirlagichi “File” menyusidagi “New” va “Open” buyruqlari yordamida ochiladi.



6.1-rasm

Maple-tili tarkibiy operatorlarining (“tsikl” operatorlari, shartli va shartsiz operatorlar va h.k.) sintaksisi “Beysik” va “Paskal” tillari sintaksislarining aralashmasiga o‘xshab ketadi. Tizim bilan ishlashning dialog rejimida matematik ifodalar “Beysik”dagi qoidalarga o‘xshash qoidalarga asosan kiritiladi.

“Waterloo Maple Software” kompaniyasining rasmiy sayti (http://www.maplesoft.com) Maple dasturidan foydalanuvchilar uchun ko‘plab foydali axborotlarga ega. Saytning asosiy sahifasi kompaniya va uning yangi mahsulotlari to‘g’risidagi axborotga hamda undan sotib olingan mahsulotlarni interaktiv registratsiya qilish imkoniyatiga ega. Kompaniya registratsiya qilingan foydalanuvchilar uchun Maple paketlaridagi yangilanishlarni, tizimning ishlashida aniqlangan xatoliklar va noaniqliklarning ro‘yhatini va tizim ishi bo‘yicha ko‘p uchraydigan savollarga javoblarni bepul tarqatadi. Jumladan, saytning texnik yordam bo‘limidan Maple ning qayta ishlangan versiyalarini o‘rnatish bo‘yicha yo‘riqnomalar va kerakli installyatsion fayllarni olish imkoniyati mavjud.

Maple-tili tarkibiy operatorlarining (tsikl operatorlari, shartli va shartsiz operatorlar va h.k.) sintaksisi Beysik va Paskal tillari sintaksislarining aralashmasiga o‘xshab ketadi. Tizim bilan ishlashning dialog rejimida matematik ifodalar Beysikdagi qoidalarga o‘xshash qoidalarga asosan kiritiladi.

Windows tarkibida ishlovchi boshqa ilovalar singari Maple 7 ham qator elementlarga ega (1.1-rasm):

Maple 7 tizimining interfeysi quyidagilardan iborat:

- sarlavha satri (yuqoridagi qator)
- bosh menyu satri (ikkinchi qator)
- asboblarning asosiy paneli (uchinchi qator)
- ko‘rinishi Maple 7 tizimining ishlash rejimiga asosan o‘zgarib turuvchi asboblarning kontekst paneli (to‘rtinchi qator)
- kiritish va xujjatlarni tahrirlash oynasi ishchi oyna (beshinchi qator)
- holat satri (pastki qator).

Maple 7 tizimining interfeysi matnli izohlar, kirish tili komandalari (ular odatdagi matematik shaklga o‘zgartirilishi ham mumkin), matematik formulalar va grafik ma’lumotlar ko‘rinishidagi hisoblash natijalari va boshqalarni o‘z ichiga oluvchi hujjatlarni tayyorlash imkoniyatini beradi. Maple 7 qulay tarzda tashkil qilingan ma’lumotlar tizimiga ega. Uning yordamida har qanday operator, funktsiya yoki paketlar to‘g’risida batafsil ma’lumot olish mumkin (lekin, faqat ingliz tilida).

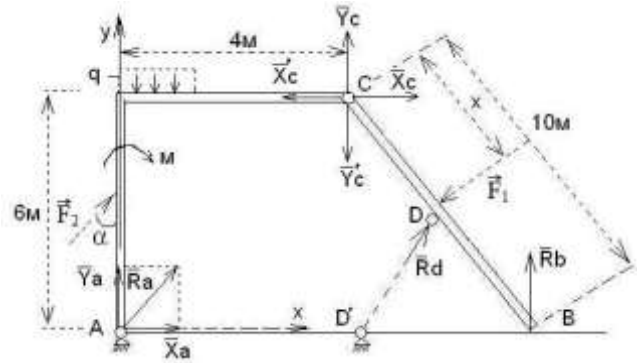
6.1.2. Statika masalalarini matematik dasturlash.

Nazariy mexanika masalalarini yechishda Maple va Mathcad dasturlaridan foydalanish katta ahamiyatga ega. Chunki statika masalaridagi ko‘p sonli chiziqli tenglamalarini yechishni avtomatlashtirish mumkin bo‘lsa, kinematika va dinamika masalalarida moddiy nuqta va jismlarning harakatini tekislikda va fazoda o‘rganish uchun grafik tasvirlash va animatsiyani qo‘llash ularni chuqur o‘rganishga yordam beradi.

Statikadagi tenglamalar sistemasini yechishning kompyuter modelini ko‘ramiz. Tenglamalar sistemasini matritsa ko‘rinishida ifodalaymiz :

$$A * X = B \qquad (6.1)$$

Bunda A – ma’lum qiymatlar koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa,
X – noma’lumlar matritsa ustuni, B – ozod koeffitsientlar matritsa ustuni. Bunday modelning qurilishi masala parametrlarining turli qiymatlari uchun ayni bir xil sonli hisoblash ishlarini takror bajarilishida vaqtni tejasa, ikkinchidan kuchlarning ta’sir chiziqlarida tayanch reaktsiya qiymatlarining optimal (eng kichik yoki eng katta) qiymatlarini topishda, talabalar mushohada qilishi va masala shartlarini grafik tasvirlashida qo‘shimcha imkoniyatlar yaratadi. Tashqi ta’sir kuchining qiymatini va ta’sir qilish chegaralarini o‘zgartira borib, reaktsiya kuchlarining o‘zgarishini hisoblash va natijalarni displey ekranida ko‘rsatish mumkin bo‘ladi. Ikkita qismdan iborat konstruktsiya A tayanch reaktsiyasining o‘zgarish chegarasini, F_1 tashqi kuch ta’sirini o‘zgartirib borib tekshiraylik. Ushbu masala shartlarini sxematik ifoda etamiz (rasm 1). X ning o‘zgarish chegarasi $1 \leq X \leq 10$ bo‘lib, R_A reaktsiya kuchi uchun $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ ifodani hosil qilamiz (1-rasm).

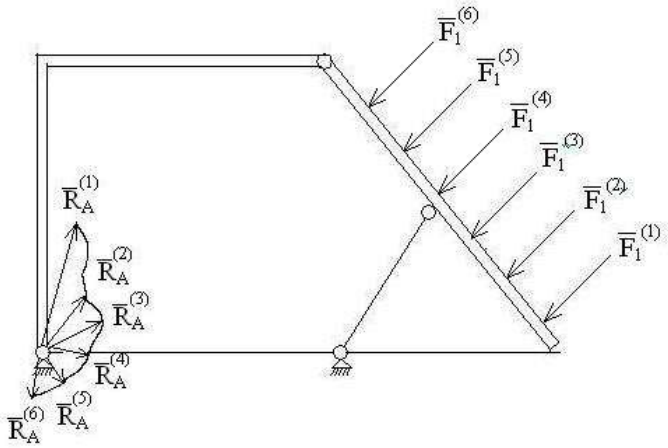


6.2-rasm. Jismlar sistemasining muvozanatini saqlanishini ta’minlovchi kuchlar diagrammasi.

Dasturning kompyuterda bajarilishi oxirgi qadamida R_D qiymati topiladi :

$$R_D = \left(b_6 + F_1 * x - a_{61} * \frac{b_1}{a_{11}} - a_{62}^{(1)} * \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - a_{63}^{(2)} * \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - a_{64}^{(3)} * \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} - a_{65}^{(4)} * \frac{b_5^{(4)}}{a_{55}^{(4)}} \right) / a_{66}^{(5)} \qquad (6.2)$$

Hisoblanayotgan boshqa qiymatlarni topish uchun dastur yuqorida keltirilgan algoritmni teskari tartibda bajarib, ketma-ket R_B, Y_c, X_c, Y_A, X_A noma’lumlarning son qiymatlarini axtarib topadi. Kompyuter hisoblash natijalarini displey ekraniga yoki qog’ozga chiqarib berishi mumkin. Maple dasturlash tilida amalga oshirilgan ushbu loyiha F_1 kuchining turli qiymatlariga mos kelgan reaktsiya kuchi R_A ning son qiymatini hisoblab, natijani grafik ko‘rinishida namoyish etadi. (2-rasm).



6.3-rasm. Tashqi F_1 ta'sir kuchini muvozanatlovchi R_A reaktsiya kuchining hosil bo'lishini ko'rsatuvchi sxema.

Muvozamat tenglamalar sistemasini Maple dasturida yechish

```
> restart; with(linalg):with(LinearAlgebra):
> Digits := 5:
> A := <<1,0,0,0,0,0>|<0,1,0,0,0,0>|<0,1,4,0,0,0>|
<0,0,0,0,1,4> | <1,0,-10,1,0,0>|<0,1,6,0,1,0>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> d:=Determinant(A);
```

$$d := 16$$

```
> b := <-20,30,290,-8.66,-5,10*x-10>;
```

$$b := \begin{bmatrix} -20 \\ 30 \\ 290 \\ -8.66 \\ -5 \\ 10x - 10 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(A,'method'='FractionFree');
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

```
> X:=ReducedRowEchelonForm(`<|>`(A, b));
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -22.100 - \frac{5}{4}x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 54.600 + \frac{15}{4}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2.5000 + \frac{5}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}x - 2.5000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=1:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -23.350 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 58.350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5.0000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=2:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24.600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 62.100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7.5000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=3:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25.850 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 65.850 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10.000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=4:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27.100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 69.600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12.500 \end{bmatrix}$$

```
> x:=5:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -28.350 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 73.350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15.000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=6:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -29.600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 77.100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -17.500 \end{bmatrix}$$

```
> x:=7:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.850 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 80.850 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -20.000 \end{bmatrix}$$

```
> x:=8:X;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32.100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 84.600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 17.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -22.500 \end{bmatrix}$$

Kompyuterda o‘tkazilgan sonli hisoblash ishlarini har doim tiklash va takror o‘tkazish mumkin. Nazariy mexanika darslarida kompyuter bilan muloqot talabalarda masala yechish malakalarini rivojlantirib, zamonaviy kompyuter texnologiyalari asosida ilmiy tadqiqotlar o‘tkazishga o‘rgatadi.

6.1.3. Kinematika masalalarini matematik dasturlash.

Kinematikada jismlarning harakati ularning massasi va ta'sir etuvchi kuchlarni xisobga olmagan holda tekshiriladi. Jism harakatining harakteristikalari- tezlik, tezlanish va boshqa kattaliklarni harakat tenglamalari yoki turli teorema va qoidalardan olish mumkin. Parametr sifatida t vaqt ishlatiladi.

1-masala. Berilgan tenglamalardan nuqta harakati

$$x = f_1(t)$$

$$y = f_2(t)$$

Uning traektoriyasini ko'rinishini aniqlang va t=1sek bo'lgan vaqtda shu nuqtaning traektoriyada holatini toping, uning tezligi, to'liq urinma va normal tezlanishlari va shu nuqtada traektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin.

<u>Echilishi:</u>

1) Agar nuqtaning harakat tenglamasi x=4-t/2 , y=2+2*cos(t/4).

Ko'rinishda berilgan bo'lsa traektoriya tenglamasini dekart koordinatalar sistemasini hisoblash uchun t vaqtni chiqarib tashlash kerak.

$$x = 4 - \frac{t}{2}$$

$$y = 2 + 2\cos\left(\frac{t}{4}\right)$$

simplify(subs(isolate(eq1,t),eq2));

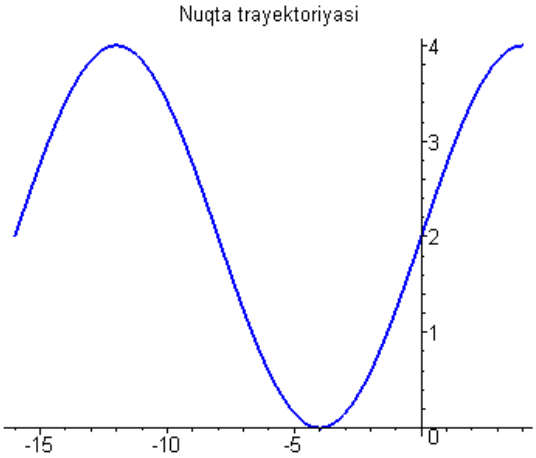
$$y = 2 + \cos\left(\frac{4 - x}{2}\right)$$

Biz isolate(eq1,t) buyrug'i orqali t parametrni x tenglamasidan aniqlab va uni y o'zgaruvchi tenglamasiga qo'ydik.

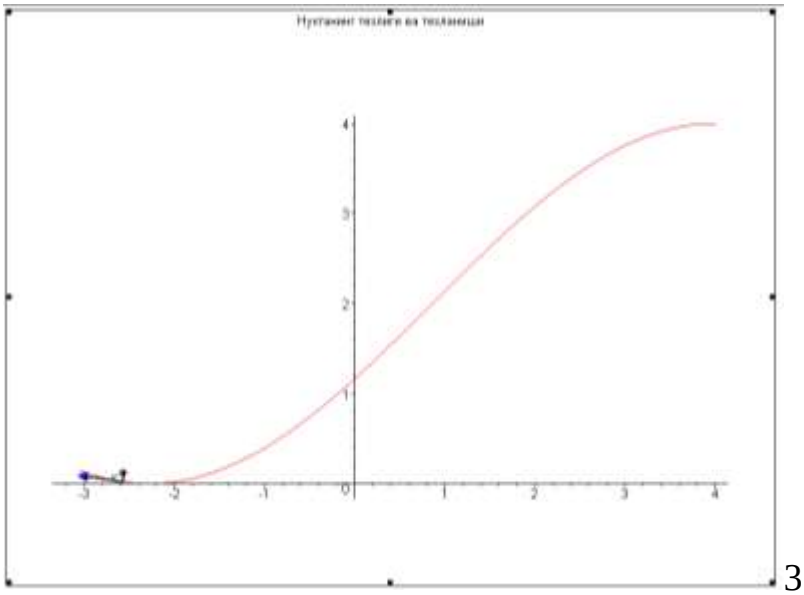
Plot([rhs(x) , rhs(y) , t=0. .10] , color=blue , thickness=2 , title= " Nuqtaning traektoriyasi ") ;

Nuqta tezligini aniqlash uchun harakat tenglamalaridan vaqt bo‘yicha differentsiallab, koordinatalar o‘qidagi tezlik proektsiyalarini topamiz.

Tezlik proektsiyasining birinchi hosilasini hisoblab traektoriyani berilgan nuqtasidagi tezlanishning koordinata o‘qlaridagi proektsiyalarini aniqlash mumkin. Yuqoridagi hisoblar asosida nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlarining moduli va yo‘nalishlarini quyidagi dastur orqali aniqlash mumkin.



3.18-rasm



3.19-rasm

1) Agar nuqtaning harakat tenglamasi x=4-3sin(t/2), y=5+2*cos(t/2) ko‘rinishda bo‘lganda, u egri chiziqli traektoriya bo‘ylab harakat qiladi. Yuqoridagi 1-masala dasturiga tegishli o‘zgartirishlar kiritib nuqtaning ellips bo‘ylab harakatini asosiy kinematik kattaliklarini aniqlash imkoniyatini beruvchi hamda uning harakatini animatsiyasini ko‘rsatuvchi dasturga ega bo‘lamiz.

```
> restart:
> N:=200:k:=.2:
> x:=4-3*sin(t/2);
```

$$x := 4 - 3\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$

```
> y:=5+2*cos(t/2);
```

$$y := 5 + 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$$

```
> T:=evalf(4*Pi):
> r:=vector([x,y,0]):
> v:=map(diff,r,t); a:=map(diff,r,t$2);
```

$$v := \left[-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t\right), -\sin\left(\frac{1}{2}t\right), 0\right]$$

$$a := \left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{2}t\right), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}t\right), 0\right]$$

```
>  with(plots):
```

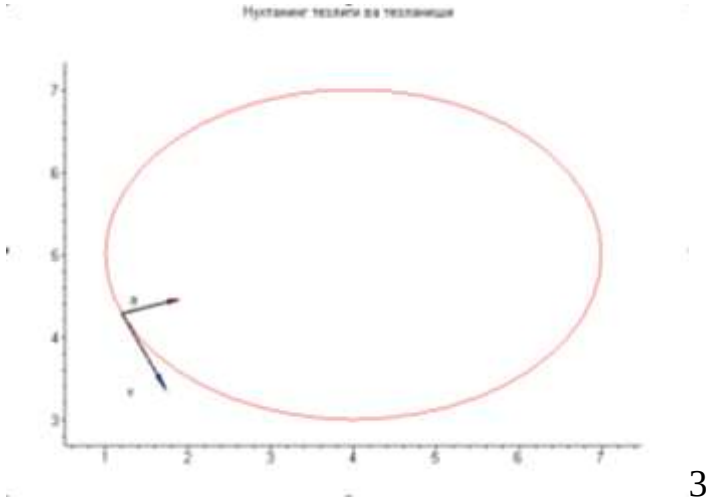
Warning, the name changecoords has been redefined

```
> pv:=0.01,0.05,0.2:
> with(plottools):
```

Warning, the name arrow has been redefined

```
> for i to N do
  t:=i/N*T+4:
  r1:=vector([r[1],r[2]]):
  v1:=vector([v[1],v[2]]):
  a1:=vector([a[1],a[2]]):
  acc:=arrow(r1,a1,pv,color=red):
  vel:=arrow(r1,v1,pv,color=blue):
  txa:=TEXT([r[1]+a[1]*k,r[2]+a[2]],"a"):
  txv:=TEXT([r[1]+v[1]*k,r[2]+v[2]],"v"):
  p[i]:=display(vel,acc,txa,txv):                    end do:
> t:='t':
```

```
> g1:=display(seq(p[i],i=1..N),insequence=true):
> g2:=plot([x,y,t=0..T]):
> display(g1,g2,scaling=constrained,title="Nuktaning tezligi va tezlanishi");
```



3.20-rasm

```
> with(linalg):V:=norm(v,2):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> at:=dotprod(v,a)/V:
> a_:=norm(a,2):
> an:=norm(crossprod(v,a),2)/V:
> t:=evalf(Pi)/2;
```

$$t := 1.570796327$$

```
> ` x`=x;
```

$$x = 1.878679656$$

```
> ` y`=y;
```

$$y = 6.414213562$$

```
> ` v`=V;
```

$$v = 1.274754878$$

```
> ` at`=at;
```

$$at = -.2451451688$$

```
> ` an`=an;
```

$$an = .5883484054$$

```
> ` a`=a_;
```

$$a = .6373774392$$

```
> ` ro`:=V^2/an;
```

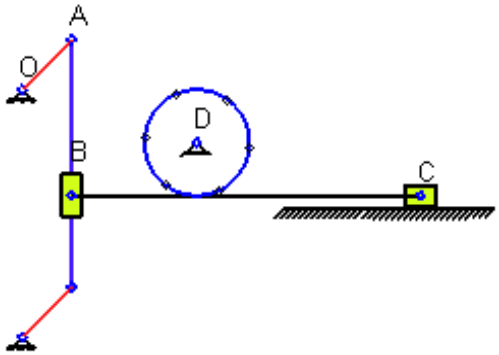
$$ro := 2.761968902$$

3.3.1.Tekis parallel harakat

Ko‘p zvenoli mexanizmlar texnikaning turli sohalari (to‘qimachilik mashinilari, mashinasozlik va boshqalar) da keng qo‘llaniladi. Nazariy mexanika fanini o‘rganishda tekis parallel harakat qilayotgan ko‘p zvenoli mexanizmlarning harakatini animatsiyalar orqali namoish qilish shu tipdagi masalalarni tushinishda katta ahamiyatga ega. Misol uchun

```
> restart:
> nam:=array(0..4,[O,A,B,D,C]):
> read "ris.m";
> OA:=2:AA:=7: a:=0.15: b:=3: BC:=10:R:=1.5:r:=0.1:
> omegaOA:=2: T:=2*pi/omegaOA:
>  x[0]:=0:y[0]:=0:
>  with(plots):with(plottools):
Warning, the name changecoords has been redefined
Warning, the name arrow has been redefined
 K:=24:
> for i from 0 to K do t:=i/K*T: phi:=pi/4+t*omegaOA:
 x[1]:= OA*cos(phi): y[1]:= OA*sin(phi):x[2]:=x[1]: y[2]:=4*a-
b:x[4]:=x[2]+BC: y[4]:=-b:x[3]:=BC/2:x[5]:=x[1]: y[5]:=-b: y[3]:=R-
b:x[6]:=x[1]: y[6]:=-4*a-b:
 x[7]:=x[1]: y[7]:=y[1]-AA:
 x[8]:=x[0]: y[8]:=y[0]-AA:
 P[i]:=display(box(5,2*a,4*a),box(4,3*a,2*a),
Cir(1,r),Cir(7,r),Cir(5,r),Cir(4,r),Cir(3,R),
Line(0,1,0),Line(7,8,0),
Line(1,2,7),Line(7,6,7),Lin(5,4),
cir4(3,R,x[1]/R),
```

```
PLOT(seq(TEXT([x[j]+0.2,y[j]+0.7],nam[j]),j=0..4))):
od:
 PP:=display(seq(P[i],i=0..K),insequence=true,
                    thickness=2,
                    scaling=constrained,
                    axes=none):
> display(paverxnostь(5*R,-2.5*a-b,4*R,0.3),PP,Opora(0,0.1),
Opora(3,0.1),Opora(8,0.1));
```



3.21-rasm

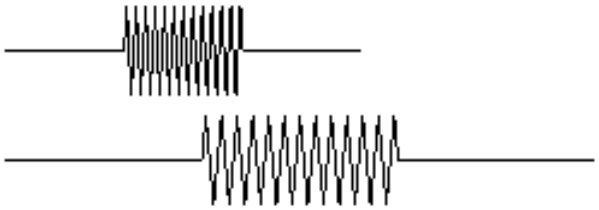
Rasmda OA krivoshipdan harakat oluvchi va qismlari ilgarilanma, aylanma va tekis parallel harakat qiluvchi mexanizm tasvirlangan.

6.1.4. Dinamika masalalarini matematik dasturlash.

Prujina ko‘plab tebranma harakat qiladigan mashina va mexanizmlarda qo‘llaniladi. Quyida bikrliklari turlicha bo‘lgan ikkita prujinalarning harakatlantirish dasturi tuzilgan.

```
> restart:with(plots):with(plottools): N:=20:
Warning, the name changecoords has been redefined
Warning, the name arrow has been redefined
> pru:=proc(x1,x2,y)local K,d,r,l: r:=6: K:=50: l:=(x2-x1)/3: d:=l/K:
```

```
PLOT(CURVES([[x1,y],seq([x1+l+j*d,r*sin(Pi*j/2)+y],j= 0..K),[x2,y]])):
end:
> for t to N do m:=30*evalf(2+sin(4*Pi*t/N));H[t]:=pru(0,m,0):od:
>  for t to N do m1:=20*evalf(2+sin(2*Pi*t/N));H2[t]:=pru(0,m1,15):od:
> a:=display(seq(H[t],t=1..N),insequence=true):
>  b:=display(seq(H2[t],t=1..N),insequence=true):
> display(a,b,axes=none,scaling=constrained);
```



3.22-rasm

Erkinlik darajasi ikkiga teng sistemaning tebranishi

Ikkita prujinaga maxkamlangan jismlarning tebranma harakatini ko‘ramiz A yuk chap tomondan prujina orqali qo‘zg’almas devorga hamda o‘ng tomondan prujina orqali B yukka biriktirilgan. Bu yuklar sistemasi ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘ladi. Bu sistemani harakatini o‘rganish uchun quyidagi dasturni MAPLE da yozamiz.

```
> restart;
```

CHastotalar nisbati 3 ga teng bo‘lishi uchun yuklarning massalari (kg) quyidagicha tanlangan

```
> ma:=24.63:mb:=40:
```

Prujinaning bikrligi (N/m)

```
> c:=90:
```

A, B jismlarning kinetik energiya

```
Ta:=ma*vx^2/2:
> Tb:=mb*(vs+vx)^2/2:
```

Sistemaning kinetik energiyasi

```
> T:=Ta+Tb:
```

Inertsiya koeffitsenti

```
> a11:=coeff(diff(T,vx),vx):
> a12:=coeff(diff(T,vx),vs):
> a22:=coeff(diff(T,vs),vs):
```

Tebranish chastotasi omg

```
>  B1:=c-a11*omg^2: B2:=a12*omg^2:
>  CHastot tenglamasi:=B1*(c-a22*omg^2)-B2^2=0:
```

CHastota tenglamasini yechish

```
>  sol:=fsolve(CHastot tenglamasi,omg=0..infinity);
sol[2]/sol[1];#CHastotlarning o‘zaro bog’liqligi
```

sol := .9776197747, 2.932988298

3.000131926

Tebranishning differentsial tenglamasi

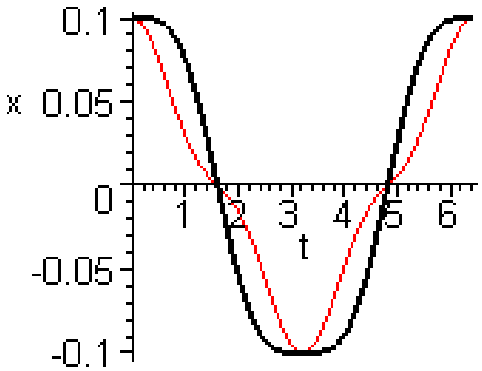
```
> eq1:=a11*diff(x(t),t$2)+a12*diff(s(t),t$2)=-c*x(t):
> eq2:=a12*diff(x(t),t$2)+a22*diff(s(t),t$2)=-c*s(t):
```

Boshlang’ich shartlari berilgan sistemani sonli yechish. Yuklarning harakati ularning tinch holatidan boshlanadi.

```
> r:=dsolve({eq1,eq2,s(0)=0.1,x(0)=0.1,D(s)(0)=0,D(x)(0)=0},
        {s(t),x(t)},type=numeric,
                output=listprocedure):
> with(plots):
> T0:=6.4:#Vaqt oraliqlarini tebranish davriga karrali qilib tanlaymiz.
>s1:=odeplot(r,[t,x(t)],0..T0,numpoints=2.21,labels=[t,x],color=black,thickness
=2):
```

```
> s2:=odeplot(r,[t,s(t)],0..T0,numpoints=2.21,labels=[t,x],color=red):
> display(s1,s2);
```

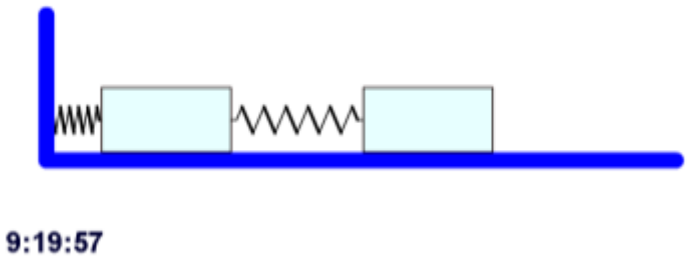
Warning, the name changecoords has been redefined



3.23-rasm

```
> rs := eval(s(t),r):
> rx := eval(x(t),r):
> n:=200: # animatsiya uchun  nuqtalar (kadrlar) soni
> k:=2000:# Rasm uchun masshtab koeffitsienti
> fd := fopen("C:\\DOS\\):# sfla.txt faylini ochish", WRITE fayl.
fprintf(fd, "ms=[ %3.0f",k*rs(0)):
> for i to n do
>   tm:=T0/n*i:
>   fprintf(fd, ",%3.0f",k*rs(tm));
od:
> fprintf(fd, "];"):
> fclose(fd):# Faylni yopish
> fd := fopen("C:\\DOS\\xfla.txt", WRITE):#Faylni ochish. fprintf(fd, "mx=[
%3.0f",k*rx(0)):
> for i to n do
>   tm:=T0/n*i:
>   fprintf(fd, ",%3.0f",k*rx(tm));
od:
> fprintf(fd, "];"):
```

```
> fclose(fd):
```



3.24-rasm

Rasmni silliq sirtda prujinalar vositasida biriktirilgan erkinlik darajasi ikkita bo‘lgan ikkita yukdan iborat sistema tasvirlangan.

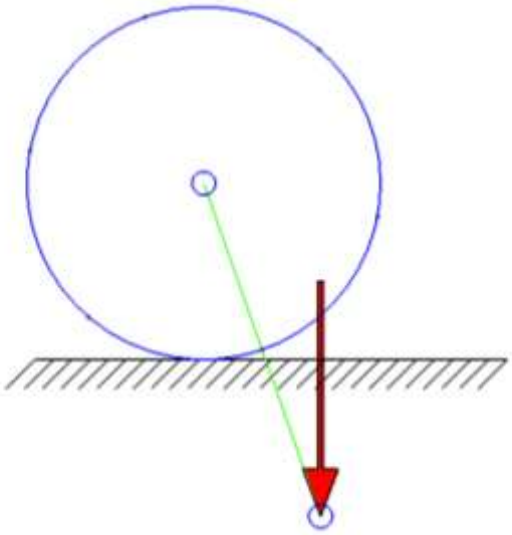
Diskka biriktirilgan sterjen uchiga yo‘nalishi va miqdori o‘zgarmas kuch qo‘yilgan sistemaning tebranma harakatini dasturini tuzamiz.

```
> restart:

> read "ras.m":

> R:=3: a:=6:
> # Koordinatsi
>  y[1]:=R:
> # Kadrlar soni K
> K:=36: with(plots):with(plottools):
> # Barcha kadrlarni xosil kilish
> for i from 0 to K do t:=i/K: phi:=sin(2*pi*i/K)*pi/6+3*pi/2: x[1]:=-R*phi:
  x[2]:=x[1]+a*cos(phi):
  y[2]:=y[1]+a*sin(phi):
  F:=arrow([x[2],y[2]+4],evalm([0,-20]*0.2),0.1,0.6,0.2,color=red):
 P[i]:=display(F,Cir(1,R),Cir(2,0.2),Cir(1,0.2),
Line(1,2,3)):
 cir4(1,R,phi),
```

od:

> **# Mexanizm harakatini tasvirlash**

```
> PP:=display(seq(P[i],i=0..K),insequence=true,
                    thickness=2,
                    scaling=constrained,
                    axes=none):
> display(PP,Poverxnostь(-18,0,8,0.5));
```



3.25-rasm

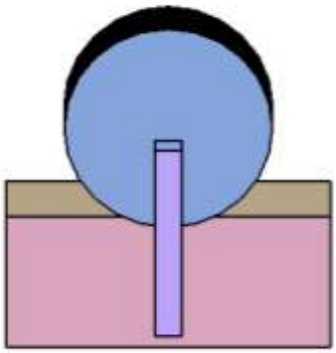
Rasmda ko‘rsatilgan sistemani harakatini quyidagicha izoxlaymiz.Disk aylanish o‘qiga nisbatan kuch momentining o‘zgarishi natijasida kuchning potentsial energiyasi diskning kinetik energiyasining o‘zgarishiga sabab bo‘ladi. Ishqalanish kuchlari mavjud bo‘lmaganda bu jarayon cheksiz davom etadi.

Maxovikning tebranma harakati.

Tekis silliq sirtda tebranma harakat qilayotgan maxovik uchun dastur yozamiz. Sirpanishdagi va dumalashdagi ishqalanishlar mavjud bo‘lmaganda maxovik erkin tebranma harakatda bo‘ladi.

```
> restart:
> with(plots):with(plottools):
Warning, the name changecoords has been redefined
Warning, the name arrow has been redefined
> K:=12:
> Maxovik:=cylinder( [-2, 0, -2], 16, 11):
```

```
Sterjeпь:=cuboid( [ 0, -2, 9 ], [ 30, 2, 14 ] ):
Opora:=cuboid( [ 35, -25, -14 ], [ 14, 25, 4] ):
for i to K do
   A:=sin(2*Pi*i/K)*Pi/6:
   P1:=display(rotate(PLOT3D(Maxovik,ORIENTATION(0,-30)),0,0,A)):
P2:=display(rotate(PLOT3D(Sterjeпь),0,0,A)):P[i]:=display(translate(P1,0,
A*10,0),translate(P2,0,A*10,0));od:
>  PP:=display(seq(P[i],i=1..K),insequence=true,
                    thickness=2,
                    scaling=constrained,
                    axes=none):
> display(PP,Opora);
```



3.26-rasm

Rasmda silliq sirtda tebranma harakat qilayotgan maxovik ko‘rsatilgan.

Lagranjning ikkinchi tur tenglamasi yordamida tezlanishni hisoblash

```
> restart:
> read "ris.m":
_Radiuslar (sm)
> rc:=14:Rc:=28:rd:=17:Rd:=24:
Inertsii radiuslari (sm)
ic:=28:id:=23:
Masslar (kg)
ma:=18: mb:=5: mc:=10: md:=3: me:=8:
```

Inertsii momentlari

> **Jc:=mc*ic^2: Jd:=md*id^2:**

Umumlashgan koordinatalar – A ko‘chish Ye aravacha

D blokning burchak tezligi va D yukning massalar markazining tezligi

omega:=(va-ve)/(Rd-rd): vd:=va-omega*Rd:

Kinetik energiyasi

> **T:=1/2*ma*va^2**

+1/2*mb*(va*rc/Rc)^2

+1/2*Jd*omega^2+1/2*md*vd^2

+1/2*me*ve^2

+1/2*Jc*(va/Rc)^2:

Inertsial koeffitsientlar

> **a11:=coeff(diff(T,ve),ve):**

a12:=coeff(diff(T,ve),va):

a22:=coeff(diff(T,va),va):

Umumlashgan kuchlar

> **Qe:=0:**

Qa:=(ma+mb*rc/Rc)*G:

Kanonik tenglamalar sistemasi

> **eq1:=a11*We+a12*Wa=Qe:**

eq2:=a12*We+a22*Wa=Qa:

Tenglamalar sistemani yechish

> **R:=solve({eq1,eq2},{Wa,We});**

assign(R):

$$R := \{ Wa = 5.612714953,\ We = 4.256094344 \}$$

Tasvir hosil qilish

Rasmda sharnirlar o‘rnini aniqlash

nam:=[A,B,C,D,E]: Nnam:=[1,3,5,11,8]:

Rd:=24: a:=40: b:=10: r:=4:h:=40:

Burchak tezlanish va D markaz tezlanishi

```
> epsD:=(Wa-We)/(Rd-rd):  Wd:=Wa-epsD*Rd:
> epsC:=Wa/Rc:
```

Koordinatlar

```
> x[12]:=0:y[12]:=0:
  y[2]:=0: y[4]:=0:
  x[5]:=0: y[5]:=Rc:
  y[6]:=y[5]:
  y[8]:=y[6]-b*2+Rd-rd:  y[10]:=y[8]:
  y[7]:=y[8]-r*1.5:
  y[9]:=y[7]:
  x[2]:=-Rc:x[4]:=-rc: x[1]:=-Rc: x[3]:=-rc:
  y[11]:=y[6]+Rd:      y[13]:=y[8]+b:
```

K –kadrlar soni

```
> K:=36: with(plots):with(plottools):
```

Barcha kadrlarni hosil qilish

```
> for i from 0 to K do
> t:=5*i/K:
> phiC:=t^2/2*epsC:
 phiD:=t^2/2*epsD: Se:=t^2/2*We:Sd:=t^2/2*Wd:
  S12:=-35-phiC*Rc:S34:=-40-phiC*rc:
  S56:=100+h-Sd:
  y[1]:=S12: y[3]:=S34:
  x[7]:=120+h-Se-a:  x[8]:=x[7]:
  x[9]:=x[7]+2*a:   x[10]:=x[9]:
  x[11]:=S56:      x[13]:=x[7]+a:  x[6]:=x[11]:
  P[i]:=display(Cir(12,Rc),Cir(12,rc),Cir(7,r),Cir(9,r),
box(13,1.2*a,b),
box(1,r,r),box(3,r,r),
Cir(11,Rd),Cir(11,rd),Cir(11,1),
cir4(12,Rc,phiC),cir4(12,rc,phiC),
```

```
cir4(11,Rd,-phiD),cir4(11,rd,-phiD),
seq(TEXT([x[Nnam[j]]+4,y[Nnam[j]]+9],nam[j]),j=1..5),
seq(Line(2*i-1,2*i,9),i=1..3),Lin(7,8),Lin(9,10)):
od:
```

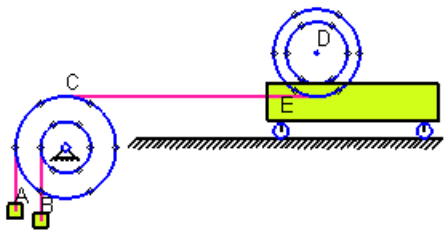
Harakatlanayotgan mexanizmning tasviri

```
> PP:=display(seq(P[i],i=0..K),insequence=true,
                thickness=2,
                scaling=constrained,
                axes=none):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined

```
> display(PP,Opora(12,2),Poverxnostь(h,y[7]-r,170,6));
```



3.27-rasm

Xulosalar:

1. Maple matematik paketlari yordamida matematik masalalardan tashqari boshqa texnik fanlar masalalarini ham analitik va grafik ko‘rinishlarda yechish mumkin.

2. Bundan tashqari Maple ko‘plab mexanizmlarni harakatini ko‘rsatish, animatsiyalarini hosil qilish uchun juda qulay dasturlash vositasi hisoblanadi.

3. Maple sistemasini maktablar, kollejlar va oliy o‘quv yurtlarida chuqurroq o‘rganilsa, faqat matematika masalalaridan tashqari boshqa fanlarning murakkab masalalarini ham ixcham dasturlar orqali yechish mumkin bo‘ladi. Bu esa o‘quvchi

va talabalarda masalaning mohiyatiga yetish, ularning grafiklari va animatsiyalarini yaqqol ko‘rish imkoniyatiga ega bo‘ladi.

4. Maple elektron hujjatlarni tayyorlash va grafik vizuallashtirish vositalariga ham ega. Maple kompyuter matematikasini chuqur o‘rganish dasturchiga turli fan va texnika masalalarini yechishda katta imkoniyatlar ochib beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.David F. Mazurek. Vector mechanics for engineers. Statics and Dynamics, California Polytechnic State University—San Luis Obispo, 2011

2. Hibbeler R.C. Engineering mechanics statics & dynamics. Twelfth editioh. © 2016 by. Published by Pearson Prentice Hall.

3. Szolga V.I. «Theoretical mechanics», Berlin, part-1, 2013 y., - 204 p.

4. Szolga V.I. «Theoretical mechanics», Berlin, part-2, 2013 y., - 261 p.

5. Meriam J.L., L.G.Kraige. Engineering Mechanics. Dynamics. 2012.

6. Ўрозбоев М.Т. "Механика I-Назарий механика", Дарслик. Т.: «Ўқитувчи», 1979. – 510 б.

7. Рашидов Т.Р., Шозиётов Ш., Мўминов К.В. «Механика I-Назарий механика асослари», Дарслик. Т.: «Ўқитувчи», 1990. – 412 б.

8. П. Шоҳайдарова, Ш.Шозиётов, Ж.Зоиров. Назарий механика.

–Т.: Ўқитувчи, 1992. – 407 б.

9. Mirsaidov M.M., Boymurodova L.I., G’iyasova N.T. “Nazariy mexanika”. O’quv qo’llanma. T.: “ILM ZIYO”, 2009. – 224 b.

10. Мирсаидов М.М., Боймурадова Л.И, Ғиёсова Н.Т. “Механика I-Назарий механика”, Ўқув қулланма. Т.: «Ўзбекистон», 2008. – 247 б.

11. Mirsaidov M.M. va boshqalar. Nazariy мexanikaning qisqa kursi.

-T.O‘zbekiston.2008.http:// ziyonet.Uz.

12. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами, (Бутенин Н.В., Лурье А.И., Меркин Д.Р. таҳрири остида). Ўқув қулланма. Т.: «Ўқитувчи», 1989. –468 б.

13. O.E. Kepe va boshqalar. Nazariy mexanikadan qisqa masalalar to’plami. Yangi asr avlodi. Toshkent. 2008 y.

14. Shoobidov Sh.A., Habibullayeva X.N., Fayzullayeva F.D. Nazariy mexanika. O'uv qo'llanva.-T.: Yangi asr avlodi, 2008. - 238 b.

15. Husanov Q.. Nazariy mexanika. Darslik. TIKXMMI. 2019-561b.

16. Тарг С.М. «Краткий курс теоретической механики», Учебник. М.: «Наука», 1986.- 220 с.

17. «Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами», Ўқув қулланма. А. А.Яблонский таҳрири остида, таржима. Т.: «Ўқитувчи», 2002. – 416 б.

18. Яблонский А.А., «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике». Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 1985. – 420 с.

19. Husanov Q. “Nazariy mexanika fanidan laboratoriya topshiriqlari to'plami” . O'quv qo'llanma. Toshkent-2007.

20. Husanov Q. “Nazariy mexanika” (statika, kinematika). O'quv qo'llanma. Toshkent-2012.

21. Bahodirov G'.O., Husanov Q. “Nazariy mexanika” fanidan topshiriqlar to'plami”. Uslubiy qo'llanma. Toshkent-2010.

22. Мавланов М.Т. ва бошқалар. «Механика I-Назарий механика масалаларини «Mathcad» дастури ёрдамида ечиш». Ўқув қулланма. Т.: «ТТЕСИ»., 2012. – 156 б.

23. Мирсаидов М.М., Мавланов Т.М. Механика I-Назарий механика фанидан изоҳли луғат. Ўқув қўлланма. Т.: «ТИМИ», 2015. – 56 б.

24. Каримов К.А., Хабибуллаева Х.Н. Назарий механика фанини ўқитишда талабаларда фазовий ва тадбиқий фикрлаш жараёнини шакллан-тириш. «Деформацияланувчан каттик жисмлар механикаси» мавзусидаги Республика илмий – амалий анжумани маърузалари тўплами. 2-жилд, Тошкент-2018, 419-423 б.

25. Мирзакаримов Э.М. Maple 7 дастури ёрдамида олий математика масалаларини ечиш. 1-қисм. Фарғона.:ФарПИ.-2010.

26. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet решение задач механики. М.: Лань.-2012.

27. Бертяев В. Теоретическая механика на базе Mathcad .Практикум.С-П.БХВ-Петербург.-2005.

28. Аноркулов Т., Хусанов К., Комилжонов А. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами. Т.: Зиё- нашр, 2002.