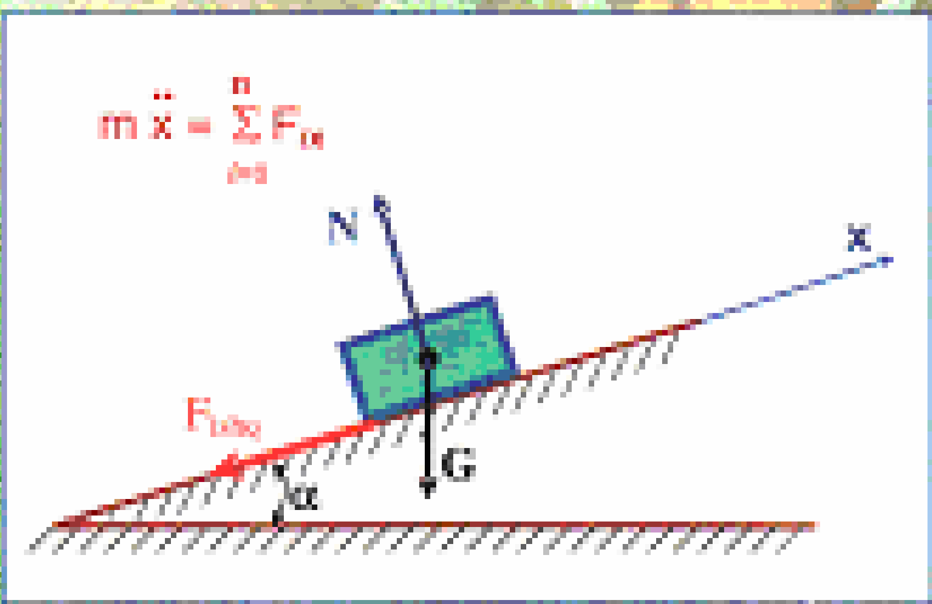
M. M. Mirsaidov
L. I. Boymurodova
N. T. Giyasova

NAZARIY MEXANIKA

Oliy o'quv yurtlari uchun



UDK 531. 075. 8

Mirsaidov M.M., Baymuradova L.I., Giyasova N.T.
Nazariy mexanika: Oliy o`quv yurtlari talabalari uchun o`quv qo`llanma. Toshkent, «O'zbekiston», 2008, 230 bet, il. 212 ta.

Ushbu o`quv qo`llanma *oliy o`quv yurtlarining qurilish, muxandislik, suv xo`jaligi, transport va kasbiy ta'lim sohalari bo`yicha bilim oluvchi bakalavriat talabalari uchun mo`ljallangan*. O`quv qo`llanmada nazariy ma'lumotlar bakalavriatura talablaridan kelib chiqqan holda qisqacha bayon qilingan bo`lib, mexanikaning statika bo`limidagi tekislikda joylashgan kuchlarni qo`shish va muvozanat shartlari fazodagi kuchlar sistemasining xususiy holi sifatida yoritilgan; kinematika bo`limidagi kinematik kattaliklar avval vektor usulida berilib, so`ngra koordinata va tabiiy usulda keltirib chiqarilgan; dinamika bo`limida esa qattiq jism va moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari xususiy hol sifatida bayon etilgan.

Qo`llanmada ko`plab masalalar oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan bo`lib, amaliy masalalarni hal etishda nazariyadan olgan bilimlardan qanday foydalanish va natijalarni tahlil qilish ko`rsatib berilgan.

Ma'sul muharrir: O`zbekiston milliy universiteti dotsenti, f.-m.f.n. B.Atajanov.

Taqrizchilar: Toshkent Davlat texnika universiteti "Nazariy mexanika, mashina detallari, servis texnikasi va texnologiyasi" kafedrasi:
t.f.d., professor K.A.Karimov.

Toshkent to`qimachilik va yengil sanoat instituti "Nazariy mexanika va materiallar qarshiligi" kafedrasi:
t.f.d., professor T.M.Mavlonov.

Mazkur o`quv qo`llanma O`zbekiston Respublikasi Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligining 2007 yil 28 avgustdagi 177-buyrug`iga asosan berilgan №1251 sonli o`quv adabiyotlari grifi guvohnomasi asosida bosildi.

UDK 531. 075. 8

Mirsaidov M.M., Baymuradova L.I., Giyasova N.T.
“Nazariy mexanika” dan o`quv qo`llanma

O`quv qo`llanmada nazariy ma’lumotlar bakalavriatura talablardan kelib chiqqan holda qisqacha bayon qilingan bo`lib, mexanikaning statika bo`limidagi tekislikda joylashgan kuchlarni qo`shish va muvozanat shartlari fazodagi kuchlar sistemasining xususiy holi sifatida yoritilgan; kinematika bo`limidagi kinematik kattaliklar avval vektor usulida berilib, so`ngra koordinata va tabiiy usulda keltirib chiqarilgan; dinamika bo`limida esa qattiq jism va moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari xususiy hol sifatida bayon etilgan.

Qo`llanmada ko`plab masalalar oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan bo`lib, amaliy masalalarni hal etishda nazariyadan olgan bilimlardan qanday foydalanish va natijalarni tahlil qilish ko`rsatib berilgan.

Ushbu o`quv qo`llanma *oliy o`quv yurtlarining qurilish, muxandislik, suv xo`jalig , transport va kasbiy ta’lim sohalari bo`yicha bilim oluvchi bakalavriat talabalari uchun mo`ljallangan.*

М.М.Мирсаидов, Л.И. Баймурадова, Н.Т.Гиясова
Учебное пособие по Теоретической механике

В учебном пособии приводятся основные понятия и теоремы статики, кинематики и динамики. В отличие от других учебников здесь предложен общий подход к решению различных задач. Так равновесия плоской системы сил расматриваются как частный случай пространственной, координатный и естественный способ описания характеристик движения - как частный случай, описываемый в векторной форме, а динамики материальной точки и динамики твёрдого тела излагаются как частный случай общих теорем динамики механических систем. Изложенный материал снабжен достаточным количеством задач с подробным их решением в нескольких вариантах.

Предлагаемое учебное пособие предназначено *для студентов бакалавривата, обучающихся инженерным специальностям по направлениям водного хозяйства, строительства, машиностроения, транспорта и педагогов по этим специальностям.*

M.M.Mirsaidov, L.I.Baymuradova, N.T.Giyasova
The manual on “The theoretical mechanics”

In the manual the cores concept and theorems of statics, kinematics and dynamics are resulted. Unlike other textbooks transition from the general to the particular, for example, balance of flat system of forces is considered as a special case spatial, a coordinate and natural way of the description of characteristics of movement as a special case described in the vector form and the common theorems of dynamics are proved for mechanical systems, and theorems of dynamics of a firm body and a material point are stated as a special case. The stated material is supplied by enough of tasks with their detailed decision in several variants.

The offered manual is intended *for students of a bachelor degree of directions of a water management trained on engineering specialities, construction, mechanical engineering and teachers.*

So`z boshi

Hozirgi zamon fan-texnikasining, kompyuter texnalogiyasining rivojlanishi oliy o`quv yurtlari o`quv jarayoniga yangidan-yangi fanlarni kiritishga olib keldi. Mamlakatimiz oliy ta'limida bir pog`onali tizimdan ikki pog`onali bakalavr-magistr tizimiga o`tilishi, barcha texnika fanlari qatori nazariy mexanika fanining ham o`quv soatlar hajmini, oz bo`lsada, qisqartirildi. Oliy o`quv yurtlarida ta'lim olayotgan talabalar uchun Respublikamiz davlat ta’lim standartlaridan kelib chiqqan holda hozirga qadar “Nazariy mexanika” fanining qisqa kursi yaratilgan emas.

Lekin muxandisllik ishlarida muammoli va tadbiqiy masalalarni hal etishda nazariy mexanika fani fundamental predmetlardan biri hisoblanadi. Shuning uchun mazkur kursni lotin va kirill grafikasida chop etish dolzarb masala bo`lib, ayniqsa qisqa vaqt ichida bo`lajak mutaxssislarga nazariy mexanikadan zarur bo`lgan nazariy va amaliy bilim va ko`nikmalarni mukammal, sodda va rovon tilda yetkazish muhum bo`lib qoldi. Shularni e’tiborga olib ushbu o`quv qo`llanma yaratildi.

Mazkur o`quv qo`llanmada nazariy mexanikaning statika bo`limidagi juft momenti vektori haqidagi teoremalar vektorlar algebrasidagi tushunchalar asosida qisqacha talqin etildi. Juft momenti vektoriga oid boshqa teoremalar xususiy hol sifatida yoritildi. Kuchlar sistemasini qo`shish fazoda joylashgan kuchlar uchun berilib, so`ngra tekislikda joylashgan kuchlar sistemasiga tegishli nazariy ma'lumotlar xususiy hol ko`rinishida keltirib chiqarildi. Shuningdek, kinematika bo`limidagi moddiy nuqta va jism nuqtasi tezlik hamda tezlanishlari vektor usulda keyin koordinata, tabiiy usulda bayon qilindi.

Qo`llanmada nazariy mexanikaning prinsiplaridan Dalamber, mumkin bo`lgan ko`chish, Dalamber-Lagranj prinsiplari to`liq tushuntirilib berildi. Dinamikaning umumiy teoremalari esa sistema uchun yoritildi, so`ngra qattiq jism va moddiy nuqta uchun xususiy hol sifatida keltirib chiqarildi.

Taqdim etilayotgan qo`llanmada ko`pgina masalalar hal etilgan bo`lib, ular oliy o`quv yurtlarining ixtisosliklariga moslab tanlangan. Bu qo`llanmadan texnika va pedagogika oliy o`quv yurtlarining talabalari foydalanishlari mumkin.

Qo`llanma qo`lyozmasini o`qib chiqib,uning sifatini oshirish borasida bergan maslahatlari uchun Respublikamiz oliy o`quv yurtlarining professor, o`qituvchilariga, jumladan professorlar K.S.Sultonov, A.R.Rizaev, TDTU professori K.A.Karimov, TTESI professori T.M.Mavlonov hamda TDMU dotsenti B.Atajonovga mualliflar tashakkur bildiradilar.

Hurmatli ustozlar va soha mutaxassislari! Darslikdagi kamchiliklar bo`yicha fikr va mulohazalaringizni quyidagi manzil  bo`yicha bildirishingizni so`raymiz.

100000, Toshkent, Qori-Niyoziy ko`chasi 39-uy, TIMI, “Nazariy va qurilish mexanikasi “ kafedrasi. E-mail: theormir@mail.ru

Kirish

Nazariy mexanika moddiy jismlarning bir-biriga ta'siri va mexanik harakatlarning umumiy qonunlari haqidagi fandir.

Vaqt o`tishi bilan fazoda moddiy jismlarning bir-biriga nisbatan o`rin almashtirishi *mexanik harakat* deb ataladi.

Jismning barcha xossalarini hisobga olgan holda sodir bo`ladigan mexanik hodisalarni nazariy va amaliy jihatdan tekshirish juda murakkabdir. Shuning uchun mexanikada moddiy nuqta va absolyut qattiq jism tushunchalari kiritiladi.

Mexanik harakatni yoki muvozanatni tekshirayotganimizda o`lchamlari va shaklini ahamiyati bo`lmagan jism *moddiy nuqta* deb ataladi.

Jism harakati tekshirilayotganda uning ikkita nuqtasi orasidagi masofa doim o`zgarmasdan qolsa, uni *absolyut qattiq* jism deyiladi.

Tabiatda absolyut qattiq jism yo`q, har qanday jism oz bo`lsa-da deformatsiyalanadi. Agar bu o`zgarish jismning o`lchamlariga nisbatan juda kichik bo`lsa, mexanik harakatni tekshirishda mazkur o`zgarish e'tiborga olinmaydi.

Nazariy mexanikaning asosiy qonunlari kuzatish va tajriba natijalariga asoslanadi

Biz o`rganadigan nazariy mexanika G.Galiley (1564 – 1642) va I.Nyuton (1643 – 1727) tomonidan ta'riflab berilgan qonunlariga asoslangan bo`lib, klassik mexanika deb ataladi. Klassik mexanikada vaqt va fazo jismlarning harakatiga bog`liq emas deb qaraladi. Shuningdek, jismning massasi uning tezligiga bog`liq bo`lmagan o`zgarmas miqdor deb olinadi.

Klassik mexanikada moddiy jismlarning harakati uch o`lchovli Evklid fazosiga nisbatan tekshiriladi hamda fazoni mutlaqo qo`zg`almas deb qaraladi. Harakat o`lchoviga oid kattaliklar Evklid geometriyasi asosida olinadi.

Xalqaro SI sistemasida vaqt birligi qilib sekund (s), uzunlik birligi uchun metr (*m*), massa birligi qilib *kg*, kuch birligi uchun Nyuton (*N*) qabul qilingan.

Nazariy mexanika, masalaning qanday nuqtai nazardan qo`yilishiga qarab, *statika*, *kinematika va dinamika* qismlariga ajratiladi.

Mexanikaning *statika* bo`limida jismlarning muvozanati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o`rganiladi. Bu holat mexanik harakatning xususiy holi hisoblanadi. *Kinematikada* jismlarning harakati, bu harakatni yuzaga keltirayotgan yoki uni o`zgartirayotgan sabablar e'tiborga olinmay o`rganiladi. *Dinamikada* jismlarning mexanik harakatlari shu harakatni vujudga keltirayotgan sabablarga bog`lab o`rganiladi.

BIRINCHI BO`LIM

S T A T I K A

I bob.

Qattiq jism statikasi va statikaning asosiy aksiomalari

1- §. Kuch. Kuchlar sistemasi.Ekvivalent sistema. Teng ta'sir etuvchi

Nazariy mexanikaning statika bo`limida jismlarning muvozanati va kuchlar haqidagi asosiy tushunchalar o`rganiladi. Statika bo`limidagi masalalarni ikki turga bo`lish mumkin:

1)Kuchlarni qo`shish va absolyut qattiq jismga qo`yilgan kuchlar sistemasini sodda holga keltirish;

2)Kuchlar sistemasi ta'siridagi absolyut qattiq jism muvozanatining zarur va yetarli shartlarini aniqiash.

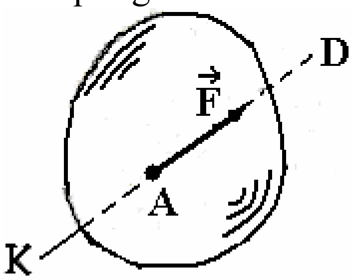
Mexanikada moddiy jismlarning bir-biriga o`zaro ta'siri kuch bilan o`lchanadi. Kuch vektor miqdor bo`lib, uning jismga ta'siri:

a) Kuch qo`yilgan nuqta;

b) Kuchning yo`nalishi;

v) Kuchning miqdori bilan aniqlanadi.

Kuchning xalqaro birliklar sistemasi (SI) dagi o`lchov birligi uchun Nyuton (N) qabul qilingan.



1-rasm

Kuchning yo`nalish va qo`yilish nuqtasi jismlarning mexanik ta'siriga va ularning bir-biriga nisbatan joylashishlariga bog`liq.

Masalan, Yerning jismga ta'siri Yer markaziga qarab yo`nalgan bo`lib, u jismning og`irlik markaziga qo`yilgan. Rasmda kuch uchida strelkasi bo`lgan to`g`ri chiziq kesmasi bilan ko`rsatiladi (1-rasm).

Kesmaning *A* boshi kuch qo`yilgan nuqta bo`ladi. Kesmaning uzunligi biror masshtabda kuch miqdorini shartli tasvirlaydi.

Kuch yo`nalgan *KD* to`g`ri chiziq uning ta'sir chizig`i deyiladi. Masalan, og`irlik kuchining ta'sir chizig`i jism og`irlik markazidan o`tuvchi vertikaldan iborat.

Kuch vektor kattalik bo`lgani sababli uni biror katta harf bilan belgilanadi, bu harfning tepasiga chiziq,ya'ni vektor belgisi qo`yiladi. (Masalan $\vec{F}$). Kuch miqdori esa *F* bilan belgilanadi.

Jismga bir vaqtda ta'sir qiluvchi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar to`plami kuchlar sistemasi deyiladi.

Jismga qo`yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining ta'sirini boshqa $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_m)$ kuchlar sistemasi bera olsa, bunday kuchlar sistemasi ekvivalent sistema deb ataladi va quyidagicha yoziladi: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) <=> (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_m)$

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining jismga ta'sirini bitta kuch bera olsa, uni teng ta'sir etuvchi deyiladi va bunday yoziladi:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) <=> \vec{R}$$

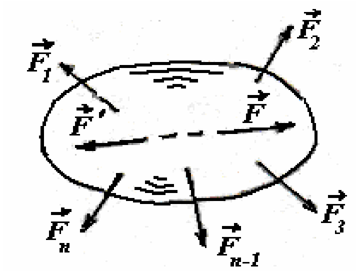
2 - §. Statikaning asosiy aksiomalari

Nazariy mexanikaning statika bo`limida isbotsiz, kundalik tajribalarda tasdiqlangan bir necha aksiomaga asoslanadi.

1.Inersiya aksiomasi. Miqdor jihatidan bir-biriga teng va bir to`g`ri chiziq bo`ylab qarama-qarshi yo`nalgan ikki kuch ta'siridagi jism o`zining muvozanatini yoki to`g`ri chiziqli va teng o`lcho`vli harakatini o`zgartirmaydi.

2. Ikki kuchning muvozanatlashish aksiomasi. Erkin qattiq jismga qo`yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng va bir to`g`ri chiziq bo`ylab qarama-qarshi tomonga yo`nalgan holdagina muvozanatlashadi. Bu kuchlar sistemasi nolga ekvivalent. Shuning uchun ularni nollik sistema deyiladi (2-rasm). $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$

2 - rasm



3 – rasm

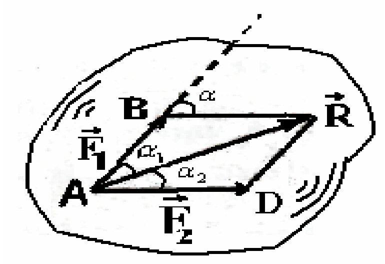
**3.Muvozanatlanuvchi kuchlarni qo`shish va ayirish aksiomasi.** Jismga qo`yilgan kuchlar sistemasiga o`zaro muvozatanlanuvchi kuchlar sistemasi qo`shilsa yoki olinsa, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o`zgarmaydi. Faraz qilaylik, jism $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo`lsin (3-rasm). Jismga yana $(\vec{F}, \vec{F}') \Leftrightarrow 0$ sistemani qo`yaylik. Natijada jism yangi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{F}, \vec{F}')$ kuchlar sistemasi ta'sirida ham muvozanatda bo`ladi, ya'ni:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) <=> (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$$

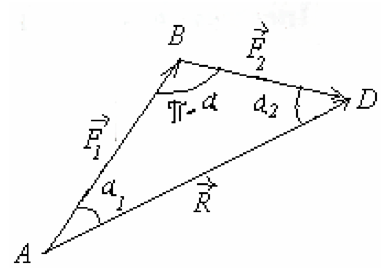
Yuqoridagi aksiomalardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema: Berilgan kuchni o`z ta'sir chizig`i bo`ylab bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga miqdor va yo`nalishi o`zgartirilmay ko`chirilsa, uning jismga ta'siri o`zgarmaydi.

4. Parallelogramm aksiomsi. Jismning biror nuqtasiga qo`yilgan turli yo`nalishdagi ikki kuchning teng ta’sir etuvchisi mazkur kuchlarga qurilgan paralellogramm dioganaliga miqdor jihatidan teng bo`lib, shu dioganal bo`ylab yo`naladi (4-rasm): $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



4 - rasm



5 - rasm

Berilgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarga qurilgan parallelogramm kuch parallelogrammi deb, kuchlarni bu usulda qo`shish parallelogramm usuli deb ataladi. Bunda shuni eslatib o`tish lozimki, ikki $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchni qo`shishda parallelogramm hammasini qurish shart emas, balki quyidagicha qurishni bajarish mumkin:

1) Kuch miqdori uchun masshtab tanlab olinadi;

2) $\vec{F}_1$ kuch oxirida tanlab olingan masshtabga muvofiq $\vec{F}_2$ ni o`ziga parallel qjlib qo`yamiz;

3) $\vec{F}_1$ kuch boshi *A* bilan $\vec{F}_2$ kuch oxiri *D* ni tutashtiruvchi vektor bu kuchlar teng ta'sir etuvchisini ifodalaydi (5-rasm).

$\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarga qurilgan uchburchak kuch uchburchagi, kuchlarni bunday usulda qo`shish esa uchburchak usuli deyiladi.

Teng ta’sir etuvchini miqdor va yo`nalishi geometriya yoki trigonometriya formulalaridan foydalanib aniqlanadi.

Teng ta’sir etuvchining modulini ΔABD dan kosinuslar teoremasiga asosan aniqlaymiz:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha)} \text{ yoki}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

$\alpha = 0^0$ bo`lganda $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 + F_2)^2} = F_1 + F_2;$ (2.1)

$\alpha = 180^0$ da $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = \sqrt{(F_1 - F_2)^2} = F_1 - F_2;$ (2.2)

$\alpha = 90^0$ da $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ bo`ladi.

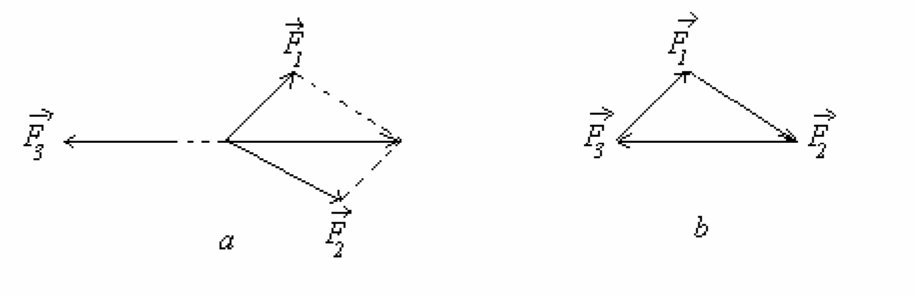
(2.1) va (2.2) dan ko`rinib turibdiki,bir to`g`ri chiziq bo`ylab yo`nalgan kuchlar algebraik qo`shiladi.

Teng ta’sir etuvchi $\vec{R}$ ning $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlar bilan tashkil qilgan α_1 va α_2 burchaklari sinuslar teoremasiga ko`ra aniqlanadi:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_2} = \frac{F_2}{\sin\alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} \qquad (2.3)$$

Mazkur aksiomadan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema: Bir tekislikda yotuvchi va o`zaro parallel bo`lmagan uchta kuch muvozanatlashsa, ularning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi va ulardan tuzilgan kuch uchburchagi yopiq bo`ladi, ya'ni oxirgi $\vec{F_3}$ kuchning uchi $\vec{F_1}$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (6-rasm *a,b).*



6 - rasm

5.Ta'sir va aks ta'sirning tenglik aksiomasi. Absolyut qattiq jismlarning bir-biriga ta'siri teng va bir to`g`ri chiziq bo`ylab qarama-qarshi tomonga yo`nalgan, ya'ni ta'sir hamma vaqt aks ta'sirga teng va unga qarama-qarshi yo`nalgan. Bu aksioma I.Nyuton tomonidan ta'riflangan bo`lib, u klassik mexanikaning asosiy qonunlaridan biri hisoblanadi.

**6.Qattiq bo`lmagan jismlar muvozanatining saqlanish qonuni.** Qattiq bo`lmagan jism kuchlar ta'sirida muvozanatda bo`lsa, jism qattiq holatga aylanganda ham uning muvozanati o`zgarmaydi. Bu aksiomadan ko`ramizki, absolyut qattiq jismga qo`yilgan kuchlarning muvozanat sharti deformatsiyalanadigan jismga qo`yilgan kuchlar uchun ham o`rinli bo`ladi. Deformatsiyalanadigan jismlarga oid bir qancha masalalar, masalan, ip, zanjir, qayish, sterjen kabi jismlardagi zo`riqishlarni aniqlashga oid masalalar yechishda mazkur aksiomadan foydalanamiz.

3 - §. Bog`lanish va uning reaksiyalari

Fazoda istalgan tomonga harakatlana oladigan jism erkin jism deb ataladi. Harakati biror bir sabab bilan cheklangan jism bog`lanishdagi jism deyiladi.

Jismning harakatini cheklovchi sabab bog`lanish deb ataladi. Bog`lanishning ta'sirini almashtiruvchi kuch reaksiya kuchi deyiladi.

Nazariy mexanikada bog`lanishdagi jismning harakatini yoki muvozanatini erkin jismning harakati yoki muvozanatiga keltirib tekshiriladi. Bu hol quyidagi aksioma bilan ifodalanadi.

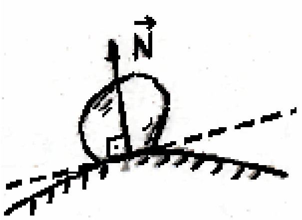
7.Aksioma. Bog`lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun jismga ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga bog`lanish reaksiya kuchini ham qo`shish kerak.

Bu aksioma jismni bog`lanishdan bo`shatish aksiomasi deyiladi.

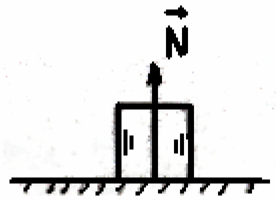
Statika masalalarini yechishda reaksiya kuchlarini aniqlash alohida ahamiyatga ega.

Bog`lanishlarning asosiy turlarini ko`rib chiqamiz.

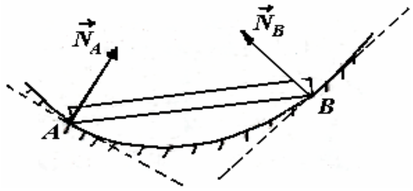
1.Jism silliq sirtga tiralib tursin. Bu holda reaksiya kuchi jism hamda silliq sirtning o`zaro tegib turgan nuqtasi orqali o`tkazilgan umumiy normal bo`ylab yo`naladi (7, 8-rasmlar).



7 - rasm



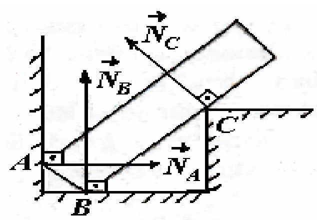
8 – rasm



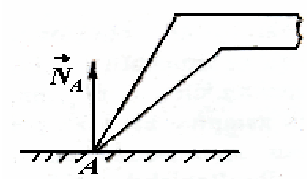
9 - rasm

Xususan, jism qo`zg`almas tayanch tekisligiga tiralib tursa va ishqalanish kuchi hisobga olinmasa, u holda normal reaksiya kuchi jism hamda tayanch tekisligining urinish nuqtasi orqali o`tkazilgan umumiy normal bo`ylab yo`naladi (9-rasm).

Agar jism tayanch tekisligiga bitta nuqtasi bilan tayansa, u holda qaysi tekislikka (jism yoki tayanch tekisligiga) normal o`tkazish mumkin bo`lsa, reaksiya kuchi mazkur normal bo`yicha yo`naladi (10, 11-rasmlar).

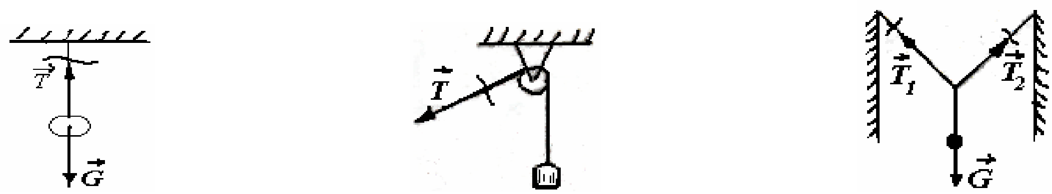


10 - rasm



11 – rasm

2. Jism qayish, zanjir, ip (yoki arqon)lar vositasida bog`langan bo`lsa (12-rasm *a, b, v*), shuningdek vaznsiz qattiq sterjen orqali sharnir vositasida boshqa jismga biriktirilgan bo`lsa (13-rasm *a, b*), mazkur bog`lanishlarning reaksiya kuchlari qayish, zanjir, ip yoki vaznsiz sterjen bo`ylab yo`naladi.



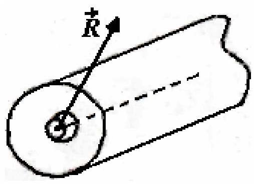
a *b* *v*

12 – rasm

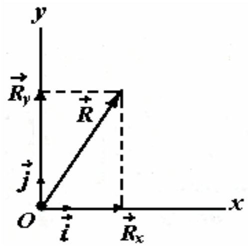
a *b*

13-rasm

3. Jism silindrik sharnir yoki podshipniklar vositasida bog`langan bo`lsa, bog`lanish reaksiyasi hamisha aylanish o`qiga perpendikulyar bo`ladi (14–rasm *a*). Jismga bir qancha kuchlar ta'sir etsa, sharnir reaksiyasining miqdor va yo`nalishi noma'lum bo`ladi. Bu holda noma'lum reaksiya $\vec{R}$ ni koordinata oqlari bo`ylab yo`nalgan $R_x$ va $R_y$ tuzuvchilarga ajratiladi (14-rasm *b*). Jismning muvozanat shartlaridan $R_x$ va $R_y$ ni aniqlagandan so`ng, sharnir reaksiyasining moduli R quyidagicha topiladi:



a



b

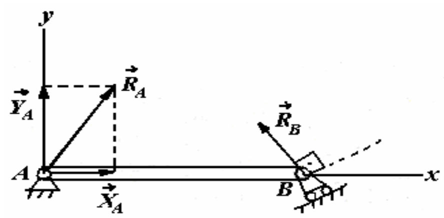
14 – rasm

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Sharnir reaksiyasining yo`nalishi esa, uning kosinuslari orqali aniqlanadi, ya'ni:

$$\cos(\vec{R} \wedge, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \cos(\vec{R} \wedge, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}$$

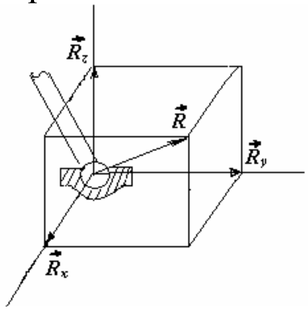
bunda $\vec{i}$, $\vec{j}$ - koordinata o`qlarining birlik vektorlari.



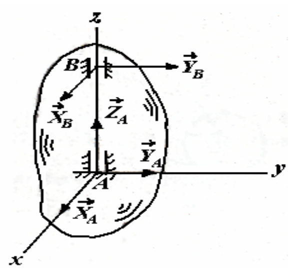
15 – rasm

Texnikada ko`pincha balka ko`rinishidagj sistema qo`llaniladi. Tayanchlarga qo`yilgan to`sin balka deb ataladi. Agarda to`sin A - qo`zg`almas sharnir va B qo`zg`aluvchi sharnir vositasida bog`langan bo`lsa, sharnirlar reaksiyasi 15-rasmdagidek yo`naladi.

4.Bog`lanish sferik sharnir yoki podpyatnik (podshipnik)dan iborat bo`lsa,. umumiy holda bunday bog`lanish reaksiya kuchlarining yo`nalishi noma’lum bo`ladi va ularni odatda koordinata o`qlari bo`ylab $R_x, R_y, R_z$ tuzuvchilarga ajratamiz (16, 17-rasmlar). Sferik sharnir reaksiyasining miqdor va yo`nalishi quyidagicha aniqlanadi:



16-rasm

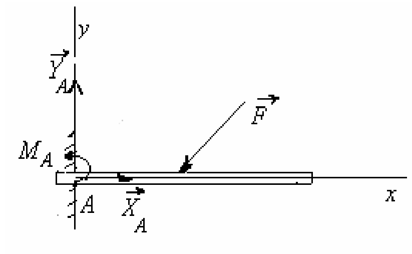


17–rasm

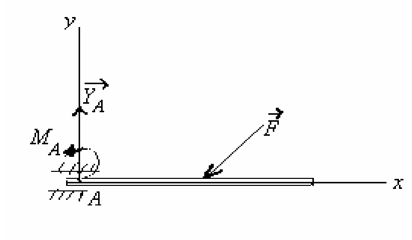
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ ; \ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{i}\,) = R_x / R,\ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{j}\,) = R_y / R,\ \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{k}\,) = R_z / R.$$

5. Agarda 18-rasmdagi *AB* balkaning *A* uchi devorga qisib mahkamlangan bo`lsa, bu holda *A* nuqtadagi bog`lanish reaksiyasining ikkita tuzuvchisidan tashqari, balkaning *A* nuqta atrofida aylanishiga to`sqinlik qiluvchi reaksiya momenti $M_A$ ham mavjud bo`ladi. Moment tushunchasini keyinroq kiritamiz.

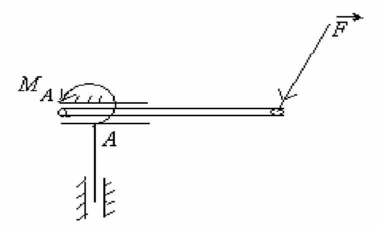
6.19-rasmda ko`rsatilgan *AB* balkaning *A* uchi gorizontal bo`ylab siljishga yo`l qo`yadigan qilib mahkamlangan. Bunday bog`lanish reaksiyasi siljish tekisligiga perpendikulyar bo`lgan $\vec{Y}_A$ reaksiya kuchidan hamda balkaning A nuqta atrofida aylanishiga to`sqinlik qiluvchi reaksiya momenti $M_A$ dan iborat bo`ladi.



18-rasm



19– rasm



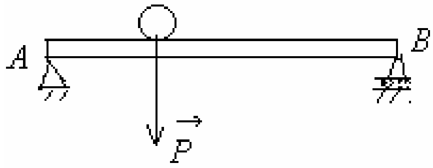
20 – rasm

20-rasmda ko`rsatilgan *AB* balkaning *A* uchi ham gorizontal, ham vertikal bo`ylab siljishga yo`l qo`yadigan qilib mahkamlangan. Bu holda *A* nuqtada faqat balkaning *A* nuqta atrofida aylanishiga qarshilik qiluvchi M_A reaksiya momenti mavjud bo`ladi.

4 - §. Inshoot va mashinalarga qo`yiladigan kuchlarning turlari

Jismga ta'sir etuvchi kuchlarni quyidagi turlari uchraydi.

**1. To`planma kuch.** Bir-biriga tegib turadigan ikki jismning o`zaro ta'siri ularning urinib turgan nuqtasiga qo`yilgan deb hisoblanadi. Haqiqatdan esa jismlarning tegishib turgan joyida deformatsiya hosil bo`lib ularning o`zaro ta'siri urinib turgan nuqtaga qo`yilmay biror yuzachaga qo`yiladi. Bu yuzachaning sathi juda kichik bo`lsada cheklidir. Darhaqiqat, ikkita jismning tegishib turgan yuzachasi jism o`lchamlariga qaraganda juda ham kichkina bo`lsa, bu yuzachani bir nuqta deb, u kuchni esa nuqtaga qo`yilgan to`planma kuch deb hisoblaymiz. Bu to`planma kuch jismlarning tegishib turgan yuzasidagi bosimlarning teng ta'sir etuvchisidir.



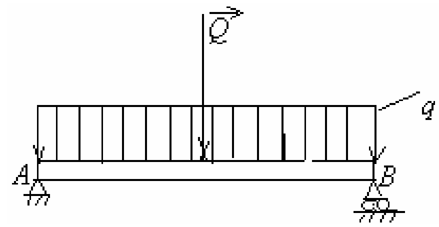
21-rasm

Masalan, ikki uchi bilan tayanch ustida yotgan to`sinning biror joyiga qo`yilgan og`ir jismning to`sin sirti bilan tegishgan yuzachasi juda kichik bo`lganida shu yuzacha bo`yicha ta'sir etuvchi kuchlar o`rniga ularning teng ta'sir etuvchisi $\vec{P}$ ni olamiz (21-rasm).

2.Taqsimlangan kuchlar. Mashina yoki inshoot qismining ma'lum yuzasi yoki uzunligi bo`yicha qo`yilgan kuch uzluksiz ta'sir ko`rsatsa, bunday kuch taqsimlangan kuchlar deyiladi.

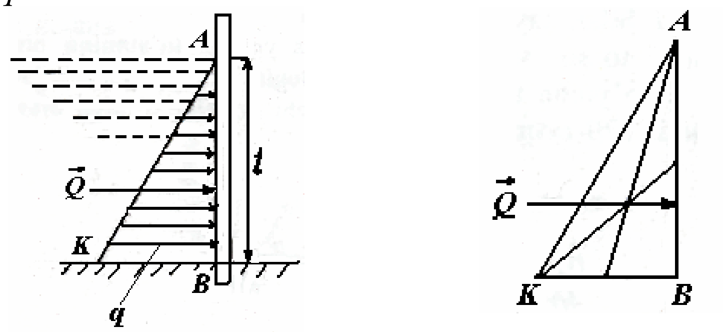
Uzunlik birligi yoki yuza birligiga ta'sir qiluvchi kuchlarning intensivligi q bilan belgilanadi va mos ravishda *N/m* yoki N/m^2 hisobida o`lchanadi.

Taqsimlangan kuchlarga ko`prik balkasining ustiga yotqizilgan beton yoki asfalt ta'siri misol bo`la oladi. Beton yoki asfalt balka bo`yicha tekis tarqalgan bo`lib, 22-rasmda ko`rsatilganidek ta'sir qiladi. Masalani ychishda taqsimlangan kuchlar bir nuqtaga qo`yilgan kuch bilan almashtiriladi.22- rasmda tasvirlangan taqsimlangan kuchlar teng ta'sir etuvchisi *AB* uchastkaning o`rtasiga qo`yilgan bo`lib, miqdori $Q=q\cdot AB$ bo`ladi.



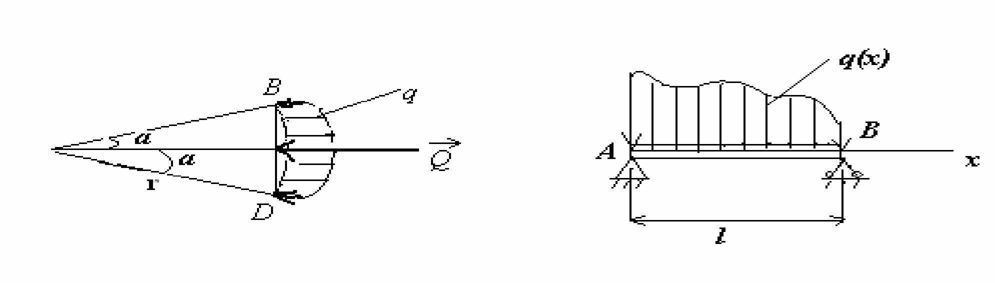
22 –rasm

Taqsimlangan kuchlarga yana bir misol sifatida to`g`on devoriga suvning ta'sirini keltirish mumkin (23-rasm); bu kuchning taqsimlanishi suv yuzasidan to`g`on tagigacha uchburchak qonuni bilan o`zgarib boradi. Bu holda taqsimlangan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi uchburchak medianalarining kesishgan nuqtasidan o`tadi va miqdori $ql/2$ bo`ladi.



23 – rasm

Agarda taqsimlangan kuch aylananing *BD* yoyi bo`yicha ta'sir etsa (24-rasm), uning teng ta'sir etuvchisi: $Q=q\cdot BD$ bo`ladi: bunda *BD* uzunlik *BD* yoy vatari uzunligini bildiradi. Q ning ta'sir chizig`i *BD* vatar o`rtasidan o`tadi.



24 - rasm 25 - rasm

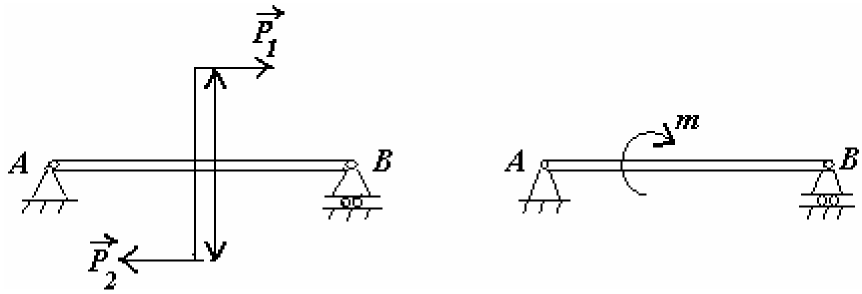
Inshoot qismlariga qo`yilgan kuchlar tekis taqsimlangan bo`lmay, ixtiyoriy ravishda taqsimlangan bo`lishi mumkin. Tuproq, qum kabi sochiluvchi materiallar bilan yuklangan balka bunga misol bo`la oladi. Bu holda agar taqsimlangan kuchlarning intensivligi $q=q(x)$ qonuniyat asosida o`zgarsa (25-rasm), bunday kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $Q$, *AB* balka va $q(x)$ egri chizig`i bilan chegaralangan yuza orqali ifodalanadi:

$$Q = \int_0^l q(x)\,dx$$

Q-kuchning ta'sir chizig`i mazkur yuzaning og`irlik markazidan o`tadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$x = \frac{\int_0^l xq(x)\,dx}{\int_0^l q(x)\,dx}$$

3. Juft kuch. Ma'lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qaraima-qarshi yo`nalgan va miqdor jihatidan teng bo`lgan ikki kuch juft kuch deyiladi. 25-rasmda balkaga qo`yilgan juft kuch tasvirlangan. Juft kuch berilganda, juft kuch tashkil etuvchilari va bu tashkil etuvchilar orasidagi masofa (26-rasm, *a*) yoki uning momenti juft kuch ta'siridagi aylanma harakat yo`nalishi ko`rsatiladi (26-rasm, *b*).Juft kuch haqida keyinroq batafsil to`xtalib o`tamiz.



a *b*

26 – rasm

Nazorat savollari

1.Qanday jism absolyut qattiq deb ataladi?
2.Kuch nechta faktor bilan aniqlanadi?
3.Qanday kuchlar sistemasi ekvivalet sistema deyiladi?
4.Qanday kuch berilgan kuch sistemasining teng ta’sir etuvchisi deyiladi?
5.Statikaning asosiy aksiomalarini ta’riflang.
6.Uch kuch teoremasi nimadan iborat?
7.Qanday jism erksiz jism deyiladi?
8.Bog`lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
9.Bog`lanishdan bo`shatish aksiomasi nima?
10.Absolyut qattiq jism tayanadigan silliq sirtning reaksiya kuchi qanday yo`nalgan? Jismning mazkur sirtga bosimi qanday yo`naladi?
11.Arqon, zanjir va vaznsiz qattiq cterjenli bog`lanish reaksiyalari qanday yo`naladi?
12.Sferik, silindrik sharnirli bog`lanish reaksiyalari qanday bo`ladi?
13.Qistirib mahkamlangan bog`lanish reaksiya kuchining yo`nalishi qanday?
14.Qanday kuch to`planma kuch deyiladi?
15.Taqsimlangan kuchlar turlari nimalardan iborat va ular qanday aniqlanadi?
16.Juft kuch ta’rifi qanday?

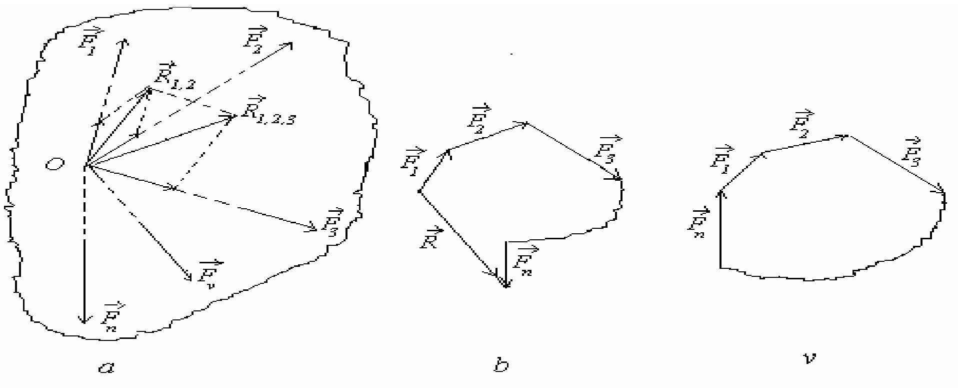
II bob.

Kesishuvchi kuchlar sistemasi

5 - §. Kesishuvchi kuchlar sistemasini geometrik qo`shish

Ta'sir chiziqlari fazo (tekislik)da bir nuqtada tutashuvchi kuchlar to`plami fazo (tekislik)dagi kesishuvchi kuchlar sistemasi deb ataladi.

Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo`shishda parallelogramm yoki uchburchak usulini ketma-ket qo`llaymiz (27-rasm; *a,b,v).*



27 – rasm

(27-rasm , *a*) dan ko`rinib turibdiki:

$$\overrightarrow{R_{1,2}} = \vec{F}_1 + \overrightarrow{F_2}$$

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{R} = \vec{R}_{1,2,...,n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_v + ... + \vec{F}_n \qquad \text{yoki} \qquad \vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_v$$

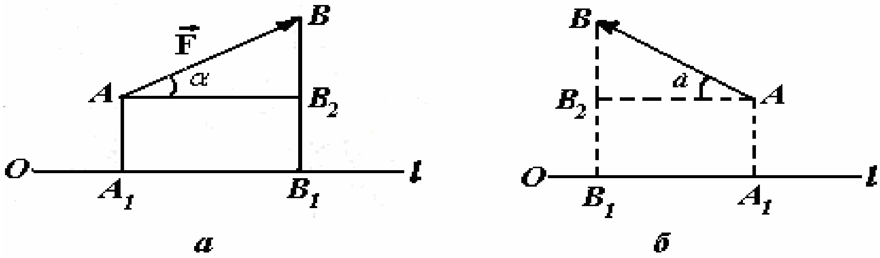
(27-rasm, *b*) dan ko`ramizki, kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi mazkur kuchlar geometrik yig`indisiga teng bo`lib, u shu kuchlardan tuzilgan ko`pburchak yopuvchisidan iborat.Bunday kuchlar muvozanatlashganda kuch ko`pburchagi yopiq bo`ladi,ya'ni $\vec{F}_n$ kuchning uchi $\vec{F}_1$ kuch boshi bilan ustma-ust tushadi (27-rasm,*v*):

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_v = 0.$$

6 - §. Kuchning o`qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Faraz qilaylik**,** $\vec{F}$ kuch bilan *l* o`q bir tekislikda yotsin. Bu holda kuchning boshi *A* va oxiri *B* nuqtalardan *l* o`qqa tushirilgan proyeksiyalar A_1 va B_1 orasidagi kesmaning mos ishora bilan olingan uzunligi kuchning *l* o`qdagi proyeksiyasi deyiladi (28-rasm).

Agar A_1 nuqtadan B_1 nuqtaga ko`chish *l* o`qning musbat yo`nalishi bilan ustma-ust tushsa, kuchning o`qdagi proyeksiyasi musbat, aks holda manfiy qiymatlarga ega bo`ladi (28-rasm; *a, b*).



28 – rasm

$\vec{F}$ kuchning l o`qidagi proyeksiyasini F_l bilan belgilasak,

$$F_l = A_1B_1, \quad A_1B_1 = AB_2 \qquad (6.1)$$

ΔABB_2 (28-rasm,*a*) dan

$$AB_2 = F\cdot cos\alpha \qquad (6.2)$$

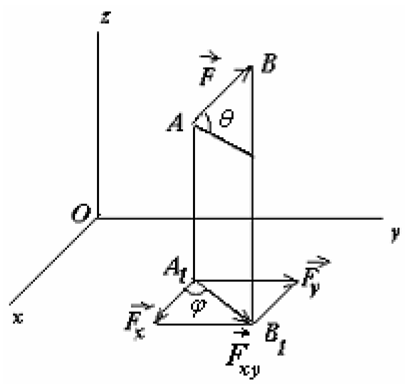
(6.2) ni (6.1) ga qo`ysak: $F_l = F\cdot cos\alpha$ (6.3)

$\alpha = 0$ bo`lsa, $F_l = F$; $\alpha = 180^0$ bo`lsa, $F_l = -F$; $\alpha = 90^0$ bo`lsa, $F_l = 0$ bo`ladi.

(6.3) dan ko`ramizki, kuchning biror o`qdagi proyeksiyasi kuch miqdori hamda kuchning shu o`q musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchak kosinusining ko`paytmasiga teng.

Demak, kuch o`qninig musbat yo`nalishi bilan o`tkir burchak hosil qilsa, uning proyeksiyasi musbat; agar o`tmas burckak tashkil etsa manfiy bo`ladi.

Faraz qilaylik. $\vec{F}$ kuch x (yoki y) o`q bilan bir tekislikda yotmasin. Bu holda $\vec{F}$ kuchni avval $Oxy$ tekisligiga proyeksiyalaymiz. Buning uchun $\vec{F}$ kuchning boshi $A$ va oxiridagi $B$ nuqtadan $Oxy$ tekislikka perpendikulyar $AA_1$ va $BB_1$ chiziqlarni o`tkazamiz. U holda $A_1B_1 = F_{xy}$ vektori muzkur kuchning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi deb ataladi (29-rasm):



29 – rasm

Agar F kuchning Oxy tekisligi bilan tashkil qilgan burchagi θ ga teng bo`lsa, 29-rasmdan quyidagini olamiz:

$$F_{xy} = Fcos\,\theta \qquad (6.4)$$

Agar F_{xy} ma’lum bo`lsa , u holda $\vec{F}$ kuchning Ox , Oy , Oz oqlardagi proeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

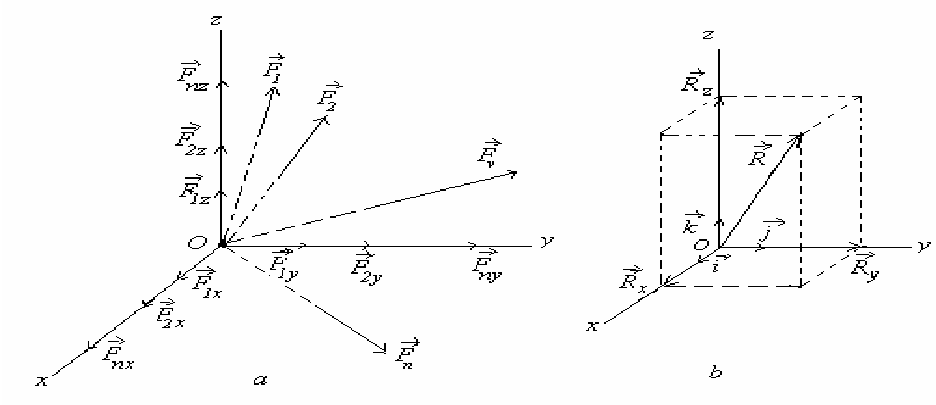
$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi$$

$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi \qquad (6.5)$$

$$F_z = F\cos(90^0 - \theta) = F\sin\theta$$

7 - §. Kesishuvchi kuchlarni analitik usulda qo`shish va ularning analitik muvozanat sharti

Faraz qilaylik,jismga O nuqtada kesishuvchi kuchlar ta'sir qilsin (30-rasm; *a,b*).



30-rasm

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlarni yuqoridagi ma'ruzalarga asoslanib *Ox,Oy,Oz* o`qlariga proyeksiyalaymiz. Natijada mazkur o`qlar bo`ylab joylashgan kuchlar hosil bo`ladi.Bir to`g`ri chiziq bo`ylab yo`nalgan kuchlar algebraik qo`shilgani uchun:

$$F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum F_{vx} = R_x \,,$$
$$F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum F_{vy} = R_y \,,$$
$$F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum F_{vz} = R_z \,.$$

Endi R_x, R_y, R_z larni parallelogram usuli bo`yicha qo`shsak (30-rasm,*b*):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

kelib chiqadi.

Teng ta'sir etuvchi $\vec{R}$ ning yo`naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\vec{R},\wedge\vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \cos(\vec{R}\wedge,\vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \cos(\vec{R},\wedge\vec{k}) = \frac{R_z}{R}$$

bu yerda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - mos ravishda *Ox, Oy, Oz* o`qlarining birlik vektorlari.

Kesishuvchi kuchlar ta'siridagi jism muvozanatda bo`lishi uchun *R=0* shart bajarilishi kerak:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = 0}$$

bundan

$$R_x = \sum F_{vx} = 0, R_y = \sum F_{vy} = 0, R_z = \sum F_{vz} = 0 \qquad (7.1)$$

kelib chiqadi.

Agar kesishuvchi kuchlar tekislikda joylashgan bo`lsa (7.1) quyidagicha bo`ladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \sum F_{vy} = 0. \qquad (7.2)$$

Nazorat savollari

1.Qanday ko`pburchak kuch ko`pburchagi deyiladi?
2.Kuchning o`qdagi proyeksiyasini tushuntiring.
3.Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4.Kesishuvchi kuchlarni geometrik qo`shishni tushuntiring.
5.Bir nuqtaga qo`yilgan kuchlarni analitik qo`shish usulini tushuntirib bering.
6.Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik muvozanat sharti qanday?
7.Kesishuvchi kuchlar sistemasining analitik muvozanat shartlarini yozing.

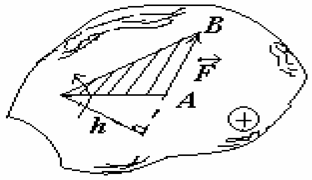
III bob
Momentlar nazariyasi

8 - §. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti

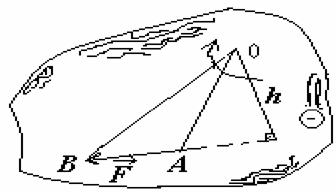
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalar yechishda kuchning nuqtaga nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi. Berilgan nuqtadan kuchning ta'sir chizig`iga tushirilgan perpendikulyar uzunligi kuch yelkasi deyiladi.Kuch yelkasi odatda h bilan belgilanadi.

F kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb, mos ishora bilan olingan kuch miqdorini uning yelkasiga ko`paytmasiga teng kattalikka aytiladi (31 , 32 – rasmlar):

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h \qquad (8.1)$$



31-rasm



32-rasm

Kuchning momenti hisoblanadigan nuqta moment markazi deb ataladi.

Kuchning jismga ko`rsatadigan aylanma harakat effekti uning momenti bilan xarakterlanadi.Bu effect kuch miqdoriga, moment markazi va kuch orqali o`tuvchi tekislikning aylanish yo`nalishiga bog`liq bo`ladi. Kuch jismni 31 – rasmdagidek moment markazi atrofida soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo`nalishda aylantirishga intilsa, uning momenti musbat;soat strelkasi bo`yicha aylanadigan yo`nalishda aylantirsa, manfiy ishora bilan olinadi (32 – rasm).

Kuch momenti SI birliklar sistemasida Nyuton metr (*Nm*) bilan o`lchanadi.Kuch momenti quyidagi xususiyatlarga ega:

1.Kuchni o`z ta'sir chizig`i bo`ylab ixtiyoriy nuqtaga ko`chirsak,uning momenti o`zgarmaydi.

2.Kuchning ta'sir chizig`i moment markazidan o`tsa,uning mazkur nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo`ladi.

3.Kuchning 0 nuqtaga nisbatan momenti ΔOAB yuzining ikkilanganiga teng,ya'ni:

$$m_0(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta OAB}$$

9 - §. Kuchning o`qqa nisbatan momenti

Jismning biror o`q atrofidagi aylanma harakatini kuchning o`qqa nisbatan momenti xarakterlaydi.

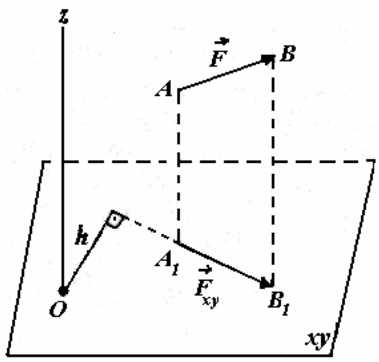
Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'siridagi jismning muvozanatiga doir masalalarni yechishda kuchning o`qqa nisbatan momenti tushunchasi kiritiladi.

Kuchning o`qqa nisbatan momenti deb, kuchning o`qqa perpendikulyar qilib olingan tekislikdagi proyeksiyasidan o`q bilan tekislikning kesishgan nuqtasiga nisbatan olingan momentiga aytiladi (33-rasm).

Kuchning o`qqa nisbatan momentini matematik ifodasi

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h \qquad (9.1)$$

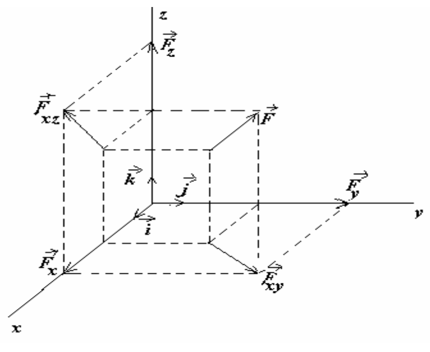
formula bilan ifodalanadi.



33 - rasm

Agar x, y, z bilan kuch qo`yilgan $A$ nuqtaning koordinatalarini; $F_x$, $F_y$, $F_z$ orqali $\vec{F}$ kuchning koordinata o`qlariga proyeksiyalarini belgilasak (34-rasm), u holda kucning o`qqa nisbatan momentini analitik ifodasi quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{aligned} m_x(F) &= yF_z - zF_y \\ m_y(F) &= zF_x - xF_z \\ m_z(F) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (9.2)$$



34 – rasm

Agar kuchning ta'sir chizig`i o`qqa parallel yoki o`qni kesib o`tsa, uning mazkur o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`ladi.

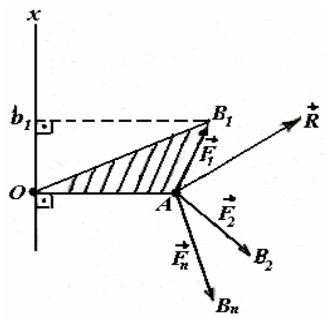
10 - §. Kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi

Teorema: Kesishuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisidan biror nuqtaga nisbatan olingan moment uning tuzuvchi kuchlaridan mazkur nuqtaga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig`indisiga teng, ya'ni

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_\nu) \qquad (10.1)$$

Faraz qiiaylik, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ kuchlar *A* nuqtaga qo`yilgan bo`lib, ularning teng ta’sir etuvchisi $\vec{R}$ bo`lsin (35-rasm).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum F_\nu \qquad (10.2)$$



35 - rasm

Kuchlar qo`yilgan *A* nuqtani moment markazi *O* bilan tutashtirib, *OA* ga perpendikulyar *Ox* o`qni o`tkazamiz. *Ox* o`qning musbat yo`nalishini shunday tanlab olamizki, ixtiyoriy kuchning mazkur o`qdagi proyeksiyasini ishorasi shu kuchning *O* markazga nisbatan olingan momenti ishorasi bilan bir xilda bo`lsin.

Kuch momentining uchinchi xususiyatidan foydalanib, kuchlarning *O* nuqtaga nisbatan momentini aniqlaymiz:

$$\mathrm{m}_0(\vec{F}_1) = 2S_{\Delta OAB_1}, \quad \mathrm{m}_0(\vec{F}_2) = 2S_{\Delta OAB_2} \quad ,......, \quad \mathrm{m}_0(\vec{F}_n) = 2S_{\Delta OAB_n}$$

35-rasmdan: $$m_0(\vec{F}_1) = OA \cdot \mathrm{ob}_1 = OA \cdot F_{1x} \qquad (10.3)$$

(10.2) tenglikni *Ox* o`qiga proyeksiyalasak:

$$R_x = \sum F_{\nu x} \qquad (10.4)$$

(10.4) ni ikki tomonini *OA* ga ko`paytiramiz:

$$OA \cdot R_x = \sum OA \cdot F_{\nu x}$$

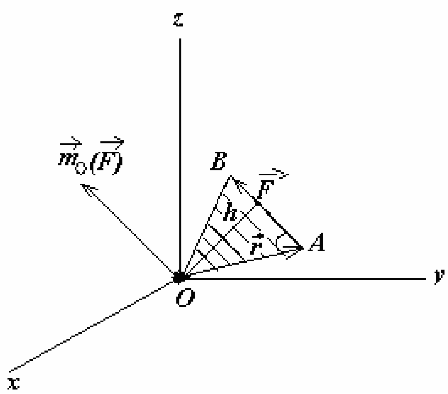
(10.3) ga asosan: $m_o(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F}_\nu)$

Demak,kesishuvchi kuchlar uchun Varinon teoremasi to`la-to`kis isbotlandi.

11 - §. Kuchning nuqtaga nisbatan momentini vektorligi

Yuqoridagi 6-mavzuda kuchniug nuqtaga misbatan momentini algebraik miqdor, ya'ni u kuch miqdori bilan yelkasi uzunligining ko`paytmasidan iborat deb qaragan edik. Lekin jismga ta'sir qilayotgan kuch fazoda joylashgan bo`lsa, mazkur kuch momentining moduli va ishorasi jismning aylanma harakatini to`liq xarakterlamaydi. Shuning uchun kuchning nuqtaga nisbatan momentining vektori tushunchasi kiritiladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorini ikki vektorning vektor ko`paytmasidan iborat deb qarash mumkin. Buning uchun moment markazi *O* nuqtani sanoq sistemasining boshi desak, $\vec{r}$ kuch qo`yilgan A nuqtaning radius-vektori bo`ladi (36-rasm).



36 - rasm

ΔOAB dan:

$$h = r \cdot \sin(\vec{r}, \wedge \vec{F}) \qquad (11.1)$$

(11.1) ni (8.1) ga qo`ysak: $\vec{m}_0(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \wedge \vec{F})$ yoki

$$\vec{M}_O = \vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (11.2)$$

Demak, kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor miqdor bo`lib, u kuch qo`yilgan nuqtaning radius-vektori bilan kuchning vektor ko`paytmasiga teng bo`lib, u kuch va moment markazi orqali hosil qilingan uchburchak yuziga perpendikulyar yo`naladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektorining yo`nalishi shunday qo`yiladiki, uning uchidan turib qaralganda kuch jismni soat strelkasiga qarshi aylantirayotgan bo`lishi kerak.

(11.2) dan foydalanib, $\vec{M}_O$ ni analitik hisoblash mumkin. Ox , Oy , Oz o`qlarining birlik vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}; \vec{F}$ kuch proyeksiyalarini $F_x, F_y, F_z; \vec{r}$ – proyeksiyalarini x,y,z; $\vec{M}_O$ - proyeksiyalarini esa M_{0x} , M_{0y} , M_{0z} desak:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{M}_0 = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k}$$

Vektorlar algebrasiga ko`ra,

$$M_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (11.3)$$

bundan

$$M_{Ox} = yF_z - zF_y ,$$
$$M_{Oy} = zF_x - xF_z , \qquad (11.4)$$
$$M_{Oz} = xF_y - yF_x$$

kelib chiqadi.

(11.4) dan foydalanib M_0 modulini va yo`naltiruvchi kosinuslarini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$M_O = \sqrt{M^2{}_{Ox} + M_{Oy}{}^2 + M_{Oz}{}^2} \tag{11.5}$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{M}_O, \wedge \vec{i}) &= M_{Ox} / M_O, \\ \cos(\vec{M}_O, \wedge \vec{j}) &= M_{Oy} / M_O, \\ \cos(\vec{M}_O, \wedge \vec{k}) &= M_{Oz} / M_O \end{aligned} \tag{11.6}$$

(9.2) bilan (11.4) ni taqqoslash natijasida nuqtaga nisbatan kuch momentining biror o`qdagi proyeksiyasi mazkur kuchning shu o`qqa nisbatan momentiga tengligini ko`ramiz.

Nazorat savollari

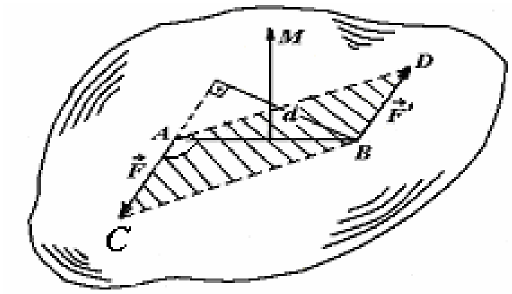
1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi? Mazkur momentning ishorasi qanday tanlanadi?
2. Qanday holda kuchning nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
3. Kuchning o`z ta`sir chizig`i bo`ylab ko`chirilganda uning momenti qanday o`zgaradi?
4. Kuchning o`qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Qanday holda kuchning o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`ladi?
6. Nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan o`qqa nisbatan kuch momenti orasida qanday munosabat bor?
7. Nuqtaga nisbatan kuch momentining vektorligini tushuntirib bering.
8. O`qqa nisbatan kuch momentining analitik ifodasi qanday yoziladi?
9. Varinon teoremasini ta’riflang.

IV bob

Juft kuchlar nazariyasi

12 - §. Juft kuch. Juft moment

Ma'lum oraliqda joylashgan, bir-biriga qaraima-qarshi yo`nalgan va miqdor jihatidan teng bo`lgan ikki kuch juft kuch deb 4-§ da ta`rif bergan edik. U $(\vec{F}, \vec{F}^{/})$ bilan belgilanadi (37- rasm).



37 - rasm

Juft kuchning teng ta'sir etuvchisi bo`lmaydi va juftni tashkil qiluvchi kuchlar muvozanatlashmaydi.

Demak, juft kuch teng ta'sir etuvchisi bo`lmagan va muvozanatlashmaydigan kuchlar sistemasidan iborat.

Juft tuzuvchi kuchlar ta'sir chizig`i orqali o`tkazilgan tekislik juft tekislligi deyiladi. Juft tuzuvchi kuchlar orasidagi eng qisqa masofa juft yelkasi deb ataladi va u d bilan belgilanadi (37-rasm).

Juft tuzuvchi kuchlardan biri bilan juft yelkasning ko`paytmasi juft momenti deyiladi. U quyidagicha yoziladi:

$$M = \pm Fd \qquad (12.1)$$

Juft jismni soat strelkasiga qarshi aylantirmoqchi bo`lsa, uning momenti musbat, aks holda manfiy deb olinadi.

13 - §. Juft momentining vektorligi

Juft kuchning jismga ta'siri asosan uch faktor bilan aniqlanadi:

1.Juft momentinning miqdori;

2.Juftning ta'sir tekisligi;

3.Mazkur tekislikning burilish yo`nalishi.

Bir tekislikda yotmaydigan juftlarni ko`rganimizda, har bir juftning jismga ta'sirini auiqlash uchun yuqoridagi uchta faktor berilishi zarur. Mazkur faktorni fazoda bitta vektor, ya'ni juft momentining vektori orqali ifodalash mumkin.

Moduli (12.1) dan amqlanadigan vektor juft momenti vektori deyiladi. U jufi tekisligiga perpendikulyar bo`lib, uning uchidan qaralganda jism har doim soat strelkasiga qarshi aylanadi (37-rasm).

Juft momenti vektorini ikki vektorning vektor kopaytmasidan iborat deb qarash mumkin:

$$\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{F}^{/} = \overline{BA} \times \vec{F} \tag{13.1}$$

Haqiqatdan ham,

$$\left| \overline{BA} \times \vec{F} \right| = BA \cdot F \cdot \sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}) \tag{13.2}$$

34-rasmdan:

$$\sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}) = d / AB \tag{13.3}$$

bundan

$$d = AB \cdot \sin(\overline{BA}, \wedge \vec{F}) \tag{13.4}$$

(13.4) ni (13.2) ga qo`ysak, (12.1) kelib chiqadi.

Demak, (13.1) vektor ko`paytma juft yotgan tekislikka perpendikulyar bo`ladi,ya’ni juft momentining vektoridan iborat.

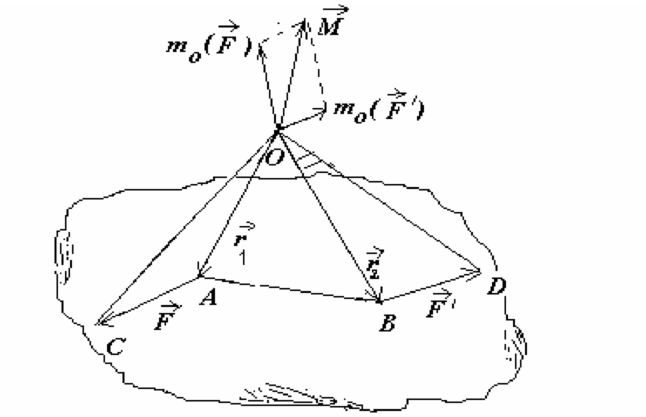
14 - §. Juft momenti vektoriga oid teoremalar

1 - teorema: Juft momenti vektori uni tashkil etuvchi kuchlarning ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarining geometrik yig`indisiga teng.

Isbot. Faraz qilaylik,jismga $(\vec{F}, \vec{F}^{/})$ juft kuch qo`yilgan bo`lsin.Bu juftning tashkil etuvchilarining ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momentlarini aniqlaymiz (38-rasm).

(11.2) ga ko`ra:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F},$$
$$\vec{m}_0(\vec{F}^{/}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}^{/} \tag{14.1}$$



38 - rasm

(14.1) ni hadma-had qo`shsak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}^{/}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \vec{F}^{/} \tag{14.2}$$

$\vec{F} = -\vec{F}^{/}$ bo`lgani uchun (14.2) quyidagicha yoziladi;

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}^{/}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

yoki

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}^{/}) = \vec{BA} \times \vec{F} \tag{14.3}$$

(14.3) ni (13.1) bilan taqqoslasak:

$$\vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}^{/}) = \vec{M} \tag{14.4}$$

Shu bilan teorema isbot bo`ladi.

2-teorema: Juft momenti vektori – erkin vektordir.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun (14.4) dan foydalanamiz. 11-mavzudan bilamizki, nuqtaga nisbatan kuch momentining vektori kuch va moment markazi orqali tuzilgan uchburchak yuziga perpendikulyar bo`lar edi. Shunga ko`ra $\vec{m}_0(\vec{F})$ ΔOAC yuzaga, $\vec{m}_0(\vec{F}^{/})$ esa ΔOBD yuzaga perpendikulyar yo`naladi (38-rasm)

(14.4) ga ko`ra mazkur vektorlar geometrik yig`indisi juft momenti vektoridan iborat bo`lib, u *O* nuqta qo`yilgan. *O* nuqta ixtiyoriy bo`lgani uchun $\vec{M}$ ni ham fazoning ixtiyoriy nuqtasiga qo`yish mumkin.

Demak, juft momenti vekiori $\vec{M}$ erkin vektordir.

Yuqoridagilardan foydalanib juft momentining quyidagi xususiyatlarini ta’riflash mumkin:

1) Juft tuzuvchi kuchlarni o`z ta'sir chizig`i bo`ylab ixtiyoriy nuqtaga ko`chirsak, juft momenti o`zgarmaydi.

2) Juft momenti juftni tashkil etuvchilariga qurilgan *ACBD* parallelogramni yuziga teng; $M = S_{\square ACBD}$ (37-rasm).

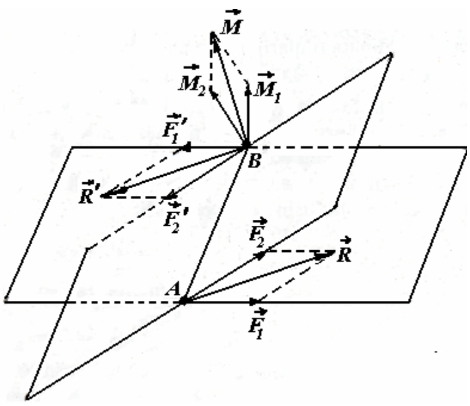
3) Juftni o`zining ta'sir tekisligiga parallel bo`lgan tekislikka ko`chirilsa, uning jismga ta'siri o`zgarmaydi.

4) Juft momentini o zgartirmay, uni ixtiyriy yelkaga keltirish mumkin.

5) Juft momentini o`zgartirmay, uni o`z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.

15 - §. Fazo va tekislikda joylashgan juftlarni qo`shish

Faraz qilaylik, $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^{/})$ va $(\vec{F}_2, \vec{F}^{/}{}_2)$ juftlar ikkita kesishuvchi tekislikda joylashgan bo`lsin (39-rasm).



39 - rasm

Yuqoridagi mavzuda keltirilgan xususiyatlardan foydalanib, ikkala juftni *AB* yelkaga keltiramiz. Bu holda *A* nuqtada $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$, *B* nuqtada esa $\vec{F}_1^{/}$ va $\vec{F}^{/}{}_2$ kuchlar hosil bo`ladi. *A* va *B* nuqtadagi kuchlarni qo`shsak:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \; \vec{R}^{/} = \vec{F}_1^{/} + \vec{F}_2^{/} \qquad (15.1)$$

(13.1) ga ko`ra:

$$\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{R} \qquad (15.2)$$

(15.1) ni (15.2) ga qo`yamiz: $\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{F}_1 + \overline{BA} \times \vec{F}_2$

bunda $\overline{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1, \overline{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2$

Natijada $$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \qquad (15.3)$$

Agar juft kuchlar n dona bo`lsa ,(15.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{M} = \sum_{1}^{n} \vec{M}_{\nu} \qquad (15.4)$$

Demak,fazoda joylashgan juftlar bitta juftga ekvivalent bo`lib,uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig`indisiga teng.

Agarda juftlar tekislikda joylashgan bo`lsa, bu juftlar bitta juftga ekvivalent bo`Iib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig`indisiga teng:

$$M = \sum_{1}^{n} M_{\nu}$$

16 - §. Fazo va tekislikda joyiastigan juftlar sistemasining muvozanati

Fazoda joylashgan juftlar sistemasi muvozanatlashishi uchun mazkur juftlar momentlarining geometrik yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va etarlidir:

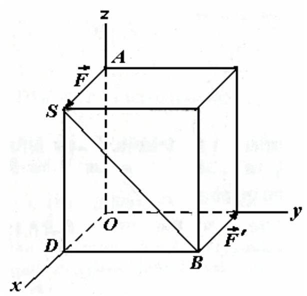
$$\vec{M} = \sum \vec{M}_{\nu} = 0 \qquad (16.1)$$

(16.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak:

$$\sum M_{\nu x} = 0, \sum M_{\nu y} = 0, \sum M_{\nu z} = 0 \qquad (16.2)$$

(l6.2) dan ko`ramizki, fazoda joylashgan juftlar sistemasi muvozanatda bo`lishi uchun juftlar momentlari vektorlarining har bir koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yig`indisi nolga teng bo`lishi kerak.Agarda juftiar tekislikda joylashgan bo`lsa, bu juftlar momentlarinig algebraik yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va etarli:

$$\sum M_{\nu} = 0 \qquad (16.3)$$



40 – rasm

Masala: Qirralarining uzunligi $1m$ bo`lgan kubga juft kuch qo`yilgan. Bu juft kuch momentining moduli aniqlansin (40-rasm). $F=F'=2N$.

Yechish. Masala shartiga ko`ra: $SD = DB = 1m$

ΔBSD dan: $SB = \sqrt{BD^2 + SD^2}$ yoki $SB = d = \sqrt{2}m$

(12.1) ga asosan: $M = F \cdot d = 2\sqrt{2}N$

Nazorat savollari

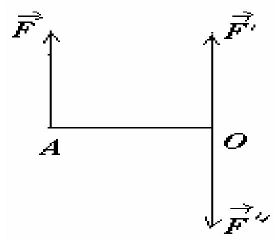
1.Juft kuch va juft momenti nima?
2.Juft momenti vektori qanday yo`nalgan va uning miqdori nimaga teng?
3.Qanday shart bajarilganda ikkita juft ekvivalent bo`ladi?
4. Fazoda joylashgan juftlar qanday qo`shiladi?
5. Tekislikda joylashgan juftlar qanday qo`shiladi?
6. Juft momenti erkin vektorligi haqidagi teoremani ta'riflang.
7. Fazodagi juftlar muvozanat sharti qanday?
8. Tekislikdagi juftlar muvozanat sharti qanday?

V bob

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi

17 - §. Kuchni berilgan markazga keltirish

Ta'sir cbiziqlari fazo (tekislik) da ixtiyoriy joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema fazo (tekislik) dagi ixtiyoriy kuchlar sistemasi deyiladi. Ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta'sridagi jism holatini yoki muvozanatini tekshirish uchun mazkur kuchlar sodda holga keltiriladi.



41 – rasm

Puanso lemmasi. Kuchni bir nuqtadan berilgan markrazga keltirish natijasida, keltirish markazida shu kuchga teng bo`lgan kuch va uning qo`shilgan jufti hosil bo`ladi.

Isbot. Aytaylik jismni A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo`yilgan bo`lsin (41-rasm).Bu kuchni ixtiyoriy O nuqtaga parallel ko`chirish uchun 3 - aksiomaga ko`ra mazkur nuqtaga $(\vec{F}^{/},\vec{F}^{//})$<=>0 kuchni qo`yamiz. Bunda $F^{/} = F^{//} = F$.

Natijada:

$$\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F},\vec{F}^{/},\vec{F}^{//}) \qquad \text{yoki} \qquad \vec{F} \Leftrightarrow \{\vec{F}^{/},(\vec{F},\vec{F}^{//})\}$$

Bu yerdagi $(\vec{F},\vec{F}^{//})$ qo`shilgan juft deyiladi. Mazkur kuchning momenti (11.2) ga ko`ra quyidagicha bo`ladi:

$$\overrightarrow{M}(\vec{F},\vec{F}^{//}) = \overrightarrow{AO} \times \vec{F}$$

yoki

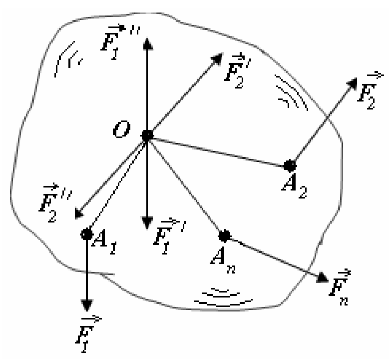
$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{m_0}(\vec{F})$$

Demak: $$\vec{F} \Leftrightarrow (\vec{F}^{/},\overrightarrow{M}) \Leftrightarrow (\vec{F},\overrightarrow{M}).$$

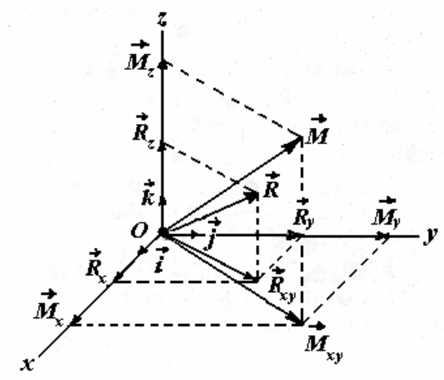
Shu bilan lemma isbot bo`ladi.

18 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirish

Faraz qilaylik, jismga $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ kuchlar qo`ilgan bo`lsin. 17-mavzuga asoslanib, Puanso lemmasini qo`llaymiz (42-rasm).



42 - rasm



43 – rasm

Natijada O nuqtada $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, ..., \vec{F}'_n)$ kuchlar, $\{\vec{m}_0(\vec{F}_1) = \vec{M}_1, \vec{m}_0(\vec{F}_2) = \vec{M}_2, ..., \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \vec{M}_n\}$ qo`shilgan juftlar hosil bo`ladi.

Agarda $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlarning ta'sir chiziqlari fazoda bo`lsa, $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, ..., \vec{M}_n)$ juft momenti vektorlari geometrik; tekislikda bo`lsa, algebraik qo`shiladi. 15-mavzudan ma'lumki, $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, ..., \vec{F}'_n)$ kuchlar kesishuvchi kuchlar sistemasi bo`lgani uchun ular geometrik qo`shiladi.

Natijada:

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}'_\nu, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_\nu \tag{18.1}$$

Bunda $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, ..., \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ bo`lgani uchun (18.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_\nu, \vec{M} = \sum \vec{M}_\nu \tag{18.2}$$

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo`lsa, (18.2) ni shunday yozamiz:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_\nu, M = \sum M_\nu = \sum m_0(\vec{F}_\nu) \tag{18.3}$$

(18.2) va (18.3) ifodadagi $\vec{R}$ kuchlar sistemasining bosh vektori, $\vec{M}$ esa bosh momenti deyiladi.

Demak,ixtiyoriy kuchlarni berilgan markazga keltirish natijasida bitta bosh vektor va bitta bosh moment hosil bo`ladi (43-rasm).

Bosh vektor va bosh momentni analitik usulda quyidagicha hisoblash mumkin:

$$R_x = \sum F_{\nu x}, R_y = \sum F_{\nu y}, R_z = \sum F_{\nu z}, R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \tag{18.4}$$

$$\cos(\vec{R}, \wedge \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \cos(\vec{R}, \wedge \vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \cos(\vec{R}, \wedge \vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_\nu), M_y = \sum m_y(\vec{F}_\nu), M_z = \sum m_z(\vec{F}_\nu), M = \sqrt{M^2{}_x + M_y^2 + M_z^2}; \tag{18.5}$$

$$\cos(\vec{M}, \wedge \vec{i}) = \frac{M_x}{M}, \cos(\vec{M}, \wedge \vec{j}) = \frac{M_y}{M}, \cos(\vec{M}, \wedge \vec{k}) = \frac{M_z}{M}.$$

Bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchakni aniqlash uchun bu vektorlarni skalyar ko`paytiramiz:

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = R \cdot M \cdot \cos\varphi$$

yoki

$$\cos\varphi = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y + R_z} \cdot \sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z}} \tag{18.6}$$

kelib chiqadi.

19 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasini sodda holga keltirish

Ixtiyoriy kuchlarni sodda holga keltirishda quyidagi hollarni ko`ramiz:

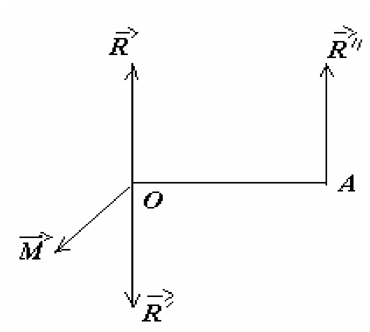
1.Bosh vektor $\vec{R}=0,$ bosh moment $\overrightarrow{M}\neq 0$ bo`lsa,ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh momentga keltiriladi.

2.Agar bosh moment $\overrightarrow{M}=0$,bosh vektor $\vec{R}\neq 0$ bo`lsa, kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi.

3.Bosh vektor $\vec{R}\neq 0$ hamda bosh moment $\overrightarrow{M}\neq 0$ bo`lib, ular o`zaro $(\vec{R}\perp\overrightarrow{M})$ perpendikulyar bo`lganda ixtiyoriy kuchlar sistemasi bitta bosh vektorga keltiriladi.

Haqiqatdan ham bu holni to`g`riligini ko`rsatish uchun bosh moment tuzuvchilarini shunday o`zgartiramizki, $R'=R''=R$ bo`lib, $\vec{R}'$ esa bosh vektor $\vec{R}$ yo`nalgan chiziq bo`yicha qarama - qarshi yo`nalsin (44-rasm).

Bu holda $(\vec{R},\vec{R}')\Leftrightarrow 0$ bo`lib, $O$ nuqtadan $AO=M/R$ masofada $\vec{R}''=\vec{R}$ joylashadi. Demak,$A$ nuqtada bitta bosh vektor hosil bo`ladi.



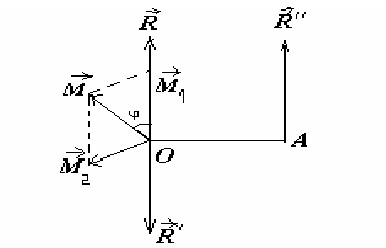
44-rasm

4.Bosh vektor bilan bosh moment bir to`g`ri chiziq bo`ylab joylashsa,bunday hol dynamo (dinamik vint) deyiladi.

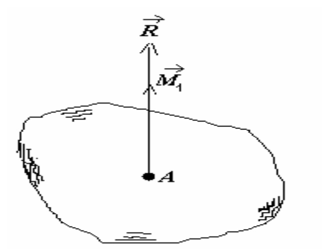
Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo`lmay,ular perpendikulyar bo`lmasa,kuchlar sistemasi dinamoga keltiriladi. Buni to`g`riligini ko`rsatish uchun bosh momentni tuzuvchilarga ajratamiz.Bu tuzuvchilardan biri bosh vektor bo`ylab, ikkinchisi bosh vektorga perpendikulyar bo`lsin (45-rasm).

Endi $\vec{R}$ bilan $\overrightarrow{M}_2$ ga 3-holni qo`llasak, $O$ nuqtadan $AO=M\cdot\sin\varphi/R$ masofada bosh vektor $\vec{R}''=\vec{R}$ hosil bo`ladi. Shunday qilib ixtiyoriy kuchlar sistemasi O nuqtadagi momenti $M\cdot\cos\varphi$ bo`lgan $\overrightarrow{M}_1$ juft momenti vektoriga hamda A nuqtadagi $\vec{R}''$ bosh vektorga keltiriladi. Juft momenti vektori erkin bo`lgani uchun $\overrightarrow{M}_1$ ni A nuqtaga ko`chirish mumkin. Demak, kuchlar sistemasi dinamoga keltirildi (46-rasm). $\overrightarrow{M}_1$ va $\vec{R}$ vektorlar yo`nalgan o`q markaziy vint o`qi deyiladi.

5.Bosh vektor hamda bosh moment nolga teng bo`lsa, ixtiyoriy kuchlar sistemasi muvozanatlashadi.



45 - rasm



46 – rasm

20 - §. Ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Fazoda joylashgan ixtiyoriy kuchlar sistemasi ta'siridagi jism muvozanatda bo`lishi uchun bu kuchlarning bosh vektori hamda bosh momenti nolga teng bo`lishi zarur va yetarli:

$$\vec{R} = 0, \overrightarrow{M} = 0 \qquad (20.1)$$

(20.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$R_x = \sum F_{vx} = 0, R_y = \sum F_{vy} = 0, R_z = \sum F_{vz} = 0; \qquad (20.2)$$
$$M_x = \sum m_x(\overrightarrow{F_v}) = 0, M_y = \sum m_y(\vec{F}_v) = 0, M_z = \sum m_z(\overrightarrow{F_v}) = 0.$$

Ixtiyoriy kuchlar tekislikda joylashgan bo`lsa, ularning muvozanat shari quyidagicha bo`ladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \sum F_{vy} = 0, \sum m_0(\overrightarrow{F_v}) = 0. \qquad (20.3)$$

Agarda kuchlar sistemasi fazo (tekislik) da kesishuvchi kuchlardan iborat bo`lsa, ularning muvozanat shartlari mos ravishda bunday yoziladi:

$$\sum F_{vx} = 0, \sum F_{vy} = 0, \sum F_{vz} = 0; \qquad (20.4)$$

$$\sum F_{vx} = 0, \sum F_{vy} = 0. \qquad (20.5)$$

Ixtiyoriy kuchlar sistemasi Oz o`qqa parallel bo`lib qolsa,(20.2) ning birinchi ikkitasi va oxirgisi aynan nolga teng bo`ladi.

Natijada fazodagi parallel kuchlar muvozanat sharti quyidagicha bo`ladi:

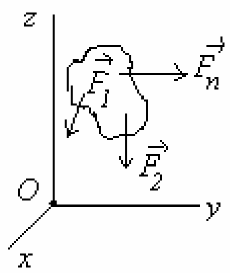
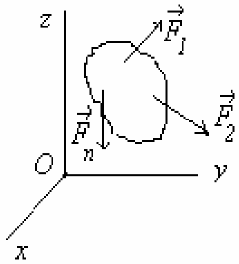
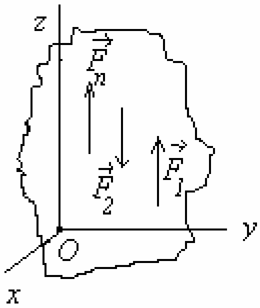
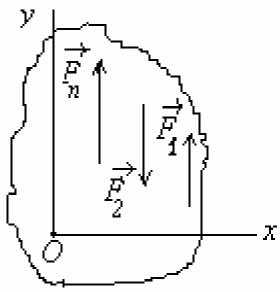
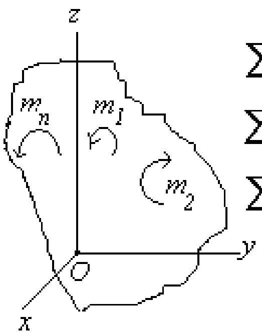
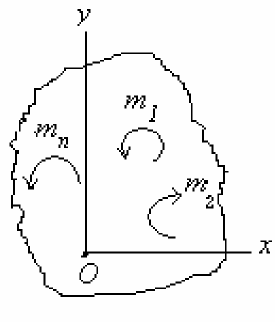
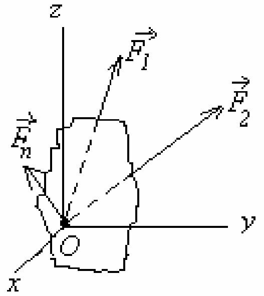
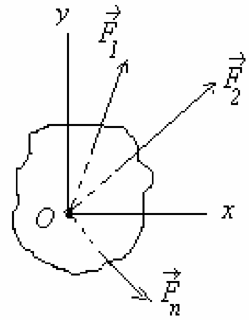
$$\sum F_{vz} = 0, \sum m_x(\overrightarrow{F_v}) = 0, \sum m_y(\vec{F}_v) = 0. \qquad (20.6)$$

Agar parallel kuchlar tekislikda joylashgan bo`lsa,(20.3) ni shunday yozish mumkin:

$$\sum F_{vy} = 0, \sum m_0(\overrightarrow{F_v}) = 0. \qquad (20.7)$$

bunda kuchlar Oy o`qiga paralleldir.

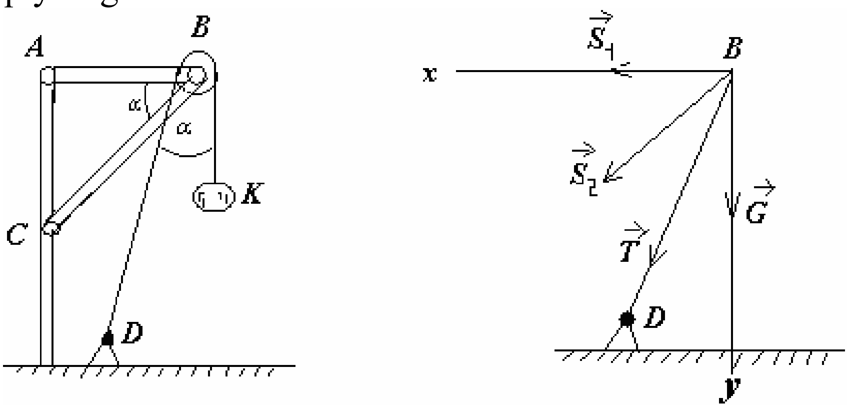
21 - §. Turli kuchlar ta'siridagi jismning muvozanat shartlarining jadvali

	Fazoda joylashgan kuchlar	Tekislikda joylashgan kuchlar
Ixtiyoriy	 $\sum F_{\nu x} = 0,$ $\sum F_{\nu y} = 0,$ $\sum F_{\nu z} = 0;$ $\sum m_x(\vec{F}_\nu) = 0,$ $\sum m_y(\vec{F}_\nu) = 0,$ $\sum m_z(\vec{F}_\nu) = 0.$	 $\sum F_{\nu x} = 0,$ $\sum F_{\nu y} = 0,$ $\sum m_0(\vec{F}_\nu) = 0.$
Parallel	 $\sum F_{\nu z} = 0,$ $\sum m_x(\vec{F}_\nu) = 0,$ $\sum m_y(\vec{F}_\nu) = 0.$	 $\sum F_{\nu y} = 0,$ $\sum m_0(\vec{F}_\nu) = 0.$
Juft	 $\sum m_x(\vec{F}_\nu) = 0,$ $\sum m_y(\vec{F}_\nu) = 0,$ $\sum m_z(\vec{F}_\nu) = 0.$	 $\sum M_\nu = 0$ yoki $\sum m_0(\bar{F}_\nu)=0$
kesishuvchi	 $\sum F_{\nu x} = 0,$ $\sum F_{\nu y} = 0,$ $\sum F_{\nu z} = 0.$	 $\sum F_{\nu x} = 0,$ $\sum F_{\nu y} = 0.$

22 - §. Masalalar

1-masala. Og`irligi $G = 2N$ bo`lgan K yukni B blokdan o`tkazilgan arqon yordamida $D$ lebyodka ushlab turadi. Blokdagi ishqalanishni hisobga olmay $AB$ va $BC$ bruslar zo`riqishi aniqlansin. $< ABC = < DBK = \alpha = 30°$ (47 - rasm).

Yechish: B tugun muvozanatini tekshiramiz.Buning uchun (47-rasm,*b*) dagidek Bxy koordinata sistemasini tanlab olamiz. B tugunga K yukning og`irligi (aktiv kuch) qo`yilgan,uni bog`lanishdan qutqaramiz.Bog`lanishlar AB , BC sterjenlar hamda BD arqondan iborat.Ularning reaksiyalari mos ravishda $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ va $\vec{T}$. Sterjenlar cho`zilayapti deb faraz qilamiz. (47-rasm,*b*) dan ko`rinib turibdiki, B tugundagi kuchlar tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasidir.Ularning muvozanat sharti quyidagicha:



a *b*

47 - rasm

$$\sum F_{vx} = 0; S_1 + S_2 \cdot \cos\alpha + T \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (22.1)$$
$$\sum F_{vy} = 0; S_2 \cdot \sin\alpha + T \cdot \cos\alpha + G$$

(22.1) dan:

$$S_2 = -\frac{G + T \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (22.2)$$

$$S_1 = -S_{2.} \cdot \cos\alpha - T \cdot \sin\alpha$$

(22.2) ga son qiymatlarni qo`ysak,

$$S_1 = 5{,}45N, S_2 = -7{,}46N \qquad (22.3)$$

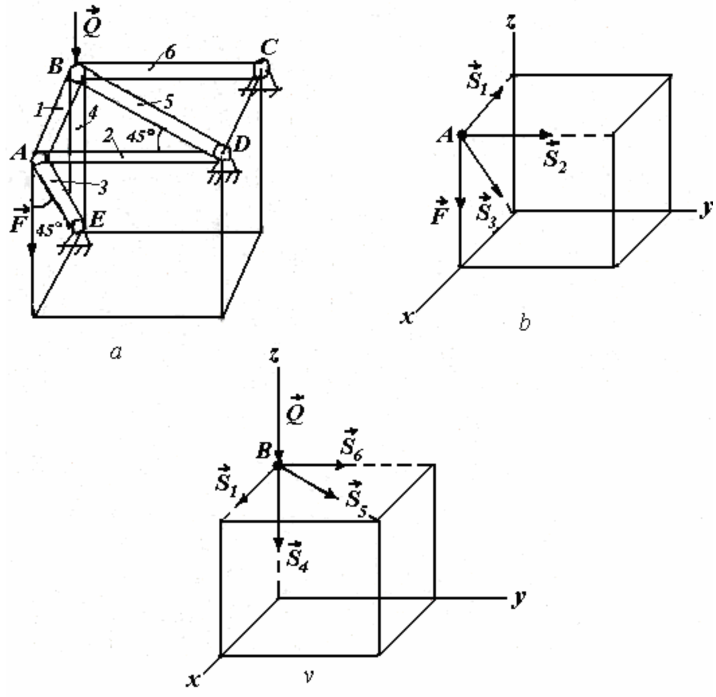
kelib chiqadi.

Bu yerda (+) ishora sterjen cho`zilishini, (-) ishora esa siqilishini bildiradi.

2-masala. Sterjenli sistema bir-biri bilan sharnirli bog`langan 6 ta sterjendan iborat. $A$ tugunga $\vec{F}$ kuch, $B$ tugunga $\vec{Q}$ kuch qo`yilgan.Sterjenlar zo`riqishi aniqlansin. Ularning og`irligi hisobga olinmasin (48-rasm); *C, D, E* nuqtalari qo`zg`almas sharnirli tayanchlardan iborat.

Yechish.(48-rasm, *a*) da ko`rsatilgan sistema muvozanatini tekshirish uchun A va B tugunlar muvozanatini alohida - alohida tekshiramiz.

A tugunga $\vec{F}$ kuch, 1, 2 va 3- sterjenlar zo`riqishlari ta'sir qiladi. Ular fazoda joylashgan kesishuvchi kuchlar sistemasidan iborat. Sanoq sistemasini (45-rasm,*b*) dagidek tanlab,fazodagi kesishuvchi kuchlar muvozanat shartlarini tuzamiz:



48 - rasm

$$\begin{aligned} &\sum F_{vx} = 0; -S_3 \cdot \cos 45^0 - S_1, \\ &\sum F_{vy} = 0; -S_2 = 0, \\ &\sum F_{vz} = 0; -F - S_3 \cdot \cos 45^0. \end{aligned} \qquad (22.4)$$

(22.4) dan:

$$S_1 = F, S_2 = 0, S_3 = -F \cdot \sqrt{2}$$

kelib chiqadi.

Endi B tugunga qo`yilgan $\vec{Q}, \vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ kuchlarning muvozanat shartlarining tenglamalarini tuzamiz (45-rasm,*v*).

$$\begin{aligned} &\sum F_{vx} = 0; S_1 + S_5 \cdot \cos 45^0, \\ &\sum F_{vy} = 0; S_6 + S_5 \cdot \cos 45^0 = 0 \\ &\sum F_{vz} = 0; -Q - S_4 = 0 \end{aligned} \qquad (22.5)$$

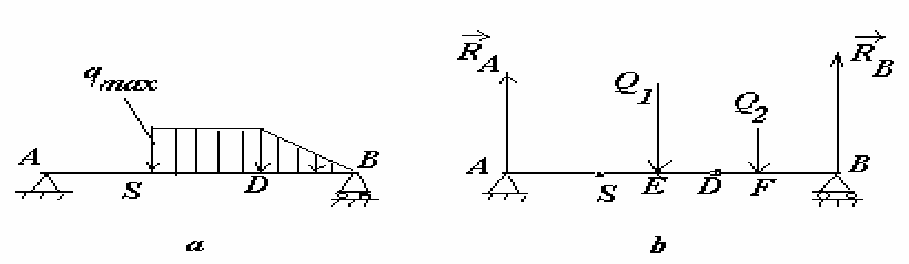
(22.5) ni yechsak:

$$S_4 = -Q, S_5 = -F\sqrt{2}, S_6 = F$$

hosil bo`ladi**.**

3-masala. AB balkaga intensivligi $q_{\max} = 2kN/m$ bo`lgan tekis tarqalgan yuk qo`yilgan. AB balkaning A va B tayanchilaridagi reaksiyalari aniqlansin**.** $AS=SD=DB=2m$. AB balka og`irligi $Q = 4kN$ (49-rasm,*a*).

Yechish. Masalani yechish uchun avval SD va DB qismlarga qo`yilgan tekis tarqalgan yukning teng ta’sir etuvchisini topib olamiz. $SD$ qismdagi tekis tarqalgan yuk teng ta’sir etuvchisining moduli $Q_1 = q_{\max} \cdot SD$, ya’ni $Q_1 = 4kN$ bo`lib, u SD ning o`rtasiga qo`yilgan; $SE = SD/2$ yoki $SE=1m$. DB qismdagi tekis tarqalgan yuk teng ta'sir etuvchisining moduli $Q_2 = q_{\max} \cdot DB/2$ ya'ni, $Q_2 = 2kN$. U $DF = DB/3 = 2/3m$ bo`lgan $F$ nuqtaga qo`yilgan (49-rasm,*b*).



49 - rasm

Endi AB balka muvozanatini tekshiramiz (49-rasm,*b*). Balkaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda joylashgan parallel kuchlar sistemasidan iborat.Ularning muvozanat sharti tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{vy} = 0; R_A - Q_1 - G + R_B = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0; -Q_1 \cdot AE - Q_2 \cdot AF - G \cdot \frac{AB}{2} + R_B \cdot AB = 0 \tag{22.6}$$

(49-rasm, *b*) dan:

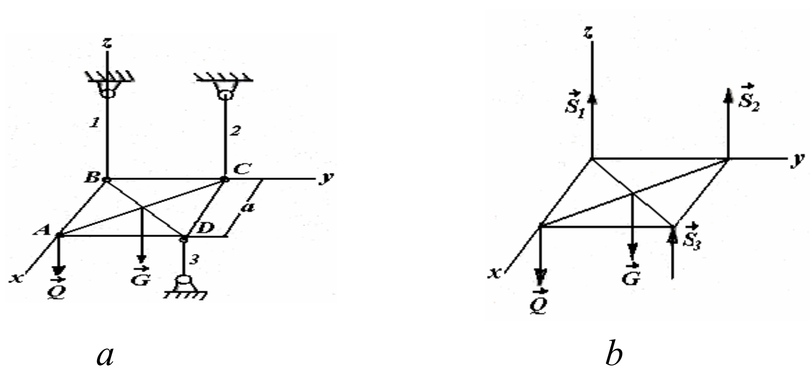
$AE=AS+SE$, $AE=2+1=3m, AF=AD+DF$, $AF=4+2/3=14/3m$

(22.6) ga son qiymatlarni qo`ysak,

$R_A = 4{,}44kN, R_B = 5{,}56kN$

kelib chiqadi.

4-masala. Og`irtigi $G = 115N$ bo`lgan $ABCD$ kvadrat plastinka 3 ta sterjen yordamida gorizontal holda ushlab turiladi. A nuqtaga $Q = 185N$ kuch qo`yilgan. Sterjenlardagi zo`riqish aniqlansin (50-rasm).



50 – rasm

Yechish. Sanoq sistemasini (50-rasm,*b*) dagidek tanlaymiz.Sterjenlar reaksiyasini mos ravishda $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ va $\vec{S}_3$ deb olamiz. $ABCD$ plastinkaga ta'sir etuvchi kuchlar Oz o`qiga parallel joylashgan.Ularni muvozanat shartlari quyidagicha bo`ladi:

$$\sum F_{vz} = 0; S_1 + S_2 + S_3 - Q - G = 0, \qquad (22.7)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_v) = 0; -G \cdot a/2 + S_2 \cdot a + S_3 \cdot a = 0, \qquad (22.8)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_v) = 0; G \cdot \frac{a}{2} + Q \cdot a - S_3 \cdot a = 0 \qquad (22.9)$$

(22.9) dan:

$$S_3 = G/2 + Q, \quad S_3 = 115/2 + 185 = 242{,}5N$$

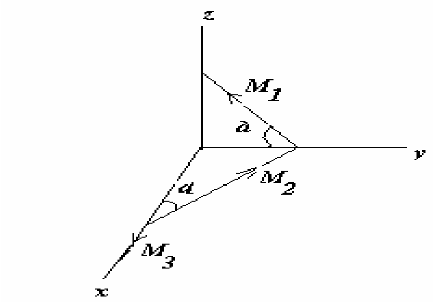
(22.7) va (22.8) dan:

$$S_1 = Q + G - S_2 - S_3, \quad S_2 = G/2 - S_3.$$

Son qiymatlarni qo`ysak: $S_1 = 242{,}5N, S_2 = -185N, S_3 = 242{,}5N.$

5-masala. 51-rasmda ko`rsatilgan juft momentlarining teng ta'sir etuvchisining moduli topilsin. $M_1 = M_2 = 1Nm$, $M_3 = 0{,}707Nm$. $\alpha = 45^0$.

Yechish. 48-rasmda ko`rsatilgan juft momentlari fazoda joylashgan.Bizga ma'lumki,fazodagi juft momentlarining geometrik yig`indisi ularning bosh momentidan iboratdir.Juft momentlarini *Ox,Oy,Oz* o`qlariga proyeksiyalar yig`indisini aniqlaymiz:



51 - rasm

$$M_x = -M_2 \cdot \cos\alpha + M_3,$$
$$M_y = -M_1 \cdot \cos\alpha + M_2 \cdot \sin\alpha,$$
$$M_z = M_1 \cdot \sin\alpha.$$

Son qiymatlarni qo`sak:

$$M_x = 0, M_y = 0, M_z = 0{,}707 Nm.$$

Natijada, $M = \sqrt{M^2{}_x + M_y{}^2 + M^2{}_z}$; $M = 0{,}707Nm$

kelib chiqadi.

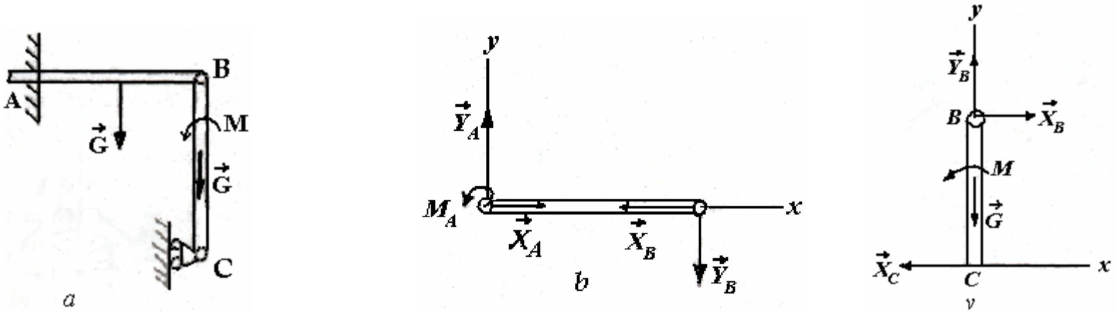
6-masala. Og`irligi *G* bo`lgan balkaning *A* uchi devorga kirgizib mahkamlangan, *B* uchiga *BC* balka sharnir yordamida biriktirilgan.

BC balka *C* uchi qo`zg`aluvchi tayanchga mahkamlangan. *BC* balka og`irligi *AB* balka og`irligi bilan bir xil. *A , B , C* tayanchlardagi reaksiyalar topilsin. *BC* balkaga momenti M bo`lgan juft kuch qo`yilgan. *AB = BC =a* (52-rasm,*a*).

Yechish. Sanoq sistemasini (52-rasm,*b,v*) dagidek tanlaymiz. *AB* va *BC* balkalar muvozanatini alohida-alohida tekshiramiz. Ularga ta'sir etuvchi kuchlar rasmda ko`rsatilgan.

AB balka muvozanat shartlari quyidagicha bo`ladi (52-rasm,*b*):

$$\begin{aligned} &\sum F_{vx} = 0; X_A - X_B = 0, \\ &\sum F_{vy} = 0; Y_A - G - Y_B = 0, \\ &\sum m_A(\vec{F}_v) = 0; M_A - G \cdot \frac{AB}{2} - Y_B \cdot AB = 0. \end{aligned} \qquad (22.10)$$



52 – rasm

BC balka muvozanat shartlari quyidagicha yoziladi (52-rasm,*v*):

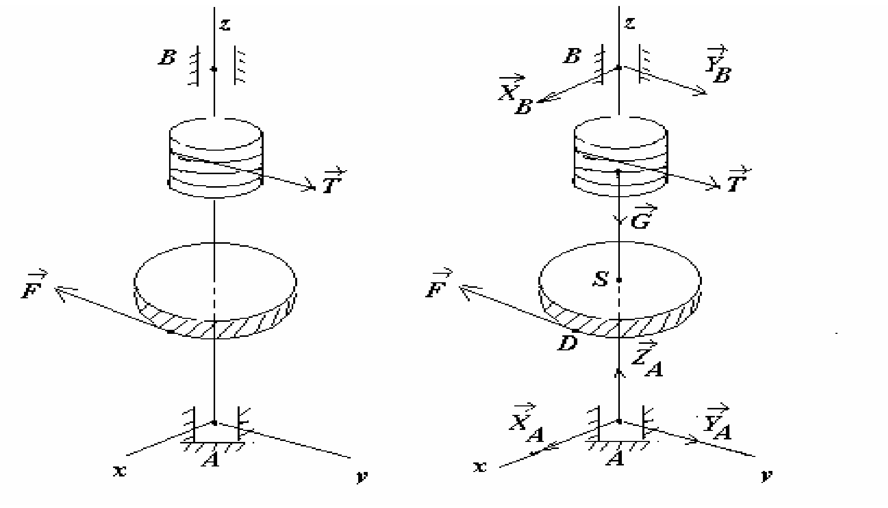
$$
\begin{aligned}
&\sum F_{vx}=0; X'_B - X_C = 0,\\
&\sum F_{vy}=0; Y'_B - G = 0; \qquad\qquad (22.11)\\
&\sum m_B(\vec{F}_v)=0; M - X_C \cdot BC = 0.
\end{aligned}
$$

(22.10), (22.11) tenglamalarni yechsak:

$$X_A = X_B = X_C = \frac{M}{a}, Y_A = 2\cdot G, Y_B = G, M_A = \frac{Ga}{2}.$$

7-masala. Og\`rligi $G = 1{,}6kN$ bo\`lgan baraban o\`qiga zanjir o\`ralgan bo\`lib,uning tarangligi $T = 20kN$, $r_1 = 20sm$ (50-rasm,*a*). Baraban $S$ shesternyaga qo\`yilgan $\vec{F}$ kuch ta'sirida muvozanatda turadi. $\vec{F}$ va $\vec{T}$ Oy o\`qiga parallel, $r_2 = 40sm.$ Shesternya markazi A podpyatnikdan $AS=10sm$ uzoqlikda joylashgan. $AB=120sm, SD=40sm$. A podpyatnik, B podshipnik reaksiyalari hamda $\vec{F}$ kuch miqdori topilsin.

Yechish. (53-rasm,*a*) dagi baraban muvozanatini tekshiramiz. A podpyatnik, B podshipnik ta'sirini mos ravishda $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ reaksiya kuchlari bilan almashtiramiz.U holda baraban $\vec{T}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ kuchlar ta'sirida muvozanatda bo\`ladi.Bu kuchlar fazodagi ixtiyoriy kuchlar sistemasidan iborat. Demak,muvozanat tenglamalar quyidagicha bo\`ladi:



a *b*

53 – rasm

$$\sum F_{vx} = 0; X_A + X_B = 0,$$
$$\sum F_{vy} = 0; Y_A + Y_B + T - F = 0,$$
$$\sum F_{vz} = 0; Z_A - G = 0,$$
$$\sum m_x(\vec{F}_v) = 0; 10 \cdot F - 50 \cdot T - 120 \cdot Y_B = 0, \qquad (22.12)$$
$$\sum m_y(\vec{F}_v) = 0; 120 \cdot X_B = 0,$$
$$\sum m_z(\vec{F}_v) = 0; 20 \cdot T - 40 \cdot F = 0.$$

Son qiymatlarni qo`ysak:

$$X_A = 0, Y_A = -2{,}5kN, Z_A = 1{,}6kN, X_B = 0, Y_B = -7{,}5kN, F = 10kN.$$

bu erdagi (-) ishora Y_A, Y_B larning haqiqiy yo`nalishi (53-rasm,*b*) dagiga teskari bo`ladi.

Nazorat savollari

1.Puanso lemmasi qanday ta'riflanadi?
2.Ixtiyoriy kuchlarni bir markazga keltirishni tushuntiring.
3.Bosh vektor va bosh moment nima?
4.Qanday holda iztiyoriy kuchlar sistemasi bosh vektorga keltiriladi?
5.Qanday holda iztiyoriy kuchlar sistemasi bosh momentga keltiriladi?
6.Dinamo nima?
7.Teng ta'sir etuvchining yo`naltiruvch kosinuslari qanday aniqlanadi?
8.Bosh momentining yo`naltiruvchi kosinuslari qanday topiladi?
9.Bosh moment bilan bosh vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
10.Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday ta'riflanadi va yoziladi?
11.Tekislikdagi ixtiyoriy kuchlar muvozanat shartlarini ta'riflang va yozing.

VI bob

Ishqalanish kuchi

23 - §. Sirg`anishdagi ishqalanish kuchi

Bir jism ikkinchi bir jism ustida sirg`anganida hosil bo`ladigan qarshilik sirg`anishdagi ishqalanish kuchi deyiladi.

Ishqalanish kuchining jism normal bosimiga to`g`ri proporsional ekanligi tajribalarda aniqlangan:

$$F^{ish} = N \qquad (23.1)$$

bunda N-tekshirilayotgan jismning normal bosimi;f-sirg`anib ishqalanish koeffitsiyenti.

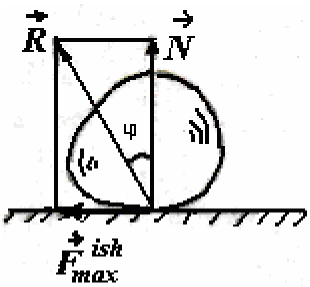
Agar ishqalanuvchi jismlar tinch turgan bo`lsa,ularning ishqalanish kuchi statik ishqalanish kuchi deb ataladi:

$$F_{\max}^{ish} = f_0 \cdot N \qquad (23.2)$$

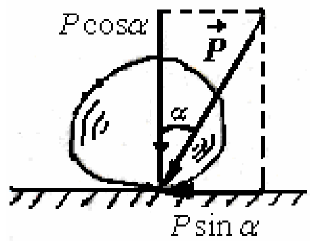
bu yerda f_0 –jismning tinch turgan vaqtdagi ishqalanish koeffitsiyenti.

Jism g`adir-budir tayanch tekislik ustida muvozanatda turgan bo`lsa,tayanchning reaksiya kuchi normal reaksiya hamda ishqalanish kuchidan iborat bo`ladi (54-rasm).

Normal reaksiya kuchi bilan maksimal ishqalanish kuchiga to`g`ri keladigan to`la reaksiya kuchi $\vec{R}$ orasidagi φ burchak ishqalanish burchagi deyiladi:



54 - rasm



55 – rasm

$$tg\varphi = \frac{F^{ish}{}_{\max}}{N} = \frac{f_0 \cdot N}{N} = f_0 \qquad (23.3)$$

Agarda g`adir-budir sirt ustida turgan jismga normal bilan $\alpha$ burchak hosil qiluvchi $\vec{P}$ kuch qo`yilganda jismni harakatga keltiruvchi $P \cdot \sin\alpha$ maksimal ishqalanish kuchidan katta bo`lishi kerak (55-rasm). $P \cdot \sin\alpha > f_0 \cdot P \cdot \cos\alpha$

bundan

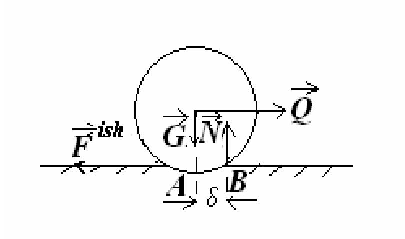
$$tg\alpha > f_0 = tg\varphi \qquad \text{yoki} \qquad \alpha > \varphi$$

kelib chiqadi.

Ishqalanish kuchi yuzaga keladigan hollarni tekshirishga oid statika masalalari ishqalanish kuchi hisobga olinmaydigan masalalar singari,ya'ni muvozanat tenglamalari tuzish yo`li bilan yechiladi.Lekin jismga ta'sir qiluvchi kuchlar qatoriga ishqalanish kuchlari ham kiradi.

24 - §. Dumalanishdagi ishqalanish kuchi

Bir jismning ikkinchi jism ustida dumalanishga qarshilik qiluvchi kuch dumalanishdagi ishqalanish kuchi deyiladi.Og`irligi $G$,radiusi $R$ bo`lgan g`ildirakka $\vec{Q}$ kuch ta'sir qilsin (56-rasm).



56–rasm

$\vec{Q}$ kuchi ta'sirida g`ildirak bilan sirtning tegishib turgan nuqtasida sirpanishdagi ishqalanish kuchi hosil bo`ladi. Modul jihatidan teng bo`lgan $\vec{Q}$ va $\vec{F}^{\,ish}$ kuchlari yelkasi g`ildirak radiusiga teng bo`lgan juft kuch hosil qilib,u g`ildirakni dumalatishga harakat qiladi.

G`ildirakning sirtga ko`rsatayotgan bosim kuchi $\vec{G}$ ta'sirida ikki jismning tegishib turgan yuzachasi deformatsiyalanadi.

Natijada normal reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi A nuqtadan o`ng tomonda joylashgan $B$ nuqtaga qo`yilgan bo`ladi.Bosim kuchi $\vec{G}$ va normal reaksiya kuchi $\vec{N}$ yelkasi $AB=\delta$ bo`lgan juft kuchni hosil qilib , u g`ildirak dumalanishiga qarshilik ko`rsatadi. δ -dumalanishdagi ishqalanish koeffitsiyenti deyiladi.

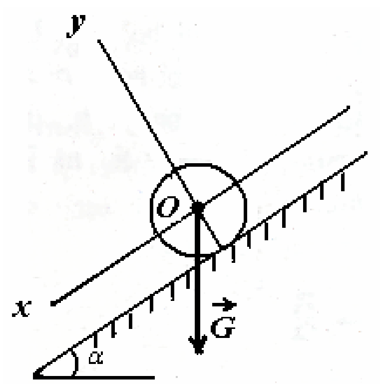
Shunday qilib g`ildirakka momentlari bir-biriga qarama-qarshi yo`nalgan $(\vec{Q},\vec{F}^{ish})$ va $(\vec{G},\vec{N})$ juftlar ta'sir etadi. G`ildirak dumalashi oldida

$$m_A(\vec{Q}) = m_A(\vec{N}) \qquad \text{yoki} \qquad Q\cdot R = N\cdot\delta\,. \qquad (24.1)$$

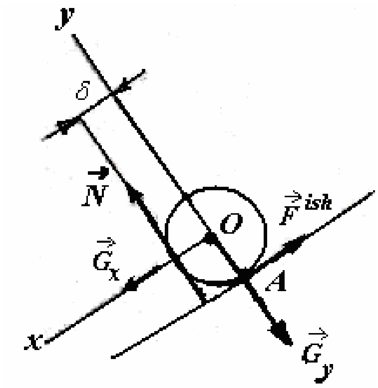
(24.1) dan: $Q=\dfrac{\delta}{R}\cdot N$

Agarda $Q>\dfrac{\delta}{R}\cdot N$ bo`lsa, g`ildirak dumalaydi.

8-masala: Og`irligi $G$, diametri 1m bo`lgan g`altak g`ildiramasligi uchun og`ma tekislikning gorizontga eng katta og`ish burchagi topilsin. Dumalanish ishqalanish koeffitsiyenti δ= 0.0005*m* (57-rasm,*a*).



a



b

57 – rasm

Yechish. G`altak muvozanatini tekshiramiz.Unga aktiv $\vec{G}$ og`irlik kuchi, $\vec{N},\vec{F}^{ish}$ reaksiyalar ta'sir qiladi (57-rasm,*b*).

$\vec{G}$ og`irlik kuchini $\vec{G}_x, \vec{G}_y$ tuzuvchilarga ajratamiz: $G_x = G \cdot \sin\alpha, G_y = G \cdot \cos\alpha$

G_x g`altakni aylantirishga harakat qilsa, $G_y$ esa unga qarshilik ko`rsatadi. G`altakka ta'sir qiluvchi kuchlarni muvozanat yaqinidagi muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{vy} = 0; -G \cdot \cos\alpha + N = 0;$$
$$\sum F_{vx} = 0; G \cdot \sin\alpha + F^{ish} = 0,$$
$$\sum m_A(\vec{F}_v) = 0; G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha - N \cdot \delta = 0.$$

Mazkur tenglamalarni yechsak, $N = G \cdot \sin\alpha, G \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha - G \cdot \delta \cdot \cos\alpha = 0$ kelib chiqadi.

Bu erdan: $tg\,\alpha = 2k/d$; $tg\,\alpha = 0{,}001$; $\alpha = 0{,}057^o$

Nazorat savollari

1.Sirpanishdagi ishqalanish kuchi nima?
2.Dumalashdagi ishqalanish kuchi nima?
3. Ishqalanish burchagi deb nimaga aytiladi?
4.Jism harakatga kelishi uchun ta'sir qilayotgan kuchning normal bilan tashkil qilgan burchagi va ishqalanish burchagi orasidagi munosabat qanday bo`lishi kerak?
5. Jism dumalanishi oldida qanday shart bajarilishi kerak?

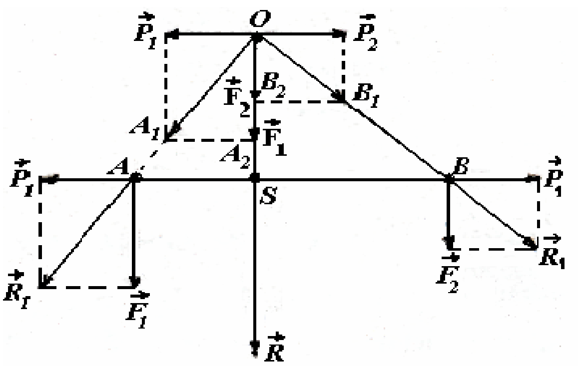
VII bob

PARALLEL KUCHLAR. OG`IRLIK MARKAZI.

25- §. Bir tomonga yo`nalgan ikki parallel kuchni qo`shish

Faraz qilaylik, jismning A va B nuqtalariga mos ravishda bir tomonga qarab yo`nalgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar qo`yilgan bo`lsin (58-rasm). $A$ va $B$ nuqtalarga ta'sir chiziqlari $AB$ da joylashgan $(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \Leftrightarrow 0$ sistemani qo`yamiz.Natijada A nuqtada $\vec{F}_1$ va $\vec{P}_1$, B nuqtada esa $\vec{F}_2$ va $\vec{P}_2$ kuchlar hosil bo`ladi. Ularni 4-aksiomaga asosan qo`shib $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1$ hamda $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2$ kuchlarni hosil qilamiz. $\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasini O deb belgilab,ularni 3-aksiomadagi teoremaga ko`ra $O$ nuqtaga ko`chiramiz. So`ngra $\vec{R}_1$ ni $\vec{F}_1, \vec{P}_1$, shuningdek $\vec{R}_2$ ni $\vec{F}_2, \vec{P}_2$ kuchlarga ajratamiz.

Demak,O nuqtada bir to`g`ri chiziq bo`ylab yo`nalgan $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlar hosil bo`ladi.Ularni algebraik qo`shib,teng ta'sir etuvchisini aniqlaymiz:



58 - rasm

$$R = F_1 + F_2 \tag{25.1}$$

Endi $\vec{R}$ ni ta'sir chizig`i bo`ylab S nuqtaga ko`chiramiz. 58-rasmdagi $\Delta OAS$, $\Delta OA_1A_2$ va $\Delta OBS$, $\Delta OB_1B_2$ o`xshash bo`lgani uchun

$$\frac{F_1}{OS} = \frac{P_1}{AS}, \frac{F_2}{OS} = \frac{P_2}{SB} \tag{25.2}$$

bo`ladi.

(25.2) dan:

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} \tag{25.3}$$

(25.3) dan hosiloviy proporsiya tuzsak:

$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{F_1 + F_2}{SB + AS}$$

yoki

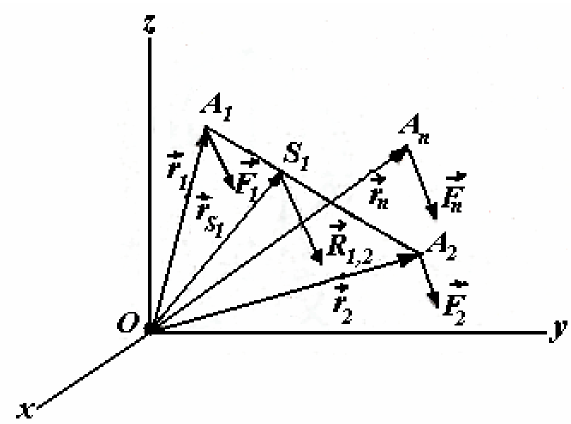
$$\frac{F_1}{SB} = \frac{F_2}{AS} = \frac{R}{AB} \tag{25.4}$$

Demak, bir tomonga qarab yo`nalgan ikki parallel kuchning teng ta'sir etuvchisi ularning algebraik yig`indisiga teng bo`lib,yo`nalishi mazkur kuchlar yo`nalishida,ta'sir chizig`i esa kuchlar qo`yilgan nuqtalar orasidagi masofani ichki ravishda shu kuchlarga teskari proporsional bo`laklarga bo`lib o`tadi.

26 - §. Parallel kuchlar markazi

Fazoda bir tomonga qarab yo`nalgan parallel $\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}$ kuchlar jismning $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalariga qo`yilgan bo`lsin (59-rasm). Kuchlar qo`yilgan nuqtalarning $Oxyz$ sanoq sistemasiga nisbatan radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}$ deb belgilaymiz.Yuqoridagi mavzuga asoslanib , avval $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ ni qo`shib olsak:

$$R_{1,2} = F_1 + F_2, F_1 \cdot A_1S_1 = F_2 \cdot S_1A_2$$



59 - rasm

S_1 nuqta radius-vektorini $\vec{r_{S_1}}$ desak: $F_1 \cdot (\vec{r_{S_1}} - \vec{r_1}) = F_2 \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_{S_1}})$

bundan $\vec{r_{S_1}} = \dfrac{F_1 \cdot \vec{r_1} + F_2 \cdot \vec{r_2}}{F_1 + F_2}$ kelib chiqadi.

25-mavzudagidek qo`shishni davom ettirsak

$$\vec{r_S} = \frac{F_1 \cdot \vec{r_1} + F_2 \cdot \vec{r_2} + ... + F_n \cdot \vec{r_n}}{F_1 + F_2 + ... + F_n}$$

yoki
$$\vec{r_S} = \frac{\sum F_\nu \cdot \vec{r_\nu}}{\sum F_\nu} \tag{26.1}$$

hosil bo`ladi.

(26.1) formula yordamida aniqlanadigan S nuqta parallel kuchlar markazi deyiladi.

27 - §. Qattiq jismning og`irlik markazi

Yer sirtiga yaqin bo`lgan qattiq jismning har qaysi bo`lagiga Yer markaziga qarab yo`nalgan og`irlik kuchi ta'sir etadi.Tekshirilayotgan jism o`lchamlari Yer o`lchamlariga nisbatan juda kichik bo`lgani uchun ta'sir etuvchi og`irlik kuchlarini parallel kuchlar deb qarash mumkin.Demak,parallel kuchlar markazi jismning og`irlik markazidan iborat bo`ladi.Shunday qilib jism og`irlik markazi (26.1) formuladan foydalanib aniqlanadi.

Jism bo`laklariga ta'sir etuvchi og`irlik kuchlarining teng ta'sir etuvchisini G desak,

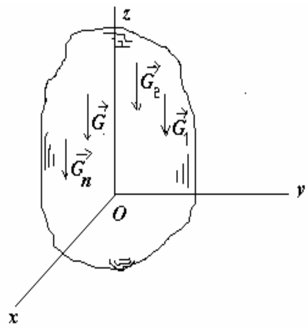
$$G = \sum G_\nu$$

Natijada (26.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{r_S} = \frac{\sum G_\nu \cdot \vec{r_\nu}}{\sum G_\nu}$$

yoki

$$x_S = \frac{\sum G_\nu \cdot x_\nu}{\sum G_\nu}, y_S = \frac{\sum G_\nu \cdot y_\nu}{\sum G_\nu}, z_S = \frac{\sum G_\nu \cdot z_\nu}{\sum G_\nu}. \qquad (27.1)$$



60- rasm

28 - §. Bir jinsli jismlar og`irlik markazining koordinatalari

Bir jinsli jism biror bo`lagining og`irligi uning hajmiga proporsional bo`lsin. Bu holda:

$$G_\nu = \gamma \cdot V_\nu \qquad (28.1)$$

bunda γ - bir birlik hajm og`irligi; $V_\nu$ - jism $\nu$-bo`lagining hajmi.

(28.1) ni (27.1) ga qo`ysak:

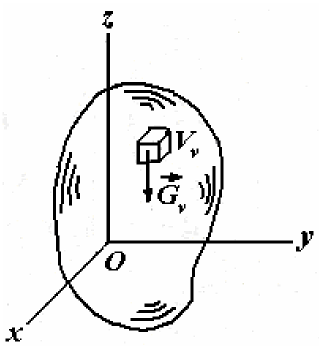
$$x_S = \frac{\sum V_\nu \cdot x_\nu}{\sum V_\nu}, y_S = \frac{\sum V_\nu \cdot y_\nu}{\sum V_\nu}, z_S = \frac{\sum V_\nu \cdot z_\nu}{\sum V_\nu}. \qquad (28.2)$$

Koordinatalari (28.2) formula bilan aniqlanadigan nuqta jism hajmining og`irlik markazi deyiladi (61-rasm).

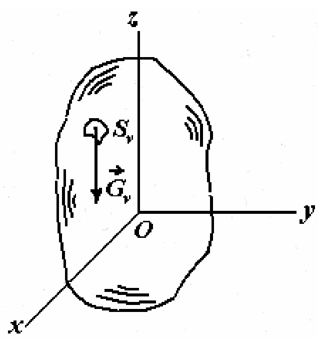
Jism yuzasining og`irlik markazini aniqlash uchun undan $S_\nu$-yuzani ajratib olamiz (62-rasm). Bu yuza og`irligi:

$$G_\nu = \delta \cdot S_\nu \qquad (28.3)$$

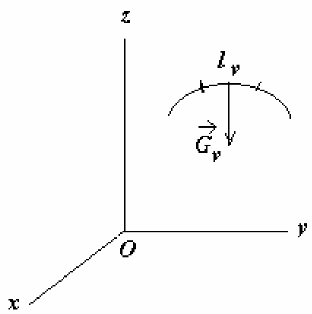
bunda δ - bir birlik yuza og`irligi; $S_\nu$ -jism $\nu$ - bo`lagining yuzi.



61 - rasm



62 - rasm



63 – rasm

(28.3) ni (27.1) ga qo`ysak:

$$x_S = \frac{\sum S_\nu \cdot x_\nu}{\sum S_\nu}, y_S = \frac{\sum S_\nu \cdot y_\nu}{\sum S_\nu}. \quad (28.4)$$

(28.4) jism yuzasi og`irlik markazining koordinatalarini aniqlash formulasidir.

Chiziq og`irlik markazining koordinatalarini topish uchun undan $l_\nu$ –yoyni ajratamiz. Bu yoyning og`irligi: $G_\nu = \rho \cdot l_\nu$ (28.5)

bunda ρ - bir birlik yoy og`irligi; $l_\nu$ – jism $\nu$ – bo`lagining uzunligi (63-rasm).

(28.5) ni (27.1) ga qo`yamiz:

$$x_S = \frac{\sum l_\nu \cdot x_\nu}{\sum l_\nu}, y_S = \frac{\sum l_\nu \cdot y_\nu}{\sum l_\nu}, z_S = \frac{\sum l_\nu \cdot z_\nu}{\sum l_\nu}. \quad (28.6)$$

(28.6) dan chiziq og`irlik markazining koordinatalari aniqlanadi.

29 - §. Jism og`irlik markazining koordinatalarini aniqlash usullari

Jism og` irlik markazining koordinatalarini aniqlash usullari quyidagilardan iborat :

1.Simmetriya usuli. Agar jism simmetriya tekisligiga,simmetriya o`qiga,simmetriya markaziga ega bo`lsa , uning og`irlik markazi mos ravishda simmetriya tekisligida, o`qida, markazida yotadi.

2.Ajratish usuli. Agar jismni og`irlik markazi ma'lum bo`lgan chekli bo`laklarga ajratish mumkin bo`lsa, (28.2),(28.4),(28.6) formulalardan foydalanib jism og`irlik markazining koordinatalari aniqlanadi.

**3. To`ldirish usuli.** Bu holda jismni og`irlik markazi ma'lum bo`lgan chekli bo`laklar bilan to`ldiriladi,so`ngra (28.2), (28.4), (28.6) formulalar yordamida jism og`irlik markazining koordinatalari topiladi.

4. Integrallash usuli. Agar yuqoridagi usullarni qo`llash mumkin bo`lmasa,jismdan elementar bo`lakcha ajratib olinadi.Bu holda (28.2) quyidagi ko`rinishni oladi:

$$x_S = \frac{\sum \Delta V_\nu \cdot x_\nu}{\sum \Delta V_\nu}, y_S = \frac{\sum \Delta V_\nu \cdot y_\nu}{\sum \Delta V_\nu}, z_S = \frac{\sum \Delta V_\nu \cdot z_\nu}{\sum \Delta V_\nu}.$$

Bundan ΔV_ν larni nolga intiltirib limitga o`tsak , yuqoridagi keltirilgan formulaning suratlari jism hajmi bo`yicha tarqalgan integralni,maxraji esa jism hajmini beradi:

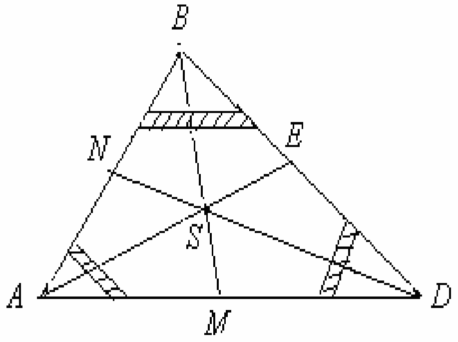
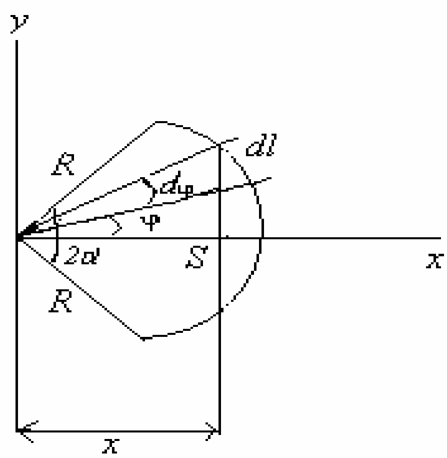
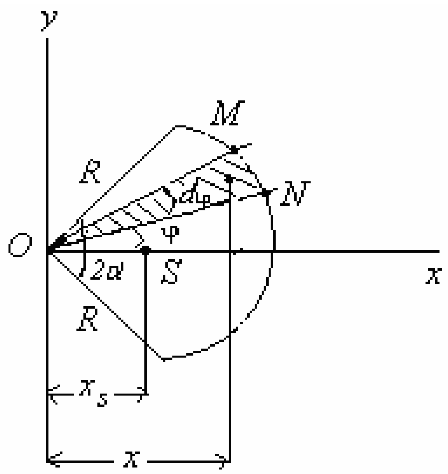
$$x_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} xdV, y_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} ydV, z_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} zdV. \quad (29.1)$$

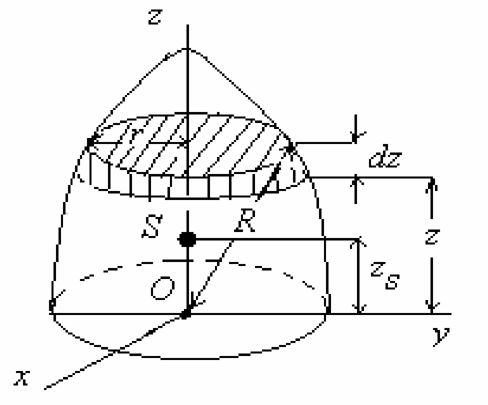
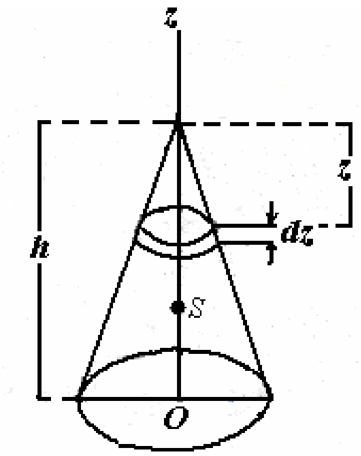
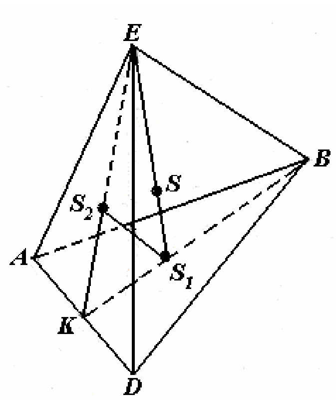
(28.4) va (28.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$x_S = \frac{1}{S}\int_{(S)} xdS, y_S = \frac{1}{S}\int_{(S)} ydS; \quad (29.2)$$

$$x_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} xdl, y_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} ydl, z_S = \frac{1}{L}\int_{(L)} zdl. \quad (29.3)$$

30 -§. Oddiy shaklli ba’zi bir jinsli jismlarning og`irlik markazlari

T/R	Jismlar shakli	Og`irlik markazi
1	**2**	**3**
1	**Uchburchak yuzi** 	$SM=\frac{1}{3}BM$, $SN=\frac{DN}{3}$ $SE=\frac{AE}{3}$
2	**Aylana yoyi** 	$dl=Rd\varphi, x=R\cos\varphi, x_S=\frac{\int_{(L)} x\,dl}{L}$ $L=\int_{-\alpha}^{\alpha} Rd\varphi, x_S=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$ Yarim aylana uchun $x_S=\frac{2R}{\pi}$
3	**Doira sektori yuzi** 	$dS_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}R^2 d\varphi, x=\frac{2}{3}R\cos\alpha$ $S=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}R^2 d\varphi$ $x_S=\frac{\int_{(S)} x\,dS}{S}=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

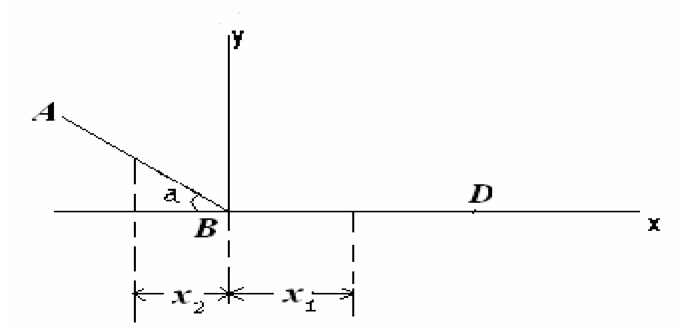
1	2	3
4	**Yarim shar hajmi** 	$x_S = 0, y_S = 0, z_S = \frac{1}{V}\int_{(V)} zdV, r = \sqrt{R^2 - z^2}$ $dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$ $\int_{-R}^{R} z\pi(R^2 - z^2)dz = \int_{(V)} zdV$ $V = \frac{2}{3}\pi R^3, z_S = \frac{3}{8}R$
5	**Konus hajmi** 	$Vz_S = \int_{(V)} zdV, V = \frac{1}{3}Sh, dV = \frac{S}{h^2}z^2dz;$ $\frac{1}{3}Shz_S = \int_0^h \frac{Sz^3}{h^2}dz, z_S = \frac{3}{4}h$
6	**Piramida hajmi** 	$SS_1 = \frac{1}{3}SE = \frac{1}{4}S_1E$

31 - §. Masalalar

9-masala. *ABD* kronshteyn *AB* va *BD* sterjenlardan tashkil topgan.Ikkala sterjen og`irligi bir xil *BD=20 sm*, $\alpha = 60^0$. Kronshteyn og`irlik markazining absissasi $x_s = 0$ bo`lishi uchun *AB* uzunligi qanday bo`lishi topilsin (64-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 64-rasmdagidek tanlaymiz. *ABD* kronshteyn og`irlik markazi (28.6) formuladan foydalanib aniqlanadi.

$$x_S = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2}{l_1 + l_2}, y_S = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2}{l_1 + l_2} \tag{31.1}$$



64 - rasm

Masala shartiga ko`ra $x_s = 0$ bo`lishi so`ralgan.Shuning uchun (31.1) ning birinchisidan foydalanamiz.

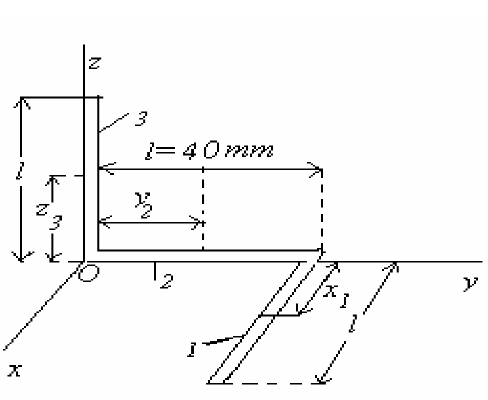
Tekshiralayotgan masalada:

$$x_1 = \frac{BD}{2}, x_2 = -\frac{AB}{2}\cos\alpha, l_1 = BD = 20sm, l_2 = AB$$

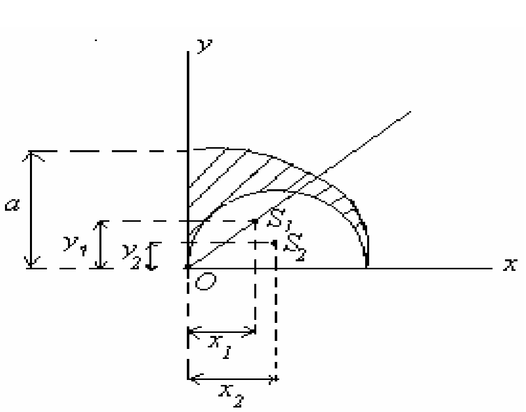
Natijada:
$$x_S = \frac{l_1 \cdot \frac{l_1}{2} - \frac{l_2}{2} \cdot l_2 \cos\alpha}{l_1 + l_2} = 0$$

Son qiymatlarni qo`ysak, $20 \cdot 10 - \frac{l_2^2}{4} = 0, l_2^2 = 800, l_2 = 20\sqrt{2} = 28{,}2sm$ kelib chiqadi.

10-masala. Uzunligi *120 sm* bo`lgan to`g`ri burchak ostida egilgan 65-rasmdagi simning og`irlik markazi aniqlansin.O`lchovlar rasmda ko`rsatilgan.



65 - rasm



66 - rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 65-rasmdagidek tanlaymiz. Simning og`irlik markazi (28.6) ga asosan aniqlanadi:

$$x_S = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3}{l_1 + l_2 + l_3},$$
$$y_S = \frac{l_1y_1 + l_2y_2 + l_3y_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \tag{31.2}$$
$$z_S = \frac{l_1z_1 + l_2z_2 + l_3z_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

65-rasmdan**:**

$$x_2 = x_3 = y_1 = y_3 = z_1 = z_2 = 0, x_1 = y_2 = z_3 = 20mm \tag{31.3}$$

(31.3) ni (31.2) ga qo`ysak:

$$x_S = o{,}67sm, y_S = 2sm, z_S = 0{,}67sm.$$

11-masala. Radiusi $R_1 = a$ bo`lgan chorak aylana bilan radiusi $R_2 = \frac{a}{2}$ bo`lgan aylana chegaralangan yuzaning og`irlik markazi aniqlansin (66-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 66-rasmdagidek tanlaymiz. Chorak doira yuzining og`irlik markazi $S_1$ simmetriya o`qi OA da yotadi:

$$x_1 = y_1 = OS_1 \cdot \cos 45^0$$

30-mavzuga asosan:

$$OS_1 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

yoki $$OS_1 = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$$

Natijada $$x_1 = y_1 = \frac{4a}{3\pi} \tag{31.4}$$

Yarim doira og`irlik markazining koordinatalari quyidagicha bo`ladi:

$$x_2 = \frac{a}{2}, y_2 = \frac{2}{3} \cdot R_2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{3\pi} \tag{31.5}$$

Endi chorak aylana bilan yarim aylana chegaralangan yuza og`irlik markazini aniqlaymiz. U (28.4) ga asosan:

$$x_S = \frac{S_1x_1 - S_2x_2}{S_1 - S_2}, y_S = \frac{S_1y_1 - S_2y_2}{S_1 - S_2} \tag{31.6}$$

bunda $$S_1 = \frac{\pi R_1^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}, S_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8} \tag{31.7}$$

(31.4), (31.5), (31.7) ni (31.6) ga qo`ysak, $x_S = 0{,}349a$ (uzun.bir.), $y_S = 0{,}636a$ (uzun.bir.) kelib chiqadi.

Nazorat savollari

1.Bir tomonga qarab yo`nalgan ikkita parallel kuch qanday qo`shiladi?
2.Birqancha parallel kuchlar qanday qo`shiladi?
3.Jismning og`irlik markazi nima?
4.Uchburchak va trapetsiya yuzining og`irlik markazi qanday aniqlanadi?
5.Aylana yoyi uzunligi og`irlik markazini aniqlash formulasini yozing.
6.Doira bo`lagi og`irlik markazini aniqlash formulasini yozing.
7.Murakkab jismlar og`irlik markazi qanday topiladi?
8. Og`irlik markazini aniqlash usullarini ta'riflang.

IKKINCHI BO`LIM

KINEMATIKA

32 -§. Asosiy tushinchalar

Jismning vaqt o`tishi bilan o`z holatini jism bilan bog`langan sanoq sistemasiga nisbatan uzluksiz ravishda o`zgartirishi mexanik harakat deyiladi.

Kinematikada jism harakati faqat geometrik nuqtai-nazardan, ya'ni unga ta'sir etuvchi kuchlar e'tiborga olinmay tekshiriladi. Harakat tushunchasi fazo, vaqt va harakatlanuvchi jism tushunchalariga bog`liq. Istalgan vaqtda jismning fazodagi holatini aniqlash mumkin bo`lgandagina uning harakati ma'lum bo`ladi. Mexanikada fazoni uch o`lchovli deb qaraladi. Vaqt hech qanday sanoq sistemaga bog`lanmasdan, har qanday sistema uchun bir xil va harakatning nisbiyligidan qatiy nazar deb hisoblanadi. Uni uzluksiz o`zgaruvchi deb, t bilan belgilanadi. Xalqaro (SI) sistemada vaqt o`lchov birligi sekund, masofa o`lchov birligi esa metr deb qabul qilingan.

VIII bob

MODDIY NUQTA KINEMATIKASI

33 -§. Moddiy nuqta harakatining berilish usullari

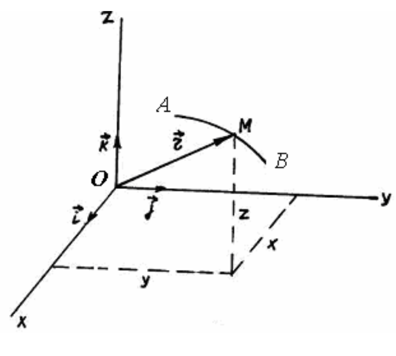
Moddiy nuqtaning harakat davomida fazoda qoldirgan izi trayektoriya deb ataladi. Trayektoriya to`g`ri chiziqdan iborat bo`lsa, to`g`ri chiziqli harakat; egri chiziqdan iborat bo`lsa, egri chiziqli harakat deyiladi. Agar tanlangan sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning holatini aniqlash ko`rsatilgan bo`lsa, nuqta harakati berilgan deb hisoblanadi.

Moddiy nuqta harakati 4 ta usulda beriladi:

1) vektor; 2) koordinata; 3) tabiiy; 4) qutb.

Biz asosan birinchi uchta usul bilan tanishib chiqamiz.

1.Vektor usuli. Faraz qilaylik, M nuqta $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan AB trayektoriya bo`ylab harakat qilayotgan bo`lsin. O va M nuqtalarni tutashtiruvchi vektor $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ nuqtaning radius-vektori deyiladi (67-rasm)



67-rasm

Vaqt o`tishi bilan $M$ nuqta holati o`zgara boradi, natijada uning radius-vektori ham miqdor va yo`nalishi jixatidan o`zgaradi. Agar M nuqtaning radius-vektori vaqt funksiyasi sifatida berilgan bo`lsa, nuqtaning fazodagi holati istalgan vaqt uchun aniqlangan bo`ladi, ya'ni:

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \tag{33.1}$$

(33.1) tenglama moddiy nuqta harakatining vektor usulida berilishidir.

2. Koordinata usuli. Chizma geometriyadan, matematikadan ma'lumki, M nuqta holatini x, y, z Dekart koordinatalar orqali aniqlash mumkin. Nuqta harakatlanganda koordinatalar vaqt o`tishi bilan o`zgaradi, ya'ni ular vaqtning bir qiymatli funksiyasidan iborat bo`ladi:

$$x=x(t)\quad,\quad y=y(t)\quad,\quad z=z(t) \tag{33.2}$$

(33.2) ma'lum bo`lsa, nuqtaning fazodagi holatini istalgan paytda aniqlash mumkin.

(33.2) tenglama moddiy nuqta harakatining koordinata usuldagi berilishidan iborat.

(33.2) dan vaqtni yo`qotsak, nuqtaning trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi.

M nuqta harakati Oxy tekisligida sodir bo`lsa, (33.2) quyidagicha bo`ladi:

$$x=x(t)\quad,\quad y=y(t) \tag{33.3}$$

Nuqta harakati to`g`ri chiziqli bo`lsa, harakat yo`nalishini Ox o`qi deb qarasak, (33.2) ni

$$x=x(t) \tag{33.4}$$

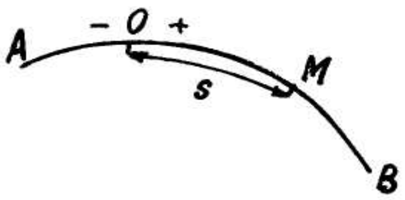
ko`rinishida yozish mumkin.

Agar $Oxyz$ koordinata sistemasi o`qlarining birlik yo`naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ desak, M nuqta radius-vektorini quyidagicha yozish mumkin (67-rasm):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{33.5}$$

(33.5) tenglama nuqta harakatining vektor usulda berilishi bilan nuqta koordinatalari orasidagi munosabatni ifodalaydi.

3. Tabiiy usul. Faraz qilaylik, M nuqta ma'lum AB trayektoriya bo`ylab harakatlanayotgan bo`lsin (68-rasm). Trayektoriyadagi biror O nuqtani sanoq markazi deb, musbat va manfiy yo`nalishlarni belgilab olamiz. U holda nuqtaning trayektoriyadagi holati s egri chiziqli koordinata bilan aniqlanadi, ya'ni:



68-rasm

$$s = s\ (t) \tag{33.6}$$

(33.6) tenglama M nuqtaning trayektoriya bo`ylab harakat qonuni yoki harakatni tabiiy usulda berilishidan iborat.

Demak, M nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun 1) trayektoriya; 2) trayektoriyadagi sanoq markazi; 3) harakat yo`nalishi; 4) trayektoriya bo`ylab harakat qonuni berilishi kerak. Ko`rinib turibdiki, trayektoriya ma'lum bo`lsa, qo`yilgan masalani hal etishda bu usuldan foydalanish qulay.

34 -§. Moddiy nuqta harakatining koordinata usuldagi berilishidan tabiiy usuldagi berilishiga o`tish

Faraz qilaylik, moddiy nuqta harakati (33.2) tenglamalar bilan berilgan bo`lsin, ya'ni:

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad z=z(t) \tag{*}$$

Matematikadan ma'lumki:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{34.1}$$

(*) ni vaqt bo`yicha differensiallaymiz:

$$dx = \dot{x}\,dt\,, dy = \dot{y}\,dt\,, dz = \dot{z}\,dt \tag{34.2}$$

(34.2) ni (34.1)ga qo`ysak:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;dt \tag{34.3}$$

$t=0$ va $t=t$ oraliqda (34.3) ni integrallasak,

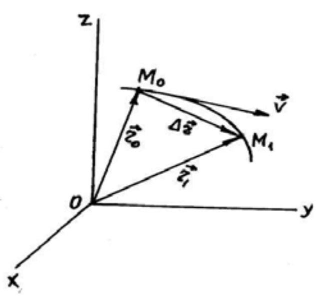
$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = S(t) \tag{34.4}$$

kelib chiqadi. Demak, (*) dan foydalanib, nuqtaning trayektoriya bo`yicha tenglamasini aniqladik. Boshqacha aytganda nuqta harakati koordinata usulda berilganda uning tabiiy usuldagi berilishini keltirib chiqardik.

35 - §. Moddiy nuqtaning tezlik va tezlanish vektori

Moddiy nuqta holati va harakat yo`nalishining qanchalik o`zgarishini belgilaydigan kattalik uning tezligidir.

Moddiy nuqta harakati vektor usulda berilganda tezlik qanday aniqlanishini ko`rib chiqaylik. Aytaylik, $t=t_0$ da tekshirilayotgan nuqta $M_0$ da bo`lib, radius-vektori $\vec{r}_0$; $t=t_1$ da nuqta M_1 da, radius-veqtori $\vec{r}_1$ bo`lsin. Bu holda $t_1$-$t_0$=$\Delta t$ vaqt o`zgarishi, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r}$ esa radius-vektor o`zgarishi bo`ladi.



69-rasm

Radius-vektor o`zgarishini vaqt o`zgarishiga nisbati nuqtaning o`rtacha tezlik vektorini beradi (69-rasm):

$$\vec{V}_{o'r} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{35.1}$$

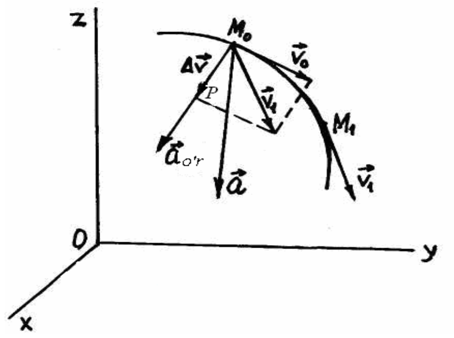
(35.1)dan $\Delta t \to 0$ da limitga o`tsak, nuqtaning haqiqiy tezlik vektori kelib chiqadi:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad \text{yoki} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{35.2}$$

(35.2) dan ko`ramizki, moddiy nuqtaning tezlik vektori uning radius-vektoridan vaqt bo`yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng.

Δt nolga intilganda $\vec{V}_{o'r}$ M_0 nuqta atrofida aylanib urinmaga yaqinlashadi. Natijada tezlik vektori trayektoriyaga urinma bo`lib, harakat yo`nalishi tomon yo`naladi. Tezlik xalqaro SI sistemada m/s da o`lchanadi.

Moddiy nuqta tezligi yo`nalishi va miqdori qanchalik tez o`zgarishini aniqlaydigan kattalik uning tezlanishidan iborat.



70-rasm

Faraz qilaylik, tekshirilayotgan nuqta $t=t_0$ da M_0 da bo`lib, uning tezligi $\vec{V}_0$; $t=t_1$ da $M_1$ da bo`lib, tezligi $\vec{V}_1$ bo`lsin. Tezlik o`zgarishi $\Delta\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_0$ ni aniqlash uchun M_1 nuqta tezligi $\vec{V}_1$ ni M_0 nuqtaga mazkur tezlikka parallel qilib ko`chiramiz, so`ngra parallelogramm qursak, shu parallelogramm bir tomoni $\Delta\vec{V}$ dan iborat bo`ladi (70-rasm).

Nuqtaning o`rtacha tezlanish vektori quyidagicha bo`ladi:

$$\vec{a}_{o'r}=\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad (35.3)$$

(35.3) ning $\Delta t\to 0$ dagi limiti haqiqiy tezlanish vektorini beradi:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (35.4)$$

Demak, moddiy nuqtaning tezlanish vektori tezlik vektoridan vaqt bo`yicha birinchi, radius-vektoridan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Agar nuqta bir tekislikda yotuvchi chiziq bo`ylab harakatlansa, $\vec{a}$ trayektoriya tekisligida yotib, trayektoriyaning botiq tomoniga yo`naladi.

Agar nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqdan iborat bo`lsa, $\vec{a}_{o'r}$ parallelogramm tekisligi *P* da yotadi. $\Delta t\to 0$ bo`lganda, ya'ni, M_1 nuqta M_0 ga yaqinlashganda, *P* tekislikning egallagan holati yopishma tekislik deyiladi. Demak, *M* nuqtaning tezlanish vektori yopishma tekisligida yotadi va trayektoriyaning botiq tomoniga yo`naladi (70-rasm).

SI sistemada tezlanish m/s^2 da o`lchanadi.

36 - §. Moddiy nuqta tezlik va tezlanishini koordinata usulida aniqlash

Moddiy nuqta harakati Dekart koordinatalarida (33.2) tenglamalar bilan berilgan bo`lsin.

Tezlik vektorining Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda V_x, V_y, V_z desak:

$$\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k} \qquad (36.1)$$

(35.2) ga ko`ra (33.5) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

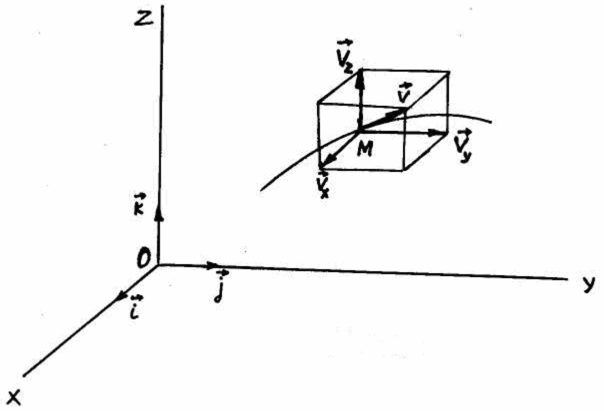
$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (36.2)$$

(36.2) bilan (36.1) ni solishtirsak,

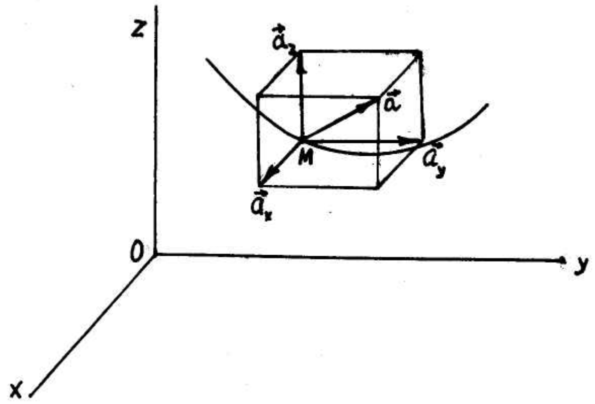
$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \qquad (36.3)$$

kelib chiqadi.

Demak, tezlik vektorini koordinata o`qlaridagi proyeksiyasi nuqtaning mazkur o`qqa mos koordinatasidan vaqt bo`yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Tezlik vektori proyeksiyalari mos ravishda $Ox$, $Oy$, $Oz$ o`qlariga parallel (71-rasm). $\vec{V_x}$, $\vec{V_y}$, $\vec{V_z}$ larni parallelogramm usulini qo`llab qo`shsak, $\vec{V}$ tezlik $\vec{V_x}$, $\vec{V_y}$, $\vec{V_z}$ larga qurilgan parallelepiped diogonali bo`ylab yo`naladi.



71-rasm



72-rasm

Matematikadan ma'lumki:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad (36.4)$$

Tezlik vektorini yo`naltiruvchi kosinuslari quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\left(\vec{V} \,\hat{,}\, \vec{i}\right) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos\left(\vec{V} \,\hat{,}\, \vec{j}\right) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos\left(\vec{V} \,\hat{,}\, \vec{k}\right) = \frac{V_z}{V} \qquad (36.5)$$

Tekshirilayotgan nuqta tezlanish vektorining Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini a_x, a_y, a_z desak:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (36.6)$$

(35.4) ga ko`ra (36.1) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} \qquad (36.7)$$

(36.6) bilan (36.7) ni taqqoslasak,

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

yoki

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z} \qquad (36.8)$$

kelib chiqadi.

Nuqta tezlanishini proyeksiyalari (36.8) ma’lum bo`lsa, tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{36.9}$$

formuladan, yo`naltiruvchi kosinuslari esa

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{k}\right) = \frac{a_z}{a} \tag{36.10}$$

formulalardan aniqlanadi (72-rasm).

37 - §. Nuqta harakati tabiiy usulda berilganda tezlikni aniqlash

Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda (33.6) tenglama bilan berilgan. Nuqtaning radius-vektori $\vec{r}$ ni egri chiziqli koordinata s ning funksiyasi deb qarash mumkin. Bu holda $\vec{r}$ vaqtning murakkab funksiyasi bo`ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

bu yerda

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

trayektoriyaga o`tkazilgan urinmaning birlik vektorini beradi. Bu vektorni $\vec{\tau}$ deb belgilaymiz.

Natijada

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} \tag{37.1}$$

hosil bo`ladi. Haqiqatdan ham 35-paragrafdan bilamizki,

$$\vec{V} = V\vec{\tau} \tag{37.2}$$

Birlik vektori $\vec{\tau}$ doimo sanoq boshidan nuqtagacha bo`lgan masofaning o`sishi tomon yo`naladi.

(37.1) bilan (37.2) ni solishtirsak,

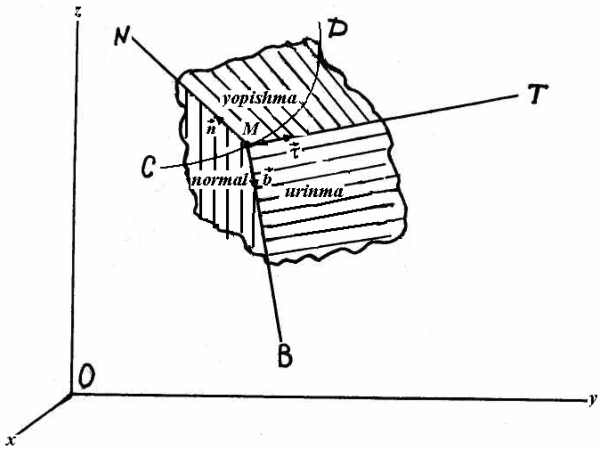
$$V = \frac{dS}{dt} \tag{37.3}$$

kelib chiqadi.

Demak, nuqta tezligining algebraik qiymati egri chiziqli koordinatasidan vaqt bo`yicha birinchi hosilaga teng.

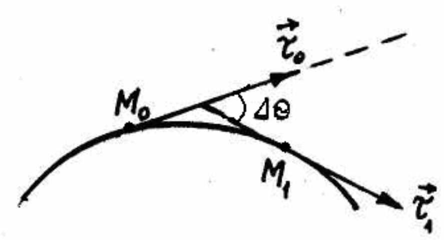
38 - §. Tabiiy koordinatalar sistemasi. Chiziqning egriligi. Egrilik radiusi

Qo`zg`almas koordinatalar sistemasiga nisbatan M nuqta bir tekislikda yotmaydigan CD egri chiziq bo`ylab harakat qilsin. (73-rasm).



73- rasm

M nuqtadan egri chiziqli koordinataning o`sishi tomon yo`nalgan MT urinmani o`tkazamiz. $MT$ ga perpendikulyar qilib o`tkazilgan tekislik normal tekislik deb atalib, unda bir qancha normallar yotadi. Ulardan ikkitasi ahamiyatga ega. Biri MT ga perpendikulyar bo`lib, chiziqning botiq tomoniga qarab yo`nalgan bosh normal MN, ikkinchisi esa MT va MN ga perpendikulyar bo`lgan binormal $MB$ dan iborat. $MT$, $MN$, $MB$ yo`nalishlardagi o`qlar tabiiy koordinata o`qlari deyiladi. Ularning musbat yo`nalishi o`ng sistema tashkil etadigan qilib tanlanadi. Mazkur o`qlarning birlik vektorlarini mos ravishda $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{в}$ deb belgilaymiz. $\vec{\tau}$ va $\vec{в}$ yotgan tekislik urinma, $\vec{\tau}$ va $\vec{n}$ yotgan tekislik yopishma, $\vec{n}$ va $\vec{в}$ yotgan tekislik normal tekislik deb ataladi. Bu tekisliklardan tashkil topgan uchyoqlik tabiiy uchyoqlik deyiladi. M nuqtaning trayektoriyasida bir-biriga juda yaqin bo`lgan $M_0$ va $M_1$ nuqtalardan $M_0\tau_0$ va $M_1\tau_1$ urinmalarni o`tkazamiz (74-rasm). Ular orasidagi burchakni $\Delta\theta$, M_0M_1 yoyni Δs desak,



74 – rasm

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k$$

chiziqning egriligini beradi. Egrilikning teskari qiymati egrilik radiusi deb ataladi va u quyidagicha ifodalanadi.

$$\rho = \frac{1}{k}$$

39 - §. Moddiy nuqta tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Tezlanishni tabiiy usulda aniqlash uchun (37.2) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

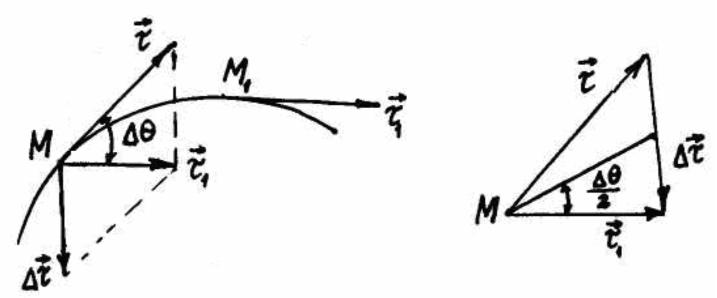
yoki

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \qquad (39.1)$$

(39.1) dagi $\frac{d\vec{\tau}}{dS}$ miqdor va yo`nalishini aniqlash uchun uni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

bu yerda $\Delta\vec{\tau}$ trayektoriyadagi bir-biriga yaqin bo`lgan $M_0$ va $M_1$ nuqtalardan o`tkazilgan urinmalar birlik vektorlarini ayirmasidan iborat (75-rasm, *a*).



a *b*

75-rasm

$\left|\vec{\tau}_0\right| = \left|\vec{\tau}_1\right| = 1$ bo`lgani uchun $\vec{\tau}, \vec{\tau_1}$ va $\Delta\vec{\tau}$ lardan tashkil topgan uchburchak tengyonli bo`ladi (75-rasm, b); bu uchburchakdan:

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{2}$$

M_1 ni M_0 ga juda yaqin deb qarasak, $\Delta\theta$ juda kichik bo`ladi. Bu holda $\sin\frac{\Delta\theta}{2}$ ni $\frac{\Delta\theta}{2}$ bilan almashtirish mumkin, ya'ni:

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{2}$$

yoki

$$\Delta\theta = \left|\Delta\vec{\tau}\right|$$

Natijada

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \qquad (39.2)$$

kelib chiqadi. ρ–egrilik radiusi, k-chiziqning egriligi. $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ vektor $\vec{\tau}$ ga perpendikulyar, haqiqatdan ham $\vec{\tau}$ ning kvadrati birga teng:

$$\left(\vec{\tau}\right)^2 = 1$$

Bu tenglikdan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}=0 \qquad (39.3)$$

Matematikadan ma'lumki, $\vec{\tau}$ bilan $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ perpendikulyar bo`lgan holda (39.3) to`g`ri bo`ladi. Demak,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|\vec{n} \quad \text{yoki} \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{V}{\rho}\vec{n} \qquad (39.4)$$

(39.4) ni (39.1) ga qo`ysak:

$$\vec{a}=\frac{dV}{dt}\vec{\tau}+\frac{V^2}{\rho}\vec{n} \qquad (39.5)$$

Moddiy nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda a_τ, a_n, $a_в$ desak,

$$\vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}+a_в\vec{в} \qquad (39.6)$$

(39.5) bilan (39.6) ni solishtirsak,

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}, a_n=\frac{V^2}{\rho}, a_в=0 \qquad (39.7)$$

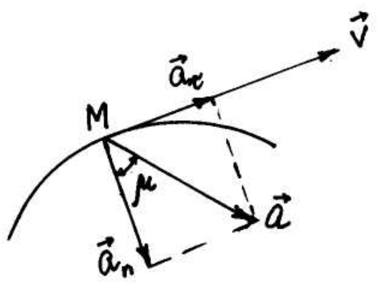
kelib chiqadi.

(39.7) dan foydalanib, to`la tezlanishni aniqlash mumkin:

$$a^2=a_\tau^2+a_n^2 \qquad (39.8)$$

yoki

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2} \qquad (39.9)$$



76-rasm

$\vec{a}_\tau$ bilan $\vec{a}_n$ orasidagi burchak $tg\mu=\frac{|a_\tau|}{a_n}$ bilan aniqlanadi (76-rasm).

Agar moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilib egrilik radiusini aniqlash talab etiladigan bo`lsa,tezlikni Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari orqali ifodasini yozib olamiz:

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2 \qquad (39.10)$$

(39.10) dan vaqt bo`yicha hosila olsak:

$$2V\frac{dV}{dt}=2V_x\frac{dV_x}{dt}+2V_y\frac{dV_y}{dt}+2V_z\frac{dV_z}{dt}$$

bu yerdan

$$Va_\tau=V_xa_x+V_ya_y+V_za_z$$

yoki

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V} \qquad (39.11)$$

kelib chiqadi.

(39.8) ga asosan:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad (39.12)$$

bu yerda

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(39.12) ni (39.7) ning ikkinchisiga qo`ysak, chiziqning egrilik radiusi

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} \qquad (39.13)$$

kelib chiqadi.

40 - §. Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari

Moddiy nuqta harakatining xususiy hollari (39.5) formuladan foydalanib aniqlanadi.

1. Agar nuqta harakati davomida $\vec{a} = 0$, ya'ni $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{a}_n = 0$ bo`lsa, $\frac{dV}{dt} = 0$, $\frac{V^2}{\rho} = 0$ bo`ladi. Bundan V=const, ρ=∞ kelib chiqadi. Bu holda nuqta harakati to`g`ri chiziqli tekis harakatdan iborat bo`ladi.

2. Agar $a_\tau \neq 0, a_n = 0$ bo`lsa, nuqta tezligining yo`nalishi o`zgarmas bo`lib, moduli $V = \left|\frac{dS}{dt}\right|$ bo`ladi; ρ=∞. Bu holda nuqta harakati to`g`ri chiziqli o`zgaruvchan harakatdan iborat.

3. Agar $a_\tau = 0$ bo`lib, $a_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0$ bo`lsa, *V=const* bo`ladi. Natijada moddiy nuqta egri chiziqli tekis harakatda bo`ladi.

Nuqtaning boshlang`ich vaqtdagi tezligi $V_0$, egri chiziqli koordinatasi $s = s_0$ bo`lsin.

Bularni nazarda tutib, (39.7) ning birinchisini integrallasak,

$$s = s_0 + V_0 t \qquad (40.1)$$

kelib chiqadi.

(40.1) tenglama moddiy nuqtaning egri chiziqli tekis harakati tenglamasi deb ataladi.

4. Agar $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$ bo`lsa, nuqta harakati egri chiziqli o`zgaruvchan harakatdan iborat bo`ladi. $a_\tau$=0 bo`lgan hol tekis o`zgaruvchan harakat deyiladi. Boshlang`ich paytda $s = s_0$, $V = V_0$ deb, (39.7) ning birinchisini integrallaymiz:

$$\frac{dV}{dt} = a_\tau, \qquad V = a_\tau t + V_0 \tag{40.2}$$

(40.2) ni yana integrallasak:

$$s = \pm a_\tau \frac{t^2}{2} + V_0 t + s_0 \tag{40.3}$$

Moddiy nuqta harakati tekis o`zgaruvchan bo`lsa, (40.3) dan a_τ oldidagi musbat ishora; sekinlanuvchi bo`lsa, minus ishora olib masala hal etiladi.

41 - §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulda berilganda uning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo`yicha tenglamasi, tezlik va tezlanishini aniqlash

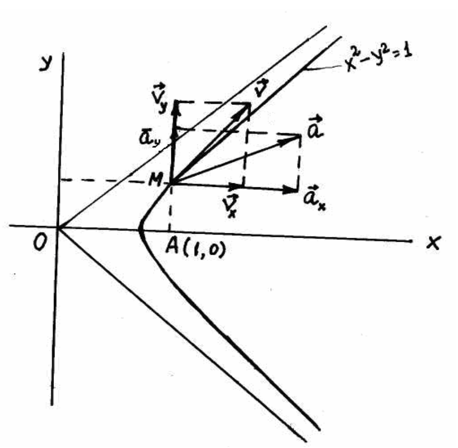
Moddiy nuqta harakati koordinata usulda berilganda talab etiladigan kinematik elementlar quyidagi tartibda aniqlanadi:

1. Moddiy nuqtaning trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (33.2) dan vaqt chiqarib tashlanadi.
2. Trayektoriya bo`yicha tenglamasini aniqlash uchun (33.2) dan vaqt bo`yicha hosila olinib, (34.4) ga qo`yiladi.
3. (36.3), (36.4) va (36.5) dan foydalanib tezlik aniqlanadi.
4. (36.8), (36.9) va (36.10) ga asoslanib tezlanish topiladi.
5. Tezlik va tezlanish yo`nalishlari trayektoriyada ko`rsatiladi.

12-masala . Moddiy nuqta harakati

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$$
$$y = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \tag{41.1}$$

tenglamalar bilan berilgan (*x, y* – metrlar, *t* – sekundlar hisobida). Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, shuningdek *t=1* sekundagi nuqta tezligi hamda tezlanishi topilsin, yo`nalishlari trayektoriyada ko`rsatilsin.



77-rasm

Yechish. Trayektoriya tenglamasini aniqlash uchun (41.1) ni kvadratga ko`tarib ayiramiz:

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{41.2}$$

(41.2) *x=1, y=0* nuqtadan boshlanadigan giperbola o`ng tarmog`i yuqori qismidan iborat (77-rasm).

t = 1 sekundda: *x = 1,54 m, y = 1,18 m.*

Nuqta tezligini aniqlash uchun (41.1) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right), \qquad \dot{y} = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right)$$

t=1 sekundda $\quad \dot{x}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}(2{,}7183-1{,}3679)=1{,}18\ m/s$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1{,}54\ m/s$$

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}; \qquad V=\sqrt{1{,}3924+2{,}3716}=1{,}94\ m/s$$

$$\cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=\frac{V_x}{V}=\frac{1{,}18}{1{,}94}=0{,}61, \quad \cos\left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=0{,}7938; \quad \left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=52^0 25'; \quad \left(\vec{V}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=37^0 27'$$

Tezlanish quyidagicha bo`ladi.

$$a_x=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)$$

$$a_y=\frac{1}{2}\left(e^t-e^{-t}\right)$$

t = 1 sekundda: $a_x = 1{,}54$; $a_y = 1{,}18$; $a = 1{,}94\ m/s^2$.

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=0{,}7938, \quad \cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=0{,}61; \quad \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{i}\right)=37^0 27'; \quad \left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}\right)=52^0 25'$$

Tezlik va tezlanishlar yo`nalishlari 77-rasmda ko`rsatilganidek bo`ladi.

13-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x=e^t \cos t, \quad y=e^t \sin t, \quad z=e^t \tag{41.3}$$

tenglamalar bilan berilgan. Nuqtaning trayektoriya tenglamasi, trayektoriya bo`ylab harakat qonuni aniqlansin (*x, y, z* – metrlar, *t* – sekundlar hisobida).

Yechish. (41.3) dan vaqtni yo`qotish uchun $z=e^t$ ni (41.3) ning birinchi ikkitasiga qo`yamiz:

$$x=z\cos t\ , \quad y=z\sin t$$

Bu tenglikni ikkala tomonlarini kvadratga ko`tarib qo`shamiz:

$$x^2+y^2=z^2$$

yoki

$$x^2+y^2-z^2=0 \tag{41.4}$$

(41.4) tenglamadan ko`ramizki, trayektoriya ikkinchi tartibli doiraviy konusdan iborat ekan.

Nuqtaning trayektoriya bo`yicha tenglamasini aniqlash uchun (41.3) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\dot{x}=e^t\cos t-e^t\sin t$$

$$\dot{y}=e^t\sin t+e^t\cos t$$

$$\dot{z}=e^t$$

bundan:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=3e^{2t} \tag{41.5}$$

(41.5) ni (33.4) ga qo`ysak,

$$S = \int_0^t e^t \sqrt{3dt} = \sqrt{3}e^t \qquad (41.6)$$

kelib chiqadi.

(41.6) nuqtaning trayektoriya bo`ylab harakat qonunini ifodalaydi.

42 - §. Moddiy nuqta harakati tabiiy usulda berilganda tezlik va tezlanishni topish

Tabiiy usulda tezlik va tezlanish quyidagi tartibda aniqlanadi:

1. Tezlanish miqdori (37.3) formula yordamida topiladi.
2. (39.7) va (39.9) formulalar yordamida tezlanish aniqlanadi.
3. Tezlik va tezlanish yo`nalishi rasmda ko`rsatiladi.

14-masala. Moddiy nuqta radiusi $R=2m$ bo`lgan aylana bo`ylab

$$s = 6 + 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

qonunga muvofiq harakatlanadi (s – metrlar, t – sekundlar hisobida).

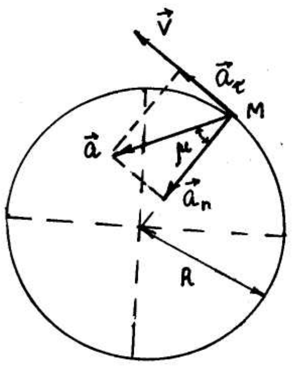
Nuqtaning $t = 1$ sekunddagi tezligi va tezlanishi topilsin.

Yechish. (37.3) formulaga ko`ra:

$$V = 4t + t^2$$

$t = 1$ sekundda $V = 5$ m/s

(39.7) ga ko`ra:



$$a_\tau = 4 + 2t, \qquad a_n = \frac{V^2}{R}$$

$t = 1$ sekundda

$$a_\tau = 6\ m/s^2, \qquad a_n = \frac{25}{2} = 12{,}5\ m/s^2$$

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}; \qquad tg\mu = 0{,}48; \qquad \mu = 25^0 38'$$

(39.9) dan foydalansak

78-rasm

$$a = \sqrt{6^2 + 12{,}5^2} = 13{,}87\ m/s^2.$$

kelib chiqadi (78-rasm)

15-masala. Moddiy nuqta radiusi R bo`lgan aylana bo`ylab

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}kt^2 \qquad (42.1)$$

qonunga ko`ra harakatlanadi (s, R – metrlar, t – sekundlar hisobida)

Nuqta tezlanishi topilsin. Shuningdek, tezlanish qanday vaqtda k ga teng bo`lishi va bu vaqtda nuqta tezligi qanday bo`lishligi aniqlansin.

Yechish. (42.1) dan vaqt bo`yicha hosila olsak:

$$V = V_0 - k\,t\ (m/s)$$

(39.7), (39.9) ga asosan:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = k \qquad a_n = \frac{(V_0 - kt)^2}{R}$$

$$a = \sqrt{k^2 - \frac{(V_0 - kt)^4}{R^2}} \ (\text{m/s}^2)$$

Moddiy nuqta tezlanishi k ga teng bo`lishi uchun $a_n = 0$ bo`lishi kerak, ya'ni:

$$(V_0 - k\,t)^2 = 0, \qquad V_0 - k\,t = 0$$

bundan

$$t = \frac{V_0}{k}; \qquad V = 0$$

kelib chiqadi.

43 - §. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda urinma, normal tezlanish hamda egrilik radiusini aniqlash

Masala yechish tartibi quyidagicha:

1. Nuqta tezligi (36.3), (36.4) formulalar yordamida aniqlanadi.
2. (36.8), (36.9) formulalar yordamida tezlanish topiladi.
3. (39.11) dan foydalanib urinma tezlanish aniqlanadi.
4. Normal tezlanishni (39.12) dan topiladi.
5. Egrilik radiusini aniqlash uchun (39.13) formuladan foydalaniladi.

16-masala. Moddiy nuqta harakati

$$x=3t-0,2\sin(9,23t)$$
$$y=0,325-0,2\cos(9,23t)$$

tenglamalar bilan berilgan (*x, y* – metrlar, *t* – sekundlar hisobida).

$t = 0,054\,\pi$ sekund bo`lganda trayektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin.

Yechish. (36.3) va (36.4) ga asosan:

$$V_x=3-0,2\cdot 9,23\cdot \cos(9,23t)=3-1,846\cos(9,23t)$$
$$V_y=0,2\cdot 9,23\cdot \sin(9,23t)=1,846\sin(9,23t)$$

$t = 0,54\,\pi$ sekundda

$$V_x = 3\text{m/s}, \quad V_y = 1,846 \text{ m/s}, \quad V = 3,52 \text{ m/s}$$

(36.8), (36.9) formulalarga ko`ra:

$$a_x=1,846\cdot 9,23\cdot \sin(9,23t)=17\sin(9,23t)$$
$$a_y=1,846\cdot 9,23\cdot \cos(9,23t)=17\cos(9,23t)$$

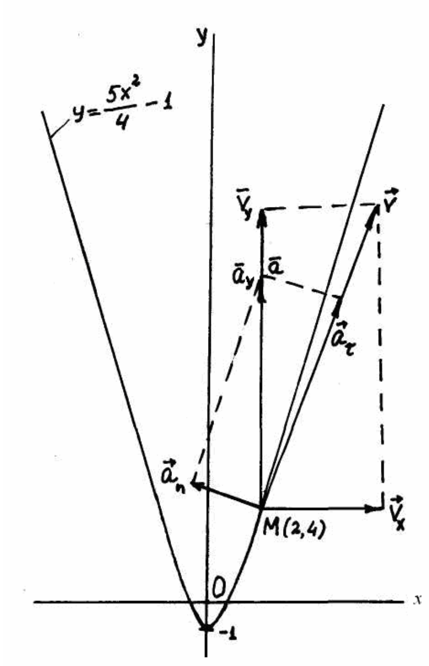
$t = 0,054\,\pi$ sekundda

$$a_x = 17 \ m/s^2$$
$$a_y = 0$$
$$a = 17 \ m/s^2$$

(39.11) dan foydalansak:

$$a_\tau = \frac{3\cdot 17}{5,52} = \frac{51}{3,52} = 14,5 \ m/s^2$$

Normal tezlanish esa:



79-rasm

$$a_n = \sqrt{289 - 210{,}25} = 8{,}87 \ m/s^2$$

Egrilik radiusini aniqlashda (39.13) dan foydalansak,

$$\rho = \frac{12{,}39}{8{,}87} = 1{,}39 \ m$$

kelib chiqadi.

17-masala. Moddiy nuqta

$$x = 2\,t$$
$$y = 5\,t^2 - 1 \qquad (43.1)$$

tenglamalarga ko\`ra harakat qiladi (*x, y* – metrlar, *t* – sekundlar hisobida).

Nuqta trayektoriya tenglamasi tuzilsin, *t=1* sekunddagi tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiusi aniqlansin va ular yo\`nalishi trayektoriyada ko\`rsatilsin.

Yechish. (43.1) dan vaqt bo\`yicha hosila olib, tezlik proyeksiyalarini topamiz:

$$V_x = 2, \qquad V_y = 10\,t \qquad (43.2)$$

$t = 1$ sekundda

$$V_x = 2, \qquad V_y = 10, \ V = \sqrt{4+100} = 10{,}2 \ m/s$$

(43.2) dan hosila olsak:

$$a_x = 0, \qquad a_y = 10 \ m/s^2 \qquad a = 10 \ m/s^2.$$

Urinma tezlanishni aniqlaymiz:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

$$a_\tau = \frac{2\cdot 0 + 10\cdot 10}{10{,}2} = 9{,}8 \ m/s^2.$$

Normal tezlanish quyidagicha bo\`ladi:

$$a_n = \sqrt{100 - 96} = 2 \ m/s^2$$

Egrilik radiusi esa:

$$\rho = \frac{(10{,}2)^2}{4} = 26 \ m$$

(43.1) dan vaqtni yo\`qotish uchun mazkur tenglama birinchisidan *t* ni topib, uni ikkinchisiga qo\`ysak, trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi:

$$y = \frac{5x^2}{4} - 1 \qquad (43.3)$$

(43.3) dan ko\`ramizki, nuqta trayektoriyasi paraboladan iborat. $t = 1$ sekunddagi barcha kinematik parametrlar yo\`nalishini rasmda ko\`rsatamiz (79-rasm). $t = 1s$ da nuqta koordinatalari $x = 2 \ m$, $y = 4 \ m$.

Nazorat savollari

1.Moddiy nuqtaning trayektoriya bo`yicha harakat qonuni yoki tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2.Moddiy nuqta harakati qanday usullarda beriladi?
3. Moddiy nuqta harakat grafigi nima?
4. Nuqtaning berilgan vaqtdagi tezligini yo`nalishi qanday va miqdori nimaga teng?
5.Tekis o`zgaruvchan harakat qonuni va grafigi qanday?
6. Moddiy nuqta harakati koordinata usulida berilganda trayektoriya qanday aniqlanadi?
7. Harakatdagi nuqtaning tezlik vektori bilan radius- vektori orasida qanday bog`lanish bor?
8. Moddiy nuqta tezlanishi nima?
9. Moddiy nuqta tezlanish vektori bilan tezlik vektori orasida qanday bog`lanish bor?
10. Moddiy nuqta tezlanish vektori bilan radius- vektori orasida qanday munosabat bor?
11. Tezlik vektorining Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
12. Tezlanish vektorining Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
13. Tezlanish yo`nalishi qanday?
14. Tezlik va tezlanish yo`naltiruvchi kosinuslari qanday aniqlanadi?
15.Urinma,normal va to`la tezlanish qanday topiladi?
16.Qanday o`qlar tabiiy koordinata o`qlari deyiladi?
17.Chiziqning egriligi nima?
18.Egrilik radiusiga ta’rif bering.

IX bob

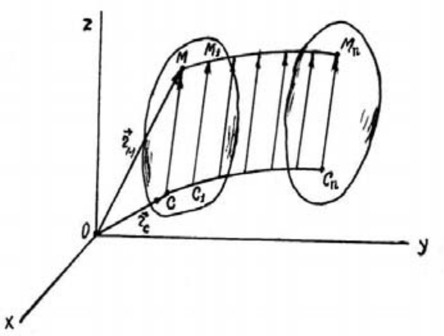
Qattiq jismning sodda harakatlari

Jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o`zgarmasdan qolsa, u absolyut qattiq jism deb ataladi. Keyinchalik qattiq jism deganda absolyut qattiq jism tushuniladi.

Qattiq jismning sodda harakatlari uning ilgarilama va aylanma harakatlaridir.

44 - §. Qattiq jismning ilgarilama harakati

Jism harakati davrida unda olingan ixtiyoriy kesma o`z-o`ziga parallel ko`chsa, bunday harakat ilgarilama harakat deb ataladi (80-rasm). Masalan, velosiped pedalining harakati, to`g`ri uchastkada harakat qilayotgan avtomobil bortining harakati ilgarilama harakatdan iborat. Umuman ilgarilama harakatdagi jism nuqtasining trayektoriyasi egri chiziqdan iborat. Jism ilgarilama harakatining xususiyatini quyidagi teorema bilan berish mumkin.



80 – rasm

Teorema: Ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi, har ondagi tezliklari bir xil hamda tezlanishlari bir xil bo`ladi.

Isbot: Jism *Oxyz* qo`zg`almas Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakatda bo`lsin. Absolyut qattiq jism va ilgarilama harakat ta'rifiga ko`ra jismning ixtiyoriy *C* nuqtasidan *M* nuqtasiga qarab yo`nalgan vektor $\overrightarrow{CM}$ o`zgarmas hamda $\overrightarrow{CM}$ II $\overrightarrow{C_nM_n}$ bo`ladi.

Natijada *C* nuqta qanday trayektoriya chizsa, $\overrightarrow{CM}$ ustidagi nuqtalar ham shunday trayektoriya chizadi (80-rasm).*C* va *M* nuqtalar radius-vektorlarini mos ravishda $\vec{r}_c$, $\vec{r}_M$ desak:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_c + \overrightarrow{CM} \tag{44.1}$$

M nuqta tezligini topish uchun (44.1) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} + \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}$$

$\overrightarrow{CM}$ =const bo`lgani uchun:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} \quad \text{yoki} \quad \vec{V}_M = \vec{V}_c \tag{44.2}$$

(44.2) dan vaqt bo`yicha hosila olsak, tezlanish hosil bo`ladi:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_c}{dt} \qquad \text{yoki} \qquad \vec{a}_M = \vec{a}_c \tag{44.3}$$

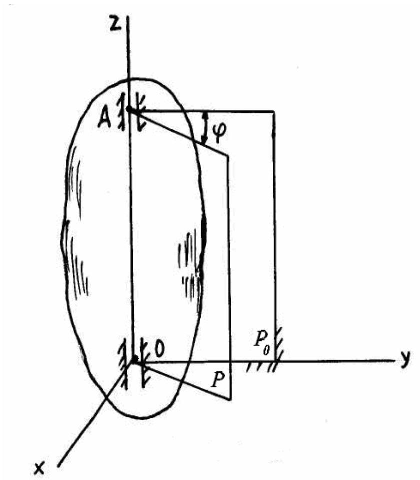
(44.2) ilgarilama harakatdagi jism nuqtalari tezliklari bir xilliligini, (44.3) esa tezlanishlari bir xilliligini ko`rsatadi. Shunday qilib, teorema to`la-to`kis isbotlandi.

Demak, jism ilgarilama harakati uning ixtiyoriy nuqtasi harakati bilan aniqlanadi, ya'ni:

$$x_M = x_M(t)$$
$$y_M = y_M(t) \qquad (44.4)$$
$$z_M = z_M(t)$$

45 - §. Qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofidagi aylanma harakati. Aylanma harakat tenglamasi

Jism harakati davrida undagi ikki nuqta qo`zg`almasdan qolsa, bu harakat aylanma harakat deyiladi (81-rasm). Qo`zg`almas O va A nuqtalardan o`tuvchi o`q jismning aylanish o`qi deb ataladi. Jism aylanma harakatini tekshirish uchun qo`zg`almas $P_o$ va jism bilan birgalikda harakatlanuvchi P tekislikni olamiz. Ular orasidagi burchak $P_o$^$P=\varphi$ bo`lsin. Jism harakatlanganda P_o va P tekisliklar orasidagi burchak o`zgara boradi. Natijada mazkur burchak vaqtning funksiyasi bo`ladi:



81 – rasm

$$\varphi=\varphi(t) \qquad (45.1)$$

(45.1) jismning burilish yoki aylanish burchagi deyiladi va u radian bilan o`lchanadi.

(45.1) tenglama qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki aylanma harakat tenglamasi deyiladi

46 - §. Aylanma harakatdagi jism burchak tezligi va burchak tezlanishi

Faraz qilaylik, $t=t_o$ da jismning burilish burchagi φ_o, $t=t_1$ da esa φ_1 bo`lsin. Bu holda vaqt o`zgarishi $\Delta t=t_1-t_o$, burilish burchagi o`zgarishi $\Delta\ \varphi= \varphi_1- \varphi_o$ bo`ladi.

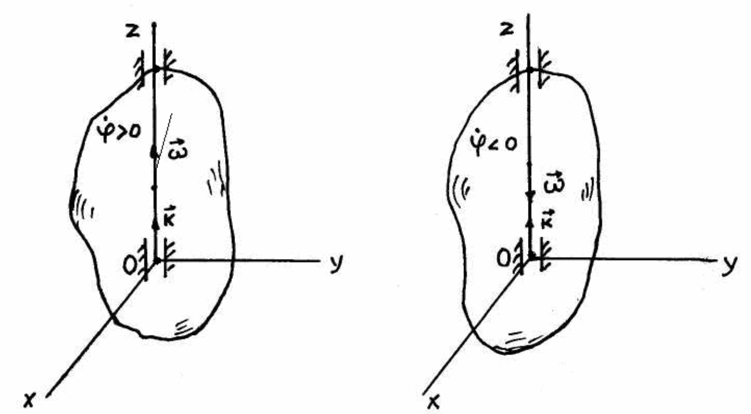
Burilish burchagi o`zgarishini vaqt o`zgarishiga nisbati jismning o`rtacha burchak tezligi deyiladi va $\omega_{o`r}$ bilan belgilanadi.

$$\omega_{o`r}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (46.1)$$

Jismning burilgan momentdagi burchak tezligini topish uchun (46.1) dan Δt nolga intilganda limit olamiz: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}$

yoki $$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi} \qquad (46.2)$$

Demak, jismning burchak tezligi uning burilish burchagidan vaqt bo`yicha olingan birinchi tartibli hosilaga teng. Uning o`lchov birligi rad/s, yoki $1/s$ dan iborat.Jismning burchak tezligi burilish burchagining qanchalik tez o`zgarishini va bu o`zgarish yo`nalishini aniqlaydi. Shuning uchun burchak tezligini vektor sifatida ifodalanadi. Mazkur vektorni jism aylanish o`qining ixtiyoriy nuqtasiga qo`yamiz va yo`nalishini shunday tanlaymizki, uning uchidan turib qaralganda jism doimo soat strelkasiga qarshi tomonga aylansin (82-rasm).



a *b*

82-rasm

Oz o`qni jism aylanish o`qida olsak, burchak tezlik vektori bunday yoziladi:

$$\vec{\omega}=\omega\vec{k} \qquad (46.3)$$

bu yerda $\vec{k}$ *Oz* o`qining birlik vektori.

Umumiy holda jismning burchak tezligi vaqt o`tishi bilan o`zgaradi. $t=t_o$ da burchak tezlik ω_0, $t=t_1$ da esa ω_1 bo`lsin. Burchak tezligi o`zgarishi ($\Delta\omega=\omega_1-\omega_0$) ni vaqt o`zgarishi ($\Delta t=t_1-t_0$) ga nisbati jismning o`rtacha burchak tezlanishi deb ataladi:

$$\varepsilon_{o'r}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (46.4)$$

bu yerdan Δt ni nolga intiltirib limitga o`tamiz:

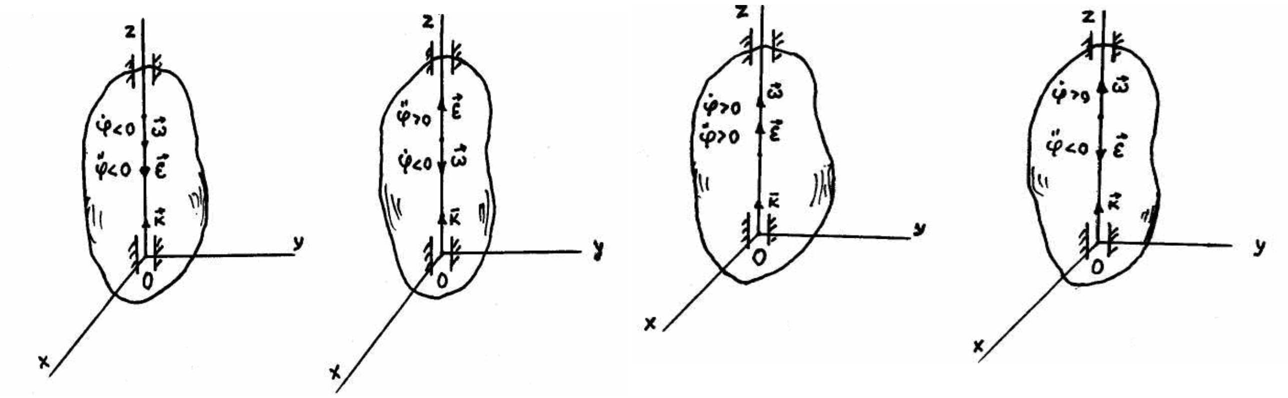
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}$$

yoki

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi} \qquad (46.5)$$

(46.5) dan ko`ramizki, jismning burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqt bo`yicha birinchi yoki burilish burchagidan ikkinchi tartibli hosilaga teng.

Jism burchak tezlanishining vektori ($\vec{\varepsilon}$) ni aylanish o`qi bo`ylab tasvirlash mumkin. (83-rasm):



a *b* *v* *d*

83-rasm

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{k}\frac{d\omega}{dt}$$

yoki

$$\vec{\varepsilon}=\varepsilon\,\vec{k}=\ddot{\varphi}\,\vec{k} \qquad (46.6)$$

Jism burchak tezlanishining o`lchov birligi *rad/s*$^2$ yoki *1/s*$^2$ bo`ladi. Jism aylanma harakatining xususiy hollari quyidagilardan iborat:

1.Agar burchak tezligi ($\omega=const$) o`zgarmas bo`lsa, jism harakati tekis aylanma harakatdan iborat bo`ladi.

Bu holda:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega=const$$

bundan

$$\varphi=\omega t+\varphi_o \qquad (46.7)$$

kelib chiqadi.

(46.7) tenglama tekis aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar $\varphi_o=0$ bo`lsa,

$$\varphi=\omega t\,, \qquad \omega=\frac{\varphi}{t} \qquad (46.8)$$

bo`ladi.

Texnik masalalarni yechishda ko`pincha jismning 1 minutdagi aylanish soni n berilgan bo`ladi. Bu holda $\varphi=2\pi n,\ t=60s$ bo`lib, $\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}$ (46.9)

bo`ladi.

Ba'zi bir masalalarda ixtiyoriy t_1 vaqtdagi aylanish sonini topish talab etiladi. Bu holda aylanish soni N bilan belgilanib, y quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\varphi=2\pi N, \quad N=\frac{\varphi}{2\pi} \qquad (46.10)$$

2. Agar burchak tezlanishi ($\varepsilon=const$) o`zgarmas bo`lsa, jism harakati tekis o`zgaruvchan harakatdan iborat bo`ladi. Bu holda:

$$\frac{d\omega}{dt}=\omega=const$$

bundan $\qquad \omega = \varepsilon t + \omega_0, \qquad \varphi = \pm\frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$ (46.11)

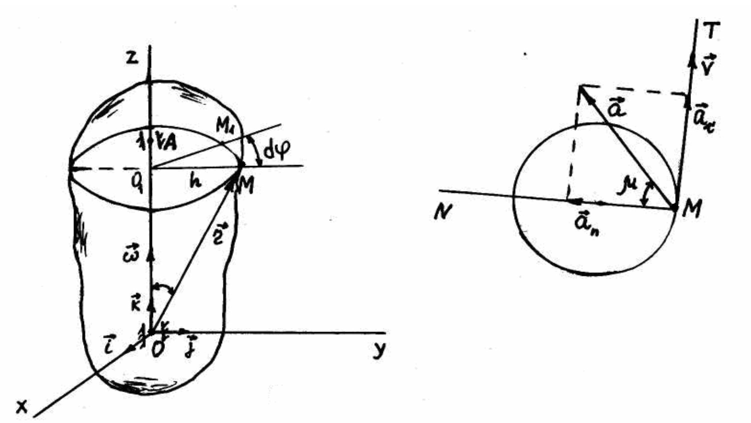
kelib chiqadi.

(46.11) ning ikkinchi tenglamasi tekis o`zgaruvchan aylanma harakat qonunini ifodalaydi. Agar harakat tekis tezlanuvchan bo`lsa, masalani hal etishda ε oldidagi ishora musbat; tekis sekinlanuvchi bo`lsa, ε oldidagi ishora manfiy deb olinadi (83-rasm; *b, d*).

Jism harakati tekis tezlanuvchi bo`lganda burchak tezligi va burchak tezlanishining ishorasi bir xil bo`ladi (83-rasm; *a, v*).

47 - §. Qo`zg`almas o`q atrofida aylanayotgan jism ixtiyoriy nuqtasi tezligi va tezlanishini tabiiy usulda aniqlash

Faraz qilaylik, jism *Oz* o`qi atrofida $\omega$ burchak tezligi bilan aylanayotgan bo`lsin. Jismning aylanish o`qida yotmaydigan nuqtalar trayektoriyalari aylanalardan iborat bo`ladi. Mazkur aylanalar markazi aylanish o`qida yotadi. Jismning ixtiyoriy *M* nuqtasi tezligini aniqlaymiz. (84-rasm)



a *b*

84-rasm

M nuqta chizgan aylana radiusi $h=OM$; $ds = MM_1$.

Matematikadan ma'lumki:

$$ds = h d\varphi \tag{47.1}$$

(47.1) ning ikki tomonini dt ga bo`lamiz:

$$\frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$$

bu yerda

$$\frac{ds}{dt} = V, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

Natijada

$$V = \omega \bullet h \tag{47.2}$$

kelib chiqadi.

Demak, aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi uning burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqtadan aylanish o`qigacha bo`lgan masofa ko`paytmasiga teng. Ixtiyoriy nuqta tezligi chiziqli tezlik deb ataladi.

Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat deb qarash mumkin:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\omega}{dt}h; \qquad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{\rho}$$

bu yerda

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad ; \quad \rho = h.$$

Shuning uchun

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h \quad , \quad a_n = \omega^2 \cdot h, \tag{47.3}$$

$$a = \sqrt{a^2{}_\tau + a_n{}^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

bo`ladi.

Demak, chiziqli tezlik, urinma, normal va to`la tezlanishlarning tabiiy usulda aniqlanishi mos ravishda (47.2) va (47.3) formulalardan iborat.

84-rasm, *b*-dan :

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{47.4}$$

(47.4) dan ko`ramizki, burchak tezligi bilan burchak tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xil bo`lgani uchun tezlanish bilan normal tezlanish (radius) orasidagi burchak μ o`zgarmasdan qoladi. Aylanma harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining chiziqli tezligi hamda tezlanishi mazkur nuqtadan aylanish o`qigacha bo`lgan masofaga proporsional ravishda o`zgaradi.

48 - §. Chiziqli tezlik va tezlanish vektori

Jism ixtiyoriy *M* nuqtasining radius-vektorini $\vec{r}$ bilan belgilaymiz (84-rasm,a) ΔOO_1M dan:

$$\sin(\vec{\omega},\wedge\vec{r}) = \frac{h}{r}$$

$$h = r \cdot \sin(\vec{\omega},\wedge\vec{r}) \tag{48.1}$$

(48.1) ni (47.2) ga qo`yamiz:

$$V = \omega\, r \sin(\vec{\omega},\wedge\vec{r})$$

bundan

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{48.2}$$

kelib chiqadi.

Demak, chiziqli tezlik vektori jism burchak tezligi bilan tekshirilayotgan nuqta radius-vektorini vektor ko`paytmasiga teng.

Chiziqli tezlanish vektorini aniqlash uchun (48.2) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

bundan
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}\,, \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$$

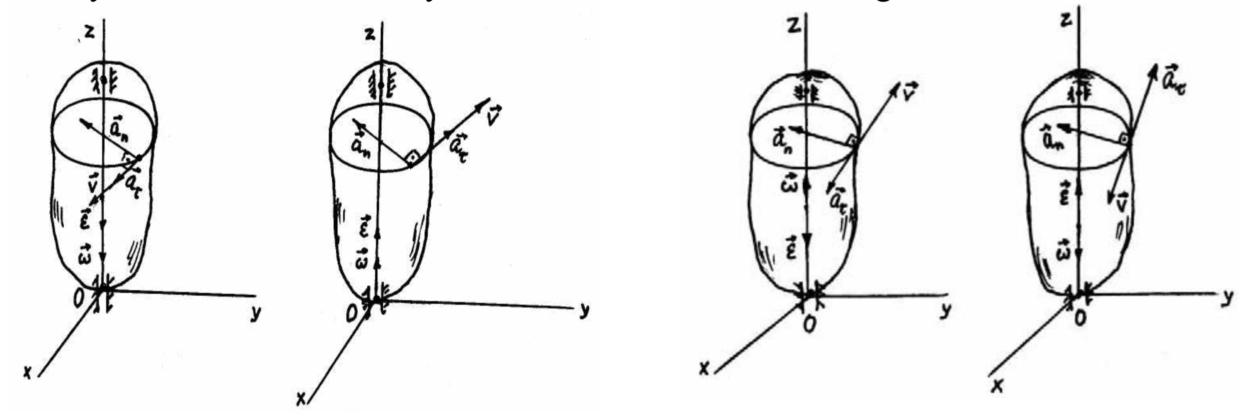
Natijada

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V} \qquad (48.3)$$

(48.3) formulada:

$$\vec{a}_{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,, \qquad \vec{a}_{n} = \vec{\omega} \times \vec{V} \qquad (48.4)$$

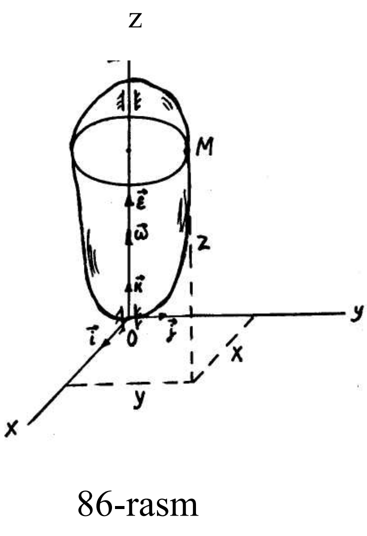
Demak, (48.3) chiziqli tezlanish vektorini, (48.4) ning birinchisi urinma (tangensial) tezlanish va ikkinchisi esa normal (markazga intilma) tezlanish vektorini ifodalaydi. Mazkur vektorlar yo`nalishi 85-rasmda ko`rsatilgan.



a *b* *v* *g*

85-rasm

49 - §. Chiziqli tezlik va tezlanishni koordinata usulda aniqlash.



86-rasm

Faraz qilaylik, jism *Oxyz* Dekart koordinata sistemasining *Oz* o`qi atrofida aylanma harakat qilayotgan bo`lsin (86-rasm). Jism ixtiyoriy *M* nuqtasining koordinalarini *x,y,z*; chiziqli tezlikning *Ox,Oy,Oz* o`qlaridagi proyeksiyalarini V_x, V_y, V_z ; burchak tezligi proyeksiyalarini $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ desak, (48.2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

yoki

$$V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}=\vec{i}(\omega_y x-\omega_z y)+\vec{j}(\omega_z x-z\omega_x)+\vec{k}(y\omega_x-x\omega_y)$$

Bu yerda $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$-mos ravishda *Ox, Oy, Oz* o\`qlarning birlik vektorlari.

Natijada $$V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}=\vec{i}(-\omega y)+\vec{j}\,\omega x$$

bundan

$$V_x=-\omega y,\quad V_y=\omega x,\quad V_z=0,\quad V=\omega\sqrt{y^2+x^2} \tag{49.1}$$

Chiziqli tezlanishning urinma va normal tuzuvchilarini quyidagicha yozamiz:

$$\overrightarrow{a_\tau}=a_{\tau x}\vec{i}+a_{\tau y}\vec{j}+a_{\tau z}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_n}=a_{nx}\vec{i}+a_{ny}\vec{j}+a_{nz}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}$$

bunda $a_{\tau x}$, $a_{\tau y}$, $a_{\tau z}$-urinma; a_{nx}, a_{ny}, a_{nz}-normal, ε_x, ε_y, ε_z burchak tezlanishning mos ravishda *Ox, Oy, Oz* o\`qlaridagi proyeksiyalari bo\`lib, $\varepsilon_x=0$, $\varepsilon_y=0$, $\varepsilon_z=\varepsilon$.

Natijada:

$$a_{\tau x}\vec{i}+a_{\tau y}\vec{j}+a_{\tau z}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varepsilon\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$a_{nx}\vec{i}+a_{ny}\vec{j}+a_{nz}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}$$

bu yerdan

$$a_{\tau x}=-\varepsilon y,\qquad a_{\tau y}=-\varepsilon x,\qquad a_{\tau z}=0$$
$$a_{nx}=-\omega V_y,\qquad a_{ny}=\omega V_x,\qquad a_{nz}=0 \tag{49.2}$$

kelib chiqadi.

(49.1) ni (49.2) ga qo\`ysak:

$$a_{\tau x}=-\varepsilon y,\qquad a_{\tau y}=\varepsilon x$$
$$a_{nx}=-\omega^2 x,\qquad a_{ny}=-\omega^2 y \tag{49.3}$$

(49.3) dan foydalanib, chiziqli tezlanish proyeksiyalarini aniqlaymiz:

$$a_x = a_{\tau x} + a_{nx} = -\varepsilon y - \omega^2 x$$
$$a_y = a_{\tau y} + a_{ny} = \varepsilon x - \omega^2 y \qquad (49.4)$$

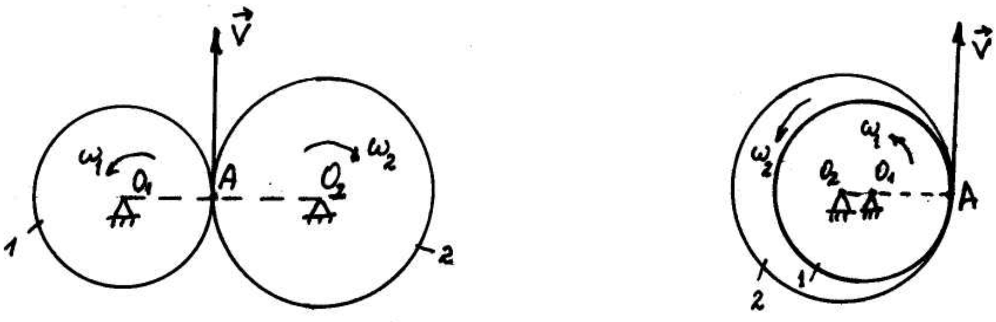
Chiziqli tezlanish miqdori esa

$$a = \sqrt{(-\varepsilon y - \omega^2 x)^2 + (\varepsilon x - \omega^2 y)^2} \qquad (49.5)$$

formuladan foydalanib aniqlanadi.

50 - §. Aylanma harakatlarni bir jismdan ikkinchi jismga uzatish.

Radiuslari r_1 va r_2 bo`lgan tishli g`ildiraklar bir-biri bilan tishlashgan bo`lsin (87-rasm,*a,b*).



a *b*

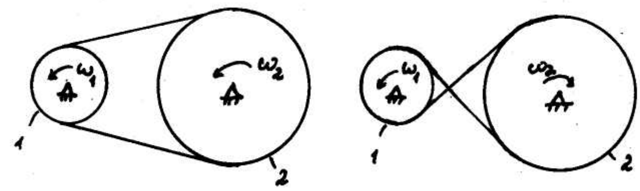
87-rasm

Birinchi g`ildirakni yetakchi, ikkinchisini esa yetaklovchi deb faraz qilaylik. Ikkala g`ildiraklarning tegishib turgan nuqtalarining tezligi miqdor va yo`nalishi jihatidan bir xildir:

$$V_{1A} = V_{2A}$$

yoki

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$



a *b*

88-rasm

bundan,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (50.1)$$

kelib chiqadi.

(50.1) munosabat g`ildiraklar harakati uzatish tasmalari orqali bo`lganda ham o`rinlidir (88-rasm; *a,b*).

(50.1) dan ko`ramizki, g`ildiraklar burchak tezliklarining nisbati radiuslarining nisbatiga teskari proporsional ekan.

G`ildirak tishlari tashqi tomondan tishlashgan (87-rasm,*a*) bo`lsa yoki uzatma tasmalar ayqash bo`lsa (88-rasm,*b*), ular har xil tomonga aylanadi. Agar g`ildiraklar ichki tomondan tishlashgan (87-rasm,*b*) bo`lsa yoki uzatma tasmalar ayqash bo`lmasa (88-rasm,*a*), ular bir tomonga aylanadi.

G`ildiraklar burchak tezliklarining nisbati tishlar soni z_1, z_2 yoki aylanish soni n_1, n_2 orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{r_2}{r_1} \tag{50.2}$$

Yetakchi g`ildirak burchak tezligini yetaklanuvchi g`ildirak burchak tezligiga nisbati uzatish soni deb ataladi:

$$i_{1,2}=\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{50.3}$$

(87-rasm,*b*), (88-rasm,*a*) dagi g`ildiraklar uchun uzatish soni musbat; (87-rasm,*a*), (88-rasm,*b*) dagi g`ildiraklar uchun uzatish soni manfiy bo`ladi.

Tishlashgan g`ildiraklar *n* (bir necha) juft bo`lsa, umumiy uzatish soni har bir juft g`ildirak uzatish sonlarining ko`paytmasiga teng:

$$i_{1,n}=i_{1,2}\bullet i_{2,3}\bullet\ldots\bullet i_{n-1,n}$$

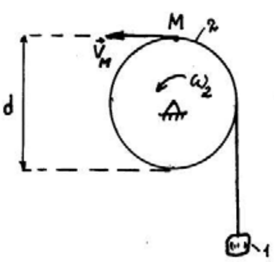
bundan

$$i_{1,n}=(-1)^m\bullet\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{50.4}$$

bu yerda *m*-tashqi tomondan tishlashgan juftlar soni.

51 - §. Masalalar

18-masala. Diametri d_2=0.8 m bo`lgan 2-baraban $\varphi_2=3+\frac{1}{4}t^4$ qonunga ko`ra aylanib, 1-yukni ko`taradi. $t=1$ sekund bo`lganda baraban *M* nuqtasining tezligi aniqlansin (89-rasm).



89-rasm

Yechish. (47.2) yoki (50.1) ga ko`ra:

$$V_m=V_1=\omega_2 r_2$$

yoki

$$V_m=\frac{d_2}{2}\omega_2 \tag{51.1}$$

ω_2 ni aniqlash uchun φ_2 dan vaqt bo`yicha hosila olamiz.

$$\omega_2=\frac{d\varphi_2}{dt}=t^3 \tag{51.2}$$

(51.2) ni (51.1) ga qo`yamiz:

$$V_m=\frac{d_2}{2}\bullet t^3 \qquad (51.3)$$

(51.3) ga son qiymatlarni qo`ysak,

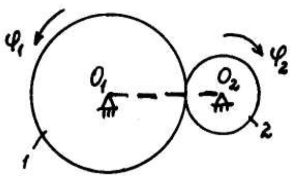
$$V_m=0.4\ m/s$$

kelib chiqadi.

19-masala. 1 va 2-g`ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo`lib, birinchi g`ildirak $\varphi_1=10t$ qonunga muvofiq aylanadi. $T=3.14\ s$ bo`lganda ikkinchi g`ildirak aylanish soni aniqlansin. $r_1=0.6\ m;\ r_2=0.3\ m$ (90-rasm)

Yechish: (46.10) ga ko`ra:

$$\varphi_1=2\pi N_1$$



90-rasm

bundan:

$$N_1=\frac{\varphi_1}{2\pi} \qquad (51.4)$$

(50.2) formulaga asosan: $\frac{N_1}{N_2}=\frac{r_2}{r_1}$

bu yerdan

$$N_2=\frac{N_1 r_1}{r_2} \qquad (51.5)$$

kelib chiqadi.

(51.4) ni (51.5) ga qo`yamiz:

$$N_2=\frac{\varphi_1}{2\pi}\bullet\frac{r_1}{r_2}=\frac{10t}{2\pi}\bullet\frac{r_1}{r_2}$$

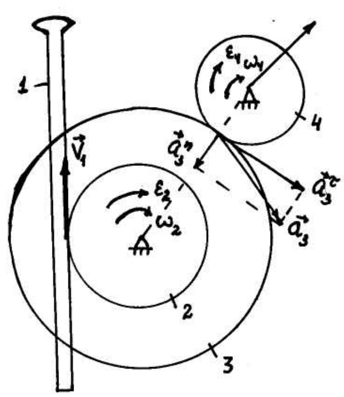
Son qiymatlarni qo`ysak,

$$N_2=\frac{10\cdot 3.14}{2\cdot 3.14}\bullet\frac{0.6}{0.3}$$

yoki $N_1=10$ ayl.

kelib chiqadi.

20-masala. Strelka indikatori mexanizmida harakat o`lchov shtiftining 1-reykasidan 2-g`ildirakkka uzatiladi; 2-g`ildirakning o`qiga tishli 3-g`ildirak o`tkazilgan. 3-g`ildirak esa strelka o`rnatilgan 4-g`ildirak bilan tishlashadi. Agar shtiftning harakati $x=2cos\frac{\pi}{4}t$ (sm) tenglama bilan berilgan bo`lsa va tishli g`ildiraklarning radiuslari $r_2=10\sqrt{2}$ *sm*, $r_3=30\sqrt{2}$ *sm*, $r_4=10\sqrt{2}$ *sm* bo`lsa, strelkaning burchak tezligi hamda burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, $t=1$ sekunddagi 3-g`ildirak to`g`inida yotuvchi nuqta tezligi va tezlanishi aniqlansin (91- rasm).



91-rasm

Yechish: Shtift bilan 2-g`ildirak tishlanishi nuqtalarining chiziqli tezliklari bir-biriga teng:

$$V_1=V_2=\omega_2\, r_2 \tag{51.6}$$

Shtift tezligi esa

$$V_1=\frac{dx}{dt}=-\frac{\pi}{2}\,sin\frac{\pi}{4}\,t\ (sm/s) \tag{51.7}$$

(51.7) ni (51.6) ga qo`ysak:

$$\omega_2=-\frac{\pi}{2r_2}\,sin\frac{\pi}{4}\,t \quad (1/s)$$

Ikkinchi va uchinchi g`ildiraklar bir o`qda joylashganligi uchun ularning burchak tezliklari teng, ya'ni

$$\omega_2=\omega_3=-\frac{\pi}{2r_2}\,sin\,\frac{\pi}{4}\,t \tag{51.8}$$

$t=1$ sekund bo`lganda

$$\omega_2=\omega_3=-0.078\ s^{-1}.$$

Uchinchi va to`rtinchi g`ildiraklarning tishlashgan nuqtalarining chiziqli tezliklari teng ($V_3=V_4$):

$$V_3=\omega_3\, r_3=\omega_4\, r_4 \tag{51.9}$$

bu yerdan

$$\omega_4=\frac{r_3}{r_4}\,\omega_3$$

kelib chiqadi.

4-g`ildirak burchak tezligi strelka burchak tezligiga teng.

Demak,

$$\omega_{st}=\omega_4=\frac{r_3}{r_4}\,\omega_3=-\frac{\pi r_3}{2r_2r_4}\sin\frac{\pi}{4}\,t \tag{51.10}$$

$t=1s$ bo`lganda

$$\omega_{st}=\omega_3=0.2355\ s^{-1}$$

bo`ladi.

3 va 4-g`ildiraklar tashqi tomondan tishlashgan bo`lgani uchun ω_{st} yo`nalishi $\omega_3$ ga qarshi bo`ladi.

Sterlka burchak tezlanishi:

$$\varepsilon_{st}=\frac{d\omega_{st}}{dt}=-\frac{\pi^2 r_3}{8r_2r_4}\cos\frac{\pi}{4}\,t$$

$t=1s$ da

$$\varepsilon_{st}=-0.18\ s^{-2}$$

bo`ladi.

3-g`ildirak to`g`inida yotuvchi nuqta tezligi (51.9) ga ko`ra aniqlanadi.

$$V_3 = -\frac{\pi r_3}{2r_2} \sin\frac{\pi}{4}t$$

t=1s sekund bo`lganda

$$V_3 = -3.3\ sm/s$$

bo`ladi.
(51.8) dan vaqt bo`yicha hosila olsak, 3-g`ildirak burchak tezlanishi kelib chiqadi:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\pi^2}{8r_2}\cos\frac{\pi}{4}t$$

t=1s da $\varepsilon_3 = -0.06\ s^{-2}$

3-g`ildirak to`g`inida yotuvchu nuqtaning urinma, normal va to`la tezlanishi quyidagicha aniqlanadi.

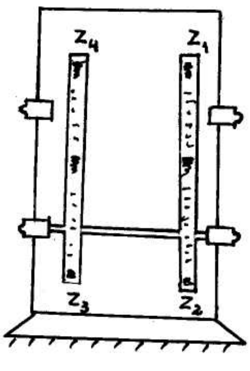
$$a_3^{\tau} = \varepsilon_3 r_3, \quad a_3^{n} = \omega_3^2 r_3, \quad a_3 = \sqrt{(a_3^{\tau})^2 + (a_3^{n})^2} \tag{51.11}$$

(51.11) ga aniqlangan son qiymatlarni qo`ysak,

$$a_3^{\tau} = -2.538\ sm/s^2, \quad a_3^{n} = 0.038\ sm/s^2, \quad a_3 = 2.538\ sm/s^2$$

kelib chiqadi.

21-masala. Aylanma harakatni I-valdan II-valga o`tkazadigan tezlik reduktori qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi to`rtta tishli g`ildirakdan iborat. G`ildiraklar tishlarining soni mos ravishda z_1=12, z_2=72, z_3=10, z_4=90. Mexanizmning uzatish soni topilsin (92-rasm).



92-rasm

Yechish: (50.3) formulaga ko`ra:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}$$

2- va 3- g`ildiraklar bitta valga mahkamlangan bo`lib, tashqi tishlashgan juftlar soni 2 ga teng. Shuning uchun $\omega_2 = \omega_3$ bo`lib, (50.4) quyidagicha bo`ladi:

$$i_{1,4} = (-1)^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

Son qiymatlarini qo`ysak,

$$i_{1,4} = 54$$

kelib chiqadi.

Nazorat savollari

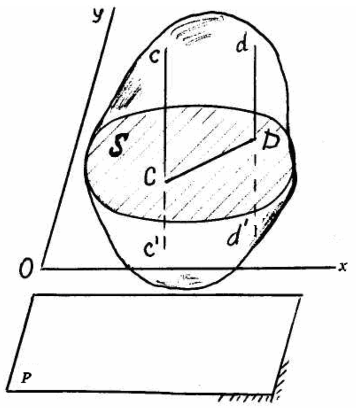
1.Jismning ilgarilma harakati qanday ta’riflanadi?
2.Ilgarilanma harakatdagi qattiq jism nuqtalarining harakati haqidagi teoremani ta’riflang.
3.Qattiq jismning aylanma harakati deb nimaga aytiladi?
4.Qattiq jismning qo`zg’almas o`q atrofidagi aylanma harakat qonuni yoki tenglamasini yozing.
5.Burchak tezligi va burchak tezlanishi nima? Ular o`lchov biriklari qanday?
6.Chiziqli tezlik qanday aniqlanadi?
7.Chiziqli tezlik vektor ifodsi qanday?
8.Chiziqli tezlikning Dekart koordinata o`qlardagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi?
9.Chiziqli tezlanish nima? Uni vektor ifodasini yozing.
10.Chiziqli tezlanish vektorini Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyasi ifodasini yozing.
11.Qo`zg’almas o`q atrofida aylanayotgan qattiq jism nuqtasining urinma va normal (markazga intilma) tezlanishi qanday ifodalanadi?

X bob

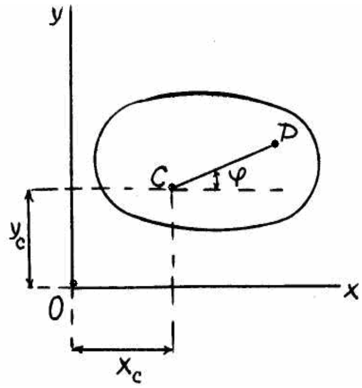
Qattiq jismning tekis parallel harakati

52 - §. Tekis parallel harakat tenglamasi

Qattiq jism nuqtalarining trayektoriyalari biror qo`zg`almas *P* tekislikka parallel bo`lsa, bunday harakat tekis parallel deyiladi (93-rasm).Bunday harakatga yo`lning to`gri chiziqli qismida harakatlanayotgan g`ildirakni, bir tekislikda harakatlanuvchi mashina va mexanizm qismlarini misol qilib keltirish mumkin.



93-rasm



94-rasm

Qattiq jism tekis parallel harakatini o`rganish uchun qo`zg`almas *P* tekislikka parallel qilib *Oxy* koordinata sestemasini o`tkazamiz. U jismdan *P* tekislikka parallel bo`lgan *S* qirqimni ajratadi. *S* qirqimga (ya'ni *P* ga) perpendikulyar bo`lgan *cc`* va *dd`* ustidagi nuqtalar bir xil harakatlanadi.

Shuning uchun bu chiziqlar ustida yotuvchi nuqtalar harakatini o`rganish o`rniga *S* qirqimda yotuvchi *C* (yoki *D*) nuqtalarning harakatini tekshirish kifoya.

Demak, qattiq jism tekis parallel harakatini o`rganish uchun *S* qirqim harakatini bilish kifoya. Keyinchalik, *S* qirqimni tekis shakl deb ataymiz. Tekis shaklning holati unda olingan *CD* kesma holati orqali aniqlanadi (94-rasm). *CD* kesma holatini esa quyidagicha aniqlash mumkin:

$$x_c = x_c(t), \qquad y_c = y_c(t); \qquad \varphi = \varphi(t) \tag{52.1}$$

bu erda *C*-nuqta qutb deb ataladi. φ–esa burilish burchagi bo`lib, u esa *CD* kesmaning *Ox* o`qi bilan hosil qilgan burchagidir.

(52.1) ning birinchi ikkita tenglamasi jism ilgarilama harakatini , uchinchisi esa qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Demak, jismning tekis parallel harakati qutb nuqtaning ilgarilama va qutb nuqtadan rasm tekisligiga perpendikulyar o`tgan o`q atrofidagi aylanma harakatdan iborat.

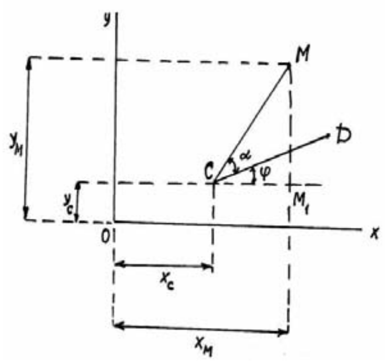
(52.1) tekis parallel harakat qonunini ifodalaydi.

53 - §. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining trayektoriyasi

Qattiq jism S qirqimi ustidagi ixtiyoriy M nuqtaning holati $CM=b$ va $< MCD=\alpha$ orqali aniqlanadi(95-rasm).

Agar (52.1) ma'lum bo`lsa , $M$ nuqta koordinatalari quyidagicha bo`ladi:

$$x_M = x_C + CM_1 \quad y_M = y_c + MM_1 \tag{53.1}$$



95-расм

Δ CMM_1 dan :

$$CM_1 = CM\cos(\alpha+\varphi)$$
$$MM_1 = CM\sin(\alpha+\varphi)$$

yoki

$$CM_1 = b\cos(\alpha+\varphi)$$
$$MM_1 = b\sin(\alpha+\varphi) \tag{53.2}$$

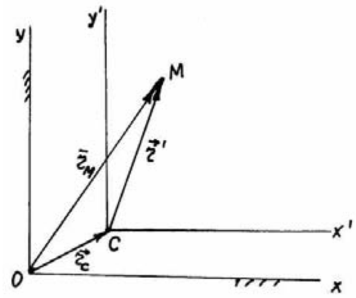
(53.2) ni (53.1) ga qo`ysak:

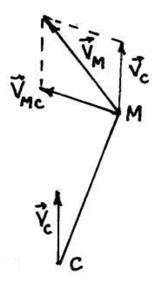
$$x_M = x_C + b\cos(\alpha+\varphi) \ ,$$
$$y_M = y_C + b\sin(\alpha+\varphi) \tag{53.3}$$

(53.3) tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasi trayektoriyasining parametrek tenglamasidir.

54 - §. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezligi

Qattiq jism S qirqimining holatini qo`zg`almas Oxy sestemaga nisbatan tekshiramiz (96-rasm). S qirqim C nuqtasini qutb deb olib, u nuqtadan jism bilan birgalikda ilgarilama harakat qiluvchi $Cx'y'$ koordinata sistemasini olamiz. Bu holda jism ixtiyoriy M nuqtasining holatini vektor usulda quyidagicha aniqlash mumkin:





a *b*

96-rasm

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C + \vec{r}\,' \tag{54.1}$$

(54.1) dan vaqt bo`yicha hosila olsak,

$$\frac{d\,\vec{r}_M}{d\,t} = \frac{d\,\vec{r}_C}{d\,t} + \frac{d\,\vec{r}\,'}{d\,t}$$

yoki

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}'$$

kelib chiqadi.Bu yerda $\vec{V}' = \vec{V}_{MC}$ bo`lib, u M nuqtaning qutb atrofidagi aylanma harakat tezligi.

Natijada :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC} \tag{54.2}$$

Demak, tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezligi qutb nuqtaning tezligi bilan mazkur nuqtaning qutb atrofidagi aylanma harakat chiziqli tezligining geometrik yig`indisiga teng.(96-rasm,*b*)

(48.2) ga ko`ra:

$$\vec{V}_{MC}=\vec{\omega}\,x\,\vec{r}\,'=\vec{\omega}\,x\,\vec{CM}, \qquad \vec{V}_{MC}\perp\vec{V}_C$$

Natijada:

$$\vec{V}_M=\vec{V}_C+\vec{\omega}\,x\,\vec{CM}$$

Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy M nuqtasi tezligining kattaligi quyidagicha aniqlanadi:

$$V_M=\sqrt{V_{Mx}^2+V_{My}^2} \tag{54.3}$$

bu yerda:

$$\begin{aligned} V_{Mx}&=V_{Cx}+V_{(MC)x}, \\ V_{My}&=V_{Cy}+V_{(MC)y} \end{aligned} \tag{54.4}$$

$\vec{V}_C\perp\vec{V}_{MC}$ bo`lsa, $\qquad V_M=\sqrt{V_C^2+V_{MC}^2}$

bo`ladi.

$\vec{V}_C$ bilan $\vec{V}_{MC}$ ma'lum biror burchak hosil qilganda kosinuslar teoremasidan foydalanib, $\vec{V}_M$ kattaligi topiladi .

55 - §. Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasining tezlanishi

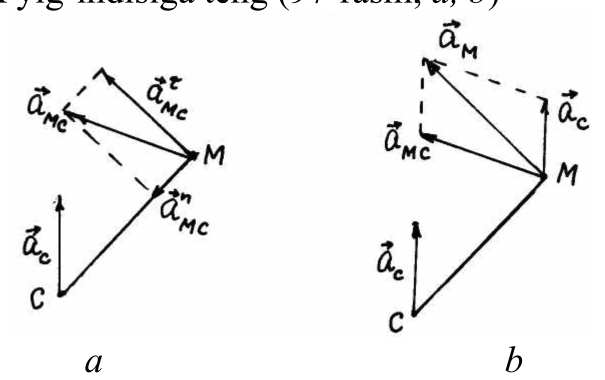
Tekis shakl ixtiyoriy M nuqtasi tezlanishini aniqlash uchun (54.2) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt}=\frac{d\vec{V}_C}{dt}+\frac{d\vec{V}_{MC}}{dt}$$

yoki

$$\vec{a}_M=\vec{a}_C+\vec{a}_{MC} \tag{55.1}$$

(55.1) dan ko`ramizki, $M$ nuqta tezlanish vektori qutb nuqta tezlanish vektori bilan mazkur nuqtaning qutb atrofida aylanishidan hosil bo`ladigan to`la tezlanish vektorining geometrik yig`indisiga teng (97-rasm; *a, b*)



a *b*

97-rasm

(55.1) dagi $\vec{a}_C$ va $\vec{a}_{MC}$ larni urinma va normal tuzuvchilarga ajratib yozsak,

$$\vec{a}_C = \vec{a}_C^{\tau} + \vec{a}_C^{n}$$
$$\vec{a}_{MC} = \vec{a}_{MC}^{\tau} + \vec{a}_{MC}^{n}$$

bo`ladi.
Bu holda (55.1) quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C^{\tau} + \vec{a}_C^{n} + \vec{a}_{MC}^{\tau} + \vec{a}_{MC}^{n} \qquad (55.2)$$

bu yerda:

$$a_C^{\tau} = \frac{dV_C}{dt}, \; a_C^{n} = \frac{V_C^2}{\rho};$$
$$a_{MC}^{\tau} = \varepsilon MC, \; a_{MC}^{n} = \omega^2 MC$$

Jism tekis parallel harakatiga doir masalalarni yechishda (55.2) Dekart koordinata o`qlari Ox, Oy ga proyeksiyalanib, $\vec{a}_M$ kattaligi aniqlanadi:

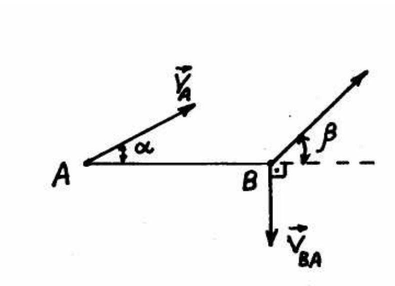
$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} \qquad (55.3)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} a_{Mx} &= a_{Cx}^{\tau} + a_{Cx}^{n} + a_{(MC)x}^{\tau} + a_{(MC)x}^{n} \\ a_{My} &= a_{Cy}^{\tau} + a_{Cy}^{n} + a_{(MC)y}^{\tau} + a_{(MC)y}^{n} \end{aligned} \qquad (55.4)$$

56 - §. Tekis shakl ikki nuqtasi tezliklarining proyeksiyasi haqidagi teorema

Teorema. Tekis shakl ikki nuqtasi tezliklarining mazkur nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq yo`nalishidagi proyeksiyalari teng (98-rasm).



98- rasm

Isbot . *A* nuqtani qutb desak, (54.2) ga ko`ra *B* nuqta tezligi quyidagicha bo`ladi:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (56.1)$$

(56.1) ni *AB* yo`nalishga proyeksiyalaymiz:

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha + V_{BA} \cos 90^0$$

bunda $cos 90° = 0$, bo`lgani uchun

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha \qquad (56.2)$$

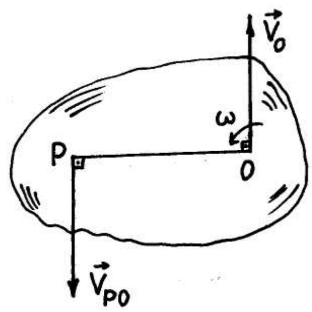
kelib chiqadi.

Shu bilan teorema isbotlandi.

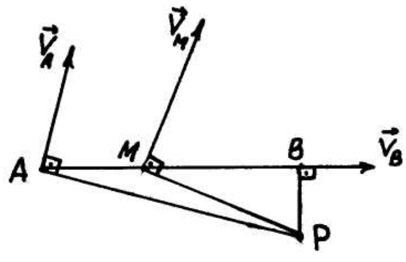
57 - §. Tezliklar oniy markazi (TOM)

Berilgan onda tezligi nolga teng bo`lgan tekis shakl nuqtasi tezliklar oniy markazi deyiladi. Bunday nuqta tekis shaklda mavjud ekanini ko`rsatamiz.

Faraz qilaylik, tekis shakl biror *O* nuqtasi tezligi $\vec{V}_0$ hamda *O* nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω berilgan bo`lsin (99-rasm). *O* nuqtani qutb deb tanlab, mazkur nuqtadan aylanma harakat yo`nalishida $\vec{V}_0$ ga perpendikulyar qilib $\mathrm{OP} = \frac{V_0}{\omega}$ chiziqni o`tkazamiz.



99-rasm



100-rasm

(54.2) ga ko`ra:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO}$$

bu yerda $\vec{V}_{PO} \perp OP$ bo`lib, $\vec{V}_o$ ga qarama–qarshi yo`naladi va $V_{\mathrm{PO}} = \omega \mathrm{OP} = \omega \frac{V_0}{\omega} = V_0$ bo`ladi.

Natijada $\vec{V}_{\mathrm{PO}} = -\vec{V}_0, \vec{V}_{\mathrm{P}} = 0$ kelib chiqadi.

Demak, tekis shakl nuqtalari tezliklar yo`nalishiga o`tkazilgan perpendikulyar chiziqlarning kesishgan nuqtasi TOM bo`ladi (100-rasm).

P nuqtani qutb deb olsak, *A* va *B* nuqtalar tezliklari quyidagicha bo`ladi:

$$\vec{V}_{\mathrm{A}} = \vec{V}_{\mathrm{P}} + \vec{V}_{\mathrm{AP}} \;,\; \vec{V}_{\mathrm{B}} = \vec{V}_{\mathrm{P}} + \vec{V}_{\mathrm{BP}}$$

$\vec{V}_{\mathrm{P}} = 0$ bo`lgani uchun:

$$\vec{V}_{\mathrm{A}} = \vec{V}_{\mathrm{AP}} \quad , \quad V_{\mathrm{A}} = \omega \mathrm{AP} \quad ; \quad \vec{V}_{\mathrm{B}} = \vec{V}_{\mathrm{BP}} \quad , \quad V_{\mathrm{B}} = \omega \mathrm{BP} \qquad (57.1)$$

(57.1) dan:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} \;,\; \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \qquad (57.2)$$

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1.Tekis shakl ikki nuqtasining tezliklar yo`nalishi ma’lum bo`lganda TOM aniqlanadi.

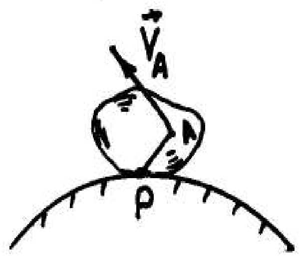
2.Tekis shakl bitta nuqtasi tezligining miqdori va mazkur nuqtadan TOM gacha bo`lgan masofa berilganda tekis shakl burchak tezligi topiladi.

3.Tekis shakl ixtiyoriy nuqtasi tezligini aniqlash uchun uning bitta nuqtasi tezligining miqdori va ikki nuqtasi tezliklarining yo`nalishi ma’lum bo`lishi kerak.

58 - §. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari

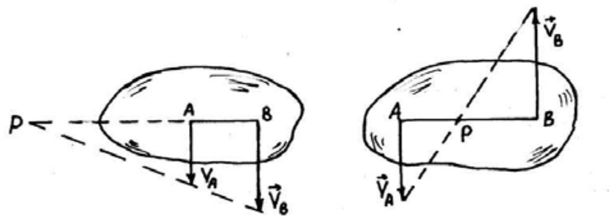
Tekis shaklning TOM quyidagi hollarda osongina aniqlanadi:

1) Agar tekis shakl biror qo`zg`almas sirt ustida sirpanmasdan harakatlansa, tekis shaklning qo`zg`almas sirtga tegishib turgan nuqtasi TOM bo`ladi. (101-rasm)



101-rasm

2) Agar tekis shakl *A* va *B* nuqtalarining tezliklar moduli ma'lum bo`lib, ular o`zaro parallel va *AB* ga perpendikulyar bo`lsa, mazkur tezliklar uchlarini tutashtiruvchi chiziqni *AB* bilan kesishguncha davom ettiramiz. Natijada hosil bo`lgan *P* nuqta TOM bo`ladi.(102-rasm; *a,b)*

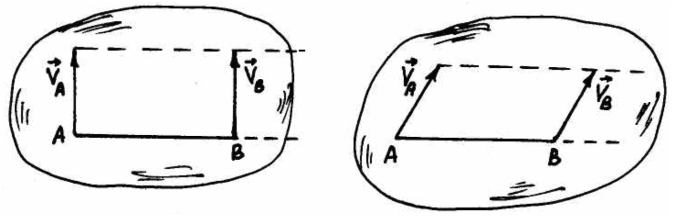


a *b*

102-rasm

3) Agar $\vec{V}_A \| \vec{V}_B, V_A = V_B$ bo`lsa, jism ilgarilama harakatda bo`lib, tezliklar oniy markazi cheksizlikda yotadi ($AP=\infty$) (103-rasm; *a,b*)

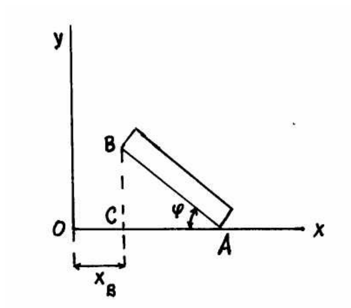
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$$



a *b*

103-rasm

22-masala. AB sterjen $x_A = 2 + t^2$, $y_A = 0$, $\varphi=0,25\pi t$ qonunga ko`ra harakatlanadi. *t=1* sekund bo`lganda *B* nuqta absissasi aniqlansin. *AB=3m* (104-rasm).



Yechish: 104-rasmdan:

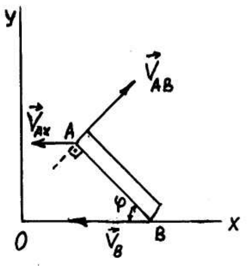
$$x_B = OA - CA, \qquad x_B = x_A - AB\cos\varphi$$

Son qiymatlarini qo`ysak:

$$x_B = 3 - 3\cos 0.25\pi = 3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

104-rasm yoki $x_B = 0{,}879\ m$

23-masala. Uzunligi *AB=2m* bo`lgan sterjen *Oxy* tekisligida $x_B = 4\cos 0{,}5\pi t$ $y_B = 0, \varphi = 0{,}5\pi t$ tenglamalarga muvofiq harakatlanadi. *t=0,245s* bo`lganda *A* nuqta tezlik vektorini *Ox* o`qidagi proyeksiyasi aniqlansin (105-rasm).



105-rasm

Yechish: (54.2) ga ko`ra:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB} \tag{58.1}$$

(58.1) ni *Ox* o`qiga proyeksiyalaymiz:

$$V_{Ax} = V_{Bx} + V_{(AB)x}$$

bu yerda

$$V_{Bx} = \frac{d x_B}{dt} = -2\pi \sin 0{,}5\pi t$$

$$V_{AB} = \omega AB = \frac{d\varphi}{dt} AB = 0{,}5\pi AB, V_{(AB)x} = V_{AB} \sin 0{,}5\pi t$$

t=1 sekundda

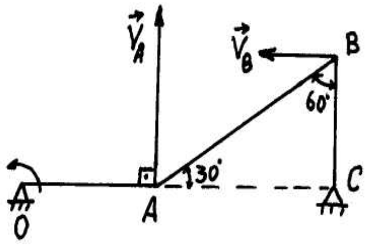
$$V_{Bx} = -2\pi \sin\frac{\pi}{3} t = -\pi\sqrt{2} \quad , \quad V_{(AB)x} = \frac{\pi}{2} 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4}\pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Natijada

$$V_{Ax} = -\pi\sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = -\pi\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{yoki} \qquad V_{Ax} = -2{,}22\ m/s$$

24-masala. 106-rasmda ko`rsatilgan krivoship-shatunli mexanizm B nuqtasining tezligi topilsin. A nuqta tezligi V_A*=1m/s.*

Yechish: Krivoship-shatunli mexanizm *A* nuqtasining tezligi *OA* ga perpendikulyar, *B* nuqtasi tezligi *CB* ga perpendikuyar bo`lib, yo`nalishi 106-rasmda ko`rsatilgandek bo`ladi.



106-rasm

(56.2) ga ko`ra:

$$V_A \cos 60° = V_B \cos 30°$$

bundan

$$V_B = V_A \frac{\cos 60°}{\cos 30°}$$

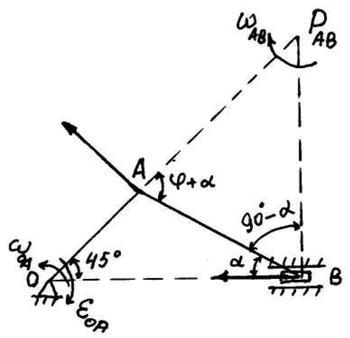
yoki son qiymatlarini qo`ysak,

$$V_B = 0{,}577\ m/s$$

kelib chiqadi.

25-Masala. Krivoship-shatunli *OAB* mexanizmning krivoshipi o`zgarmas burchak tezlanishi bilan aylanadi va uzunligi *AB=60sm* bo`lgan shatunni harakatga keltiradi.

Krivoship uzunligi *OA=20sm*, boshlang`ich burchak tezligi $\omega_{OA} = \pi s^{-1}$, burchak tezlanishi $\varepsilon_{OA} = -\dfrac{\pi}{4} s^{-2}$. *B* polzun gorizontal bo`ylab harakat qiladi.Boshlang`ich



paytda $\varphi_0 = -\frac{5}{4}\pi$ rad; t=2s bo`lganda shatun burchak tezligi va burchak tezlanishi aniqlansin. Shuningdek, *B* polzun hamda *AB* shatun o`rtasidagi *C* nuqta tezlanishi topilsin (107- rasm).

Yechish: Avval *t=2* sekunddagi aylanish burchagi φ ni aniqlaymiz. Krivoship tekis o`zgaruvchan aylanma harakatdan iborat bo`lgani uchun:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{OA} t + \varepsilon_{OA} \frac{t^2}{2}$$

107-rasm

bo`ladi.

$\varphi_{\hat{i}}$ va ω_{OA} ning qiymatlarini qo`ysak,

$$\varphi = -\frac{5}{4}\pi + \pi t - \frac{\pi}{8} t^2$$

kelib chiqadi.

$t_1 = 2$ sekundda $\varphi = 45°$ bo`ladi. *OA* krivoship *A* nuqtasining burchak tezligi

$$\omega_{OA} = \frac{d\varphi}{dt} = \pi - \frac{\pi}{4} t = \frac{\pi}{4}(4-t)\, s^{-1}$$

Natijada:

$$V_A = 5\pi(4-t)$$

$\vec{V}_A - OA$ krivoshipga perpendikulyar, *B* polzun tezligi gorizontal bo`ylab yo`nalgan. $\vec{V}_A$ va $\vec{V}_B$ vektorlarga *A* va *B* nuqtalardan chiqarilgan tik chiziqlarning kesishgan P_{AB} nuqtasi *AB* shatunning oniy aylanishlar markazi bo`ladi.

AB shatun burchak tezligini topamiz:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$$

107-rasmdan:

$$\frac{OA}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\varphi}, \qquad \sin\alpha = \frac{OA \sin\varphi}{l}$$

Son qiymatlarini qo`ysak:

$$\sin\alpha = 0{,}236, \alpha = 13°40'$$

ΔABP_{AB} dan:

$$\frac{AP_{AB}}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{BP_{AB}}{\sin(\varphi + \alpha)} = \frac{AB}{\sin(90° - \varphi)}$$

bu yerdan,

$$AP_{AB} = AB\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}, \qquad BP_{AB} = AB\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi}$$

yoki

$$AP_{AB} = 60\frac{\cos 13°40'}{\cos 45°} = 82{,}68\,sm$$

$$BP_{AB} = 60\frac{\sin 58°40'}{\cos 45°} = 72\,sm$$

kelib chiqadi.

Demak,

$$\omega_{AB} = \frac{5\pi(4-t)}{82{,}68}$$

yoki $t=2c$ bo`lganda

$$\omega_{AB} = 0{,}38 s^{-1}$$

OA krivoship *A* nuqtasining tezlanishi urinma va markazga intilma (normal) tezlanishlarning geometrik yig`indisidan iborat, ya'ni:

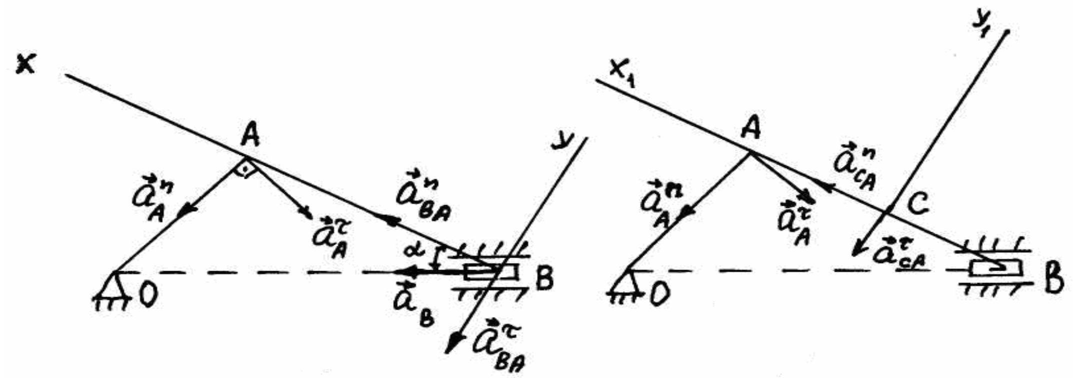
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n}$$

bu yerda $\quad a^{\tau}{}_A = \varepsilon_{OA}\cdot OA\,,\; a^{n}{}_A = \omega^2{}_{OA}\cdot OA$

yoki $\quad a^{\tau}{}_A = 1{,}57\; sm/s^2, \quad a^{n}{}_A = \frac{\pi^2}{16}(4-t^2)\,20$

t=1s bo`lganda $\quad a_A^n = 5\pi^2 = 49{,}3 sm/s^2$

$\vec{a}_A^{\tau}$, $\vec{a}_A^{n}$ vektorlarning yo`nalishi 108-rasmda ko`rsatilganidek bo`ladi.



a *b*

108-rasm

A nuqtani qutb deb, B polzun tezlanishini (55.2) ga ko`ra aniqlaymiz:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$$

bu yerda $\vec{a}_B$ vektor OB bo`ylab yo`naladi.

Yuqoridagi tenglikni *Bx*, *By* o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$a_B\cos\alpha = -a_A^{\tau}\sin(\varphi+\alpha) + a_A^{n}\cos(\varphi+\alpha) + a_{BA}^{n} \qquad (58.2)$$

$$-a_B\sin\alpha = -a_A^{\tau}\cos(\varphi+\alpha) - a_A^{n}\sin(\varphi+\alpha) - a_{BA}^{\tau} \qquad (58.3)$$

$a^{n}{}_{BA} = \omega^2{}_{AB}\,AB$ formuladan foydalanib, *B* nuqta aylanma harakatining normal tezlanishini aniqlaymiz:

$$a^n{}_{BA} = 0/38^2 \cdot 60 = 8{,}664\ sm/s^2$$

(58.2) dan:

$$a_B = \frac{1}{\cos\alpha}\left[a^n_{BA} + a^n_A \cos(\varphi+\alpha) - a^\tau_A \sin(\varphi+\alpha)\right]$$

yoki

$$a_B = 21{,}5\ sm/s^2$$

(58.3)dan,

$$a^\tau_{BA} = a_B \sin\alpha - a^\tau_A \cos(\varphi+\alpha) - a^n_A \sin(\varphi+\alpha)$$

yoki

$$a^\tau{}_{BA} = -45{,}2\ sm/s^2$$

kelib chiqadi.

Demak, $\vec{a}^\tau_{BA}$ vektor 108-rasm , a dagi yo`nalishga teskari ekan.

$a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} AB$ dan foydalanib, AB shatun burchak tezlanishini topamiz:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^\tau{}_{BA}}{AB}$$

yoki

$$\varepsilon_{AB} = \frac{45{,}2}{60} = 0{,}75\, s^{-2}$$

C nuqta tezlanishini aniqlash uchun A nuqtani qutb deb (55.2) ni yozamiz:

$$\vec{a}_C = \vec{a}^\tau_A + \vec{a}^n_A + \vec{a}^n_{CA}$$

Bu tenglikni Cx, Cy o`qlarigi proyeksiyalaymiz:

$$a_{Cx_1} = -a^\tau_A \sin(\varphi+\alpha) + a^n_A \cos(\varphi+\alpha) + a^n_{CA}$$

$$a_{Cy_1} = -a^\tau_A \cos(\varphi+\alpha) - a^n_A \sin(\varphi+\alpha) - a^\tau_{CA}$$

bunda

$$a^\tau_{CA} = \varepsilon_{AB} AC = 0{,}75 \cdot 30 = 2{,}2 sm/s^2$$

$$a^n_{CA} = \omega^2_{AB} AC = 0{,}38^2 \cdot 30 = 4{,}332 sm/s^2$$

Natijada,

$$a_{Cx_1} = 16{,}6\ sm/s^2$$

$$a_{Cy_1} = -50{,}3\ sm/s^2$$

kelib chiqadi.

C nuqta to`la tezlanishi

$$a_C = \sqrt{a^2_{Cx_1} + a^2_{Cy_1}} = \sqrt{(16.6)^2 + (-50.3)^2} = 52.8$$

bo`ladi.

Natijada,

$$\omega_{AB} = 0.38\ 1/s, \qquad \varepsilon_{AB} = 0{,}75\ 1/s,$$

$$a_B = 21{,}5\ sm/s^2, \quad a_c = 52{,}8\ sm/s^2.$$

$$a_{cy_1} = -50{,}3 \ sm/s^2$$

kelib chiqadi.

C nuqta to`la tezlanishi

$$a_c == \sqrt{a_{Cx_1}^2 + a_{Cy_1}^2} = \sqrt{(16.6)^2 + (-50.3)^2} = 52.8$$

bo`ladi.

Javob: $\omega_{AB} = 0.38 \ 1/s$, $\varepsilon_{AB} = 0{,}75 \ 1/s$, $a_B = 21{,}5 \ sm/s^2$, $a_C = 52{,}8 \ sm/s^2$.

Nazorat savollari

1.Qattiq jismning tekis parallek harakatiga ta'rif bering.
2. Tekis parallek harakat qonuni yozing.
3. Tekis parallek harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari qanday aniqlanadi?
4. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik vektori qanday topiladi?
5. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
6. Tezliklar oniy markaziga ta'rif bering.
7. Tezliklar oniy markazini aniqlash usullarini ko`rsating.
8. Tezliklar oniy markazi tushunchasidan foydalanib jism ixtiyoriy nuqtasi tezligi qanday topiladi?
9. Tekis harakatdagi jism ikki nuqtasi tezliklarini proyeksiyasi haqidagi teoremani ta'riflang.
10. Tekis harakatdagi jism ixtiyoriy nuqtasining tezlik miqdori qanday aniqlanadi?
11. Tekis harakatdagi jism nuqtasi tezlanish miqdori qanday topiladi?

XI bob

Moddiy nuqtaning murakkab harakati

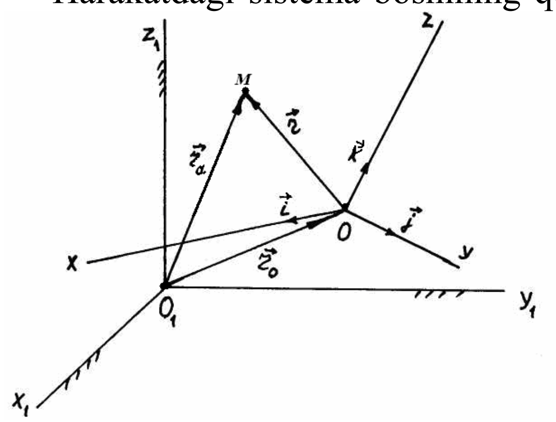
Moddiy nuqtaning nisbiy, ko`chirma va murakkab (absolyut) harakati

59 - §. Murakkab harakat qonuni

Yuqorida bayon etilgan mavzularda moddiy nuqta harakatini bitta qo`zg`almas sistemaga nisbatan tekshirilishini ko`rib o`tgan edik. Mazkur mavzuda moddiy nuqta harakatini ikkita koordinata sistemasiga, ya'ni qo`zg`aluvchi *Oxyz* hamda qo`zg`almas $O_1\,x_1\,y_1\,z_1$ sistemaga nisbatan tekshiramiz (109-rasm).

M nuqtaning qo`zg`aluvchi *Oxyz* koordinata sistemasiga nisbatan harakati nisbiy; qo`zg`aluvchi sistema bilan birgalikdagi harakati ko`chirma ; qo`zg`almas $O_1\,x_1\,y_1\,z_1$ koordinata sistemasiga nisbatan harakati murakkab (absolyut) harakat deb ataladi.

Harakatdagi sistema boshining qo`zg`almas sistemaga nisbatan radius-vektorini $\vec{r}_0$, *M* nuqtaning harakatdagi sistemaga nisbatan holati radius-vektorini $\vec{r}$ va qo`zg`almas sistemaga nisbatan holati radius-vektorini $\vec{r}_a$ bilan belgilaymiz.



109-rasm

109-rasmdan:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_0 + \vec{r} \tag{59.1}$$

(59.1) moddiy nuqta murakkab harakatining qonunini ifodalaydi.

Tezlik va tezlanishlarni bir-biridan farq qilish uchun absolyut,nisbiy, ko`chirma tezlik vektorlarini mos ravishda $\vec{V}_a$ , $\vec{V}_r$ , va $\vec{V}_e$ bilan,shuningdek tezlanish vektorlarini $\vec{a}_a$ , $\vec{a}_r$ va $\vec{a}_e$ bilan belgilanadi. Absolyut tezlanishni tekshirganimizda qo`shimcha (Koriolis) tezlanish $\vec{a}_k$ kelib chiqadi .

60 - §. Murakkab (absolyut) harakatdagi moddiy nuqta tezligi (Tezliklarni qo`shish teoremasi)

Absolyut tezlikni aniqlash uchun (59.1) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{60.1}$$

bu yerda :

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{V}_a , \quad \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{V}_0 \tag{60.2}$$

$\vec{r}$ – radius-vektorini quyidagicha yozib olamiz:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{60.3}$$

Bunda x, y, z radius-vektori $\vec{r}$ ning $Oxyz$ sistemasiga nisbatan koordinatalari; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lar mos ravishda Ox, Oy, Oz o\`qlarining birlik vektorlari.

(60.3) dan vaqt bo\`yicha hosila olsak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \tag{60.4}$$

bu yerda

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \tag{60.5}$$

(60.5) nuqtaning nisbiy tezligini ifodalaydi. Uni hisoblashda $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lar o\`zgarmas deb qaraladi .

Agar qo\`zg\`aluvchi koordinatalar sistemasining berilgan ondagi burchak tezligi $\vec{\omega}_e$ ma’lum bo\`lsa, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – vektorlar uchlarining tezliklari quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k} \tag{60.6}$$

(60.5) va (60.6) ni (60.4) qo\`ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + x\cdot\vec{\omega}_e \times \vec{i} + y\cdot\vec{\omega}_e \times \vec{j} + z\cdot\vec{\omega}_e \times \vec{k}$$

yoki

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \tag{60.7}$$

(60.3) ni (60.7) ga qo\`ysak:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r} \tag{60.8}$$

(60.3) va (60.8) ni e’tiborga olib, (60.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{r}$$

bu yerda

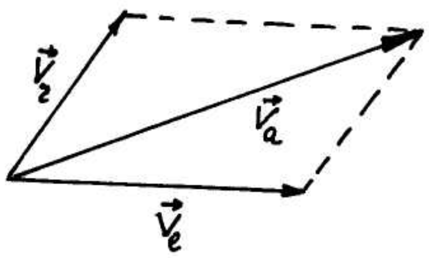
$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{r} \tag{60.9}$$

(60.9) nuqtaning ko\`chirma tezligidan iborat.

Natijada

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \tag{60.10}$$

(60.10) murakkab harakatdagi nuqtaning tezliklarini qo\`shish haqidagi teoremani ifodalaydi: nuqtaning absolyut tezligi mazkur nuqta nisbiy va ko\`chirma tezliklarining geometrik yig\`indisiga teng (110-rasm).



Shunday qilib, nuqtaning nisbiy va ko`chirma tezliklari miqdor va yo`nalishi jihatidan ma'lum bo`lsa, absolyut tezlikning moduli nisbiy va ko`chirma tezliklarga qurilgan parrallelogrammning dioganali bilan ifodalanadi. Absolyut tezlik moduli kosinuslar teoremasidan foydalanib topiladi:

110-rasm

$$V_a = \sqrt{V_r^{\,2} + V_e^{\,2} + 2V_r V_e \cos(\vec{V}_r, \wedge \vec{V}_e)} \qquad (60.11)$$

Agar $\alpha = 90°$ bo`lsa , $V_a = \sqrt{V_r^{\,2} + V_e^{\,2}}$;

$\alpha = 0°$ bo`lsa, $V_a = V_r + V_e$;

$\alpha = 180°$ bo`lsa, $V_a = \left|V_r - V_e\right|$ bo`ladi.

61 - §. Murrakkab (absolyut) harakatdagi nuqta tezlanishi (Tezlanishlarni qo`shish teoremasi)

Absolyut tezlanishni aniqlash uchun (60.10) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_e}{dt} \qquad (61.1)$$

(60.5) dan foydalanib, $\frac{d\vec{V}_r}{dt}$ ni aniqlaymiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} + \dot{x}\,\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\,\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\,\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (61.2)$$

(60.6) ni (61.2) ga qo`ysak :

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}) \qquad (61.3)$$

bu yerda $\vec{a}_r = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$ (61.4)

(61.4) nuqtaning nisbiy tezlanishini ifodalaydi.
(60.5) va (61.4) ni (61.3) ga qo`yamiz:

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}_e x\, \vec{V}_r \qquad (61.5)$$

Bundagi $\vec{\omega}_e x\, \vec{V}_r$ ifoda nisbiy harakatdagi ko`chirma tezlik o`zgarishini xarakterlaydi.

(60.9) dan foydalanib , $\frac{d\vec{V}_e}{dt}$ ni topamiz :

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt}=\frac{d\vec{V}_0}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}_e\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

bu yerda $$\frac{d\vec{V}_0}{dt}=\vec{a}_0, \quad \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}=\vec{\varepsilon}_e \tag{61.6}$$

Natijada: $$\frac{d\vec{V}_e}{dt}=\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}_e\times\vec{r}+\vec{\omega}_e\times\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{61.7}$$

(60.8) ni (61.7) ga qo`ysak:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt}=\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}_e\times\vec{r}+\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r+\vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_e\times\vec{r} \tag{61.8}$$

Bunda $\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}_e\times\vec{r}+\vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_e\times\vec{r}$ ko`chirma tezlikni, $\vec{\omega}_e\times\vec{r}$ esa ko`chirma harakatdagi nisbiy tezlik o`zgarishini xarakterlaydi. Bularni e'tiborga olsak, (61.8) quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt}=\vec{a}_e+\vec{\omega}_e\times\vec{r} \tag{61.9}$$

(61.5) va (61.9) ni (61.1) ga qo`ysak : $\frac{d\vec{V}_a}{dt}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+2\vec{\omega}_e\times\vec{r}$

yoki

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_k \tag{61.10}$$

bu yerda $$2\vec{\omega}_e\times\vec{r}=\vec{a}_k \tag{61.11}$$

(61.11) Koriolis (qo`shimcha) tezlanishni ifodalaydi .

(61.10) tezlanishlarni qo`shish teoremasidan iborat: murakkab harakatdagi nuqta absolyut tezlanishi uning nisbiy, ko`chirma va qo`shimcha tezlanishlarining geometrik yig`indisiga teng.

Absolyut tezlanish modulini hisoblash uchun (61.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r^{\,\tau}+\vec{a}_r^{\,n}+\vec{a}_e^{\,\tau}+\vec{a}_e^{\,n}+\vec{a}_k \tag{61.12}$$

bu yerda

$$a_r^{\tau}=\frac{d\vec{V}_r}{dt},\ a_r^{n}=\frac{V_r^2}{\rho},\ a_e^{\tau}=\varepsilon_e\cdot h,\ a_e^{n}=\omega_e^2\cdot h \tag{61.13}$$

$$a_k=2\omega_e V_r\cdot\sin(\vec{\omega}_e,\wedge\vec{V}_r) \tag{61.14}$$

(61.12) formuladagi $\vec{a}_r^{\,\tau}$ nisbiy harakat trayektoriyasiga urinma, $\vec{a}_r^{\,n}$ esa $\vec{a}_r^{\,\tau}$ ga perpendikulyar bo`lib trayektoriyaning botiq tomoni bo`ylab yo`naladi; $\vec{a}_e^{\,\tau}$ ko`chirma harakat trayetoriyasiga urinma, $\vec{a}_e^{\,n}\perp\vec{a}_e^{\,\tau}$ bo`lib, trayektoriyaning botiq tomoni bo`ylab yo`nalinadi.

Koriolis tezlanish yo`nalishi Jukovskiy qoidasi bo`yicha topiladi:

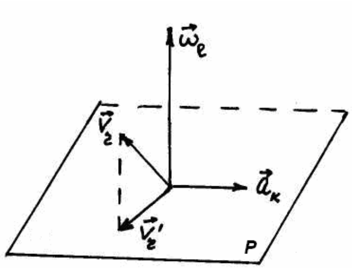
1) Ko`chirma harakat burchak tezligi yo`nalishiga perpendikulyar *P* tekislik o`tkazamiz;

2) Nisbiy harakat tezligi ($\overrightarrow{V_r}$) ni P tekislikka proyeksiyalab uni $\overrightarrow{V_r}'$ deb belgilaymiz;

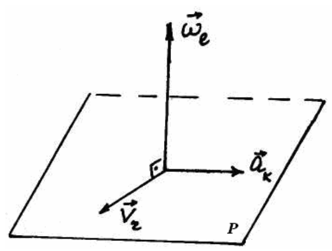
3) $\vec{V}_r'$ ni ko`chirma harakat aylanish tomoniga 90^o ga buramiz.

Natijada hosil bo`lgan yo`nalish Koriolis tezlanish yo`nalashini beradi (111-rasm, *a*).

Agarda $\overrightarrow{\omega_e} \perp \overrightarrow{V_r}$ bo`lsa , $\overrightarrow{a_k}$ yo`nalishini topish uchun $\overrightarrow{V_r}$ ni ko`chirma harakat aylanish tomoniga 90^o ga buramiz (111-rasm, *b*).



a



b

111-rasm

(61.13) va (61.14) formulalarga ko`ra tezlanishlar modullari hamda barcha tezlanishlar yo`nalishi aniqlangandan so`ng, (61.12) tanlab olingan $Ox$, $Oy$, $Oz$ o`qlariga proyeksiyalanadi, ya'ni:

$$a_{ax} = a^{\tau}{}_{rx} + a^{n}{}_{rx} + a^{\tau}{}_{ex} + a^{n}{}_{ex} + a_{kx}$$

$$a_{ay} = a^{\tau}{}_{ry} + a^{n}{}_{ry} + a^{\tau}{}_{ey} + a^{n}{}_{ey} + a_{ky}$$

$$a_{az} = a^{\tau}{}_{rz} + a^{n}{}_{rz} + a^{\tau}{}_{ez} + a^{n}{}_{ez} + a_{kz}$$

bu yerdan $a_a = \sqrt{a^2{}_{ax} + a^2{}_{ay} + a^2{}_{az}}$ kelib chiqadi.

(61.14) dan foydalanib quyidagi xususiy hollarni keltirib chiqaramiz:

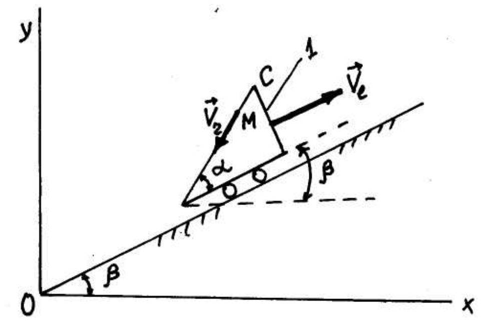
1. Qo`zg`aluvchi koordinata sistemasi ilgarlama harakatda (ω_e=0) bo`lsa $a_k$=0 bo`ladi.

2. Berilgan onda nuqtaning nisbiy tezligi nolga teng bo`lsa $a_k$=0, bo`ladi.

3. Berilgan onda ko`chirma harakat burchak tezligi nisbiy harakat tezligiga parallel $[(\overrightarrow{\omega_e}, \wedge \overrightarrow{V_r})=0, (\overrightarrow{\omega_e}, \wedge \overrightarrow{V_r})=180°]$ bo`lsa a_k=0 bo`ladi.

62 - §. MASALALAR

26-masala. Rasmda ko`rsatilgan 1-jism qiya tekislik bo`ylab V_e=2m/s tezlik bilan tekis harakat qiladi. Mazkur jismga nisbatan *M* nuqta $CM = s_r = 0{,}5t(m)$ qonunga ko`ra harakatlanadi. $t$=2 sekund bo`lganda *M* nuqta absissasi aniqlansin. $t=0$ da $x=0; \alpha=\beta=30^0$ (112-rasm).



112-rasm

Yechish: 112-rasmda ko`rsatilgan 1-jism tekis harakatda bo`lgani uchun: $s_e = V_e \cdot t$. *M* nuqta absissasini aniqlash uchun uning nisbiy va ko`chirma harakatdagi ko`chishlarini *Ox* o`qiga proyeksiyalaymiz:

$$s_{rx} = -CM\cos(\alpha+\beta)$$

$$s_{ex} = \mathrm{V}_e t\cos\beta$$

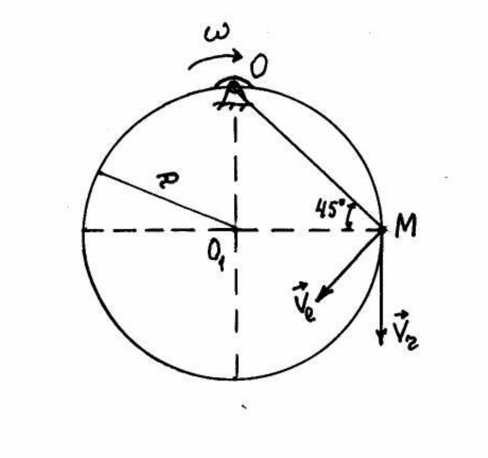
Natijada

$$x = S_{rx} + S_{ex} = -CM\cos(\alpha+\beta) + V_e t\cos\beta$$

Son qiymatlarni qo`ysak x=2,96 m kelib chiqadi.

27-masala. *M* nuqta radiusi *R=0.1m* bo`lgan disk gardishi bo`ylab $OM = S_r = 0.3t(m)$ qonuniga ko`ra harakat qiladi. Diskning *O* o`q atrofidagi aylanishi $\varphi_e = 0.4t$ qonun bilan berilgan. *M* nuqta absolyut tezligi aniqlansin (113- rasm).

Yechish: *M* nuqta nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi *R* bo`lgan aylanadan iborat bo`lib, nisbiy tezligining yo`nalishi 113-rasmdagidek bo`ladi.



113-rasm

Nisbiy tezlik miqdori quyidagicha bo`ladi:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 0{,}3 \quad (m/s)$$

M nuqtaga ko`chirma harakat trayektoriyasi radiusi *OM* bo`lgan aylana bo`lib, tezlik *OM* ga perpendikulyar ravishda harakat aylanishi tomon yo`naladi.

Ko`chirma tezlik moduli:

$$V_e = \omega_e \bullet OM = \frac{d\varphi_e}{dt} \bullet OM$$

bu yerda

$$\frac{d\varphi_e}{dt} = 0{,}4\ (rad/s),\ OM = \sqrt{R^2+R^2} = R\sqrt{2}$$

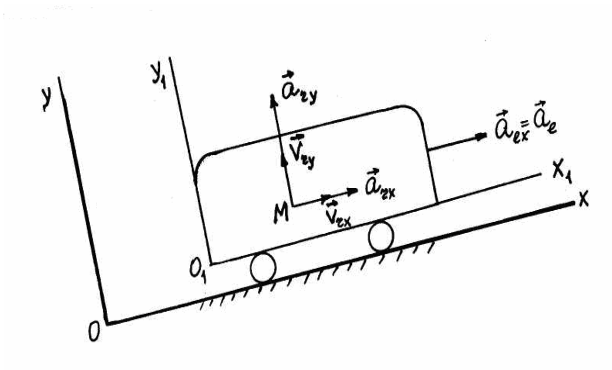
Natijada: $V_e=0.4•0.1•\sqrt{2}=0.0564(m/s)$

ΔOMO_1 tengyonli bo`lgani uchun $OM,\hat{}OM_1=45^0$ bo`lib , $\overrightarrow{V_r}\hat{}\overrightarrow{V_e}=45^0$.

(60.11) ga ko`ra:

$$V_a=\sqrt{V_r^2+V_e^2+2V_rV_e\cos 45^\circ}$$

Son qiymatlarni qo`ysak $V_a=0.342(m/s)$ kelib chiqadi.



114-rasm

28-masala. Aravacha qiya tekislik bo`ylab $a_e=2m/s^2$ ($\overrightarrow{a_e}\parallel Ox$) tezlanish bilan harakat qiladi. Aravachadagi M nuqta $x_1=3t^2$, $y_1=4t^2$ qonunga muvofiq harakatlanadi ($Ox_1||Ox$). M nuqtaning absolyut tezlanishi topilsin (114-rasm). (x_1, y_1–metrlar, t–sekundlar hisobida).

Yechish: M nuqta nisbiy tezligini aniqlaymiz. Masala shartiga ko`ra:

$$x_r=x_1=3t^2,\qquad y_r=y_1=4t^2$$

bu yerda:

$$V_{rx}=\dot{x}_1=6t,\qquad V_{ry}=\dot{y}_1=8t$$

Nisbiy harakat tezlanishining Ox , Oy o`qlaridagi proyeksiyalari:

$$a_{rx}=\frac{dV_{rx}}{dt}=6\ m/s^2,\qquad a_{ry}=\frac{dV_{ry}}{dt}=8\ m/s^2 \tag{62.1}$$

Ko`chirma harakat tezlanishining $Ox$ , $Oy$ o`qlaridagi proyeksiyalari :

$$a_{ex}=2\ m/s^2,\qquad a_{ey}=0 \tag{62.2}$$

Ko`chirma harakat ilgarilama harakatdan iborat bo`lgani uchun $a_k=0$ bo`ladi. Shuning uchun (61.10) quyidagicha yoziladi:

$$\overrightarrow{a_a}=\overrightarrow{a_r}+\overrightarrow{a_e} \tag{62.3}$$

(62.3) ni Ox , Oy o`qlariga proyeksiyalasak :

$$a_{ax}=a_{rx}+a_{ex},\qquad a_{ay}=a_{ry}+a_{ey} \tag{62.4}$$

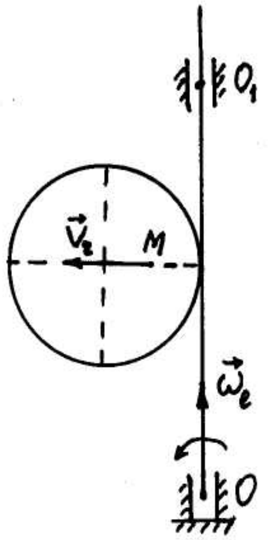
(62.1) va (62.2) ni (62.4) ga qo`ysak :

$$a_{ax}=6+2=8\ m/s^2,\qquad a_{ay}=8\ m/s^2$$

Demak:

$$a_a=8\sqrt{2}=11,28\,m/s^2$$

29–masala. Vertikal OO_1 o`q atrofida $\omega_e$=2$t$ (1/s) burchak tezligi bilan aylanayotgan disk diametri bo`ylab M nuqta V_r= 4t (m/s) tezlik bilan harakatlanadi. t=2 sekund bo`lganda M nuqta Koriolis tezlanishi aniqlansin (115-rasm).



115-rasm

Yechish: Bizga ma’lumki Koriolis tezlanish (61.14) formuladan aniqlanar edi, ya’ni:

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin(\overrightarrow{\omega_e}, \wedge \overrightarrow{V_r})$$

Masala shartiga ko`ra $\overrightarrow{\omega_e} \perp \overrightarrow{V_r}$ ,bo`lgani uchun

$$a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ \qquad (30.5)$$

bo`ladi. Berilganlarni (30.5) ga qo`ysak:

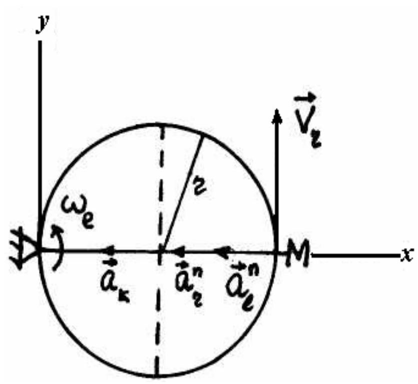
$$a_k = 2 \bullet 2t \bullet 4t = 16t^2$$

kelib chiqadi. t=2 sekund bo`lganda

$$a_k = 16 \bullet 4 = 64 \ m/s^2$$

bo`ladi.

30-masala.Radiusi r=0.5 $м$ bo`lgan halqa $\omega_e$=4 (*rad/s*) o`zgarmas burchak tezligi bilan rasm tekisligida aylanadi. Halqa bo`ylab $M$ nuqta $V_r$=2($м/c$) o`zgarmas tezlik bilan harakat qiladi. M nuqtaning 116-rasmda ko`rsatilgan holati uchun absolyut tezlanishi topilsin (116-rasm).



116-rasm

Yechish: M nuqta nisbiy harakat trayektoriyasi radiusi r bo`lgan aylanadan iborat bo`lib, o`zgarmas tezlik bilan harakat qiladi (V_r=const). Shu sababli:

$$a_r^\tau = 0, \qquad a_r^n = \frac{V_r^2}{r}$$

yoki

$$a_r^\tau = 0, \qquad a_r^n = \frac{2}{0{,}5} = 4 m/s \qquad (62.6)$$

M nuqta ko`chirma harakat trayektoriyasi radiusi $2r$ bo`lgan aylana bo`lib ω_e=const.

Shuning uchun

$$a_e^\tau = 0, \ a_e^n = \omega_e^2 \bullet OM$$

yoki $\qquad a_e^\tau = 0, \qquad a_e^n = 16{,}2 \bullet 0{,}5 = 16 \ m/s^2$

Halqa rasm tekisligida aylangani sababli $\overrightarrow{V_r} \perp \overrightarrow{\omega_e}$ bo`lib,

$$a_k = 2\omega_e V_r \bullet \sin 90^\circ$$

yoki $$a_k = 16\ m/s^2$$

bo`ladi.

Rasmga $\overrightarrow{a_r^n}$, $\overrightarrow{a_e^n}$, $\overrightarrow{a_k}$ yo`nalishlarini qo`ysak, ular *Ox* o`qi bo`ylab joylashadi.

Demak, *M* nuqta absolyut tezlanishining moduli quyidagicha bo`ladi:

$$a_a = a_r^n + a_e^n + a_k$$

yoki $$a_a = 40\ m/s^2.$$

Nazorat savollari

1.Moddiy nuqtaning qanday harakati nisbiy harakat deyiladi?
2. Moddiy nuqtaning qanday harakati ko`chirma harakat deyiladi?
3. Moddiy nuqtaning murakkab harakat qonunini yozing.
4. Moddiy nuqtaning absolyut tezligi qanday aniqlanadi?
5. Moddiy nuqtaning absolyut tezlanishi qanday aniqlanadi?
6.Koriolis (qo`shimcha) tezlanish nima?
7. Nuqtaning nisbiy va ko`chirma tezlanishi nima?
8.Tezliklarni qo`shish teoremasini ta'riflang.
9. Tezlanishlarni qo`shish teoremasini ta'riflang.
10.Moddiy nuqtaning ko`chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo`lganda absolyut tezlanishi qanday topiladi?
11.Qanday holda Koriolis tezlanish nolga teng bo`ladi?
12. Koriolis tezlanish yo`nalishi qanday aniqlanadi?

UCHINCHI BO`LIM

DINAMIKA

XII bob

Dinamikaning asosiy tushunchalari.

Moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi

63 - §. Dinamika qonunlari

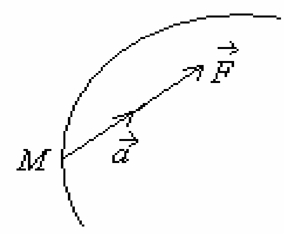
1.Inersiya qonuni. Tashqi muhitdan ajratilgan moddiy nuqta tashqaridan kuch ta'sir etmaguncha o`zining tinch holatini yoki to`g`ri chiziqli va teng o`lchovli harakatini saqlashga intiladi.

Shuni ta'kidlab o`tish kerakki,bitta kuch ta'sirida bo`lgan moddiy nuqta (jism) bir xil vaqt orasida turli masofaga siljiydi va tezligi har xil bo`ladi.Demak,moddiy nuqtalar bitta kuch ta'sirida o`zlarining tezligini tez yoki sekin o`zgartiradi.Bu xususiyat moddiy nuqtaning inertligi deyiladi. Moddiy nuqtaning inertlik o`lchovi fizik miqdor bo`lib,u (m) massa deb ataladi.

To`g`ri chiziqli va teng o`lchovli harakat moddiy nuqtaning inersiyasi bo`yicha harakatidan iborat.Bu hodisani ta'riflovchi qonun dinamikaning birinchi qonuni deb yuritiladi.

Dinamikaning birinchi qonunini qanoatlantiradigan sanoq sistemasi inersial sistema deyiladi.Inersiya qonuni bajarilmaydigan sanoq sistema inersial bo`lmagan sistema deb ataladi.

Markazi Quyosh bilan ustma-ust tushuvchi,o`qlari esa mos ravishda tanlab olingan yulduzlarga tomon yo`nalgan sanoq sistemaning inersial ekanligi tajribada aniqlangan.Ko`pincha,texnik masalalarni yechishda,Yer bilan mahkam bog`langan sistema inersial sanoq sistemasi deb qaraladi. Bu holda Yerning o`z o`qi atrofidagi aylanma harakati hamda Quyosh va yulduzlarga nisbatan harakati hisobga olinmaydi.



2. Dinamikaning asosiy qonuni.Moddiy nuqtaning harakatlantiruvchi kuch ta'siridan olgan tezlanishi shu kuch yo`nalishida bo`lib,miqdori mazkur kuch miqdoriga proporsionaldir (117-rasm).Bu qonunning matematik ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{63.1}$$

117-rasm

bu yerda $\vec{F}$ - harakatlantiruvchi kuch, m -nuqtaning massasi, $\vec{a}$ -nuqta tezlanishi.

(63.1) vektor tenglama moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi deyiladi.(63.1) dan ko`ramizki,muayyan kuch ta'sirida moddiy nuqtaning oladigan tezlanishi faqat kuch kattaligigagina bog`liq bo`lmay,balki nuqta massasiga ham bog`liq.

Agar moddiy nuqta faqat o`zining $G$ og`irlik kuchi ta'sirida Yerga erkin tushsa, $F=G$,$a=g$ bo`lib, (63.1) ifoda

$$G=mg \tag{63.2}$$

ko`rinishni oladi.Demak,moddiy nuqtaning og`irlik kuchi bilan massasi o`zaro (63.2) tenglik bilan bog`langan ekan.

Agar moddiy nuqtaning og`irlik kuchi aniq bo`lsa,uning massasini (63.2) ga ko`ra

$$m=\frac{G}{g} \tag{63.3}$$

formuladan topish mumkin.

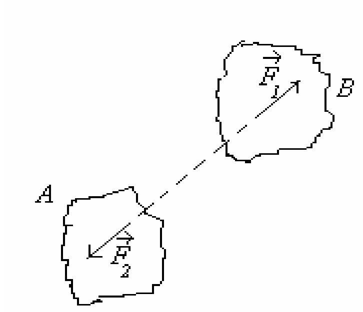
Xalqaro birliklar sistemasi (SI) da massa birligi uchun *kg*, vaqt birligi qilib sekund (*1s*), uzunlik uchun metr (*1m*) qabul qilingan.

Binobarin,kuch birligi quyidagicha bo`ladi:

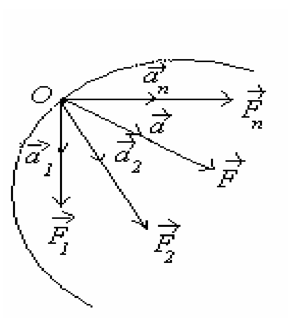
$$[F]=[m]\cdot[a]=kg\cdot\frac{m}{s^2}=N(Nyuton)$$

Demak,massasi *1kg* bo`lgan moddiy nuqtaga $1m/s^2$ tezlanish bera oladigan kuch Nyuton deb ataladi.

3. Ta'sir va aks ta'sir qonuni. Har bir ta'sir o`ziga teng va qarama-qarshi yo`nalishdagi aks ta'sirni vujudga keltiradi.Boshqacha aytganda,ikkita jismning bir-biriga ta'sirilari o`zaro teng va qarama-qarshi yo`nalgan (118-rasm).A jismning B jismga ko`rsatgan ta'siri $\vec{F}_1$ bo`lsa,uchinchi qonunga ko`ra, $B$ ning $A$ ga ko`rsatgan ta'siri $\vec{F}_2=-\vec{F}_1$ bo`ladi.Bu qonundan jismlar muvozanatda degan xulosa kelib chiqmaydi,chunki kuchlar har xil jismlarga qoyilgan.Mazkur qonun ikkita jismning o`zaro ta'sirini xarakterlaydi.



118-rasm



119-rasm

4. Kuchlarning erkinlik qonuni. Moddiy nuqtaning bir qancha kuch teng ta'sir etuvchisi tufayli olgan tezlanishi har qaysi kuchning alohuida ta'siridan hosil bo`lgan tezlanishlarining geometrik yig`indisiga teng,(119-rasm) ya'ni:

$$\vec{a}=\sum_{1}^{n}\vec{a}_v \tag{63.4}$$

(63.4) tenglikni ikki tomonini m ga ko`paytiramiz:

$$m\vec{a}=\sum m\vec{a}_v$$

Demak,
$$m\vec{a}=\sum\vec{F}_v \tag{63.5}$$

(63.5) ifoda bir qancha kuch ta'siridagi moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasidir.

(63.5) ifodani (63.1) bilan taqqoslashdan ko`ramizki,moddiy nuqtaga bir necha kuch qo`yilgan bo`lsa,(63.1) dagi $\vec{F}$ ni shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi deb qarash kerak.

64 - §. Erkin va erksiz moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi

Dinamika masalalarini ikkita asosiy turga ajratish mumkin. Bu masalalar erkin moddiy nuqta uchun quyidagicha:

Dinamikaning birinchi asosiy masalasida moddiy nuqta massasi va uning harakat qonuni berilgan bo`lib,harakatlantiruvchi kuchni topish so`raladi.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi esa moddiy nuqta massasi va unga ta'sir etuvchi kuch ma'lum bo`lganda,shu kuch ta'siridan hosil bo`ladigan kinematik elementlarni topishdan iborat.

Texnikada erksiz (bog`lanishdagi) moddiy nuqta harakatini tekshirishga doir ko`plab masalalarni yechishga to`g`ri keladi. Bunday hollarda nuqtaga qo`yilgan bog`lanish uni qo`zg`almas sirt yoki chiziq ustida harakat qilishga majbur etadi.

Erksiz moddiy nuqta harakatiga doir masalalarni yechishda mazkur nuqta bog`lanishdan qutqarilib,qo`yilgan bog`lanish reaksiya kuchi bilan almashtiriladi.

Natijada moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

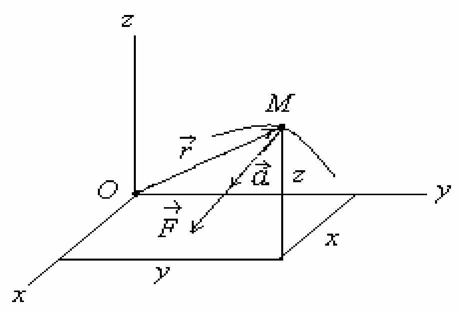
$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \qquad (64.1)$$

bunda $\vec{N}$ - bog`lanish reaksiya kuchi.

Demak, *erksiz moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasida* moddiy nuqta massasi va uning harakat qonuni hamda mazkur nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch ma'lum bo`lganda reaksiya kuchi aniqlanadi; ikkinchi masalada esa moddiy nuqta massasi va unga ta'sir etuvchi kuch ma'lum bo`lganda moddiy nuqtaning harakat qonuni bilan reaksiya kuchini aniqlash kerak.

65 - §. Erkin va erksiz moddiy nuqta harakatining differsial tenglamalari

Erkin moddiy nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida harakatlanayotgan bo`lsin (120-rasm).Bu holda dinamikaning asosiy tenglamasi (63.1) ko`rinishda yozilar edi.(63.1) tenglamadagi $\vec{a}$ tezlanish vektorini $\vec{r}$ radius-vektori orqali ifodalaymiz:



$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (65.1)$$

(65.1) ni (63.1) ga qo`ysak:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (65.2)$$

kelib chiqadi.

(65.2) tenglama erkin moddiy nuqta harakati d*iffensial tenglamasining vektor ifodasidir.*

120-rasm

(65.2) ning Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (65.3)$$

bu ifodalarda F_x, F_y, F_z bilan $\vec{F}$ kuchning koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari belgilangan;*x,y,z* esa $\vec{r}$ radius-vektorning proyeksiyalari,ya'ni M nuqtaning koordinatalaridir.

(65.3) tenglamalar egri chiziqli harakatdagi moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ko`rinishi deyiladi.

Agar moddiy nuqtaning harakat yo`nalishi bilan kuch yo`nalishi bir to`g`ri chiziq bo`yicha bo`lsa,nuqta harakati to`g`ri chiziqli bo`ladi.Bu holda nuqtaning harakat yo`nalishi uchun Ox o`qni olsak,uning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (65.4)$$

Agar moddiy nuqta harakati tekislikda bo`lsa, (65.3) tenglamalarning ikkitasi yoziladi.

(63.1) ning tabiiy koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi (121-rasm):

$$F_\tau = ma_\tau, F_n = ma_n, F_b = ma_b \qquad (65.5)$$

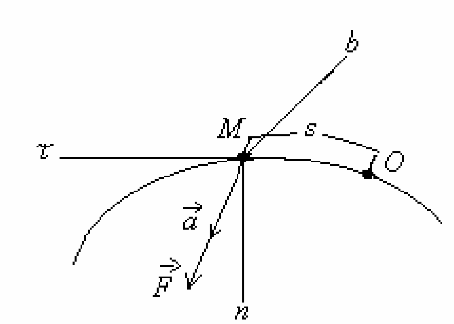
Kinematikadan ma'lumki:

$$a_\tau = dV/dt,\ a_n = V^2/\rho,\ a_b = 0 \qquad (65.6)$$

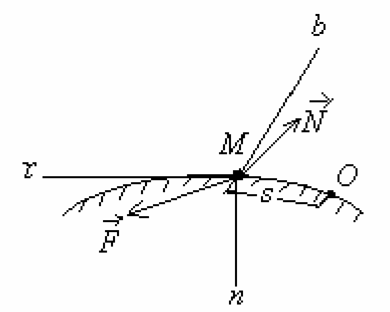
(65.6) ni (65.5) ga qo`ysak,

$$F_\tau = mdV/dt,\ F_n = mV^2/\rho,\ F_b = 0 \qquad (65.7)$$

kelib chiqadi.



121-rasm



122-rasm

(65.7) tenglamalar moddiy nuqta harakati differsial tenglamalarining tabiiy usulda ifodalanishidir.

Aytaylik,moddiy nuqta qo`zg`almas silliq chiziq ustida harakatlanayotgan bo`lsin (122-rasm).

Sanoq sistemasi boshini O, M nuqtaning egri chiziqli koordinatasini $\breve{OM} = s$ deb qabul qilamiz. Qo`zg`almas silliq chiziqning nuqtaga ta'siri $\vec{N}$ reaksiya kuchi bilan almashtirilib,nuqtani bog`lanishdan qutqaramiz.

Natijada erksiz moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}$$

yoki

$$\vec{F} + \vec{N} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (65.8)$$

Bu tenglamani Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,erksiz moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarining koordinata usuldagi ifodasi kelib chiqadi:

$$F_x + N_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, F_y + N_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, F_z + N_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (65.9)$$

(65.8) ni tabiiy koordinata o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$F_\tau + N_\tau = m\frac{dV}{dt}, F_n + N_n = m\frac{V^2}{\rho}, F_b + N_b = 0$$

Qo`zg`almas chiziq silliq bo`lganligi uchun $\vec{N}$ ning urinmadagi proyeksiyasi nolga teng: $N_\tau = 0.$

Demak,

$$F_\tau = m\frac{dV}{dt}, F_n + N_n = m\frac{V^2}{\rho}, F_b + N_b = 0 \qquad (65.10)$$

(65.10) moddiy nuqtaning qo`zg`almas silliq chiziq ustidagi harakati differensial tenglamasini tabiiy usulda ifodalashdan iborat.

Xususiy holda $\vec{F}$ kuch urinma tekislikda yotsa, F_b =0 bo`lib, normal reaksiya trayektoriyaning bosh normali bilan bir yo`nalishda bo`ladi.

66 - §. Moddiy nuqta dinamikasining birinchi asosiy masalasini yechish

Moddiy nuqtaning harakat qonuni ma'lum bo`lsa, dinamikaning birinchi masalasini yechish juda oson.Bu masala quyidagi tartibda yechiladi:

1.Agar masala shartida sanoq sistemasi berilmagan bo`lsa,u tanlab olinadi.

2.Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.

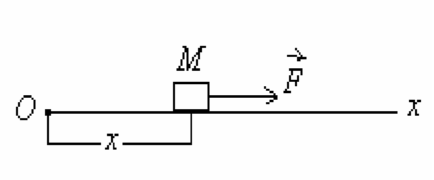
3.Agar nuqta bog`lanishda bo`lsa,u bog`lanishdan qutqariladi va bog`lanish reaksiya kuchlari rasmda ko`rsatiladi.

4.Tanlab olingan sanoq sistemasida moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari tuziladi.

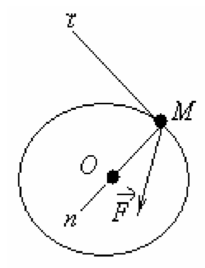
5.Berilgan harakat qonunidan foydalanib moddiy nuqta tezlanishining tanlab olingan sistemadagi proyeksiyalari aniqlanadi.

6.Tezlanishning topilgan proyeksiyalari differensial tenglamalarga qo`yilib noma'lum kuch aniqlanadi.

31-masala. Massasi m=2kg bo`lgan $M$ jism $x = 10\sin 2t$ *(m)* qonunga ko`ra $\vec{F}$ kuch ta'sirida to`g`ri chiziqli harakat qilmoqda. $\vec{F}$ kuch modulining eng katta qiymati aniqlansin (123-rasm).



123-rasm



124-rasm

Yechish.Masala shartiga ko`ra $M$ jism to`g`ri chiziqli harakat qiladi. Jismni moddiy nuqta deb qarab,sanoq sistemasi uchun $Ox$ o`qni olamiz (123-rasm).M jismga faqat $\vec{F}$ kuchi ta'sir qiladi.

M jism harakatining differensial tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad (66.1)$$

Jismning harakat qonunidan vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosila hisoblaymiz:

$$\frac{dx}{dt} = 20\cos 2t, \frac{d^2x}{dt^2} = -40\sin 2t \qquad (66.2)$$

(66.2) ni (66.1) ga qo`ysak:

$$F_x = -40m\sin 2t$$

bu yerda F_x kuch miqdori $sin2t=-1$ bo`lganda eng katta qiymatga erishadi.

Demak,

$$F_x = 80N$$

bo`ladi.

3**2-masala**.Massasi $m=1kg$ bo`lgan moddiy nuqta radiusi $r=2m$ bo`lgan aylana bo`ylab $V=2t$ $(m/s)$ tezlik bilan harakat qiladi. $t=1$ sekund bo`lganda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning teng ta'sir etuvchisi topilsin (124-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 124-rasmdagidek tanlaymiz.Moddiy nuqtaning harakati tabiiy usulda berilgani uchun harakat differensial tenglamalar quyidagicha yoziladi:

$$F_\tau = m\frac{dV}{dt}, F_n = m\frac{V^2}{\rho} \qquad (66.3)$$

Moddiy nuqtaning tezligi o`zgarish qonunidan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{dV}{dt} = 2m/s^2$$

Son qiymatlarni (66.3) ga qo`ysak,

$$F_\tau = 2N, F_n = 2N, F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}83N$$

kelib chiqadi.

3**3-masala.**Gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi qiya tekislikda M massaga ega bo`lgan suvli bak turibdi. Bakdagi suv sirti qiya tekislikka parallel bo`lishi uchun bakni qiya tekislikka parallel bo`lgan qanday $\vec{F}$ kuch bilan harakatga keltirish kerak? Bakning tagi bilan qiya tekislik o`rtasidagi ishqalanish koeffitsiyenti f ga teng (125-rasm).

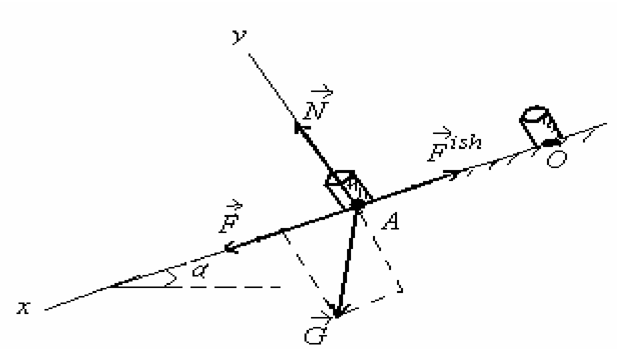
Yechish. Bak harakatining yo`nalishi qiya tekislik bo`ylab sodir bo`lgani sababli, $Ox$ o`qni 125-rasmdagidek tanlaymiz.Qo`yilgan masalani hal etish uchun avval suyuqlik zarrachasi harakatini tekshiramiz.

Zarrachaga ta'sir qiluvchi kuch og`irlik kuchi $\vec{g}\Delta m$ va suyuqlik sirtiga perpendikulyar bo`lgan $\Delta\vec{R}$ bosim kuchidan iborat.Suyuqlik sirti qiya tekislikka parallel.Suyuqlik zarrachasi uchun dinamikaning asosiy tenglamasi

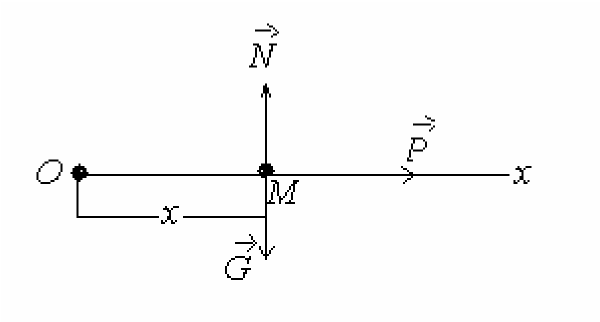
$$a_S\Delta m = g\sin\alpha \cdot \Delta m$$

bo`ladi.Bu yerda suyuqlik zarrachasining massasi $\Delta m$, tezlanishi esa $a_S$.Suvli bak tezlanishi $a_x$ ham $a_S$ tezlanishga ega bo`lishi kerak.Demak:

$$a_x = a_S = g\sin\alpha \qquad (66.4)$$



125-rasm



126-rasm

Endi suvli bakni A moddiy nuqta deb qaraymiz.Bakka og`irlik kuchi $\vec{G}$, tortish kuchi $\vec{F}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}^{ish}$ hamda qiya tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$ ta'sir qiladi.Bak harakati to`g`ri chiziqli bo`lgani uchun dinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$Ma_x = \sum F_{vx} \qquad (66.5)$$

bunda M – suvli bak massasi, a_x uning tezlanishi.

125-rasmdan :

$$\sum F_{vx} = F - F^{ish} + G\sin\alpha \quad \text{bu yerda } F^{ish} = fN.$$

N ni topish uchun moddiy nuqta harakati differensial tenglamasining Oy o`qidagi proyeksiyasini tuzamiz:

$$Ma_y = N - G\cos\alpha$$

$a_y = 0$ bo`lgani uchun $N - G\cos\alpha = 0; N = G\cos\alpha.$ Shunday qilib, $F^{ish} = fG\cos\alpha$ va

$$\sum F_{vx} = F - fG\cos\alpha + G\sin\alpha \qquad (66.6)$$

(66.4) va (66.6) ni (66.5) ga qo`yamiz:

$$Mg\sin\alpha = F - fG\cos\alpha + G\sin\alpha \qquad (66.7)$$

G=Mg bo`lgani uchun (66.7) quyidagi ko`rinishga keladi:

$$Mg\sin\alpha = F - fMg\cos\alpha + Mg\sin\alpha$$

Bu tenglikdan

$$F = fMg\cos\alpha$$

kelib chiqadi.

3**4-masala**. Bug`doy o`ruvchi kombaynning pichog`i $x = 0{,}05\cos 10\pi t$ qonunga ko`ra to`g`ri chiziqli harakat qiladi.(t-sekundlar,x-metrlar hisobida). Pichoqni harakatga keltiruvchi $\vec{F}$ kuch aniqlansin.Pichoq og`irligi *G=100N* . Erkin tushish tezlanishi $g = 10\,m/s^2$ deb qabul qilinsin.

Yechish. Masala shartiga ko`ra pichoq to`g`ri chiziqli harakat qiladi.Pichoqni moddiy nuqta deb qarab, sanoq sistemasi uchun $Ox$ o`qni olamiz (126-rasm).

Pichoqning boshlang`ich holati $O$ nuqtada bo`lsin. Pichoqqa og`irlik kuchi $\vec{G}$, harakatga keltiruvchi kuch $\vec{F}$ hamda reaksiya kuchi $\vec{N}$ ta'sir qiladi.

Pichoq harakatining differensial tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F \tag{66.8}$$

Pichoqning harakat qonunidan vaqt bo`yicha hosila hisoblaymiz:

$$\frac{dx}{dt}=-0{,}05\cdot 10\pi\sin 10\pi t=-0{,}5\pi\sin 10\pi t,\ \frac{d^2x}{dt^2}=-5\pi^2\cos 10\pi t \tag{66.9}$$

(66.9) ni (66.8) ga qo`ysak,

$$-m\cdot 5\pi^2\cos 10\pi t=F \tag{66.10}$$

kelib chiqadi. $m=G/g$ bo`lgani sababli (66.10) quyidagicha yoziladi:

$$F=-5\frac{G}{g}\pi^2\cos 10\pi t$$

Masala shartidagi berilganlarni e'tiborga olsak,

$$F=-50\pi^2\cos 10\pi t(N)$$

kelib chiqadi.

67 - §. Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini yechish

Texnikaga oid ko`pgina masalalarni yechish dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini hal qilishga keltiriladi.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasini yechishda nuqtaga qo`yilgan kuch qanday xarakterda o`zgarishiga qarab differensial tenglamalarni yechishning turli usullari qo`llaniladi.

Eng soda hol kuch o`zgarmas bo`lgan holdir. Ba'zi hollarda kuch vaqtning,yoki nuqta holatining, yoki nuqta tezligining funksiyasi bo`lishi mumkin. Shuningdek, kuch bir yo`la vaqt,yo`l,tezlik va hatto tezlanish funksiyasidan iborat hollar ham uchraydi.

Dinamikaning bu asosiy masalasini yechish uchun (65.2), (65.3), (65.7) –(65.10) ko`rinishdagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalardan birini tuzish va uni integrallash kerak.Integrallash natijasida ixtiyoriy o`zgarmaslar hosil bo`ladi.

Har bir konkret masalani yechishda ixtiyoriy o`zgarmaslarni aniqlash kerak. Bu o`zgarmaslarni aniqlashda moddiy nuqtaning boshlang`ich paytdagi holati va tezligini ifodalovchi boshlang`ch shartlardan foydalaniladi.

Dinamikaning ikkinchi asosiy masalasi differensial tenglamalarni yechib,ya'ni funksiyani differensiallashga teskari yo`lni qo`llab hal qilingani uchun u dinamikaning teskari masalasi deb ham ataladi.

Dinamikaning teskari masalasi quyidagi tartibda yechiladi.

1.Agar masala shartida sanoq sistemasi berilmagan bo`lsa, u tanlab olinadi.

2.Rasmda moddiy nuqtaning ixtiyoriy holati belgilanib,unga ta'sir qiluvchi kuchlar tasvirlanadi.

3.Agar nuqta bog`lanishda bo`lsa,uni bog`lanishdan qutqarib,bog`lanish reaksiya kuchlari rasmda ko`rsatiladi.

4.Moddiy nuqta harakatining boshlang`ich shartlari yozib olinadi.

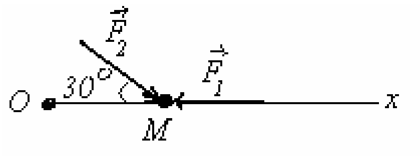
5.Moddiy nuqta harakatining tanlab olingan sanoq sistemasidagi differensial tenglamalari tuziladi.

6.Tuzilgan differensial tenglamalar integrallanadi.

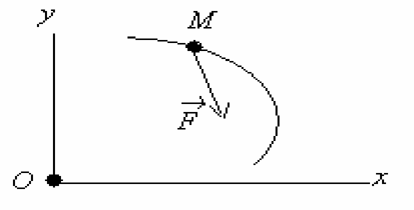
7.Boshlang`ich shartlardan foydalanib integrallash natijasida hosil bo`lgan ozgarmaslar aniqlanadi.

8.Aniqlangan moddiy nuqtaning harakat tenglamasidan kerak bo`lgan noma’lumlar topiladi.

35-masala. Massasi *m=5kg* bo`lgan moddiy nuqtaga $F_1 = 3N, F_2 = 10N$ kuchlar ta’sir qiladi. Moddiy nuqta tezlanishining *Ox* o`qdagi proyeksiyasi aniqlansin (127-rasm).



127-rasm



128-rasm

Yechish. Masala shartiga ko`ra sanoq sistemasi berilgan bo`lib,ta’sir qiluvchi kuchlar rasmda ko`rsatilgan.Moddiy nuqtaning harakati differensial tenglamasini *Ox* o`qidagi proyeksiyasini yozib olamiz:

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad (67.1)$$

127-rasmdan:

$$F_x = -F_1 + F_2\cos 30^0 \qquad (67.2)$$

(67.2) ni (67.1) ga qo`yamiz:

$$ma_x = -F_1 + F_2\cos 30^0$$

bu yerdan:

$$a_x = \frac{-F_1 + F_2\cos 30^0}{m}$$

Son qiymatlarni qo`ysak, $a_x = 1{,}13\, m/s^2$ kelib chiqadi.

3**6-masala**. Massasi *m=2kg* bo`lgan nuqta *Oxy* tekisligida $F_x = 2\sin 0{,}5\pi t, F_y = 5\cos\pi t$ kuchlar ta’sirida harakat qiladi.Mazkur nuqtaning *t=1* sekunddagi tezligi topilsin (128-rasm).Boshlang`ich paytda nuqta tinch holatda bo`lgan.

Yechish.Masala shartiga ko`ra moddiy nuqta *Oxy* tekisligida harakat qiladi.Shuning uchun sanoq sistemasi 128-rasmdagidek bo`ladi.Mazkur nuqtaga F_x, F_y kuchlar ta’sir qiladi.

Boshlang`ich vaqtda nuqta tinch turgani uchun *x=0, y=0,* $V_x = 0, V_y = 0$ bo`ladi.

Moddiy nuqtaning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\sin 0{,}5\pi t, m\frac{d^2y}{dt^2} = 5\cos\pi t$$

bu yerdan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\sin 0{,}5\pi t}{m}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{5\cos\pi t}{m} \quad \text{yoki} \quad \frac{dV_x}{dt} = \frac{2\sin 0{,}5\pi t}{m}, \frac{dV_y}{dt} = \frac{5\cos\pi t}{m} \qquad (67.3)$$

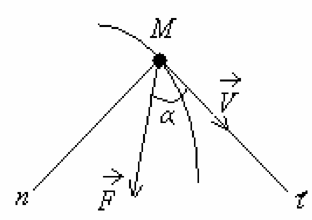
kelib chiqadi.

(67.3) ni boshlang`ich shartlardan foydalanib integrallasak:

$$V_x = \frac{-2\cos 0{,}5\pi t}{0{,}5\pi m}, V_y = \frac{5\sin\pi t}{\pi m}$$

Son qiymatlarni qo`ysak, $V_x = -0{,}64 m/s, V_y = 0$ kelib chiqadi.

3**7-masala**. Massasi *m=16kg* bo`lgan moddiy nuqta tekislikdagi egri chiziqli trayektoriya bo`ylab teng ta'sir etuvchisi *F=0,3t (N)* bo`lgan kuch ta'sirida harakatlanadi.Mazkur kuch tezlik vektori bilan $\alpha = 50^0$ burchak tashkil qiladi. *t=20* sekund bo`lganda egrilik radiusi $\rho = 12m$ .Moddiy nuqtaning tezligi aniqlansin (129-rasm).



129-rasm

Yechish. Moddiy nuqta harakatini tabiiy koordinata sistemasiga nisbatan tekshiramiz.Nuqtaga rasmda ko`rsatilgan $\vec{F}$ kuch ta'sir etadi.

Moddiy nuqta tezligini aniqlash uchun (65.7) tenglamani ikkinchisini tuzamiz:

$$m\frac{V^2}{\rho} = F_n \tag{67.4}$$

129-rasmdan: $$F_n = F\sin 50^0 \tag{67.5}$$

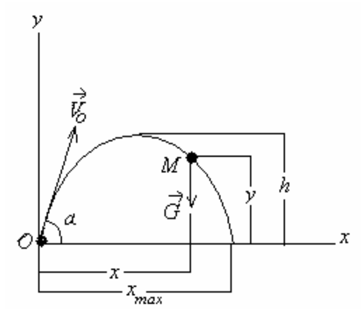
(67.5) ni (67.4) ga qo`yamiz:

$$m\frac{V^2}{\rho} = F\sin 50^0$$

bu yerdan : $$V^2 = \frac{\rho \cdot F\sin 50^0}{m}$$

Son qiymatlarni qo`sak, $V = 1{,}86 m/s$ kelib chiqadi.

3**8-masala.** Don otuvchi apparatdan otilgan bug`doyning boshlang`ich tezligi V_0. V_0 tezlikning gorizont bilan hosil qilgan α burchagi qanday bo`lganda bug`doy eng uzoqqa borib tushadi? Muhit qarshiligi hisobga olinmasin (130-rasm).



130-rasm

Yechish. Bug`doy harakatini Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiramiz.Koordinatalar boshi *O* ni *M* (bug`doy) nuqtaning boshlang`ich otilish holatida olib, *Oxy* tekislikni $\vec{V}_0$ orqali o`tkazamiz.Bu holda bug`doy harakati *Oxy* tekisligida bo`ladi.Bug`doyga faqat og`irlik kuchi ta'sir qiladi.

Boshlang`ich paytda bug`doyning koordinatalari *x=0*, *y=0*; bug`doy tezligining koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari esa

$$V_x = V_0\cos\alpha, V_y = V_0\sin\alpha$$

M nuqta harakatining differensial tenglamalari:

$$m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = -G \quad \text{yoki} \quad \ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g \tag{67.6}$$

(67.6) ni ikki marta integrallasak

$$\dot{x} = C_1, x = C_1 t + C_2$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \tag{67.7}$$

hosil bo`ladi.

Boshlang`ich shartlarni (67.7) ga qo`ysak,

$$C_1 = V_0 \cos\alpha, C_2 = 0; C_3 = V_0 \sin\alpha, C_4 = 0$$

kelib chiqadi.

Demak,bug`doy harakatining parametrik tenglamalari

$$x = t \cdot V_0 \cos\alpha \text{ ,}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + t \cdot V_0 \sin\alpha \qquad (67.8)$$

bo`ladi.

(67.8) tenglamalardan vaqtni yo`qatsak,bug`doy harakatining trayektoriya tenglamasi kelib chiqadi,ya'ni:

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (67.9)$$

(67.9) parabola tenglamasi bo`lib,uning o`qi Oy o`qiga paralleldir.

Endi bug`doyning eng uzoqqa borib tushish masofasini topamiz. Buning uchun (67.9) ni nolga nenglashtirib,

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (67.10)$$

ni hosil qilamiz.

(67.10) dagi x koordinata maksimum bo`lishi uchun $\sin 2\alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$ bo`lishi kerak.

Demak,

$$x_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Nazorat savollari

1.I.Nyutonning birinchi qonunini ayting.
2.I. Nyutonning ikkinchi qonunini ayting.
3.I.Nyutonning uchunchi qonunini ayting.
4.Kuch $(\vec{F})$ ning mexanik kattaligi SI (Xalqaro birliklar sistemasi) da qanday birlikda o`lchanadi?
5.Nuqta dinamikasining birinchi masalasini izohlang.
6. Nuqta dinamikasining ikkinchi masalasini ayting.
7.SI (Xalqaro birliklar sistemasi) da tezlanish kattaligi qanday birlikda o`lchanadi?
8.SI (Xalqaro birliklar sistemasi) da massa (m) kattaligi qanday birlikda o`lchanadi?
9.Erkin moddiy nuqta harakat differensial tenglamasi nicha xil usulda beriladi?
10.Erkin moddiy nuqta harakatining vektor usuldagi differensial tenglamasini yozing.
11.Erkin moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o`qlaridagi differensial tenglamalarini yozing.
12. Erkin moddiy nuqta harakatining tabiiy koordinata o`qlaridagi differensial tenglamalarini yozing.
13.Dinamikada $\vec{F}$ kuch kattaligi qaysi kattaliklarning funksiyasi sifatida keladi?
14.Erkin moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi vektor usulida qanday yoziladi?
15.Bog`lanishdagi moddiy nuqta uchun dinamika asosiy tenglamasini yozing.
16.Bog`lanishdagi moddiy nuqta harakatining Dekart koordinata o`qlaridagi differensial tenglamalarini yozing.
17.Bog`lanishdagi moddiy nuqta harakat differensial tenglamalarini tabiiy koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yozing.

XIII bob

Moddiy nuqtaning tebranma harakati

Qishloq xo`jaligi mashinalarining keng miqyosda ishlatilishi,shuningdek turli transport hamda suv inshootlarining barpo bo`lishi ularning qismlarida hosil bo`ladigan tebranishlarni chuqur o`rganishni talab qiladi.

Mashina va inshoot qismlarining tebranma harakatlarini o`rganish ko`p hollarda moddiy nuqta tebranma harakatini o`rganishga keltiriladi.

Moddiy nuqtaning tebranma harakati deb shunday harakatga aytiladiki,bunda nuqta muvozanat holatidan goh bir tomonga,goh ikkinchi tomonga navbatma-navbat chetlanadi.Demak, tebranma harakat takrorlanuvchi harakatdir.

Tebranma harakatlar asosan uch turga bo`linadi.

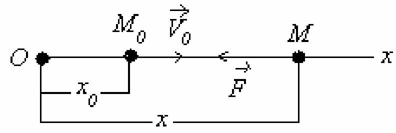
1.Erkin (garmonik) tebranma harakat.

2.So`nuvchi tebranma harakat.

3.Majburiy tebranma harakat.

68 - §. Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Faraz qilaylik,moddiy nuqtaga hamma vaqt uning muvozanat holati tomon yo`nalgan kuch ta'sir qilsin va mazkur nuqta to`gri chiziqli harakatda bo`lsin (131-rasm).



131-rasm

Moddiy nuqta koordinatasining funksiyasi sifatida o`zgaruvchi va muvozanat holatiga qarab yo`nalgan kuch qaytaruvchi kuch deb ataladi.

Qaytaruvchi kuch nuqtaning holatiga bog`liq bo`ladi,ya'ni:

$$F=-cx \tag{68.1}$$

bunda c - moddiy nuqtani uzunlik birligiga ko`chirish uchun zarur bo`lgan kuch bo`lib,bikirlik koeffitsiyenti deyiladi, o`lchov birligi esa *N/m*. x – nuqtaning absissasi.

Boshlang`ich paytda $M$ nuqtaning absissasi $x$ , tezligi $V_0$ bo`lsin.

M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx \tag{68.2}$$

bu ifodada

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{68.3}$$

belgilash kiritsak,u quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{68.4}$$

(68.4) ning umumiy yechimi quyidagicha bo`ladi:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \tag{68.5}$$

(68.5) dagi C_1 va C_2 o`zgarmaslar boshlang`ich shartlardan foydalanib aniqlanadi:

$$C_1 = \frac{V_0}{k}, C_2 = x_0 \tag{68.6}$$

Shunday qilib, M nuqtaning harakati

$$x = x_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt \qquad (68.7)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Moddiy nuqta tebranma harakatini umumiy holda tekshirish qulay bo`lishi uchun $C_1, C_2$ o`rniga a va α o`zgarmaslarni quyidagicha tanlaymiz:

$$C_1 = a\cos\alpha, C_2 = a\sin\alpha \qquad (68.8)$$

(68.8) ni (68.5) ga qo`yib, $M$ nuqta harakatini aniqlovchi tenglamani quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

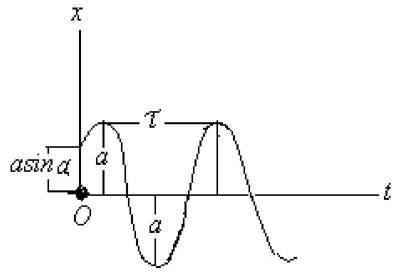
$$x = a\sin(kt + \alpha) \qquad (68.9)$$

(68.8) ifodalarni avval kvadratga ko`tarib qo`shsak,so`ng (68.8) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo`lsak va (68.6) ni e’tiborga olsak,

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_o^2}{k^2}}, \; tg\alpha = \frac{x_0 k}{V_0} \qquad (68.10)$$

kelib chiqadi.

(68.9) dan ko`ramizki, moddiy nuqtaning qaytaruvchi kuch ta’siridagi harakati davriy xarakterga ega bo`lgan erkin tebranma harakatdan iborat ekan.Shuning uchun (68.4) erkin tebranma harakatning differensial tenglamasi deyiladi. (68.9) tenglama moddiy nuqtaning erkin tebranma harakat qonunini ifodalaydi.



132-rasm

(68.9) tenglamadagi a – nuqtaning muvozanat holatidan eng katta og`ishi – tebranish amplitudasi, $kt+\alpha$ - tebranish fazasi, $\alpha$ - boshlang`ich faza,k– tebranishning doiraviy takrorligi deyiladi.

Erkin tebranma harakat grafigi 132-rasmda ko`rsatilgan. $\tau$ davr oralig`ida tebranish fazasi 2π ga o`zgarishini hisobga olsak, (68.9) dan quyidagi tenglamani yozish mumkin:

$$k(t + \tau) + \alpha = kt + (\alpha + 2\pi)$$

Bundan erkin tebranma harakat davrini aniqlovchi

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \qquad (68.11)$$

formulani hosil qilamiz.

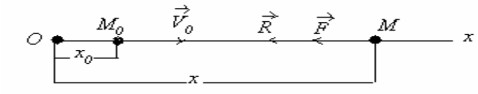
Tebranish davrining teskari qiymati tebranish takrorligi deyiladi; uni ν bilan belgilasak,ta’rifga ko`ra :

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{2\pi}$$

(68.10), (68.11) dan ko`ramizki,tebranish amplitudasi va boshlang`ich faza harakatning boshlang`ich shartlariga bog`liq,tebranish davri, shuningdek, tebranish takrorligi nuqtaning boshlang`ich holatiga bog`liq emas ekan. Binobarin,tebranish davri tebranma harakatdagi nuqtaning o`zgarmaydigan xarakteristikasidir.Tebranish davrini topish uchun tebranma harakatning differensial tenglamasini (68.4) ko`rinishda tuzish va k ni topish kifoya.

69 - §. Moddiy nuqtaning so`nuvchi tebranma harakati

Massasi m bo`lgan $M$ moddiy nuqta qaytaruvchi kuch va muhitning qarshilik kuchi ta'sirida to`g`ri chiziqli harakatda bo`lsin (133-rasm).



133-rasm

Muhitning qarshilik kuchini moddiy nuqta tezligining birinchi darajasiga proporsional deylik:

$$R = -\mu \dot{x} \qquad (69.1)$$

Bu harakatni tekshirish uchun moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x} \qquad (69.2)$$

(69.2) ni quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$m\ddot{x} + \mu \dot{x} + cx = 0 \qquad (69.3)$$

(69.3) ning ikki tomonini m ga bo`lib, $\frac{c}{m} = k^2, \frac{\mu}{m} = 2b$ deb belgilaymiz.Natijada

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (69.4)$$

kelib chiqadi.

Boshlang`ich paytda $M$ nuqta $M_0$ da bo`lib, uning absissasi x_0 , tezligi V_0 bo`lsin. (69.4) ning yechimini topish uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$n^2 + 2bn + k^2 = 0$$

Bu tenglama yechimi

$$n_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$$

ko`rinishda bo`lib, undagi b va k ga nisbatan quyidagi hollar uchrashi mumkin:

1) $k > b$ qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan kichik bo`lgan hol;
2) $k < b$ qarshilik kuchi qaytaruvchi kuchga nisbatan katta bo`lgan hol;
3) $k = b$ –chegara hol.

Bu hollarni alohida-alohida tekshiramiz.

1) $k > b$ bo`lganda xarakteristik tenglama ildizlari kompleks sondan iborat,ya'ni:

$$n_{1,2} = -b \pm i\sqrt{k^2 - b^2}$$

yoki

$$n_{1,2} = -b \pm k_1 i$$

bunda

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$$

Bu holda (69.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo`ladi:

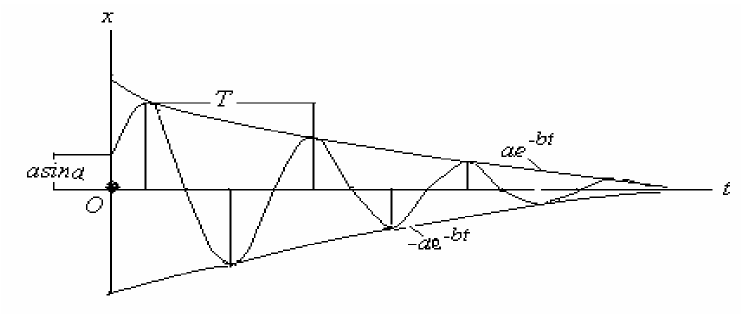
$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \qquad (69.5)$$

(69.5) dagi C_1 , C_2 o`zgarmaslarni (68.8) ko`rinishda tanlab olsak, (69.5) quyidagicha yoziladi:

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) \qquad (69.6)$$

(69.6) dagi ae^{-bt} ifoda vaqt o`tishi bilan nolga intiladi,ya'ni harakat asta-sekin so`na boradi. Shuning uchun muhitning qarshilik kuchi va qaytaruvchi kuch ta'siridagi nuqtaning harakati kichik qarshiliklar holda so`nuvchi tebranma harakat bo`ladi.

(69.4) *so`nuvchi tebranma harakat differensial tenglamasini* (69.5) yoki (69.6) *so`nuvchi tebranma harakat qonunini* ifodalaydi.



134-rasm

So`nuvchi tebranishning grafigi (69.6) tenglamaga asosan, tenglamalari $x = \pm ae^{-bt}$ bo`lgan ikki egri chiziq orasida bo`lib,bu egri chiziqlarga urinib o`tadi (134-rasm).

(69.6) dagi a va α o`zgarmaslarni harakatning boshlang`ich shartlaridan foydalanib topamiz.

(69.6) dan hosila olamiz:

$$\dot{x} = -bae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha) + k_1 ae^{-bt}\cos(k_1 t + \alpha) \qquad (69.7)$$

(69.6) va (69.7) ga boshlang`ich shartlarni qo`ysak:

$$x_0 = a\sin\alpha, V_0 = -ab\sin\alpha + ak_1\cos\alpha$$

yoki

$$x_0 = a\sin\alpha, V_0 + bx_0 = ak_1\cos\alpha \qquad (69.8)$$

kelib chiqadi.

(69.8) tenglamalar sistemasini yechsak:

$$a = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (V_0 + bx_0)^2}, tg\alpha = \frac{k_1 x_0}{V_0 + bx_0} \qquad (69.9)$$

hosil bo`ladi.

(69.6) tenglamada $\sin(k_1 t + \alpha)$ qatnashgani tufayli nuqta harakati davriy xarakterga ega, lekin e^{-bt} nuqtaning to`liq avvalgi holatiga qayta olmasligini ko`rsatadi. Shuning uchun so`nuvchi tebranishning tebranish davri tushunchasini shartli kiritamiz:

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \qquad (69.10)$$

yoki

$$T = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - (b/k)^2}} \qquad (69.11)$$

(69.11) dagi $\left(\sqrt{1-(b/k)^2}\right)^{-1}$ ifodani qatorga yoyib, *b/k* ning ikkinchi darajadan yuqori bo`lgan darajadagi hadlarini tashlab yuborsak va (68.11) ni e'tiborga olsak,

$$T = \tau\left\{1 + \frac{1}{2}(b/k)^2\right\} \qquad (69.12)$$

kelib chiqadi.Bu ifodadagi *b/k* qarshilik koeffitsiyenti deb ataladi.

(69.12) dan ko`ramizki, $T > \tau$ , biroq qarshilik juda kichik bo`lganda tebranma harakat davri erkin tebranish davridan deyarli farq qilmaydi,ya'ni $T \approx \tau$.

Endi, so`nuvchi tebranma harakat amplitudasining o`zgarishini ko`rib o`tamiz. M nuqta o`zining nuvozanat holatidan $v$ - maksimal og`ishini x_v , $v+1$ - maksimal og`ishini $x_{v+1}$ bilan belgilaymiz. Bu og`ishlarga mos kelgan vaqtlar t_v va $t_{v+1} = t_v + T$ uchun (69.6) quyidagicha bo`ladi:

$$x_v = ae^{-bt_v} \sin(k_1 t_v + \alpha)$$

$$x_{v+1} = ae^{-b(t_v+T)} \cdot \sin(k_1 t_v + 2\pi + \alpha) = ae^{-b(t_v+T)} \sin(k_1 t_v + \alpha)$$

bundan

$$\frac{x_{v+1}}{x_v} = e^{-bT} \tag{69.13}$$

kelib chiqadi. (69.13) dan ko`ramizki, $x_{v+1}/x_v$ nisbat o`zgarmas hamda noldan kichik.

Demak, tebranish amplitudasining har bir T davr o`tishdagi ketma-ket qiymatlari,maxraji $e^{-bT}$ bo`lgan kamayuvchi geometrik progressiyani tashkil qiladi. $D = e^{-bT}$ - tebranish dekrementi (so`nish faktori) deyiladi.Tebranish dekrementidan olingan natural logarifmning moduli esa logarifmik dekrement deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\ln D = bT \tag{69.14}$$

bu yerda b - so`nish koeffitsiyenti.

2) $k < b$ bo`lgan holda xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va manfiy bo`ladi, y’ani:

$$n_1 = -b + \sqrt{b^2 - k^2},\ n_2 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}$$

Natijada (69.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{t\sqrt{b^2-k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right) \tag{69.15}$$

(69.15) dan ko`ramizki, $k < b$ holda nuqta harakati davriy xarakterga ega emas. Shuning uchun bu holdagi harakat *aperiodik* (ya’ni davriy bo`lmagan) so`nuvchi harakat deyiladi.

(69.15) dagi C_1, C_2 o`zgarmaslar harakatning boshlang`ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

(69.15) da vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = C_1(\sqrt{b^2 - k^2} - b)e^{(\sqrt{b^2-k^2}-b)t} - C_2(\sqrt{b^2 - k^2} + b)e^{-(\sqrt{b^2-k^2}+b)t} \tag{69.16}$$

(69.15) va (69.16) ga boshlang`ich shartlarni qo`ysak:

$$x_0 = C_1 + C_2,\quad V_0 = C_1(\sqrt{b^2 - k^2} - b) - C_2(\sqrt{b^2 - k^2} + b) \tag{69.17}$$

hosil bo`ladi.

(69.17) dan

$$C_1 = \frac{V_0 + x_0(b + \sqrt{b^2 - k^2})}{2\sqrt{b^2 - k^2}},\qquad C_2 = \frac{V_0 + x_0(b - \sqrt{b^2 - k^2})}{2\sqrt{b^2 - k^2}} \tag{69.18}$$

kelib chiqadi.

(69.18) ni (69.15) ga qo`ysak, $M$ nuqtaning berilgan boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi aperiodik harakat tenglamasi hosil bo`ladi:

$$x = \frac{e^{-bt}}{2\sqrt{b^2 - k^2}} \cdot \left\{\left[V_0 + \left(b + \sqrt{b^2 - k^2}\right)\cdot x_0\right]\cdot e^{t\sqrt{b^2-k^2}} - \left[V_0 + \left(b - \sqrt{b^2 - k^2}\right)\cdot x_0\right]\cdot e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right\} \tag{69.19}$$

3) $b = k$ da (69.4) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo`ladi:

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t) \qquad (69.20)$$

Demak,bu holda ham harakat aperiodik bo`ladi.
(69.20) dan hosila olamiz:

$$x = -C_1 b e^{-bt} + C_2 e^{-bt}(-bt + 1) \qquad (69.21)$$

(69.20) va (69.21) ga boshlang`ich shartlarni qo`ysak:

$$x_0 = C_1,\ V_0 = -C_1 b + C_2$$

hosil bo`ladi.

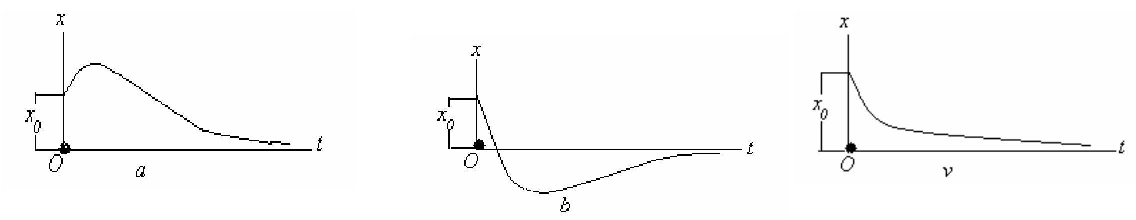
Bu tengliklardan

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = V_0 + bx_0$$

kelib chiqadi. Demak, $k = b$ bo`lgan holdagi aperiodik harakat tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + \left(V_0 + bx_0\right)\cdot t\right] \qquad (69.22)$$

Keyingi ikki holda moddiy nuqta tebranma harakat qilmay asimtotik ravishda nolga yaqinlashadi.



135-rasm

Bunday harakatning grafigi moddiy nuqtaning boshlang`ich holatiga hamda boshlang`ich tezlikning moduli va yo`nalishiga bog`liq. 135-rasmda turli boshlang`ich shartlar uchun $b > k$ holdagi aperiodik harakat grafigi ko`rsatilgan:

a) $x_0 > 0$, $V_0 > o$; (135-rasm,*a*) .

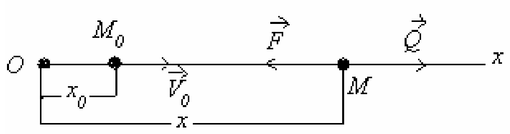
b) $x_0 > 0$, $V_0 > o$ lekin, $|V_0| > x_0 \cdot (b + \sqrt{b^2 - k^2})$, $(|V_0| > bx_0)$; (135-rasm,*b*) .

v) $x_0 > 0, V_0 \le 0$ lekin, $|V_0| < x_o \cdot (b + \sqrt{b^2 - k^2})$, $(|V_0| < bx_0)$; (135-rasm,*v*) .

$b = k$ holda ham aperiodik so`nuvchi harakat grafigi 135-rasmda ko`rsatilganiga o`xshash bo`ladi.

70 - §. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati

Moddiy nuqta qaytaruvchi kuch hamda vaqtning uzluksiz funksiyasi sifatida o`zgaruvchi va uyg`otuvchi kuch deb ataluvchi kuch ta'sirida t'g`ri chiziqli harakatda bo`lsin (136-rasm).



136-rasm

Uyg`otuvchi kuch garmonik qonun bo`yicha o`zgarsin ya'ni:

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta) \qquad (70.1)$$

(70.1) da Q uyg`otuvchi kuchning eng katta qiymati, $p$ - doiraviy takrorligi, $pt+\delta$ - fazasi, $\delta$ - boshlang`ich fazasi. Uyg`otuvchi kuch davri esa $\frac{2\pi}{p}$ ga teng.

Boshlang`ich paytda $M$ nuqta $M_0$ da bo`lib,uning koordinatasi x_o ,tezligi V_o bo`lsin.

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt+\delta) \qquad (70.2)$$

(70.2) ni quyidagi ko`rinishda yozib olamiz:

$$m\ddot{x} + cx = Q_0 \sin(pt+\delta)$$

$k^2 = \frac{c}{x}, P_0 = \frac{Q}{m}$ belgilashlar kiritsak,

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin(pt+\delta) \qquad (70.3)$$

hosil bo`ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, (70.3) differensial tenglama yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = x_1 + x_2 \qquad (70.4)$$

(70.4) da x_1 bilan

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (70.5)$$

bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi belgilangan; x_2 esa (70.3) ning xususiy yechimidan iborat.

(70.5) differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$x_1 = a\sin(kt+\alpha) \qquad (70.6)$$

ko`rinishda ifodalanishi bizga ma'lum.

(70.3) o`zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko`rinishda olamiz:

$$x_2 = B\sin(pt+\delta) \qquad (70.7)$$

(70.7) dagi B koeffitsiyentni aniqlash uchun (70.7) dan vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\ddot{x}_2 = -Bp^2 \sin(pt+\delta) \qquad (70.8)$$

(70.7) va (70.8) ni (70.3) ga qo`yamiz:

$$-Bp^2 \sin(pt+\delta) + k^2 B\sin(pt+\delta) = P_0 \sin(pt+\delta)$$

Bu ayniyatdan:

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}, k \neq p.$$

Natijada (70.7) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt+\delta) \qquad (70.9)$$

(70.9) tenglama bilan aniqlanuvchi *harakat moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati* deyiladi.

Demak, (70.3) ning umumiy yechimi quyidagicha yoziladi:

$$x = a\sin(kt+\alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt+\delta) \qquad (70.10)$$

(70.10) dagi a va α harakatning boshlang`ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.

(70.9) dan ko`ramizki,majburiy tebranma harakat amplitudasi yoki nuqtaning eng katta *dinamik* siljishi:

$$A = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} \qquad (70.11)$$

bo`ladi.

(70.11) dan foydalanib, (70.9) ni quyidagi ko`rinishlarda yozish mumkin:

$x_2 = A\sin(pt + \delta),$ agar $k > p$ bo`lsa;

va $-A\sin(pt + \delta) = A\sin(pt + \delta - \pi),$ agar $k < p$ bo`lsa.

Bu munosabatlarga binoan $k > p$ bo`lganda majburiy tebranish fazasi uyg`otuvchi kuch fazasi bilan bir xilda bo`ladi; $k < p$ holda esa majburiy tebranish fazasi uyg`otuvchi kuch fazasidan π ga orqada qoladi.

Majburiy tebranish amplitudasi bilan *p/k* nisbat orasidagi bog`lanishni tekshiraylik. Buning uchun (70.11) ni quyidagicha yozamiz:

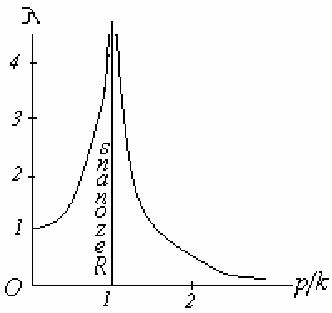
$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} = \frac{l_{st}}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} \qquad (70.12)$$

bunda $l_{st} = P_0/k^2$ bilan moddiy nuqtaning uyg`otuvchi kuch maksimal qiymati Q_0 ta'sirida olgan statik siljishi belgilangan.

(70.11) dan ko`ramizki, majburiy tebranish amplitudasi uyg`otuvchi kuch hamda erkin tebranish doiraviy takrorliklariga bog`liq.

Moddiy nuqta dinamik siljishining statik siljishiga nisbati dinamik koeffitsiyent deyiladi. Uni λ bilan belgilaymiz:

$$\lambda = \frac{A}{l_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)} \qquad (70.13)$$



137-rasm

Dinamik koeffitsiyent λ bilan $\frac{p}{k}$ orasidagi (70.13) bog`lanish grafigi 137-rasmda tasvirlangan.

Boshlang`ich shartlar $x = x_0$, $V = \dot{x}_0$ bo`lgan holdagi harakatni tekshirish uchun (70.3) differensial tenglamaning umumiy echimini quyidagi ko`rinishda yozamiz:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta) \qquad (70.14)$$

(70.14) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \frac{P_0 p}{k^2 - p^2}\cos(pt + \delta) \qquad (70.15)$$

Moddiy nuqta harakatining boshlang`ich shartlarini (70.14) va (70.15) ga qo`ysak:

$$x_0 = C_2 + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin\delta,$$
$$\dot{x}_0 = C_1 k + \frac{P_0 p}{k^2 - p^2}\cos\delta \qquad (70.16)$$

hosil bo`ladi.

(70.16) dan

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k}\cdot\frac{P_0}{k^2 - p^2}\cos\delta,$$
$$C_2 = x_0 - \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin\delta$$

kelib chiqadi. Demak, (70.14) quyidagicha yoziladi:

$$x = x_0\cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt - \frac{P_0}{k^2 - p^2}\left(\sin\delta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta) \qquad (70.17)$$

(70.17) dan ko`ramizki, $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ hamda $p \approx k$ bo`lganda tebranish o`ziga xos ko`rinishga ega bo`ladi.Bu hol "*tepish*" holi deyiladi.

"Tepish" holining tenglamasi:

$$x =\cong \frac{2P_0}{k^2 - p^2}\left[\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \alpha)\right]$$

yoki

$$x \cong \frac{2P_0}{k^2 - p^2}\sin\frac{p - k}{2}t\cdot\cos(pt + \delta) \qquad (70.18)$$

bo`ladi.

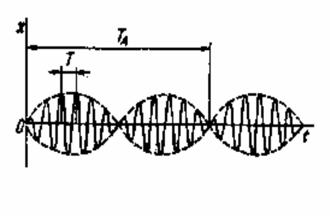
(70.18) tenglama bilan ifodalanadigan harakatning doiraviy takrorligi p, davri $T = 2\pi/p$, amplitudasi davriy funksiya sifatida o`zgaruvchi tebranma harakatdan iborat deyish mumkin.Bu tebranish amplitudasi:

$$A(t) = \frac{2P_0}{k^2 - p^2}\sin\frac{p - k}{2}t.$$

Bu amplitudaning davri

$$T_A = \frac{4\pi}{p - k}$$

va u T ga nisbatan ancha katta bo`ladi.



138-rasm

(70.18) grafigi 138-rasmda ko`rsatilgan. Majburiy va erkin tebranish doiraviy takrorliklari bir xil bo`lgan *(p=k)* hol *rezonans holi* deb ataladi.

p=k bo`lganda (70.3) differensial tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0\sin(kt + \delta) \qquad (70.19)$$

Rezonans holida (70.19) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko`rinishda aniqlaymiz:

$$x_2 = Bt\cos(kt + \delta) \qquad (70.20)$$

(70.20) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\ddot{x} = -2Bk\sin(kt + \delta) - Bk^2 t\cos(kt + \delta) \qquad (70.21)$$

(70.20) va (70.21) ni (70.19) ga qo`ysak:

$$-2Bk\sin(kt+\delta)=P_0\sin(kt+\delta \qquad (70.22)$$

hosil bo`ladi. (70.22) dan:

$$B=-\frac{P_0}{2k}$$

kelib chiqadi.

Demak, (70.19) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo`ladi:

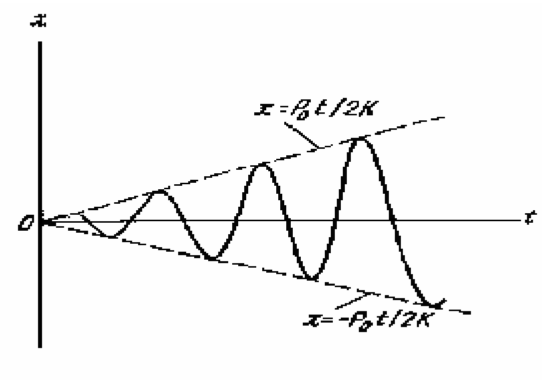
$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt+\frac{P_0}{2k}t\sin(kt+\delta-\frac{\pi}{2}) \qquad (70.23)$$

(70.23) dan ko`ramizki, nuqtaning harakati erkin va majburiy tebranishlar yig`indisidan iborat.

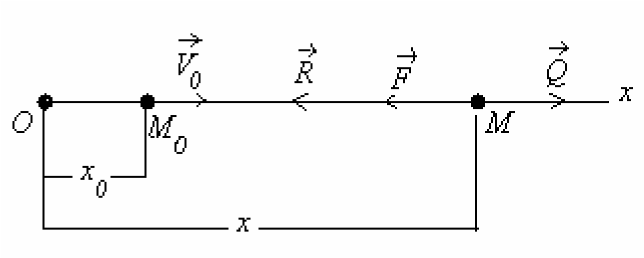
Rezonans holdagi majburiy tebranma harakat tenglamasi

$$x_2=\frac{P_0}{2k}t\sin(kt+\delta-\frac{\pi}{2}) \qquad (70.24)$$

bo`ladi. (70.24) da $A=\frac{P_0t}{2k}$ majburiy tebranish amplitudasi, $kt+\delta-\frac{\pi}{2}$ fazasi, $k$ esa doiraviy takrorligidan iborat. (70.24) ga binoan,rezonans holatidagi majburiy tebranish fazasi uyg`otuvchi kuch fazasidan $\pi/2$ ga orqada qoladi, amplituda esa vaqtga proporsional o`zgaradi.



139-rasm



140-rasm

(70.23) tenglama bilan aniqlanuvchi harakat grafigi 139-rasmda tasvirlangan.

71 - §. Moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatiga muhit qarshilik kuchining ta'siri

M moddiy nuqta qaytaruvchi, uyg`otuvchi kuchlar hamda muhitning qarshilik kuchi ta'sirida to`g`ri chiziqli harakatda bo`lsin. Boshlang`ich paytda $M$ nuqta $M_0$ da bo`lib, uning absissasi x_0, tezligi V_0 bo`lsin (140-rasm).

Moddiy nuqtaning harakati differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}=F_x+R_x+Q_x \qquad (71.1)$$

Bunda

$$F_x=-cx, R_x=-\mu\cdot\dot{x}, Q_x=Q_0\sin(pt+\delta)$$

bo`lgani uchun (71.1) quyidagicha yoziladi:

$$m\ddot{x}=-cx-\mu\cdot\dot{x}+Q_0\sin(pt+\delta) \qquad (71.2)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$2b=\frac{\mu}{m}, k^2=\frac{c}{m}, P_0=\frac{Q}{m}$$

U holda (71.2) tenglama

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=P_0\sin(pt+\delta) \qquad (71.3)$$

ko`rinishni oladi.

(71.3) tenglama muhit qarshilik kuchi ta'sir etganda *moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakati differensial tenglamasidan* iborat.

(71.3) tenglamaning umumiy yechimi (69.4) tenglama umumiy yechimi bilan (71.3) tenglama xususiy yechimining yig`indisidan iborat,ya'ni:

$$x=x_1+x_2$$

bu yerda x_1 b va k larning son qiymatlariga qarab (69.6),(69.15) yoki (69.20) ko`rinishida bo`ladi, x_2 esa quyidagicha topiladi:

$$x_2=D_1\sin(pt+\delta)+D_2\cos(pt+\delta) \qquad (71.4)$$

D_1 va D_2 o`zgarmaslarni aniqlash uchun (71.4) dan vaqt bo`yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2&=D_1p\cos(pt+\delta)-D_2\sin(pt+\delta)\\ \ddot{x}_2&=-D_1p^2\sin(pt+\delta)-D_2p^2\cos(pt+\delta)\end{aligned} \qquad (71.5)$$

(71.4) va (71.5) larni (71.3) ga qo`ysak:

$$\begin{aligned}&-D_1p^2\sin(pt+\delta)-D_2p^2\cos(pt+\delta)+2bD_1p\cos(pt+\delta)-2bD_2p\sin(pt+\delta)+\\ &k^2D_1\sin(pt+\delta)+k^2D_2\cos(pt+\delta)=P_0\sin(pt+\delta)\end{aligned} \qquad (71.6)$$

hosil bo`ladi.

(71.6) dan:

$$\begin{cases}D_1(k^2-p^2)-2bpD_2=P_0\\ 2D_1bp+D_2(k^2-p^2)=0\end{cases} \qquad (71.7)$$

kelib chiqadi.

(71.7) tenglamalar sistemasini yechsak:

$$D_1=\frac{P_0(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}, D_2=-\frac{2P_0bp}{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2} \qquad (71.8)$$

Natijada (71.3) differensial tenglamaning xususiy yechimi quyidagi ko`rinishda yoziladi:

$$x_2=\frac{P_0(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}\sin(pt+\delta)-\frac{2P_0bp}{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}\cos(pt+\delta) \qquad (71.9)$$

Muhit qarshiligidagi majburiy tebranishni umumiy holda tekshirish qulay bo`lishi uchun $D_1$ va $D_2$ o`zgarmaslar o`rniga $A_q$ va $\beta$ o`zgarmaslarni kiritamiz.Ularni quyidagicha tanlaymiz:

$$D_1=A_q\cos\beta, D_2=A_q\sin\beta \qquad (71.10)$$

(71.10) ni avval kvadratga oshirib qo`shsak,so`ngra (71.10) ning ikkinchisini birinchisiga hadlab bo`lsak va (71.8) e'tiborga olsak:

$$A_q = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \qquad (71.11)$$

$$tg\beta = \frac{2pb}{k^2 - p^2} \qquad (71.12)$$

kelib chiqadi.

(71.10) ni (71.4) ga qo`yamiz.U holda

$$x_2 = A_q \sin(pt + \delta + \beta) \qquad (71.13)$$

bo`ladi.

Shunday qilib (71.3) differensial tenglamaning umumiy yechimi

1) $b<k$ holda

$$x = ae^{-bt} \sin(\sqrt{k^2 - b^2} \cdot t + \alpha) + \frac{P_0 \sin(pt + \delta + \beta)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \qquad (71.14)$$

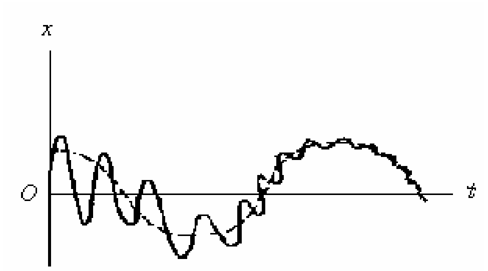
2) $b>k$ holda

$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{t\sqrt{b^2-k^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{b^2-k^2}}\right) + \frac{P_0 \sin(pt + \delta + \beta)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}}, \qquad (71.15)$$

3) $b=k$ holda

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t) + \frac{P_0 \sin(pt + \delta + \beta)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \qquad (71.16)$$

tenglamalar bilan ifodalanadi va ulardagi a, α, C_1 va C_2 o`zgarmaslar harakatning boshlang`ich shartlaridan foydalanib aniqlanadi.



141-rasm

Muhit qarshilik kuchi ta'sir etganda moddiy nuqta tebranma harakatining grafigi $b<k$ hol uchun 141-rasmda ko`rsatilgan;bunda majburiy tebranish grafigi punktir chiziq bilan tasvirlangan.

(71.14), (71.15) va (71.16) tenglamalardagi ikkinchi had,ya'ni:

$$x_2 = \frac{P_0 \sin(pt + \delta + \beta)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2}} \qquad (71.17)$$

muhit qarshilik kuchi hisobga olingan holda moddiy nuqtaning majburiy tebranma harakatini ifodalaydi.

Majburiy tebranish amplitudasi (71.11) tenglikdan aniqlanadi.

Majburiy tebranma harakatning dinamik koeffitsiyenti muhit qarshilik kuchi ta'sir etgan holda quyidagicha:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - p^2/k^2)^2 + 4b^2 p^2/k^4}}$$

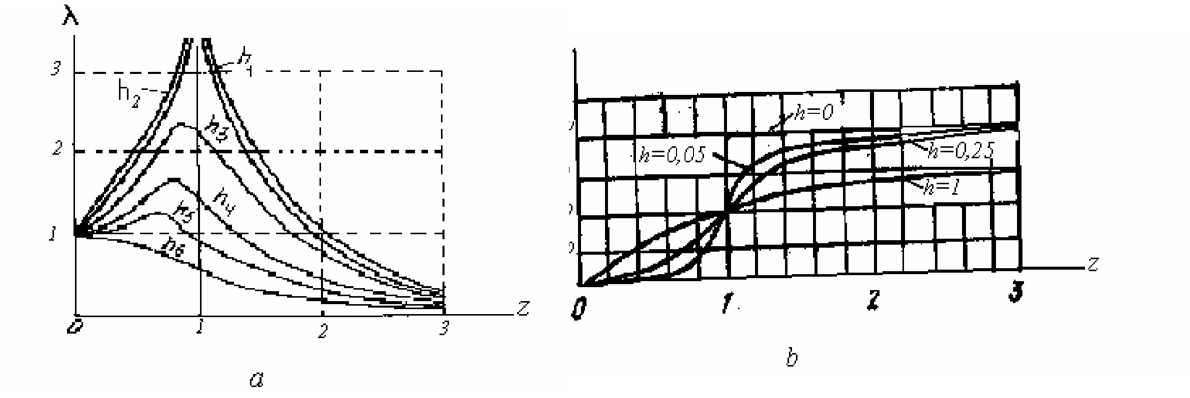
Agar

$$\frac{p}{k} = z, \frac{b}{k} = h \qquad (71.18)$$

deb belgilasak,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4h^2 z^2}} \qquad (71.19)$$

bo`ladi.141-rasm,*a* da $\lambda$ va $z$ orasidagi bog`lanish grafigi h ning turli qiymatlari uchun ko`rsatilgan.



142-rasm

Dinamik koeffitsiyent λ bilan *p/k* nisbat orasidagi bog`lanishni tekshirish uchun funksiyani tekshirish qoidasidan foydalanamiz.

(71.19) da kvadrat ildiz ostidagi ifodani *y(z)* deb belgilaymiz:

$$y(z) = (1 - z^2)^2 + 4h^2 z^2 \qquad (71.20)$$

Bu funksiyaning ekstremumini topish uchun z bo`yicha hosila olamiz va hosilani nolga tenglashtirib $z \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarni topamiz:

$$z_1 = 0, z_2 = \sqrt{1 - 2h^2} \qquad (71.21)$$

Endi z_1 =0 uchun (71.20) dan ikkinchi tartibli hosila hisoblaymiz:

$$y''(0) = 4(2h^2 - 1)$$

Agar $2h^2 > 1$ yoki $h > \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo`lsa, $y''(0) > 0$. Shuning uchun $z_1$ =0 da *y(z)* fuhksiya minimumga erishadi. $\lambda$ esa maksimum qiymatga ega bo`ladi.Bu hol uchun 142-rasm,*a* dagi $h=h_6$ mos keladi. $h > \frac{\sqrt{2}}{2}$ da $1-2h^2 < 0$ va $z_2 = \sqrt{1 - 2h^2}$ mavhum son bo`lib qoladi.Bu holda *y(z)* funksiyaning ikkinchi ekstremumi bo`lmaydi. $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ holda $y''(0) < 0$. Natijada λ minimumga erishadi. $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ da $z_2 = \sqrt{1 - 2h^2 > 0}$ va $y''(z_2) > 0$ bolib λ maksimum qiymatini qabul qiladi. $\lambda_{\max}$ ni aniqlash uchun (71.19) dagi z o`rniga $z_2$ qiymatini qo`yamiz:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2h\sqrt{1 - h^2}}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ da } \lambda_{\max} = 1.$$

Demak, $h < \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo`lgan holda majburiy tebranish amplitudasi maksimum qiymatga erishadi.Uni aniqlash uchun (71.21) ning ikkinchisiga (71.18) ni qo`yamiz:

$$p=\sqrt{k^2-2b^2} \qquad (71.22)$$

(71.22) ni (71.11) ga qo`ysak,

$$A_{\max}=\frac{P_0}{2b\sqrt{k^2-b^2}} \qquad (71.23)$$

kelib chiqadi.

Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga muhitning qarshilik kuchi ta'sir etganda majburiy tebranma harakat va uyg`otuvchi kuchning doiraviy takrorliklari ham,tebranish davrlari ham bir hil bo`lib,majburiy tebranish fazasi esa uyg`otuvchi kuch fazasidan β ga farq qiladi. β *--fazalar siljisi* deb ataladi.Bu siljish (71.12) dan aniqlanadi.

(71.10) tenglik (71.18) ga ko`ra quyidagicha yoziladi:

$$tg\beta=\frac{2bp}{k^2(1-\frac{p^2}{k^2})}=\frac{2hz}{1-z^2} \qquad (71.24)$$

z=1 holda $tg\beta=\infty$; shuning uchun fazalar siljishi $\beta=\frac{\pi}{2}$ bo`ladi.

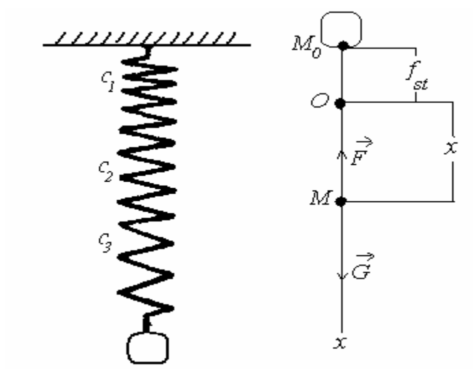
z=0 bo`lganda $tg\beta=0$. Bu holda kichik takrorlikdagi majburiy tebranish (*p*<*k*) uchun $\beta=\pi$.

(71.24) dan ko`ramizki, fazalar siljishi $z$ hamda qarshilik koeffitsiyenti $h$ ga bog`liq. β bilan z orasidagi munosabat grafigi h ning har xil qiymatlari uchun 142-rasm,*b* da ko`rsatilgan.

72 - §. Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga doir masalalar yechish

Moddiy nuqtaning tebranma harakatiga oid masalalar qyuidagi tartibda yechiladi.

1. Moddiy nuqtaning statik muvozanat holati koordinata boshi deb qabul qilinib, harakat yo`nalishi bo`yicha koordinata o`qi yo`naltiriladi
2. Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.
3. Moddiy nuqta harakatining boshlang`ich shartlari aniqlab olinadi.
4. Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi tuziladi.
5. Tuzilgan differensial tenglama turiga qarab uning yechimi yoziladi.
6. Topilgan yechim fizik nuqtai nazardan tahlil etilib,kerakli noma'lumlar aniqlanadi.



143-rasm

39-masala. Bikirliklari $c_1=2N/m, c_2=4N/m, c_3=6N/m$ bo`lgan uchta ketma-ket ulangan prujinaga yuk osilgan.Mazkur prujinalarga ekvivalent prujinaning bikirlik koeffitsiyenti aniqlansin (143- rasm).

Yechish. Yukning statik muvozanat holatini,ya'ni yukning og`irlik kuchi bilan prujinalar elastiklik kuchi muvozanatlashadigan nuqtani koordinata boshi deb olamiz. *Ox* o`qni harakat yo`nalishi bo`yicha vertikal pastga yo`naltiramiz.

Bikirliklari turlicha bo`lgan uchta prujinani ularga ekvivalent bitta prujina bilan almashtiramiz. Ekvivalent prujinaning bikirlik koeffisientini aniqlash uchun $M$ yukning prujinalarga ta'sirini tekshiramiz. Yuk ta'sirida uchchala prujina cho`ziladi.

M yuk tinch holatda bo`lganda uning og`irligi prujinalarning elastiklik kuchi bilan muvozanatlashadi hamda

$$G = c_1 f_{1st}, \quad G = c_2 f_{2st}, \quad G = c_3 f_{3st}, \quad G = c_{ekv} f_{st} \qquad (72.1)$$

bundan $$f_{1st} = \frac{G}{c_1}, \quad f_{2st} = \frac{G}{c_2}, \quad f_{3st} = \frac{G}{c_3}$$

kelib chiqadi.

Prujinalar ketma-ket ulangani uchun ularning umumiy statik cho`zilishi uchchala prujina cho`zilishining yig`indisiga teng:

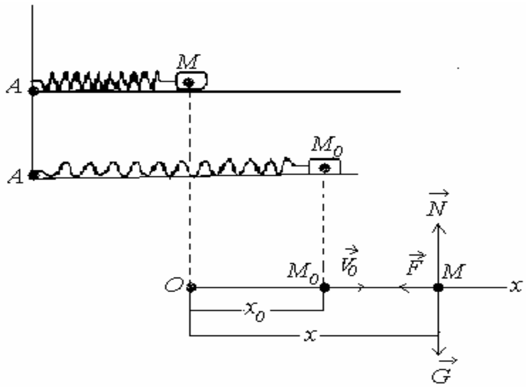
$$f_{st} = f_{1st} + f_{2st} + f_{3st}$$

yoki $$f_{st} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} + \frac{G}{c_3}$$

Son qiymatlarni qo`ysak: $$f_{st} = \frac{11G}{12} = \frac{11mg}{12}$$

(72.1) dan $c_{ekv} = \dfrac{G}{f_{st}} = \dfrac{mg}{f_{st}}$ yoki $c_{ekv} = \dfrac{12mg}{11mg} = 1{,}09\, N/m$

kelib chiqadi.



144-rasm

40-masala. Og`irligi G=100*N* bo`lgan *M* jism silliq gorizantal tekislikda turadi. Bu jism prujinaga biriktirilgan. Prujina esa *A* nuqtaga mahkamlangan (144-rasm). *M* jism o`ng tomonga $x_0$ =0,05*m* masofaga surilib *V =1m/s* boshlang`ich tezlik bilan qo`yib yuborilgan.Prujinaning bikirlik koeffitsiyenti $c=10^4$ *N/m*. *M* jism tebranma harakatining tenglamasi tuzilsin hamda tebranish davri aniqlansin.

Yechish. Sanoq sistemasini 144-rasmda ko`rsatilganidek tanlaymiz. *M* jismni moddiy nuqta desak,unga ogirlik kuchi $\vec{G}$,silliq sirtning reaksiya kuchi $\vec{N}$ hamda prujinani elastiklik kuchi $\vec{F}$ ta'sir qiladi.

Boshlang`ich paytda $x_0 = 0{,}05m, V_0 = 1m/s, F_x = -cx$ bo`lgani uchun *M* nuqtaning harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

bunda $$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{G}} = 31{,}4 s^{-1}$$

M nuqta harakati differensial tenglamasining boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (68.7) ga ko`ra quyidagicha bo`ladi:

$$x = (0{,}05\cos 31{,}4t + \frac{1}{31{,}4}\sin 31{,}4t)\ m$$

yoki $$x = (0{,}05\cos 31{,}4t + 0{,}03\sin 31{,}4t)\ m.$$

M jism tebranma harakatining tebranish davri (68.11) ga binoan

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cdot 3{,}14}{31{,}4} = 0{,}2 \ \ \mathbf{s} \quad \text{bo`ladi.}$$

41-masala. Moddiy nuqta $x = e^{-0{,}05t}(0{,}3\cos 5t + 0{,}5\sin 5t)$ qonunga ko`ra tebranma harakat qiladi. Mazkur nuqta harakat qonunini $x = ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha)$ ko`rinishda yozish uchun a qanday bo`lishi kerakligi aniqlansin.

Yechish. Masala shartidagi tebranma harakat qonunidan:

$$C_1 = 0{,}3\ ,\ C_2 = 0{,}5 \qquad (72.2)$$

Bizga ma'lumki, (72.2) dagi C_1 va C_2 o`zgarmaslar (68.8) ga asosan quyidagicha aniqlanar edi:

$$C_1 = a\sin\alpha, C_2 = a\cos\alpha \qquad (72.3)$$

(72.2) ni (72.3) ga qo`ysak:

$$\begin{cases} 0{,}3 = a\sin\alpha \\ 0{,}5 = a\cos\alpha \end{cases}$$

Bu tengliklarni kvadratga ko`tarib,hadma-had qo`shsak:

$$0{,}3^2 + 0{,}5^2 = a^2$$

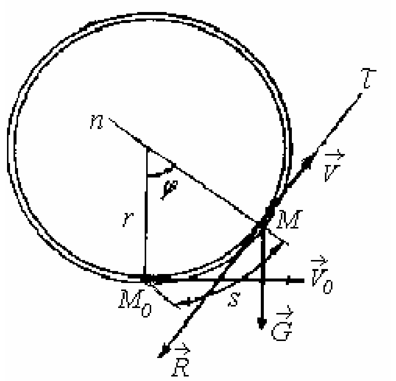
bu yerdan $a = \sqrt{0{,}09 + 0{,}25} = 0{,}583$ kelib chiqadi.

42-masala. Radiusi *r=49 sm* bo`lgan,vertikal tekislikda yotuvchi truba ichida $M$ sharcha joylashgan. Sharchaga tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo`lgan qarshilik kuchi *R=4mV* ta'sir qiladi. Sharchaning muvozanat holatidan chetga chiqishi juda kichik,boshlang`ich tezligi *V=20sm/s* deb hisoblanib,uning harakat tenglamasi tuzilsin *(g=980 sm/s²).*

Yechish. Masala shartiga ko`ra og`ir moddiy nuqta vertikal tekislikda radiusi r bo`lgan truba ichida tebranadi (145-rasm).Bu masalani yechish uchun $M\tau n$ tabiiy koordinata sistemasini tanlab olamiz. $M$ moddiy nuqtaga og`irlik kuchi $\vec{G}$, qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta'sir qiladi.

M_0 nuqtani sanoq boshi deb olsak, $s_0 = 0, V_0 = 20\,sm/s.$

M moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo`ladi:



145-rasm

$$m\frac{dV}{dt} = R_\tau + G_\tau$$

yoki

$$m\frac{dV}{dt} = -4mV - G\sin\varphi$$

φ juda kichik bo`lgani sababli $\sin\varphi \approx \varphi$.

Natijada: $$m\frac{dV}{dt} = -4mV - mg\varphi$$

kelib chiqadi.

Oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{dV}{dt} = -4V - g\frac{r\varphi}{r} \qquad (72.4)$$

$s = r\varphi, V = \dot{s}$ bo`lgani sababli (72.4) quyidagi ko`rinishni oladi:

$$\ddot{s} + 4\dot{s} + \frac{g}{r}s = 0 \qquad (72.5)$$

$b = 2, k^2 = \dfrac{g}{r}$ belgilashlarni kiritib (72.5) tenglamani quyidagicha ifodalaymiz:

$$\ddot{s} + 2b\dot{s} + k^2 s = 0 \qquad (72.6)$$

$k = \sqrt{\dfrac{g}{r}} = \sqrt{20}s^{-1}$,binobarin,$k > b$ bo`lgani uchun (72.6) tenglamaning echimi (69.6)ga ko`ra aniqlanadi:

$$x = ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}\,t + \alpha)$$

bundagi a *va* α (69.9) formulalardan topiladi:

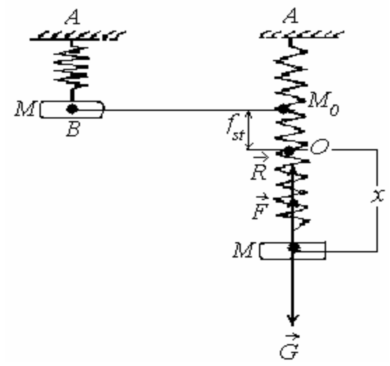
$$a = \sqrt{\frac{(k^2 - b^2)s_0^2 + (V_0 + bs_0)^2}{k^2 - b^2}} = 5 \quad sm,$$

$$tg\alpha = \frac{s_0\sqrt{k^2 - b^2}}{V_0 + bs_0} = 0, \quad \alpha = 0.$$

Shunday qilib,M nuqta $s = 0{,}05e^{-2t}\sin 4t$ m qonun bilan so`nuvchi tebranma harakat qiladi**.**

43-masala. m massali M jism bikirlik koeffitsiyenti c bo`lgan $AB$ prujina $B$ uchiga osilgan. $M$ jism ta'sirida prujinaning statik cho`zilishi f_{st} ga teng. Jismga muhitning qarshilik kuchi $R = 2\sqrt{mc}\dot{x}$ ta'sir qiladi. Boshlang`ich paytda $M$ jism o`zining statik muvozanat holatida bo`lib,tezligi V_0 ga teng (146-rasm). M jismning harakat qonuni aniqlansin.

Yechish. Sanoq sistemasining boshini M jismning statik muvozanat holati O nuqtada olamiz. Ox o`qni vertikal pastga yo`naltiramiz. Jismni moddiy nuqta deb qaraymiz.Bu nuqtaga og`irlik kuchi $\vec{G}$ **,**prujinaning elastiklik kuchi $\vec{F}$ ,muhitning qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta'sir qiladi.Boshlang`ich paytda $x_0 = 0, \dot{x} = V_0$. M moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:



146-rasm

$$m\ddot{x} = G - c\,(x + f_{st}) - 2\sqrt{mc}\,\dot{x} \qquad (72.7)$$

M nuqtaning statik muvozanat holatida $G = c\,f_{st}$ bo`lgani uchun (72.7) quyidagi ko`rinishni oladi:

$$m\ddot{x} + 2\sqrt{mc}\,\dot{x} + c\,x$$

yoki

$$\ddot{x} + 2\sqrt{\frac{c}{m}}\,\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

bunda

$$k^2 = \frac{c}{m}, \qquad 2\sqrt{\frac{c}{m}} = 2b \qquad (72.8)$$

belgilashlar qabul qilsak,

$$\ddot{x} + 2b\,\dot{x} + k^2\,x = 0 \qquad (72.9)$$

hosil bo`ladi.

(72.8) dan ko\`ramizki, $c$ va $m$ ning har qanday qiymatlari uchun $b=k$. Binobarin (72.9) differensial tenglama yechimi (69.22) ko\`rinishda bo\`ladi:

$$x = e^{-bt}\left[x_0 + (V_0 + bx_0)t\right]. \qquad (72.10)$$

(72.10) ga boshlang\`ich shartlar va $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g}{f_{st}}}$ ni qo\`ysak, M jismning harakat qonuni kelib chiqadi:

$$x = V_0 t e^{-t\sqrt{g/f_{st}}}$$

44-masala. Massasi $m = 3\,kg$ bo\`lgan jism prujinaga osilgan bo\`lib,unga vertikal ravishda uyg\`otuvchi kuch $Q = 10\sin 5t$ ta’sir qiladi.Dinamik koeffitsiyent $\lambda = 4$.Prujinaning bikrlik koeffitsiyenti topilsin.

Yechish. Mazkur masalani moddiy nuqta harakat diffirensial tenglamasini tuzmasdan hal etish mumkin.Buning uchun (70.13) dan foydalanamiz:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \dfrac{p^2}{k^2}}, \quad k^2 = \frac{e}{m}$$

bundan:
$$k^2 = \frac{p^2\lambda}{\lambda - 1}$$

yoki
$$\frac{c}{m} = \frac{p^2\lambda}{\lambda - 1} \qquad (72.11)$$

kelib chiqadi.

(72.11) dan:
$$c = m\frac{p^2\lambda}{\lambda - 1} \qquad (72.12)$$

Masala shartiga ko\`ra uyg\`otuivchi kuch $Q = 10\sin 5t$ bo\`lib, $p = 5$.

(72.12) ga son qiymatlarni qo\`ysak, $c = 100\ N/m$ kelib chiqadi.

45-masala. Moddiy nuqtaning harakat diffirensial tenglamasi $\ddot{x} + 81x = 12\sin 5t$. Majburiy tebranma harakat amplitudasi aniqlansin.

Yechish. Mazkur masalani hal etishda (70.11) dan foydalanamiz:

$$A = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|}$$

Masala shartidagi moddiy nuqta harakat diffirensial tenglamasidan:

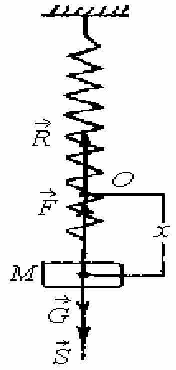
$$P_0 = 12, \quad k^2 = 81, \quad p = 5$$

Natijada

$$A = \frac{12}{81 - 25} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14} = 0{,}214 \quad \text{(uzun.bir)} \ \text{bo\`ladi.}$$

46-masala.Bikirlik koeffitsiyenti c=4000 N/m bo\`lgan prujinaga og\`irligi G=20 N bo\`lgan $M$ jism osilgan (147-rasm). Moddiy nuqta deb qaraluvchi bu jismga davriy sifatda o\`zgaruvchi $S = 117{,}72\sin pt\,N$ uyg\`otuvchi kuch va tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo\`lgan $R = 5\sqrt{mc}\dot{x}\,N$ qarshilik kuchi ta’sir qiladi (m−jism massasi).Uyg\`otuvchi kuchning doiraviy takrorligi $p$ qanday bo\`lganda majburiy tebranish amplitudasi A eng katta qiymatga erishadi?

Yechish. Sanoq sistemasining boshi qilib jismning statik muvozanat holatini olamiz. Ox o`qni vertikal bo`yicha harakat yo`nalishi tomon yo`naltiramiz.



M nuqtaga $\vec{G}$ og`irlik kuchi, $\vec{F}$ qaytaruvchi kuch, $\vec{R}$ qarshilik kuchi hamda $\vec{S}$ uyg`otuvchi kuch ta'sir qiladi.

M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{x} = G - c(x + f_{st}) - 5\sqrt{mc}\dot{x} + 117{,}72\sin pt$$

Bu ifodaning har ikki tomonini m ga bo`lib, $G = cf_{st}$ ni e'tiborga olsak,u

147-rasm

$$\ddot{x} + 0{,}5\sqrt{c/m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{117{,}72}{m}\sin pt \qquad (72.13)$$

ko`rinishga keladi.

$$0{,}5\sqrt{c/m} = 2b, \quad \frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{117{,}72}{m} = P_0 \qquad (72.14)$$

belgilashlar olinsa,(72.13) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt$$

(72.14) ga son qiymatlarni qo`ysak,

$$b = 11{,}06c^{-1}, k = 44{,}2c^{-1}, P_0 = 58{,}8\frac{m}{s^2} \qquad (72.15)$$

kelib chiqadi.

Masala shartidagi noma'lumlarni aniqlash uchun (72.13) differensial tenglamaning yechimini aniqlash shart emas.

(71.18) ga ko`ra $b/k = h;$ bundan $h = \dfrac{11{,}06}{44{,}2} \approx 0{,}3 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

bo`ladi.Bu holda uyg`otuvchi kuch doiraviy takrorligi (71.22) formuladan,majburiy tebranish amplitudasining maksimum qiymatga esa (71.23) formuladan foydalanib aniqlanadi.

(72.14) ni (71.22) va (71.23) ga qo`ysak,

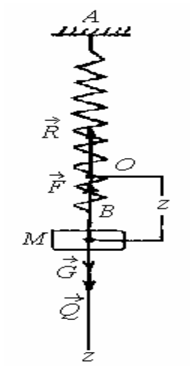
$$p = \sqrt{k^2 - 2b^2} = \sqrt{1960 - 242} = 41{,}5 \quad 1/s,$$

$$A_{\max} = \frac{P_0}{2b\sqrt{k^2 - b^2}} = 0{,}0321 \quad m$$

kelib chiqadi.

47-**masala**. m massali M jism bikirlik koeffitsiyenti c bo`lgan $AB$ prujina uchiga osilgan.Jismga $Q_z = H\sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t$ uyg`otuvchi kuch hamda muhitning qarshilik kuchi $R = -\mu\dot{z}$ ta'sir qiladi.Jism majburiy tebranma harakatining qonuni hamda majburiy tebranish amplitudasi aniqlansin (148-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasining boshi qilib jismning statik muvozanat holatini olamiz. Oz o`qni vertikal bo`ylab,nuqta harakati tomon yo`naltiramiz. Jismni moddiy nuqta deb qarasak,unga og`irlik kuchi $\vec{G}$, uyg`otuvchi kuch $\vec{Q}$, qaytaruvchi kuch $\vec{F}$ va muhit qarshilik kuchi $\vec{R}$ ta’sir qiladi.



148-rasm

Masalani yechish uchun M nuqtaning harakat differensial tenglamasini tuzamiz:

$$m\ddot{z} = G - c\,(z + f_{st}) - \mu\,\dot{z} + H\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t$$

Bu yerda $G = c\,f_{st}$ bo`lishini e’tiborga olib,

$$b = \frac{\mu}{2m} \ , \ k = p = \sqrt{\frac{c}{m}} \ , \ P_0 = \frac{H}{m} \qquad (72.16)$$

belgilashlar kiritsak, differensial tenglama

$$\ddot{z} + 2b\,\dot{z} + k^2\,z = P_0 \sin p\,t \qquad (72.17)$$

ko`rinishni oladi.

Jism majburiy tebranma harakati tenglamasini aniqlash uchun (72.17) ning xususiy yechimini topish kerak. U (71.13) tenglama yordamida aniqlanadi:

$$x_2 = A_q \sin(p\,t + \beta) \qquad (72.18)$$

Bu ifodadagi A_q va β (71.11) hamda (71.12) formulalardan foydalanib topiladi.

(72.16) ni (71.11) va (71.12) ga qo`ysak,

$$A_q = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{m}{c}} \ , \ \beta = \frac{\pi}{2}$$

kelib chiqadi.

Demak, M jism majburiy tebranma harakati

$$z = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{m}{c}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Nazorat savollari

1.Tebranma harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Tebranma harakatni izohlaydigan asosiy parametrlarni yozing.
3.Davr deb nimaga aytiladi?
4.Chastota deganda nimani tushunasbz?
5.Faza deb nimaga aytiladi?
6.Tebranma harakat necha turga bo`linadi?
7.Erkin tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
8.Qanday harakat majburiy tebranma harakat deyiladi?
9.So`nuvchi tebranma harakat deb nimaga aytiladi?
10. $\ddot{x} - k^2 x = 0$ formulada k^2 bilan qanday nisbat belgikangan?
11.Tebranma harakat amplitudasi deb nimaga aytiladi?
12.Moddiy nuqta garmonik tebranma harakat tenglamasini yozing.
13.Rezonans hodisasini izohlang.
14.Majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini yozing.
15.Moddiy nuqta erkin tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.
16.Moddiy nuqta so`nuvchi tebranma harakatining differensial tenglamasini yozing.
17.Qarshilik kichik ($b<k$) bo`lganda so`nuvchi tebranma harakat qonuni qanday yoziladi?
18.Moddiy nuqta majburiy tebranma harakatining (muhitni qarshiligi hisobga olinmagan holdagi) differensial tenglamasini yozing.
19. Moddiy nuqta majburiy tebranma harakat (muhit qarshiligi hisobga olinmagan holdagi) qonunini yozing.
20.Qanday harakat aperiodik harakatdan iborat?
21.Muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat differensial tenglamasini yozing.
22.Muhit qarshiligidagi majburiy tebranma harakat qonunini yozing.
23.” *Tepish* ” hodisasi nima?
24.So`nuvchi tebranishda amplituda qanday o`zgaradi?
25.Aperiodik harakat tenglamasi qanday?
26.Dekrement nima?
27.Dinamik koeffitsiyent qanday aniqlanadi?
28.Rezonans holda majburiy tebranma harakat qonunini yozing.
29.Fazalar siljisi nima?
30.Qaytaruvchi va qarshilik kuchining koeffitsiyentlari teng bo`lganda moddiy nuqta aperiodik harakatining tenglamasini yozing.

XIV bob

Mexanik sistema va moddiy nuqta dinamikasining umumiy teoremalari

73 - §. Mexanik sistema. Ichki va tashqi kuchlar

Harakatlari o`zaro bir-biriga bog`liq moddiy nuqtalar sistemasi mexanik sistema deyiladi.Mexanik sistema erkin va bog`langan holatda bo`lishi mumkin.

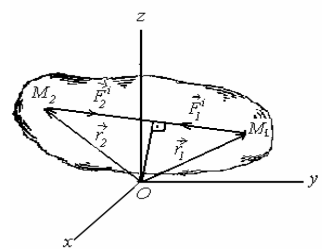
Mexanik sistema nuqtalarining harakati hech qanday sabab bilan chegaralanmagan,ya'ni nuqtalar orasidagi bog`lanishlar o`zaro ta'sir kuchidan iborat bo`lsa,mazkur sistema erkin bo`ladi.

Mexanik sistema nuqtalarining harakati biror sabab bilan chegaralangan ,ya'ni mazkur sistema nuqtalariga bog`lanishlar qo`yilgan bo`lsa,u bog`lanishdagi sistema deb ataladi.

Erkin mexanik sistemaga misol qilib Quyosh sistemasini olish mumkin,chunki Quyosh va planetalar o`zaro butun olam tortilish kuchi ta'sirida bo`ladi.

Bog`lanishdagi mexanik sistemaga har qanday mashina mexanizmlarini misol keltirish mumkin.Chunki mashina mexanizmlarining qismlari bir-birlari bilan sharnirlar,sterjenlar,qayishlar yoki tishli q'ildiraklar vositasida bog`langan bo`ladi.

Sistemaning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa o`zgarmay qolsa, u o`zgarmas sistema deb ataladi.Bunday sistemaga qattiq jism misol bo`la oladi.



149-rasm

Mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar shartli ravishda ichki va tashqi kuchlarga ajratiladi. Mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalarning o`zaro ta'siri ichki kuchlar deyiladi.

Mexanik sistema tarkibiga kirmaydigan jism (nuqta) lar tomonidan qo`yilgan kuchlar tashqi kuchlar deb ataladi.

Ichki kuchlar $\vec{F}^i$, tashqi kuchlar $\vec{F}^e$, shuningdek, ichki kuchlar bosh vektori $\vec{R}^i$,tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e$ bilan belgilanadi.Biror sistema uchun tashqi deb hisoblanadigan kuch ikkinchi sistemaga nisbatan ichki kuch bo`lishi ham mumkin.Masalan,butun Quyosh sistemasining harakati tekshirilganda planetalarning o`zaro tortish kuchi ichki kuch hisoblanadi.Yerning o`z orbitasi bo`ylab Quyosh atrofidagi harakati tekshirilganda tortish kuchi tashqi kuch bo`ladi.

Ichki kuchlar xossalarini ko`rib chiqamiz.

1.Sistema ichki kuchlarining bosh vektori nolga teng.Haqiqatan,Nyutonning III qonuniga ko`ra sistema ixtiyoriy ikki $M_1$ *va* $M_2$ nuqtalarining o`zaro ta'sir kuchlari miqdor jihatdan teng va bir to`g`ri chiziq bo`ylab qarama-qarshi tomonga yo`nalgan (149-rasm) $\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$.

Binobarin, $\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0$.Bu xulosani sistemaning barcha nuqtalari uchun tatbiq etish mumkin.Shunday qilib,

$$\vec{R}^i = \sum \vec{F}_\nu^i = 0 \qquad (73.1)$$

(73.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,

$$R_x^i = \sum F_{\nu x}^i = 0,$$
$$R_y^i = \sum F_{\nu y}^i = 0, \qquad R_z^i = \sum F_{\nu z}^i = 0 \tag{73.2}$$

hosil bo`ladi.

2. Ichki kuchlarning biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng.

$$\overrightarrow{M}_0^i = \sum \vec{m}_0 (\vec{F}_\nu^i) = 0 \tag{73.3}$$

Bu xossaning o`rinli bo`lishi ham Nyutonning uchinchi qonunidan foydalanib ko`rsatiladi.

(73.3) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,

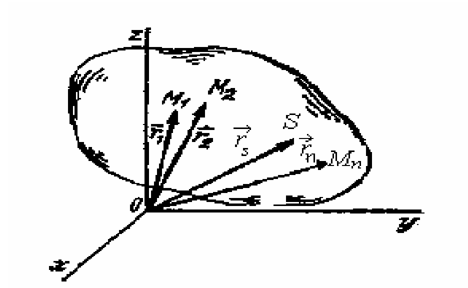
$$M_x^i = \sum m_x (\vec{F}_\nu^i) = 0, \quad M_y^i = \sum m_y (\vec{F}_\nu^i) = 0, \quad M_z^i = \sum m_z (\vec{F}_\nu^i) = 0$$

kelib chiqadi.

Ichki kuchlarning bu xossalaridan ichki kuchlar o`zaro muvozanatlashadi degan natija kelib chiqmaydi,chunki bu kuchlar sistemaning turli nuqtalariga qo`yilgan.Shuning uchun ichki kuchlar sistema nuqtalarining o`zaro ko`chishiga ta’sir qiladi. Absolyut qattiq jism o`rganilayotganda ichki kuchlar muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil etadi.

74 - §. Mexanik sistema massasi va massa markazi

Mexanik sistemaning harakati faqat ta’sir kuchlarigagina bog`liq bo`lmay,balki massaning taqsimlanishiga bog`liq**.**Bunday kattaliklar haqidagi ta’limot massalar geometriyasi deb ataladi.



150-rasm

Mexanik sistema $M_1, M_2, \cdots, M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo`lib, ularning massalari mos ravishda $m_1, m_2, \cdots, m_n$ bo`lsin (150-rasm).

Sistema nuqtalari massalarining arifmetik yig`indisiga sistemaning massasi deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$M = \sum m_\nu \tag{74.1}$$

Radius-vektori
$$\vec{r}_S = \frac{\sum m_\nu \vec{r}_\nu}{\sum m_\nu} \tag{74.2}$$

formula yordamida aniqlanadigan geometrik nuqta $-S$ sistemaning inersiya (massa) markazi deb ataladi.

(74.2) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,

$$x_S = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{\sum m_\nu}, \quad y_S = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{\sum m_\nu}, \quad z_S = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{\sum m_\nu} \tag{74.3}$$

kelib chiqadi.

Ma’lumki,og`irlik markazining radius-vektori quyidagicha aniqlanar edi:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum G_\nu \vec{r}_\nu}{\sum G_\nu} \tag{74.4}$$

(74.2) formulaning tashqi ko`rinishi (74.4) ga o`xshasa ham mazmun jihatidan farq qiladi.Og`irlik markazi jismga ta'sir qiluvchi og`irlik kuchlari teng ta'sir etuvchisining qo`yilish nuqtasidir. Og`irlik markazi tushunchasi faqat qattiq jismgagina tegishli. Inersiya markazi tushunchasi har qanday moddiy nuqtalar sistemasiga tegishli bo`lib,u sistemadagi massa taqsimlanishining xarakteristikasidan iborat. Shuningdek,bu tushuncha sistemaga qanday kuchlar ta'sir qilayotganiga bog`liq emas.

(74.2) , (74.3) dan mos ravishda

$$M\vec{r}_S = \sum m_\nu \vec{r}_\nu \qquad (74.5)$$

va

$$\begin{aligned} M x_S &= \sum m_\nu x_\nu \\ M y_S &= \sum m_\nu y_\nu \\ M z_S &= \sum m_\nu z_\nu \end{aligned} \qquad (74.6)$$

kelib chiqadi.

(74.5) sistemaning qutbga nisbatan statik momenti, (74.6) esa sistemaning *Oyz*, *Oxz, Oxy* tekisliklarga nisbatan statik momenti deb ataladi.

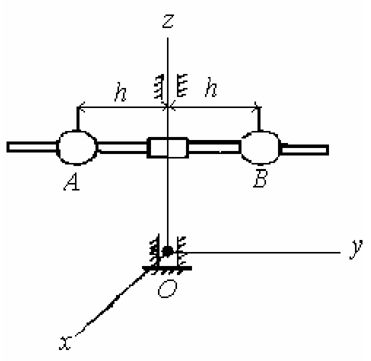
Sistema inersiya markazini qutb deb olsak, shu markazga nisbatan sistemaning statik momenti nolga teng bo`ladi: $\sum m_\nu \rho_\nu = M\rho_S = 0$

bunda ρ_ν bilan M_ν nuqtaning inersiya markaziga nisbatan radius-vektori, ρ_S bilan inersiya markazining radius-vektori belgilangan.

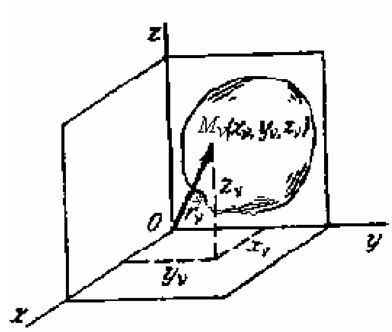
Sistemaning inersiya markazidan o`tuvchi ixtiyoriy tekislikka nisbatan statik momenti ham nolga teng bo`ladi.

75 - §. Sistemaning inersiya momenti. Inersiya radiusi

Massa markazining holati sistemada massa taqsimlanishini to`liq xarakterlamaydi. Masalan,*Oz* o`qdan *h* masofada turuvchi ikkita bir xil *A* va *B* sharlar holatini bir xil masofaga o`zgartirsak (151-rasm) , sistema massa markazining holati o`zgarmaydi. Lekin sistemada massa taqsimlanishi o`zgaradi,ya'ni *A* va *B* sharlarning Oz o`q atrofidagi aylanishi yo tezlashadi yoki sekinlashadi.



151-rasm



152-rasm

Sistemaning aylanma harakatidagi massa taqsimlanishini xarakterlaydigan miqdor uning inersiya momentidir.

Sistemaning o`qqa, nuqtaga va tekislikka nisbatan inersiya momentlari tushunchalari bilan tanishib chiqamiz. Ixtiyoriy $O$ nuqtadan uchta o`zaro perpendikulyar o`qlarni , shuningdek,koordinata tekisliklarini o`tkazamiz (152-rasm).

Sistemaning biror o`qqa nisbatan inersiya momenti deb sistema har bir zarrachasi massasini shu zarrachadan mazkur o`qqacha bo`lgan masofa kvadratiga ko`paytmasining butun sistema zarrachalari bo`yicha olingan yig`indisiga aytiladi.

Sistemaning Oz o`qqa nisbatan inersiya momentini I_z bilan belgilasak, ta'rifga muvofiq

$$I_z = \sum m_\nu h_\nu^2 \tag{75.1}$$

bunda M_ν nuqtadan Oz o`qqacha bo`lgan masofa h_ν deb olingan.

Inersiya momentining SI sistemadagi o`lchov birligi *kgm*$^2$ *,* texnik sistemada esa kg*ms*$^2$ bo`ladi.

O`qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaganda sistema zarrachalaridan o`qqacha bo`lgan masofani shu zarrachalar koordinatalari orqali ifodalash mumkin. $M_\nu$ moddiy nuqta koordinatalarini $x_\nu, y_\nu, z_\nu$ desak, sistemaning $Ox$ , $Oy$ , $Oz$ o`qlariga nisbatan inersiya momentlari quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2), \\ I_y &= \sum m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2), \\ I_z &= \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2). \end{aligned} \tag{75.2}$$

Sistemaning koordinatalar boshiga nisbatan inersiya momenti

$$I_0 = \sum m_\nu r_\nu^2 = \sum m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) \tag{75.3}$$

bo`ladi.

(75.2) ifodalarni hadlab qo`shib, (75.3) bilan taqqoslasak, sistemaning koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti bilan koordinata o`qlariga nisbatan inersiya momentlari orasidagi quyidagi bog`lanishni hosil qilamiz:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z \tag{75.4}$$

Sistemaning yOz , xOz , va xOy tekisliklarga nisbatan inersiya momentlari:

$$\begin{aligned} I_{yOz} &= \sum m_\nu x_\nu^2, \\ I_{xOz} &= \sum m_\nu y_\nu^2, \\ I_{xOy} &= \sum m_\nu z_\nu^2 \end{aligned} \tag{75.5}$$

formulalardan foydalanib topiladi.

Bir jinsli jismning biror o`qqa nisbatan inersiya momentini uning shu o`qqa nisbatan inersiya radiusi deb ataluvchi chiziqli kattalik ρ_z dan foydalanib ham aniqlash mumkin:

$$I_z = M \rho_z^2 \tag{75.6}$$

Bir jinsli jismning o`qqa nisbatan inersiya radiusi tajribalar vositasida aniqlanib,jadvallarda berilgan bo`ladi.

Agar jismning biror o`qqa nisbatan inersiya momenti aniq bo`lsa, uning shu o`qqa nisbatan inersiya radiusini (75.6) ga ko`ra

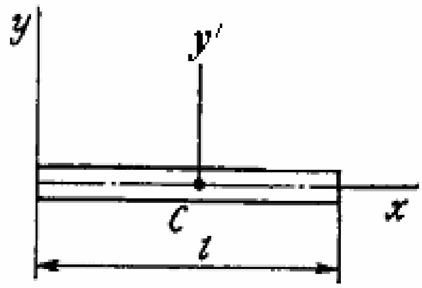
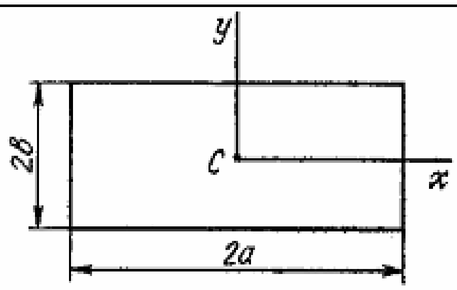
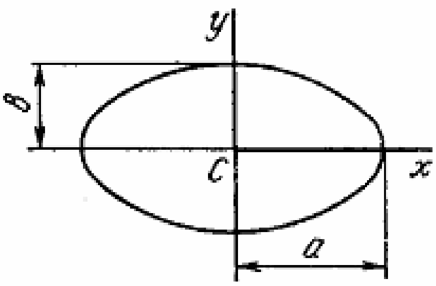
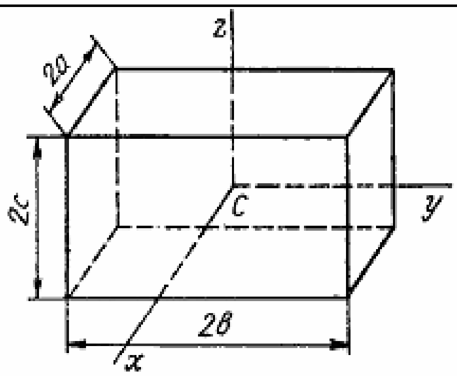
$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \tag{75.7}$$

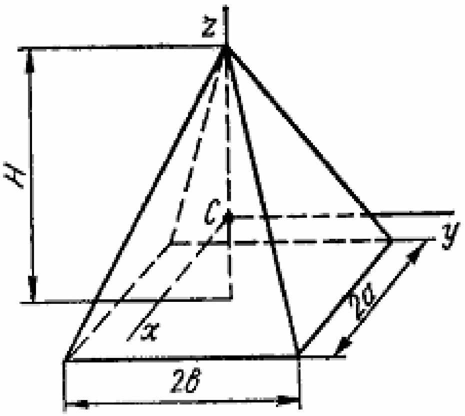
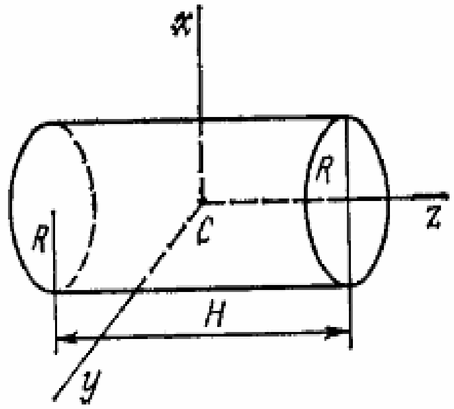
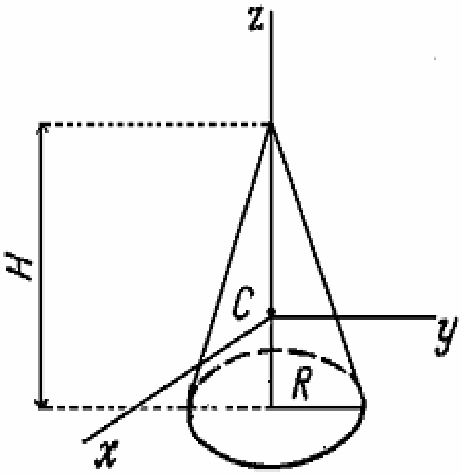
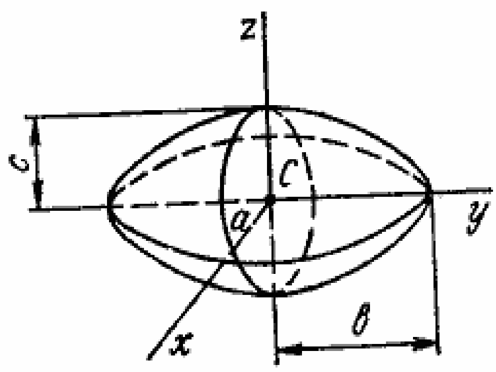
formuladan aniqlash mumkin.

Qattiq jismning markazdan qochma inersiya momentlari quyidagich topiladi:

$$I_{yz} = \sum m_\nu y_\nu z_\nu \quad , \quad I_{zx} = \sum m_\nu z_\nu x_\nu \quad , \quad I_{xy} = \sum m_\nu x_\nu y_\nu \qquad (75.8)$$

76-§.Ba`zi bir jinsli jismlarning inersiya mometlari

Jism xili	Jism shakli	Inersiya momenti
1	**2**	**3**
Ingichka sterjen		$J_y = \frac{1}{3} Ml^2$ $J_y' = \frac{1}{12} Ml^2$
To`g`ri to`rtbur-chak		$J_x = \frac{1}{3} Mb^2$ $J_y = \frac{1}{3} Ma^2$ $J_{C_z} = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$
Ellips		$J_x = \frac{1}{4} Mb^2$ $J_y = \frac{1}{4} Ma^2$ $J_{C_z} = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$
To`g`ri bur-chakli para-lellopiped		$J_x = \frac{1}{3} M(b^2 + c^2)$ $J_y = \frac{1}{3} M(a^2 + c^2)$ $J_z = \frac{1}{3} M(a^2 + b^2)$

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>To`g`ri burchakli piramida</td><td>
</td><td>$J_x=\frac{M}{20}\left(\frac{3}{4}H^2+4b^2\right)$
$J_y=\frac{M}{20}\left(\frac{3}{4}H^2+4a^2\right)$
$J_z=\frac{M}{5}(a^2+b^2)$</td></tr>
<tr><td>Doiraviy silindr</td><td>
</td><td>$J_x=J_y=\frac{M}{4}\left(\frac{H^2}{3}+R^2\right)$
$J_z=\frac{1}{2}MR^2$</td></tr>
<tr><td>Doiraviy konus</td><td>
</td><td>$J_x=J_y=\frac{3M}{20}\left(\frac{H^2}{4}+R^2\right)$
$J_z=\frac{3}{10}MR^2$</td></tr>
<tr><td>Ellipsoid</td><td>
</td><td>$J_x=\frac{M}{5}(b^2+c^2)$
$J_y=\frac{M}{5}(a^2+c^2)$
$J_z=\frac{M}{5}(a^2+b^2)$</td></tr>
</table>

77 - §. Mexanik sistema harakatining differensial tenglamalari

Mexanik sistema $M_1, M_2, ..., M_n$ nuqtalardan tashkil topgan bo`lib,sistema nuqtalariga tashqi va ichki kuchlar ta'sir etadi.Bu sistemaning har bir M_v nuqtasi uchun dinamikaning asosiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m_v \vec{a}_v = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \qquad (77.1)$$

M_v nuqta radius-vektorini $\vec{r}_v$,tezligini $\vec{V}_v$ desak,uning tezlanishi:

$$\vec{a}_v = \frac{dV_v}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2}$$

Shuning uchun (77.1) quyidagicha yoziladi:

$$m_v \frac{d\vec{V}_v}{dt} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i$$

yoki

$$m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i$$

v ga 1 dan n gacha bo`lgan ketma-ket qiymatlarni qo`yib mexanik sistema harakati differensial tenglamalarining vektor usulda ifodalanishini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \dfrac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ m_n \dfrac{d\vec{V}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases} \qquad (77.2)$$

yoki

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2 \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ m_n \dfrac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases} \qquad (77.3)$$

(77.3) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,mexanik sistema harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ifodalari hosil bo`ladi.Bu differensial tenglamalar soni $3n$ ta bo`ladi.

Shunday qilib,sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar berilgan bo`lsa,sistemani tashkil etuvchi moddiy nuqtalar harakatini aniqlash uchun vektor usulda $n$ ta,koordinata usulida $3n$ ta ikkinchi tartibli differensiyal tenglamalar sistemasini yechish,bunda hosil bo`ladigan integral doimiylarini aniqlash kerak.Sistemani tashkil etuvchi nuqtalar soni qancha ko`p bo`lsa,bu differensial tenglamalardan foydalanish shuncha murakkablashadi.Shunga ko`ra,mexanik sistema dinamikasining asosiy masalalarini yechishda (77.3) tenglama ko`rinishdagi differensial tenglamalardan foydalanishga qaraganda,(77.3) da turlicha shakl almashtirishlar bilan hosil qilinadigan dinamikaning umumiy teoremalari va prinsiplarini qo`llash qulay bo`ladi.

78 - §. Sistema inersiya markazining harakati haqidagi teorema

Sistema inersiya (massa) markazining unga qo`yilgan tashqi va ichki kuchlar ta'siridagi harakatini aniqlash uchun sistema harakatining differensial tenglamalaridan foydalanamiz.

(77.3) tenglamalarni hadlab qo`shamiz:

$$\sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i$$

yoki

$$\sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \vec{R}^e + \vec{R}^i$$

Ichki kuchlarning xususiyatiga ko`ra $\vec{R}^i = 0$. Shuning uchun

$$\sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} = \vec{R}^e \tag{78.1}$$

(74.5) ga ko`ra

$$M\vec{r}_S = \sum m_v \vec{r}_v$$

Bu ifodadan vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$M\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} = \sum m_v \frac{d^2\vec{r}_v}{dt^2} \tag{78.2}$$

(78.2) ga binoan (78.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$M\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} = \overline{R}^e \tag{78.3}$$

(78.3) ifodani moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasi (65.2) bilan taqqoslab,massa markazining harakati haqidagi teoremani hosil qilamiz:sistema massasi inersiya markazida joylashgan deb qabul qilinsa,u markaz tashqi kuchlar bosh vektori ta'sirida xuddi moddiy nuqta kabi harakatlanadi.

(78.3) ni koordinata o`qlariga proyeksiyalasak:

$$M\frac{d^2x_S}{dt^2} = R_x^e, \qquad M\frac{d^2y_S}{dt^2} = R_y^e, \qquad M\frac{d^2z_S}{dt^2} = R_z^e \tag{78.4}$$

sistema massa markazi harakati differensial tenglamalarining koordinata usulidagi ifodalari kelib chiqadi.

Kinematikadan ma'lumki,ilgarilama harakatdagi jismning holati mazkur jism bitta nuqtasining holati bilan aniqlanar edi.Shuning uchun (78.3) yoki (78.4) tenglamalarni jismning ilgarilama harakati differensial tenglamalari deb atash mumkin.

(78.3) ni tabiiy koordinata o`qlariga proyeksiyalasak, tabiiy usuldagi massa markazi harakatining differensial tenglamasi kelib chiqadi:

$$M\frac{dV_S}{dt} = R_\tau^e\ ,\ M\frac{V_S^2}{\rho} = R_n^e \tag{78.5}$$

79 - §. Inersiya markazi harakatining saqlanish qonuni

Inersiya markazining harakati haqidagi teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1.Sistemaga ta’sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo`lsin,ya’ni $\vec{R}^e = 0$. Bu holda (78.3) dan $\vec{V}_S = \overrightarrow{const}$ kelib chiqadi.

Demak, *sistemaga ta’sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo`lsa,inersiya markazi to`g`ri chiziqli teng o`lchovli harakat qiladi.* Agar boshlang`ich paytda massa markazi tinch holatda bo`lsa, $\vec{V}_S = 0$ dan $\vec{r}_S = \overrightarrow{const}$ hosil bo`ladi; ya’ni inersiya markazi berilgan koordinata sistemasiga nisbatan o`z holatini o`zgartirmaydi.

2. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o`qdagi proyeksiyasi, masalan $R_x^e$ nolga teng bo`lsin. U holda (78.4) ning birinchisidan $a_{Sx} = 0$ yoki $V_{Sx} = \dot{x}_S = const$ hosil bo`ladi.

Demak, *sistemaga ta’sir qiluvchi kuchlar bosh vektorining biror o`qdagi proyeksiyasi nolga teng bo`lsa, inersiya markazi tezligining shu o`qdagi proyeksiyasi o`zgarmas ekan.*Xususiy holda $\dot{x}_S = 0$ bo`lsa , inersiya markazining $Ox$ o`q bo`yicha koordinatasi o`zgarmay qoladi: $x_S = const.$

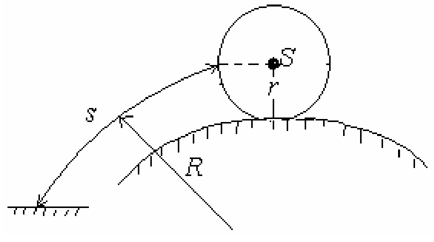
Bu natijalar *sistema inersiya markazi harakatining saqlanish qonuni* deyiladi.

80 - §. Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani qo`llab masalalar yechish

Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani qo`llab masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Sistemaga ta’sir etuvchi hamma kuchlar rasmda tasvirlanadi.
3. Sistemaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektorining tanlab olingan koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari aniqlanadi.
4. Sistema inersiya markazining koordinatalari aniqlanib, ulardan vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosila hisoblanadi.
5. Sistema inersiya markazi harakatining differensial tenglamalari tuziladi.
6. Tuzilgan differensial tenglamaga ko`ra yoki dinamikaning birinchi, yoki ikkinchi masalasi yechilib, noma’lum kinematik parametrlar topiladi.

48 - masala. Massasi $m = 15\ kg$ bo`lgan g`ildirakning massa markazi S $r = 1,3\ m$ radiusli aylana bo`yicha $s = 4t$ qonunga ko`ra harakatlanadi. G`ildirakka ta’sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori aniqlansin (153-rasm).



153-rasm

Yechish. Masala shartiga ko`ra g`ildirak massa markazining harakati tabiiy usulda berilgan,ya’ni:

$$s = 4t \tag{80.1}$$

Massa markazi harakati differensial tenglamasi (78.5) ni tuzamiz:

$$m\frac{dV_S}{dt} = R^e_{\tau_\tau}$$
$$m\frac{V_S^2}{r} = R^e_n \qquad (80.2)$$

(80.1) dan vaqt bo`yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosila olamiz:

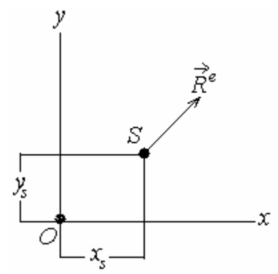
$$V_S = \frac{ds}{dt} = 4\,, \quad a_S^\tau = \frac{dV_S}{dt} = 0 \qquad (80.3)$$

(80.3) va masala shartidagi son qiymatni (80.2) ga qo`ysak:

$$R^e_\tau = 0\,, \quad R^e_n = 185\ N$$

Natijada $R^e = \sqrt{(R^e_\tau)^2 + (R^e_n)^2} = 185N$ hosil bo`ladi.

49 – masala. Massasi *m=10kg* bo`lgan mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e = 3\vec{i} + 6t\vec{j}$. Boshlang`ich paitda sistema inersiya markazi *O* nuqtada bo`lib,tinch holatda bo`lgan. y_S *=0,8 m* bo`lgan vaqtda sistema inersiya markazi tezligining moduli topilsin (154-rasm).



154-rasm

Yechish. Masala shartiga ko`ra sistema *Oxy* tekisligida harakat qiladi. Suning uchun sanoq sistemasi 154-rasmdagidek bo`ladi. Ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori $\vec{R}^e$ dan iborat. Sistema harakatining boshlang`ich shartlari quyidagicha:

$$t=0\,,\ x_S=0\,,\ y_S=0\,,\ \dot{x}_S=0\,,\ \dot{y}_S=0$$

Mexanik sistema inersiya markazi harakatining differensial tenglamasi (78.4) ning birinchi ikkitasini tuzamiz:

$$m\ddot{x}_S = R^e_x$$
$$m\ddot{y}_S = R^e_y$$

bu erda $R^e_x = 3\,,\ R^e_y = 6t$ .Shuning uchun

$$m\ddot{x}_S = 3\,,$$
$$m\ddot{y}_S = 6t$$

bu yerdan

$$\begin{cases} \ddot{x}_S = \dfrac{3}{m} \\ \ddot{y}_S = \dfrac{6t}{m} \end{cases}$$

kelib chiqadi.

Mazkur differensial tenglamalarni integrallaymiz:

$$\dot{x}_S = \frac{3}{m}t + C_1 \quad , \quad x_S = \frac{3t^2}{2m} + C_1 t + C_2\ ;$$

$$\dot{y}_S = \frac{6t^2}{2m} + C_3 \quad , \quad y_S = \frac{6t^3}{6m} + C_3 t + C_4$$

Boshlang`ich shartlarga asosan $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ bo`ladi.

Natijada

$$\begin{cases} \dot{x}_S = \dfrac{3}{m}t \\ \dot{y}_S = \dfrac{6t^2}{2m} \end{cases} \qquad (80.4)$$

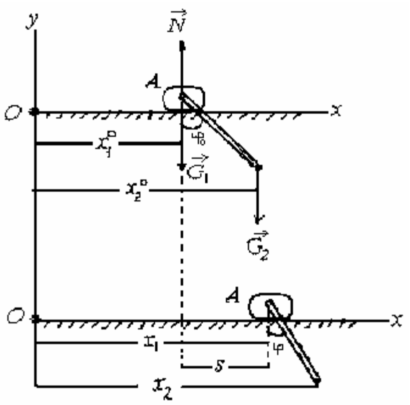
$$\begin{cases} x_S = \dfrac{3t^2}{2m} \\ y_S = \dfrac{t^3}{m} \end{cases} \qquad (80.5)$$

(80.5) ning ikkinchisidan $t^3 = m\,y_S$ kelib chiqadi.Son qiymatlarni qo`ysak: *t=2sekund.* Vaqtning bu qiymatini (80.4) ga qo`yamiz: $\dot{x}_S = 0{,}6$, $\dot{y}_S = 1{,}2$

Demak,

$$V_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2}$$

yoki $\quad V_S = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}2^2} = 1{,}34$ *m/s* .



155-rasm

50-masala. Elliptik mayatnik silliq gorizontal tekislik bo`ylab ilgarilama harakat qiluvchi $m_1$ massali $A$ jism va u bilan $AB$ sterjen orqali bog`langan m_2 massali B yukdan iborat. Sterjen uzunligi *l*.

Boshlang`ich paytda sterjen $\varphi_0$ burchakka burilgan bo`lib,boshlang`ich tezliksiz qo`yib yuborilgan.Sterjenning og`irligi hisobga olinmay,*A* jismning ko`chishi og`ish burchagi φ orqali aniqlansin (155-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 155-rasmdagidek tanlaymiz. Sistema A jism va B yukdan iborat bo`lib,unga $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ og`irlik kuchlari hamda gorizontal tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$ ta'sir qiladi.Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar bosh vektorining Ox va Oy o`qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi:

$$R_x^e = 0\,,\; R_y^e = N - G_1 - G_2$$

Masala shartida A jism ko`chishini topish talab etilgani sababli sistema inersiya markazining absissasini yozib olamiz:

$$x_S = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2} \qquad (80.6)$$

Boshlang`ich paytda $A$ jism va $B$ yukning koordinatalari mos ravishda $x_1^0$, $x_2^0 = x_1^0 + l\sin\varphi_0$. Bularni (80.6) ga qo`yamiz:

$$x_S^0 = \frac{m_1\,x_1^0 + m_2\,x_1^0 + m_2\,l\sin\varphi_0}{m_1 + m_2} \qquad (80.7)$$

Sterjen biror φ burchakka burilganda A jism s masofaga siljisin. Bu holda $x_1 = x_1^0 + s$, $x_2 = x_1^0 + s + l\sin\varphi$ bo`lib ,sistema inersiya markazining absissasi :

$$x_S = \frac{m_1 x_1^0 + m_1 s + m_2 x_1^0 + m_2 s + m_2 l \sin\varphi}{m_1 + m_2} \qquad (80.8)$$

Boshlang`ich paytda sistema qo`zg`almas hamda $R_x^e = 0$ bo`lgani uchun sistema inersiya markazining absissasi o`zgarmaydi,ya'ni: x_s *=const.*

Bundan foydalanib (80.7) bilan (80.8) ni tenglashtiramiz:

$$(m_1 + m_2)s = m_2 l(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)$$

Bu tenglikdan

$$s = \frac{m_2 l(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}{m_1 + m_2}$$

kelib chiqadi.

Demak, $\sin\varphi_0 > \sin\varphi$ da A jism o`ng tomonga, $\sin\varphi_0 < \sin\varphi$ da chap tomonga ko`chadi.

81 - §. Kuch impulsi

M moddiy nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida bo`lsin.

Kuchning elementar vaqt oralig`dagi elementar impulsi deb kuch vektori bilan shu vaqtning ko`paytmasiga aytiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt \qquad (81.1)$$

Kuchning biror *(0,t)* vaqt oralig`idagi impulsini aniqlash uchun (81.1) ni shu vaqt oralig`ida integrallaymiz:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}\,dt \qquad (81.2)$$

(81.2) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak, kuch impulsi vektorining koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari kelib chiqadi:

$$S_x = \int_0^t F_x\,dt\ ,\ S_y = \int_0^t F_y\,dt\ ,\ S_z = \int_0^t F_z\,dt \qquad (81.3)$$

Agar S_x, S_y, S_z ma'lum bo`lsa, kuch to`la impulsining moduli

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \qquad (81.4)$$

formuladan,yo`nalishi esa yo`naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos(\vec{S},\wedge\vec{i}) = \frac{S_x}{S},\ \cos(\vec{S},\wedge\vec{j}) = \frac{S_y}{S},\ \cos(\vec{S},\wedge\vec{k}) \qquad (81.5)$$

bilan aniqlanadi.

Kuch impulsining birligi SI da *Ns (kgm/s)* dan iborat.

Kuch impulsi moddiy nuqtaga tashqaridan ta'sir qiluvchi jismlarning biror vaqt oralig`da nuqtaga bergan mexanik harakatini xarakterlaydi.

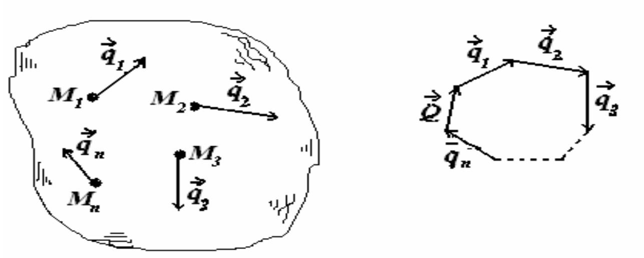
82 - §. Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori

Moddiy nuqta massasi bilan tezlik vektorining ko`paytmasiga moddiy nuqtaning harakat miqdori deyiladi:

$$\vec{q} = m\vec{V} \tag{82.1}$$

(82.1) tenglamadan ko`rinib turibdiki, moddiy nuqtaning harakat muqdori vektor kattalik bo`lib, u tezlik vektori bo`ylab yo`naladi. Harakat miqdorining o`lchov birligi SI da *kgm/s* dan iborat.

Mexanik sistemaning harakat miqdori deb sistemani tashkil etuvchi nuqtalar harakat muqdorlarining geometrik yig`indisiga aytiladi (156-rasm).



$$\vec{Q} = \sum \vec{q}_\nu = \sum m_\nu \vec{V}_\nu \tag{82.2}$$

(82.1) da $m_\nu = const\,, \vec{V}_\nu = \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt}$ bo`lgani uchun

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}\sum m_\nu \vec{r}_\nu \tag{82.3}$$

156-rasm

(74.5) ga ko`ra $\sum m_\nu \vec{r}_\nu = M\vec{r}_S$

Natijada (82.3) ni quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_S) = M\frac{d\vec{r}_S}{dt}$$

yoki

$$\vec{Q} = M\vec{V}_S \tag{82.4}$$

Demak, *mexanik sistemaning harakat miqdori sistema massasi bilan inersiya markazi tezligi vektorining ko`paytmasiga teng.*

83 - §. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teorema

Sistema harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani keltirib chiqarish uchun (77.2) tenglamalarning chap va o`ng tomonlarini hadlab qo`shamiz:

$$\sum m_\nu \frac{d\vec{V}_\nu}{dt} = \sum \vec{F}_\nu^e + \sum \vec{F}_\nu^i$$

yoki

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu \vec{V}_\nu = \vec{R}^e + \vec{R}^i$$

Ichki kuchlarning xususiyatiga asosan $\vec{R}^i = 0$. Shuning uchun:

$$\frac{d}{dt}\sum m_\nu \vec{V}_\nu = \vec{R}^e \tag{83.1}$$

(82.2) ga ko`ra (83.1) ni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e \tag{83.2}$$

(83.2) ifoda sistema harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *mexanik sistema harakat miqdorining vaqt bo`yicha birinchi hosilasi mazkur sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektoriga teng.*

(83.2) ning ikki tomonini dt ga ko`paytirsak:

$$d\vec{Q}=\vec{R}^e\,dt \tag{83.3}$$

yoki

$$d\vec{Q}=d\vec{S}^e \tag{83.4}$$

Demak, *sistema harakat miqdorining differensiali unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining elementar impulsiga teng.*

(83.2) ni Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{dQ_x}{dt}=R_x^e \quad , \quad \frac{dQ_y}{dt}=R_y^e \quad , \quad \frac{dQ_z}{dt}=R_z^e \tag{83.5}$$

(83.5) dan ko`ramizki, *sistema harakat miqdorining biror o`qdagi proyeksiyasidan vaqt bo`yicha olingan birinchi tartibli hosila unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining mazkur o`qdagi proyeksiyasiga teng.*

(83.2) yoki (83.4) ni ma'lum vaqt oralig`ida integrallasak, sistema harakat miqdorining chekli vaqt oralig`ida o`zgarishi haqidagi teoremani yoki impulslar teoremasini hosil qilamiz:

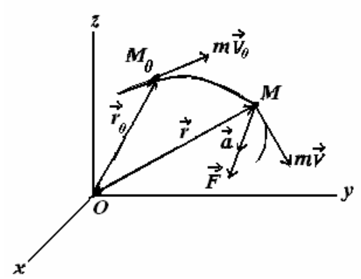
$$\vec{Q}-\vec{Q}_0=\int_0^t \vec{R}\,dt=\vec{S}^e \tag{83.6}$$

Demak,*sistema harakat miqdorining ma'lum vaqt oralig`ida o`zgarishi unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt oralig`idagi impulsiga teng.*

(83.6) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak,impulslar teoremasining skalyar ko`rinishi kelib chiqadi

$$\begin{aligned} Q_x-Q_{0x}&=S_x^e \\ Q_y-Q_{0y}&=S_y^e \\ Q_z-Q_{0z}&=S_z^e \end{aligned} \tag{83.7}$$

(83.2) va (83.6) ga asosan, moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teorema quyidagi ko`rinishlarda yoziladi (157-rasm):



157-rasm

$$d\,(m\vec{V})=\vec{F}\,dt=d\vec{S} \tag{83.8}$$

$$m\overrightarrow{V}-m\overrightarrow{V}_0=\int_0^t \overrightarrow{F}\,dt=\overrightarrow{S} \tag{83.9}$$

(83.8) dan ko`ramizki, *moddiy nuqta harakat miqdorining differensiali mazkur nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning elementar impulsiga teng.*

(83.9) ifodani quyidagicha o`qish mumkin: *moddiy nuqta harakat miqdorining ma'lum vaqt oralig`ida o`zgarishi nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning shu vaqt oralig`idagi impulsiga teng.*

(83.9) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalab,quyidagi ckalyar ifodalarga ega bo`lamiz:

$$
\begin{aligned}
&mV_x - mV_{0x} = S_x \ , \\
&mV_y - mV_{0y} = S_y \ , \\
&mV_z - mV_{0z} = S_z \ .
\end{aligned} \tag{83.10}
$$

84 - §. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni

Harakat miqdorining saqlanish qonuni harakat miqdori o`zgarishi haqidagi teoremaning xususiy holidan iborat. Bu xususiy hollar quyidagicha:

Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektori nolga teng bo`lsa, sistema harakat miqdori o`zgarmay qoladi,ya'ni:

$$\vec{R}^e = 0 \quad \text{da} \ \vec{Q} = const \tag{84.1}$$

(83.3) ni integrallash bilan (84.1) ning o`rinli bo`lishini ko`ramiz.

Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o`qdagi proyeksiyasi nolga teng bo`lsa, sistema harakat miqdorining shu o`qdagi proyeksiyasi o`zgarmaydi. Masalan,

$$R_x = 0 \quad \text{da} \quad Q_x = const \tag{84.2}$$

(84.2) ni (83.5) ning birinchi ifodasidan keltirib chiqariladi.

(84.1) va (84.2) *mexanik sistema harakat miqdorining saqlanish qonunini* ifodalaydi.

Moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni quyidagicha bo`ladi:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \vec{F} = 0 \quad da \quad \vec{q} = m\vec{V} = const \, , \\
&b) \quad F_x = 0 \quad da \quad mV_x = m\dot{x} = const
\end{aligned}
$$

85 - §. Mexanik sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab masalalar yechish

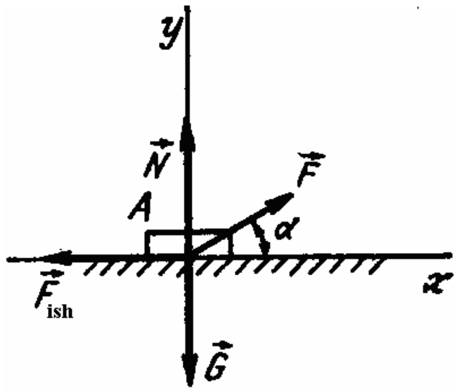
Sistema va moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab,masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Ta'sir qiluvchi hamda reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
3. Chegara shartlari aniqlanadi.
4. Kuch impulsi hisoblanadi.
5. Harakat miqdori teoremasini ifodalovchi tenglamalar tuziladi.
6. Tuzilgan tenglamalardan kerakli noma'lumlar topiladi.

51- masala. Massasi 10 *kg* bo`lgan jism o`zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sirida gorizontal tekislikda *Ax* o`q bo`ylab harakatlanadi (158-rasm). $\vec{F}$ kuchning *Ax* bilan hosil qilgan burchagi $\alpha = 30^0$. *A* jism tezligini 5 **s**ekundda 2*m/s* dan 4*m/s* gacha o`zgartiruvchi $\vec{F}$ kuch aniqlansin.Ishqalanish koeffitsiyenti f =0,15.

Yechish. Sanoq sistemasini 158-rasmdagidek tanlaymiz. *A* jismni moddiy nuqta deb qaraymiz.Unga og`irlik kuchi $\vec{G}$,gorizontal tekislik normal reaksiyasi $\vec{N}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ hamda o`zgarmas $\vec{F}$ kuch ta'sir qiladi.

Masala shartiga ko`ra:



$$t=0 \ da \, V_{0x}=2m/s, V_{0y}=0 \qquad (85.1)$$

$$t=5 \, sekundda \quad V_x=4m/s \qquad (85.2)$$

A jismga ta'sir qiluvchi kuchlar impulslari yig`indisining *Ax* va *Ay* o`qlardagi proyeksiyalari (81.3) ga asosan quyidagicha bo`ladi:

$$S_x=\int_0^5 (F\cos\alpha - F_{ish})\,dt$$

158-rasm

$$S_y=\int_0^5 (N+F\sin\alpha - G)\,dt \qquad (85.3)$$

$F_{ish}=fN$ bo`lgani uchun (85.3) tenglama tubandagi ko`rinishni oladi:

$$S_x=\int_0^5 (F\cos\alpha - fN)\,dt\,,$$
$$S_y=\int_0^5 (N+F\sin\alpha - G)\,dt \qquad (85.4)$$

Moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani (83.10) ko`rinishda yozib olamiz:

$$mV_x-mV_{0x}=S_x\,,$$
$$mV_y-mV_{0y}=S_y \qquad (85.5)$$

Jism gorizontal tekislik bo`ylab harakat qilgani sababli $V_y=0$. Buni e'tiborga olib (85.1) , (85.2) va (85.4) ni (85.5) ga qo`ysak,

$$2m=\int_0^5 (F\cos\alpha - fN)\,dt$$
$$0=N+F\sin\alpha - G \qquad (85.6)$$

kelib chiqadi.

(85.6) ning ikkinchisidan:

$$N=G-F\sin\alpha=mg-F\sin\alpha \qquad (85.7)$$

(85.7) ni (85.6) ning birinchisiga qo`yamiz:

$$2m=\int_0^5 (F\cos\alpha - fmg+fF\sin\alpha)\,dt$$

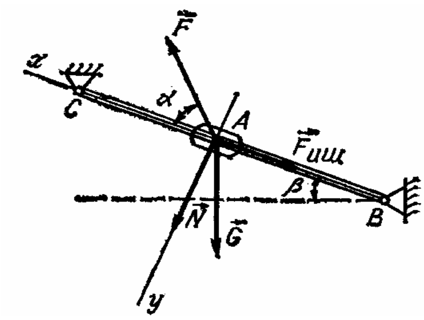
yoki

$$2m=(F\cos\alpha - fmg+fF\sin\alpha)\cdot 5 \qquad (85.8)$$

(85.8) ga son qiymatlarni qo`ysak, noma'lum $\vec{F}$ kuchning miqdori aniqlanadi:

F = 20 N.

52- masala. Massasi 20 kg bo`lgan $A$ polzun (159-rasm) gorizont bilan $\beta=30^0$ burchak hosil qiluvchi $BC$ sterjen bo`ylab $F=700\ N$ kuch ta'sirida boshlang`ich tezliksiz harakatlanadi. $\vec{F}$ kuch sterjen bilan $\alpha=45^0$ burchak tashkil qiladi. Qancha vaqtdan so`ng polzun tezligi *2 m/s* ga etadi? Ishqalanish koeffitsiyenti *0,2.* Sterjen og`irligi hisobga olinmasin.



159-rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 159-rasmdagidek tanlaymiz. Polzunni moddiy nuqta deb qarasak, unga $\vec{F}$ kuch, og`irlik kuchi $\vec{G}$, sterjenga perpendikulyar bo`lib pastga tomon yo`nalgan sterjen normal reaksiyasi $\vec{N}$, shuningdek, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta'sir qiladi.

Polzun Ax o`q bo`ylab harakat qilgani sababli

$$V_{0y}=0 \quad , \quad V_y=0 \tag{85.9}$$

Masala shartiga ko`ra:

$$t=0 \quad da \quad V_{0x}=0\,, \tag{85.10}$$

$$t=T \quad da \quad V_x=2m/s \tag{85.11}$$

Polzunga ta'sir qiluvchi kuchlarning *(0, T)* vaqt oralig`idagi impulsining $Ax$ va $Ay$ o`qlardagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{aligned} S_x&=\int_0^T(F\cos\alpha-F_{ish}-G\sin\beta)\,dt,\\ S_y&=\int_0^T(-F\sin\alpha+N+G\cos\beta)\,dt. \end{aligned} \tag{85.12}$$

(85.9) – (85.12) ifodalar hamda $F_{ish}=fN$ ni e'tiborga olsak, polzun harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teorema (83.9) ga ko`ra quyidagicha yoziladi:

$$2m=\int_0^T(F\cos\alpha-f\,N-G\sin\beta)\,dt\,,$$

$$0=\int_0^T(-F\sin\alpha+N+G\cos\beta)\,dt.$$

bundan

$$2m=(F\cos\alpha-f\,N-G\sin\beta)T\,,$$

$$N=F\sin\alpha-G\cos\beta$$

kelib chiqadi. Son qiymatlarni qo`ysak: $N = 324{,}96\ N$, $T = 0{,}12\ s$.

53-**masala.** Zichligi ρ bo`lgan suv oqimi diametri $d$ bo`lgan trubadan $\vec{V}$ tezlik bilan oqib chiqadi va u silindr shaklida egilgan plastinka sirtiga uriladi. Suv oqimining plastinkaga urilgandan keyingi tezligi ham $\vec{V}$ bo`lib, u gorizontal bilan $\alpha$ burchak tashkil qiladi (160-rasm).Suvning plastinkaga ko`rsatadigan gorizontal bosimi aniqlansin.

Yechish. Sanoq sistemasi qilib gorizontal Ox o`qni olamiz. Suv zarrachasi $M$ ga uning og`irligi $\vec{G}$ hamda plastinka sirti reaksiya kuchining gorizontal tuzuvchisi

$\vec{N}$ ta'sir qiladi. (Bunda $G_x = 0$). dt vaqt ichida truba ko`ndalang kesimidan $m=\rho sV\,dt$ massali suv oqadi; bunda $s=\pi d^2/4$ – truba ko`ndalang kesimining yuzidan iborat.

Suv zarrachasi harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teorema (83.10) tenglamaning birinchi ifodasiga ko`ra quyidagicha yoziladi:

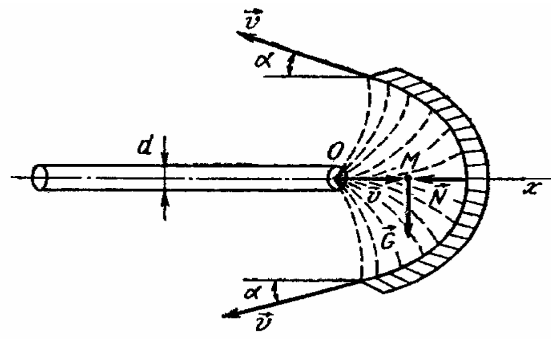
$$mV\cos\alpha - mV = -N\,dt$$

yoki

$$\frac{\pi d^2 \gamma}{4g} V^2 (1-\cos\alpha)\,dt = N\,dt$$

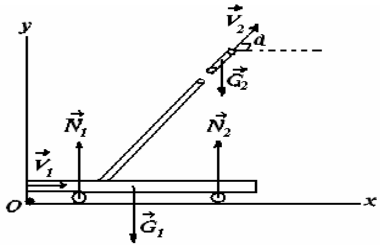
bundan

$$N=\frac{\pi d^2 \gamma}{4g} V^2 (1-\cos\alpha)$$



160-rasm

kelib chiqadi. Suvning plastinkaga ko`rsatadigan gorizontal bosimining miqdori reaksiya kuchi $\vec{N}$ ning miqdoriga teng bo`lib, yo`nalishi unga teskaridir.



161-rasm

54-**masala .** $\vec{V}_1$ tezlik bilan harakatlanuvchi temir yo`l platformasiga qurol o`rnatilgan. Qurolning stvoli platforma harakatlanayotgan tomonga qaratilgan bo`lib, gorizontdan bir oz yuqoriga ko`tarilgan. Quroldan o`q uzilgandan keyin platformaning tezligi uch marta kamayadi.Agar o`q stvoldan gorizontga nisbatan α burchak hosil qilib otilib chiqsa , snaryad tezligi $\vec{V}_2$ ni toping.Snaryadning massasi m_1, qurolli platformaning massasi m_2.

Yechish. Sanoq sistemasini 161-rasmdagidek tanlaymiz. Sistema platforma va quroldan iborat. Unga ta'sir qiluvchi kuchlar $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ og`irlik kuchlari hamda gorizontal sirtning normal reaksiyalari $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ dan iborat.

Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar Ox o`qiga perpendikulyar bo`lgani uchun $R_x^e = 0$. Bu holda (84.2) ga ko`ra sistema harakat miqdorining $Ox$ o`qdagi proyeksiyasi o`zgarmas bo`ladi: $Q_x = Q_{0x}$.

Boshlang`ich paytdagi sistema harakat miqdori:

$$Q_{0x} = (m_1 + m_2)V_1 \qquad (85.13)$$

Quroldan o`q uzilgandan so`ng sistema harakat miqdori quyidagicha bo`ladi:

$$Q_{0x} = \frac{m_1 V_1}{3} + m_2 V_2 \cos\alpha \qquad (85.14)$$

(85.13) bilan (85.14) ni tenglashtirsak,

$$V_2 = \frac{m_2 + \frac{2}{3} m_1}{m_2 \cos\alpha} \quad , \quad V_1 = \frac{3m_2 + 2m_1}{3m_2 \cos\alpha} V_1$$

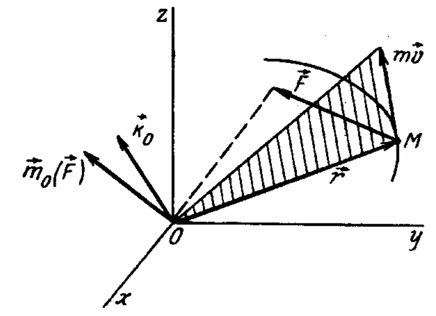
kelib chiqadi.

86 - §. Moddiy nuqta va mexanik sistema harakat miqdorining momenti

Mexanika masalalarini yechishda harakat miqdori tushunchasi bilan bir qatorda harakat miqdori momenti yoki kinetik moment tushunchasidan ham foydalaniladi. $\vec{F}$ kuch ta'siridagi M moddiy nuqta $\vec{V}$ tezlik bilan harakatlanayotgan bo`lsin (162-rasm).

M nuqtaning biror O markazga nisbatan kinetik momenti deb mazkur nuqta radius-vektori hamda harakat miqdori vektorining vektor ko`paytmasiga aytiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{k}_0 = \vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V} \qquad (86.1)$$



162-rasm

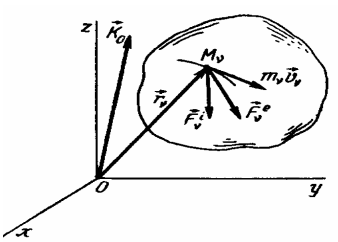
Moddiy nuqta kinetik momenti vektorining yo`nalishi $\vec{r}$ va $\vec{V}$ yotgan tekislikka perpendikulyar bo`ladi.

(86.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak, moddiy nuqta harakat miqdorining o`qqa nisbatan momenti kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} k_x &= m_x(m\vec{V}) = m(yV_z - zV_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ k_y &= m_y(m\vec{V}) = m(zV_x - xV_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ k_z &= m_z(m\vec{V}) = m(xV_y - yV_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \qquad (86.2)$$

Kinetik momentning SI ga ko`ra o`lchov birligi kgm^2/s yoki Nms ga teng.

Mexanik sistemaning biror markazga nisbatan kinetik momenti shu sistemani tashkil qiluvchi moddiy nuqtalarning mazkur markazga nisbatan kinetik momehtlarining geometrik yig`indisiga teng (163-rasm).



163-rasm

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_\nu \vec{V}) = \sum \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{V}_\nu \qquad (86.3)$$

(86.1) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum m_x(m_\nu \vec{V}_\nu) = \sum m_\nu(y_\nu \dot{z}_\nu - z_\nu \dot{y}_\nu), \\ K_y &= \sum m_y(m_\nu \vec{V}_\nu) = \sum m_\nu(z_\nu \dot{x}_\nu - x_\nu \dot{z}_\nu), \\ K_z &= \sum m_z(m_\nu \vec{V}_\nu) = \sum m_\nu(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu). \end{aligned} \qquad (86.4)$$

87 - §. Mexanik sistema va moddiy nuqta kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teorema

Sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani keltirib chiqarish uchun (86.3) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt}=\sum\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}\times m_\nu\vec{V}_\nu+\sum\vec{r}_\nu\times m_\nu\frac{d\vec{V}_\nu}{dt} \qquad (87.1)$$

bunda

$$\sum\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}\times m_\nu\vec{V}_\nu=\sum\vec{V}_\nu\times m_\nu\vec{V}_\nu=0,$$

$$m_\nu\frac{d\vec{V}_\nu}{dt}=m_\nu\vec{a}_\nu .$$

Sistema M_ν nuqtasiga qo`yilgan tashqi va ichki kuchlarning teng ta'sir etuvchilarini mos ravishda $\vec{F}_\nu^e, \vec{F}_\nu^i$ (162-rasm) desak, (77.1) ga ko`ra :

$$m_\nu\vec{a}_\nu=\vec{F}_\nu^e+\vec{F}_\nu^i$$

Natijada (87.1) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt}=\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^e+\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^i$$

Ichki kuchlar xususiyatiga ko`ra:

$$\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^i=\vec{M}_0^i=0$$

Binobarin,

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt}=\sum\vec{r}_\nu\times\vec{F}_\nu^e \qquad (87.2)$$

yoki

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt}=\vec{M}_0^e \qquad (87.3)$$

(87.3) munosabat sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani ifodalaydi: *mexanik sistemaning markazga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosila unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.*

(87.3) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\frac{dK_x}{dt}=M_x^e,\ \frac{dK_y}{dt}=M_y^e,\ \frac{dK_z}{dt}=M_z^e \qquad (87.4)$$

bunda

$$M_x^e=\sum m_x(\vec{F}_\nu^e)=\sum(y_\nu F_{\nu z}^e-z_\nu F_{\nu y}^e),$$
$$M_y^e=\sum m_y(\vec{F}_\nu^e)=\sum(z_\nu F_{\nu x}^e-x_\nu F_{\nu z}^e), \qquad (87.5)$$
$$M_z^e=\sum m_z(\vec{F}_\nu^e)=\sum(x_\nu F_{\nu y}^e-y_\nu F_{\nu x}^e)$$

(87.3) ni quyidagicha ta'riflash mumkin: *mexanik sistemaning qo`zg`almas o`qqa nisbatan kinetik momentidan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosila unga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning shu o`qqa nisbatan momentlarining yig`indisiga teng.*

(87.3) dan xususiy hol sifatida moddiy nuqta harakat miqdorining markazga nisbatan momenti o`zgarishi haqidagi teoremani hosil qilish mumkin: *moddiy nuqta* *harakat miqdorining biror markazga nisbatan momentidan vaqt bo`yicha birinchi hosila nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning shu markazga nisbatan momentiga teng* (162-rasm)

$$\frac{d\left(\vec{m}_0(m\vec{V})\right)}{dt}=\vec{m}(\vec{F}) \qquad (87.6)$$

yoki

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{V})=\vec{r}\times\vec{F}. \qquad (87.7)$$

Agar moddiy nuqta bir necha kuchlar ta'sirida bo`lsa (87.6) yoki (87.7) da $\vec{F}$ ni shu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi deb qarash kerak.

(87.7) ni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalasak, moddiy nuqta harakat miqdorining o`qqa nisbatan momenti o`zgarishi haqidagi teorema kelib chiqadi.

$$\frac{d}{dt}\left(m_x(m\vec{V})\right)=m_x(\vec{F}),\ \frac{d}{dt}\left(m_y(m\vec{V})\right)=m_y(\vec{F}),\ \frac{d}{dt}\left(m_z(m\vec{V})\right)=m_z(\vec{F}) \qquad (87.8)$$

yoki

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(m_x(m\vec{V})\right)=yF_z-zF_y,\\
&\frac{d}{dt}\left(m_y(m\vec{V})\right)=zF_x-xF_z,\\
&\frac{d}{dt}\left(m_z(m\vec{V})\right)=xF_y-yF_x.
\end{aligned} \qquad (87.9)$$

Demak, *moddiy nuqta harakat miqdorining biror o`qqa nisbatan momentidan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosila unga ta'sir qiluvchi kuchning mazkur o`qqa nisbatan momentiga teng.*

88- §. Rezal teoremasi

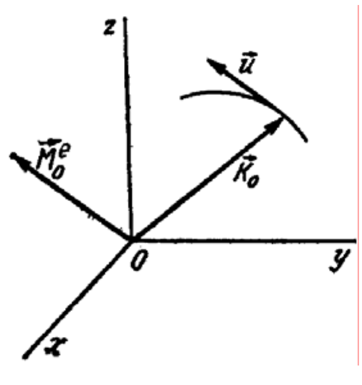
Sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani kinetik nuqtai nazardan ham tushuntirish mumkin.

Kinematikadan ma'lumki ,vektordan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosila mazkur vektor uchining tezligiga teng.Shuning uchun mexanik sistema kinetik momenti vektoridan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosilani mazkur vektor uchining tezligi deb qarash mumkin.Bu tezlikni nuqta tezligidan farq qilish uchun $\vec{u}$ deb belgilaymiz (164-rasm).:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{K}_0}{dt} \qquad (88.1)$$

(88.1) tenglikka ko`ra sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{u}=\vec{M}_0^e \qquad (88.2)$$



164-rasm

(88.2) tenglama Rezal teoremasini ifodalaydi: *mexanik sistemaning biror markazga nisbatan kinetik momenti vektori uchining tezligi sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning shu markazga nisbatan bosh momentiga teng.*

Rezal teoremasidan foydalanib giroskoplar harakatini tekshirish qulaydir.

89 - §. Qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakati differensial tenglamasi

Qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofidagi aylanma harakati texnikada ko`p uchraydigan harakatlardan biri. Shuning uchun jismning aylanish o`qiga nisbatan kinetik momentini aniqlash va differensial tenglamasini keltirib chiqarish muhim ahamiyatga ega.

Jism qo`zg`almas Oz o`q atrofida $\omega$ burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan bo`lsin (165-rasm). Jism M_ν nuqtasidan aylanish o`qigacha bo`lgan masofani h_ν desak, (86.4) formulaga asosan:

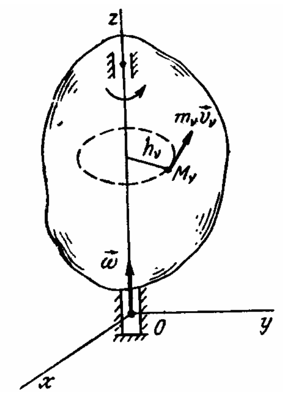
$$K_z = \sum m_z(m_\nu \vec{V}_\nu) = \sum m_\nu V_\nu h_\nu \tag{89.1}$$

Biroq, $V_\nu = h_\nu \omega$; Shuning uchun (89.1) quyidagicha yoziladi:

$$K_z = \sum m_\nu h_\nu^2 \omega = \omega \sum m_\nu h_\nu^2 \tag{89.2}$$

(75.1) formulaga ko`ra:

$$I_z = \sum m_\nu h_\nu^2$$



165-rasm

Demak, (89.2) dan $K_z = I_z \omega$ (89.3)

hosil bo`ladi.

(89.3) dan ko`ramizki, *jismning aylanish o`qiga nisbatan kinetik momenti uning mazkur o`qqa nisbatan inersiya momenti bilan burchak tezligining ko`paytmasiga teng.*

(89.3) ni (87.4) ning uchinchisiga qo`ysak, *qattiq jismning qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakati differensial tenglamasi* kelib chiqadi:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e$$

yoki

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e \tag{89.4}$$

(89.4) differensial tenglamani moddiy nuqta harakatining differensial tenglamasi (65.2) bilan taqqoslab, inersiya momenti aylanma harakatdagi jismning inertlik o`lchovini ifodalanishini ko`ramiz.

90 - §. Sistema va moddiy nuqta kinetik momentining saqlanish qonuni

Sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremadan quyidagi xususiy hollar kelib chiqadi.

1. *Sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning biror* O *nuqtaga nisbatan momenti* $\vec{M}_0^e = 0$ *bo`lsa , sistemaning shu markazga nisbatan kinetik momenti* $\vec{K}_0$ *ning miqdor va yo`nalishi o`zgarmas bo`ladi:*

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{r} \times m_\nu \vec{V}_\nu = \overrightarrow{const}. \tag{90.1}$$

(87.3) ifodani $\vec{M}_0^e = 0$ hol uchun integrallab, (90.1) ning o`rinli bo`lishini hosil qildik.

2. *Sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning biror o`qqa nisbatan momentlari yig`indisi nolga teng bo`lsa , sistemaning shu o`qqa nisbatan kinetik momenti o`zgarmas bo`ladi.*

Masalan,

$$M_x^e = \sum m_x(\vec{F}_\nu^e) = 0 \quad da \quad K_x = \sum m_x(m_\nu \vec{V}_\nu) = const \tag{90.2}$$

Shunga o`xshash moddiy nuqta kinetik momentining saqlanish qonunini ta'riflash mumkin.

3. *Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning biror markazga nisbatan momenti nolga teng bo`lsa,mazkur nuqta harakat miqdorining shu markazga nisbatan momenti o`zgarmas bo`ladi,ya'ni:*

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = 0 \quad da \quad \vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V} = \overrightarrow{const} \tag{90.3}$$

4. *Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuchning biror o`qqa nisbatan momenti nolga teng bo`lsa, mazkur nuqtaning shu o`qqa nisbatan kinetik momenti o`zgarmas bo`ladi. Masalan,* $m_x(\vec{F}) = 0 \;\; da \;\; m_x(m\vec{V}) = const.$

5. Qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism kinetik momentining saqlanish qonuni quyidagicha ta'riflanadi:

Qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi jismga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning aylanish o`qiga nisbatan momentlari yig`indisi nolga teng bo`lsa, jismning mazkur o`qqa nisbatan kinetik momenti o`zgarmas bo`ladi:

$$M_z^e = 0 \quad da \quad K_z = I_z \omega = const$$

yoki

$$I_z \omega = I_{0z} \omega_0 \tag{90.4}$$

(90.4) da I_{0z} va ω_0 mos ravishda jismning boshlang`ich paytdagi inersiya momenti va burchak tezligi, I_z va ω esa istalgan t vaqtdagi inersiya momenti va burchak tezligidan iborat.

Qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism kinetik momentining saqlanish qonuniga Jukovskiy skameykasi misol bo`la oladi. Jukovskiy skameykasining gorizontal platformasiga qo`llariga tosh ushlagan kishi turgandan keyin unga boshlang`ich ω_0 burchak tezlik berilsa, (90.4) o`rinli bo`ladi. Chunki kishining ,toshlar va platformaning o`g`irlik kuchlari aylanish o`qiga parallel yo`nalgan yoki tayanch podshipnikda hosil bo`ladigan reaksiya kuchi aylanish o`qini kesib o`tadi. Shuning uchun ularning aylanish o`qiga nisbatan momenti nolga teng.

91 - §. Sistema yoki moddiy nuqta kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab masalalar yechish

Moddiy nuqta yoki sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Chegara shartlar aniqlanadi.
3. Ta'sir etuvchi hamda reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.

4. Ta’sir qiluvchi kuchlarning markazga yoki o`qqa nisbatan momentlarinig yig`indisi aniqlanadi.

5. Moddiy nuqta yoki sistemaning markazga yoki o`qqa nisbatan kinetik momenti hisoblanadi.

6. Moddiy nuqta yoki sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teoremani ifodalovchi differensial tenglama tuziladi.

7. Tuzilgan differensial tenglama integrallanadi va kerakli noma’lumlar aniqlanadi.

55-masala. Massasi $m=1kg$ bo`lgan moddiy nuqta $x=2t, y=t^3, z=t^4$ qonun bo`yicha harakat qiladi. $t=1s$ bo`lganda moddiy nuqtaga ta’sir qiluvchi kuchlar teng ta’sir etuvchisining $Ox$ o`qiga nisbatan momenti aniqlansin (x , y , z – metrlar hisobida).

Yechish. Masalani hal etish uchun (86.2) ning birinchisini tuzamiz:

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \tag{91.1}$$

Masala shartidagi moddiy nuqta harakat qonunidan:

$$\dot{y} = 3t^2, \dot{z} = 4t^3 \tag{91.2}$$

Moddiy nuqta harakat qonunidagi y,z va (91.2) ni (91.1) ga qo`ysak,

$$k_x = mt^6 \tag{91.3}$$

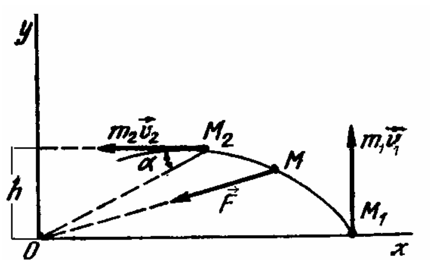
kelib chiqadi.

(87.8) ga ko`ra:

$$\frac{dk_x}{dt} = m_x(\vec{F}) \qquad \text{yoki} \qquad 6mt^5 = m_x(\vec{F}) \tag{91.4}$$

(91.4) ga son qiymatlarni qo`ysak: $m_x(\vec{F}) = 6\,Nm$.

56- masala. M moddiy nuqta $\vec{F}$ ta’sirida harakatlanadi. Bu kuchning ta’sir chizig`i $O$ markazdan o`tadi (166-rasm). Nuqtaning M_1 holatidagi tezlik vektori Oy o`qiga parallel bo`lib, miqdori $2\ m/s$; M_2 holatdagi tezlik vektori esa kuchning ta’sir chizig`i bilan $\alpha = 30^0$ burchak tashkil qiladi. Moddiy nuqtaning $M_2$ holatidagi tezligi $V_2$ aniqlansin. $OM_1/OM_2 = 3/2$ . $M$ nuqta og`irligi hisobga olinmasin.



166-rasm

Yechish. M moddiy nuqtaga faqat $\vec{F}$ kuch ta’sir qiladi. Bu nuqta harakat miqdorining O nuqtaga nisbatan momenti o`zgarmas, chunki $m_0(\vec{F}) = 0$.

Natijada, moddiy nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonuniga ko`ra:

$$m_0(m\vec{V}_1) = m_0(m\vec{V}_2) \tag{91.5}$$

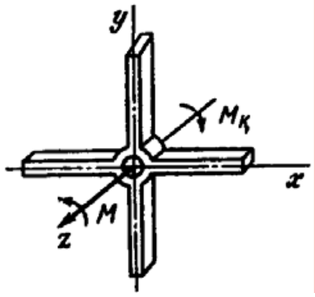
166-rasmdan:

$$m_0(m\vec{V}_1) = mV_1\,OM_1\ ,\ m_0(m\vec{V}_2) = mV_2\,OM_2 \sin\alpha \tag{91.6}$$

(91.6) ni (91.5) ga qo`yamiz:

$$V_2 = V_1 \frac{OM_1}{OM_2 \sin\alpha} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sin 30^0} = 6\,m/s$$

57-masala. Kema parragining aylanish o`qiga nisbatan inersiya momenti $I$ bo`lib,u M moment ta'sirida aylantiriladi. Parrakka ta'sir qiluvchi suv qarshiligining momenti $M_q = k\omega^2$. Bunda k – o`zgarmas miqdor (167-rasm).



167-rasm

Dastlabki vaqtda parrak burilish burchagi va burchak tezligi nolga teng. Qancha t_1 vaqtdan so`ng parrak burchak tezligi $\omega_1$ bo`lishi topilsin.

Yechish. Parrakning aylanish o`qi deb $z$ o`qni olamiz. Chegara shartlari quyidagicha:

$$t=0 \quad da \quad \omega=0 \quad , \quad t=t_1 \quad da \quad \omega=\omega_1 \qquad \textbf{(91.7)}$$

Parrakka aylantiruvchi M moment va qarshilik momenti M_q ta'sir qiladi. Natijada,

$$M_z^e = M - k\omega^2 \qquad (91.8)$$

Parrakning kinetik momenti :

$$K_z = I\omega \qquad (91.9)$$

Parrakning harakat differensial tenglamasi quyidagicha:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M - k\omega^2$$

yoki

$$\frac{I\,d\omega}{M - k\omega^2} = dt \qquad (91.10)$$

$\frac{M}{k} = a^2$ belgilash kiritib va (91.7) dan foydalanib, (91.10) ni integrallaymiz:

$$\frac{I}{2ak}\ln\frac{a+\omega}{a-\omega}\Bigg|_0^{\omega_1} = t_1$$

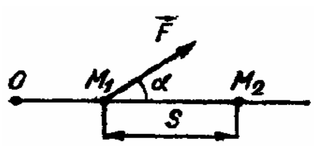
bundan

$$t_1 = \frac{I}{2ak}In\frac{a+\omega_1}{a-\omega_1}$$

kelib chiqadi.

92 - §. Ish va quvvat.

Sistema (jism, moddiy nuqta) ning biror kuch ta'sirida ko`chishini xarakterlash uchun ish tushunchasi kiritiladi.



168-rasm

Quyida o`zgarmas va o`zgaruvchi kuchning ishi haqida tushuncha beriladi.

1.**O`zgarmas kuchning ishi.** $M$ nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida $M_1$ holatdan $M_2$ holatga o`tsin (168-rasm). O`zgarmas kuchning bu ko`chishdagi ishi quyidagicha aniqlanadi:

$$A = F s \cos\alpha \qquad (92.1)$$

Agar $\alpha = 0$ bo`lsa $A=Fs$ ; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $da$ $A=0$; $\alpha$ o`tkir burchak bo`lsa $A > 0$ ; $\alpha$ o`tmas burchak bo`lganda $A<0$.

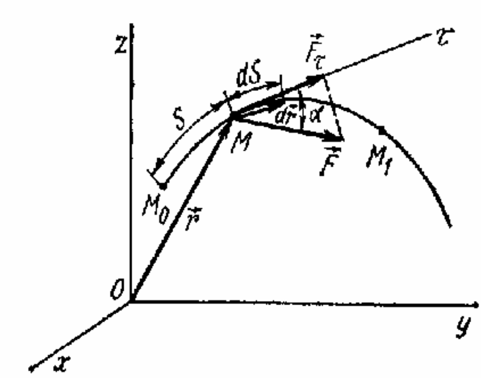
Ish birligi qilib SI sistemada *Joul (kgm/s)* qabul qilingan.

**2. O`zgaruvchi kuchning ishi.** O`zgaruvchi kuchning ishini hisoblash uchun elementar ish tushunchasi kiritilgan.Elementar ish quyidagicha aniqlanadi (169-rasm):

$$d\,A = F_\tau\, ds \qquad (92.2)$$

(92.2) da $\vec{F}_\tau$ bilan $\vec{F}$ kuchning nuqta trayektoriyasiga o`tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi belgilangan; $ds$ esa nuqtaning elementar ko`chishidan iborat. $F_\tau = F\cos\alpha$ bo`lgani uchun (92.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$dA = F\cos\alpha\, ds \qquad (92.3)$$



169-rasm

(92.3) dan ko`rinib turibdiki, kuchning elementar ishi skalyar miqdor bo`lib, u kuchning nuqta trayektoriyasiga o`tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi bilan moddiy nuqta elementar ko`chishining ko`paytmasiga teng.

$\vec{F}$ kuchning $M_0\ M_1$ chekli oraliqdagi ishini aniqlash uchun (92.2) yoki (92.3) ni shu oraliqda integrallaymiz:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau\, ds = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F\cos\alpha\, ds \qquad (92.4)$$

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ ifodadan $d\vec{r} = \vec{V}dt$, shuningdek, $ds = \left|\vec{V}\right|dt$ tengliklarni yoza olamiz. Binobarin, $\left|d\vec{r}\right| = ds$ deb (92.3) ni

$$d\,A = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\,\vec{V}\,dt \qquad (92.5)$$

ko`rinishda ifodalash mumkin.

Demak, kuchning elementar ishi kuch vektori bilan nuqta radius-vektori olgan elementar ko`chishi vektorining skalyar ko`paytmasidan iborat.

(92.5) dan foydalanib, elementar ishning analitik ifodasini quyidagicha yozish mumkin

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (92.6)$$

Bunda F_x, F_y, F_z kuchning koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari; $dx, dy, dz$ ko`chish vektorining proyeksiyalaridir.

3. Quvvat. Kuchning vaqt birligidagi ishi quvvat deb ataladi.

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (92.7)$$

yoki

$$N = \frac{F_\tau\, ds}{dt} = F_\tau V \qquad (92.8)$$

Demak, quvvat kuchning nuqta trayektoriyasiga o`tkazilgan urinmadagi proyeksiyasi bilan nuqta tezligining ko`paytmasiga teng.

(92.5) ni e'tiborga olsak,quvvatning

$$N = \vec{F}\,\vec{V}$$

skalyar ko`paytma orqali ifodasini hosil qilamiz.

SI da quvvat birligi uchun vatt olinadi $1\,vt = 1\,kgm^2/s^3$. Texnikada quvvat birligi qilib ot kuchi qabul qilingan: $1\,ot\ kuchi = 75\,kgk.m \approx 736\,vt$.

Endi ishni hisoblashga oid misollar ko`rib chiqamiz.

**1. Og`irlik kuchining ishi.** Og`irlik kuchi ta'siridagi M nuqta M_0 holatga o`tgan bo`lsin (170-rasm).

Og`irlik kuchi $\vec{G}$ ning koordinata o`qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha bo`ladi:

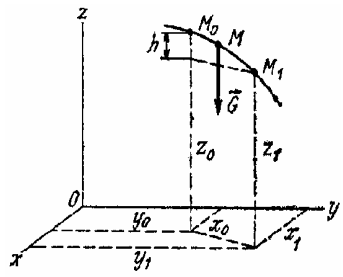
$$G_x = 0\,,\; G_y = 0\,,\; G_z = -G$$

(92.6) formulaga asosan og`irlik kuchining elementar ishi:

$$dA = G_z\,dz = -G\,dz$$

Nuqta M_0 dan M_1 holatga kelganda $\vec{G}$ kuchning ishi esa:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-G)\,dz = -G\int_{(M_0)}^{(M_1)} dz = G(z_0 - z_1)$$



170-rasm

$$|z_0 - z_1| = h$$

deb belgilasak,

$$A = \begin{cases} Gh\,, & agar \quad z_0 > z_1 \\ -Gh\,, & agar \quad z_0 < z_1 \end{cases} \qquad (92.9)$$

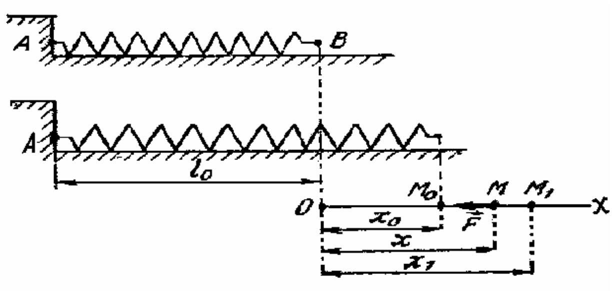
Agar mexanik sistema harakati tekshirilayotgan bo`lsa, sistema og`irlik kuchining ishi mazkur sistema og`irlik kuchi bilan inersiya markazi vertikal ko`chishining ko`paytmasiga teng,ya'ni:

$$A = \pm G\,h_S$$

bu yerda h_S inersiya (massa) markazining vertikal ko`chishini ifodalaydi.

2.Elastiklik kuchining ishi. A uchi mahkamlangan prujinaning deformasiyalanmagan holdagi uzunligi l_0 bo`lsin. Sanoq boshi deb prujinaning deformasiyalanmagan holatidagi B uchini olamiz (171-rasm).

Prujinani biroz cho`zsak, prujinaning elastiklik kuchi $F$ sodir bo`ladi.Bu kuch prujina cho`zilishiga proporsional: $F = |c\,x|$



171-rasm

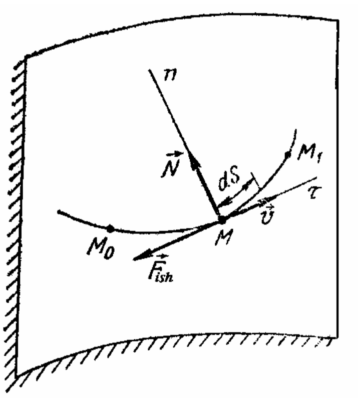
bunda: x--prujina deformasiyasi.

Elastiklik kuchining ishi (92.4) formulaga ko`ra quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx)\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2) \qquad (92.10)$$

3.Ishqalanish kuchining ishi. Moddiy nuqta g`adir-budur sirt ustida harakatlanayotgan bo`lsin (172-rasm). Ishqalanish koeffitsiyentini f, sirtning normal reaksiyasini $\vec{N}$ desak,ishqalanish kuchining moduli $F_{ish} = fN$ formula bilan aniqlanadi.

Ishqalanish kuchi nuqta ko`chishiga teskari yo`nalganini e'tiborga olib, (92.4) formuladan uning ishini hisoblaymiz:



172-rasm

$$A=-\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{ish}\,ds=-\int_{(M_0)}^{(M_1)} f\,N\,ds \qquad (92.11)$$

Ishqalanish kuchi o`zgarmas bo`lsa, uning ishi quyidagicha bo`ladi:

$$A=-F_{ish}\,s \qquad (92.12)$$

**4. Aylanma harakatdagi jismga qo`yilgan kuchning ishi.** *Oz* qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi jismning *M* nuqtasiga $\vec{F}$ kuch ta'sir qilayotgan bo`lsin (173-rasm). *M* nuqtadan *Oz* gacha bo`lgan masofani *h* bilan belgilaymiz.

(92.2) formulaga binoan $\vec{F}$ kuchning *ds* elementar yoyni o`tishdagi elementar ishi

$$dA=F_\tau\,ds$$

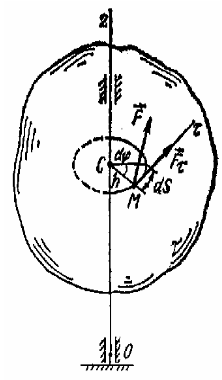
yoki

$$dA=F_\tau\,h\,d\varphi$$

bo`ladi. Ammo, $F_\tau\,h=m_z(\vec{F})=M_z$

Shuning uchun, $$dA=M_z\,d\varphi \qquad (92.13)$$

Demak, *aylanma harakatdagi jismga qo`yilgan kuchning elementar ishi kuchning aylanish o`qiga nisbatan momenti bilan elementar burilish burchagining ko`paytmasiga teng.*



173-rasm

Jism chekli φ_1 burchakka aulanganidagi kuchning ishi

$$A=\int_0^{\varphi_1} M_z\,d\varphi \qquad (92.14)$$

Agar $M_z=const$ bo`lsa (92.14) quyidagicha yoziladi:

$$A=M_z\,\varphi_1 \qquad (92.15)$$

Aylanma harakatdagi jismga qo`yilgan kuchning quvvatini aniqlaylik:

$$N=\frac{dA}{dt}=M_z\frac{d\varphi}{dt}=M_z\,\omega \qquad (92.16)$$

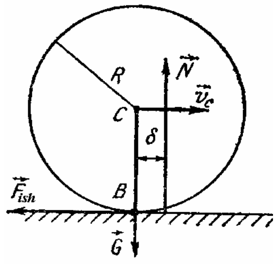
Demak, *aylanuvchi jismga qo`yilgan kuchning quvvati uning aylanish o`qiga nisbatan momenti bilan jism burchak tezligining ko`paytmasiga teng.*

5. Dymalashdagi ishqalanish kuchining ishi. Radiusi R bo`lgan g`ildirak tekislik (sirt) ustida sirpanmasdan dumalasin. Unga B nuqtada sirpanishga qarshilik qiluvchi $\vec{F}_{ish}$ ishqalanish kuchi ta'sir qiladi.G`ildirak sirpanmasdan dumalagani uchun $B$ nuqtaning ko`chishi ham bo`lmaydi. $\vec{F}_{ish}$ ishqalanish kuchining ishi nolga teng bo`ladi.

Ma'lumki, sirtlarning deformasiyalanishi natijasida dumalashdagi ishqalanish momenti hosil bo`ladi (174-rasm);

$$M=\delta N$$

bunda; δ- dumalashdagi ishqalanish koeffitsiyenti, N – normal reaksiya kuchi.



174-rasm

G`ildirakning tezliklar oniy markazi $B$ atrofida aylanishini nazarda tutsak, $M$ momentning elementar ishi (92.13) ga ko`ra

$$dA = -\delta N d\varphi \tag{92.17}$$

formuladan aniqlanadi.

(92.17) da $d\varphi$ bilan g`ildirakning burilish burchagi belgilangan.

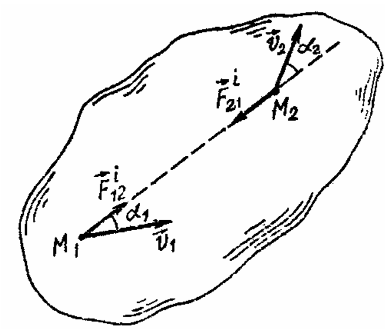
Agar $M=const$ bo`lsa, dumalashdagi ishqalanish momentining ishi quyidagicha bo`ladi:

$$A = -\delta N \varphi_1 \tag{92.18}$$

6. Qattiq jism ichki kuchlarining ishi. Mexanik sistemaga tashqi kuchlardan tashqari ichki kuchlar ham ta'sir qiladi. Agar sistema o`zgaruvchan bo`lsa, ichki kuchlarning ishi nolga teng emas. Bunga snaryadning to`p stvolidan otilib chiqishidagi hosil bo`ladigan hodisani,ya'ni stvolning orqaga tepishini misol keltirish mumkin.Bu hodisada stvol va snaryadga ta'sir qiluvchi kuchning ishi nolga teng bo`lmaydi.

Agar sistema o`zgarmas,ya'ni qattiq jismdan iborat bo`lsa, ichki kuchlar ishlarining yig`indisi nolga teng. Buni quyidagicha isbotlash mumkin.

Jismning ikkita M_1 va M_2 nuqtasining o`zaro ta'sir kuchlari ichki kuchlar bo`lib,ta'sir – aks ta'sir qonuniga ko`ra $\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$ (175-rasm).



175-rasm

$\vec{F}_{12}^i$ va $\vec{F}_{21}^i$ kuchlar elementar ishlarining yig`indisi (92.5) ga ko`ra

$$dA_1^i + dA_2^i = \vec{F}_{12}^i \vec{V}_1 dt + \vec{F}_{21}^i \vec{V}_2 dt = \vec{F}_{12}^i \vec{V}_1 dt - \vec{F}_{12}^i \vec{V}_2 dt$$

yoki

$$dA_1^i + dA_2^i = F_{12}^i V_1 \cos\alpha_1 dt - F_{12}^i V_2 \cos\alpha_2 dt = F_{12}^i (V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2) dt$$

bo`ladi.Kinematikadan ma'lumki,jism ikki nuqtasi tezliklarnining mazkur nuqtalarni tutashtiruvchi o`qdagi proyeksiyalari tengdir. $V_1 \cos\alpha_1 = V_2 \cos\alpha_2$.

Shuning uchun yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$dA_1^i + dA_2^i = 0$$

Demak, qattiq jism ichki kuchlar elementar ishlarining yig`indisi nolga teng:

$$dA^i = \sum dA_v^i = 0 \tag{92.19}$$

93 - §. Potensialli kuch maydoni. Kuch funksiyasi. Potensialli kuch

Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning biror ko`chishidagi ishi umumiy holda bu ko`chishdagi harakat qonuniga bog`liq bo`ladi. Ammo shunday kuchlar borki (masalan,og`irlik kuchi,elastiklik kuchi),ularning ishi nuqtaning harakat qonuniga bog`liq bo`lmaydi. Bunday kuchlar potensialli kuchlar deb ataladi.

Fazoning biror sohasiga kiritilgan moddiy nuqtaga nuqta koordinatalari va vaqt funksiyasidan iborat kuch tasir etsa, bunday soha kuch maydoni deyiladi. Agar vaqt o`tishi bilan nuqtaga tasir etuvchi kuchlar o`zgarmasa kuch maydoni statsionar maydon, kuch vaqtga bog`liq bo`lsa nostatsionar maydon deyiladi.

Kuch maydoniga misol qilib,planetalar yoki Quyoshning tortish kuchi maydonini,elektr yoki elektromagnit maydonini olish mumkin.

Ma'lumki, moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi $\vec{F}$ kuchning elementar ishi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$dA = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \qquad (93.1)$$

Bu ifodaning o`ng tomoni umumiy holda nuqta koordinatalariga bog`liq funksiyaning to`liq differensiali bo`lmaydi. (93.1) uch had biror $U(x,y,z)$ funksiyaning to`liq differensiali bo`ladigan kuch maydoni *potensialli kuch maydoni* deb ataladi. Bu holda

$$dA = dU$$

yoki

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \qquad (93.2)$$

bo`ladi.

(93.2) dan:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}\quad , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}\quad , \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (93.3)$$

(93.3) shartni qanoatlantiruvchi kuch *potensialli* yoki *konservativ kuch,* $U = U(x, y, z)$ esa *kuch funksiyasi deyiladi.*

F_x, F_y, F_z ning ko`rinishiga qarab, u kuchning potensialli ekanligini aniqlash uchun (93.3) dan xususiy hosilalar olamiz:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\ , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}\ , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\ , \\ &\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\ , \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\ , \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \end{aligned} \qquad (93.4)$$

(93.4) dan

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}\quad , \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}\quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \qquad (93.5)$$

kelib chiqadi.

Kuch proyeksiyalari orasidagi bog`lanishni ifodalovchi (93.5) ning bajarilishi kuch potensialli bo`lishining zaruriy va etarli shartini ifodalaydi.

94 - §. Potensialli kuch maydonidagi ish. Potensial energiya

Potensialli kuchning ishi haqidagi teoremani ko`rib chiqamiz.

Kuch maydonida harakat qilayotgan moddiy nuqtaning harakatida potensialli kuchning ishi nuqtaning o`tgan yo`liga bog`liq bo`lmasdan,faqat uning boshlang`ich ham so`ngi holatiga bog`liq bo`ladi.

Teoremani isbotlash uchun $\vec{F}$ kuchning elementar ish ifodasini quyidagicha yozamiz:

$$dA = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = dU$$

Moddiy nuqta boshlang`ich paytda $M_0$ da bo`lib, unga qo`yilgan kuch funksiyasi $U_0$ bo`lsin. Biror vaqtdan so`ng nuqta $M$ da bo`lib,unga tegishli kuch funksiyasi U bo`lsin. Bu holda $\vec{F}$ kuchning ishi

$$A=\int_{(M_0)}^{(M)}(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz)=\int_{U_0}^{U}dU=U-U_0 \qquad (94.1)$$

ya'ni, u kuch funksiyasining faqat oxirgi va boshlang`ich holatiga bog`liq bo`ladi.

Kuch potensialli bo`lgan holda kuch funksiyasi U bilan bir qatorda potensial energiya tushunchasi ham kiritiladi.

Nuqtaning M so`ngi holatidan $M_0$ boshlang`ich holatiga ko`chishdagi potensialli kuchning ishi *moddiy nuqtaning M* holatdagi *potensial energiyasi* deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Pi=U_0-U$$

Koordinatalar boshi nuqtaning boshlang`ich holatida olinganda

$$\Pi=-U$$

Demak, potensial energiya potensial funksiyaning teskari ishorasi bilan olingan qiymatiga teng.

95 - §. Moddiy nuqta va mexanik sistema kinetik energiyasi

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi mazkur nuqta tezligi kvadrati bilan massasi ko`paytmasining yarmidan iborat, ya'ni:

$$T=\frac{1}{2}mV^2 \qquad (95.1)$$

Sistemani tuzuvchi moddiy nuqtalar kinetik energiyalarining arifmetik yig`indisiga sistema kinetik energiyasi deyiladi:

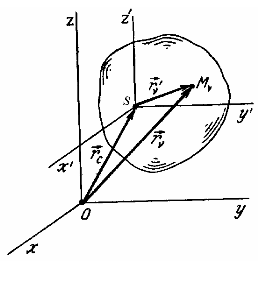
$$T=\frac{1}{2}\sum m_\nu V_\nu^2 \qquad (95.2)$$

Kinetik energiyaning SI dagi o`lchov birligi $kg\,m^2/s^2$ yoki Nm dan iborat.

Nuqta va sistemaning kinetik energiyasi skalyar miqdor, u tezlik yo`nalishiga bog`liq bo`lmaydi. Sistema tinch holatda turganda uning kinetik energiyasi nolga teng bo`ladi.

96 - §. Kyonig teoremasi

Mexanik sistema qo`zg`almas $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan bo`lib, sistemaning ko`chirma harakati ilgarilama harakatdan iborat bo`lsin (176-rasm).



S

176-rasm

Bu holda sistemaning absolyut harakatini inersiya markazi bilan birgalikda ilgarilama harakat hamda $Sx'y'z'$ koordinatalar sistemasiga nisbatan aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Tezliklarni qo`shish teoremasiga ko`ra:

$$\vec{V}_\nu=\vec{V}_S+\vec{V}'_\nu \qquad (96.1)$$

bunda: $\vec{V}'_\nu$ - nuqtaning nisbiy tezligi.

(96.1) ni (95.2) ga qo`yamiz:

$$T=\sum\frac{m_\nu V_S^2}{2}+\sum m_\nu \vec{V}_S \vec{V}'_\nu+\sum\frac{m_\nu \vec{V}'^2_\nu}{2}$$

yoki

$$T=\frac{V_S^2}{2}\sum m_\nu+\vec{V}_S\sum m_\nu \vec{V}'_\nu+\frac{1}{2}\sum m_\nu V'^2_\nu$$

bu tenglikda $\sum m_\nu=M$ sistema massasi, $\frac{1}{2}\sum m_\nu V'^2_\nu=T'_S$ esa sistemaning inersiya markaziga nisbatan nisbiy harakat kinetik energiyasini ifodalaydi.

Qo`zg`aluvchi koordinatalar sistemasining boshi inersiya markazida joylashgani sababli

$\sum m_\nu \vec{r}'_\nu=M\,\vec{r}'_S=0$, binobarin $\sum m_\nu \vec{V}'_\nu=0$ bo`ladi.

Natijada;

$$T=\frac{1}{2}M\,V_S^2+T'_S \tag{96.2}$$

(96.2) tenglik Kyong teoremasini ifodalaydi: *murakkab harakatdagi sistemaning kinetik energiyasi massasi inersiya markaziga joylashgan deb olinuvchi sistema kinetik energiyasi bilan sistemaning inersiya markaziga nisbatan qilgan nisbiy harakati kinetik energiyasining yig`indisiga teng.*

97 - §. Qattiq jismning kinetik energiyasi

Jismning ilgarilama, qo`zg`almas o`q atrofida aylanma va tekis parallel harakatida uning kinetik energiyasini hisoblash formulalarini aniqlaymiz.

1. Ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi. Ilgarilama harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari bir xilda bo`lgani uchun $\vec{V}=\vec{V}_S$. Shunga binoan, (95.2) quyidagicha yoziladi:

$$T_{il}=\sum\frac{m_\nu V_S^2}{2}=\frac{1}{2}M\,V_S^2 \tag{97.1}$$

Demak, *ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi mazkur jism massasini uning inersiya markazi tezligi kvadratiga ko`paytirilganining yarmiga teng.*

**2. Qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi jismning kinetik energiyasi.** Jism biror $Oz$ o`q atrofida ω burchak tezlik bilan aylansa, uning har bir nuqtasi tezligini

$$V_\nu=\omega h_\nu \tag{97.2}$$

formula bilan aniqlash mumkin. (97.2) tenglamada h_ν bilan har bir nuqtadan aylanish o`qigacha bo`lgan eng qisqa masofa belgilangan.

(97.2) ni (95.2) ga qo`yamiz:

$$T_{ay}=\sum\frac{m_\nu\,\omega h_\nu^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_\nu\,h_\nu^2$$

bundagi $\sum m_\nu\,h_\nu^2=I_z$ jismning aylanish o`qiga nisbatan inersiya momentini ifodalaydi. Shunday qilib,

$$T_{ay}=\frac{1}{2}I_z\,\omega^2 \tag{97.3}$$

(97.2) dan ko`rinib turibdiki, *qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakatdagi jism kinetik energiyasi uning aylanish o`qiga nisbatan inersiya momentini burchak tezligi kvadratiga ko`paytirilganining yarmiga teng.*

3. Tekis parallel harakatdagi jismning kinetik energiyasi. Tekis parallel harakatdagi qattiq jismning kinetik energiyasini Kyonig teoremasiga asoslanib hisoblash mumkin.Bu holda nisbiy harakat inersiya markazi atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo`lgani uchun

$$T'_S = I_{Sz}\frac{\omega^2}{2}$$

bunda; I_{Sz}--jismning harakat tekisligiga perpendikulyar bo`lgan va $S$ inersiya markazidan o`tuvchi z o`qqa nisbatan inersiya momentidan iborat.

Natijada, (96.2) formuladan

$$T_{t\cdot p} = \frac{1}{2}M V_S^2 + \frac{1}{2}I_{Sz}\,\omega^2 \qquad (97.4)$$

hosil bo`ladi.

Demak, *tekis parallel harakatdagi jisimning kinetik energiyasi massasi inersiya markazida deb olingan jisimning ilgarilama harakatidagi kinetik energiyasi bilan inersiya markazidan o`tuvchi o`q atrofida aylanma harakatidagi kinetik energiyaning yig`indisiga teng.*

98 - §. Sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teorema

Mexanik sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi mteoremani keltirib chiqarish uchun sistema har bir $M_\nu$ nuqtasi uchun yozilgan dinamikaning asosiy tenglamasi (77.1) ni $\tau$ o`qqa proyeksiyalaymiz:

$$m_\nu\, a_{\nu\tau} = F^e_{\nu\tau} + F^i_{\nu\tau} \quad , \quad \nu = (1, n) \qquad (98.1)$$

Urinma tezlanish $a_{\nu\tau}$ ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_{\nu\tau} = \frac{dV_\nu}{dt} = \frac{dV_\nu}{ds_\nu}\cdot\frac{ds_\nu}{dt} = V_\nu\cdot\frac{dV_\nu}{ds_\nu} \qquad (98.2)$$

(98.2) ni (98.1) ga qo`ysak,

$$m_\nu\, V_\nu\, dV_\nu = F^e_{\nu\tau}\, ds_\nu + F^i_{\nu\tau}\, ds_\nu \quad , \quad (\nu = 1, n)$$

yoki

$$d\left(\frac{m_\nu V_\nu^2}{2}\right) = dA(\vec{F}^e_\nu) + dA(\vec{F}^i_\nu) \quad , \quad (\nu = 1, n) \qquad (98.3)$$

hosil bo`ladi.

(98.3) sistemani hadlab qo`shamiz:

$$d\sum\frac{m_\nu V_\nu^2}{2} = \sum dA(\vec{F}^e_\nu) + \sum dA(\vec{F}^i_\nu) \qquad (98.4)$$

(98.4) tenglikdagi

$$\sum dA(\vec{F}^e_\nu) = dA^e \quad , \quad \sum dA(\vec{F}^i_\nu) = dA^i$$

mos ravishda , sistemaga qo`yilgan tashqi va ichki kuchlar elementar ishlarining yig`indisini ifodalaydi.

Natijada:

$$dT = dA^e + dA^i \tag{98.5}$$

(98.5) dan ko`ramizki, *sistema kinetik energiyasining differensiali unga ta'sir qiluvchi barcha ichki va tashqi kuchlar elementar ishlarining yig`indisiga teng.*

(98.5) ni biror chekli oraliqda integrallasak, sistema kinetik energiyasining shu oraliqda o`zgarishi haqidagi teorema kelib chiqadi:

$$T - T_0 = A^e + A^i \tag{98.6}$$

Demak, *sistema kinetik energiyasining biror chekli oraliqda o`zgarishi unga ta'sir etuvchi barcha ichki va tashqi kuchlarning shu oraliqdagi ishlarining yig`indisiga teng.*

O`zgarmas mexanik sistema va absolyut qattiq jism ichki kuchlar ishlarining yig`indisi nolga teng bo`lib, (98.5) va (98.6) quyidagicha yoziladi:

$$\begin{gathered} dT = dA^e \,, \\ T - T_0 = dA^e \end{gathered} \tag{98.7}$$

(98.5) tenglikning har ikki tomonini dt ga bo`lib,

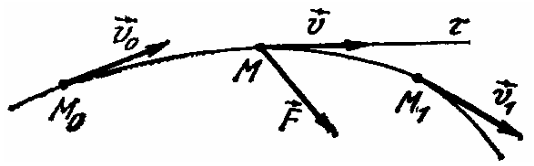
$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i \tag{98.8}$$

ni hosil qilamiz.

Demak, *sistema kinetik energiyasining vaqt bo`yicha birinchi hosilasi mazkur sistemaga ta'sir etuvchi barcha kuchlar quvvatlarining yig`indisiga teng.*

99 - §. Moddiy nuqta kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teorema

Massasi m bo`lgan M erkin nuqta $\vec{F}$ kuch ta'sirida harakatlansin (177-rasm). Bu holda (98.4) quyidagicha yoziladi:



177- rasm

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F_\tau \, ds = dA \tag{99.1}$$

(99.1) dan ko`rinib turibdiki,moddiy nuqta kinetik energuyasining differensiali ta'sir qiluvchi kuchning elementar ishiga teng.

Moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning $M_0 M_1$ ko`chishdagi ishi bilan kinetik energiyasi orasidagi munosabat

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = \int_{(M_o)}^{(M_1)} F_\tau \, ds = A \tag{99.2}$$

ko`rinishda yoziladi.

Demak, *moddiy nuqta kinetik energiyasining biror chekli oraliqdagi o`zgarishi unga ta'sir etuvchi kuchning shu oraliqdagi ishiga teng.*

(98.8) formulani moddiy nuqta uchun quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = N \tag{99.3}$$

100 - §. Mexanik energiyaning saqlanish qonuni

Mexanik sistema potensialli kuch maydonida harakatlansin. Bu holda sistemaga qo`yilgan tashqi va ichki kuchlar ishlarining yig`indisi $A^e + A^i = \Pi_0 - \Pi$ bo`lib, sistema kinetik energiyasining o`zgarishini ifodalovchi (98.6) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

yoki

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 \qquad (100.1)$$

Bunda Π_0, Π lar bilan mos ravishda , sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning boshlang`ich va istalgan paytga mos kelgan potensial energiyalari belgilangan.

Sistema potensial energiyasi bilan kinetik energiyasining yig`indisi sistemaning mexanik energiyasi deb ataladi.

(100.1) dan ko`ramizki, *potensialli kuch maydonida harakatlanuvchi sistema mexanik energiyasi o`zgarmas ekan.* Bu *mexanik energiyaning saqlanish qonuni deyiladi.*

Moddiy nuqta mexanik energiyasining saqlanish qonuni quyidagicha:

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0 \qquad (100.2)$$

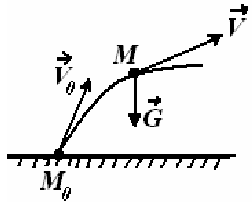
Demak, potensialli kuch maydonida harakatlanayotgan moddiy nuqtaning mexanik energiyasi o`zgarmas miqdordir.

101 - §. Moddiy nuqta va mexanik sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab masalalar yechish

Kinetik energiyaning o`zgarishi haqidagi teoremani qo`llab masalalar yechish quyidagi tartibda bajariladi:

1. Moddiy nuqta yoki mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar rasmda tasvirlanadi.
2. Moddiy nuqta yoki sistemaning ko`chishida unga ta'sir qilayotgan kuchlarning ishlari yig`indisi topiladi.
3. Moddiy nuqta yoki sistemaning boshlang`ich va oxirgi paytdagi kinetik energiyalari hisoblanadi.
4. Masalaning qo`yilishiga qarab (98.6) – (100.2) formulalarning biri tuziladi va kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

58**-masala.** Massasi $m=0,5\ kg$ bo`lgan moddiy nuqta Yer sirtidan $V_0$ *m/s* boshlang`ich tezlik bilan otilgan. Uning M holatidagi tezligi *V=12 m/s*. Mazkur nuqtaning M_0 holatdan M holatga ko`chishidagi og`irlik kuchining ishi aniqlansin (178-rasm)



178-rasm

Yechish. Moddiy niqtaga ta'sir qiluvch kuch faqat og`irlik kuchi $\vec{G}$ dan iborat.Uning ishi (99.2) ga ko`ra :

$$A = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}$$

Son qiymatlarni qo`ysak,

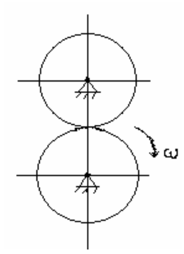
$$A=\frac{0{,}5\cdot 144}{2}-\frac{0{,}5\cdot 400}{2}=36-100=-64\ J$$

kelib chiqadi.

59**-masala.** Massalari *m= 1 kg* bo`lgan ikkita bir xil tishli g`ildiraklardan tashkil topgan sistema kinetik energiyasi topilsin (179-rasm) . G`ildiraklar $\omega=10\,rad/s$ burchak tezligi bilan aylanadi , ular har birining massasi *m=1 kg*.Har bir g`ildirakning aylanish o`qqa nisbatan inersiya radiusi $\rho_i=0{,}2\,m$.

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaning kinetik energiyasi (95.2) ga ko`ra:

$$T_{sis.}=T_1+T_2$$



G`ildiraklar bir xil bo`lgani uchun $T_1=T_2=T$ deb olamiz. (97.3) ga asosan:

$$T_{sis.}=2T=2\cdot\frac{1}{2}I\omega^2$$

179-rasm

bu yerda $I=m\,\rho_i^2$

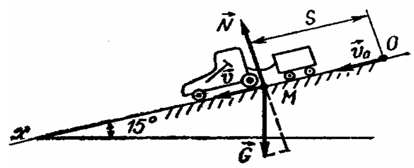
Natijada $T_{sis.}=m\omega^2\,\rho_i^2$

Son qiymatlarni qo`ysak, $T_{sis}=4\,kg\,m^2/s^2$

hosil bo`ladi.

60- masala. Yukli arava bilan birgalikdagi og`irligi $G$ bo`lgan DT- 14 traktori qiya tekislikda harakat qilmoqda.

Qiya tekislik gorizont bilan *15⁰* burchak hosil qiladi (180-rasm).Traktorning boshlang`ich tezligi $V_0=8{,}3\,m/s$. Traktor qiya tekislik bo`ylab *s=5 m* masofani o`tganda qanday tezlikka ega bo`ladi. Arava va traktor bilan tekislik orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin.



180-rasm

Yechish. Traktorning harakat yo`nalishini $Ox$ o`qi bo`yicha olamiz (180-rasm). Traktorga og`irlik kuchi $\vec{G}$, normal reaksiya $\vec{N}$ ta'sir qiladi. Bu kuchlarni harakat yo`nalishiga proyeksiyasi:

$$G_x=G\cos 75^0 \quad , \quad N_x=0$$

Traktorga ta'sir etuvchi kuchlar ishlarining yig`indisi quyidagicha bo`ladi:

$$A=A(\vec{G})+A(\vec{N})=G\cos 75^0\cdot s$$

Traktor tezligini topish uchun moddiy nuqta kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teoremadan foydalanamiz:

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=A$$

yoki

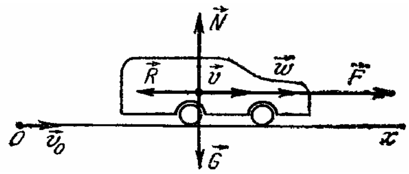
$$\frac{G}{2g}V^2-\frac{G}{2g}V_0^2=G\cos 75^0\cdot s$$

Bundan

$$V=\sqrt{V_0^2+2g\cos 75^0}=9{,}7\,m/s$$

kelib chiqadi.

61- masala. Massasi $m=4800\ kg$ bo`lgan avtomobil yo`lning gorizontal uchastkasida $a=0{,}28\ m/s^2$ tezlanish bilan harakatlanmoqda. Avtomobil harakatiga qarshilik qiluvchi kuch $R=1{,}28\ kN$.



181-rasm

$t=10$ sekunddagi avtomobil tortish kuchinig qivvati topilsin. Boshlang`ich paytda avtomobil tezligi $V_0=12\,m/s$ (181-rasm).

Yechish. Avtomobilga ta'sir etuvchi kuchlar og`irlik kuchi $\vec{G}$, gorizontal tekislikning normal reaksiyasi $\vec{N}$, tortish kuchi $\vec{F}$ hamda qarshilik kuchi $\vec{R}$ dan iborat.

Masalani yechish uchun (99.3) formuladan foydalanamiz. U quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right)=N(\vec{F})+N(\vec{N})+N(\vec{R})+N(\vec{G}) \qquad (101.1)$$

bunda

$$N(\vec{N})=0 \quad , \quad N(\vec{R})=RV \quad , \quad N(\vec{G})=0 \qquad (101.2)$$

(101.1) tenglikning chap tomonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right)=mVa \qquad (101.3)$$

(101.2) va (101.3) ni (101.1) ga qo`ysak:

$$mVa=N(\vec{F})-RV$$

Bundan

$$N(\vec{F})=(ma+R)V$$

kelib chiqadi.

Avtomobil tekis tezlanuvchi harakatda bo`lgani uchun $V=V_0+at$.

Natijada

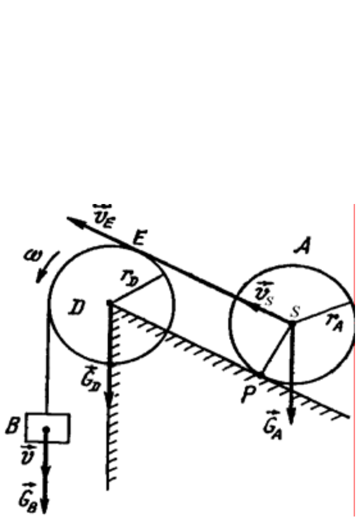
$$N(\vec{F})=(ma+R)\cdot(V_0+at)$$

Bu ifodaga son qiymatlarni qo`ysak,

$$N(\vec{F})=38{,}8\,kVt$$

kelib chiqadi.

62- masala. Og`irligi $G_A$ bo`lgan A katok hamda G_B og`irlikdagi $B$ yuk bir-biri bilan $D$ blok orqali o`tgan cho`zilmaydigan va og`irligi hisobga olinmaydigan arqon vositasida tutashtirilgan. B yuk tezligi V bo`lganda sistemaning kinetik energiyasi aniqlansin. Katok va blok bir jinsli disk deb hisoblansin (182-rasm). Blok og`irligi G_D.



182-rasm

Yechish. Sistema A katok, B yuk va D blokdan iborat. Ularning kinetik energiyalarini mos ravishda T_A, T_B, T_D deb belgilaymiz. Bu holda sistemaning kinetik energiyasi

$$T=T_A+T_B+T_D \qquad (101.4)$$

bo`ladi.

S nuqta , D blok hamda B yuk arqon yordamida tutashtirilgan. Shuning uchun

$$V_S = V_E = V \quad , \quad \omega_A r_A = \omega_D r_D = V$$

bo`ladi. Bundan

$$\omega_A = \frac{V}{r_A} \quad , \quad \omega_D = \frac{V}{r_D} \qquad (101.5)$$

kelib chiqadi. (101.5) da ω_A - A katokning , ω_D – D blok burchak tezligini ifodalaydi.

A katok tekis parallel harakatda bo`lgani uchun uning kinetik energiyasi quyidagicha:

$$T_A = \frac{1}{2}\frac{G_A}{g}V_S^2 + \frac{1}{2}I_S\,\omega_A^2 \qquad (101.6)$$

Bunda

$$I_S = \frac{G_A}{2g}r_A^2 \qquad (101.7)$$

(101.5) va (101.7) ni (101.6) ga qo`ysak:

$$T_A = \frac{3}{4}\frac{G_A}{2g}V^2 \qquad (101.8)$$

B yuk ilgarilama harakat qiladi. Uning kinetik energiyasi :

$$T_B = \frac{G_B}{2g}V^2 \qquad (101.9)$$

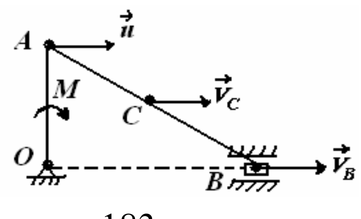
D blok aylanma harakatda bo`lgani sababli uning kinetik energiyasi:

$$T_D = \frac{1}{2}I_D\,\omega_D^2 \qquad yoki \qquad T_D = \frac{G_D}{4g}V^2 \qquad (101.10)$$

(101.8)—(101.10) larni (101.4) ga qo`ysak,sistemaning kinetik energiyasi kelib chiqadi:

$$T = \frac{V^2}{4g}(3G_A + 2G_B + G_D)$$

63-masala.Gorizontal tekislikda joylashgan krivoship-shatunli mexanizm OA krivoship va AB sterjendan iborat. Krivoship massasi m_1 ; shatun massasi m_2. Boshlang`ich paytda $<BOA = 90^0$ bo`lib, A nuqta tezligi u. Krivoshipga aylantiruvchi moment M qo`yilgan. $<BOA = 0^0$ bo`lgan paytdagi A nuqta tezligi aniqlansin. Krivoship va shatun bir jinsli sterjen deb hisoblansin. Ishqalanish va polzun massasi hisobga olinmasin (183-rasm).



183-rasm

Yechish. Sistema OA krivoship va AB shatundan iborat. Masalani yechish uchun sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teoremani integral ko`rinishidan foydalanamiz:

$$T - T_0 = \sum A_V^e \qquad (101.11)$$

Mexanizm A , B va C nuqtalarining tezliklarini yo`nalishi 183-rasmdagidek bo`ladi.

$<BOA = 90^0$ bo`lganda $AB$ shatunning tezliklar oniy markazi cheksizda bo`ladi.

Demak, tekis parallel harakat nazariyasiga ko`ra $AB$ shatun burchak tezligi $\omega_{AB}=0$. Shuning uchun boshlang`ich paytda

$$V_A=V_B=V_C=u$$

bo`lib, sistema kinetik energiyasi quyidagicha bo`ladi:

$$T_0=\frac{1}{2}I_0\,\omega^2+\frac{1}{2}m_2\,u^2$$

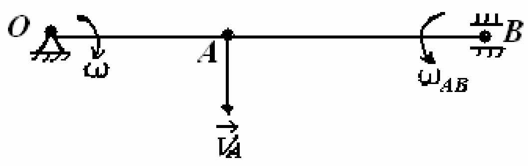
yoki $\omega=\dfrac{u}{l}$, $I_0=\dfrac{1}{3}m_1\,l^2$ ($l=OA$) bo`lganligi uchun

$$T_0=\frac{1}{6}u^2\,(m_1+3m_2) \qquad (101.12)$$

bo`ladi.

Aylantiruvchi M moment ta'sirida OA krivoship 90^0 burilib, $<BOA=0^0$ bo`ladi. Bu holda aylantiruvchi momentning ishi (184-rasm):

$$A=M\frac{\pi}{2} \qquad (101.13)$$



kinetik energiya esa

$$T=T_{OA}+T_{AB}=\frac{1}{2}I_0\,\omega^2+\frac{1}{2}I_B\,\omega_{AB}^2$$

184-rasm

bo`ladi.Bu yerda $I_0=\dfrac{1}{3}m_1\,OA^2$, $I_B=\dfrac{1}{3}m_2\,AB^2$, $\omega=\dfrac{V_A}{OA}$, $\omega_{AB}=\dfrac{V_A}{AB}$.

Natijada

$$T=\frac{1}{6}m_1\,V_A^2+\frac{1}{6}m_2\,V_A^2$$

yoki

$$T=\frac{1}{6}(m_1+m_2)V_A^2 \qquad (101.14)$$

hosil bo`ladi.

(101.12) , (101.13) va (101.14) ni (101.11) ga qo`ysak,

$$V_A=\sqrt{\frac{3\pi M+u^2\,(m_1+3m_2)}{m_1+m_2}}$$

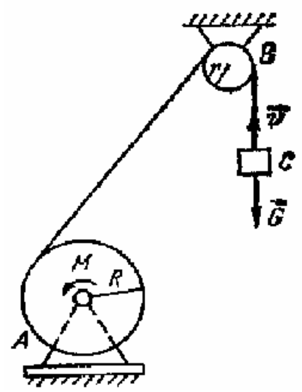
kelib chiqadi.

64- masala. Elektr lebyodka og`irligi $G$ bo`lgan C yukni ko`taradi. Elektr motori $M$ o`zgarmas moment ta'sirida A barabanni harakatga keltiradi. A baraban va B blokning aylanish o`qlariga nisbatan inersiya momentlari tegishlicha I_1 va I_2 , baraban radiusi R va blok radiusi r berilgan (185 -rasm) (uzunliklar - metrlar, vaqt – sekundlar hisobida). Baraban burchak tezlanishi aniqlansin.

Yechish. Tekshiralayotgan sistemaga baraban, yuk va blokning og`irlik kuchi, tayanch reaksiyasi , shuningdek o`zgarmas moment ta'sir qiladi. Masalani yechish uchun sistema kinetik energiyasining o`agarishi haqidagi teoremaning differensial ko`rinishi (98.8) dan foydalanamiz:

$$\frac{dT}{dt}=N^e+N^i \qquad (\,*\,)$$

Biz tekshirayotgan masala uchun tros reaksiya kuchi hamda boshqa ichki kuchlar quvvatining yig`indisi nolga teng: $N^i = 0.$



185-rasm

Baraban va blok og`irlik kuchining,shuningdek tayanch reaksiyasining quvvati nolga teng,chunki bu kuchlarning qo`yilish nuqtalari qo`zg`almas. Yuk og`irlik kuchining quvvati:

$$N_1 = -GV = -GR\omega_1$$

(bunda ω_1- baraban burchak tezligi), aylantiruvchi moment quvvati:

$$N_2 = M\omega_1$$

Natijada:

$$N^e = -GR\omega_1 + M\omega_1 \qquad (101.15)$$

Sistema kinetik energiyasi :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (101.16)$$

bunda: T_1, T_2 va T_3 - mos ravishda baraban, blok hamda yukning kinetik energiyasi.

Baraban va blok aylanma harakatda bo`lgani sababli, ularning kinetik energiyasi

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \qquad (101.17)$$

(101.17) ifodada ω_2 bilan blok burchak tezligi belgilangan.

Tros hamma nuqtalari tezliklarining miqdori tengligidan foydalanib, ω_2 va ω_1 orasidagi

$$\omega_2 = \frac{R\omega_1}{r}$$

bog`lanishni hosil qilamiz.

Natijada :

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{R^2}{r^2} \omega_1^2 \qquad (101.18)$$

Yuk ilgarilama harakat qilgani uchun uning kinetik energiyasi

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} V^2$$

Lekin, $V = \omega_1 R.$ Shunga ko`ra

$$T_3 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega_1^2 \qquad (101.19)$$

(101.17) – (101.19) ni (101.16) ga qo`yamiz:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \frac{R^2}{r^2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega_1^2 \qquad (101.20)$$

(101.15) va (101.20) ni (*) ga qo`yamiz:

$$\left(I_1 + I_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{G}{g} \right) \frac{d\omega_1}{dt} = M - GR$$

bundan

$$\varepsilon_1 = \frac{(M - GR)r^2 g}{(I_1 r^2 + I_2 R^2)g + GR^2 r^2}$$

kelib chiqadi.

Nazorat savollari

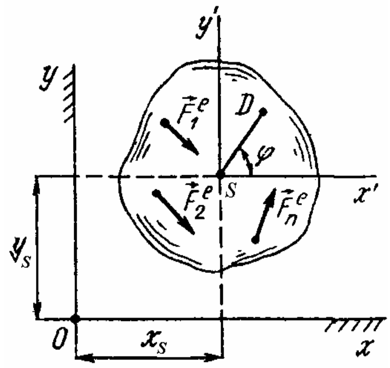
1.Mexanik sistema dinamikasining asosiy tenglamasini yozing.
2.Sistema dinamikasida ichki va tashqi kuchlar qanday ifodalanadi?
3.Mexanik sistema harakatining differensial tenglamasini Dekart koordinata o`qlaridagi proyeksiyalarini yozing.
4.Inersiya markazining harakati haqidagi teoremani ta’riflang va matematik ifodasini yozing.
5.Sistema harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasi qanday bo`ladi?
6.Qanday shart bajarilganda moddiy nuqta harakat miqdorining saqlanish qonuni o`rinli bo`ladi?
7.Mexanik sistema harakat miqdor (kinetik) momentining hisoblash formulasini yozing.
8.Sistema kinetik momentining saqlanish qonuni qanday bo`ladi?
9.Sistema harakat miqdori teoremasining integral ifodasini yozing.
10.Ilgarilanma harakatdagi jism kinetik energiyasining hisoblash formulasini yozing.
11.Aylanma harakatdagi jism kinetik energiyasi qanday hisoblanadi?
12.Sistema kinetik energiyasining o`zgarishi haqidagi teoremaning integral ko`rinishini yozing.
13.Tekis parallel harakatdagi jism kinetik energiyasi formulasini yozing.
14.Sistema kinetik energiya teoremasining differensial ifodasini yozing.
15.Qattiq jism kinetik energiya teoremasining integral ko`rinishini yozing.
16.Qattiq jism kinetik energiya teoremasining differensial ko`rinishi qanday yoziladi?
17.Mexanik energiyaning saqlanish qonunini yozing.
18.Qattiq jismning aylanish o`qiga nisbatan inersiya momenti nima? Nuqtaga nisbatan inersiya momenti-chi?
19.Qattiq jismning aylanish o`qiga nisbatan kinetik momenti qanday ifodalanadi?
20.Inersiya radiusi nima?
21.Qattiq jismning uchta koordinata o`qlariga nisbatan inersiya momenti bilan shu koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti orasida qanday bog`lanish bor?
22.Moddiy nuqta harakat miqdorining o`zgarishi haqidagi teoremani ta’riflang.
23.Moddiy nuqta harakat miqdor momentining o`zgarishi haqidagi teoremaning differensial ifodasi qanday bo`ladi?
24. Moddiy nuqta kinetik energiya teoremasining differensial va integral ko`rinishini yozing.

XV bob

Qattiq jismning tekis parallel harakati

102 - §. Qattiq jism tekis parallel harakatining differensial tenglamalari

Kinematikadan ma'lumki, qattiq jismning tekis parallel harakati mazkur jismda qutb deb olingan nuqta holati hamda uning shu qutbdan o`tuvchi o`q atrofida aylanishidagi burilish burchagi orqali aniqlanar edi. Jismning inersiya markazini qutb deb tanlasak, tekis parallel harakatdagi jism holati inersiya markazining koordinatalari x_S, y_S va φ burilish burchagi orqali aniqlanadi.



186-rasm

Jism $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, ..., \vec{F}_n^e$ kuchlar ta'sirida harakatlansin (186- rasm). Bu holda S nuqtaning harakatini jism inersiya markazining harakati haqidagi teoremadan foydalanib aniqlash mumkin:

$$M\,\vec{a}_S = \sum \vec{F}_\nu^e \qquad (102.1)$$

Jismning S qutbga nisbatan harakati esa harakat tekisligiga perpendikulyar bo`lgan va $S$ nuqtadan o`tuvchi Sz o`q atrofidagi aylanma harakat differensial tenglamasi bilan ifodalanadi:

$$I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_{Sz}(\vec{F}_\nu^e) \qquad (102.2)$$

$\sum \vec{F}_\nu^e = \vec{R}^e$, $\sum m_{Sz}(\vec{F}_\nu^e) = M_{Sz}^e$ belgilashlar kiritsak,qattiq jism tekis parallel harakatining differensial tenglamalarini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} &= \vec{R}^e \\ I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= M_{Sz}^e \end{aligned} \qquad (102.3)$$

(102.3) differensial tenglamalar Dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x_S}{dt^2} &= R_x^e, \\ M\frac{d^2y_S}{dt^2} &= R_y^e, \\ I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= M_{Sz}^e. \end{aligned} \qquad (102.4)$$

Jism massa markazining trayektoriyasi aniq bo`lsa, S nuqta harakatini tabiiy koordinatalar sistemasida ham aniqlash mumkin. Bu holda (102.3) differensial tenglamalar sistemasi

$$M\frac{dV_S}{dt}=R_\tau^e\,,$$

$$M\frac{V_S^2}{\rho_S}=R_n^e\,, \qquad (102.5)$$

$$I_{Sz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_{Sz}^e\,.$$

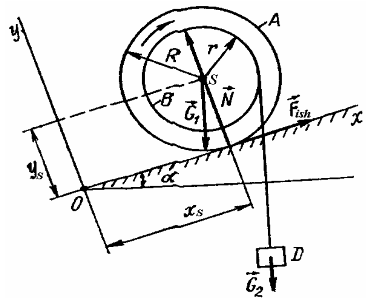
ko`rinishni oladi. Bunda ρ_S inersiya markazi trayektoriyasining egrilik radiusi.

103 - §. Jismning tekis parallel harakati dinamikasiga doir masalalar yechish

Qattiq jism tekis parallel harakatiga doir masalalar qyuidagi tartibda yechiladi.

1. Sanoq sistemasi tanlab olinadi.
2. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar hamda bog`lanish reaksiyalari rasmda tasvirlanadi.
3. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar bosh vektorining tanlab olingan koordinata sistemasidagi proyeksiyalari hamda mazkur kuchlarning S nuqtadan o`tuvchi,harakat tekisligiga perpendikulyar o`qqa nisbatan momentlari yig`indisi aniqlanadi.
4. Jismning tekis parallel harakati differensial tenglamalari tuziladi.
5. Agar dinamikaning birinchi masalasini yechish kerak bo`lsa, tuzilgan differensial tenglamalardan noma'lumlar aniqlanadi; ikkinchi asosiy masalani yechish kerak bo`lsa, boshlang`ich shartlar aniqlanib,tuzilgan differensial tenglamalarning shu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topiladi.

65-masala. Radiusi r bo`lgan $B$ baraban $R$ radiusli $A$ g`ildirakka mahkam biriktirilgan. B barabanga arqon o`ralgan bo`lib, arqonning bir uchiga D yuk osilgan. G`ildirak gorizontal bilan $\alpha$ burchak hosil qiluvchi tekislik bo`ylab o`ng tomonga sirpanmasdan dumalaydi. G`ildirak va barabanning umumiy og`irligi $G_1$, yuk og`irligi G_2. α burchak qanday bo`lganda g`ildirak inersiya markazi teng o`lchovli harakat qiladi? Boshlang`ch paytda g`ildirak tinch turgan deb hisoblansin (187- rasm).



Yechish. Sanoq sistemasini 187- rasmdagidek tanlaymiz.

187-rasm

G`ildirak tekis parallel harakatdagi jismdan iborat. Jismga gildirak va barabanning og`irlik kuchi $\vec{G}_1$, yuk og`irligi $\vec{G}_2$, tayanch tekisligining normal reaksiya kuchi $\vec{N}$,ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta'sir qiladi.Bu kuchlarning $Ox$ va $Oy$ o`qlardagi proyeksiyalarining yig`indisi mos ravishda quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{aligned} R_x^e &= -G_1\sin\alpha - G_2\sin\alpha + F_{ish} \\ R_y^e &= -G_1\cos\alpha - G_2\cos\alpha + N \end{aligned} \qquad (103.1)$$

G`ildirakka ta'sir etuvchi kuchlarning inersiya markazidan o`tuvchi va harakat tekisligiga perpevdikulyar bo`lgan o`qqa nisbatan momentlarining yig`indisini hisoblaymiz:

$$M_{Sz}=G_2\,r-F_{ish}\,R \qquad (103.2)$$

(103.1) va (103.2) ni (102.4) ga qo`ysak, g`ildirak differensial tenglamalari kelib chiqadi:

$$
\begin{cases}
M\ddot{x} = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha + F_{ish} \\
M\ddot{y} = -G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha + N \\
I_{Sz} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = G_2 r - F_{ish} R
\end{cases}
\qquad (103.3)
$$

G\`ildirak inersiya markazi teng o\`lchovli harakatda bo\`lishi uchun

$$\dot{x}_S = R\dot{\varphi} = const\,,\ \dot{y}_S = 0\,.$$

Bundan

$$\ddot{x}_S = 0\,,\ \ddot{y}_S = 0\,,\ \ddot{\varphi} = 0 \qquad (103.4)$$

kelib chiqadi.

(103.4) ni (103.3) ga qo\`yamiz:

$$
\begin{cases}
0 = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha + F_{ish} \\
N = G_1 \cos\alpha + G_2 \cos\alpha \\
0 = G_2 r - F_{ish} R
\end{cases}
\qquad (103.5)
$$

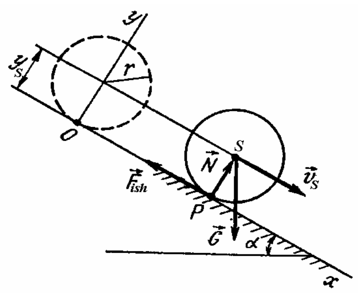
(103.5) ning uchinchisidan:

$$F_{ish} = \frac{G_2 r}{R} \qquad (103.6)$$

(103.6) ni (103.5) ning birinchisiga qo\`ysak, noma'lum burchak aniqlanadi:

$$\sin\alpha = \frac{G_2 r}{R(G_1 + G_2)}$$

(103.5) ning ikkinchi tenglamasidan sirtning normal reaksiyasi N ni aniqlash mumkin.



188-rasm

66-masala. Radiusi r, og\`irligi $G$ bo\`lgan bir jinsli g\`ildirak gorizont bilan $\alpha$ burchak tashkil qilgan qiya tekislikda boshlang\`ich tezliksiz sirg\`anmay dumalaydi. G\`ildirakning harakat qonuni topilsin (188-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 188-rasmdagidek tanlaymiz. Koordinata boshini g\`altakning boshlang\`ich holatiga moslab olamiz. Gildirak tekis parallel harakat qiladi.

G\`ildirakka og\`irlik kuchi $\vec{G}$, ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$, qiya tekislik normal reaksiyasi $\vec{N}$ ta'sir qiladi. Bu kuchlarning Ox va Oy o\`qlaridagi proyeksiyalarining yig\`indisi

$$
\begin{aligned}
R_x^e &= G\sin\alpha - F_{ish} = Mg\sin\alpha - F_{ish} \\
R_y^e &= G\cos\alpha - N = Mg\cos\alpha - N
\end{aligned}
\qquad (103.7)
$$

inersiya markazidan o\`tuvchi va harakat tekisligiga perpendikulyar bo\`lgan o\`qqa nisbatan momentlar yig\`indisi esa

$$M_{Sz}^e = F_{ish}\, r \qquad (103.8)$$

(103.7) va (103.8) ni (102.4) ga qo\`ysak:

$$
\begin{cases}
M\ddot{x}_S = M g\sin\alpha - F_{i\,sh} \\
M\ddot{y}_S = M g\cos\alpha - N \\
\frac{1}{2}M r^2\ddot{\varphi} = F_{i\,sh} r
\end{cases}
\tag{103.9}
$$

188-rasmdan:

$$y_S = r \tag{103.10}$$

bundan

$$\ddot{y}_S = 0 \tag{103.11}$$

kelib chiqadi.

G`ildirak sirpanmasdan dumalagani , $S$ nuqta harakati to`g`ri chiziqli bo`lgani uchun

$$V_S = \dot{x}_S = r\dot{\varphi} \tag{103.12}$$

bundan:

$$x_S = r\ddot{\varphi} \tag{103.13}$$

(103.11) va (103.13) ni (103.9) ga qo`yamiz:

$$
\begin{cases}
M r\ddot{\varphi} = M g\sin\alpha - F_{i\,sh} \\
0 = M g\cos\alpha - N \\
\frac{1}{2}M r^2\ddot{\varphi} = F_{i\,sh}\, r
\end{cases}
\tag{103.14}
$$

(103.14) ning ikkinchi va uchinchisidan

$$
\begin{gathered}
N = M g\cos\alpha \\
F_{i\,sh} = \frac{1}{2}M r\ddot{\varphi}
\end{gathered}
\tag{103.15}
$$

kelib chiqadi.

(103.14) ning birinchisi bilan (103.15) ning ikkinchisini birgalikda yechsak:

$$
\begin{gathered}
\frac{3}{2}M\ddot{x}_S = M g\sin\alpha \\
\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\alpha}{r}
\end{gathered}
\tag{103.16}
$$

Masala shartiga ko`ra *t=0* da $x_S = 0\,,\dot{x}_S = 0\,,\varphi = 0$. Bu boshlang`ich shartlardan foydalanib, (103.16) ni integrallasak va (103.10) ni e'tiborga olsak:

$$x_S = \frac{1}{3}g t^2\sin\varepsilon\,,\; y_S = r\,,\; \varphi = \frac{g\sin\alpha}{3r}t^2$$

Bu tenglamalar g`ildirakning harakat qonunini ifodalaydi.

Nazorat savollari

1.Qo`zg`almas o`q atrofida aylanayotgan jism differensial tenglamasi qanday?
2.Qattiq jism ilgarilama harakat differensial tenglamasini yozing.
3.Qattiq jism tekis parallel harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
4.Qattiq jism tekis parallel harakatiga oid masalalar qanday tartibda hal etiladi?

XVI bob

Dalamber prinsipi. Aylanma harakatdagi jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan bosimi

104 - §. Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi

Dinamika masalalarini yechishdagi hamma metodlar Nyuton qonunlaridan kelib chiqadigan tenglamarga yoki dinamikaning umumiy teoremalariga asoslanadi.

Texnikada uchraydigan ko`pgina masalalarni yechishda mexanikaning umumiy prinsiplaridan foydalanish juda qulay.

Bu prinsiplardan biri Dalamber prinsipidir. Dalamber prinsipida dinamika tenglamariga statika tenglamalarining ko`rinishi beriladi.

Erkin moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini keltirib chiqarishda dinamikaning asosiy tenglamasidan foydalanamiz:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

yoki

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0 \qquad (104.1)$$

Miqdori moddiy nuqta massasi bilan tezlanishining ko`paytmasiga teng bo`lib, yo`nalishi tezlanish vektoriga teskari bo`lgan vektor inersiya kuchi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} \qquad (104.2)$$

(104.2) ni (104.1) ga qo`yamiz:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \qquad (104.3)$$

(104.3) tenglama Dalamber prinsipini ifodalaydi: *Moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch har onda inersiya kuchi* bilan muvozanatlashadi (189-rasm).

Agar moddiy nuqta egri chiziqli harakatda bo`lsa, inersiya kuchi urinma va normal tuzuvchilarga ajratiladi:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n$$

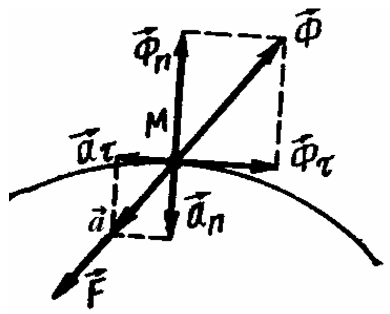
bunda

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau \quad , \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n$$

yoki

$$\Phi_\tau = m\left|\frac{dV}{dt}\right| \qquad , \qquad \Phi_n = m \cdot \frac{V^2}{\rho}$$

Agar moddiy nuqta to`g`ri chiziqli harakatda bo`lsa, $\Phi_n = 0$.



Erksiz moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \qquad (104.4)$$

189-rasm

bunda $\vec{R}$ bog`lanish reaksiya kuchidan iborat.

105 - §. Sistema uchun Dalamber prinsipi

Mexanik sistema $M_1, M_2, \ldots, M_n$ moddiy nuqtalardan tashkil topgan bo`lsin. Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratsak, sistemaning har bir nuqtasi uchun Dalamber prinsipi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i + \vec{\Phi}_1, \\ \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i + \vec{\Phi}_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i + \Phi_n. \end{cases} \tag{105.1}$$

Demak, *sistemaning har bir nuqtasiga ta'sir qiluvchi tashqi va ichki kuchlar har onda shu nuqta inersiya kuchi bilan muvozanatlashadi.*

(105.1) tenglamalarni hadma-had qo`shsak,

$$\vec{R}^e + \vec{R}^i + \vec{R}^\Phi = 0 \tag{105.2}$$

kelib chiqadi. (105.2) ifodada $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_\nu^e$ – tashqi kuchlarning bosh vektori, $\vec{R}^i = \sum \vec{F}_\nu^i$ – ichki kuchlarning bosh vektori, $\vec{R}^\Phi = \sum \vec{\Phi}_\nu$ – inersiya kuchlarining bosh vektori.

Ichki kuchlar xususiyatiga ko`ra $\vec{R}^i = 0.$

Natijada (105.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{R}^e + \vec{R}^\Phi = 0 \tag{105.3}$$

ya'ni, sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar bosh vektori bilan sistema nuqtalari inersiya kuchlari bosh vektorining geometrik yig`indisi nolga teng.

(105.1) ni mos ravishda nuqtalar radius-vektorlari $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ ga vektorli ko`paytirib,hosil bo`lgan natijalarni qo`shsak,

$$\sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^e + \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i + \sum \vec{r}_\nu \times \vec{\Phi}_\nu = 0 \tag{105.4}$$

kelib chiqadi.Bu yerda $\vec{M}_0^e = \sum \vec{r} \times \vec{F}_\nu^e$ – tashqi kuchlarning O markazga nisbatan bosh momenti; $\vec{M}_0^i = \sum \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^i$ – ichki kuchlar bosh momenti; $\vec{M}_0^\Phi = \sum \vec{r} \times \vec{\Phi}_\nu$ – inersiya kuchlarining bosh momenti; ichki kuchlar xususiyatiga ko`ra $\vec{M}_0^i = 0$. Bu holda (105.4) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{M}_0^e + \vec{M}_0^\Phi = 0 \tag{105.5}$$

ya'ni sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlarning hamda sistema nuqtalari inersiya kuchlarining biror markazga nisbatan momentlarining yig`indisi nolga teng.

(105.3) va (105.5) tenglamalar birgalikda mexanik sistema uchun Dalamber prinsipining vektorli ko`rinishini ifodalaydi.

(105.3) va (105.5) larni Dekart koordinata o`qlariga proyeksiyalab, Dalamber prinsipining analitik usulda ifodalanishini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} R_x^e + R_x^\Phi = 0, & M_x^e + M_x^\Phi = 0, \\ R_y^e + R_y^\Phi = 0, & M_y^e + M_y^\Phi = 0, \\ R_z^e + R_z^\Phi = 0; & M_z^e + M_z^\Phi = 0. \end{cases} \tag{105.6}$$

(105.3) va (105.5) larni mos ravishda, sistema massa markazi harakati haqidagi teorema:

$$M\,\vec{a}_S = \vec{R}^e \tag{105.7}$$
hamda sistema kinetik momentining o`zgarishi haqidagi teorema:
$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e \tag{105.8}$$

bilan taqqoslasak, inersiya kuchlarining bosh vektori va biror markazga nisbatan bosh momentlarini aniqlovchi quyidagi formulalarni hosil qilamiz:
$$\vec{R}^\Phi = -M\,\vec{a}_S \tag{105.9}$$
$$\vec{M}_0^\Phi = -\frac{d\vec{K}_0}{dt} \tag{105.10}$$

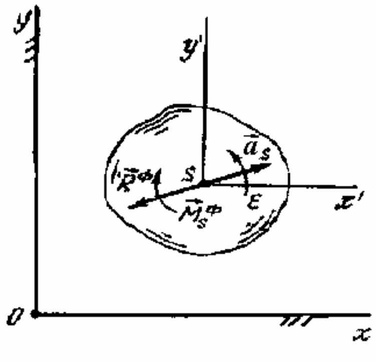
(105.9) va (105.10) dan ko`rinib turibdiki, inersiya kuchlarining bosh vektori jism massasi bilan inersiya markazi tezlanish vektorining ko`paytmasiga teng bo`lib, yo`nalishi tezlanish vektorining yo`nalishiga teskari, inersiya kuchlarining biror markazga nisbatan bosh momenti esa sistemaning shu markazga nisbatan kinetik momentidan vaqt bo`yicha olingan birinchi hosilaning teskari ishora bilan olinganiga teng.

(105.9) ning urinma va normal tuzuvchilari quyidagicha:
$$R_\tau^\Phi = M\left|\frac{dV_S}{dt}\right|,\quad R_n^\Phi = M\frac{V_S^2}{\rho} \tag{105.11}$$

(105.9) va (105.10) dan foydalanib inersiya kuchlarining bosh vektori hamda bosh momentining ba’zi bir xususiy hollarda hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

1. Jism ilgarilama harakatda bo`lsin. U holda jism inersiya markazi atrofida aylanma harakat qilmaydi. Bunda $\vec{M}_S^\Phi = 0$ bo`lib, inersiya kuchlari teng ta’sir etuvchiga keltiriladi va u inersiya kuchlarining bosh vektori kabi (105.9) tenglama bo`yicha aniqlanadi.

2. Jism simmetriya tekisligiga ega bo`lib, u mazkur tekislikka tik yo`nalgan qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakat qilayotganda inersiya kuchlarining bosh vektori (105.9) formula bo`yicha, inersiya kuchlarining bosh momenti esa (105.10) tenglamani qo`zg`almas o`qqa proyeksiyalash bilan aniqlanadi:
$$M_z^\Phi = -I_z\,\varepsilon$$



190-rasm

Agar aylanish o`qi jismning massa markazidan o`tsa $\vec{R}^\Phi = 0$ bo`ladi.

3. Jism simmetriya tekisligiga ega bo`lib, unga parallel harakat qilayotgan bo`lsa, inersiya kuchlarining bosh vektori $\vec{R}^\Phi = -M\,\vec{a}_S$, uning proyeksiyalari
$$R_x^\Phi = -M\,a_{Sx}\ ,\ R_y^\Phi = -M\,a_{Sy}$$
bosh momenti
$$M_S^\Phi = -I_S\,\varepsilon$$
bo`ladi. Bunda I_S – jismning inersiya markaziga nisbatan inersiya momenti.

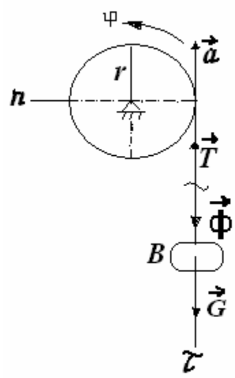
Demak, tekis parallel harakatdagi jismga qo`yiladigan inersiya kuchlari bir bosh vektor va bir bosh momentga keltiriladi (190-rasm).

106 - §. Dalamber prinsipini qo`llab masalalar yechish

Dalamber prinsipi qo`llanilganda masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sanoq sistemasi tanlanadi.
2. Ta’sir etuvchi kuchlar va reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
3. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti aniqlanadi. Shuningdek inersiya kuchlar bosh vektorining qo`yilish nuqtasi topiladi.
4. Hosil bo`lgan kuchlar sistemasining “muvozanat” tenglamalari tuziladi.
5. Tuzilgan tenglamalardan noma’lumlar aniqlanadi.

67- masala. Massasi *m=60 kg* bo`lgan *B* yuk *r=0,4 m* radiusli barabanga o`ralgan ipga osilgan.Baraban $\varphi = 0{,}6t^2$ qonun bo`yicha aylanadi.Ipning taranglik kuchi topilsin (191-rasm).



191-rasm

Yechish. Sanoq sistemasi qilib 191-rasmdagidek tabiiy koordinata sistemasini tanlaymiz.

B yukni moddiy nuqta deb qarasak, unga og`irlik kuchi $\vec{G}$, ipning taranglik kuch $\vec{T}$ ta’sir qiladi.
Yukning tezlanishi $\vec{a}$ baraban gardishidagi nuqtaning urinma tezlanishi bilan bir xil bo`lgani uchun mazkur yukning inersiya kuchi

$$\Phi = m\,a_\tau = m\ddot{\varphi} r = 60 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}4 = 28{,}8\,N$$

bo`ladi.

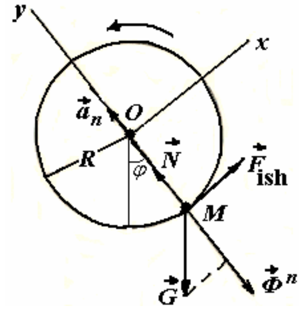
Yukning inersiya kuchi $\vec{\Phi}$ ni nuqtaga ta’sir etuvchi kuchlar qatoriga qo`shib,moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipini yozamiz:

$$G + \Phi - T = 0$$

yoki $$mg + \Phi - T = 0$$
bu yerdan $$T = mg + \Phi$$
kelib chiqadi.

Son qiymatlarni qo`ysak: *T=616,8 N.*

68- masala. Donni sortlarga ajratadigan silindrik g`alvir o`zgarmas ω burchak tezligi bilan gorizontal *Ox* o`q atrofida aylanadi. Don g`alvirga nisbatan muvozanatda bo`lganda uning silindr sirtiga ko`rsatadigan bosimi hamda don va silindr sirti orasidagi ishqalanish koeffitsiyenti vaqt funksiyasi orqali ifodalansin. Don og`irligi *G* , silindr radiusi *R* ga teng. Boshlang`ich paytda don silindr sirtining eng pastida joylashgan (192-rasm).



192-rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 192-rasmdagidek tanlaymiz.

Donni moddiy nuqta deb qarasak, unga og`irlik kuchi $\vec{G}$, g`alvir aylanishi tomon yo`nalgan ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$, normal reaksiya kuchi $\vec{N}$ ta’sir qiladi. $\omega = const$ hamda don nisbiy muvozanatda bo`lgani uchun uning inersiya kuchi quyidagicha bo`ladi:

$$\Phi = \Phi^n = m\,\omega^2 R = \frac{G}{g}\omega^2 R$$

Natijada (104.4) ga ko`ra donning g`alvirga nisbatan muvozanat tenglamasi

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{ish} + \vec{\Phi}^n = 0 \qquad (106.1)$$

(106.1) ni Ox , Oy o`qlariga proyeksiyalaymiz:

$$\begin{aligned} &-G\sin\omega\, t + F_{ish} = 0 \\ &-G\cos\omega\, t + N - \Phi^n = 0 \end{aligned} \qquad (106.2)$$

Bunda $F_{ish} = f\,N$

(106.2) ning ikkinchisidan:

$$N = G\cos\omega t + \frac{G}{g}\omega^2 R$$

yoki

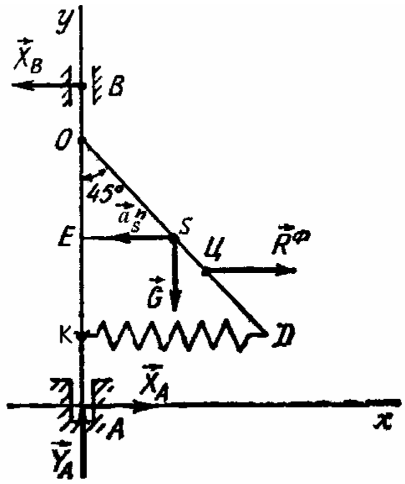
$$N = G\left(\cos\omega t + \frac{R\,\omega^2}{g}\right) \qquad (106.3)$$

Donning silindr sirtiga ko`rsatadigan bosimi normal reaksiyaga teng , yo`nalishi unga teskari bo`ladi.

(106.3) ni e'tiborga olsak, (106.2) ning birinchisidan ishqalanish koeffitsiyentini aniqlash mumkin:

$$f = \frac{g\sin\omega t}{\xi^2 R + g\cos\omega t}$$

69-masala. Doimiy $\omega = 12\,s^{-1}$ burchak tezligi bilan aylanayotgan AB vertikal valga ingichka bir jinsli OD sterjen sharnir bilan biriktirilgan. Sterjenning D uchiga DK prujina ulangan bo`lib, prujinaning K uchi AB valga tutashtirilgan. Sterjen val bilan 45^0 burchak , prujina esa 90^0 hosil qiladi.Sistema holati Axy tekisligiga mos kelgan hol uchun A podpyatnik, B podshipnik reaksiyalari hamda prujina reaksiyasi aniqlansin. *Od=AO=0,4 m, OB=0,08 m,* sterjen massasi *m=30 kg.* Prujina massasi hisobga olinmasin (193-rasm).



193-rasm

Yechish. Sanoq sistemasini 193-rasmdagidek tanlaymiz.Tekshirilayotgan sistemaga og`irlik kuchi $\vec{G}$, reaksiya kuchlari $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B$ ta'sir etadi.

Sterjenning inersiya kuchini aniqlash uchun uni uzunligi dx , massasi $dm = \gamma\, dx$ bo`lgan elementar bo`lakchalarga ajratamiz va har bir uchastkani moddiy nuqta deb qaraymiz.Bu holda sterjen nuqtalari inersiya kuchlarining bosh vektori $R^\Phi = m\,a_S^n$ formula bilan aniqlanadi.

Binobarin,

$$R^\Phi = m\,\omega^2 \frac{OD}{2}\sin 45^0 = 50{,}76N$$

Sterjen inersiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi R^Φ ga teng bo`lib, uning ta'sir chizig`i ΔOKD ning og`irlik markazidan o`tadi ,chunki inersiya kuchlari uchburchak qonuni asosida taqsimlangan parallel kuchlardan iborat ; $OЦ = \frac{2}{3}OD$.

Tekshirilayotgan sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasidir. Bu kuchlarning muvozanat sharti quyidagicha yoziladi:

$$\sum F_{vx} = X_A - X_B + R^{\Phi} = 0 \tag{106.4}$$

$$\sum F_{vy} = Y_A - G = 0 \tag{106.5}$$

$$\sum m_B(\vec{F}_v) = X_A\,AB - G\frac{OD}{2}\sin 45^0 + R^{\Phi}\left(OB + \frac{2}{3}OD\cos 45^0\right) \tag{106.6}$$

(106.5) dan

$$Y_A = G = mg = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3\,N$$

(106.6) dan:

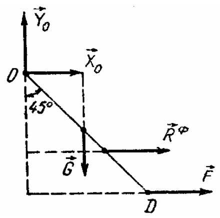
$$X_A = G\frac{OD}{2\,AB}\sin 45^0 - \frac{1}{AB}R^{\Phi}\left(OB + \frac{2}{3}OD\sin 45^0\right)$$

yoki son qiymatlarni qo`ysak, $X_A = 58{,}109\,N$ kelib chiqadi.

(106.4) dan:

$$X_B = X_A + R^{\Phi} = 58{,}109 + 50{,}76 = 108{,}869\,N$$

Endi prujina reaksiyasini aniqlaymiz. Buning uchun OD sterjen harakatini tekshiramiz, DK prujina ning sterjenga ta'sirini $\vec{F}$ kuch bilan almashtiramiz. O nuqtaga nisbatan moment tenglamasini tuzamiz (194-rasm):



194-rasm

$$\sum m_O(\vec{F}_v) = R^{\Phi}\frac{2}{3}OD\cos 45^0 + F\cdot OD\cos 45^0 - G\frac{OD}{2}\sin 45^0$$

Son qiymatlarni qo`ysak, *F=113,42 N* kelib chiqadi.

Demak: $R_A = 291{,}528\,N$, $R_B = X_B = 108{,}869\,N$, $F = 113{,}42\,N$.

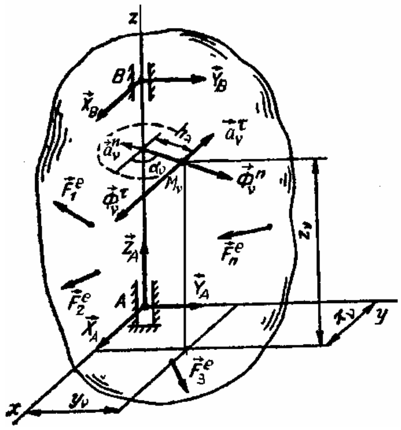
107 - §. Qo`zg`almas o`q atrofida aylanadigan jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan bosimi

Tez harakatlanadigan mashinalarning ko`payib borishi, qurilishlarda turli kranlarning keng miqyosda ishlatilishi,shuningdek, turli transport inshootlarning barpo bo`lishi ular qismlarida hosil bo`ladigan faktorlarni yaxshilab o`rganish zaruriyatini tug`diradi.Mashinalar rotorining qo`zg`almas o`q atrofida tez aylanishi natijasida inersiya kuchlari hosil bo`ladi.Bu inersiya kuchlarining ta'sirida rotorning aylanish o`qiga ko`rsatadigan dinamik bosimi o`zgaradi.

Tez harakatlanadigan mashinalarni loyihalashda konstruktorlar dinamik bosimni kamaytirishlari kerak. Buning uchun dastlab jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan bosimini aniqlash kerak.

Jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan bosimini aniqlash uchun jism tayanch nuqtalarining reaksiyalari topiladi.

Qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi jismning tayanch reaksiyalarini aniqlashda Dalamber prinsipidan foydalaniladi.


195-rasm

Jism $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sirida AB qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakat qilayotgan bo`lsin. Koordinata o`qlarini 195-rasmdagidek tanlaymiz.Jismning $A$ nuqtasidagi tayanch podpyatnik, $B$ nuqtasidagi esa podshipnik bo`lsin. Bu tayanchlar reaksiya kuchlarining tuzuvchilari mos ravishda $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A; \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ bo`ladi.

Jism qo`zg`almas Az o`q atrofida aylanma harakatda bo`lgani uchun har qaysi nuqta inersiya kuchining urinma va normal tuzuvchilari quyidagicha bo`ladi:

$$\Phi_\nu^\tau = m_\nu a_\nu^\tau = m_\nu h_\nu \varepsilon, \Phi_\nu^n = m_\nu h_\nu \omega^2$$

bunda m_ν bilan M_ν nuqtaning massasi, h_ν bilan M_ν nuqtadan aylanish o`qigacha bo`lgan masofa belgilangan.

Koordinata o`qlarining birlik yo`naltiruvchi vektorlarini $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilasak, inersiya kuchlarining bosh vektori

$$\vec{R}^\Phi = R_x^\Phi \vec{i} + R_y^\Phi \vec{j} + R_z^\Phi \vec{k}$$

ko`rinishda ifodalanishi mumkin,bunda:

$$R_x^\Phi = \sum \Phi_{\nu x}^\tau + \sum \Phi_{\nu x}^n, \ R_y^\Phi = \sum \Phi_{\nu y}^\tau + \sum \Phi_{\nu y}^n, \ R_z^\Phi = \sum \Phi_{\nu z}^\tau + \sum \Phi_{\nu z}^n.$$

Inersiya kuchining bosh vektori aylanish o`qiga perpendikulyar tekislikda yotgani uchun: $R_z^\Phi = 0.$

Rasmdan:

$$R_x^\Phi = \sum m_\nu h_\nu \varepsilon \sin\alpha_\nu + \sum m_\nu h_\nu \omega^2 \cos\alpha_\nu$$
$$R_y^\Phi = -\sum m_\nu h_\nu \varepsilon \cos\alpha_\nu + \sum m_\nu h_\nu \omega^2 \sin\alpha_\nu$$

yoki

$$\begin{cases} R_x^\Phi = \varepsilon \sum m_\nu y_\nu + \omega^2 \sum m_\nu x_\nu, \\ R_y^\Phi = -\varepsilon \sum m_\nu x_\nu + \omega^2 \sum m_\nu y_\nu \end{cases} \tag{107.1}$$

(74.6) formulaga ko`ra:

$$M x_S = \sum m_\nu x_\nu \quad , \quad M y_S = \sum m_\nu y_\nu \quad , \quad M z_S = \sum m_\nu z_\nu$$

Natijada (107.1) formula quyidagicha yoziladi:

$$R_x^e = M y_S \varepsilon + M x_S \omega^2 \quad , \quad R_y^e = M y_S \omega^2 - M x_S \varepsilon. \tag{107.2}$$

Inersiya kuchlarining koordinata o`qlariga nisbatan momentlari yig`indisi quyidagicha:

$$M_x^\Phi = -\sum z_\nu \Phi_{\nu y}^\tau - \sum z_\nu \Phi_{\nu y}^n = \varepsilon \sum m_\nu x_\nu z_\nu - \omega^2 \sum m_\nu y_\nu z_\nu,$$
$$M_x^\Phi = \sum z_\nu \Phi_{\nu x}^\tau + \sum z_\nu \Phi_{\nu x}^n = \varepsilon \sum m_\nu y_\nu z_\nu + \omega^2 \sum m_\nu x_\nu z_\nu,$$
$$M_z^\Phi = \sum h_\nu \Phi_\nu^\tau = -\varepsilon \sum m_\nu h_\nu^2$$

yoki

$$\begin{aligned} M_x^\Phi &= I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2, \\ M_y^\Phi &= I_{yz} \varepsilon + I_{xz} \omega^2, \\ M_z^\Phi &= -I_z \varepsilon. \end{aligned} \tag{107.3}$$

Endi (107.2) va (107.3) tenglamalar yordamida quyidagi (105.6) tenglamalarni tuzamiz:

$$\begin{cases} R_x^e + X_A + X_B + M\, y_S\, \varepsilon + M\, x_S\, \omega^2 = 0\,, \\ R_y^e + Y_A + Y_B + M\, y_S\, \omega^2 - M\, x_S\, \varepsilon = 0 \quad , \\ R_z^e + Z_A = 0\,, \\ M_x^e - Y_B\; AB + I_{xz}\, \varepsilon - I_{yz}\, \omega^2 = 0, \\ M_y^e + X_B\; AB + I_{yz}\, \varepsilon + I_{xz}\, \omega^2 = 0, \\ M_z^e - I_z\, \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{107.4}$$

(107.4) tenglamarning oxirgisi jisimning qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakatining diffensial tenglamasini ifodaladi.

(107.4) tenglamalarning birinchi beshtasidan jisimning *Az* atrofida aylanma harakatidagi tayanch reaksiylarni aniqlash mumkin. Agar $\omega=0\,,\varepsilon=0$ bo`lsa, (107.4) tenglamalar ikki nuqtasi orqali bog`lanishdagi qattiq jisimning muvozanat tenglamalarini ifodalaydi, yani (107.4) da $\omega=0\,,\varepsilon=0$ deb olsak, statik reaksiyalarni aniqlash mumkin.

Jism aylanma harakatidagi tayanch reaksiyalaridan statik reaksiyalar ayirmasi *dinamik reaksiya* deb ataladi. Dinamik reaksiyalarni $X_A^D\,, Y_A^D\,, Z_A^D\,, X_B^D\,, Y_B^D$ deb belgilasak, ta’rifga ko`ra:

$$\begin{cases} X_A = X_A^D + X_A^{st} \quad , \quad X_B = X_B^D + X_B^{st}\,, \\ Y_A = Y_A^D + Y_A^{st} \quad , \quad Y_B = Y_B^D + Y_B^{st} \quad . \\ Z_A = Z_A^D + Z_A^{st} \quad , \end{cases} \tag{107.5}$$

(107.4) sistemada $\omega = 0\,, \varepsilon = 0$ va $X_A = X_A^{st}\,, Y_A = Y_A^{st}\,, Z_A = Z_A^{st}\,, X_B = X_B^{st}\,, Y_B = Y_B^{st}$ deb olsak, statik reaksiya kuchlari aniqlanadigan quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo`ladi:

$$\begin{cases} R_x^e + X_A^{st} + X_B^{st} = 0 \quad , \quad M_x^e - Y_B^{st}\; AB = 0\,, \\ R_y^e + Y_A^{st} + Y_B^{st} = 0 \quad , \quad M_y^e + X_B^{st}\; AB = 0. \\ R_z^e + Z_A^{st} = 0\,, \end{cases} \tag{107.6}$$

(107.5) ni (107.4) ga qo`yib, (107.6) ni e’tiborga olsak, dinamik reaksiyalarni aniqlash mumkin bo`ladigan tenglamalar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} X_A^D + X_B^D + M\, y_S\, \varepsilon + M\, x_S\; \omega^2 = 0, \\ Y_A^D + Y_B^D + M\, y_S\, \omega^2 - M\, x_S\, \varepsilon\; = 0, \\ Z_A^D = 0\,, \\ -Y_B^D \cdot AB + I_{xz}\, \varepsilon - I_{yz}\, \omega^2 = 0, \\ X_B^D + I_{yz}\, \varepsilon + I_{xz}\, \omega^2 = 0. \end{cases} \tag{107.7}$$

(107.7) dan:

$$
\begin{cases}
X_A^D = -M\,\varepsilon\, y_S - M\,\omega^2 x_S + \dfrac{1}{AB}(I_{yz}\,\varepsilon + I_{xz}), \\
Y_A^D = M\,\varepsilon\, x_S - M\,\omega^2 y_S + \dfrac{1}{AB}(-I_{xz}\,\varepsilon + I_{yz}\,\omega^2), \\
Z_A^D = 0, \\
X_B^D = -\dfrac{1}{AB}(I_{yz}\,\varepsilon + I_{xz}\,\omega^2), \\
Y_B^D = \dfrac{1}{AB}(I_{xz}\,\varepsilon - I_{yz}\,\omega^2).
\end{cases}
\qquad (107.8)
$$

Jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan dinamik bosimi miqdor jihatidan dinamik reaksiyaga teng bo`lib, yo`nalishi unga qarama-qarshidir.

108 - §. Inersiya kuchlarini muvozanatlash

Qo`zg`almas o`q atrofida aylanayotgan jismning aylanish o`qiga ko`rsatadigan bosimi nolga teng bo`lish shartini aniqlash texnikada muhim ahamiyatga ega.

(107.8) ning oxirgi ikkitasidan ko`ramizki, $R_B^D = 0$ ning zaruriy va yetarli sharti $I_{yz} = 0\,, I_{xz} = 0$ bo`lishidir.

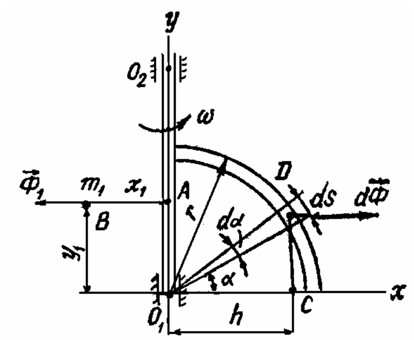
$I_{yz} = 0\,, I_{xz} = 0$ bo`lganda (107.8) tenglamaning birinchi ikkitasi quyidagi ko`rinishga keladi:

$$X_A^D = -M\,\varepsilon\, y_S - M\,\omega^2 x_S\,,$$
$$Y_A^D = M\,\varepsilon\, x_S - M\,\omega^2 y_S\,.$$

$X_A^D = 0\,, Y_A^D = 0$ bo`lishi uchun $x_S = y_S = 0$ bo`lishi kerak. Bu holda jismning inersiya markazi aylanish o`qida yotadi. Bundan ko`rinadiki, Az o`q inersiya markaziy bosh o`qidan iborat bo`lishi kerak. Shu holdagina dinamik bosim nolga teng bo`ladi.

70- masala. r radiusli aylananing *1/4* qismidan iborat bo`lgan $M$ massali sterjenning bir uchi $O_1O_2$ valga mahkamlangan.Sterjen val bilan bir tekislikda yotadi. Val o`zgarmas ω burchak tezligi bilan aylanadi. Val podshipniklarida hosil bo`ladigan dinamik bosimni yo`qotish uchun valga biriktirilgan vaznsiz AB sterjenning B uchiga qo`yiladigan m_1 massaning $x_1\,, y_1$ koordinatalari aniqlansin (196-rasm).

Yechish. Sanoq sistemasini 196-rasmdagidek tanlaymiz. Masalani yechish uchun Dalamber prinsipiga ko`ra, sterjen har bir elementining hamda qo`shimcha massaning inersiya kuchini qo`yamiz. Ma'lumki, dinamik bosim nolga teng bo`lishi uchun inersiya kuchlari muvozanatlashishi kerak. Sterjendan $ds = r\,d\alpha$ elementni ajratib olamiz .



196-rasm

Val o`zgarmas $\omega$ burchak tezligi bilan aylanayotgani uchun sterjen $D$ elementining inersiya kuchi quyidagicha bo`ladi:

$$d\Phi = \omega^2\, h\, dm$$

bunda

$$h = r\cos\alpha \quad , \quad dm = \frac{2M}{\pi}\alpha$$

Natijada,

$$d\Phi = \frac{2M\,\omega^2\,r}{\pi}\cos\alpha\,d\alpha \qquad (108.1)$$

$d\Phi$ – aylanish o`qiga perpendikulyar. Qo`shimcha massaning inersiya kuchi $\vec{\Phi}_1$ esa $d\vec{\Phi}$ ga parallel bo`lib, miqdori quyidagicha:

$$\Phi_1 = m_1\,\omega^2\,AB \qquad (108.2)$$

Demak,ko`rilayotgan sistema inersiya kuchlari parallel kuchlar sistemasidan iborat.Bu kuchlar sistemasining muvozanat shartini yozamiz:

$$R_x^{\Phi} = 0; \qquad -\Phi_1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Phi = 0\,,$$

$$M_0^{\Phi} = 0; \qquad \Phi_1 \cdot O_1 A - \int_0^{\frac{\pi}{2}} CD\,d\Phi = 0\,, \qquad (108.3)$$

bunda $CD = r\sin\alpha$

(108.1) va (108.2) ni (108.3) ga qo`yib,so`ngra integrallaymiz:

$$-m_1\,\omega^2\,AB + \frac{2M\,\omega^2\,r}{\pi} = 0,$$

$$m_1\,\omega^2\,AB\cdot O_1 A - \frac{M\,\omega^2\,r^2}{\pi}$$

Bu tenglamalardan

$$AB = \frac{2M\,r}{\pi\,m_1}\,,\,O_1 A = \frac{r}{2}$$

Shunday qilib, B nuqtaning koordinatalari $x_1 = -AB\,,\,y_1 = O_1 A$ yoki $x_1 = -\frac{2M\,r}{\pi\,m_1}\,,\,y_1 = \frac{r}{2}$ bo`lishini hosil qilamiz.

71-masala. Massasi m, uzunligi l bo`lgan bir jinsli ingichka DE sterjen D uchi bilan AB valga mahkam biriktirilgan**.** DE sterjen val bilan α burchak hosil qiladi. Val M moment ta'sirida aylanadi.

Valning burchak tezligi ω bo`lganda sterjen holati Ayz tekisligiga mos keladi deb hisoblab, A podpyatnik va B podshipnik dinamik reaksiyasi topilsin $DA = DB = a$ (197-rasm).

Yechish. Koordinata o`qlarini 197-rasmdagidek tanlaymiz. Dalamber prinsipiga ko`ra, sterjenga o`g`irlik kuchi $\vec{G}$, hamda $\vec{X}_A^D, \vec{Y}_A^D, \vec{Z}_A^D, \vec{X}_B^D, \vec{Y}_B^D$ dinamik reaksiya kuchlaridan tashqari inersiya kuchi ham ta'sir qiladi.

Masala shartiga ko`ra sterjenning holati $Ayz$ tekisligiga mos keladi. Shuning uchun sterjen inersiya markazining koordinatalari quyidagicha bo`ladi:

$$x_S = 0\,,\,y_S = \frac{l}{2}\sin\alpha\,,\,z_S = \frac{l}{2}\cos\alpha \qquad (108\ .4)$$

Endi sterjenning (75.8) formulaga asosan markazdan qochma hamda Az o`qqa nisbatan inersiya momentlarini hisoblaymiz. Buning uchun $D\,y'\,z'$ koordinata sistemasini o`tkazib, sterjendan $dm = \gamma\, dy'$ $(\gamma = m/l)$ bo`lgan K elementi ajratib olinadi. K elementning koordinatalarini aniqlaymiz :

$$x = 0\,,\; y = y'\sin\alpha\,,\; z = a - y'\cos\alpha$$

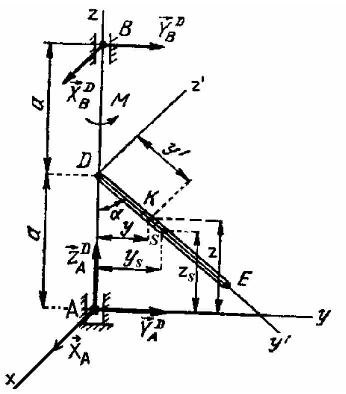
Natijada:

$$I_{xz} = \int_0^l x\,z\,dm\,, \quad I_{yz} = \int_0^l y\,zdm = \frac{m}{l}\int_0^l y'\sin\alpha\,(a - y'\cos\alpha)dy'$$

$$I_z = \int_0^l (x^2 + y)\,dm = \frac{m}{l}\int_0^l y'^2 \sin^2\alpha\, dy'$$

yoki

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = \frac{ml}{6}\cdot \sin\alpha\,(3a - 2l\cos\alpha), \tag{108.5}$$



197-rasm

$$I_z = \frac{ml^2}{3}\cdot \sin^2\alpha \tag{108.6}$$

hosil bo`ladi.

(107.3) dan $M = I_z\,\varepsilon$ kelib chiqadi.

Bundan:

$$\varepsilon = \frac{M}{I_z} \tag{108.7}$$

(108.6) ni (108.7) ga qo`yamiz:

$$\varepsilon = \frac{3M}{ml^2 \sin^2\alpha} \tag{108.8}$$

(108.4) , (108.5) va (108.8) ni (107.8) ga qo`ysak, dinamik reaksiyalar kelib chiqadi:

$$X_A^D = -\frac{M}{4al\sin\alpha}\cdot(3a + 2l\cos\alpha)\,,$$

$$Y_A^D = -\frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{12a}\cdot(3a + 2l\cos\alpha)\,,$$

$$Z_A^D = 0\,,$$

$$X_B^D = \frac{M}{4al\sin\alpha}\cdot(2l\cos\alpha - 3a)\,,$$

$$Y_B^D = \frac{m\omega^2 l\sin\alpha}{12a}\cdot(2l\cos\alpha - 3a)\,.$$

Nazorat savollari

1.Moddiy nuqta uchun Dalamber prinsipi qanday bo`ladi?
2.Moddiy nuqtaning inersiya kuchining yo`nalishi va kattaligi qanday?
3.Tekis to`g`ri yo`lda tormozlangan temir yo`l vagonining inersiya kuchi qanday (harakat yo`nalishadimi yoki unga qarshimi) yo`naladi?
4.Mexanik sistema uchun Dalamber prinsipi nimadan iborat?
5.Statik bosim nima?
6.Dinamik bosim deganda nimani tushunasiz?
7.Qo`zg`almas o`q atrofida aylanma harakat qilayotgan jism inersiya kuchi qanday aniqlanadi?
8.Qo`zg`almas o`q atrofida aylananayotgan jism inersiya kuchining momenti qanday topiladi?
9.Inersiya kuchlarini muvozanatlash qanday?
10.Urinma va normal inersiya кuchlarining yo`nalishi va miqdori qanday aniqlanadi?

XVII bob

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipi

109 - §. Bog`lanishlar klassifikasiyasi

Bir qancha jismdan tashkil topgan sistemaning muvozanatini tekshirishda Lagranjning mumkin bo`lgan ko`chish prinsipidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipini berishdan avval biz bog`lanish turlari bilan tanishib chiqamiz.

Sistema nuqtalarining harakatini cheklovchi (ya'ni sistemani eriksiz qiluvchi) omil *bog`lanish* deb ataladi. Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar tufayli sistema nuqtalarining koordipatalari, tezliklari ixtiyoriy o`zgara olmaydi. Bog`lanishlarning sistema yoki uning nuqtalari harakatiga ta'sirini sxematik ko`rinishda geometrik chiziqlar, sirtlar orqali tasavvur qila olamiz. Shunga ko`ra bog`lanishlarning matematik tenglamalar ko`rinishida ifodalash mumkin. Bu tenglamalar *bog`lanish tenglamalari* deb ataladi.

Bog`lanish tenglamalari sistema nuqtalarining koordinatlari, tezliklari hamda vaqt orqali ifodalanishi mumkin.

Sistema nuqtatalarining koordinatalarigagina chek qo`yuvchi bog`lanishlar *geometrik bog`lanishlar* deyiladi va ular quydagi tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$f(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n) = 0, \qquad (109.1)$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0. \qquad (109.2)$$

Agar bog`lanish sistema nuqtalarining koordinataláridan tashqari tezliklariga ham chek qo`ysa, u *kinematik (differensialli)* bog`lanish deb ataladi. Bu bog`lanish tenglamasi

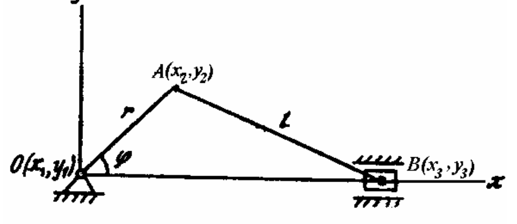
$$f(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0 \qquad (109.3)$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1; \ldots; \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0 \qquad (109.4)$$

ko`rinishda yoziladi.

Agar (109.3) va (109.4) tenglamalar integrallanadigan bo`lsa,bog`lanish *golonom* aks holda *begolonom bog`lanish* deyiladi.

Bog`lanish tenglamasi vaqtning oshkormas funksiyasi sifatida ifodalansa bog`lanish *statsionar bog`lanish,* aks holda *nostatsionar bog`lanish* deb ataladi. (109.1) va (109.3) statsionar, (109.2) va (109.4) nostatsionar bog`lanish tenglamalaridan iborat.



198-rasm

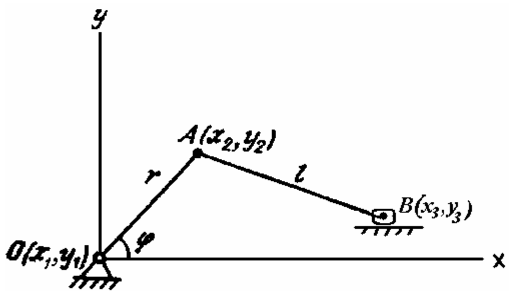
Masalan, 198-rasmda ko`rsatilgan krivoship-shatun mexanizmining ixtiyoriy holatini uning $O$ , $A$ va $B$ nuqtalari holati orqali aniqlash uchun quyidagi bog`lanish tenglamalarini yozamiz:

$$\begin{aligned} & x_1 = y_1 = y_3 = 0, \\ & x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0, \qquad (109.5) \\ & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l^2 = 0. \end{aligned}$$

(109.5) bog`lanish tenglamalari $O$ nuqtaning qo`zg`almasligini, $OA$ va $AB$ masofalar o`zgarmasligini, B nuqtaning esa Ox o`qi bo`ylab surilishini xarakterlaydi.

(109.5) tenglamalar vaqtga bog`liq emas. Shuning uchun ular statsionar bog`lanishlarni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, krivoship-shatunli mexanizmning B polzuni stol sirti bo`ylab sirpansin va u vertikal yo`nalishda $y_3 = a\sin\omega t$ qonun bo`yicha sakrab garmonik tebranish hosil qilsin (199-rasm). Tekshirilayotgan sistemaning bog`lanish tenglamasi quyidagicha:



$$\begin{cases} x_1 = y_1 = 0\,, \\ y_3 - a\sin\omega\, t = 0\,, \\ x_2^2 + y_2^2 - r^2 = 0\,, \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - l^2 = 0\,. \end{cases} \qquad (109.6)$$

199-rasm

(109.6) tenglamaning ikkinchisi vaqtga bog`liq. Demak, bu bog`lanish nostatsionar bog`lanishdan iborat bo`ladi.

Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar bo`shatiladigan va bo`shatilmaydigan bo`lishi mumkin. Tenglama ko`rinishida ifodalanuvchi bog`lanish bo`shatilmaydigan,tengsizlik ko`rinishida ifodalanuvchi bog`lanish esa bo`shatiladigan bog`lanish deyiladi.

110 - §. Umumlashgan koordinatlar. Sistemaning erkinlik darajasi

Ma'lumki, erksiz mexanik sistema nuqtalarining ko`chishi ixtiyoriy bo`lmay, biror sabab bilan chegaralangan. Bu shuni ko`rsatadiki, sistema nuqtalarining hamma koordinatalari erkin ravishda o`zgara olmaydi; bunday koordinatalar erksiz koordinatalar deb ataladi. Bu holda sistema holati uning erkin koordinatalarining holati orqali aniqlanadi. Erksiz koordinatalar esa bog`lanish tenglamasidan topiladi.

Faraz qilaylik, sistema $M_1, M_2, \dots, M_n$ nuqtalardan tashkil topgan bo`lib, unga $s$ ta golonom bog`lanish qo`yilgan:

$$f_i(x_1\,, y_1\,, z_1\,; \dots ; x_n\,, y_n\,, z_n) = 0 \quad , \quad (i = 1\,, s)$$

Demak, sistema nuqtalarining $3n$ ta koordinatalari orasida s ta bog`lanish bor, ya'ni s ta koordinata erksiz. Sistema nuqtalarining erkin koordinatalar soni esa $k=3n-s$ ta koordinata orqali aniqlanadi.

Golonom bog`lanishdagi sistema holatini bir qiymatli aniqlovchi , bir-biriga bog`liq bo`lmagan parametrlar soni sistemaning erkinlik darajasi deyiladi.

Masalan, 198-rasmda tasvirlangan krivoship-shatun mexanizmini olsak, uning holatini x_2 *yoki* x_3, *yoki* y_2 orqali aniqlash mumkin. Agar mexanizmning holati x_2 orqali aniqlansa, x_3 va y_2 lar (109.5) tenglamadan topiladi. Mexanizm holatini aniqlovchi parametr deb *OA* krivoship burilish burchagi φ ni ham olish mumkin. Demak, bu mexanizmning erkinlik darajasi birga teng.

*Sistemaning fazodagi holatini bir qiymatli aniqlaydigan bir-biriga bo`g`liq bo`lmagan parametrlar umumlashgan koordinatalar deyiladi va ular* $q_1, q_2, \dots, q_k$ bilan belgilanadi. Shuni ta'kidlash kerakki, umumlashgan koordinatalarning o`lchov birligi turlicha (masalan, metr, radian, m^2 , m^3) tanlanadi. 198- rasmda tasvirlangan krivoship mexanizmi holatini bitta umumlashgan koordinata $q = \varphi$ orqali aniqlash mumkin.

Demak, golonom bog`lanishdagi sistemaning erkinlik darajasi uning umumlashgan koordinatalari soniga teng bo`ladi. Biz faqat golonom bog`lanishdagi sistemani ko`rib chiqamiz.

Agar sistemaga μ ta begolonom bog`lanish qo`yilgan bo`lsa, uning umumlashgan koordinatalari orasida ma'lum munosabat bo`ladi. Bunday sistemaning erkinlik darajasi $3n-s-\mu$ ta bo`ladi.

Faraz qilaylik, golonom statsionar bog`lanishdagi mexanik sistema $n$ ta nuqtadan tashkil topgan bo`lib, uning erkinlik darajasi k ga teng bo`lsin. Bu golonom sistemaning umumlashgan koordinatalarini $q_1, q_2, \ldots, q_k$ desak, tekshirayotgan sistema nuqtalarining radius-vektorlari yoki Dekart o`qlaridagi koordinatalarini umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k); \tag{110.1}$$

$$\begin{cases} x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k), \\ z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_k). \end{cases} \tag{110.2}$$

Golonom mexanik sistemaning harakat tenglamalarini umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \ldots, q_k = q_k(t). \tag{110.3}$$

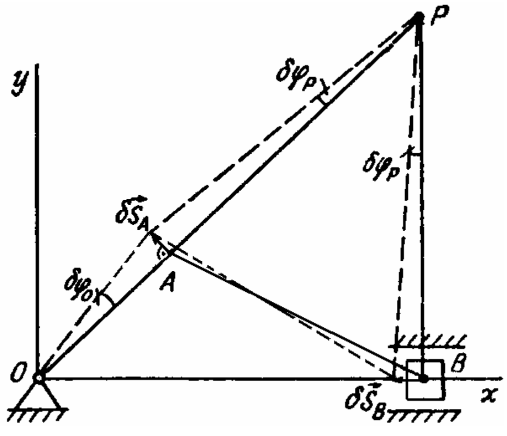
Umumlashgan koordinatadan vaqt bo`yicha olingan birinchi tartibli hosila umumlashgan tezlik,ikkinchi tartibli hosila esa umumlashgan tezlanish deyiladi va ular quyidagicha yoziladi:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}, \quad \ddot{q}_j = \frac{d^2 q_j}{dt^2} \tag{110.4}$$

Umumlashgan tezlikning o`lchov birligi umumlashgan koordinata o`lchov birligining vaqt birligi nisbatiga teng.

111 - §. Mumkin bo`lgan ko`chish. Mumkin bo`lgan ko`chishdagi ish. Ideal bog`lanishlar

Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday cheksiz kichik ko`chishlar to`plami mumkin bo`lgan ko`chishlar deyiladi va ular $\delta r, \delta\varphi, \delta x, \delta s, \delta q$ ko`rinishda ifodalanadi.



200-rasm

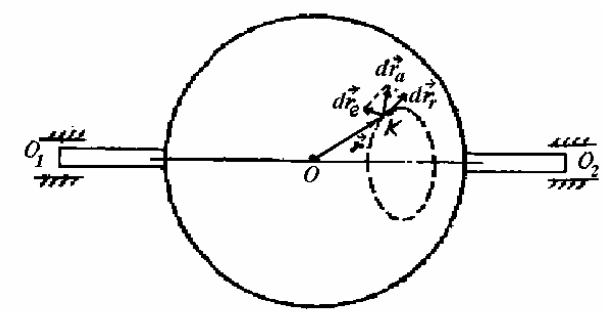
Masalan, OAB krivoship-shatun mexanizmidagi B polzunning mumkin bo`lgan ko`chishi uning gorizontal bo`ylab $\delta s_B$ cheksiz kichik ko`chishdir (200-rasm). OA krivoship A nuqtasining mumkin bo`lgan ko`chishi OA ga tik bo`lgan $\delta s_A$ cheksiz kichik ko`chishdan iborat; OA krivoshipning mumkin bo`lgan ko`chishi esa uning O atrofida $\delta\varphi_O$ cheksiz kichik burchakka burilishidir. AB shatunning mumkin bo`lgan ko`chishi P oniy markaz atrofida $\delta\varphi_P$ burchakka burilishidan iborat.

Statsionar bog`lanishdagi sistemaning haqiqiy ko`chishi biror mumkin bo`lgan ko`chish bilan ustma-ust tushadi.

Agar sistemaga nostatsionar bog`lanish qo`yilgan bo`lsa,sistema nuqtasining haqiqiy ko`chishi birorta ham mumkin bo`lgan ko`chish bilan ustma-ust tushmasligi mumkin.

Masalan, O_1O_2 o`q atrofida aylanuvchi disk radiusi bo`ylab harakatlanayotgan K nuqtaning haqiqiy ko`chishini tekshiraylik (201-rasm). $K$ nuqtaning haqiqiy ko`chishi quyidagicha bo`ladi:

$$d\vec{r}_a = d\vec{r}_r + d\vec{r}_e$$



201-rasm

Bunda K nuqtaning nisbiy harakatidagi haqiqiy ko`chishini uning mumkin bo`lgan ko`chishi $\delta\vec{r} = d\vec{r}_r$ orqali ifodalash mumkin. Binobarin,bu holda haqiqiy ko`chish bilan mumkin bo`lgan ko`chish ustma-ust tushmaydi.

Sistema biror nuqtasiga qo`yilgan kuchning shu nuqtaning mumkin bo`lgan ko`chishidagi ishi kuch vektori bilan mumkin bo`lgan ko`chish vektorining skalyar ko`paytmasiga teng,ya'ni

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{r}$$

δA ni qisqacha kuchning mumkin bo`lgan ishi deyish mumkin.

Agar sistemaga bir qancha kuchlar ta'sir etayotgan bo`lsa, ularning mumkin bo`lgan ishlari quyidagicha ifodalanadi:

$$\delta A = \sum \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu \tag{111.1}$$

yoki

$$\delta A = \sum (F_{\nu x}\delta x_\nu + F_{\nu y}\delta y_\nu + F_{\nu z}\delta z_\nu) \tag{111.2}$$

Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar reaksiya kuchlarining sistemaning mumkin bo`lgan ko`chishlaridagi ishlarining yig`indisi nolga teng bo`lsa, bunday bog`lanishlar *ideal bog`lanishlar* deb ataladi. Sistema nuqtalariga qo`yilgan bog`lanishlar reaksiya kuchlarini $\vec{N}_\nu$ bilan belgilasak,ideal bog`lanishlarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum \vec{N}_\nu \delta\vec{r}_\nu = 0 \tag{111.3}$$

112 - §. Umumlashgan kuch

Ma'lumki,sistemaga qo`yilgan kuchlarning sistema mumkin bo`lgan ko`chishlaridagi ishlarini yig`indisi (111.1) formuladan aniqlanadi. (111.1) ifodada (110.1) ni nazarda tutsak, sistema M_ν nuqtasining mumkin bo`lgan ko`chishi $\delta\vec{r}_\nu$ umumlashgan koordinatalar orqali quyidagicha yoziladi:

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \tag{112.1}$$

(112.1) ni (111.1) ga qo`yamiz:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (112.2)$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n}\vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \qquad (112.3)$$

(112.3) belgilashga ko`ra (112.2) ifoda

$$\delta A = \sum_{j=1}^{k} Q_j\, \delta q_j \qquad (112.4)$$

ko`rinishni oladi.

(112.3) tenglik bilan aniqlanuvchi Q_j ifoda q_j umumlashgan koordinataga mos keluvchi *umumlashgan kuch* deb ataladi.

Umumlashgan kuchni hisoblashda quyidagi usuldan ham foydalaniladi. Bunda Q_j umumlashgan kuchni hisoblash uchun mumkin bo`lgan ko`chishlar shunday tanlanadiki, faqat Q_j ga mos kelgan umumlashgan koordinata q_j o`zgaradi,boshqa umumlashgan koordinatalar bo`yicha mumkin bo`lgan ko`chish nolga teng deb qaraladi va bu ko`chishdagi mumkin bo`lgan ish hisoblanadi.

$$(\delta A)_j = Q_j\, \delta q_j$$

U holda:

$$Q_j = \frac{(\delta A)_j}{\delta q_j} \qquad (112.5)$$

Shuningdek, umumlashgan kuchni analitik usulda quyidagicha hisoblash mumkin:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n}\left(F_{\nu x}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_j} + F_{\nu y}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_j} + F_{\nu z}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_j}\right) \qquad (112.6)$$

(112.5) dan ko`ramizki, umumlashgan kuchning o`lchovi ish o`lchov birligining umumlashgan koordinata o`lchov birligiga bo`linganiga teng. Agar umumlashgan koordinata uzunlik birligida o`lchansa,umumlashgan kuch Nuytonda ifodalanadi,umumlashgan koordinata uchun burchak olinsa, umumlashgan kuch birligi kuch momentining birligi - Nm dan iborat.

Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar potensialli bo`lganda umumlashgan kuch qanday hisoblanishini ko`ramiz.

Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar potensialli bo`lsa,

$$\delta A = \delta U(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n) \qquad (112.7)$$

(110.2) formulaga asosan:

$$U = U(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

Shuning uchun (112.7) ni quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (112.8)$$

(112.4) bilan (112.8) ni taqqoslasak:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \cdots, Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

yoki

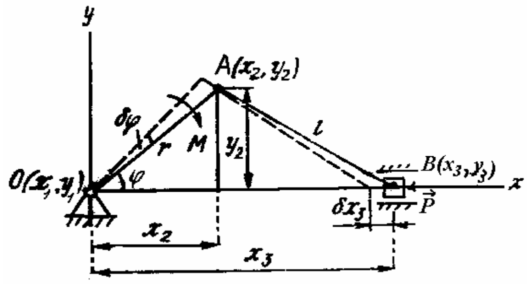
$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad , \quad (j = \overline{1,k}) \tag{112.9}$$

kelib chiqadi.

Biroq sistema potensial energiyasi $\Pi = -U$ bo`lgani uchun umumlashgan kuch potensial energiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \tag{112.10}$$

72- masala. 202-rasmda ko`rsatilgan krivoship-shatun mexanizmining $B$ polzuniga $\vec{P}$ kuch ta'sir qiladi. $OA$ krivoshipga esa $M$ moment qo`yilgan. Sharnirlardagi hamda polzundagi ishqalanish hisobga olinmay, φ ni umumlashgan koordinata deb olib umumlashgan kuch aniqlansin. Krivoship uzunligi $OA=r$, shatun uzunligi $AB=l$.



202-rasm

Yechish. Sistemaga qo`yilgan kuchlarning sistemaning mumkin bo`lgan ko`chishidagi ishi quyidagicha bo`ladi:

$$\delta A = P\delta x_3 - M\,\delta\varphi \tag{112.11}$$

Rasmdan:

$$x_2 = r\cos\varphi\,,$$
$$y_2 = r\sin\varphi\,, \tag{112.12}$$
$$x_3 = x_2 + \sqrt{l^2 - y_2^2} = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$$

(112.12) dan:

$$\delta x_2 = -r\sin\varphi\,\delta\varphi\,,$$
$$\delta y_2 = r\cos\varphi\,\delta\varphi\,, \tag{112.13}$$
$$\delta x_3 = -\left(r\sin\varphi + \frac{r^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} \right)\delta\varphi$$

(112.13) ni (112.11) ga qo`yamiz:

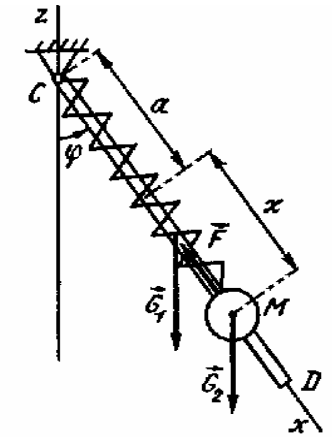
$$\delta A = \left(Pr\sin\varphi + \frac{Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M \right)\delta\varphi$$

(112.5) formulaga asosan φ umumlashgan koordinataga mos keluvchi umumlashgan kuch quyidagicha bo`ladi:

$$Q = Pr\sin\varphi + \frac{Pr^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} - M$$

73-masala. Og`irligi $G_1$ ,uzunligi $l$ bo`lgan bir jinsli CD sterjen C o`q atrofida vertikal tekislikda aylana oladi. Sterjenga og`irligi G_2 bo`lgan sharcha o`tqazilgan bo`lib, u bikirligi $c$ bo`lgan prujinaning M uchiga bog`langan. Prujinaning deformatsiyalanmagan holatdagi uzunligi $a$ ga teng. 203-rasmda ko`rsatilgan sistemaga ta'sir qiluvchi umumlashgan kuch topilsin.

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaning erkinlik darajasi ikkiga teng. Demak, umumlashgan koordinatalar ham ikkita, ya'ni sterjenning C o`q ateofidagi burilish burchagi $q_1=\varphi$ hamda sharchaning sterjen bo`ylab ko`chishi $q_2=x$. Sistemaga og`irlik kuchlari $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ va elastiklik kuchi $\vec{F}$ ta'sir qiladi.



203-rasm

Masalani yechish uchun avval $x=const$ deb,sistemaga mumkin bo`lgan ko`chish beramiz. Bu ko`chishda sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar ishlarining yig`indisi quyidagicha bo`ladi:

$$\delta A_\varphi=\left[-G_1\frac{l}{2}\sin\varphi-G_2\,(a+x)\sin\varphi\right]\delta\varphi$$

Natijada:

$$Q_\varphi=-\left[G_1\frac{l}{2}+G_2\,(a+x)\right]\sin\varphi$$

Endi $\varphi=const$ deb,sistemaga mumkin bo`lgan ko`chish bersak, mazkur ko`chishdagi kuchlar ishlarining yig`indisi

$$\delta A_x=(G_2\cos\varphi-c\,x)\,\delta x$$

bo`ladi. Bu ifodadan

$$Q_x=G_2\cos\varphi-c\,x$$

kelib chiqadi.

113 - §. Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipi

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipi mexanik sistema muvozanatining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Teorema. *Ideal, bo`shatmaydigan, statsionar bog`lanishlar qo`yilgan sistema muvozanatda bo`lishi uchun sistemaning har qanday mumkin bo`lgan ko`chishida unga qo`yilgan aktiv kuchlar ishlarining yig`indisi nolga teng bo`lishi zarur va yetarli.* Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipining matematik ifodasi:

$$\sum\vec{F}\,\delta\vec{r}_\nu=0 \qquad (113.1)$$

(113.1) shartning zaruriyligini isbotlaymiz. Sistema muvozanatda bo`lgani uchun uning har bir $M_\nu$ nuqtasiga ta'sir etuvchi aktiv kuchlar hamda reaksiya kuchlarining geometrik yig`indisi nolga teng bo`ladi:

$$\vec{F}_\nu+\vec{N}_\nu=0 \qquad (113.2)$$

Sistemaning har bir nuqtasiga $\delta\vec{r}_\nu$ mumkin bo`lgan ko`chish beramiz.

(113.2) ni $\delta\vec{r}_\nu$ ga skalyar ko`paytirib, so`ngra yig`indisi olinsa

$$\sum\vec{F}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu+\sum\vec{N}\,\delta\vec{r}_\nu=0$$

hosil bo`ladi. Bog`lanish ideal bo`lgani tufayli

$$\sum\vec{N}_\nu\,\delta\vec{r}_\nu=0$$

Natijada

$$\sum \vec{F}_{\nu}\,\delta\vec{r}_{\nu} = 0$$

kelib chiqadi. Demak, (113.1) tenglikning zaruriyligi isbotlandi. Endi (113.1) shartning yetarli bo`lishini isbotlaymiz:

Faraz qilaylik, (113.1) shart bajarilsa ham sistema muvozanatda bo`lmasin. Bu holda sistemaning $M_1, M_2, \cdots, M_n$ nuqtalari harakatga keladi. Natijada bu nuqtalarga ta'sir etuvchi kuchlar teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo`lmaydi. Boshlang`ich paytda sistema tinch holatda bo`lgani sababli $M_1, M_2, \cdots, M_n$ nuqtalari ta'sir etuvchi kuchlar ta'sirida mos ravishda $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots, d\vec{r}_n$ haqiqiy ko`chishlarni oladi.Sistemaga qo`yilgan bog`lanish statsionar bo`lgani sababli $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots, d\vec{r}_n$ haqiqiy ko`chishlar mos ravishda $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \cdots, \delta\vec{r}_n$ mumkin bo`lgan ko`chishlar bilan ustma-ust tushadi.

Bu holda:

$$\begin{cases} (\vec{F}_1 + \vec{N}_1)\delta\vec{r}_1 > 0, \\ (\vec{F}_2 + \vec{N}_2)\delta\vec{r}_2 > 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ (\vec{F}_n + \vec{N}_n)\delta\vec{r}_n > 0 \end{cases}$$

Bu tengliklarni qo`shsak,

$$\sum (\vec{F}_{\nu} + \vec{N}_{\nu})\delta\vec{r}_{\nu} > 0$$

kelib chiqadi.

Bog`lanish ideal bo`lgani tufayli

$$\sum \vec{N}_{\nu}\,\delta\vec{r}_{\nu} = 0$$

Natijada
$$\sum \vec{F}_{\nu}\,\delta\vec{r}_{\nu} > 0$$

hosil bo`ladi. Bu esa qilgan farazimizning noto`g`riligini ko`rsatadi. Demak, sistema muvozanatda ekan.

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipi Lagranj tomonidan taklif etilgan. Shuning uchun mazkur prinsip *Lagranj prinsipi* deyiladi.

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipining analitik ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$\sum (F_{\nu x}\,\delta x_{\nu} + F_{\nu y}\,\delta y_{\nu} + F_{\nu z}\,\delta z_{\nu}) = 0$$

114 - §. Mumkin bo`lgan prinsipini qo`llab masalalar yechish

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipini qo`llab hal etiladigan masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlar rasmda tasvirlanadi.
2. Sistemaga qo`yilgan bog`lanish ideal bo`lmasa, ta'sir qiluvchi kuchlar qatoriga bog`lanish reaksiya kuchini (ishqalanish kuchini) qo`shish kerak.
3. Sistemaning erkinlik darajasi – bir-biriga bog`liq bo`lmagan mumkin bo`lgan ko`chishlar aniqlanadi.
4. Sistemaga qo`yilgan hamma kuchlarning har qaysi bir-biriga bog`liq bo`lmagan mumkin bo`lgan ko`chishdagi ishlarining yig`indisi nolga tenglashtiriladi.

5. Tuzilgan muvozanat tenglamasida qatnashgan bir-biriga bo`g`liq bo`lgan ko`chishlar sistema bitta nuqtasining mumkin bo`lgan ko`chishi orqali ifodalanadi.

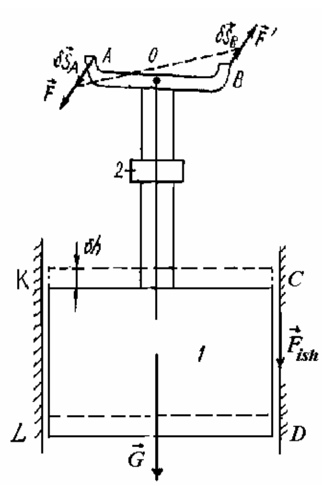
6. Hosil bo`lgan tenglamalardan noma'lumlar aniqlanadi.

Izoh: agar masalada biror bog`lanish reaksiya kuchini aniqlash talab etilsa, avval sistemani bu bog`lanish ta'siri reaksiya kuchi bilan almashtirilishi,so`ngra muvozanat tenglamalari tuzilishi kerak.

74- masala. Suv o`tkazadigan teshikni berkituvchi 1-zatvor (qopqoq) 2-podyomnik yordamida ko`tariladi (204-rasm). Uning KL va CD yon yo`nalishlaridagi ishqalanish kuchi $F_{ish} = 800\,N$ ga teng. Podyomnik vinti ikki kirimli bo`lib, uning qadami *h=8 mm.* U OA va OB dastalar yordamida aylantiriladi. *OA=OB=l=30 sm.* Zatvor teng o`lchovli ko`tarilishi uchun dastalar uchlariga qanday $\vec{F}$ kuch qo`yilishliga aniqlansin. Zatvor og`irligi *100 N.*

Yechish. 204-rasmda ko`rsatilgan mexanizmga $(\vec{F}, \vec{F}')$ juft kuch, zatvor og`irlik kuchi $\vec{G}$ va ishqalanish kuchi $\vec{F}_{ish}$ ta'sir qiladi.

AB dastani $\delta\varphi$ burchakka burib,mumkin bo`lgan ko`chish bersak, A va B nuqtalar mos ravishda , radiusi l bo`lgan aylana yoyi bo`ylab δs_A hamda $\delta s_B = \delta s_A$ ko`chishni, zatvor esa $\delta h$ ko`chishni oladi.



204-rasm

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipini ifodalovchi (113.1) tenglamani tuzamiz:

$$\delta A = 2F\,\delta s_A - (G + F_{ish})\delta h = 0 \tag{114.1}$$

bunda $F_{ish} = f\,G$

Masala shartiga ko`ra podyomnik vinti ikki kirimli. Shuning uchun $A$ dasta bir marta to`la aylanganda zatvor ikki qadam yuqoriga siljiydi. Natijada δs_A hamda δh orasidagi munosabat quyidagicha bo`ladi:

$$\delta h = \frac{h\,\delta s_A}{\pi l} \tag{114.2}$$

(114.2) ni (114.1) ga qo`ysak:

$$2F\delta s_A - (G + F_{ish})\frac{h}{\pi l}\delta s_A = 0$$

bundan
$$F = \frac{G + F_{ish}}{2\pi l}h = 3{,}8\,N$$

kelib chiqadi.

75- masala. 205-rasmda ko`rsatilgan $OAB$ krivoship-shatun mexanizmida $AB$ shatun $C$ silindrik sharnir yordamida $CD$ sterjen bilan bog`langan. CD va DE sterjenlar silindrik sharnir vositasida biriktirilgan. $AC = BC$; $\angle DCB = 150^0$; $\angle CDE = 90^0$. Mexanizm muvozanatda bo`lishi uchun $OA$ va $DE$ sterjenlar uchlariga perpendikulyar ravishda qo`yilgan $\vec{F}_A$ va $\vec{F}_D$ kuchlar qanday munosabatni qanoatlantirishi kerakligi topilsin.

Yechish. Mexanizmning A va D nuqtalariga qo`yiladigan $\vec{F}_A$ va $\vec{F}_D$ kuchlarni rasmda tasvirlaymiz.

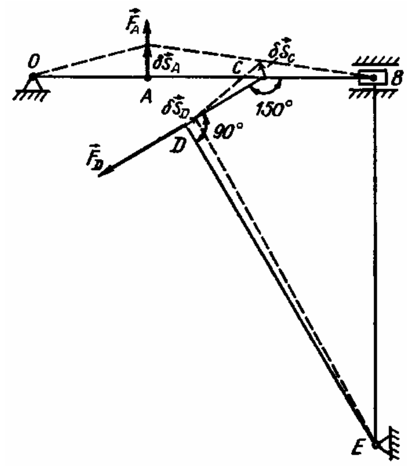
Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipiga asosan:

$$\delta A = F_A \delta s_A - F_D \delta s_D = 0 \qquad (114.3)$$

Mexanizmning A nuqtasiga $\delta \vec{s}_A$ mumkin bo`lgan ko`chish beramiz. Bu holda C nuqta $\delta \vec{s}_C$ va D nuqta $\delta \vec{s}_D$ ko`chishni oladi.

Mexanizmning ko`rilayotgan holati uchun $AB$ zvenoning tezliklar oniy markazi $B$ nuqtada bo`ladi. Shuning uchun $\delta s_C = \dfrac{\delta s_A}{2}$. Undan tashqari $\delta s_C \cdot \cos 60^0 = \delta s_D$; binobarin,

$$\delta s_D = \frac{\delta s_A}{2} \cdot \cos 60^0 = \frac{\delta s_A}{4} \qquad (114.4)$$



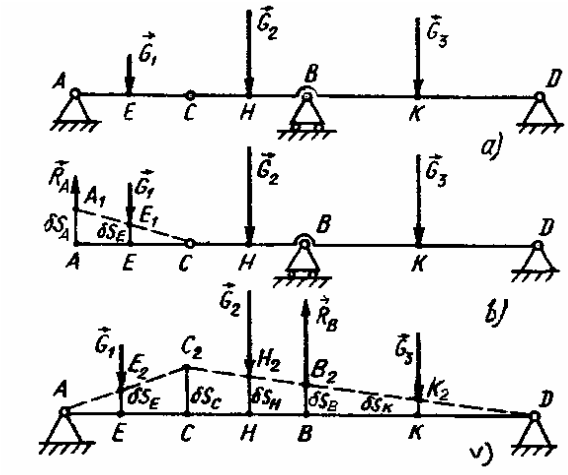
205-rasm

(114.4) ni (114.3) ga qo`ysak,

$$F_D = 4F_A$$

kelib chiqadi.

76-masala. Qismlardan tuzilib, uchta tayanchda turgan AD balka C nuqtada sharnir bilan biriktirilgan ikkita balkadan iborat. Balkaga $20\ kN$, $60\ kN$, $30\ kN$ ga teng bo`lgan vertikal kuchlar ta'sir qiladi. $AE=EC=CH=HB=a$, $BK=KD=2a$. A va B sharnirlardagi reaksiya kuchlari aniqlansin (206-rasm).



206-rasm

Yechish. Rasmda AD balkaga vertikal ravishda ta'sir qiluvchi $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ va $\vec{G}_3$ kuchlarni tasvirlaymiz.

A nuqta reaksiyasini topish uchun mazkur nuqtadagi tayanchni $\overline{R}_A$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz. Sistemaga qo`yilgan kuchlar parallel kuchlar sistemasidan iborat bo`lgani uchun A sharnir reaksiya kuchining gorizontal tashkil etuvchisi bo`lmaydi.

A nuqtaga $AA_1 = \delta s_A$ (206-rasm,*b*) mumkin bo`lgan ko`chish beramiz. Bu holda E nuqta δs_E ko`chishni oladi.

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipiga ko`ra

$$R_A \delta s_A - G_1 \delta s_E = 0 \qquad (114.5)$$

ΔCAA_1 va ΔCEE_1 lar o`xshashligidan :

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_E} = \frac{AC}{EC}$$

yoki

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_E} = \frac{2a}{a}$$

bundan

$$\delta s_E = \frac{\delta s_A}{2} \qquad (114.6)$$

(114.6) ni (114.5) ga qo`ysak:

$$R_A \delta s_A - G_1 \frac{\delta s_A}{2} = 0$$

bundan $R_A = \dfrac{G_1}{2}$ yoki $R_A = 10\,N$ kelib chiqadi.

Endi B nuqta reaksiyasini aniqlaymiz (206-rasm,*v*).Buning uchun B nuqtadagi bog`lanishni $\vec{R}_B$ reaksiya kuchi bilan almashtirib, mumkin bo`lgan ko`chish beramiz. Bu holda $E$, $H$, $B$, $K$ nuqtalar mos ravishda $\delta s_E$, $\delta s_H$, $\delta s_B$, $\delta s_K$ ko`chishlarni oladi.

Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipiga asosan:

$$-G_1 \delta s_E - G_2 \delta s_H + R_B \delta s_B - G_3 \delta s_K = 0 \qquad (114.7)$$

ΔACC_2 bilan ΔAEE_2 ning, ΔDCC_2 bilan ΔDHH_2, ΔDBB_1, ΔDKK_2 larning o`xshashligidan:

$$\frac{\delta s_C}{\delta sE} = \frac{AC}{AE}, \frac{\delta s_C}{\delta s_H} = \frac{CD}{HD}, \frac{\delta s_C}{\delta s_B} = \frac{CD}{BD}, \frac{\delta s_C}{\delta s_K} = \frac{CD}{KD}$$

bundan $$\delta s_C = \frac{3}{2}\delta s_B, \delta s_E = \frac{3}{4}\delta s_B, \delta s_H = \frac{5}{4}\delta s_B, \delta s_K = \frac{1}{2}\delta s_B \qquad (114.8)$$

(114.8) ni (114.7) ga qo`ysak,

$$-G_1 \frac{3}{4}\delta s_B - G_2 \frac{5}{4}\delta s_B + R_B\, \delta s_B - G_3 \frac{1}{2}\delta s_B = 0 \qquad (114.9)$$

hosil bo`ladi.

(114.9) dan $R_B = \frac{3}{4}G_1 + \frac{5}{4}G_2 + \frac{1}{2}G_3$ yoki $R_B = 105\,kN$ kelib chiqadi.

Nazorat savollari

1.Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlarni matematik ifodasi qanday?
2.Qanday bog'lanish golonom va golonomsiz deb ataladi?
3.Statsionlar va nostatsionar bog'lanish nima?
4.Bo`shatadigan, bo`shatmaydigan bog'lanishlarni ta'riflang?
5.Mexanik sistemaning erkinlik darajasi nima?
6.Qanday bog'lanishlar ideal bog'lanishlar deb ataladi?
7.Sistemaning umumlashgan koordinatalarini ta'riflang.
8.Mumkin bo`lgan ko`chish prinsipi nima?
9.Qanday kuchlar umumlashgan kuchlar deyiladi?
10.Umumlashgan kuchlarni analitik ifodasi qanday?
11.Erkin moddiy nuqtaning erkinlik darajasi deganda nimani tushunasiz?
12.Qo`zg'almas o`q atrofida aylanayotgan qattiq jisimning aylanish burchagi umumlashgan koordinata uchun qabul qilinsa, umumlashgan kuch nimaga teng bo`ladi?

XVIII bob

Dinamikaning umumiy tenglamasi. Lagranjning II tur tenglamalari

115 - §. Dinamikaning umumiy tenglamasi

Dinamikaning umumiy tenglamasini keltirib chiqarish uchun ideal va bo`shatmaydigan bog`lanishdagi mexanik sistema nuqtalari uchun Dalamber prinsipini yozamiz:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0\,, \\ \vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_2 = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{F}_n + \vec{N}_n + \vec{\Phi}_n = 0\,. \end{cases} \tag{115.1}$$

Sistema nuqtalariga mumkin bo`lgan ko`chish berib, (115.1) tenglamani tegishlicha $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \cdots, \delta\vec{r}_n$ larga skalyar ko`paytirib , hosil bo`lgan ifodalarni hadlab qo`shsak,

$$\sum(\vec{F}_\nu + \vec{N}_\nu + \vec{\Phi}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0$$

kelib chiqadi. Sistema ideal bog`lanishda bo`lgani tufayli

$$\sum \vec{N}_\nu\, \delta\vec{r}_\nu = 0$$

Shunday qilib,

$$\sum(\vec{F}_\nu + \vec{\Phi}_\nu)\delta\vec{r}_\nu = 0 \tag{115.2}$$

ifodaga ega bo`lamiz.

(115.2) tenglama analitik usulda Dekart koordinata o`qlaridagi proeksiyalari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\sum\left[(F_{\nu x} - m_\nu\,\ddot{x}_\nu)\delta x_\nu + (F_{\nu y} - m_\nu\,\ddot{y}_\nu)\delta y_\nu + (F_{\nu z} - m_\nu\,\ddot{z}_\nu)\delta z_\nu\right] = 0 \tag{115.3}$$

(115.2) yoki (115.3) dinamikaning umumiy tenglamasi deyiladi va quyidagi teorema bilan ta'riflanadi: *ideal va bo`shatmaydigan bog`lanishlar qo`yilgan mexanik sistemaga ta'sir etuvchi aktiv kuchlarning hamda inersiya kuchlarining har qanday mumkin bo`lgan ko`chishdagi elementar ishlarining yig`indisi nolga teng.*

Dinamikaning umumiy tenglamasi Dalamber hamda Lagranj prinsiplarini birgalikda qaralishidan kelib chiqqani sababli (115.2) Dalamber-Lagranj tenglamasi deb ham ataladi.

116 - §. Dinamikaning umumiy tenglamasini qo`llab masalalar yechish

Dinamikaning umumiy tenglamasidan foydalanib yechiladigan masalalar quyidagi tartibda hal etiladi.

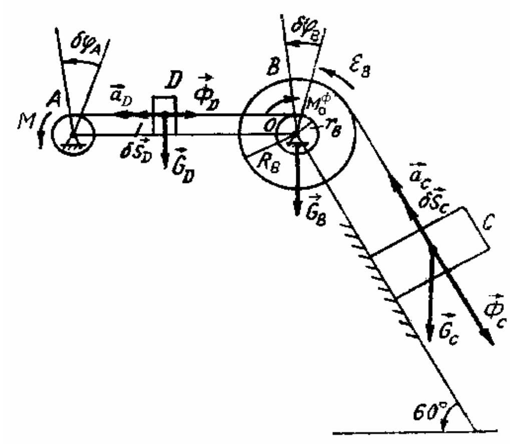
1. Sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar hamda ideal bo`lmagan bog`lanishlar reaksiya kuchlari rasmda tasvirlanadi.
2. Sistemani tashkil etuvchi har qaysi jism inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti aniqlanadi.

3. Sistemaga mumkin bo`lgan ko`chish beriladi.

4. Dinamikaning umumiy tenglamasi tuziladi.

5. Tuzilgan tenglamadan kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

77- masala. Mexanik sistema A blokka hamda B pog`onali shkivga o`ralgan arqonlar, shuningdek, bu arqonlarga bog`langan $C$ va $D$ yuklardan iborat (207-rasm). $B$, $C$, $D$ jismlarning og`irliklari mos ravishda $\vec{G}_B, \vec{G}_C, \vec{G}_D$. A blokka qo`yilgan $M$ momentli juft kuch ta'sirida sistema vertikal tekislikda harakat qiladi. $G_B = 30N$, $G_C = 40N$, $G_D = 20N$, $M = 16Nm$, $R_A = 0{,}2m$, $R_B = 0{,}3m$, $r_B = 0{,}15m$; $B$ shkiv inersiya radiusi $\rho_B = 0{,}2m$. Sistema niqtalari orasidagi ishqalanishlarni hamda $A$ blok og`irligini hisobga olmay, C yukning tezlanishi aniqlansin.



207-rasm

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaga ideal bog`lanishlar qo`yilgan. Ta'sir qiluvchi kuchlar 207-rasmda ko`rsatilgan.

C yuk tezlanishini $\vec{a}_C$ bilan belgilaymiz. Sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlar qatoriga yuklarning

$$\Phi_C = \frac{G_C}{g} a_C \, , \Phi_D = \frac{G_D}{g} a_D \qquad (116.1)$$

inersiya kuchlarining hamda pog`onali B shkivning

$$M_0^{\Phi} = \frac{G_B}{g} \rho_B^2 \, \varepsilon_B \qquad (116.2)$$

inersiya kuchlarining momentini qo`shamiz.

C va D yuklar B shkivga arqon yordamida bog`langani sababli

$$a_C = \varepsilon_B R_B \, , a_D = \varepsilon_B r_B \qquad (116.3)$$

bo`ladi. (116.3) dan:

$$\varepsilon_B = \frac{a_C}{R_B} \, , a_D = \frac{a_C}{R_B} \cdot r_B \qquad (116.4)$$

(116.4) ni (116.1) va (116.2) ga qo`ysak,

$$\Phi_C = \frac{G_C}{g} \cdot a_C \, , \Phi_D = \frac{G_D}{g} \frac{r_B}{R_B} \cdot a_C \, , M_0^{\Phi} = \frac{G_B}{g} \frac{\rho_B^2}{R_B} \cdot a_C \qquad (116.5)$$

kelib chiqadi.

Sistemaga mumkin bo`lgan ko`chish bersak, C, D yuklar mos ravishda $\delta s_C, \delta s_D$ ko`chishlarni, shuningdek, $A$ blok mumkin bo`lgan $\delta \varphi_A$ burilishni, B shkiv esa $\delta \varphi_B$ burilishni oladi.

Natijada dinamikaning umumiy tenglamasi quyidagicha bo`ladi:

$$(-G_C \sin 60^0 - \Phi_C) \, \delta s_C - M_0^{\Phi} \, \delta \varphi_B - \Phi_D \, \delta s_D + m \, \delta \varphi_A = 0 \qquad (116.6)$$

$\delta s_C, \delta s_D$ va $\delta \varphi_A$ larni $\delta \varphi_B$ orqali ifodalaymiz.

207-rasmdan

$$\delta s_C = R_B\,\delta\varphi_B\,,\ \delta s_D = r_B\,\delta\varphi_B \qquad (116.7)$$

B shkiv A blok bilan arqon vositasida biriktirilgani tufayli :

$$R_A\,\delta\varphi_A = r_B\,\delta\varphi_B \qquad (116.8)$$

bundan

$$\delta\varphi_A = \frac{r_B}{R_A}\cdot\delta\varphi_B$$

(116.4) , (116.7) , (116.8) ifodalarni (116.6) ga qo`ysak:

$$\left[G_C\left(-\sin 60^0 - \frac{a_C}{g}\right)R_B - \frac{G_B}{g}\frac{\rho_B^2}{R_B}\cdot a_C - \frac{G_D}{g}\frac{r_B^2}{R_B}\cdot a_C + M\frac{r_B}{R_A}\right]\delta\varphi_B = 0$$

bunda $\delta\varphi_B \neq 0;$ shuning uchun yuqoridagi tenglikdan

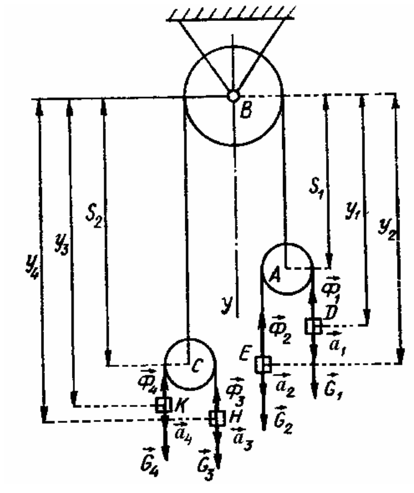
$$G_C\left(-\sin 60^0 - \frac{a_C}{g}\right)R_B - \frac{G_B}{g}\frac{\rho_B^2}{R_B}\cdot a_C + M\frac{r_B}{R_B} = 0 \qquad (116.9)$$

kelib chiqadi. Masala shartidagi berilganlarni e'tiborga olsak, (116.9) dan

$$a_C = 0{,}9\,m/s$$

hosil bo`ladi.

78-masala. Sistema 4 ta $m_1\,, m_2\,, m_3$ va m_4 massalardan iborat. Bu massalar ikkitadan birlashtirilgan bo`lib, ular $A$ , $B$ , $C$ bloklar yordamida 208-rasmdagidek osilgan.Boshlang`ich paytda sistema muvozanatda turadi. m_4 massa qo`zg`almasligi uchun massalar orasidagi munosabat qanday bo`lishi aniqlansin. Bloklar va arqon og`irliklari hamda ishqalanish hisobga olinmasin. Arqonlar cho`zilmaydi deb hisoblansin.



208-rasm

Yechish. Sistemaga ta'sir etuvchi kuchlar og`irlik kuchlaridan iborat. Ta'sir etuvchi kuchlar qatoriga yuklarning inersiya kuchlarini qo`shamiz:

$\vec{\Phi}_1 = -m_1\,\vec{a}_1\,, \vec{\Phi}_2 = -m_2\,\vec{a}_2\,, \vec{\Phi}_3 = -m_3\,\vec{a}_3\,, \vec{\Phi}_4 = -m_4\,\vec{a}_4$

$m_1\,, m_2\,, m_3\,, m_4$ massalarining absolyut harakati koordinatalarini mos ravishda $y_1\,, y_2\,, y_3\,, y_4$ bilan belgilaymiz.

Sistemaga mumkin bo`lgan ko`chish bersak, $m_1\,, m_2\ m_3\,, m_4$ massalar mos ravishda $\delta y_1\,, \delta y_2, \delta y_3$ va δy_4 ko`chishlarga ega bo`ladi.Bu holda dinamikaning umumiy tenglamasini quyidagicha yoza olamiz:

$$\begin{aligned}&(m_1\,g - m_1\,a_1)\,\delta y_1 + (m_2\,g - m_2\,a_2)\,\delta y_2 + \\ &+ (m_3\,g - m_3\,a_3)\,\delta y_3 + (m_4\,g - m_4\,a_4)\,\delta y_4 = 0\end{aligned} \qquad (116.10)$$

Mumkin bo`lgan ko`chishlar orasidagi munosabatni aniqlash uchun bog`lanish tenglamasini tuzamiz. DE , AC , HK arqonlar uzunliklarini tegishlicha $L_1\,, L_2\,, L_3$ desak:

$$y_1 - s_1 + y_2 - s_1 + \pi\,r_A = L_1\,,$$
$$s_1 + s_2 + \pi\,r_B = L_2\,,$$
$$y_3 - s_2 + y_4 - s_2 + \pi\,r_C = L_3.$$

Bu tenglamalarning ikkinchisini 2 ga ko`paytirib, so`ngra uchchalasini qo`shamiz:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2L_2 - 2\pi r_B + L_1 - \pi r_A + L_3 - \pi r_C = const \qquad (116.11)$$

Bu esa bog`lanish tenglamasini ifodalaydi. (116.11) ni variatsiyalasak:

$$\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 = 0$$

Bundan

$$\delta y_4 = -(\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3) \qquad (116.12)$$

(116.11) dan vaqt bo`yicha ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

Bundan

$$a_4 = -(a_1 + a_2 + a_3) \qquad (116.13)$$

(116.12) ni (116.10) ga qo`yamiz:

$$\begin{aligned} &[m_1(g - a_1) - m_4(g - a_4)]\delta y_1 + \\ &+[m_2(g - a_2) - m_4(g - a_4)]\delta y_2 + \\ &+[m_3(g - a) - m_4(g - a_4)]\delta y_3 = 0 \end{aligned} \qquad (116.14)$$

$\delta y_1, \delta y_2, \delta y_3$ variatsiyalar o`zaro bog`liqsiz bo`lgani sababli (116.14) tenglik bajarilishi uchun mazkur variatsiyalar oldidagi koeffitsientlar nolga teng bo`lishi kerak,ya'ni:

$$\begin{aligned} &m_1(g - a_1) - m_4(g - a_4) = 0, \\ &m_2(g - a_2) - m_4(g - a_4) = 0, \\ &m_3(g - a_3) - m_4(g - a_4) = 0. \end{aligned}$$

Bu tengliklarni mos ravishda m_2m_3, m_1m_3, m_1m_2 ga ko`paytirib qo`shamiz va (116.13) formulani hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$a_4 = \frac{m_4(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) - 3m_1m_2m_3}{m_1m_2m_3 + m_1m_2m_4 + m_1m_3m_4 + m_2m_3m_4} \cdot g$$

To`rtinchi yuk joyidan qo`zg`almasdan (boshlang`ich paytda to`rtinchi yuk tezligi nolga teng) qolishi uchun $a_4 = 0$ bo`lishi zarur. Bu holda

$$m_4(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) = 3m_1m_2m_3$$

Tenglikning ikki tomonini $m_1m_2m_3$ ga bo`lsak,massalar orasidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\frac{m_4}{m_1} + \frac{m_4}{m_2} + \frac{m_4}{m_3} = 3$$

117 - §. Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari

Lagranjning ikkinchi tur tenglamalarini keltirib chiqarish uchun dinamikaning ununiy tenglamasi quyidagicha yozib olinadi:

$$\sum(\vec{F}_\nu - m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu)\delta \vec{r}_\nu = 0 \qquad (117.1)$$

Faraz qilaylik, golonom, ideal va bo`shatmaydigan bog`lanishdagi sistema n ta nuqtadan tashkil topgan bo`lib, erkinlik darajasi $k$ ta bo`lsin.

Ma'lumki, sistema nuqtasining radius-vektorini umumlashgan koordinatalar funksiyasi sifatida quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1\,, q_2\,, \cdots, q_k\,, t) \tag{117.2}$$

Sistema nuqtalarining mumkin bo`lgan ko`chishlari

$$\delta\vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \quad , \quad (\nu = \overline{1\,, n}) \tag{117.3}$$

(117.3) ni (117.1) ga qo`yamiz:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

(112.3) formulaga ko`ra:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}$$

Natijada,

$$\sum_{j=1}^{k} \left(Q_j - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{117.4}$$

(117.4) dagi $\ddot{\vec{r}}_\nu \dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}$ ni quyidagicha o`zgartiramiz:

$$\ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d\dot{\vec{r}}_\nu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \tag{117.5}$$

(117.2) dan vaqt bo`yicha hosila olamiz:

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \tag{117.6}$$

(117.6) dan q_j hamda $\dot{q}_j$ bo`yicha xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial t \partial q_j} \quad , \quad (j = \overline{1,k}) \tag{117.7}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \quad , \quad (j = \overline{1,k}) \tag{117.8}$$

Endi (117.5) ifodadagi $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right)$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k \tag{117.9}$$

(117.7) bilan (117.9) ni solishtirsak,

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \tag{117.10}$$

kelib chiqadi.

(117.7) va (117.10) ni (117.5) ga qo`yamiz:

$$\ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_j}$$

yoki

$$\ddot{\vec{r}}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{\partial q_j} \qquad (117.11)$$

(117.11) ni (117.4) ga qo`ysak:

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j\,\delta q_j - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}\right)\right] - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}\right)\right\}\delta q_j = 0$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{k} Q_j\,\delta q_j - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2}\right)\right\}\delta q_j = 0$$

hosil bo`ladi.

Bunda $\sum \frac{m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2}}{2} = T$ — sistemaning kinetik energiyasi bo`lgani uchun

$$\sum_{j=1}^{k}\left[Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0 \qquad (117.12)$$

tenglamani hosil qilamiz.

(117.12) da $\delta q_j \neq 0$; shuning uchun , (117.12) dan quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:

$$Q_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad (j = \overline{1,k})$$

yoki

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \quad (j = \overline{1,k}) \qquad (117.13)$$

(117.13) tenglamalar *Lagranjning 11 tur tenglamalari* deyiladi. Shunday qilib, Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari dinamika umumiy tenglamasining umumlashgan koordinatalar orqali ifodasidan iborat.

Lagranj II tur tenglamalarining afzalligi shundan iboratki, bu tenglamalar soni sistemaning erkinlik darajasi soniga teng bo`lib, sistemani tashkil etuvchi nuqtalar soniga bog`liq emas.

Agar ta'sir qiluvchi kuch potensialli bo`lsa, $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$; bu holda (117.13) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad (j = \overline{1,k}) \qquad (117.14)$$

Bundagi $L = T - \Pi$ — Lagranj funksiyasi yoki Lagranjning kinetik potensiali deyiladi; $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \cdots, q_k)$ esa potensial energiyadan iborat.

118 - §. Lagranjning II tur tenglamalarini tatbiq etib masalalar yechish

Lagranjning II tur tenglamasini tatbiq etib hal qilinadigan masalalar quyidagi tartibda yechiladi:

1. Berilgan sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi.

2. Umumlashgan koordinatalar tanlab olinadi.

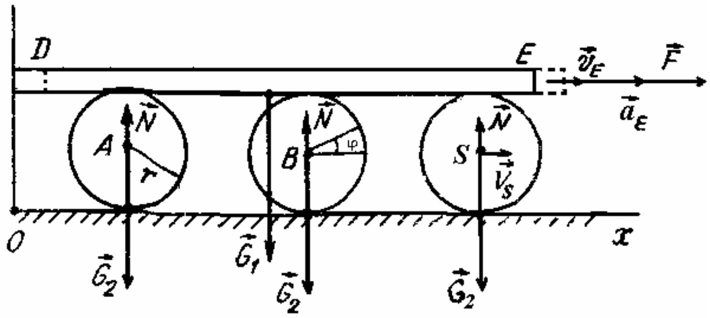
3. Sistemaning kinetik energiyasi hisoblanadi va u umumlashgan tezliklar orqali ifodalanadi.

4. Umumlashgan kuch aniqlanadi.

5. Lagranjning II tur tenglamalari tuziladi.

6. Tuzilgan tenglamadan kerakli noma'lumlar aniqlanadi.

79- masala. m_1 massali DE sterjen har birining massasi m_2 bo`lgan uchta g`altak ustida yotadi. Sterjenning o`ng tomoniga gorizontal ravishda yo`nalgan $\vec{F}$ kuch qo`yilgan. U sterjen va g`altaklarni harakatga keltiradi. DE sterjenning tezlanishi aniqlansin. G`altaklar bir jinsli doiraviy silindr deb hisoblansin. Sterjen bilan g`altaklar, shuningdek, g`altaklar bilan gorizontal tekislik orasidagi ishqalanish hisobga olinmasin (209-rasm).



209-rasm

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar ideal. Sistemaning holati DE sterjen E nuqtasining koordinatasi x_E – umumlashgan koordinata orqali bir qiymatli aniqlanadi. Demak,sistemaning erkinlik darajasi bitta.

DE sterjen tezlanishni aniqlash uchun Lagranj II tur tenglamasini tuzish kerak. Buning uchun avval sistema kinetik energiyasini hisoblaymiz. Sistema kinetik energiyasi sterjen va g`altaklar kinetik energiyalarining yig`indisiga teng:

$$T = T_{DE} + T_{g'al.} \tag{118.1}$$

DE sterjen ilgarilama harakatda bo`lgani tufayli uning kinetik energiyasi quyidagicha:

$$T_{DE} = \frac{1}{2} m_1 V_E^2 \tag{118.2}$$

G`altaklar tekis parallel harakatda. Suning uchun ularning kinetik energiyasi:

$$T_{g'al.} = 3\left(\frac{1}{2} m_2 V_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2\right)$$

yoki

$$T_{g'al.} = 3\left(\frac{1}{2} m_2 V_S^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \omega^2\right) \tag{118.3}$$

G`ildiraklarning tekislik bilan urinish nuqtalari tezliklar oniy markazi bo`lgani uchun

$$V_S = \omega r \quad , \quad V_E = \omega \cdot 2r \tag{118.4}$$

(118.4) dan:

$$V_S = \frac{1}{2} V_E \tag{118.5}$$

(118.4) ni (118.3) ga qo`ysak:

$$T_{g'al.} = 3\left(\frac{1}{8} m_2 V_E^2 + \frac{1}{16} m_2 V_E^2\right) = \frac{9}{16} m_2 V_E^2 \tag{118.6}$$

(118.2) va (118.6) ni (118.1) ga qo`yamiz:

$$T = \frac{V_E^2}{16}(9m_2 + 8m_1) = \frac{8m_1 + 9m_2}{16}\dot{x}_E^2 \qquad (118.7)$$

Endi sistemaga x_E umumlashgan koordinata bo`yicha $\delta x_E$ mumkin bo`lgan ko`chish berib, umumlashgan kuchni aniqlaymiz. Sistemaga qo`yilgan kuchlarning mumkin bo`lgan ko`chishdagi ishlarning yig`indisini hisoblaymiz: $\delta A = F\,\delta x_E$.

Umumlashgan kuchni aniqlash formulasi $Q_{x_E} = \dfrac{\delta A}{\delta x_E}$ ga ko`ra

$$Q_{x_E} = F \qquad (118.8)$$

Sistemaning erkinlik darajasi bitta bo`lgani sababli Lagranj II tur tenglamasi bitta bo`ladi,ya’ni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_E} = Q_{x_E} \qquad (118.9)$$

(118.7) dan:

$$\frac{\partial T}{\partial x_E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E} = \frac{8m_1 + 9m_2}{8}\dot{x}_E \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_E}\right) = \frac{a_E}{8}(8m_1 + 9m_2) \qquad (118.10)$$

(118.8) va (118.10) ni (118.9) ga qo`yamiz:

$$\frac{a_E}{8}(8m_1 + 9m_2) = F$$

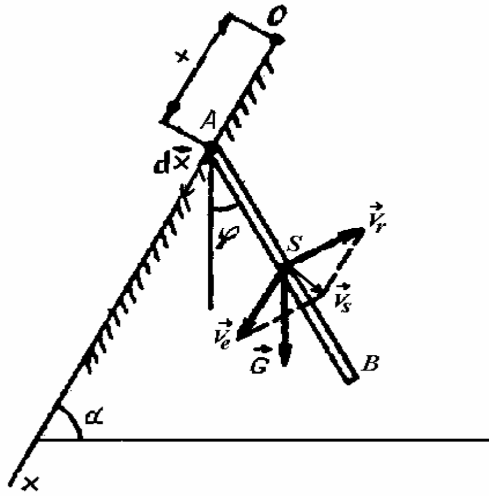
Bu ifodadan DE sterjenning tezlanishi a_E kelib chiqadi:

$$a_E = \frac{8F}{8m_1 + 9m_2}\,(m/s^2)$$

80-masala. Uzunligi l bo`lgan bir jinsli $AB$ sterjen vertikal tekislikda $A$ sharnir atrofida aylanishi mumkin. Sterjenning og`irligi $G=Mg$ ga teng. Sterjenning A uchi esa gorizont bilan α burchak hosil qiluvchi tekislik bo`ylab ishqalanmasdan sirpanadi Sterjen harakatining differensial tenglamasi tuzilsin (210-rasm).

Yechish. Sistemaga qo`yilgan bog`lanishlar ideal bo`lib,sistemaning erkinlik darajasi ikkita. Demak,umumlashgan koordinatalar ham ikkita bo`lib, ular uchun A nuqtaning og`ma tekislik bo`ylab ko`chishi $q_1 = x$ hamda sterjenning vertikaldan og`ishi $q_2 = \varphi$ olinishi mumkin.

Sanoq sistemasi 210-rasmdagidek tanlanadi.



210-rasm

Sterjenning kinetik energiyasini hisoblaymiz.

$$T = \frac{1}{2}MV_S^2 + \frac{1}{2}I_S\,\omega^2$$

Bunda

$$\omega = \dot{\varphi} \quad , \quad I_S = \frac{M\,l^2}{12} \quad , \quad M\text{— sterjen massasi.}$$

S nuqta tezligi tezliklarni qo`shish teoremasidan foydalanib aniqlanadi:

$$\vec{V}_S = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

bunda $\vec{V}_r$ — sterjen inersiya markazining A nuqta atrofida aylanishidagi nisbiy tezligi; $\vec{V}_e$— S nuqtaning og`ma tekislikka parallel bo`lgan ko`chirma tezligidir. Ularning miqdorlari quyidagicha:

$$V_r = \frac{l}{2}\dot{\varphi} \quad , \quad V_e = \dot{x}$$

210-rasmdan (kosinuslar teoremasiga ko`ra):

$$V_S^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 - \dot{x}\,l\,\dot{\varphi}\cos(\alpha - \varphi)$$

Natijada

$$T = \frac{M}{2}\left[\dot{x}^2 + \frac{l^2\,\dot{\varphi}^2}{4} - l\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)\right] + \frac{M\,l^2}{24}\dot{\varphi}^2 \tag{118.11}$$

(118.11)dan:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\,\dot{x} - \frac{M\,l\,\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}M\,l\,\dot{\varphi}\,\dot{x}\sin(\alpha-\varphi) \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{M\,l^2\,\dot{\varphi}}{4} - \frac{M\,l\,\dot{x}\cos(\alpha-\varphi)}{2} + \frac{M\,l^2\,\dot{\varphi}}{12};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\,\ddot{x} - \frac{1}{2}M\,l\,\ddot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi) - \frac{1}{2}M\,l\,\dot{\varphi}^2\sin(\alpha-\varphi); \tag{118.12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{M\,l^2}{4}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}M\,l\,\ddot{x}\cos(\alpha-\varphi) - \frac{1}{2}M\,l\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) + \frac{M\,l^2\,\ddot{\varphi}}{12}$$

Umumlashgan kuchlar quyidagicha bo`ladi:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} \quad , \quad Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta \varphi}$$

yoki

$$Q_x = \frac{G\,\delta x \sin\alpha}{\delta x} = G\sin\alpha \quad , \quad Q_\varphi = -\frac{G\,l\sin\varphi\,\delta\varphi}{2\,\delta\varphi} = -\frac{G\,l}{2}\sin\varphi \text{ , bunda } G{=}Mg \tag{118.13}$$

Endi Lagranj II tur tenglamasini yozamiz:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\,, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{aligned} \tag{118.14}$$

(118.12) va (118.13) ni (118.14) ga qo`yamiz:

$$\frac{l\,\ddot{\varphi}}{3} - \frac{\ddot{x}\cos(\alpha-\varphi)}{2} + \frac{g\sin\varphi}{2} = 0\,,$$

$$\ddot{x} - \frac{l\,\ddot{\varphi}}{2}\cos(\alpha-\varphi) - \frac{l\,\dot{\varphi}^2}{2}\sin(\alpha-\varphi) - g\sin\alpha$$

Bu sterjen harakatining differensial tenglamalarini ifodalaydi.

119 - §. Erkinlik darajasi bitta bo`lgan sistemaning kichik tebranma harakati haqida qisqacha tushuncha

Texnikada uchraydigan bir qancha masalalarda sistemaning muvozanat holati yaqinida kichik amplituda bilan tebranishlarini hisobga olishga to`g`ri keladi. Bunday tebranishlarni mashina va mexanizmlar vibratsiyasi, samolyotlar vibratsiyasi, yer silkinishlarini o`lchaydigan asbobning tebranishi misol bo`ladi.

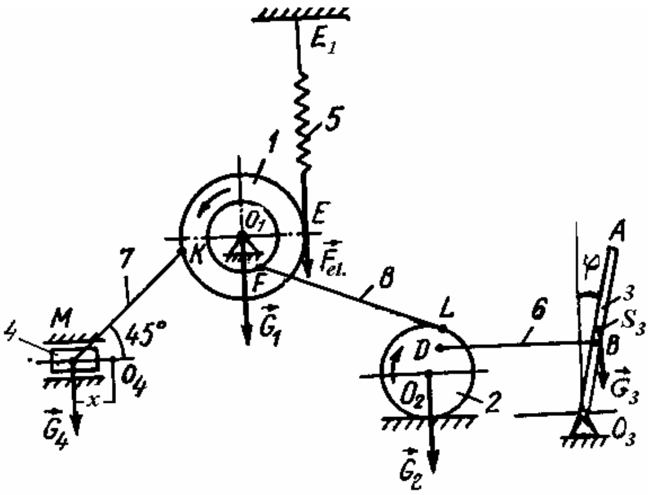
Faraz qilaylik, mexanik sistema qo`yilgan kuchlar ta’sirida muvozanatda bo`lsin. Agar sistema nuqtalariga kichik boshlang`ich tezlik berish natijasida sistema nuqtalari doimo muvozanat holati yaqinida qolsa,sistemaning bunday muvozanati uctivor muvozanat, muvozanat holatidan uzoqlasha borsa, beustivor muvozanat deyiladi.

Sistema muvozanatining yetarli sharti quyidagi Lagranj-Dirixle teoremasi vositasida aniqlanadi: agar golonom,ideal va statsionar bog`lanishlar qo`yilgan,potensialli kuchlar ta’siridagi sistemaning biror holatidan uning potensial energiyasi minimal qiymatga erishsa, sistema bu holatda ustivor muvozanatda bo`ladi.Ustivor muvozanat *(q=0)* yaqinida

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=0} = 0\,, \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=0} > 0$$

Sistemaning kichik tebranma harakatiga oid quyidagi masalani yechamiz.

81-masala. 211- rasmda ko`rsatilgan mexanizm vertikal tekislikda joylashgan bo`lib, u qo`zg`almas o`q atrofida aylanuvchi, radiuslari mos ravishda $R_1 = 0{,}4m$ , $r_1 = 0{,}2m$ bo`lgan 1-pog`onali g`ildirak, gorizontal tekislikda sirpanmasdan dumalaydigan radiusi $R_2 = 0{,}3m$ bo`lgan g`ildirak, uzunligi *l=1 m* bo`lgan 3-sterjen hamda gorizontal bo`ylab ishqalanmasdan sirpanadigan 4-polzundan iborat. 3-sterjen 2-g`ildirakka, 4-polzun 1-gildirakka sharnirlar yordamida og`irligi e’tiborga olinmaydigan 6 va 7-sterjenlar vositasida biriktirilgan. 7-sterjen gorizontal bilan 45^0 burchak hosil qiladi, 6-sterjen esa gorizontal joylashgan. 1 va 2 – g`ildiraklar og`irligi hisobga olinmaydigan 8-sterjen yordamida bog`langan. *AB=0,55 m.* Bikirligi *c* bo`lgan vertikal EE_1 prujinaning *E* uchi 1-pog`onali g`ildirakka biriktirilgan. E_1 uchi esa mahkamlangan.

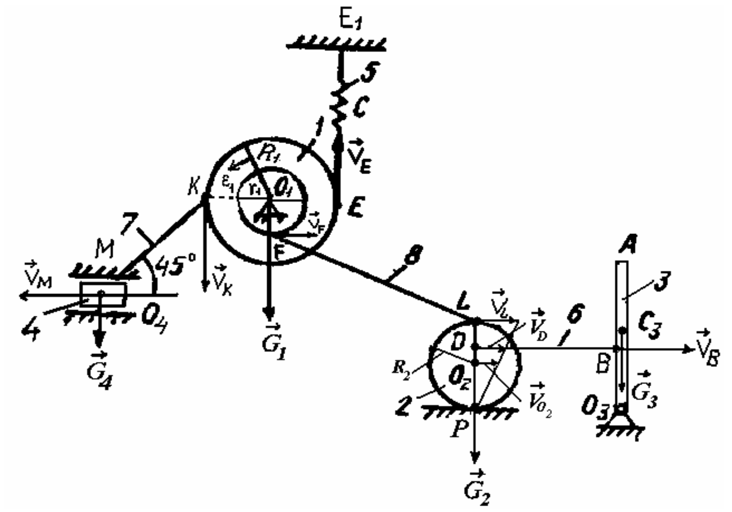


211-rasm

211-rasmda mexanizmning muvozanat holati ko`rsatilgan.

Sistemaning muvozanat vaziyati yaqinidagi tebranishlar takrorligi va davri aniqlansin. Shuningdek, prujinaning statik cho`zilishi $\lambda_{st.}$ topilsin. 1 va 2-g`ildiraklar bir jinsli silindr deb hisoblansin.

$$O_2D = \frac{1}{2}R_2\ ,\ m_1 = 15kg\ ,\ m_2 = 6kg\ ,\ m_3 = 2kg\ ,\ m_4 = 10kg\ ,\ c = 700\,N/m\ .$$



212-rasm

Yechish. Tekshirilayotgan sistemaning erkinlik darajasi birga teng.Chunki 4-polzunning O_4 muvozanat holatidan og`ishi yoki 1-g`ildirakning burilishi, yoki prujinaning ko`chishi, yoki 3-sterjenning burilishi orqali sistemaning holatini bir qiymatli aniqlash mumkin.

Faraz qilaylik**, 4-**polzun kichik x masofaga surilsin. Bu holda mexanizm ko`rinishi 212-rasmdagidek bo`ladi.

Umumlashgan koordinata deb x ni olamiz.

Sistemaning kichik tebranishini tekshirayotganimiz sababli sistema nuqtalarining tezliklari 212-rasmda tasvirlanganidek yo`naladi.

Tekshirilayotgan sistema uchun Lagranjning II tur tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q \qquad (119.1)$$

Sistemaga $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4$ og`irlik kuchlari hamda prujinaning elastiklik kuchi $\vec{F}_{el.}$ ta'sir qiladi. Ular potensialli bo`lgani uchun

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \qquad (119.2)$$

bo`ladi.

Sistemaning kinetik energiyasi

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \qquad (119.3)$$

1-g`ildirak hamda 3-sterjen aylanma harakatda, 2-g`ildirak tekis parallel harakatda, 4-polzun esa ilgarilama harakatda bo`lgani uchun ularning kinetik energiyalari

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\,\omega_1^2\ ,\ T_2 = \frac{1}{2}I_2\,\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_2\,V_{O_2}^2\ ,\ T_3 = \frac{1}{2}I_3\,\omega_3^2\ ,\ T_4 = \frac{1}{2}m_4\,V_M^2 \qquad (119.4)$$

bo`ladi. Bu ifodada

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1\,R_1^2\ ,\ I_2 = \frac{1}{2}m_2\,R_2^2\ ,\ I_3 = \frac{1}{3}m_3\,l^2$$

(119.4) ifodalardagi hamma tezliklarni umumlashgan tezlik $V_M = \dot{x}$ orqali ifodalaymiz.

7-sterjen tekis parallel harakat qiladi. Shuning uchun K nuqta tezligini aniqlashda tekis harakatdagi jism ikkita nuqtasi tezliklarining shu nuqtalardan o`tuvchi o`qdagi proyeksiyalari tengdir,degan teoremadan foydalanamiz:

$$V_M\cos 45^0 = V_K\cos 45^0$$

Bundan $V_K = \dot{x}$; K nuqta 1-g`ildirakka tegishli bo`lgani uchun:

$$\dot{x} = V_K = \omega_1 R_1 \,,\, \omega_1 = \frac{\dot{x}}{R_1} \,,\, \varphi_1 = \frac{x}{R_1} \tag{119.5}$$

$\vec{V}_F \parallel \vec{V}_L$ bo`lgani uchun 8-sterjen oniy ilgarilama harakat qiladi.Binobarin,

$$V_F = V_L \tag{119.6}$$

2-g`ildirak sirg`anmasdan g`ildiragani uchun uning oniy markazi $P$ nuqtada bo`ladi. Shu sababli

$$V_L = \omega_2 \cdot 2R_2 \,,\, V_F = \omega_1 r_1 \tag{119.7}$$

(119.7) ni (119.6) ga qo`ysak:

$$\omega_2 \cdot 2R = \omega_1 r_1$$

bundan

$$\omega_2 = \frac{r_1}{2R_2} \cdot \omega_1 = \frac{r_1}{2R_2 R_1} \cdot \dot{x} \tag{119.8}$$

O_2 va D nuqtalar tezliklari quyidagicha aniqlanadi:

$$V_{O_2} = \omega_2 R_2 = \frac{r_1}{2R_1} \cdot \dot{x} \tag{119.9}$$

$$V_D = \omega_2 PD = \frac{3r_1}{4R_1} \cdot \dot{x} \tag{119.10}$$

DB sterjenning D nuqtasi tezlik vektorining yo`nalishi $\vec{V}_B$ yo`nalishi bilan bir xil bo`lib, $DB$ bo`yicha yo`naladi. Shu sababli $DB$ oniy ilgarilama harakatda bo`ladi:

$$V_D = V_B \qquad \text{yoki} \qquad \omega_2 PD = \omega_3 O_3 B$$

bu ifodada $PD = O_3 B$. Shuning uchun

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{r_1}{2R_1 R_2} \cdot \dot{x} \tag{119.11}$$

(119.5) , (119.8) , (119.9) va (119.11) larni (119.4) ga qo`yamiz:

$$T_1 = \frac{1}{4} m_1 \cdot \dot{x}^2 = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \dot{x}^2 \,,\, T_2 = \frac{3}{16} m_2 \frac{r_1^2}{R_1^2} \cdot \dot{x}^2 \,,$$

$$T_3 = \frac{1}{24} \frac{m_3 l^2 r_1^2}{R_1^2 R_2^2} \cdot \dot{x}^2 = \frac{25}{108} \cdot \dot{x}^2 \,,\; T_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot \dot{x}^2 = 5\dot{x}^2$$

Bularni (119.3) ga qo`ysak,

$$T = \left(\frac{15}{4} + \frac{9}{32} + \frac{25}{108} + 5 \right) \dot{x}^2 = 9 \frac{227}{864} \dot{x}^2 \tag{119.12}$$

kelib chiqadi.

Endi potensial energiyani hisoblaymiz:

$$\Pi = \frac{1}{2} c \lambda + m_1 g z_{O_1} + m_2 g z_{O_2} + m_3 g z_{C_3} + m_4 g z_M \tag{119.13}$$

$\vec{G}_1 , \vec{G}_2 , \vec{G}_4$ kuchlar qo`ilgan nuqta vertikal bo`ylab ko`chmagani tufayli:

$$z_{O_1} = z_{O_2} = z_M = 0 \,,\, z_{C_3} = \frac{l}{2} \cos\varphi$$

$\cos\varphi$ ni Teylor qatoriga yoyib, to`rtinchi va undan yuqori tartibli kichik miqdorlarni e’tiborga olmasak,

$$z_{C_3} = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \tag{119.14}$$

hosil bo`ladi.

(119.11) ga binoan $\varphi = \frac{r_1}{2R_1 R_2} \cdot x$

deb yozish mumkin. Sistemaning muvozanat vaziyatida prujina $\lambda_{st.}$ ga cho`zilgan,u holda: $\lambda = \lambda_{st} - s_E = \lambda_{st.} - R_1\varphi_1 = \lambda st. - x$

Natijada $\Pi = \frac{1}{2}c(\lambda_{st.} - x)^2 + m_3 g \frac{l}{2}\left(1 - \frac{r_1^2}{8R_1^2 R_2^2} \cdot x^2\right)$

Bundan

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = c(\lambda_{st.} - x) + m_3 g l \frac{r_1^2 x}{8R_1^2 R_2^2} \tag{119.15}$$

kelib chiqadi.

(119.12) dan

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 18\frac{227}{432}\cdot\dot{x}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 18\frac{227}{432}\cdot\ddot{x} \tag{119.16}$$

(119.15) va (119.16) ni (119.1) ga qo`yamiz:

$$18\frac{227}{432}\cdot\ddot{x} = c(\lambda_{st.} - x) + m_3 g l \frac{r_1^2}{8R_1^2 R_2^2}\cdot x \tag{119.17}$$

Sistemaning muvozanat holatida *x = 0* , *Q = 0.*

Natijada $c\lambda_{st.} = 0, \lambda_{st.} = 0$ bo`ladi. Bu holda Lagranjning II tur tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$18\frac{227}{432}\cdot\ddot{x} + \left(c - m_3 g l \frac{r_1^2}{8R_1^2 R_2^2}\right)\cdot x = 0 \qquad \text{yoki} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Bunda k — tebranishning doiraviy takrorligi

$$k^2 = \frac{c - \frac{m_3 g l r_1^2}{8R_1^2 R_2^2}}{18\frac{227}{432}}$$

Son qiymatlarni qo`ysak: $k = 6{,}1 s^{-1}$; tebranish davri esa $\tau = 1{,}03 s.$

Nazorat savollari

1.Dinamikaning umumiy tenglamasi qanday yoziladi?
2.Lagranj II-tur tenglamasini yozing.
3.Sistemaga ta’sir qilayotgan kuch qanday holda potensialli bo`ladi?
4.Potensialli kuch uchun Lagranj II-tur tenglamasi qanday yoziladi?
5.Dinamikaning umumiy tenglamasiga doir masalalar qanday tartibda yechiladi?
6.Lagranj II-tur tenglamasiga oid masalalar qanday hal etilishini tushuntiring?
7.Erkinlik darajasi bitta bo`lgan sistemaning kichik tebranishi haqida nimani bilasiz?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. **Aziz-Qoriev S. Q., Yangurazov Sh.Ch.** Nazariy mexanikadan masalalar yechish. 1-qism, Statika va kinematika, “O`qituvchi”, T.,1974; 2-qism, Dinamika, ”O`qituvchi”, T., 1975.
2. **Bat M. I., Djenelidze G. B., Kelzon A. S.** Teoreticheskaya mexanika v primerax i zadachax. T.1,2. “Nauka”, M., 1964, 1966.
3. **Boymurodova L. I., Shoyusupov Sh. A., Giyasova N. T.** Nazariy mexanika (statikadan ma'ruzalar matni). “TIMI”, T., 2006.
4. **Boymurodova L. I., Ziyaev F. B.** Nazariy mexanika (Metodik ko`rsatmalar va nazorat topshiriqlar). “TQXIMMI”, T., 1995.
5. **Brajnechenko N. A., Kan V. L. i dr.** Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. “Высшая школа”, M., 1974.
6. **Voronkov I. M.** Kurs teoreticheskoy mexaniki. “Nauka”, M., 1966.
7. **Giyasova N. T.**, **Xalmatova X. T.** Nazariy mexanika (kinematikadan metodik ko`rsatma). “TIMI”, T., 2007.
8. **Dobranravov V. V., Nikitin N. N.** Kurs teoreticheskoy mexaniki. “Высшая школа”, M., 1983.
9. **Kandov I. B.** Zadachi po teoreticheskoy mexanike. TIIIMSX, 1958.
10. **Kilchevskiy N. A.** Kurs teoreticheskoy mexaniki. T. I i II. “Nauka”, 1977.
11. **Kolesnikov K. S., Blyumin G. D. i dr.** Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. “Nauka”, M., 1983.
12. **Mavlyanova D. G., Tolipova L. I.** Nazariy mexanikadan metodik ko`rsatma va kontrol topshiriqlar. “TQXIMMI”, T., 1977.
13. **Mansurova M. R.** Metodicheskaya razrabotka k resheniyu zadach po teoreticheskoy mexanike dlya studentov gidromeliorativnoy i gidrotexnicheskoy spetsialnostey. “TIIIMSX”, T., 1974.
14. **Meshcherskiy I. V.** Nazariy mexanikadan masalalar to`plami. “O`qituvchi”, T., 1989.
15. **Osadchiy V. A., Fayn A. M.** Rukovodstvo k resheniyu zadach po teoreticheskoy mexanike. “Высшая школа”, M., 1966.
16. **Rashidov T. R., Shoziyotov Sh., Mo`minov Q.** B. Nazariy mexanika asoslari. “O`qituvchi”, T., 1990.
17. **Сахарный Н. Ф.** Kurs teoreticheskoy mexaniki. “Высшая школа”, M., 1964.
18. **Starjinskiy V. M.** Teoreticheskaya mexanika. “Nauka”, M., 1980.
19. **Targ S. M.** Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki. “Hayka”, M., 1970.
20. **Targ S. M.** Методические указания и контрольные задания. “Высшая школа”, M., 1980.
21. **Tolipova L. I.** Nazariy mexanika. “Mehnat”, T., 1987.
22. **Turbin B. I., Rustamov S. I.** Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. “Высшая школа”, M., 1978.
23. **Turbin B. I.** Teoreticheskaya mexanika. “Сельхозгиз”, M., 1959.
24. **O`razboev M.** T. Nazariy mexanika asosiy kursi. “O`qituvchi”, T., 1966.

25. **Shohaydarova P. Sh., Shoziyotov Sh., Zoirov J.** Nazariy mexanika. “O`qituvchi”, T., 1981.

26.**Fayn A. M.** Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike. “Высшая школа”, M., 1978.

27. **Yablonskiy A. A.** Kurs teoreticheskoy mexaniki. “Высшая школа”, ч. I, 1971; ч. II, M., 1985.

28. **Yablonskiy A. A., Noreyko S. S., i dr.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. “Высшая школа”, M., 1985.

M U N D A R I J A

О Г Л А В Л Е Н И Е

C O N T E N T

Toshkent irrigatsiya va melioratsiya instituti

Mirsaidov Mirziyod Mirsaidovich

Baymuradova Lolaxon Ismailovna

Giyasova Nargiza Talibovna

NAZARIY MEXANIKA

Oliy o`quv yurtlari talabalari uchun o`quv qo`llanma.
Toshkent, «O'zbekiston», 2008, 230 bet, il. 212 ta.

Ma'sul muharrir: fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent Atajanov Baxtiyor.

Dizayner va sahifalovchi: Yuldashev Baxtiyor Shodmonovich.

Texhik muharrir: Xalmatova Hilola Talibovna

Bosishga ruxsat etildi: __________________
Bichimi 60x84x/1/16. Hajmi _____________ .
Adadi 50 nusxa. Buyurtma № ____________ .

Bahosi shartnoma asosida.

"O'zbekiston" nashriyot matbaa ijodiy uyi
bosmaxonasida chop etildi.
100129, Toshkent shahri, Navoiy ko'chasi – 30.