**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI**

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

# MATEMATIK ANALIZ

## (differensial tenglamalar)

**fanidan**

**O‘QUV QO‘LLANMA**

| | |
|---|---|
| **Bilim sohasi:** | **100 000 - Gumanitar** |
| **Ta’lim sohasi:** | **110 000 - Pedagogika** |
| **Bakalavriat yo‘nalishi:** | **5110100 –Matematika o‘qitish metodikasi** |

**Farg’ona 2019 yil**

**Mualliflar:**

**R .Turgunbayev** - TDPU, Matematik analiz kafedrasi professori

**K.Qodirov** - FarDU, Matematika kafedrasi dotsenti

**T.Bakirov** - FarDU, Matematika kafedrasi katta o‘qituvchisi

**Taqrizchilar:**

**Sh.Karimov** **-** FarDU, Matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari doktori,

**J.Mamajonov** -O’zbekiston Respublikasi Prezidenti xuzuridagi davlat boshqaruv Akademiyasi Farg’ona xududiy filiali direktori, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Ushbu o‘quv qo‘llanma pedagogika oliy ta’lim muassasalari«Matematika o‘qitish metodikasi» bakalavriat ta’lim yonalishining «Matematik analiz» fani dasturiga mos yozilgan bo‘lib, bunda matematik analizningdifferensial tenglamalar bo‘limidan nazariy materiallar, misol va masalalar, hamda yakka tartibdagi topshiriqlarberilgan. Qo‘llanmadan «Fizika va astronomiya o‘qitish metodikasi» bakalavriat ta’lim yonalishida tahsil olayatgan talabalar ham foydalanishi mumkin.

Данное пособие написано в соответствии с учебной программой предмета «Математический анализ» направления бакалавриата «Методика обучения математики» высших педагогических учебных заведений. В нём даны теоретические и задачные материалы, а также индивидуальные задания по разделу дифференциальные уравнениематематического анализа. Данное пособие могут использовать также студенты обучающиеся по направлений бакалавриата «Методика обучения физики и астрономии».

This manual was written in accordance with the program of the subject "Mathematical analysis" of the educational direction of the bachelor degree "Methods of teaching mathematics" of higher pedagogical educational institutions. It provides theoretical materials on such sections of mathematical analysis as differential equations, problems and examples, methods for solving basic problems. This manual can also be used by students studying at the undergraduate school course "Methods of teaching physics and astronomy."

# MUNDARIJA

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## CONTENT

## KIRISH

Pedagogika universitetlari va pedagogika institutlari matematika, fizika-matematika fakultetlari bakalavr talabalari uchun darslar, matematik analizdan tuzilgan dastur bo‘yicha turli o‘quv qo‘llanma va adabiyotlardan foydalanib olib boriladi.

O‘quv qo‘llanmada, mana shu ko‘p xillilikni bartaraf yetish, talabalar qiynalmasdan, bitta kitobdan foydalansalar mavzularni o‘zlashtirishlari osonlashishi hisobga olindi.

Ushbu o‘quv qo‘llanmapedagogika oliy ta’lim muassasalari matematika o‘qitishmetodikasi bakalavriat ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, “Matematik analiz” fan dasturiga mos yozilgan. O‘quv qo‘llanma birinchi tartibli differensial tenglamalar hamda yuqori tartibli differensial tenglamalar - bo‘limlaridan iborat va o‘n uchta paragrafdan tashkil topgan. Matematik analiz dasturida yuqorida aytilgan bo‘limlar bo‘yicha ko‘rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va amaliy materiallar keltirilgan.

O‘quv qo‘llanmani tayyorlashda ta’lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta’limning kasbiy yo‘nalganlik tamoyillariga, hamda mualliflar o‘ziningko‘p yillar davomida matematik analiz bo‘yicha o‘qigan leksiyalari va olib borgan amaliy mashg‘ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandi. Qo‘llanmaning tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo‘lib, shuningdek, shu paytgacha o‘zbek tilida mavjud bo‘lgan o‘quv qo‘llanma va o‘quv qo‘llanmalardan, horijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlardagi atamalar, tushunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

Nazariy va amaliy materiallarni o‘zlashtirishni ta’minlash maqsadida mavzular bo‘yich mashq va masalalar hamda mustaqil yechish uchun topshiriqlar berildi.

O‘quv qo‘llanmada teorema, ta’rif, misol, formulalar har bir paragraf bo‘yicha, rasmlar har bir bo‘lim uchun alohida nomerlangan.

*Mualliflar*

## I-BOB. BIRINCHII TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

### 1.1. Differensial tenglamaga olib keladigan masalalar. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalarga olib keladigan birinchi sodda masalalarni ko‘raylik.

1) XOY koordinata teksligida shunday uzluksiz egri Chiziq topingki, uning har bir $(x,y)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchakning tangensi, urinish nuqtasi abssissasining ikkilanganiga teng bo‘lsin.

Faraz qilaylik $y = f(x)$ izlangan egri chiziq bo‘lsin. Masalaning sharti bo‘yicha$y = f(x)$ egri chiziqning $M(x, f(x))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisienti$f'(x) = 2x$ ga teng.

Masalani yechish

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ko‘rinishdagi sodda tenglamani yechishga keltiriladi.

Bu tenglamaning yechimi $y = x^2 + C, C$ - ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi. Qo‘yilgan masala yechishning geometrik ma’nosi XOY koordinata tekisligida parabolalar oilasidan iborat.

2) O‘zgarmas tezlanish bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning harakat qonuniyatini toping.

Ma’lumki, S yo‘ldan $t$ vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosila $\frac{d^2s}{dt^2}$ tezlanishni beradi. Masalaning sharti bo‘yicha $\frac{d^2s}{dt^2} = a$, $a$- o‘zgarmas son.

Bu tenglamaning yechimi $s = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2$, $\quad C_1, C_2$ −ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

**Ta'rif**. *Erkli o'zgaruvchi* $x$, *noma'lum funksiya* $y$ *va uning* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ *hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga* ***differensial tenglama*** *deyiladi.*

Differensial tenglamani simvolik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya bir o'zgaruvchili funksiya bo'lsa, bunday tenglama **oddiy differensial tenglama** deyiladi. Agar tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya bir necha o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, bunday tenglama **xususiy hosilali differensial tenglama** deyiladi.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (3)$$

bu yerda $y = u(x, y)$, ko'rinishdagi tenglamalar xususiy hosilali differensial tenglamaga misol bo'la oladi.

Bu kursda biz faqat oddiy differensial tenglamalar bilan shug'ullanamiz.

Differensial **tenglamaning tartibi** deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi

Masalan, $y' - 2xy + 3 = 0$ tenglama birinchi tartibli differensial tenglamaga, $y'' - xy' = 0$ esa ikkinchi tartibli differensial tenglamaga misol bo'ladi.

Yuqoridagi (1) tenglama esa n tartibli differensial tenglamadir.

Differensial tenglama **yechimi** yoki **integrali** deb differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Masalan,

1) $xy' - y - x^2 = 0$ tenglamaning yechimlari $y = x^2 + Cx$ (C-ixtiyoriy o'zgarmas son) ko'rinishdagi funksiyalar bo'ladi. Yechimni tenglamaga qo'yib ishonch hosil qilish mumkin.

2) $y'' + 4y = 0$tenglamaning $y = sin2x, y = cos2x$ funksiyalar, umuman $y = C_1\, sin2x, y = C_2\, cos2x$, yoki $y = C_1\, sin2x + C_2\, cos2x$ ko‘rinishdagi funksiyalar $C_1, C_2$ ixtiyoriy o‘zgarmas miqdorlarning har qanday qiymatlarida berilgan differensial tenglamaga ko‘rsatilgan funksiyalarni qo‘yib ishonch hosil qilish mumkin.

**Birinchi tartibli differensial tenglama**ning umumiy ko‘rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4)$$

bo‘ladi. Agar (4) tenglamani y’ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, uni

$$y' = f(x, y) \qquad (5)$$

ko‘rinishda yozish mumkin va uni **hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama** deyiladi.

$x = x_0$ bo‘lganda $y$ funksiya berilgan $y_0$ songa teng bo‘lishi kerak degan shart **boshlang‘ich shart** deyiladi. Bu shart ko‘pincha

$$y|_{x=x_0} = x_0 \qquad (6)$$

yoki $y(x_0) = y_0$ ko‘rinishda yoziladi.

Birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalaridan biri boshlang‘ich (6) shartni qanoatlantiruvchi yechimni topishdan iborat. Bu masala **Koshi masalasi** deyiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamaning **umumiy yechimi** deb bitta ixtiyoriy $C$ o‘zgarmas miqdorga bog‘liq bo‘lgan hamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$y = \varphi(x, C)$

funksiyaga aytiladi:

a) Bu funksiya differensial tenglamani $C$ o‘zgarmas miqdorning har qanday konkret qiymatida ham qanoatlantiradi.

b) $x = x_0$ bo‘lganda $y = y_0$ ya’ni (6) boshlang‘ich shart har qanday bo‘lganda ham C miqdorning shunday $C = C_0$ qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi.

Differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko‘pincha $y$ ga nisbatan yechilmagan

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (7)$$

ko‘rinishdagi munosabatga kelib qoladi. Bu munosabatni $y$ ga nisbatan yechsak, umumiy yechimni hosil qilamiz. Lekin (7) ni $y$ ga nisbatan yechish hamma vaqt ham mumkin bo‘lavermaydi. Umumiy yechimni *oshkormas holda ifodalovchi* (7) ko‘rinishdagi tenglik differensial tenglamaning **umumiy integral**i deyiladi.

Ixtiyoriy C o‘zgarmas miqdorga ma’lum $C = C_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x, C)$ umumiy yechimdan hosil bo‘ladigan $y = \varphi\,(x, C_0)$ funksiya **xususiy yechim** deyiladi. Bu holda $F(x, y, C_0) = 0$ munosabat tenglamaning **xususiy integrali** deyiladi.

**Misol.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tenglamaning $y|_{x=2} = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni toping.

**Yechish**. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y = \frac{C}{x}$ bo‘ladi. Boshlang‘ich shartlarga asosan

$$1 = \frac{C}{2}, C = 2$$

Bu holda $y = \frac{2}{x}$ xususiy yechimni hosil qilamiz.

*Differensial tenglamaning umumiy yechimini yoki integralini topish amali differensial tenlamani integrallash deb ataladi.*

$y' = f(x, y)$tenglamaning umumiy yechimi $y = \varphi\,(x, C)\; XOY$ koordinata tekisligida **egri chiziqlar oilasi**ni ifodalaydi. Bu egri chiziqlar **integral egri chiziqlar** deyiladi.

Differensial tenglama va uning yechimi sodda **geometrik ma’no**ga ega.

Berilgan $y' = f(x, y)$ tenglama aniqlanish sohasining har bir nuqtasidan o‘tuvchi va abssissa o‘qi bilan $\alpha = arctgf(x, y)$ burchak tashkil qiluvchi to‘g’ri chiziqlar oilasiga differensial tenglamaning ***yo‘nalishlar maydoni*** deyiladi.

Har bir nuqtasida yo‘nalishlar maydoni bir xil bo‘lgan chiziq ***izoklina*** deyiladi. Izoklina tushunchasini yana quyidagicha izohlash mumkin:

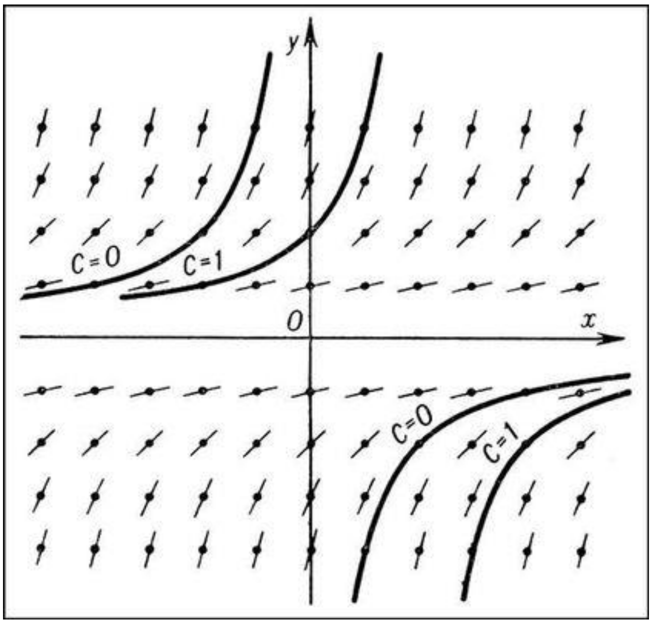
Bir hil yo‘nalishga ega bo‘lgan integral egri chiziqga o‘tkazilgan urinmalar urinish nuqtalarining geometrik o'rni **izoklina** deyiladi.

$y' = f(x,y)$ tenglamaning izoklinalar oilasi $f(x,y) = k$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

(7) tenglamaning $(x_0, y_0)$ nuqtadan o‘tuvchiintegral chiziqni tasvirlash uchun $k$ ning yetarlicha ko‘p qiymatlariga mos izoklinalar chiziladi. Har bir izoklina bo‘ylab mos burchak koeffitsienti $k$ ga teng shtrixlar yasaladi.

$(x_0, y_0)$ nuqtadan boshlab har bir izoklinani mazkur strixlarga parallel ravishda integral chiziq yasaladi.

1-rasmda mazkur yasashlar $\frac{dy}{dx} = y^2$ tenglama uchun amalga oshirilgan. Bu tenglamaning umumiy yechimi $y = \frac{1}{C-x}$ bo‘lishini tekshirish qiyin emas.




1-rasm

$y' = f(x,y)$ tenglamani ba’zi hollarda quyidagicha shakl almashtirib olish qo‘lay bo‘ladi. Uning o‘ng tomonini biror $N(x,y)$ funksiya ko‘paytiri ham bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(x,y) \cdot \frac{N(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

bu yerda $f(x,y)\cdot N(x,y)$ ko‘paytma $-M(x,y)$ orqali belgilangan. U holda (5) tenglamani

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (8)$$

simmetrik ko‘rinishda yozib olish mumkin.

Simmetrik ko‘rinishdagi $(8)$ differensial tenglamada $x$ va $y$ o‘zgaruvchilar teng kuchli bo‘lib, tenglama yechimini $y = \varphi(x,C)$, yoki $x = \psi(y,C)$, yoki oshkarmas $\Phi(x,y,C) = 0$ ko‘rinishda izlash mumkin.

**1.2. O‘zgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar. Bir jinsli differensial tenglamalar.**

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamani qaraymiz. $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiyalarni mos ravishda $(a;b)$ va $(c;d)$ oraliqlarda uzluksiz, hamda $(c;d)$ oraliqda $\varphi(y) \neq 0$ deb faraz qilamiz. (1) ni $\varphi(y)$ ga bo‘lib, $dx$ ga ko‘paytirib, quyidagi

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozamiz.

$\frac{1}{\varphi(y)}$ va $f(x)$ funksiyalar uzluksiz, demak boshlang‘ich funksiyalari mavjud:

$$\Phi(y) = \int \frac{dy}{\varphi(y)}, F(x) = \int f(x)dx$$

Demak, (2) ni ikkita differensialning tengligi deb qaraymiz:

$$d\Phi(y) = dF(x) \qquad (3)$$

Ikkita funksiya differensialining tehgligidan (bu yerda y o‘zgaruvchi x ning funksiyasi deb qaraladi) boshlang‘ich funksiyalar o‘zgarmas songa farq qiladi:

$$\Phi(y) = F(x) + C \qquad (4)$$

Yoki

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C \tag{5}$$

(4) yoki (5) (1) tenglamaning umumiy integrali bo‘ladi. Haqiqatan ham (4) munosabatni quyidagicha yozib olsak,

$$G(x, y) = F(x) - \Phi(y) - C = 0 \tag{6}$$

$G(x, y)$ funksiya oshkarmas funksiya haqidagi teorema shartlarini qanoatlantiradi: $G'_x = f(x), G'_y = -\frac{1}{\varphi(y)}$ funksiyalar $D = \begin{cases} a < x < b \\ c < y < d \end{cases}$ sohada uzluksiz va $G'_y \neq 0$. Shu sababli (6) tenglama $y$ ni $x$ o‘zgaruvchining uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyasi sifatida aniqlaydi va

$$y' = -\frac{G'_x}{G'_y} = f(x)\varphi(y),$$

shunday qilib, (6) munosabat bilan aniqlanadigan funksiya, demak (5) berilgan differensial tenglama yechimi bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan berilgan differensial tenglama yechimi bo‘ladigan har qanday $y$ funksiya differensial tenglamadan kelib chiqadigan (4) va (5) munosabatlarni qanoatlantirishi lozim. Shunday qilib, (5) haqiqatan ham umumiy integral bo‘ladi.

Bundan tashqari (4) dan ko‘rinadiki, D dan olingan har qanday $(x_0, y_0)$ boshlang‘ich shart uchun unga mos C bir qiymatli aniqlanadi, demak mos yechim yagona bo‘ladi.

($(x_0, y_0)$ nuqtadan $\Phi(y) = F(x) + \Phi(y_0) - F(x_0)$ integral chiziq o‘tadi.

$\Phi'_y = \frac{1}{\varphi(y)} \neq 0$ bo‘lganligi sababli $\Phi(y)$ teskarilanuvchi bo‘ladi. Teskari funksiyani $\Phi^{-1}$ bilan belgilab, izlanayotgan yechimni topamiz:

$$y = \Phi^{-1}\left(F(x) + \Phi(y_0) - F(x_0)\right)$$

Shunday qilib quyidagi teorema isbot bo‘ldi:

**Teorema.** Agar $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamada $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiyalarni mos ravishda $(a; b)$ va $(c; d)$ oraliqlarda uzluksiz, hamda $(c;d)$ oraliqda$\varphi(y) \neq 0$ bolsa, u holda bu tenglamaning umumiy integrali

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$$

bo‘ladi, bunda boshlang‘ich $x_0$, $y_0$ shartlar bo‘yicha tenglamaning yagona yechimi aniqlanadi, bu yerda $(x_0, y_0)D = \begin{Bmatrix} a < x < b \\ c < y < d \end{Bmatrix}$ to‘rtburchakning ixtiyoriy nuqtasi.

Differensial tenglamaning boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi integralini quyidagicha yozish mumkin: $\Phi(y) - \Phi(y_0) = F(x) - F(x_0)$, yoki

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Yuqorida olingan natijalar qaralayotgan sohadagi barcha nuqtalarda $\varphi(y) \neq 0$ degan faraz bilan olindi. Agar biror $y = \beta$ da $\varphi(\beta) = 0$ bo‘lsa, nima bo‘ladi? Bu holda (1) tenglama $y = \beta$ yechimga ega ekanligi bevosita ko‘rinib turibdi. Ammo $y = \beta$ da $\int \frac{dy}{\varphi(y)}$ integral mavjud emas, demak $y = \beta$ yechim umumiy yechimdan hosil (kelib chiqmaydi) bo‘lmaydi.

Shunday qilib, agar (1) tenglamada $\varphi(\beta) = 0$ bo‘lsa, u holda tenglama umumiy integraldan tashqari umumiy yechimdan kelib chiqmaydigan $y = \beta$ yechimga ega bo‘ladi.

$y = \beta$ yechim maxsus yechim bo‘lishi, yani uning har bir nuqtasida yagonalik sharti busilish, buzilmasligi alohida qaraladi.

(2) tipdagi

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (7)$$

differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning umumiy integrali yuqorida isbotlaganimizga ko‘ra $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$ bo‘ladi.

**Misol**. $xdx + ydy = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

**Yechish**. $\int xdx + \int ydy = C_1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = C^2 , \qquad C^2 = 2C_1$

Berilgan tenglamaning umumiy integrali $x^2 + y^2 = C^2$ bo‘lib, markazi koordinata boshida, radiusi C ga teng bo‘lgan konsentrik aylanalar oilasidan iborat.

*O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar*

Quyidagi

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (8)$$

ko‘rinishdagi tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ ifodaga bo‘lish yo‘li bilan uni o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

ya’ni, (4) ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

**Misol**. 1) Quyidagi$y' = xy + x + y + 1$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

**Yechish**. Berilgan tenglamani

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) + (y+1) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = (x+1)(y+1)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. $y \neq -1$ deb faraz qilib

$$\frac{dy}{y+1} = (x+1)dx \;\; \Rightarrow \;\; \ln|y+1| = \frac{(x+1)^2}{2} + lnC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y+1}{C} = \frac{(x+1)^2}{2} \;\; \Rightarrow \;\; y = Ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

umumiy yechim hosil bo‘ladi.

**Misol**. 2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ tenglamani yeching.

**Yechish**. Bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, o‘zgaruvchilarni ajratib, integrallaymiz.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow ln|y| = -ln|x| + lnC \Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

umumiy yechim hosil bo‘ladi.

*Bir jinsli differensial tenglamalar*

Agar λ ning har qanday qiymatida

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya $x$ va $y$ o‘zgaruvchilarga nisbatan $n$ o‘lchovli bir jinslifunksiya deyiladi.

**Misollar.** 1) $f(x, y) = xy - y^2$ funksiya ikki o‘lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2) = \lambda f(x, y), \qquad n = 2$$

2) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ funksiya nol o‘lchovli bir jinsli funksiya, chunki

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \lambda^0 f(x, y), n = 0$$

$$y' = f(x, y) \tag{9}$$

Differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya $x$ va $y$ ga nisbatan nol o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, (9) tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Bir jinsli differensial tenglamani quyidagicha yechamiz:

(9) tenglamadagi $f(x, y)$ funksiya nol o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lgani uchun $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ bo‘ladi. Bu ayniyatda $\lambda = \frac{1}{x}$ deb olsak $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$ bo‘ladi. Bu holda (9) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{10}$$

ko‘rinishga keladi. O‘zgaruvchilarni almashtiramiz

$$\frac{y}{x} = u, \qquad y = ux, \qquad y' = u'x + u$$

bo‘ladi.

$y, y'$ larni (10) ga qo‘ysak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$u'x + u = f(1, u) \Rightarrow \frac{xdu}{dx} = f(1, u)u \Rightarrow xdu = (f(1, u) - u)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Integrallagandan so‘ng $u$ o‘rniga $\frac{y}{x}$ qo‘ysak (7) tenglamaning umumiy integrali hosil bo‘ladi.

O‘zgaruvchilarni almashtirish natijasida o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keldik. Shu sababli, bu tenglama uchun isbotlangan teoremaga asoslanib quyidagini tasdiqlash mumkin: agar biror (a,b) intervalda $f(1,u)-u$ funksiya uzluksiz va nolga teng qiymat qabul qilmasa, u holda $G=\begin{cases} a<u<b, \\ x\neq 0 \end{cases}$ sohada $xdu=(f(1,u)-u)dx$ tenglama integrali mavjud, G sohaning har bir $(x_0,y_0)$ nuqtasidan yagona integral chiziq o‘tadi. Bu tasdiq berilgan (10) tenglama uchun ham o‘rinli.

**Teorema.** Agar $(a,b)$ intervalda $f(1,u)$ uzluksiz va $f(1,u)\neq u$ bo‘lsa, u holda (10) bir jinsli differensial tenglamaning umumiy integrali mavjud. Shuningdek x=0 to‘g‘ri chiziqni saqlamaydigan y=ax va y=bx to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan vertikal burchakda yotuvchi G sohaning har bir $(x_0,y_0)$ nuqtasidan yagona integral chiziq o‘tadi.

Agar $f(1,u)=u$ tenglamani qanoatlantiruvchi $u_0$ topilsa, u holda umumiy yechimdan kelib chiqmaydigan $y=u_0x$ yechim mavjud bo‘ladi.

**Misol.** $(x^2-y^2)dx+2xydy\ =0$ tenglama yeching.

**Yechish**. Bu tenglamani $y'$ ga nisbatan yechsak

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{2xy}, f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

$\frac{x^2-y^2}{2xy}$ nol o‘lchovli bir jinsli funksiya. Demak, berilgan tenglama bir jinsli differensial tenglama ekan. O‘zgaruvchilarini almashtiramiz:

$$\frac{y}{x}=u, \qquad y=ux, \ \ y'=u'x+u$$

Topilganlarni berilgan tenglamaga qo‘ysak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$u'x+u=\frac{u^2x^2-x^2}{2x^2u}=\frac{x^2(u^2-1)}{2x^2u}=\frac{u^2-1}{u},$$

$$\frac{xdu}{dx}=\frac{u^2-1}{u}-u \ \Rightarrow \ \frac{xdu}{dx}=-\frac{1+u^2}{2u} \ \Rightarrow \ \frac{xdu}{dx}+\frac{1+u^2}{2u}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2udu}{1+u^2}+\frac{dx}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2udu}{1+u^2}+\int \frac{dx}{x}=lnC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+u^2)+\ln|x|=lnC \quad \Rightarrow \quad x(1+u^2)=C$$

bunda $u$ o'rniga $\frac{y}{x}$ ni qo'ysak,

$$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=C \quad \Rightarrow \quad x+\frac{y^2}{x}=C \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=Cx$$

hosil bo'ladi. $x^2 \; + y^2 \; = Cx$ berilgan tenglamaning umumiy integralidir.

*Bir jinsli keltiriladigan differensial tenglamalar*

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{11}$$

ko'rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

Agar $c = c_1 = 0$ bo'lsa , (11) tenglama bir jinsli bo'lishi ravshan.

$c, c_1$ (yoki bulardan bittasi) noldan farqli bo'lsin. Bu holda o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$x = x_1 + h \, , y = y_1 + k$

Bu holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1} \tag{12}$$

bo'ladi. $x, y, \frac{dy}{dx}$ larni (12) ga qo'ysak

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c} \tag{13}$$

hosil bo'ladi. h va k ni

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \tag{14}$$

tengliklar o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz.

Bu holda (13) tenglama

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$

ko‘rinishdagi bir jinsli tenglamaga aylanadi. Bu tenglamani yechib, yana $x$ va $y$ larga qaytsak, (11) ning yechimini hosil qilamiz.

Agar (14) tenglamalar sistemasining determinanti

$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$bo‘lsa, u holda

$$ab_1 = a_1 b\,, \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda, a_1 = \lambda a\,, b_1 = \lambda b$$

bo‘ladi. Bu holda (11) tenglama

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \qquad (15)$$

ko‘rinishga keladi.

$$z = ax+by \qquad (16)$$

almashtirish yordamida berilgan tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi. Haqiqatan ham

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

Bundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \qquad (17)$$

hosil bo‘ladi. (16), (17) larni (15) ga qo‘ysak

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

ko‘rinishdagi o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo‘lamiz.

(11) tenglamani integrallashda foydalanilgan usul

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \qquad (*)$$

tenglamani integrallashda ham tatbiq etiladi.

**1-misol** .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1} \qquad (18)$$

tenglamani yeching.

**Yechish.** O‘zgaruvchilarni almashtirami z:$x = x_1 + h$ , $y = y_1 + k$

Bu holda quyidagiga

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1} \tag{19}$$

ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} h + k - 3 = 0, \\ h - k - 1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, $h = 2, k = 1$ larni topamiz.

Demak, $x = x_1 + 2$ , $y = y_1 + 1$ larni (19) tenglamaga qoysak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} \tag{20}$$

(20) tenglamabir jinsli tenglamadir. $\frac{y_1}{x_1} = u, y_1 = ux_1, y_1' = u'x_1 + u$ larni (20) ga qo‘ysak

$$\frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglamani integrallab

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x_1| + \ln|C|$$

$$arctgu = ln\left|Cx_1\sqrt{1 + u^2}\right| \Rightarrow Cx_1\sqrt{1 + u^2} = e^{arctgu}$$

hosil bo‘ladi. $u$ o‘rniga $\frac{y_1}{x_1}$ni qo‘ysak $C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}}$ hosil bo‘ladi. Nixoyat $x$ va $y$ o‘zgaruvchilarga o‘tib $(x_1 = x - 2, y_1 = y - 1)$, berilgan tenglamaning umumiy integralini topamiz:

$$C\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}$$

**2-misol**.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5} \tag{21}$$

tenglamani yeching.

**Yechish**. Bu tenglamani $x = x_1 + h,\ y = y_1 + k$ almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga keltirib bo‘lmaydi. Chunki, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Berilgan tenglamani $2x + y = z$ almashtirish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin.

$$y' = z' - 2$$

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

Hosil bo‘lgan tenglamani yechimi

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C$$

bo‘ladi. $z = 2x + y$ ekanligini hisobga olsak berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$10y - 5x + 7ln|10x + 5y + 9| = C$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

### 1.3.Chiziqli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi

Noma‘lum funksiya va uning hosilasigan isbatan chiziqli bo‘lgan

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglama *chiziqli differensial tenglama* deyiladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ biror $(a, b)$oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar. Agar $Q(x) = 0$ bo‘lsa, (1)tenglama *bir jinsli*, aksholda *bir jinsli bo‘lmagan* chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Dastlab

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

bir jinsli chiziqli differensial tenglamani yechish bilan shug’ullanamiz.

Ravshanki, bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘ladi. Uni integrallaymiz:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Leftrightarrow ln|y| = -\int P(x)dx + ln|C| \Leftrightarrow ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx.$$

Bundan $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

Boshlang‘ich $x_0, y_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechim quyidagicha yozilishi mumkin:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \quad (2)$$

Bunday yechim yagona bo‘ladi.

Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama asosan 2 ta usul bilan yechilishi mumkin. Bu usullar mos ravishda *Bernulli*[1] *va Lagranj*[2] *usullari* deb yurutiladi.

**a) Lagranj usuli.**

Dastlab bir jinsli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

tenglamaning $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ yechimi topiladi.

Bundan keyin C parametrni $x$ o‘zgaruvchining funksiyasi deb o‘linadi va (1) tenglamaning yechimi

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (3)$$

ko‘rinishda qidiriladi.

Ravshanki,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x))$$

(1) ga qo‘yamiz:

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

va natijada $C(x)$ ga nisbatan tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

---

[1]Yakob Bernulli (1654-1705) – sveytsariyalik matematik
[2]Lagranj JozefLui (1736-1813) – fransiyalik matematik

Bundan

$$dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \qquad (4)$$

$C(x)$ ni (3) ga qo‘yib

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right)$$

umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

Boshlang‘ich $x_0, y_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topish uchun bir jinsli tenglamaning (2) yechimidagi $y_0$ o‘rniga (4) munosabatdan aniqlanadigan va $x_0$ da $y_0$ qiymat qabul qiladigan $C(x)$ funksiyani qoyishimiz kerak. Bunday funksiya faqat bitta:

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}dx + y_0.$$

Bu funksiyani (2) ga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)dx} \cdot \left( \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)dx}dx + y_0 \right)$$

Quyidagi teorema isbotlandi:

**Teorema.** $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ chiziqli differensial tenglama, bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar $(a, b)$ intervalda uzluksiz, kvadraturalarda ifodalanadigan umumiy yechimga ega; shuningdek $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan yo‘lakning har bir nuqtasidan bu tenglamaning yagona integral chizig‘i o‘tadi.

**b) Bernulli usuli.**

Bu usulda noma’lum funksiya $y = uv$ ko‘rinishda ifodalaniladi, bu yerda $u$ funksiya

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0 \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni

$$u = C_1 e^{-\int P(x)dx} \qquad (6)$$

$y' = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ hosilani berilgan (1) tenglamaga qo‘yib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x) \iff u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x).$$

Bundan (5) va (6) ni inobatga olsak, noma‘lum $v$ funksiya uchun

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x) \overset{(6)}{\Rightarrow} C_1 e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{dv}{dx} = Q(x) \Rightarrow C_1 dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

Integrallab $v$ ni topamiz:

$$C_1 v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \Rightarrow v = \frac{1}{C_1}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

Natijada

$$y = uv = C_1 e^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C_1}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

yani

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$$

Endi biz chiziqli tenglamaga olib kelinadigan muhim tenglamani o‘rganamiz.

$n \neq 0$va$n \neq 1$ bolsin.

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n, \quad (n \neq 0;1) \tag{7}$$

qo‘rinishdagi tenglama *Bernulli tenglamasi* deb yuritiladi.

$z = \frac{1}{y^{n-1}}$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasi chiziqli tenglamaga keltirishini ko‘rsatamiz.

Buning uchun (7) tenglamaning ikkala tarafini $y^n$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x).$$

Bunda

$$z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$$

munosabatni inobatga olib, $z$ ga nisbatan quyidagi chiziqli tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{z'}{n-1} + P(x)z = Q(x) \Rightarrow z' - (n-1)P(x)z = -(n-1)Q(x).$$

**1.4.To‘liq differensialli tenglama**

Agar

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning chap tomonini birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya’ni

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU(x,y) \qquad (2)$$

bo‘lsa, (1) tenglama *to‘liq differensialli tenglama* deyiladi.

Buholda uni $dU(x,y) = 0$ ko‘rinishda yozish mumkin va bu yerdan $U(x,y) = C$ umumiy integralga ega bo‘lamiz.

Bu yerda $P(x,y)$ va $Q(x,y)$funksiyalar $D$ sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uzluksiz $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo’lishi talab qilinadi.

U holda ushbu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ differensial ifoda birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lishiuchun $D$ sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (3)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Ifodani (2) bilan solishtirsak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) \qquad (4)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

Endi $U$ funksiyani topish uchun $y$ ni fiksirlab (4) ni integrallaymiz:

$$U = \int P(x,y)dx + C(y).$$

$\mathrm{C}(y)$ ni topish uchun bu tenglikni $y$ bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + C'(y).$$

Bu yerdan

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx.$$

Demak,

$$C(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy + C$$

va

$$U = \int P(x,y)dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy + C.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy integrali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\int P(x,y)dx + \int\left( Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx \right)dy = C \qquad (5)$$

Aslini olganda konkret misollarni yechishda tayyor (5) formuladan foydalanmasdan, umumiy holdagi kabi yo‘l tutish maqsadga muvofiq.

**Izoh**. Ayrim hollarda (1) tenglamani hadlarini guruhlash bilan $dU$=0 ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun u

$$(M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy) + (M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy) +$$
$$+ ... + (M_k(x,y)dx + N_k(x,y)dy) = 0 \qquad (6)$$

ko‘rinishga keltiriladi.

Bunda shunday $U_1(x,y), U_2(x,y), \dots, U_k(x,y)$ funksiyalar topiladiki, ular uchun

$$M_1(x,y)dx + N_1(x,y)dy = dU_1(x,y),$$
$$M_2(x,y)dx + N_2(x,y)dy = dU_2(x,y),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_k(x,y)dx + N_k(x,y)dy = dU_k(x,y)$$

munosabatlar bajariladi.

U holda (6) ning umumiy integrali $U_1(x,y)+U_2(x,y)+\cdots+\ U_k(x,y)=C$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

**Teorema.** $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ tenglama quyidagi shartlarda $D=\begin{Bmatrix}a<x<b\\c<y<d\end{Bmatrix}$ sohada: 1) $P(x,y),Q(x,y),\ \frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ uzluksiz, 2) $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 3) $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ bir vaqtda nolga aylanmasa, u holda bu tenglama kvadraturalarda ifodalanadigan umumiy integralga ega bo‘ladi, shuningdek $y_0=y(x_0)$ boshlangich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim yagona bo‘ladi (bu yerda $(x_0,y_0)$ nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi).

$y_0=y(x_0)$ boshlangich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim quyidagi formulalarning biri yordamida topilishi mumkin:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=0$$

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=0$$

### 1.5.Integrallovchi ko‘paytuvchi

Agar

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

tenglama uchun

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (2)$$

(2) shart bajarilmasa, u holda (1) differensial tenglama to‘liq differensialli bo‘lmaydi. Biroq bu tenglamani tegishli $\mu(x,y)$ funksiyaga ko‘paytirish bilan to‘liq differensialli tenglamaga keltirish mumkin. Bunday funksiya berilgan differensial tenglama uchun *integrallovchi ko‘paytuvchi* nomi bilan yuritiladi.

$\mu(x,y)$ uchun (3) dan

$$\frac{\partial(\mu(x,y)P(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)Q(x,y))}{\partial x}\Rightarrow Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad (3)$$

Shatni hosil qilamiz.

Faqat $x$ ga bog'liq bo'lgan $\mu(x)$ integrallovchi ko'payruvchi uchun

$\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$ va (3) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{dln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

Demak,

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx} \tag{8}$$

Faqat $y$ ga bog'liq bo'lgan $\mu(y)$ integrallovchi ko'payruvchi uchun huddi shunday

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy}$$

ko'rinishni topamiz.

**Teorema.** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ tenglamaning faqat x o'zgaruvchiga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchisi mavjud bo'lishi uchun $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ifoda x ning funksiyasi bo'lishi zarur va yetarli. Bu holda integrallovchi ko'paytuvchisi kvadraturalarda ifodalanadi va quyidagi formuladan topilishi mumkin:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$$

**Teorema.** $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ tenglamaning faqat $y$ o'zgaruvchiga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchisi mavjud bo'lishi uchun $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ifoda x ning funksiyasi bo'lishi zarur va yetarli. Bu holda integrallovchi ko'paytuvchisi kvadraturalarda ifodalanadi va quyidagi formuladan topilishi mumkin:

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dx}$$

### 1.6. Birinchi tartibli differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. Maxsus nuqtalar va maxsus yechimlar

Aytaylik $f(x,y)$ funksiya $D$ sohada aniqlangan bo‘lsin.

**Ta’rif.** Agar ixtiyoriy $(x,y_1)$, $(x,y_2)\in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2| \tag{1}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya $D$ sohada $y$ bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, bu yerda $L$ –o‘zgarmas son.

**Teorema**. Agar $f(x,y)$ funksiya $D$ sohada uzluksiz, $y$ o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa va $(x_0,y_0)$ nuqta D sohaning ixtiyoriy ichki nuqtasi bo‘lsa, u holda

$$y'=f(x,y) \tag{2}$$

differensial tenglama yetarlicha kichik $[x_0-h,x_0+h]$ kesmada $x_0,y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega bo‘ladi.

**Isbot.** Yetarlicha kichik $[x_0-h,x_0+h]$ kesmani quyidagicha tanlab olamiz: D sohani chegaralangan va yopiq deb qarashimiz mumkin (aks holda shu sohaning qismi bo‘lgan va $(x_0,y_0)$ nuqtani saqlaydigan chegaralangan va yopiq $\overline{D}$ sohani qaraymiz).

Aytaylik, M soni $|f(x,y)|$ funksiyaning D sohadagi aniq yuqori chegarasi bo‘lsin. $h>0$ uchun quyidagi shartlarni qo‘yamiz:

$$h<\min\left(\frac{1}{M},\frac{1}{L}\right) \tag{3}$$

$(x_0,y_0)$ nuqtadan (a) $y-y_0=M(x-x_0)$ va (b) $y-y_0=-M(x-x_0)$ to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. $h>0$ son yana quyidagi shartni qanoatlantirishini - $x=x_0-h,\ x=x_0+h$ to‘g‘ri chiziqlar hamda (a) va (b) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan T soha (umumiy uchga ega bo‘lgan ikkita uchburchakdan iborat) D sohada to‘liq yotishini talab qilamiz (1-rasm).

Ravshanki, izlanayotgan yechimning grafigi $(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tib, T sohada yotadi, chunki bu grafikka o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti $f(x,y)$ ga teng va $|f(x,y)|\leq M$.

**Lemma (ekvivalentlik lemmasi).** Agar $y=\varphi(x)$funksiya $x_0$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror J intervalda aniqlangan bo‘lib (2) tenglamaning $x_0,y_0$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya J intervalda

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (4)$$

integral tenglamaning yechimi bo‘ladi va aksincha, agar $y = \varphi(x)$ funksiya (4) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya (2) tenglamaning $x_0, y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘ladi.

**Isbot.** $y = \varphi(x)$funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lganligi uchun

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f\big(x, \varphi(x)\big)$$

ayniyat o‘rinli bo‘ladi. Bu ayniyatni $x_0$ dan $x$ gacha integrallaymiz $(x_0, x \in J)$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt$$

(5) shartdan foydalansak,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, $y = \varphi(x)$ funksiya(4) tenglamaning yechimi.

Endi teskarisiga isbotlaymiz, $y = \varphi(x)$ funksiya (4) ning yechimi bo‘lsa, $\varphi(x)$ ni (4) ga qo‘yamiz va undan hosila olamiz.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt\right) = 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt\right) = f\big(x, \varphi(x)\big).$$

Demak, $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$ bu tenglik $y = \varphi(x)$ funksiya (2) tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatadi. Lemma isbot bo‘ldi.

Shu sabali (2) tenglama o‘rniga unga ekvivalent bo‘lgan

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$$

integral tenglama yechiminig mavjudligi va yagonaligini ko‘rsatsak, teorema isbotlangan bo‘ladi. (4) integral tenglama yechimni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan izlaymiz. $|x - x_0| \leq h$ intervalda aniqlangan quyidagi funksiyalar ketma-ketligini tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{l} y_0(x) = y_0, \\ y_1(x) + y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \\ y_2(x) + y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) + y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Bunday funksiyalar ketma-ketligi mavjud ekanligini ko‘rsatish uchun (5) dagi har bir integralning mavjudligi ko‘rsatiladi.

Shunday qilib, ko‘rilgan $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi$|x - x_0| \leq h$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Bu funksional ketma-ketlikni tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlanadi. Uning uchun ushbu funksional qatorni qaraladi:

$$y_0 + (y_1(x) - y_0) + \big(y_2(x) - y_1(x)\big) + \cdots + \big(y_n(x) - y_{n-1}(x)\big) + \cdots \quad (6)$$

Uning $n$ - xususiy yig‘indisi $S_n(x) = y_n(x)$.

$$1 + Lh + (Lh)^2 + \ldots + (Lh)^{n-1} + \ldots \qquad (7)$$

(7) qator (6) uchun majorant qator bo‘lishi ko‘rsatiladi.

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left( y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)dt \right),$$

$$Y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt \qquad (8)$$

(8) - izlanayotgan yechim.

Keyin esa yagonaligi isbotlanadi.

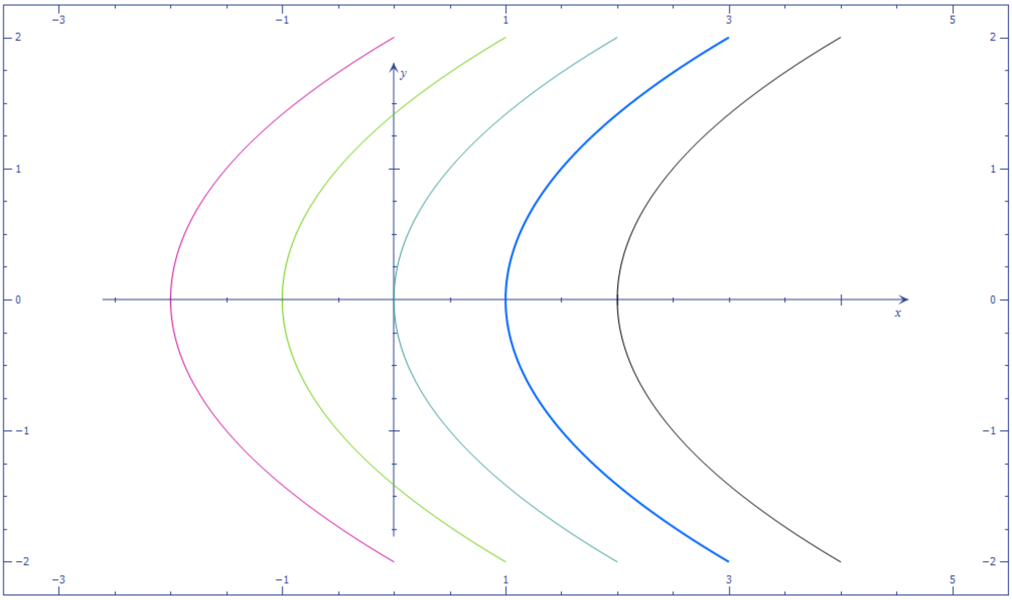
*Maxsus nuqta va maxsus yechimlar*

**Ta'rif.** Differensial tenglama yechimining yagonaligi buziladigan (ya'ni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim yoq yoki bu shartlarni bittadan ko'p yechimlar qanoatlantiradi) $D$ sohaning $(x_0, y_0)$ nuqtasi berilgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi deyiladi.

Teorema shartlari yagona yechimning mavjud bo'lishi uchun yetarli bo'lib, zaruriy emas.Teorema shartlari bajarilmaydigan nuqtalar maxsus nuqta bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

Masalan,

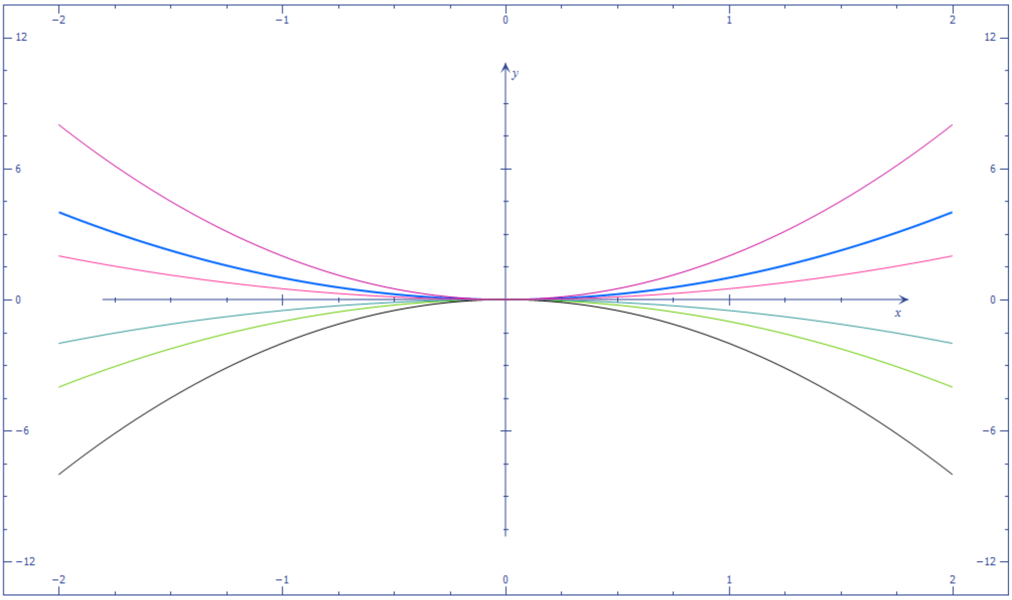
**Misol.** 1) $y' = 1/y$ tenglama uchun teorema shartlari $(x_0, 0)$ nuqtalarda bajarilmaydi, ammo bu nuqtalar maxsus nuqta emas. Bu nuqtalardan $y^2 = 2(x - x_0)$ integral chiziqlar o'tadi (2-rasm).




**Misol. 2)**

$$y' = \frac{2y}{x}, y = Cx^2$$

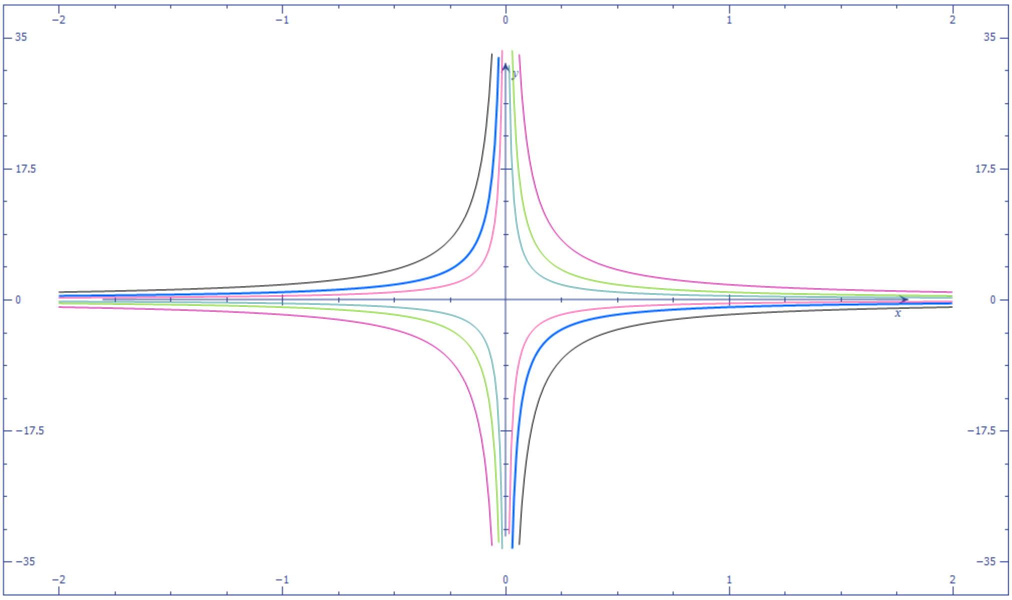
(0,0)-tugun




**Misol. 3)**

$$y' = -\frac{y}{x}, xy = C$$

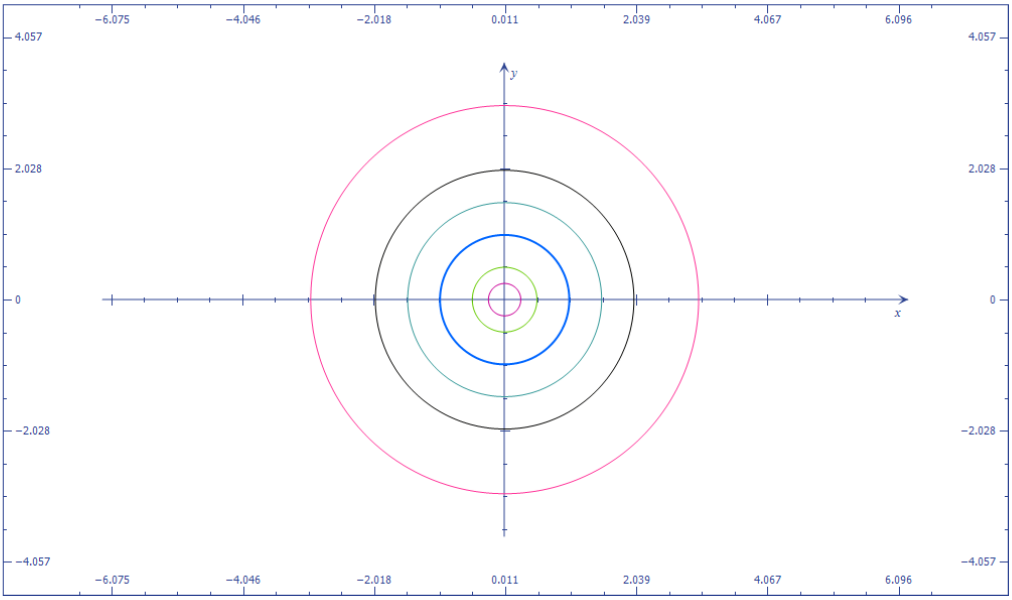
(0,0)-egar




**Misol. 4)**

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad x^2 + y^2 = C$$

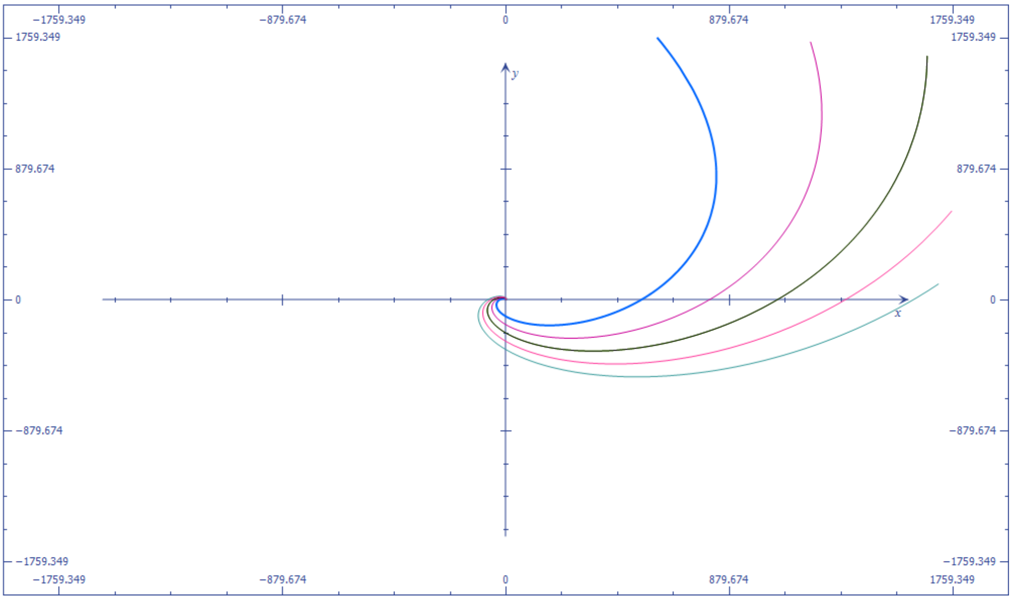
(0,0)-markaz




**Misol. 5)**

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad \rho = Ce^{\theta}$$

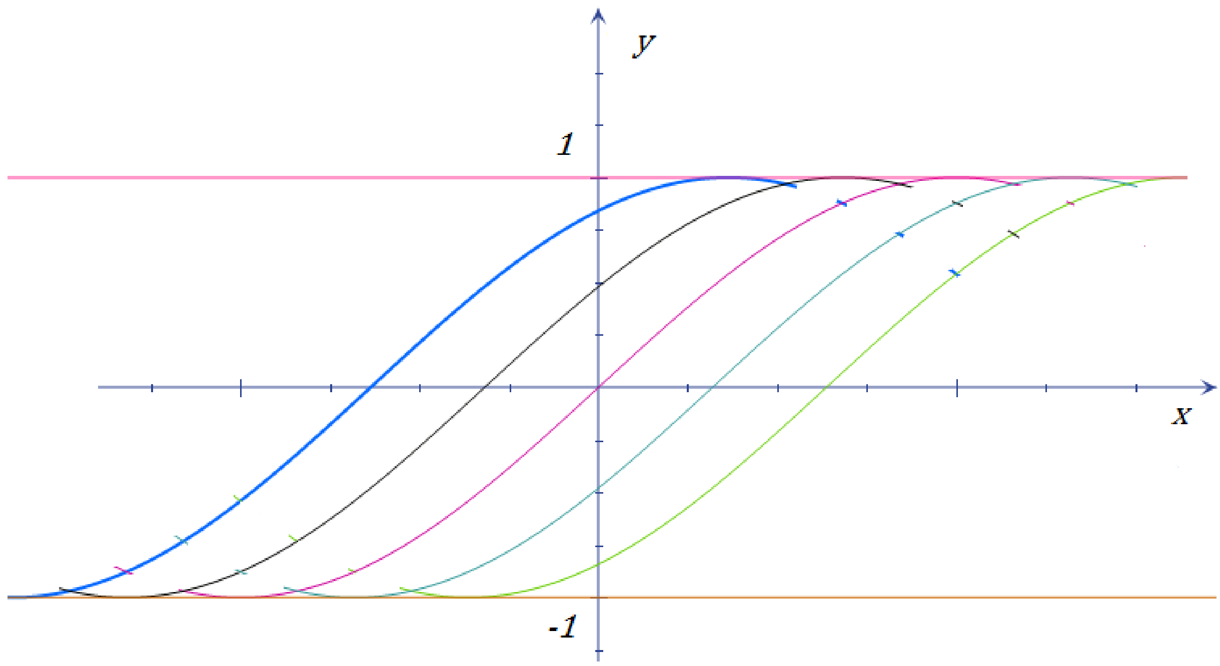
(0,0)-fokus




Differensial tenglamaning umumiy yechimidan tashqari, undan parametrning hech qanday qiymatlarida kelib chiqmaydigan yechimlari mavjud bo‘lishi mumkin.

**Ta’rif**. Agar $y = \varphi(x)$ yechimning har bir nuqtasi differensial tenglamaning maxsus nuqtasi bo‘lsa, u maxsus yechim deyiladi.

Masalan, $y' = \sqrt{1-y^2}$ tenglamaning $y = \sin(x + C), -\frac{\pi}{2} \leq x + C \leq \pi/2$ yechimidan tashqari C ning hech bir qiymatida hosil bo‘lmaydigan $y = 1$ va $y = -1$ yechimlari mavjud.




$y = 1$ va $y = -1$ maxsus yechimlar

Yuqoridagi metod (ketma-ket yaqinlashish metodi) differensial tenglamalarni taqribiy yechishning samarali usuli hisoblanadi.

**Misol.** $y' = x^2 + y^2$ tenglamaning $x_0 = 0, y_0 = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

**Yechish.** $y = \int_0^x (x^2 - y^2)dx$ integral tenglamaga o‘tamiz.

$y_0 = 0,$

$$y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 - \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}\right)^2\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} - \frac{x^{15}}{63^2 \cdot 15},$$

……………………………

Agar tenglamani $|x| \le 1, |y| \le 1$ kvadratda qaraydigan bo‘lsak, u holda $|f'_y| = |-2y| \le 2, \max|x^2 - y^2| = 1$, va $h = min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Yuqoridagi ketma-ketlik $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kesmada yaqinlashadi.

### 1.7. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Lagranj va Klero tenglamalari. Izogonal va ortogonal traektoriyalar

Bizga hosilaga nisbatan yechilmagan

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

differensial tenglama berilgan bo‘lsin.

Agar (1) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u holda uni hosilaga nisbatan yechib integrallaymiz.

**Misol.** $yy'^2 + (x - y)y' - x = 0$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Berilgan tenglamani $y'$ ga nisbatan yechamiz:

$$y' = \frac{x - y \pm \sqrt{(x - y)^2 + 4xy}}{2y} \Rightarrow y' = 1,\ y' = -\frac{x}{y}.$$

Bundan $y = x + C,\ y^2 + x^2 = C.$

Umuman aytganda, (1) tenglamani $y$ ga nisbatan har doim ham yechish mumkin bo‘lavermaydi.

Shunday bo‘lishiga qaramay, (1) tenglamani integrallash masalasini **parametr kiritish metodi** bilan hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani integrallash masalasiga keltirish mumkin.

Quyida (1) tenglamaning ayrim xususiy hollarini qarab chiqamiz.

1) $y$ ga nisbatan yechilgan va $x$ qatnashmagan $y = f(y')$tenglama.

Bu holda $y' = p$deb $p$ parametrni kiritsak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y = f(p);\ y' = f'(p)\frac{dp}{dx},$$

ya’ni

$$p = f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Bu tenglamani integrallaymiz:

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp \Rightarrow x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Bunda umumiy yechimning parametrik shaklini yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases} x = \int \frac{f'(p)}{p}dp + C, \\ \quad y = f(p). \end{cases}$$

Ayrim hollarda umumiy yechim ushbu sistemadan $p$ parametrni yo‘qotish orqali topiladi.

**Misol.** $y = y' \, lny'$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Berilgan tenglama $y = f(y')$ ko‘rinishdagi tenglama. $y' = p$ desak, $y = plnp$ ga ega bo‘lamiz.

Bu tenglamaning ikkala tomonini $x$ bo‘yicha differensiallasak, $y' = (\ln p + 1)\frac{dp}{dx^2}$, yoki $y' = p$ bo‘lgani uchun $p = (lnp + 1)\frac{dp}{dx}$ hosil bo‘ladi. So‘ngi tenglamadan $x$ ni topamiz:

$$dx = (lnp + 1)\frac{dp}{p} \;\; \Rightarrow \;\; x = \int (lnp + 1)d(lnp + 1) = \frac{(lnp + 1)^2}{2} + C.$$

Umumiy yechim bunday yoziladi:

$$\begin{cases} x = \frac{(lnp + 1)^2}{2} + C, \\ \quad y = plnp. \end{cases}$$

2) $x$ ga nisbatan yechilgan va $y$ qatnashmagan $x = f(y')$ tenglama.

Huddi yuqoridagidek, bu holda $y' = p$ deb $p$ parametrni kiritamiz. Natijada $x = f(p) \;\; \Rightarrow \;\; dx = f'(p)dp, \; y' = p \; \Rightarrow \; dy = pdx \; \Rightarrow \; pf'(p)dp$ munosabatlarga ega bo‘lamiz. Bulardan umumiy yechimning parametrik shaklini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y = \int pf'(p)dp + C, \\ \quad x = f(p). \end{cases}$$

**Misol.** $x = y' + siny'$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** U $x = f(y')$ ko‘rinishdagi tenglama. Bu yerda $y' = p$ deb olamiz, u holda $x = p + sinp$. Endi $\frac{dy}{dx} = p$ tenglikni $dy = pdx$ kabi yozib olamiz va$dx = (1 + cosp)dp$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$\int dy = \int pdx = \int p(1 + cosp)dp = \frac{p^2}{2} + \int pcospdp$$
$$= \frac{p^2}{2} + psinp - \int sinpdp = \frac{p^2}{2} + psinp + cosp + C.$$

Demak, $y = \frac{p^2}{2} + psinp + cosp + C$.

Umumiy yechim quydagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = p + sinp, \\ y = \dfrac{p^2}{2} + psinp + cosp + C \end{cases}$$

3) $x$ (yoki $y$) qatnashmagan,biroq $y$ (yoki $x$) ganisbatan yechilganbo‘lishi shart bo‘lmagan tenglama. Bu holda tenglamani ushbu

$$F(y, y') = 0 \qquad (2)$$

yoki

$$F(x, y') = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Shu bilan birga tenglamadan $y$ ni ((2) tenglamadan) yoki $x$ ni ((3) tenglamadan), shuningdek, $y' = p$ ni $t$ parametr orqali ifodalash mumkin deb faraz qilamiz. 1) va 2) hollardagi kabi bu yerda ham tenglamaning umumiy yechimi parametrik shaklda hosil bo‘ladi.

Masalan, $F(y, p) = 0$ tenglama bo‘lgan holni ko‘raylik. $y = \phi(t)$ deb, tenglamadan $p = \psi(t)$ ni yoki, aksincha, $p = \psi(t)$ tenglamadan $y = \phi(t)$ ni topdik deb faraz qilaylik. U holda bir tomondan, $dy = pdx = \psi(t)dx$, ikkinchi tomondan $dy = \phi'(t)dt$. Bu $dy$ uchun ikkala ifodani taqqoslab, $\psi(t)dx = \phi'(t)dt$ ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$dx = \frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\phi'(t)}{\varphi(t)}dt + C$$

Umumiy yechim parametrik shaklda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\phi'(t)}{\varphi(t)} dt + C, \\ \quad y = \phi(t). \end{cases}$$

**4) Lagranj tenglamasi.**

Ushbu

$$y = xf(y') + \varphi(y') \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi.

Uni yechish uchun $y' = p$ deb parameter kiritamiz:

$$y = xf(p) + \varphi(p) \qquad (5)$$

ko‘rinishda yoziladi.

$dy = pdx$ ni inobatga olib (5) ni ikkala tarafini $x$ bo‘yicha differensiallasak

$$p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \qquad (6)$$

hosil bo‘ladi. $p - f(p) \not\equiv 0$ deb, (6) ni $\frac{dx}{dp}$ ga nisbatan yechib olamiz:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{f'(p)}{p - f(p)}x + \frac{\varphi'(p)}{p - f(p)} \qquad (7)$$

Hosil bo‘lgan tenglama $x$ va $\frac{dx}{dp}$ ga nisbatan chiziqli tenglama bo‘ladi. Demak,

$$x = \Phi(p, C) \qquad (8)$$

ko‘rinishdagi umumiy yechimga ega bo‘ladi. (8) ni (5) ga qo‘yib, $y$ ni $p$ va $C$ orqali ifodalaymiz:

$$y = \Phi(p, C)f(p) + \varphi(p) \equiv \Psi(p, C).$$

Bu (8) bilan birgalikda Lagranj tenglamasining parametrik ko‘rinishdagi ymumiy yechimini beradi:

$$\begin{cases} x = \Phi(p, C), \\ y = \Psi(p, C). \end{cases} \qquad (9)$$

Agar (9) tenglamalar sistemasidan $p$ parametrni yo‘qotish mumkin bo‘lsa, u holda odatdagi $F(x, y, C) = 0$ umumiy integralni hosil qilamiz.

Tenglamaning umumiy yechimidan tashqari, tenglamaning umumiy yechimidan kelib chiqmaydigan yechimi ham bo‘lishi mumkin. Qisqa qilib aytganda, agar $p - f(p)$ ifoda $p = \gamma$ da nolga teng bo‘lsa, (5) dan p ni yo‘qotib $(p = \gamma)$,

$$y = xf(\gamma) + \varphi(\gamma) \qquad (10)$$

yechimni hosil qilamiz.

**Misol.** $y = xy'^2 + y'^2$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Bu Lagranj tenglamasidir. $y' = p$ bo‘lsin.

U holda $y = xp^2 + p^2$ yoki $y = (x+1)p^2$.

Buni $x$ bo‘yicha differensiallaymiz:

$$y' = p^2 + 2(x+1)p\frac{dp}{dx}.$$

$y' = p$ ekanini e’tiborga olib, so‘ngra hosil bo‘lgan tenglikning ikkala tomonini $p$ ga qisqartirib, o‘zgaruvchilarni ajratsak, quydagilarga ega bo‘lamiz:

$$p = p^2 + 2(x+1)p\frac{dp}{dx} \Rightarrow 1 - p = 2(x+1)p\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

bu yerdan

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + 2lnC \Rightarrow x = \frac{C^2}{(1-p)^2} - 1.$$

Demak, umumiy yechim parametrik shaklda ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C^2}{(1-p)^2} - 1, \\ y = (x+1)p^2 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} x = \dfrac{C^2}{(1-p)^2} - 1, \\ y = \dfrac{C^2 p^2}{(1-p)^2}. \end{cases} \qquad (11)$$

(11) dan $p$ parametrni yo‘qotamiz. Buning uchun

$$p^2 = \left(1 - (1-p)\right)^2 = \left(1 - \frac{C}{\sqrt{x+1}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{x+1} - C\right)^2}{x+1}$$

Ifodani topamiz va uni $y = (x+1)p^2$ tenglamaga qo‘yamiz.

Shunday qilib, umumiy yechim quydagicha bo‘ladi:

$$y = \left(\sqrt{x+1} - C\right)^2$$

5) Lagranj tenglamasining xususiy holi bo‘lgan

$$y = xy' + \varphi(y') \qquad (12)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga *Klero tenglamasi* deyiladi.

$y' = p$ deb belgilash kiritamiz, u holda

$$y = xp + \varphi(p)$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \left(x + \varphi'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Quyidagi hollar vujudga kelishi mumkin:

$p = C$ yoki $x + \varphi'(p) = 0$

Birinchi holda bu tenglamaning umumiy yechimi $y = Cx + \varphi(C)$ bir parametrli integral egri chiziqlar oilasidan iborat bo‘ladi

Ikkinchi holda

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p), \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

parametrik ko‘rinishdagi yechimni hosil qilamiz.

(13) sistema maxsus yechimni beradi.

**Misol.** $y = xy' - {y'}^2$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Bu Klero tenglamasidir.

Umumiy yechimni bevosita tenglamadan $y'$ni $C$ ga almashtirib topamiz:

$y = Cx - C^2$

Bundan tashqari, bu to‘g’ri chiziqlarning o‘ramasi (13) ga asosan

$$\begin{cases} x = 2C, \\ y = Cx - C^2 \end{cases}$$

bo‘lib, u ham Klero tenglamasining integrali bo‘ladi. Bundan $C$ ni yo‘qotib maxsus yechim $y = \frac{x^2}{4}$ ni hosil qilamiz.

*Izogonal va ortogonal trayektoriyalar*

Bir parametrli yassi silliq chiziqlar oilasi

$$\Phi(x, y, a) = 0 \qquad (14)$$

bu yerda $a$–parametr, tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Shu chiziqlar oilasining har bir chizig’ini o‘zgarmas $\alpha$ burchak bilan kesib o‘tuvchi chiziq berilgan oilaning ***izogonal trayektoriyasi*** deyiladi.

Hususan, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo‘lganda izogonal trayektoriya ***ortogonal trayektoriya*** deyiladi.

Egri chiziqlar oilasi o‘zining

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (15)$$

differensial tenglamasi bilan berilganda izogonal trayektoriyalar oilasining differensial tenglamasini topish uchun (15) tenglamada $y'$ ni $\frac{y' \mp k}{1 \pm k y'}$ bilan almashtirish lozim, bu yerda $k$-egri chiziqlarning trayektoriyalar bilan kesishish burchagining tangensi. Hususan, orthogonal trayektoriyalar uchun $y'$ni $-\frac{1}{y'}$ ga almashtirish kerak.

**Misol** .$x^2 + y^2 = 2ax$ aylanalar oilasining ortogonal trayektoriyalarini toping.

**Yechish**. $x^2 + y^2 = 2ax$ aylanalar oilasining differensial tenglamasini tuzamiz, buning uchun berilgan tenglamaning ikkala qismini $x$ buyicha differensiallaymiz: $2x + 2yy' = 2a$ .

Bu tenglamalardan $a$ ni yo‘qotsak, $2x + 2yy' = \frac{x^2+y^2}{x}$, yoki $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ hosil bo‘ladi. Ortogonal trayektoriyalar oilasining differensial tenglamasini topish uchun bu tenglamada $y'$ ni$-\frac{1}{y'}$ga almashtiramiz. Natijada $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ hosil bo‘ladi. Hosil qilingan tenglama bir jinsli tenglama.Uni yechib $x^2 + y^2 = Cy$, ya’ni yana aylanalar oilasiga ega bo‘lamiz.

Ikkala oilaning barcha aylanalari koordinatalar boshidan o‘tadi, biroq berilgan oila aylanalarning markazlari $Ox$ o‘qda trayektoriyalarining markazlari esa $Oy$ o‘qda joylashgan.

**Misol va masalalar**

**Differensial tenglamani yeching**

1. $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0$

2. $(1+y^2)dx = xdy$

3. $\cos^2 ydx - (x^2+1)dy = 0$

4. $(1+x^3)y' = 3x^2y, y(0) = 2$

5. $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$

6. $dx - xdy = 2ydy, y(0) = -1$

7. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

8. $tgx\sin^2 ydx + \cos^2 xctgydy = 0$

9. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

10. $y' = \sin^2 x$

11. $y' + 1/y^2 = 1$

12. $y' = 5x(1-x^2)^{3/2}$

13. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$

14. $3e^x tgydx + (1-e^x)\sec^2 ydy = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-y^2}}{y}x$ son $x, y > 0$

16. $z' = 2^{x+z}, z(0) = -1$

17. $y' + 1 = \sqrt{x+y}$

18. $y' = \cos(y - x)$

19. $y'(x + y)^2 = 1$

20. $y' + y\sin 2x = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

21. $y' = e^{x-y} - 1$

22. $y' = -2\sqrt{|y|}$

23. $y' = \cos(y - x - 1)$

24. $y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$

25. $y' = tg(y - 2x)$

26. $y' = \sin(y - x - 1)$

27. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 2$

28. $xy'\cos\left(\frac{y}{x}\right) = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 1$

29. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

30. $xy' = y\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

31. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

32. $(xy' - y)\ln\left(\frac{y}{x}\right) = y$

33. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$

34. $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

35. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$

36. $\left( x - y\cos\left( \dfrac{y}{x} \right) \right) dx + x\cos\left( \dfrac{y}{x} \right) dy = 0$

37. $y' = \dfrac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$

38. $y' = \dfrac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$

39. $y' = \dfrac{x + y + 2}{x + 1}$

40. $y' = \dfrac{2x + y - 3}{2x - 2}$

41. $y' = \dfrac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$

42. $y' = 2\left( \dfrac{y + 2}{x + y - 1} \right)$

43. $(x^2 y^2 - 1)y' + xy^3 = 0$

44. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$

45. $2y' + x = 4\sqrt{y}$

46. $y^3 dx + 2\left( x^2 - xy^2 \right) dy = 0$

47. $x^2 y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$

48. $2x^2 y' = y^3 + xy$

**Tenglamani berilgan shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.**

49. $x^2 y' \cos y + 1 = 0,\ \ x \to +\infty$ da $y \to 16/3 \cdot \pi$

50. $e^y = e^{4y} y' + 1,\ \ x \to +\infty$ da $y$ chegaralangan.

51. $\alpha$ va $\beta$ larning qanday qiymatlarida $y' = ax^\alpha + by^\beta$ tenglamani $y = z^m$ almashtirish yordamida bir junsli tenglamaga keltirish mumkin?

52. Idishda 10 kg tuz solingan 100 litrli qorishma bor. Idishga uzluksiz suv quyib (minutiga 5 l) y qorishma bilan aralashayotgan bo‘lsin. Agar qorishma shunday tezlik bilan idishdan chiqib ketayotgan bo‘lsa, bir soatdan keyin idishda qancha tuz qoladi?

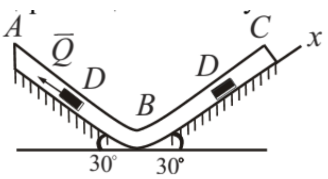
53. Material nuqta to‘g’ri chiziq bo‘ylab $\alpha$ tezlanish bilan harakat qilinyapti. Shu nuqtaning harakat qonunini toping.

54. Tandirdan uzib olingan nonning temperaturasi 20 minutda 100° dan 60° gatushadi. Uzib olgandan necha minut keyin nonning temperaturasi 30° bo‘ladi?

55. Motorli qayiq tinch suvda $v_0 = 20$ km/soat tezlik bilan harakat qilayapti. Shu yurishda qayiqning motori o‘chirib qo‘yildi va 40 sekunddan so‘ng uning tezligi 8 km/soat bo‘lib qoldi. Suvning qarshiligi qayiqning tezligiga to‘g’ri proporsional bo‘lsa, qayiqning motori o‘chirilgandan 2 minut keying tezligini toping.

56. Idish qonus shaklida bo‘lib, asosining radiusi R = 0,4 m, balandligi H = 1 m, uchi esa pastga qaratilgan. Agar idishning uchida 15 sm diametrli teshik bo‘lsa, undagi to‘la suv qancha vaqtda oqib bo‘ladi? (Suvning satxi teshikdan h balandlikda bo‘lganda uning tezligi $v = 0,6\sqrt{2gh}$ bo‘ladi deb hisoblansin).

57. Massasi m = 6 kg bo‘lgan D yuk A nuqtada $v_0 = 15$ km/s boshlang’ich tezlik olib, bukilgan *ABC* trubada (4-rasmga qarang) harakat qilayotgan bo‘lsin. *AB* bo‘lakda yukka og’irlik kuchidan tashqari Q=*12H* o‘zgarmas kuch (yo‘nalishi chizmada ko‘rsatilsin) va yukning tezligiga bog’liq bo‘lgan (yo‘nalishi yuk harakatiga qarshi) $R = 0,6v^2$ qarshilik kuchi ta’sir etadi, B nuqtada yuk o‘z tezligini o‘zgartirmasdan trubaning BC bo‘lagiga o‘tadi, bu yerda yukka og’irlik kuchidan tashqari F o‘zgaruvchi kuch ta’sir qiladi. *AB=5 м* va $F_x = -5\sin 2t(F_x - F)$ kuchning x o‘qdagi proektsiyasi) ekanligini bilgan holda yukning BC bo‘lakdagi harakat qonunini toping.



4-расм.

58. Quyidagi chiziqlar oilasiga orthogonal bo‘lgan traektoriyalarni toping:

а) $y = Cx^2$ б) $y^2 = x + C$ в) $y = Ce^x$

59. Koordinata boshidan o‘tuvchi, o‘qi OY o‘qiga parallel bo‘lgan barcha parabolalarning differensial tenglamasini tuzing.
60. Shunday chiziqlarni topingki, ularda ixtiyoriy urinmalarning abtsissa o‘qi bilan kesishish nuqtasining abtsissasi urinish nuqtasining abtsissasi ikki martta katta bo‘lsin.
61. Shunday chiziqlarni topingki, ularda ixtiyoriy urinmaning atsissalar o‘qi bilan kesishish nuqtasining abtsissasi, urinish nuqtasining abtsissasi va ordinatasi ayirmasiga teng bo‘lsin.
62. Quyidagi xossaga ega bo‘lgan chiziqlarni toping: chiziqqa ixtiyoriy nuqtasidan o‘tkazilgan urinma va normalarning abtsissa o‘qidan ajratgan kesmasi ***2a*** ga teng.

**Tenglamani yeching.**

63. $y' + y = e^{-x}$

64. $y' + 3\dfrac{y}{x} = x$

65. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

66. $y' - ytgx = 2\sin x$

67. $x' - x = \sin t$

68. $dx + (x - y)dy = 0$

69. $x^2 y' + 2xy = \ln x$

70. $2xy' - y + x = 0$

71. $y'\sin x - y = 1 - \cos x$

72. $y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2}$

73. $y' - \dfrac{xy}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2}$

74. $(y + xy^2)dx - dy = 0$

75. $y' + 2y = y^2 e^x$

76. $y' = y^4 \cos x + ytgx$

77. $xy' + y = y^2 \ln x$

78. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

79. $x' = xy = x^2 y^3$

80. $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$

81. $y' - 3y2x = \frac{3}{2} x \sqrt[3]{y}$

82. $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{\sqrt{y} - y} = -\frac{x^2}{\sqrt{y} - y}$

83. $\int_0^x xy dx = x^2 + y$

84. $y = \int_0^x y dt + x + 1$

85. $x \int_0^x (x - t) y(t) dt = 2x + \int_0^x y(t) dt$

86. $\int_0^x (x - t) y(t) dt = 2x + \int_0^x y(t) dt$

**Koshi masalasining echimini toping**

87. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$

88. $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}, \quad x(0) = -1$

89. $y' = \frac{y}{x} - \frac{2 \ln x}{x}, \quad y(1) = 1$

90. $\left(2xy + \sqrt{y}\right) dy + 2y^2 dx = 0, \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

91. $y' = \frac{y}{x} - \frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$

92. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y) dy = 0, \quad y(-1) = 0$

93. $y' = \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$

94. $(2y - xtgy - y^2 tgy) dy = dx, \quad y(0) = \pi$

95. $(1 - x^2) y' + xy = 1, \quad y(0) = 1$

96. $ydx+(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y)dy=0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$

97. $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3, \quad y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

98. $y'-ytgx=\frac{2}{3}\cdot y^4\sin x, \quad y(0)=1$

99. $2y'-3y\cos x=-e^{2x}(2+2\cos x)y^{-1}, \quad y(0)=1$

100. $2y'\ln x+\frac{y}{x}=y^2\cos x, \quad y(1)=1$

101. $y'+\frac{3x^2y}{1+x^3}=y^2(1+x^3)\sin x, \quad y(0)=1$

**To‘liq differensial tenglamani yeching**

107. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

108. $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy=0$

109. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$

110. $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy=0$

111. $(y^2+y\sec^2 x)dx+(2xy+tgx)dy=0$

**Tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchini toppish usulidan foydalanib yeching**

112. $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$

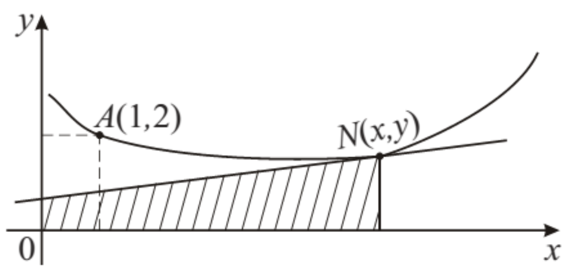
113. $(xy^2-y^3)dx+(1-xy^2)dy=0$

114. $y'\cos x=y\sin x+\cos^2 x$

115. $(y^2-6x)y'+2y=0$

116. $x^2dx-(2xy+3)dy=0$

117. Berilgan A(1;2) nuqtadan o‘tuvchi shunday egri chiziqning tenglamasini tuzingki, PN ordinatali N(x;y) nuqtasidan o‘tkazilgan urinma OY o‘qning T




9-расм.

nuqtasi bilan kesishguncha davom yettirilganda xosil bo‘ladigan OTNP traptesiyaning yuzi o‘zgarmas bo‘lib, 1 ga teng bo‘lsin (9-rasmga qarang).

118. Ixtiyoriy urinmasining ordinate o‘qidan ajratgan kesmasi, urinish nuqtasi abtsissasining kvadratiga teng bo‘lgan (1;–1) nuqtadan o‘tuvchi chiziqning tenglamasini yozing.

119. $\frac{dy}{dx}+a(t)x=f(x)$ tenglamada $a(t)\geq c>0,\quad t\to+\infty$ da $f(t)\to 0$ bo’lsin. Bu tenglamaning har bir yechimi $t\to+\infty$ da nolga intilishini isbotlang.

120. Agar $f_1(x,y),\ f_2(x,y),\ \varphi(x,y)$ bir jinsli funksiyalar bo’lib va $f_1$, $f_2$ lar bir xil tartibli bo’lsa, $f_1(x,y)dx+f_2(x,y)dy+\varphi(x,y)(xdy-ydx)=0$ tenglamani $z=\frac{y}{x}$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamaga rtltirish mumkinligni isbotlang.

121. Idishda 100 l aralashma bo‘lib, unda 10 kg tuz bor. Idishga har minutda 5 l suv quyiladi va oldindan toza suv bilan to‘lidirilib qo‘yilgan 100 l idishga aralashma huddi shu tarzda oqib o‘tadi. Aralashmaning ortiqchasi ikkinchi idishdan oqib chiqib ketadi. Qachon ikkinchi idishdagi tuzning miqdori eng ko‘p bo‘ladi? U nimaga teng?

122. Sig’imi C ga teng bo‘lgan kondesator kuchlanishi E va qarshiligi R bo‘lgan zanjirga ulangan. Kondesatorning ulangandan keyingi t momentdagi zaryadi aniqlansin.

**Tenglamaning hamma yechimlarini toping va agar mavjud bo‘lsa, maxsus yechimlarini ajrating.**

123. $y'^2-x^2=0$

124. $y'^2-y^2=0$

125. $y'^2-x^2+x^3=0$

126. $\frac{1}{(y'^2+1)}=y^2$

127. $y'^2-(x+y)y'+xy=0$

128. $y'^2=y$

129. $y'^2 - y'y + e^x = 0$

130. $y'^3 + y^2 yy'(y'+1)$

131. $y'^2 - y^2(e^x - 1) = 2yy'$

132. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$

133. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$

134. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

135. $y'^3 - yy'^2 - x^2 y' + x^2 y = 0$

136. $y'^2 + 2yy'ctgx - y^2 = 0$

137. $y'^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$

138. $\sin(y'+1)^2 + ctgy' = 0$

139. $shy'^3 + \ln y' + y' = 0$

140. $log_3(y'^2 + 1) + (y'+1)\sin y' = 0$

141. $\cos(y'+1) + y'^2 - 2y' + 1 = 0$

142. $\cos(y'+1)^3 + \ln(y'+2) + y' = 0$

143. $x = e^{y'} - y'^2$

144. $x(1 - y') = y'^2$

145. $\dfrac{x}{1 + y'^3} = 2 + y'$

146. $\dfrac{x}{1 + y'^3} = 2 + y'$

147. $y'(x+1) = \lg y'$

148. $y' = \dfrac{y}{1 - y'\sin y'}$

149. $y(2 - y') = y' - 1$

150. $y = y'\cos y' + \sin y' - \dfrac{1}{y'^2}$

151. $y=\frac{y'(\ln y'-1)}{2}-\frac{1}{2y'^2}$

152. $y=y'\sin y'+\cos y'+y'^3$

**Lagranj va Klero tenglamalarining umumiy va maxsus yechimlarini toping.**

153. $y=2xy'+\cos y'$

154. $y=2xy'+tgy'$

155. $y=2xy'+(y'+1)^2$

156. $y=\frac{3}{2xy'}-e^{y'}$

157. $y=2xy'+x+\frac{1}{(y'+1)^2}$

158. $y=xy'+y'-y'^2$

159. $(x+1)y'^2-(y+x)y'+y=0$

160. $(3x+1)y'^2-3(y+2)y'+9=0$

161. $(3x+5)y'^2-(3y+x)y'+y=0$

162. $axy'^2+(bx-ay+c)y'-by=0$

163. $x^2y'^2-(2xy+a)y'+y^2=0$

164. $yy'=2xy'^2+1$

## 2.1. Tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan differensial tenglamalar

*n-tartibli differensial tenglamani* simvolik ravishda

$$F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoki bu tenglamani *n*-tartibli hosilaga nisbatan yechilgan bo‘lsa,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

*n*-tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* $x$ ga va *n*-ta ixtiyoriy o‘zgarmaslarga bog’liq bo‘ladi: $y = g(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Shu sababli umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olish uchun ixtiyoriy o‘zgarmaslarni aniqlashga imkon beradigan ba’zi qo‘shimcha shartlar ham berilgan bo‘lishi kerak. Bu shartlarni izlanayotgan funksiyaning va uning $(n-1)$-tartibgacha ($y$ ham kiradi) barcha hosilalarning biror nuqtadagi qiymatlarini, ya’ni $x = x_0$ da

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (3)$$

berish bilan hosil qilish mumkin. (3) sistema *boshlang’ich shartlar* sistemasi deyiladi. Berilgan (2) differensial tenglamaning (3) boshlang’ich shartlar sistemasini qanoatlantiruchi xususiy yechimini topish masalasi *Koshi masalasi* deyiladi.

Yuqori tartibli differensial tenglamalarni integrallash masalasi birinchi tartibli tenglamani integrallash masalasidan ancha qiyin bo‘lib, har doim ham birinchi tartibli tenglamani integrallashga keltiraverilmaydi. Shunday bo‘lsa da chiziqli tenglamalardan tashqari barcha turdagi yuqori tartibli tenglamalar uchun integrallashning asosiy usuli tartibini pasaytirish, ya’ni berilgan tenglamani unda o‘zgaruvchilarni almashtirish orqali tartibi pastroq tenglamaga keltirishdan iborat. Biroq tenglamaning tartibini pasaytirishga har doim ham erishish mumkin emas.

Biz bu yerda tenglama tartibini pasaytirishga imkon beradigan $n$-tartibli tenglamalarning eng sodda turlari bilan tanishamiz.

1. Ushbu

$$y^{(n)} = f(x) \tag{4}$$

tenglamaning tartibini pasaytirish, ketma-ket integrallash yo‘li bilan amalga oshiriladi:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x)dx + C_1 \right) dx = \int \left( \int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2;$$

…………………………………………………………………………..

$$y = \int \left( \int \dots \left( \int f(x)dx \right) dx \dots \right) dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

**Misol.** $y''' = x + cosx$ tenglamani yeching.

**Yechish.**

$$y'' = \int (x + cosx)dx = \frac{x^2}{2} + sinx + C_1;$$

$$y' = \int \left( \frac{x^2}{2} + sinx + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - cosx + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left( \frac{x^3}{6} - cosx + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{x^4}{24} - sinx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Demak, $y = \frac{x^4}{24} - sinx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

2. Izlanayotgan $y$ funksiya va uning $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$ hosilalalri oshkor holda ishtirok etmagan

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{5}$$

differensial tenglamaning tartibi

$$y^{(k)} = z; \; y^{(k+1)} = z'; \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

almashtirishlar yordamida $k$ birlikka pasaytiriladi:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

**Misol.** $xy'' = y'ln\frac{y'}{x}$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** $y' = p(x)$birinchi tartibli bir jinsli $p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}$ tenglamaga kelamiz. Shuning uchun $p = xu$ almashtirishdan foydalanib, $p' = u + xu'$ni topamiz. $p$ va $p'$ ning bu ifodalarini hosil qilingan tenglamaga qo‘yib, $u + xu' = ulnu$ o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamani hosil qilamiz. O‘zgaruvchilarni ajratib, quyidagini

$$\frac{du}{u(ln\,u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, quydagilarga ega bo‘lamiz:

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C_1| = \ln|C_1 x|,$$

$$\ln u - 1 = C_1 x, \ln u = 1 + C_1 x,\ u = e^{1+C_1 x}.$$

Bu yerda $u$ ni $\frac{p}{x}$ ga, $p$ ni esa $y'$ ga almashtirsak, $y' = xe^{1+C_1 x}$ tenglama hosil bo‘ladi. Uni integrallaymiz:

$$y = \int xe^{1+C_1 x}dx = \left\| \begin{matrix} u = x, dv = e^{1+C_1 x}dx \\ du = dx, v = \frac{1}{C_1}e^{1+C_1 x} \end{matrix} \right\| = \frac{x}{C_1}e^{1+C_1 x} + C_2$$

$$= e^{1+C_1 x}\left(\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\right) + C_2$$

3. Erkli $x$ o‘zgaruvchi oshkor holda ishtirok etmagan

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (6)$$

tenglamaning tartibi

$$y' = p(y), \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

almashtirishlar orqali bir birlikka pasaytiriladi.

**Misol.** $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Berilgan tenglama (6) ko‘rinishdagi tenglamadir.

$y' = p(y)$ va $y'' = p\frac{dp}{dy}$,$p = \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$ almashtirishlarni bajarib, Bernulli tenglamasini hosil qilamiz. $p^2 = z$ deb olamiz, u holda

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y} \qquad (7)$$

chiziqli tenglama hosil bo‘ladi. Shu sababli

$$z = uv \qquad (8)$$

almashtirishdan foydalanish mumkin. Bu holda

$$z' = u'v + uv' \qquad (9)$$

(8) va (9) ni (7) ga qo‘ysak.

$u'y + u(v' + 2v) = 4e^{-y}, \quad v' + 2v = 0,$

$\frac{dv}{v} = -2dy,\ \ln v = -2y,\ v = e^{-2y}, \qquad e^{-2y}u' = 4e^{-y}, \qquad u' = 4e^{y},$

$u = 4e^{y} + C_1, \qquad z = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}.$

$y$ ni topamiz. Bu yerda $z$ ni

$p^2 = u'^2, (p^2 = z)$ ga almashtirib, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}$ ni hosil qilamiz. O‘zgaruvchilarni ajratib, so‘ngra integrallasak, quydagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{dy}{4e^{-y} + C_1e^{-2y}} = \pm dx, \frac{e^{y}dy}{\sqrt{4e^{y} + C_1}} = \pm dx, \frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1}$$
$$= \pm x + C_2, \frac{1}{4}(4e^{y} + C_1) = (\pm x + C_2)^2, e^{y} + \frac{C_1}{4} = (\pm x + C_2)^2$$

4. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ funksiya $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ larga nisbatan bir jinsli bo‘lgan

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \qquad (10)$$

tenglamaning tartibi $e^{\int z(x)dx}$ almashtirish orqali bittaga kamaytiriladi.

**Misol.** $x^2yy'' = (y - xy')^2$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Berilgan tenglama $y, y', y''$ larga nisbatan bir jinsli, demak

$y = e^{\int z(x)dx}$ desak,

$y' = ze^{\int z(x)dx}, \qquad y' = (z' + z^2)e^{\int zdx},$

$x^2(z' + z^2)e^{\int zdx} = \left(e^{\int zdx} - xze^{\int zdx}\right)^2,$

bu yerdan

$$x^2z = x + C_1, z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}, \quad \int z dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{X^2}\right) dx = ln|x| - \frac{C_1}{x} + ln\, C_2.$$

Shuning uchun

$$y = e^{\int z dx} = e^{ln|x| - \frac{C_1}{x} + ln\, C_2} = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

5. Tenglamaning chap tomoni aniq hosila bo‘lgan hol. Bu holda tenglama tartibini bir birlikka pasaytirish bevosita integrallash yo‘li bilan amalga oshiriladi.

Albatta, bunday hol kamdan-kam uchraydi. Ayrim hollarda tenglamani bunday ko‘rinishga keltirishga ba’zi sun’iy shakl almashtirishlar orqali erishiladi, biroq bunday shakl almashtirishlarning biron-bir umumiy usulini bu yerda ko‘rsata olmaymiz va misol keltirish bilan chegaralanamiz.

Masalan, $y'' - xy' - y = 0$ tenglamani qaraylik, tenglamaning chap tomonini $(y' - xy)' = 0$ ko‘rinishga egaligini ko‘rish oson, hosil qilingan tenglamani integrallab, quydagiga ega bo‘lamiz:

$$y' - xy = C \tag{11}$$

Bu tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglamadir. Shu sababli

$$y = e^{\int x dx}\left(\int C\, e^{-\int x dx} dx + C_1\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_1\right)$$

umumiy yechim hosil bo‘ladi.

Bu yerda hosil bo‘lgan $e^{\frac{x^2}{2}}$ integral elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydi, biroq bunday noelementar funksiya qiymatlari uchun jadvallar mavjud.

**Misol**. $yy'' - (y')^2 - y^2 = 0$ tenglamani integrallang.

**Yechish.** Tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 1.$ Bu tenglamani $\frac{d\left(\frac{y'}{y}\right)}{dx} = 1$ ko‘rinishda keltirib integrallasak, birinchi tartibli $\frac{y'}{y} = x + C_1$ tenglamani hosil qilamiz. Uni yechamiz:

$$\frac{dy}{y} = (x + C_1)dx, \ln|y| = \frac{(x + C_1)^2}{2} - lnC_2,$$

ya'ni

$$y = C_2 e^{\frac{(x+C_1)^2}{2}}.$$

**Misol.** Koshi masalasini yeching: $y'' = yy', y(1) = 2, y'(1) = 2.$

**Yechish.** $p(y) = y', y'' = pp'$almashtirishlar berilgan tenglamani $pp' = yp$ tenglamaga olib keladi. Bunda quyidagi ikkita hol qaraladi :

a) $p = 0, y' = 0, y = C. y'(1) = 2 \neq 0$bo'lgani uchun bu holda yechim yo'q;

b) $p' = y, \int dp = \int ydy\,, p = \frac{y^2}{2} + C_1, p(2) = 2$ shartdan $2 = 2 + C_1,$ bundan $C_1 = 0$ va $p = \frac{y^2}{2}.$

Demak,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2}, \int \frac{2dy}{y^2} = \int dx\,, -\frac{2}{y} = x + C_2, y(1) = 2$ shartdan $-1 = 1 + C_2,$

$C_2 = -2.$

Natijada yechim hosil bo'ladi: $y = \frac{2}{2-x}$

### 2.2. n- tartibli chiziqli differensial tenglama va uning umumiy yechimining strukturasi

***n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar.***

**Ta'rif.** *n*-chi tartibli chiziqli tenglama deb quyidagi tenglamaga aytiladi:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + .. + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y + q(x) \qquad (1)$$

bu yerda $p_i(x)$ koeffitsiyentlar va $q(x)$ biror $(a, b)$ intervalda uzluksiz hamda $p_0(x) \neq 0.$

Agar $q(x) = 0$ bo'lsa, ubir jinsli tenglama, agar $q(x) \neq 0$ bo'lsa bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.

Chiziqli tenglamalarni o'rganishni bir jinsli bo'lgan holdan boshlaymiz va $p_0(x) = 1$ deb qaraymiz. Demak, biz qarayotgan tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + .. + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

(2) tenglamaning chap tomoni $y$ funksiya ustida quyidagi operatsiyalarni bajarish orqali hosil qilinadi: $y$ funksiya ketma-ket$n$-marta differensiallanadi, keyin esa $y$ va uning hosilalari $p_i(x)$ koeffitsiyentlarga ko‘paytirilib, ularning yig‘indisi olinadi. Bu holda biz $y$ funksiya ustida chiziqli differensial operatsiya bajarilgan deb aytamiz. Bu operatsiyaning ushbu simvolini

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x) \qquad (3)$$

**chiziqli differensial operator** deb ataymiz. Bu operator yordamida (2) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$L[y] = 0 \qquad (4)$$

Chiziqli differensial operator quyidagi xossalarga ega:

1. $L[Cy] = CL[y],\ C = const,$

2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2].$

Bu xossalarni isboti mos holda $(cu) = cu'; (u + v)' = u' + v'$ formulalar yordamida isbotlanadi.

Bu xossalarni umumlashtirib,

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i],\ \ C_i = const.$$

formulani yozishimiz mumkin.

Endi ushbu xossalardan foydalanib, bir jinsli tenglama yechimlari uchun quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

**Teorema.** Chiziqli bir jinsli differensial tenglama yechimlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi shu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

**Isbot.** Aytaylik $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning yechimlari bo‘lsin. U holda

$$L[y_i(x)] \equiv 0\ \ (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (5)$$

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)$ funksiya ham, bu yerda $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ixtiyoriy sonlar, (2) tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, chiziqli differensial operator xossalari va (5) shartlardan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$L[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ \dots+C_ky_k(x)]\equiv$$
$$\equiv C_1L[y_1(x)]+C_2L[y_2(x)]+\ \dots+C_kL[y_k(x)]\equiv 0$$

**Ta’rif.** Agar biror $(a,b)$ intervalda aniqlangan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ funksiyalar uchun

$$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)\equiv 0$$

ayniyat $k_i$ o‘zgarmas sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda bajarilsa , u holda $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ funksiyalar sistemasi **chiziqli bog‘liq** deyiladi, agar ayniyat faqat $k_i=0\ (i=1,2,\dots,n)$ bo‘lgandabajarilsa $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ funksiyalar sistemasi **chiziqli erkli** deyiladi.

**Misollar.** 1) $\varphi_1(x)=2\sin^2 x,\varphi_2(x)=\cos^2 x\,,\varphi_3(x)=3$ funksiyalar sistemasi **chiziqli bog‘liq,** chunki $3\varphi_1(x),+6\varphi_2(x)-2\varphi_3(x)\equiv 0.$

2) $1,x,x^2,x^3,\dots,x^n$ funksiyalar sistemasi chiziqli erkli, chunki

$$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ \dots+C_nx^n=0$$

shart faqat $C_i=0\ (i=1,2,\dots,n)$ bo‘lganda $x$ ning barcha qiymatlarida bajariladi.

Berilgan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ funksiyalar sistemasining chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli ekanligini aniqlash maqsadida shu funksiyalar va ularning 1-, 2- ,…, (n-1) tartibli hosilalaridan tuzilgan determinantdan foydalaniladi. Bu determinant **Vronskiy determinant**i deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$W(x)=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)]=$$
$$=\begin{vmatrix} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\dots\ \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)\ \dots\ \varphi_n'(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x)\varphi_2^{(n-1)}(x)\dots\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (6)$$

**Teorema.** Agar $\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ \dots\ \varphi_n(x)$ funksiyalar sistemasi chiziqli bo‘gliq bo‘lsa, u holda bu sistemaning Vronskiy determinant aynan nolga teng bo‘ladi.

**Isbot.** Bu funksiyalar sistemasining chiziqli bo‘g‘liqligini ifodalovchi ushbu

$$k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)\equiv 0,(\text{kamida bitta } k_i\neq 0)$$

ayniyatni $n-1$ marta differensiallaymiz:

$$k_1\varphi_1'(x)+k_2\varphi_2'(x)+\ldots+k_n\varphi_n'(x)\equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7)$$
$$k_1\varphi_1^{(n-1)}(x)+k_2\varphi_2^{(n-1)}(x)+\ldots+k_n\varphi_n^{(n-1)}(x)\equiv 0$$

Aytaylik, $x_0$ nuqta $\varphi_i(x)\ (i=1,2,\ldots n)$ funksiyalar aniqlangan sohaning iztiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Quyidagi n-noma’lumli algebraik chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0)z_1+\varphi_2(x_0)z_2+\ldots+\varphi_n(x_0)z_n=0 \\ \varphi_1'(x_0)z_1+\varphi_2'(x_0)z_2+\ldots+\varphi_n'(x_0)z_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0)z_1+\varphi_2^{(n-1)}(x_0)z_2+\ldots+\varphi_n^{(n-1)}(x_0)z_n=0 \end{cases} \qquad (8)$$

(7) ayniyat $x_0$ nuqtada o‘rinli, bundan (8) birsinsli tenglamalar sistemasi notrivial yechimga egaligi kelib chiqadi: $z_1=k_1, z_2=k_2,\ldots,z_n=k_n$. U holda (8) sistemaning determinanti nolga teng bo‘lishi shart. Bu determinant Vronskiy determinantining $x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng. Shunday qilib, $W(x_0)=0$. Ammo $x_0$ nuqta ixtiyoriy tanlanganligi sababli

$$W(x)=0 \qquad (9)$$

bo‘ladi.

**Teorema.** Agar n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$n ta yechimlari sistemasi chiziqli erkli bo‘lsa, u holda uning Vronskiy determinant hech bir nuqtada nol qiymat qabul qilmaydi.

**1-natija.** n-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning yechimlaridan iborat $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ funksiyalar sistemasining Vronskiy determinanti aynan nolga teng yoki hech bir nuqtada nol qiymat qabul qilmaydi.

n-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning n ta chiziqli erkli yechimlar sistemasi uning **fundamental yechimlar sistemasi** deyiladi.

**2-natija.** n-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning n ta yechimlar sistemasi chiziqli erkli bo‘lishi uchun uning Vronskiy determinant noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli.

**Teorema.** Agar $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar $L[y]=0$ tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, u holda bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x) \qquad (10)$$

formula bilan aniqlanadi.

**Isbot.** Teoremani isbotlash uchun ixtiyoriy

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (11)$$

shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechim (10) formuladan kelib chiqishini ko‘rsatamiz. (11) ni (10) qoyib, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \dots + C_ny_n'(x_0) = y_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (12)$$

Bu sistemaning determinanti Vronskiy determinanti va $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalar sistemasi chiziqli erkli yechim bo‘lganligi uchun noldan farqli. U holda sistema ixtiyoriy $x_0$ uchun $C_i$ larga nisbatan yagona yechimga ega. Uni (10) qo‘ysak xususiy yechimi hosil bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

$n$ - tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaning xususiy holi sifatida $n = 2$ bo‘lganda

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (13)$$

tenglamani qaraylik. Bu tenglamani bitta xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa, uni umumiy yechimi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x)dx} \qquad (14)$$

ko‘rinishida ifodalanadi. (14) ko‘rinishidagi formula Ostrogradskiy-Liuvill formulasideb ataladi.

(14) ni yoyib yozsak

$$y_1y' - y_1'y = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

bo‘ladi. Uni $y_1^2$ ga bo‘lsak, chap tomoni bo‘linma hosilasining formulasini ifodalaydi, va

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Buni integrallasak,

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2,$$

yoki

$$y = C_2 y_1 + C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu(13) ning umumiy yechimini ifodalaydi.

Endi $n$-tartibli chiziqli birinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi haqidagi masalani qaraymiz.

Aytaylik

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x), \qquad (15)$$

bu yerda $p_i(x)$ koeffitsiyentlar va $q(x)$ biror $(a, b)$ intervalda uzluksiz hamda $p_0(x) \neq 0$, $n$-tartibli chiziqli birinsli bo‘lmagan tenglama berilgan bo‘lsin.

Bu tenglamani chiziqli differensial operator yordamida quyidagicha yozib olish mumkin:

$$L[y] = q(x). \qquad (16)$$

Chap qismi (1) tenglamaning chap qismiga teng bo‘lgan chiziqli bir jinsli tenglamani yozib olamiz:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0. \qquad (17)$$

Bu tenglama (15) ga mos chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi.

**Teorema**. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan (15) tenglamaning $y$ umumiy yechimi unga mos chiziqli bir jinsli (2) tenglamaning $u(x)$ umumiy yechimi va (15) tenglamaning ixtiyoriy $v(x)$ xususiy yechimi yig‘indisi ko‘rinishda ifodalanadi:

$y(x) = u(x) + v(x).$

**Isbot.** Aytaylik $u(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ (17) chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va $v = v(x)$(16) tenglamaning biror yechimi bo‘lsin. U holda

$L[u] \equiv 0$ va

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0 \tag{18}$$

hamda

$$L[v] \equiv q(x) \tag{19}$$

bo‘ladi.

Chiziqli differensial operator xossasidan foydalansak,

$L[u + v] \equiv L[u] + L[v] \equiv 0 + q(x) \equiv q(x).(20)$

Demak,

$$y(x) = u(x) + v(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + v(x) \ (21)$$

yig’indi bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi bo‘ladi. Bu yechimning umumiy ekanligini ko‘rsatamiz. (16) tenglamaning quyidagi boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y = \varphi(x)$ yechimini olamiz:

$$y_0 = \varphi(x_0), y'_0 = \varphi'^{(x_0)}, \dots, y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0), \tag{22}$$

va n noma’lumli n ta algebraik chiziqli tenglamalar sistemasini yozib olamiz:

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 + \dots + y_n(x_0)C_n = \varphi(x_0) - v(x_0) \\ y_1'(x_0)C_1 + y_2'(x_0)C_2 + \dots + y_n'(x_0)C_n = \varphi'(x_0) - v'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 + \dots + y_n^{(n-1)}(x_0)C_n = \varphi^{(n-1)}(x_0) - v^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{23}$$

Bu sistemaning determinant $\Delta = W(x_0) \neq 0$ bo‘lganligi sababli sistema $C_1, C_2, \dots, C_n$larga nisbatan yechimga ega bo‘ladi. Bu yechim ixtiyoriy (22) va $v_0 = v(x_0)$ shartlarda mavjud. Bu esa (21) ning umumiy yechim ekanligini ko‘rsatadi.

**2.3. n-tartibli chiziqli o`zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalar**

Oldingi paragrafda *n*–tartibli chiziqli differensial tenglamani umumiy nazariyasi bilan tanishdik. Endi koeffitsientlari o‘zgarmas sonlar bo‘lganda ko‘rib chiqamiz.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0,\ a_i = const. (i = 1,2,\dots,n) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglama n-tartibli chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli differensial tenglama deb ataladi.

Bu tenglamaning xususiy yechimi

$$y = e^{\lambda x} \qquad (2)$$

ko‘rinishida qidiriladi. Bu yerda λ=*const*

(1) ni (2) ga qo‘yish uchun hosilalarini olamiz.

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

bularni tenglamaga qo‘yib,

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

yoki

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

Tenglikka kelamiz, bu yerdan $e^{\lambda x} \neq 0$ bo‘lganligi uchun unga qisqartirib,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda λ ga nisbatan algebraik tenglamaga kelamiz. (3) tenglama (1) tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deb ataladi.

Ma’lumki (3) tenglamani *p* – ta ildizi bor, ular haqiqiy, kompleks bo‘lishi mumkin. Shuning uchun alohida ko‘rib chiqamiz.

**1-hol: (**3) xarakteristik tenglama $\lambda_1, \lambda_2. \dots, \lambda_n$ ildizlari haqiqiy va har xil bo‘lsin. Bu holda barcha ildizlarni (2) ga qo‘yib,

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

ko‘rinishdagi xususiy yechimlarni hosil qilamiz. Bundan

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \qquad (4)$$

umumiy yechimini yozamiz.

**Misol.** $y''' - y = 0$ tenglamani yeching.

**Yechish**. Xarakteristik tenglamasi $\lambda^3 - \lambda = 0$ bo‘lib, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ ildizlarga ega (4) formulaga ko‘ra umumiy yechim

$$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}.$$

**2-hol:** (3) ni ildizlari haqiqiy va ichida karralisi bor.

Agar (3) ni $\lambda_i$ildizi $k_i$karrali bo‘lsa (bunda $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$), u holda chiziqli erkli yechimlar soni *n* dan kam. Biz *n*-ta chiziqli erkli yechimlarini topamiz.

Faraz qilaylik $k_i$– karrali ildiz $A_i = 0$ – lar $k_i$ karrali bo‘lsin. (3) tenglama

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-k} \lambda^{k_i} = 0$$

ko‘rinishiga ega bo‘ladi.

Bu xarakteristik tenglamaga mos tenglama

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k} y^{k_i} = 0$$

ko‘rinishda bo‘lib, uni xususiy yechimlari

$1, x, x^2, \ldots, x^{k_i - 1}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar $\lambda_i \neq 0$ bo‘lsa, u holda $y = e^{k_i x} t$ almashtirish bilan nol holga keltiriladi, $\lambda_i = 0$ ga nisbatan olingan tenglama ildizlari

$1, x, x^2, \ldots, x^{k_i - 1}$ bo‘lib

$$\lambda_i \neq 0, e^{k_2 x}, x e^{k_2 x}, \ldots, x^{k_i - 1} e^{k_2 x}$$

yechimlar mos keladi. Unda umumiy yechim

$$y = \sum_{i=1}^{m} \left( c_{0i} + c_{1i} x + \ldots + c_{k_{i-1}} x^{k_{i-1}} \right) e^{k_i x}$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bunda *m* chiziqli erkli yechimlar soni.

**Misol:** $y'' + 2y' + y = 0$ tenglamani yeching.

**Yechish.** Xarakteristik tenglama: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ yoki

$$(\lambda + 1)^2 = 0 \; \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$$

bu ildizga mos umumiy yechim

$$y = (C_1 + x C_2) e^{-x}$$

formula bilan ifodalanadi.

**3-hol: (**3) ni ildizlari teng emas, ammo ichida kompleks ildizlari bor.

Ildizlar kompleks bo‘lsa, ular o‘zaro qo‘shma bo‘ladi: $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$

Ularga $e^{(\alpha_k+i\beta_k)x}, e^{(\alpha_k-i\beta_k)x}$, xususan $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$ bo‘lgan yechimlar mos keladi. Bu kompleks yechimlarni Eyler formulasidan foydalanib,

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha}(cos\beta x + isin\beta x)$$

ko‘rinishida yozish mumkin, ya’ni $e^{\alpha x}cos\beta x,\ e^{\alpha x}sin\beta x$. Bu yechimlar $(-\infty;+\infty)$ oraliqda chiziqli erklidir. Xuddi shunday $\alpha - i\beta$ yechimga $e^{\alpha x}cos\beta x, -e^{\alpha x}sin\beta x$ yechimlar mos keladi.

Bu yechimlar yangi yechimlar to‘plamini hosil qilmaydi.

Demak, kompleks qo‘shma yechimlarga ikkita haqiqiy yechim mos keladi. Kompleks yechimlarni haqiqiy yechim bilan ifodalash uchun quyidagi teoremani keltiramiz.

**Teorema:** Agar koeffitsientlari uzluksiz bo‘lgan $L[y] = 0$ tenglama $y = u(x) + iv(x)$ yechimga ega bo‘lsa , u holda shu yechimni haqiqiy qismi $u(x)$ va mavxum qismi $v(x)$ funksiyalar ham tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Shu teoremaga ko‘ra

$e^{\alpha x}cos\beta x,\ e^{\alpha x}sin\beta x$ funksiyalar tenglamaning yechimlari bo‘ladi.

**Misol.** $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamani yeching.

**Yechish.** Bu tenglama uchun (3) tenglama quyidagicha bo‘ladi.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

Buning yechimlari $\lambda_1 = -2 + i,\ \lambda_2 = -2 - i.$ U holda umumiy yechim

$$y = e^{-2x}(C_1cosx + C_2sinx)$$

ko‘rinishga ega.

**4-hol:** (3) ning ildizlari kompleks va karrali bo‘lsin.

Agar (3) ning ildizlari $\alpha + i\beta$ ko‘rinishida bo‘lsa, unga qo‘shma $\alpha - i\beta$ ildizga ham ega. Shuning uchun $\alpha + i\beta$ $k_i$ karrali bo‘lsa $\alpha - i\beta$ ildiz ham $k_i$-karrali bo‘ladi, ya’ni

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, \dots, x^{k_i}e^{\alpha x}cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}sin\beta x, x\, e^{\alpha x}sin\beta x, \dots, x^{k_i}\, e^{\alpha x}sin\beta x$$

ko‘rinishidagi $2k$ ta haqiqiy yechim olishimiz mumkin.

Bu tenglamalar $(-\infty;+\infty)$ oraliqda chiziqli erkli, bunga Eyler formulasidan foydalanib, $x^m e^{\lambda_i x}$ ko‘rinishda yozib ishonch hosil qilish mumkin (2 – holga qarang).

Shunday qilib, $\alpha \pm i\beta k_i$ karrali kompleks qo‘shma yechimlarga $2k$ ta yechim mos keladi.

Umumiy yechimni, haqiqiy va kompleks yechimlarni xar biri uchun yozib olib, jami $n$–ta chiziqli erkli yechimlardan hosil qilamiz.

**Misol.** $y^{(4)} + 2y' + y = 0$ tenglamani yeching.

**Yechish.** Bu tenglama xarakteristik tenglamasining ildizlari

$\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -i$ bo‘lib umumiy yechim

$$y = (C_1 + C_2x)cosx + (C_3 + C_4x)sinx$$

ko‘rinishida ifodalanadi.

#### 2.4. n-tartibli chiziqli o`zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Ushbu

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = q(x) \quad (1)$$

tenglamani yechish masalasi bilan tanishamiz.

Umuman (1) tenglamani umumiy yechimini $q(x)$ funksiyaning ko‘rinishiga bog‘liq bo‘lmagan holda o‘zgarmasni variatsiyalash usulida (Lagranj usulida) yechish mumkin.

Buning uchun (1) ga mos bir jinsli tenglamani yechib, umumiy yechim topiladi, ya’ni

$$y = C_1\, y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \quad (2)$$

bu yerda $C_i = C_i(x)$ deb olamiz va (2) ni (1) ga quyish uchun ketma-ket hosila olamiz

$$y' = C'_1(x)\, y_1 + C_1(x)y'_1 + C'_2(x)y_2 + C_2(x)y'_2 + \dots +$$
$$+C'_n(x)y_n + C_n(x)y'_n \quad (3)$$

(3) da $C'_1(x)\, y_1 + C'_2(x) y_2 + \cdots + C'_n(x) y_n = 0$ deb qolgan qismidan yana hosila olamiz

$$y' = C'_1(x)y'_1 + C_1(x)y_1'' + C'_2(x)y'_2 + C_2(x)y_2'' + \cdots +$$
$$+C'_n(x)y_n' + C_n(x)y_n''$$

bunda ham $c_i(x)$ larni hosilasi qatnashganlarini nolga tenglaymiz

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \cdots + C'_n(x)y_n' = 0$$

Shu tartibda $n$ – marta hosila olamiz va hosilalarni (1) ga qo‘yamiz.

Unda

$$\begin{cases} C'_1(x)\, y_1 + C'_2(x)y_2 + \cdots + C'_n(x)y_n = 0, \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + \cdots + C'_n(x)y_n' = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

ko‘rinishidagi sistemaga kelamiz.

(4) sistemadan algebra kursidagi biror usul bilan $C_i(x)$ larni topib (2)ga qo‘yamiz va (1) ning umumiy yechimini hosil qilamiz.

(1) tenglamani umumiy yechimi, mos bir jinsli

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (5)$$

tenglamaning umumiy yechimi bilan (1) tenglamaning xusisiy yechimi yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$y = \bar{y} + y_0 \qquad (6)$$

$\bar{y}$- (1) ning xususiy yechimi.

$y_0$- (5) ning umumiy yechimi.

Bundan tashqari $q(x)$ maxsus ko‘rinishga ega bo‘lsa $\bar{y}$- xususiy yechimni nomao’lum koeffitsientlar usulida topish mumkin:

$a)\; q(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_s$

ko‘rinishda bo‘lsa,

$$\bar{y} = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_s \qquad (7)$$

deb olib (1) tenglamaga qo‘yiladi va mos koeffitsientlar tenglanadi

$$\left.\begin{array}{l} x^0 : a_n B_0 = A_0 \\ x^1 : a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 = A_1 \\ ------------- \\ a_n B_s + \ldots = A_s \end{array}\right\} \qquad (8)$$

(8) dan $B_i$ o‘zgarmaslar topilib (7) ga qo‘yiladi. (1) ning umumiy yechimi (6) ko‘rinishda ifodalanadi.

$b)\ q(x) = (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_s) e^{\gamma x}$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

1) $\gamma$- xarakteristik tenglamani ildizi bo‘lmasa

$$\bar{y} = e^{\gamma x}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_s)$$

ko‘rinishda,

2) $\gamma$- xarakteristik tenglamani $k$- karrali ildizi bo‘lsa

$$\bar{y} = x^k e^{\gamma x}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_s)$$

ko‘rinishda izlanadi va a) holdagi kabi $B_i$- koeffitsientlar topiladi.

Agar

$$q(x) = e^{ax}(P_m(x) cosbx + Q_m(x) sinbx) \qquad (9)$$

ko‘rinishda bo‘lsa (bunda $P_m$ va $Q_m$ lar $x$ ga nisbatan $m$- tartibli ko‘phad bo‘lib, kamida bittasining darajasi $m$ ga teng).

Bunda ushbu formuladan foydalanamiz:

$$cosbx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, cosbx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \qquad (10)$$

shunga ko‘ra (9) ni quyidagicha yozamiz

$$q(x) = P_m(x) e^{ax} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + Q_m(x) e^{ax} \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} =$$

$$= \overline{P}_m(x) e^{(a+ib)x} + \overline{Q}_m(x) e^{(a-ib)x},$$

$q(x)$ funksiyani (1) ga qo‘ysak, tenglamaning o‘ng tomoni 2 ta funksiya yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Shu o‘rinda ushbu ma’lumotni keltiramiz:

Agar (1) tenglamaning o‘ng tomoni ikkita funksiya yig‘indisidan iborat bo‘lsa, $q(x) = f_1(x) + f_2(x)$ bo‘lib, $y_1$ funksiya $L(u) = f_1(x)$ tenglamaning, $y_2$ funksiya $L(u) = f_2(x)$ tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda $u_1 + u_2$ funksiya

$$L(u) = f_1(x) + f_2(x)$$

tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Ushbu ma’lumotni etiborga olib, quyidagi ikkita holni qaraymiz

a) $\lambda = a + ib$ soni (1) tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, u holda xususiy yechim

$$\bar{y} = R_m(x)e^{(a+ib)x} + N_m(x)e^{(a-ib)x} \qquad (11)$$

ko‘rinishda qidiriladi.

b) $\lambda = a + ib$ soni (1) tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning $k$ karrali ildizi bo‘lsa, u holda xususiy yechim

$$\bar{y} = x^k\left(R_m(x)e^{(a+ib)x} + N_m(x)e^{(a-ib)x}\right) \qquad (12)$$

ko‘rinishda qidiriladi.

Bunda $R_m(x)$ va $N_m(x)$ lar $m$ tartibli noma’lum koeffitsientli ko‘phadlar. (11), (12) formulalarni haqiqiy yechimlarga o‘tkazsak, mos holda

$$\bar{y} = e^{ax}\left(R_m(x)\cos bx + N_m \sin bx\right)$$

va

$$\bar{y} = x^k e^{ax}\left(R_m(x)\cos bx + N_m \sin bx\right)$$

ko‘rinishlarni oladi. $R_m(x)$ va $N_m(x)$ ko‘phadlarning koeffitsientlari yuqorida ko‘rsatilgan usulda topiladi.

### 2.5. Tebranishlar tenglamasi

Prujinaga osilgan moddiy nuqta harakati haqidagi masalani qaraymiz. Moddiy nuqta massasini $m$ bilan belgilaymiz. Moddiy nuqta harakatlanadigan vertikal o‘qda O koordinatalar boshini tanlab olamiz. U prujina deformatsiyalanmagan paytdagi m nuqta holatiga mos keladi.

Moddiy nuqtaning harakat qonuni *x=x(t)* tenglik bilan beriladi. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra $m\frac{d^2x}{dt^2}$ nuqtaga vertical yonalishda ta’sir etuvchi kuchlar yig‘indisiga teng bo‘lishi lozim. Shunday kuchlardan biri prujinaning bikrlik kuchi bo‘lib, u Guk qonuniga ko‘ra –cx ga teng, bu yerda c-prujinaning bikrlik koeffitsiyenti. Manfiy ishora bu kuchning m nuqta harakat yonalishiga qarama-qarshi yonalganligini bildiradi. Bundan tashqari moddiy nuqtaga *m*g og‘irlik kuchi ham ta’sir qiladi. Shuningdek, moddiy nuqtaga boshqa tashqi kuchlar ta’sir qilishi mumkin, bu kuchlarni vaqtga bog‘liq deb hisoblaymiz va ularning yig‘indisini *F*(t) bilan belgilaymiz. U holda *x(t)* funksiya uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + mg + F(t).$$

$c/m = \omega^2$ deb belgilash kiritib, yuqoridagi tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g + \frac{1}{m}F(t). \qquad (1)$$

Bu o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli tenglama. Unga mos bir jinsli tenglama

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (2)$$

bo‘lib, u $x_1 = cos\omega t, x_2 = sin\omega t$ fundamental yechimlar sistemasiga ega.

(1) tenglama yechimini ba’zi xususiy hollarini qaraymiz.

**I-hol.** *F*(t) kuch doimiy: $F(t) = F_0$ . U holda o‘ng tomoni doimiy bo‘lgan tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = q + \frac{F_0}{m} \qquad (3)$$

Bu tenglamani

$$x(0) = 0, x'(0) = 0 \qquad (4)$$

boshlang‘ich shartlarda yechamiz.

(2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t$ ko‘rinishga ega. (3) tenglamaning xususiy yechimini x=A ko‘rinishda izlaymiz va $\frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right)$ ekanligini topamiz. Shunday qilib (3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$x(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + \frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right).$$

Endi (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $C_1$ va $C_2$ larni topamiz.

$$x(0) = C_1 + \frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right) = 0, x'(0) = \omega C_2 = 0,$$

bundan $C_1 = -\frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right), C_2 = 0.$ Demak,

$$x(t) = -\frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right) cos\omega t + \frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right).$$

Shunday qilib, moddiy nuqta $\omega$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}\right)$ chastota va $\frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right)$ amplituda bilan garmonik tebranadi. Tebranish markazi

$$\frac{1}{\omega^2}\left(g+\frac{F_0}{m}\right) = \frac{m}{c}\left(g+\frac{F_0}{m}\right) = \frac{1}{c}(mg + F_0)$$

nuqtada bo‘ladi. Bu nuqta prujinaning $mg + F_0$ kuch bilan statik cho‘zilishiga mos keladi.

**II-hol.** *F(t)* kuch davriy o‘zgaradi: $F(t) = F_0 sin\lambda t$, va$\lambda \neq \omega$. Bu holda (1) tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = q + \frac{F_0}{m}\sin\lambda t \qquad (5)$$

Bu tenglamaning xususiy yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\bar{x}(t) = acos\lambda t + bsin\lambda t + c,$$

Bu yerda $a, b, c$ -o‘zgarmas sonlar. $\bar{x}(t)$ ifodasini (5) tenglamaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(\omega^2 - \lambda^2)\bar{x}(t) = g + \frac{F_0}{m} sin\lambda t,$$

Demak, $a = 0, b = \frac{F_0}{m(\omega^2-\lambda^2)}, c = \frac{g}{\omega^2-\lambda^2}$. Shunday qilib, (5) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} sin\lambda t + \frac{g}{\omega^2 - \lambda^2}. \qquad (6)$$

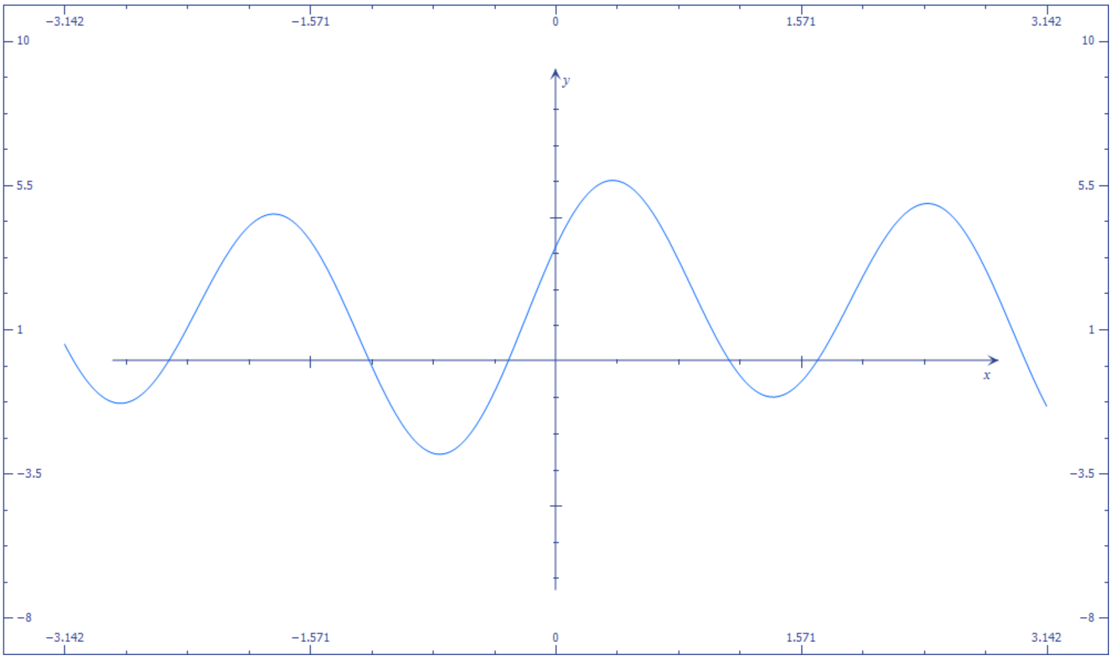
(4) boshlang‘ich shartlardan $C_1$ va $C_2$ larni topamiz:

$$x(0) = C_1 + \frac{g}{\omega^2 - \lambda^2} = 0, x'(0) = \omega C_2 + \frac{\lambda F_0}{m(\omega^2 - \lambda^2)} = 0,$$

bundan $C_1 = -\frac{g}{\omega^2 - \lambda^2}, C_2 = -\frac{\lambda F_0}{\omega m(\omega^2 - \lambda^2)}$. Bu natijalarni (6) qo‘yib, izlanayotgan yechimni topamiz:

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}\left(-gcos\omega t - \frac{\lambda F_0}{\omega m} sin\omega t + \frac{F_0}{m} sin\lambda t + g\right).$$

Bu funksiya umuman olganda davriy bo‘lmaydi, u faqat $\omega/\lambda \in Q$ bo‘lganda davriy bo‘ladi. *x(t)* funksiyaning ifodasi $\frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}$ ko‘paytuvchiga ega. Bundan, ravshanki, agar $\omega$ va λ chastotalar yaqin bo‘lsa, $x(t)$ yetarlicha katta qiymatlar qabul qilishi mumkin.



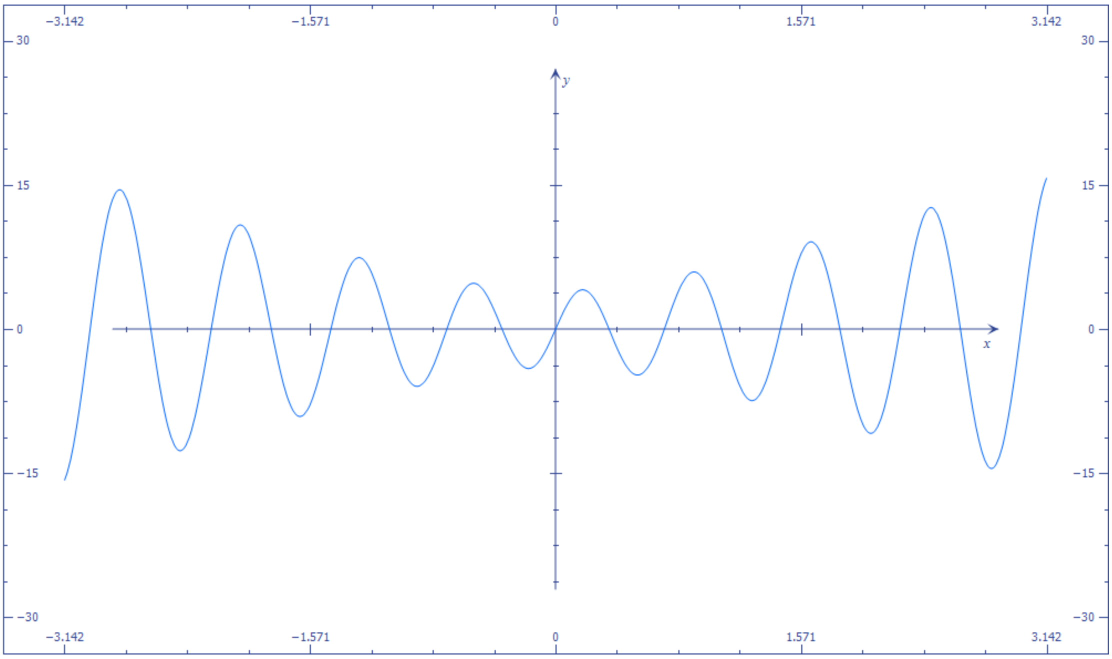

**III-hol.** $F(t)$ tashqi kuch chastotasi tebranishning $\omega$ xos chastotasiga (tebranishning xos chastotasi deb faqat prujinaning elastiklik kuchi evaziga sodir bo‘lgan tebranish chastotasiga aytiladi) teng bo‘lsin: $F(t) = F_0 sin\omega t$. Bunday hol fizikada rezonans deyiladi. Bu holda (1) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g + \frac{F_0}{m} sin\omega t. \qquad (7)$$

Bu tenglama $t(acos\omega t + bsin\omega t) + c$ ko‘rinishdagi xususiy yechimga ega bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, bu yerda $a, b, c$ –biror o‘zgarmas sonlar. Demak (7) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$x(t) = C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t + t(acos\omega t + bsin\omega t) + c.$$

Bu funksiyaning taxminiy grafigi 2-rasmda keltirilgan.Bu funksiya o‘zgarishining o‘ziga xos xususiyati uning amplitudasi vaqt o‘tishi bilan cheksiz kattalashib boradi. Bunga sabab t ko‘paytuvchining mavjudligidir.




Ushbu tenglamani qaraymiz: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (8).

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx} z$$

Almashtirish (1) tenglamani $z'' + I(x)z = 0$ ko‘rinishga keltiradi, bu yerda $I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x)$.

Shu sababli tashqi kuchlarni (masalan muhitning qarshiligini) faqat vaqtning funksiyasi deb qarash mumkin.

### 2.6. Differensial tenglamalar sistemasi

*1. Differensial tenglamalar sistemalari haqida umumiy ma’lumotlar*

U yoki bu masalaning yechimi bitta emas, balki bir nechta noma’lum funksiyalarni topishni taqoza etadi. Buning uchun, umuman aytganda, shuncha tenglamalarga ega bo‘lishimiz zarur. Agar bu tenglamalarning har biri differensial tenglamalar bo‘lsa, u holda differensial tenglamalar sistemalari haqida gapirishadi. Biz birinchi tartibli differensial tenglamalar bilan cheklanamiz.

Differensial tenglamalar sistemalarini qaraganda argument *t*, noma’lum funksiyalar $x_1(t), x_2(t)$ va x.k belgilanadi. Masalan, ikkita noma’lum funksiyali birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \varphi\left(t, x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) = 0, \\ \psi\left(t, x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Differensial tenglamalar sistemalariga ham bitta tenglama uchun aytilgan Koshi masalasi umumlashtiriladi. Masalan, (1) sistema uchun Koshi masalasi $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0$, shartlarni qanoatlantiruvchi, bu yerda $t_0, x_1^0, x_2^0$-berilgan sonlar, $x_1(t), x_2(t)$ yechimlarini topishdan iborat bo‘ladi. Sistema holida ham Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga ixtiyoriy tartibli differensial tenglamalar (sistemalar) keltirilishi mumkin. Buni aniq misolda ko‘rsatamiz. Aytaylik $y''' = f(x, y, y', y'')$ tenglama berilgan bo‘lsin. Agar $y', y''$ funksiyalarni mos ravishda $u$ va $v$ bilan belgilasak, u holda uni

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = f(x, y, u, v) \end{cases}$$

uchta noma’lum $y(x), u(x), v(x)$ funksiyali uchta birinchi tartibli differensial tenlamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin.

*2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Yuqori tartibli bitta tenglamaga keltirish*

Differensial tenglamalar sistemasining maxsus turi- birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz. Ikkita noma’lum $x_1(t), x_2(t)$ funksiyali hol uchun chiziqli sistema quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \qquad (2)$$

bu yerda $\alpha_{ij}$ umuman olganda t argumentning funksiyalaridan iborat. Bu funksiyalarni uzluksiz deb qaraymiz, natijada Koshi masalasining yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema shartlari bajariladi.

(2) sistemani integrallash usullarining biri sistemani bitta noma'lumli ikkinchi tartibli differensial tenglamaga keltirishdan iborat. (2) sistemaning birinchi tenglamasining ikkala tomonini *t* bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}\frac{dx_1}{dt} + \alpha_{12}\frac{dx_2}{dt} + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2,$$

bunda $\frac{dx_1}{dt}$ va $\frac{dx_2}{dt}$ hosilalarni sistemadagi ifodalari bilan almashtirib, quyidagini olamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \alpha_{12}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dt}x_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dt}x_2.$$

o'ng tomonida $x_1$ qatnashgan hadlarni, hamda $x_2$ qatnashgan hadlarni guruhlab, quyidagi ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \beta_1x_1 + \beta_2x_2, \qquad (3)$$

bu yerda $\beta_1 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}\alpha_{21} + \frac{d\alpha_{11}}{dt}, \beta_2 = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \frac{d\alpha_{12}}{dt}$.

(3) tenglamani (2) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birlashtirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = \beta_1x_1 + \beta_2x_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Aytaylik, *t* argumentning qaralayotgan o'zgarish sohasida $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ determinant noldan farqli bo'lsin. U holda sistemani $x_1$ va $x_2$ ga nisbatan yechish mumkin:

$$x_1 = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{d^2x_1}{dt^2}, \qquad (5)$$

$$x_2 = c\frac{dx_1}{dt} + d\frac{d^2x_1}{dt^2}, \qquad (6)$$

bunda $a, b, c, d$ larning ifodalarini keltirmadik. (5) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib, uni yechish usullarini bilamiz. Shuni ta’kidlab o‘tamizki, agar berilgan (2) sistemada koeffitsiyentlar o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lsa, u holda (5) ham o‘zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘ladi.

**Misol.** $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$ sistemani yeching.

**Yechish.** Birinchi tenglamaning ikkala tomonini differensiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\frac{dx_1}{dt} - 2\frac{dx_2}{dt} = 3(3x_1 - 2x_2) - 2(2x_1 - x_2) = 5x_1 - 4x_2.$$

Hosil bo‘lgan yangi tenglamani berilgan sistemaning birinchi tenglamasi bilan birlashtirib, quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 2x_2, \\ \frac{d^2x_1}{dt} = 5x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Bu sistemadan $x_1$ va $x_2$ ni $\frac{dx_1}{dt}$ va $\frac{d^2x_1}{dt}$ lar orqali ifodalaymiz:

$$x_1 = 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{5}{2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{3}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} \quad (8)$$

Natijada $x_1(t)$ noma’lum funksiyaga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamaga kelamiz: $\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$. Bu tenglamani yechib $x_1 = (C_1 + C_2t)e^t$ ni hosil qilamiz. Uni (8) ga qo‘yib, $x_2$ ni topamiz: $x_2 = \frac{1}{2}(2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t$.

*3. Sistemaning matritsa ko‘rinishdagi yozuvi*

Chiziqli sistemalarni o‘rganishda matritsaviy yozuvdan foydalanish qo‘laylik tug‘diradi. $\frac{dx}{dt}$ o‘rniga $\dot{x}$ deb yozishga kelishamiz. Quyidagi matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix}.$$

U holda (2) sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\dot{X} = AX \tag{9}$$

Masalan, $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$ sistema matritsaviy ko‘rinishda quyidagicha yoziladi: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

*4. O‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi.* $x_i = e^{\lambda t}\ (i = 1,2,\dots)$ *ko‘rinishdagi yechimlarni topish.*

Aytaylik, (2) sistemadagi $\alpha_{ij}$ koeffitsiyentlar o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘lsin. Bu holda sistemani yechish uchun chiziqli algebra metodlaridan foydalanish mumkin. Biz bu bandda shunday metodlar haqida tushuncha beramiz va bunda ikki noma’lumli ikkita tenglamalar sistemalari bilan, ya’ni (2) ko‘rinishdagi sistemalar bilan cheklanamiz.

Ravshanki, (2) sistema $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0$ xususiy yechimga ega. Bu yechim nol yechim deyiladi. Bizni boshqa yechimlar qiziqtiradi. Bunday yechimlarni $x_1 = p_1 e^{\lambda t}, x_2 = p_2 e^{\lambda t}$ ko‘rinishda, yoki matritsaviy yozuvdan foydalansak, $X = Pe^{\lambda t}$ ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$-matritsa elementlari bir vaqtda nolga teng emas.

Ravshanki, $\dot{X} = \lambda P e^{\lambda t}.X$ va $\dot{X}$ larning ifodalarini (9) tenglamaga qo‘yib, $\lambda P e^{\lambda t} = APe^{\lambda t}$, undan

$$AP = \lambda P \tag{10}$$

ifodani hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\lambda, P$ juftlikni topish uchun (10) tenglamani yechish lozim. Chiziqli algebra kursidan ma’lumki, $\lambda, P$ juftlik mos ravishda A matritsaning xos soni va xos vektori deyiladi.

(10) munosabatni sistema ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\begin{cases} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 = \lambda p_1, \\ \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 = \lambda p_2 \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)p_1 + \alpha_{12}p_2 = 0, \\ \alpha_{21}p_1 + (\alpha_{22} - \lambda)p_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Chiziqli algebra kursidan ma’lumki, $\lambda$ soni A matritsaning xos soni bo‘lishi uchun

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli. (12) tenglik A matritsaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Agar biror $\lambda_0$ xos son topilsa, u holda unga mos xos vektorni topish uchun (11) sitemadan foydalaniladi. Bu sistemaning har qanday noldan farqli yechimi $\lambda_0$ xos songa mos P xos vektorni beradi.

**Misol.** $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

**Yechish.** Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ yoki } \lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Uning ildizlari $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 4$ va A matritsaning xos sonlari bo‘ladi. $\lambda_1$ xos songa mos xos vektorni (11) sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} (7-5)p_1 + 6p_2 = 0, \\ -p_1 + (2-5)p_2 = 0 \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} 2p_1 + 6p_2 = 0, \\ -p_1 - 3p_2 = 0 \end{cases}.$$

Bundan $p_1 = -3p_2$. Nol bo‘lmagan yechimi $p_2 = s, p_1 = -3s, (s \neq 0)$ bo‘ladi. Demak, $\lambda_1$ xos songa mos xos vektor $s\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Shunga o‘xshash, $\lambda_2$ xos songa mos xos vektor $s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ekanligini topamiz, bu yerda $s \neq 0$.

5. Umumiy yechimni topish

Aytaylik, $\lambda_1, \lambda_2$ (12) xarakteristik tenglamaning ildizlari bo‘lsin. quyidagi hollar bo‘lishi mumkin.

**I-hol**. $\lambda_1, \lambda_2$ haqiqiy va $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Agar $\lambda_1$xos songa mos keladigan xos vektor $P_1$, $\lambda_2$xos songa mos keladigan xos vektor $P_2$ bo‘lsa, u holda $X_1 = P_1 e^{\lambda_1 t}$, $X_2 = P_2 e^{\lambda_2 t}$ formulalar (9) tenglamaning ikkita xususiy yechimlarini aniqlaydi.Umumiy yechim $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$ ko‘rinishda bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, bu yerda $C_1, C_2$-ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

**II-hol**. $\lambda_1, \lambda_2$ haqiqiy va $\lambda_1 = \lambda_2$. Bu holda umumiy yechim

$X = (C_1 + tC_2)X_1$ ko‘rinishda bo‘lishini ko‘rsatish mumkin, bu yerda $C_1, C_2$-ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

**III-hol.** $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Bu holda $\lambda_1$ xos songa mos keladigan xos vektor $P$ bo‘lsa, $\lambda_1$ xos songa mos keladigan xos vektor $\bar{P}$ bo‘ladi. xususiy yechimlar o‘zaro qo‘shma bo‘ladi: $X_1 = Pe^{\lambda t}, X_2 = \bar{P}e^{\bar{\lambda}t}$. Haqiqiy yechimni topish uchun $X_1$ va $X_2$ larni ularning chiziqli kombinatsiyalari bilan almashtiramiz:

$$X_1^* = X_1 + X_2, \qquad X_2^* = \frac{1}{2i}(X_1 - X_2).$$

**Misol.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 7x_1 + 6x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$ sistemani yeching.

**Yechish.** Bu yerda $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Bu matritsani avvalgi misolda ko‘rgan edik. Uning xos sonlari 5 va 4, ularga mos xos vektorlar $P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ va $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ edi.

Sistemaning xususiy yechimlari $X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}, X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$. Umumiy yechim matritsaviy yozuvda $X = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$, yoyiq ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$x_1(t) = -3C_1e^{5t} - 2C_2e^{4t}, x_2(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{4t}.$$

## Tenglamani yeching.

176. $y'' + y' + 2 = 0$

177. $3y'' = \left(1 + y'^2\right)^{3/2}$

178. $4y' + y''^2 = 4xy''$

179. $y'\left(1 + y'^2\right) = ay''$

180. $y'''\left(1 + y'^2\right) - 3y'y''^2 = 0$

181. $yy'' = y' + y'^2$

182. $yy'' = 1 + y'^2$

183. $2yy'' = 1 + y'^2$

184. $y^3 y'' = -1,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$

185. $yy'' - y'^2 = y^2 y'$

186. $nyy'' - (n-1)y'^2 = 0$

187. $ayy'' + by'^2 - \dfrac{yy'}{\sqrt{x^2 + C^2}} = 0$

188. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

189. $xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0$

190. $2xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$

191. $y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$

192. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$

193. $xy''' + y'' + \dfrac{1}{x} = 0$

194. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$

195. $x^4y'' + 3xy^2y' - y^3 = 0$

196. $x^4y'' + x^2y'^2 + y^2 = 0$

197. $x^4y'' + x^2y'^2 - 2xyy' = 0$

198. $x^3y'' + 2xyy' + y^2 = 0$

199. $x^4y'' + x^3y'^2 + 3x^2yy'^2 = 0$

200. $x^4y'' + 3xy^2y' - y^3 = 0$

**Koshi masalasini yeching.**

201. $y^3y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$

202. $y'y''' - 3y''^2 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

203. $y''' = yy'' + y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/2,\ y''(0) = 0$

204. $2y'^2 = (y-1)y'',\ y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

205. $y''' = 3yy',\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = 3/2$

**O‘zgarmas va o‘zgaruvchi koeffitsientli chiziqli tenglamalar**

**Tenglamaning umumiy yechimini toping.**

206. $y'' + 4y' + 3y = 0$

207. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$

208. $y'' - 2y' + 10y = 0$

209. $y^{\prime v} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$

210. $y''' - 8y = 0$

211. $y^{\prime v} - 2y''' - y' - y = 0$

212. $y^{\prime v} + 4y = 0$

213. $y^{\prime v} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0$

214. $y^{\prime v} - y = 0$

215. $y^{\prime v} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

216. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$

217. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$

218. $y'' - 9y' = e^{3x}\cos x$

219. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

220. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}$

221. $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$

222. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}$

223. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}$

224. $y''' - 8y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$

**Tenglamani o‘zgarmaslarni variatsiyalash metodi bilan yeching.**

225. $xy'' + (2x-1)y' = -4x^2$

226. $y'' + y'tgx = \cos x ctgx$

227. $y'' + y' = \dfrac{1}{\cos x}$

228. $y'' + 4y = 2ctgx$

229. $y'' + y' = \dfrac{2}{\sin^2 x}$

230. $y'' + y = x\sin x$

**Eyler tenglamasini yeching.**

231. $x^2y'' - 2y = \cos\ln x$

232. $(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$

233. $x^2y'' - xy' + \dfrac{x^4}{1+x^2} = 0$

234. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$

235. $x^2y'' - xy' - y = x^4$

**Har xil usullarni qo‘llab tenglamani yeching.**

236. $y'' - 3y' + 2y = \left(3 + e^{-x}\right)^{-1},\ y(0) = 1 + 8\ln 2,\ y'(0) = 14\ln 2$

237. $y'' + \dfrac{y}{4} = 1/4 * ctg\left(x/2\right),\ y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 1/2$

238. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1 + e^x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

239. $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x},\ y(0) = \ln 27,\ y'(0) = 1 - \ln 9$

240. $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

**Funksiyalarni chiziqli bog’liq yoki erkli ekanligini tekshiring.**

241. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$

242. $x,\ e^x,\ xe^x$

243. $chx,\ shx,\ 2e^x - 1,\ 3e^x + 5$

244. $x^2 - x + 3,\ 2x^2 + x,\ 2x - 4$

245. $x^2 + 2x,\ 3x^2 - 1,\ x + 4$

**O‘zgaruvchi koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini toping.**

246. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$

247. $x(2x+4)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$

248. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,\ y_1 = e^x$

249. $y'' + 4xy' + \left(4x^2 + 2\right)y = 0,\ y_1 = e^{ax^2}$

250. $y'' - y'tgx + 2y = 0,\ y_1 = \sin x$

**O‘zgaruvchi koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamani yeching.**

251. $x^2y''\ln x - xy' + y = x^2\ln x$

252. $x^2y''\ln x - xy' + y = x\ln x$

253. $xy''\ln x - (2x+1)y' + 2y = 2xe^{2x}$

254. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 10x$

255. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = x^2 + 1$

**Ushbu tenglamalarning $-\infty < x < +\infty$ dagi chegaralangan yechimini toping va uning davriy yechimi ekanligini ko‘rsating.**

256. $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

257. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

258. $y'' + 5y' + 6y = \sin x$

259. $y'' + 5y' + 6y = \cos x$

260. $y'' + 7y' + 10y = \sin 2x$

261. Yer sharining markazidan ingichka quvur o‘tkazilgan bo‘lsin. Unga tashlangan tosh yer markaziga oradagi masofaga proporsional bo‘lgan kuch bilan tortiladi. Tosh qancha vaqtda quvurni bosib o‘tadi?

262. Havoning qarshiligi jism tezligining kvadratiga proporsional va tezlik limitini 75 m/sek deb olib, boshlang’ich tezligi nolga teng bo‘lgan erkin tushuvchi jism harakat qonunini toping.

263. Jism bir minutda 90 marta tebranadi va 15 sekund davomida tebranish amplitudasi ikki marta kamayadi. Tebranma harakatning differensial tenglamasini tuzing.

264. Qayiqda *v=6 m/sek* boshlang’ich tezlik berilgan. Harakat boshlangandan 60 sekund o‘tgach, bu tezlik ikki marta kamayadi. Agar suvning qarshilik kuchi qayiq tezligiga to‘g’ri proporsional bo‘lsa, uning harakat qonunini toping.

265. Massai *m* bo‘lgan moddiy nuqta koordinata boshidan turtilib, masofaga to‘g’ri proporsional bo‘lgan *F(F=8mx)* kuch ta’sirida harakat qilmoqda. Nuqtaga muhitning *R=2mv* qarshilik kuchi ta’sir qilayotgan bo‘lsin. Agar *t*=0 koordinata

boshidan moddiy nuqtagacha bo‘lgan masofa 3 ga teng va tezlik nol bo‘lsa, nuqtaning harakat qonunini toping.

**Tenglamalar sistemasini yo‘qotish usuli bilan yeching.**

266. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$

267. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

268. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$

269. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$

270. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$

## Yakka tartibdagi topshiriqlar

### 1-topshiriq.

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1.1. $(1+y)dy-(1-x)dx=0$

1.2. $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy$

1.3. $x^2dy+(y-1)dx=0$

1.4. $2(xy+y)dx=xdy$

Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

1.5. $x^2dx+ydy=0,\ \ x=0\ \ da\ \ y=1;$

1.6. $(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0,\ \ x=0\ bo'lg\,anda\ \ y=-1;$

1.7. $(1+x)ydx=(y-1)xdy,\ \ x=1\ da\ y=1.$

1.8. $xy^2-y'=x^3+y^3,\ \ x=1\ \ bo'lg\,anda\ \ y=3;$

1.9. $(x-y)dx+xdy=0,\ \ x=1\ \ bo'lg\,anda\ \ y=0;$

1.10. $y^2dx+(x^2-xy)dy=0,\ \ x=1\ \ da\ \ y=1.$

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1.11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x-y)y}{x^2}$ ;

1.12. $x^2y'=y^2-xy+x^2;$

1.13. $(x^2-2xy)dy=(xy-y^2)dx$

1.14. $\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$

1.15. $\left(1-x^2\right)y''=xy'$

1.16. $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$

1.17. $2yy''+\left(y'\right)^2+\left(y'\right)^4=0$

1.18. $xy'=y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

1.19. $y'' + y'tgx = \sin 2x$

1.20. $xy' + y = 3$

## 2-topshiriq.

Berilgan differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

2.1. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$

2.2. $xy' + xe^{y/x} = y$

2.3. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$

2.4. $y'\cos x = (y+1)\sin x$

2.5. $(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$

2.6. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

2.7. $xy'' + 2y' = x^3$

2.8. $x^2 y' - 2xy = 3$

2.9. $y''tgy = 2(y')^2$

2.10. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$

2.11. $3yy'' + (y')^2 = 0$

2.12. $xy' + y = x + 1$

2.13. $y'' - 2y'tgx = \sin x$

2.14. $(1+e^x)y' = ye^x$

2.15. $y'' = 128y^3$

2.16. $y(1+\ln e) + xy' = 0$

2.17. $y'' + 2\sin y\cos^2 y = 0$

2.18. $(1+e^x)yy' = e^x$

2.19. $y''y^3 + 49 = 0$

2.20. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

**3-topshiriq.**

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

3.1. $y'' - 4y' + 3y = 0$

3.2. $y'' - 4y' + 4y = 0$

3.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$

3.4. $4y'' - 4y = 0$

3.5. $y'' + 4y = 0$

3.6. $y'' + 4y' = 0$

3.7. $y'' - y' - 2y = 0$

3.8. $y'' + 25y = 0$

3.9. $y'' - y' = 0$

3.10. $y'' + 4y' + 4y = 0$

3.11. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$

3.12. $y^{IV} + a^4 y = 0$

3.13. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$

3.14. $y'' - 3y' + 2y = 0$

3.15. $y'' + 2ay' + a^2 = 0$

3.16. $y'' + 2y' + 5y = 0$

3.17. $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$

3.18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-y)y}{x^2}$

3.19. $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$

3.20. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$

**4-topshiriq.**

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

4.1. $y' - \dfrac{y}{x} = -1$

4.2. $y' + y = e^{-x}$

4.3. $x^2 y' - 2xy = 3$

4.4. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = 1 + x^2$

4.5 $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$

4.6. $(2x+1)y' + y = x$

4.7. $y' - ytgx = ctgx$

4.8. $y' + y\cos x = \sin 2x$

Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

4.9. $xy' + y = 3,\ \ x = 1\ da\ \ y = 1$

4.10. $(1+x^2)y' - xy = 2x,\ \ x = 0\ \ \ bo'\lg anda\ \ y = 0$

4.11. $xy' + y = x + 1,\ \ x = 2\ \ bo'\lg anda\ \ \ y = 3$

4.12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo‘lganda $y = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

4.13. $y' + \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x = 1$ bo‘lganda $y = -1$ boshlang‘ich shart bajariladigan Koshi masalasini eching.

Ushbu to‘la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

4.14. $\left(x^2 + y\right)dx + \left(x - 2y\right)dy = 0$

4.15. $\left(y - 3x^2\right)dx - \left(4y - x\right)dy = 0$

4.16. $2\left(3xy^2 + 2x^2\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0$

4.17. $\left(3x^2 + 2y\right)dx + \left(2x - 3\right)dy = 0$

4.18. $\left(3x^2 y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2 y + 12y^3\right)dy = 0$

4.19. $3x^2 e^y\, dx + \left(x^3 e^y - 1\right)dy = 0$

Quyidagi differensial tenglama uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamaning umumiy yechimlarini aniqlang:

4.20. $(x^2-y)dx+xdy=0$

**5-topshiriq.**

Berilgan differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

5.1. $(y+xy^2)dx-xdy=0$

5.2. $y^2dx+(xy-1)dy=0$

5.3. $(\sin x+e^y)dx+\cos xdy=0$

5.4. $(x\cos y-y\sin y)dx+(x\sin y+y\cos y)dy=0$

5.5. $2xtgxdx+(x^2-2\sin y)dy=0$

Berilgan tenglamalarning to`la differensial tenglama ekanligini aniqlab, uning umumiy yechimini toping.

5.6. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

5.7. $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx=\frac{2x}{y^2}\cdot\cos\frac{2x}{y}dy$

5.8. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$

5.9. $\left(2x-1-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\frac{1}{x}\right)dy$

5.10. $(y^2+y\cdot sec^2x)dx+(2xy+tgx)dy=0$

5.11. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0$

5.12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

5.13. $[\sin 2x-2\cos(x+y)]dx-2\cos(x+y)dy=0$

5.14. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$

5.15. $(x+y)dx+(e^y+x+2y)dy=0$

5.16. $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0$

5.17. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

5.18. $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx+\dfrac{1-xy}{xy^2}dy=0$

5.19. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0$

5.20. $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0$

**6-topshiriq.**

Berilgan tenglamalarning to`la differensial tenglama ekanligini aniqlab, uning umumiy yechimini toping.

6.1. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{dy}{x}=0$

6.2. $\left(10xy-\dfrac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\dfrac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$

6.3. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=0$

6.4. $e^ydx+(\cos y+xe^y)dy=0$

6.5. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0$

Masalaning shartiga qarab differensial tenglamaning xususiy yoki umumiy yechimini toping.

6.6. $4y^3y'''=y^4-16, \quad y(0)=2\sqrt{2}; \quad y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

6.7. $y''=128y; \quad y(0)=1; \quad y'(0)=8$.

6.8. $y''y^3+64=0; \quad y(0)=4; \quad y'(0)=2$

6.9. $y'' = 32\sin^3 y\cos y; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}; \quad y'(1) = 4$

6.10. $y'' = 2y^3; \;\; y(-1) = 1; \;\; y'(1) = 1$

6.11. $y^2 y'' + xy' = 1$

6.12. $tgx \cdot y''' = 2y''$

6.13. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$

6.14. $y'' + \frac{2x}{1+x^2} \cdot y' = 2x$

6.15. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$

6.16. $y''' - 36y' = 299(\cos 7x + \sin 7x)$

6.17. $2xy''' = y''$

6.18. $xy''' + y'' = 1$

6.19. $xy''' + 2y'' = 0$

6.20. $y'' = 32y^3; \quad y(4) = 1; \;\; y'(4) = 4$

**7-topshiriq.**

7.1 $\quad y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2, \quad y' = 1, \; y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

7.2. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

7.3. $yy'' + y'^2 = 0$

7.4. $y'' + 2y(y')^3 = 0$

7.5. $y''y^3 = 1$

7.6. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$

7.7. $y'' + y'tgx = \sin 2x$

7.8. $y'' + 2y'^2 = 0$

7.9. $xy'' - y'tgx = e^x x^2$

7.10. $2yy'' = (y^1)^2$

7.11. $t\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0$

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

7.12 $y'' + 3y' - 4y = 0$

7.13. $y'' - 2y' - 5y = 0$

7.14. $y'' - y = 0$

7.15. $4y'' - 12y' + 9y = 0$

7.16. $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$

7.17. $y'' - 2y' + 50y = 0$

7.18. $y'' - 4y' + 7y = 0$

7.19. $y'' + 6y' = 0$

7.20. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$bo‘ladiganboshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

**8-topshiriq.**

Masalaning shartiga qarab differensial tenglamaning xususiy yoki umumiy yechimini toping.

8.1. $xy''' = y''$

8.2. $xy''' + y'' = 1$

8.3. $xy''' + 2y'' = 0$

8.4. $y'' = 32xy^3$; $y(4) = 1$; $y'(4) = 4$

8.5. $y''y^3 + 16 = 0$; $y(1) = 2$; $y'(1) = 2$

8.6. $y'' = 2y^3;\ \ y(-1) = 1;\quad y'(-1) = 1$

8.7. $y''y^3 + y = 0;\ \ y(0) = -1;\quad y'(0) = -2$

8.8. $y^3y'' = 4(y^4 - 1);\quad y(0) = \sqrt{2};\ \ y(0) = \sqrt{2}$

8.9. $xy'' = 2$

$y'' + py' + qy = f(x)$ ko'rinishidagi tenglamaning $y_0 = y(x_0);\quad y_0' = y'(x_0)$ boshlang'ich shartlarini qanoatkantiruvchi xususiy yechimini toping.

8.10. $y'' + 4y - 12y = 8\sin 2x; y(0) = 0; y'(0) = 0$

8.11. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; y(0) = \frac{4}{3}; y'(0) = \frac{1}{27}$

8.12. $y'' + 4y + c^{-2x};\quad y(0);\quad y'(0) = 0$

8.13. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x};\quad y(0);\quad y'(0) = 3$

8.14. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x;\quad y(0);\quad y'(0) = 3$

8.15. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\cdot e^{-x}; y(0) = 0; y'(0) = 0$

8.16. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; y(0) = 1; y'(0) = 0$

8.17 $y'' - 4y' = 6x^2 + 1; y(0) = 2; y'(0) = 3$

8.18 $y'' - 2y' + y = 16e^x; y(0) = 1; y'(0) = 2$

8.19 $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; y(0) = 3; y'(0) = 2$

8.20 $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2;\quad y(0) = 1;\quad y'(0) = 0$

## 9-topshiriq.

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

9.1. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$

9.2. $y^{IV} + a^4y = 0$

9.3. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$

9.4. $y'' - 3y' + 2y = 0$

9.5. $y'' - 4y' + 3y = 0$

9.6. $y'' - 4y' + 4y = 0$

9.7. $y'' + 2ay' + a^2 = 0$

9.8. $y'' + 2y' + 5y = 0$

9.9. $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$

9.10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-y)y}{x^2}$

9.11. $x^2 y' = y^2 - xy + x^2$

9.12. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$

9.13. $y'' - 4y' + 13y = 0$

9.14. $y'' - 4y = 0$

9.15. $y'' + 4y = 0$

9.16. $y'' + 4y' = 0$

9.17. $y'' - y' - 2y = 0$

9.18. $y'' + 25y = 0$

9.19. $y'' - y' = 0$

9.20. $y'' + 4y' + 4y = 0$

**10-topshiriq.**

Berilgan differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

10.1. $(x^2+y)dx+(x-2)dy=0$

10.2. $2(3xy^2+2x^2)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$

10.3. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2+12y^3)dy=0$

10.4. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$

10.5. $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$

10.6. $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$

Berilgan differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

10.7. $(y+xy^2)dx-xdy=0$

10.8. $y^2dx+(xy-1)dy=0$

10.9. $(\sin x+e^y)dx+\cos xdy=0$

10.10. $(x\cos y-y\sin y)dx+(x\sin y+y\cos y)dy=0$

10.11. $2xtgxdx+(x^2-2\sin y)dy=0$

10.12. $x^3y''+x^2y'=1$

10.13. $yy''+y'^2=0$

10.14. $y''+2y(y')^3=0$

10.15. $xy''-y'tgx=e^xx^2$

10.16. $2yy''=(y')^2$

10.17. $y''+y'tgx=\sin 2x$

10.18. $y''y^3=1$

10.19. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$

10.20. $y''+2y'^2=0$.

## 11-topshiriq.

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

11.1. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$

11.2. $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$

11.3. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$

11.4. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$

11.5. $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$

11.6. $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$

11.7. $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

11.8. $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$

11.9. $y'' - 4y' + 7y = 0$

11.10. $y'' - 2y' + 50y = 0$

11.11. $y'' + 3y' - 4y = 0$

11.12. $y'' - 2y' - 5y = 0$

11.13. $4y'' - 12y' + 9y = 0$

11.14. $y'' + 6y' = 0$

11.15. $y'' - y = 0$

11.16. $y' - \dfrac{y}{x} = -1$

11.17. $x^2 y' - 2xy = 3$

11.18.. $y' + y = e^{-x}$

11.19. $y' - \dfrac{2x}{1 + x^2} y = 1 + x^2$

11.20. $y'' + 16y = \sin 4x$

Tenglama uchun $x=0$ bo‘lganda $y=1,\ y'=\frac{7}{8}$ bo‘ladiganboshlang‘ich shartlarda, Koshi masalasini yeching.

**12-topshiriq.**

Xarakteristik tenglama yordamida sistemaning umumiy yechimini toping.

12.1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=4x+6y \\ \frac{dy}{dt}=4x+2y \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-5x-4y \\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+y \\ \frac{dy}{dt}=8x+y \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=6x+3y \\ \frac{dy}{dt}=-8x-5y \end{cases}$

12.5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-x+5y \\ \frac{dy}{dt}=x+3y \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x-2y \\ \frac{dy}{dt}=2x+8y \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-4x-6y \\ \frac{dy}{dt}=-4x-2y \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-5x-8y \\ \frac{dy}{dt}=-3x-3y \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$

12.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

12.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

12.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

12.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$

12.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

12.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 12x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 12y \end{cases}$

12.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$

12.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$

12.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$

12.20 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y \end{cases}$

## 13-topshiriq.

$y'' + py' + qy = f(x)$ ko'rinishidagi tenglamaning $y_0 = y(x_0), \quad y_0' = y'(x_0)$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

13.1. $y''4y - 12y = 8\sin 2x; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

13.2. $y'' - 6y' + 9y = x + 3;$ ; $\quad y(0) = \dfrac{4}{3}; \quad y'(0) = \dfrac{1}{27}$

13.3. $y'' + 4y' = c^{-2x}; \; y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

13.4. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.5. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$

13.6. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7) \cdot e^{-x}; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.7. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.8. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1; \; y(0) = 2; \quad y'(0) = 3$

13.9. $y'' - 2y' + y = 16e^x; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$

13.10. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; \; y(0) = 3; \quad y'(0) = 2$

13.11. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.12. $y'' - 6y' - 9y = 3x - 8e^x; \; y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

13.13. $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x; \; y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

13.14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x; \; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.15. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2\cos x - \sin x); \;\; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.16. $y'' + 2y' + y = e^x \cdot \cos 2; \;\; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.17. $y'' + 2y' = 4e^x (\sin x + \cos x); \;\; y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$

13.18. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x; \;\; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

13.19. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x; \;\; y(0) = 2; \quad y'(0) = 1$

13.20. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x; \;\; y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

**Adabiyotlar**

1. Исламов А.И., Исламов Қ.А. Олий математикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Т-1.,Т., ТДИУ , 2005.
2. Соатов Ё.У Олий математика. Т., Ўқитувчи, 1995. 1- 4 қисмлар.
3. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.1., Тошкент, “Ўқитувчи”, 1995.
4. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.2., Тошкент, “Ўзбекистон”, 1999.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука,1980.
6. Воеводин В.В. Линейная алгебра.- М.:Наука.1980 .
7. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.- М.Наука,1986.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 2 т.- М.: Высш.шк.,1981.-Т.1.
9. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т.- М.:Наука, 1985.-Т.1.
10. Turgunbayev R., Ismailov SH. Abdullayev O. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami. T.:TDPU. 2007 y.
11. C. Henry Edwards, David E. Penney, Davit T. Calvis. Pearson Education, USA, 2018, 758 p.
12. Dennis G. Zill. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Boston, 2018, 462 p.
13. George F. Simmons, Steven G. Krantz. Differential Equations: theory, technique, and practice. New York, 2007, 534 p.
14. Steven Holzner. Differential Workbook for Dummies. 2009 by Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana, 315 p.
15. William A. Adkins, Mark G. Davidson. Ordinary Differential Equations. Springer Science+Business Media New York 2012, 815 p.