«O'ZBEKISTON TEMIR YO'LLARI» DATK

A. Ikromov nomli Toshkent temir yo'l muxandislari instituti

Oliy matematika kafedrasi

Eshmamatova D.B.

OLIY MATEMATIKA KURSIDA "OLIY ALGEBRA" BO'LIMI ELEMENTLARI

Barcha yo'nalishdagi bakalavr – talabalar uchun uslubiy qo'llanma

Toshkent - 2005

UDK 519. 622.1

Oliy algebra kursiga kirishda talabalar qator qiyinchiliklarga duch keladilar. Uslubiy qo'llanmada oliy algebra kursining quyidagi masalalari ko'rilgan:

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari va ularni hisoblash. Yuqori tartibli determinantlar.
2. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish usullari (bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan).
3. Matritsalar ustida amallar. Matritsaning rangi.
4. Teskari matritsa. Chiziqli tenglamalar sistemalarini matritsalar yordamida yechish.
5. Kompleks sonlar va ular ustida amallar.
6. Qo'shma kompleks sonlar va ularning xossalari.
7. Kompleks sonlarni darajaga ko'tarish va ildizdan chiqarish. Muavr formulasi.
8. Ko`phadlar. Ular ustida amallar. Ko'phadning ildizlari. Gorner usuli.
9. Ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish.
10. Viet formulalari.

Har bir mavzu yuzasidan qisqacha nazariy ma'lumotlar berilgan (asosiy tushunchalar, ta'riflar, teoremalar va formulalar), shu qatorda misollar yechishning usullari ko'rsatilgan bo'lib, talabalarning mustaqil yechishlari uchun misollar keltirilgan.

Adabiyotlar 6.

Institut tahririy kengashida tasdiqlangan.

Muallif:

D.B. Eshmamatova - «Oliy matematika» kafedrasi dotsenti.

Kafedra mudiri:

A.F. Lavrik - O'zRFA akademigi f-m. f.d., professor.

Taqrizchilar:

R.N. G'anixo'jaev - O'zbekiston Milliy Universiteti, fizika-matematika fanlari doktori. professor.

M.A. Berdiqulov - Toshkent temir yo'l muxandislari instituti «Oliy matematika» kafedrasi, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Muharrir: Umurzakova T.I.

Nashrga ruxsat etildi 7.07.05 Hajmi 3,2 b.t. Buyurtma № 92

Qog'oz bichimi 60×84 1/16 Adadi 300 nusxa Bepul

ToshTYMI bosmaxonasi. Toshkent shahar, E. Odilxo'jaev ko'chasi, 1 uy.

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMALARI. DETERMINANTLAR.

1 - §. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari va ularni hisoblash. Yuqori tartibli determinantlar.

Chiziqli tenglamalar sistemalari nazariyasi oliy algebra kursining asosiy bo'limi hisoblanadi. Uslubiy qo'llanmamiz oliy algebra kursining asosiy qismini tashkil qiluvchi chiziqli tenglamalar sistemalarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, bu erda tenglamalari va noma'lumlari soni ixtiyoriy bo'lgan sistemalarni o'rganamiz.

Bizga n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Bu erda $x_1, x_2, \dots, x_n$ - lar noma'lumlar, a_{ij} orqali i-tenglamadagi x_j noma'lum oldidagi koeffitsientini, hamda shu tenglamaning ozod hadini b_i orqali belgilaymiz.

1-ta'rif. *(1) chiziqli tenglamalar sistemasining ozod hadlari, ya'ni b_i lar nolga teng bo'lsa, u holda bunday sistema bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, aks holda (ya'ni $b_i \neq 0$ bo'lsa) bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi deb ataladi.*

Noma'lumlar oldidagi a_{ij} koeffitsientlardan m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchakli jadvalni tuzamiz. Bu jadval m×n matritsa deb ataladi.

Agar m=n bo'lsa, bunday matritsa n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Bu matritsaning yuqori chap uchidan pastki o'ng uchigacha tushgan koeffitsientlari, ya'ni $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ koeffitsientlardan tuzilgan diagonali bosh diagonal deyiladi. Agar bosh diagonaldagi elementlarning barchasi birga teng bo'lib, qolgan elementlari nolga teng bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deyiladi.

To'rtta sondan iborat $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ kvadrat jadval ikkinchi tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Bu matritsaga mos keluvchi ikkinchi tartibli determinant deb quyidagicha aniqlanuvchi songa aytiladi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (2)$$

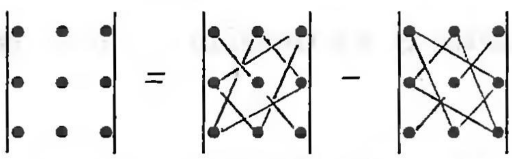
Misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ matritsaning determinantini hisoblang.

Yechish. $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 4 = 34$.

Yuqoridagi singari 3-tartibli kvadrat matritsaning determinantini ko'ramiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \qquad (3)$$

3-tartibli determinantni hisoblashning bu usuli "uchburchak usuli" deyiladi va bu usulni quyidagi shakl yordamida aks ettirish mumkin:



Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, biz determinant tushunchasini faqat kvadrat matritsalar uchun kiritamiz.

Endi n-tartibli kvadrat matritsa berilgan bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

2-ta'rif. *Agar berilgan* $A=(a_1,\dots,a_n), B=(b_1,\dots,b_n),\dots,C=(c_1,\dots,c_n)$ *satrlar uchun kamida bittasi noldan farqli bo'lgan shunday* $\alpha,\beta,\dots,\gamma$ *sonlar topilib, quyidagi tengliklar bajarilsa*

$$\alpha a_j+\beta b_j+\gamma c_j=0 \qquad (j=1,2,\dots,n),$$

u holda bu satrlar chiziqli bog'liq deyiladi.

Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish qulayroq $\alpha A+\beta V+\dots+\gamma C=0.$ *Bunda* $0=(0,\dots,0)$ *nol satr. Agar* $\alpha,\beta,\dots,\gamma$ *sonlarning barchasi nolga teng bo'lsa, yuqoridagi satrlar chiziqli bog'liqmas deyiladi.*

3-ta'rif. *(4) matritsani transponirlash deb, uni shunday almashtirishga aytiladiki, bunda matritsaning satrlari o'sha nomerli ustunga yoziladi, ya'ni matritsa quyidagi ko'rinishga keladi:*

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(4) matritsaga mos determinantni ham transponirlash mumkin.

Determinantlarning asosiy xossalari:

1^0. Determinant transponirlash natijasida o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, transponirlangan matritsaning determinanti berilgan matritsa determinantiga teng.

2^0. Agar determinantning satrlaridan biri noldan iborat bo'lsa, bunday determinant nolga teng bo'ladi.

3^0. Agar bir determinant ikkinchisidan uning ikkita satrining o'rnini almashtirish orqali hosil qilingan bo'lsa, u holda birinchi determinantning barcha elementlari teskari ishora bilan ikkinchi determinantning ham elementlari bo'ladi, ya'ni ikkita satrining o'rni almashishidan determinant faqat ishorasini o'zgartiradi.

4^0. Ikkita bir xil satrga ega bo'lgan matritsaning determinanti nolga teng.

5^0. Agar determinantning ixtiyoriy satri elementlari biror k songa ko'paytirilsa, u holda determinantning o'zi ham shu songa ko'pay tiriladi.

6^0. Agar biror determinantning ikkita satri proporsional bo'lsa, bunday detetminant nolga teng.

7^0. Agar n - tartibli determinant i-satrining barcha elementlari ikkita qo'shiluvchining yig'indisi $a_{ij} = \alpha_j + \beta_j$ $j=\overline{1,n}$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladiki, bu determinantlarning i-satridan boshqa satrlari berilgan determinantning satrlari bilan bir xil bo'lib, ulardan birining i-satr elementlari α_j elementlardan, ikkinchisining i-satridagi elementlari esa β_j elementlardan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1+\beta_1 & \alpha_2+\beta_2 & \dots & \alpha_n+\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Agar har qanday j ($j \neq i$) nomerli satr uchun shunday k_j son topish mumkin bo'lsaki, j - satrni k_j ga ko'paytirib, so'ngra i - satrdan boshqa hamma satrlarni qo'shib, i - satrni hosil qilsak, u holda determinantning i - satrini uning qolgan satrlarining *chiziqli kombinatsiyasi* deyiladi .

8^0. Satrlaridan biri qolgan satrlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat determinant nolga teng.

9^0. Agar determinantning satrlaridan biriga uning boshqa satrining mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Determinant biror a_{ik} elementining M_{ik} minori deb, shu determinantdan a_{ik} element turgan satr va ustunni o'chirish natijasida hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi quyidagicha aniqlanadi:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Agar (4) kvadrat matritsaning determinantini 1-satr elementlari bo'yicha yoysak, u quyidagiga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Endi ixtiyoriy tartibli determinantni hisoblashning ikkita usulini keltiramiz:

1. Determinant tartibini pasaytirish usuli – determinant biror qatori elementlarining bittasidan boshqalarini oldindan nolga aylantirib, shu qator bo'yicha yoyish usuli.

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ 11 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 11 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 6\cdot 2 - 3\cdot 11\cdot(-1) + 5 = 32$$

2. Determinantni uchburchak ko'rinishga keltirish usuli. Bunda determinant elementlari ustida shunday almashtirish bajariladiki, bu almashtirish natijasida determinantning bosh diagonalidan bir tomonda yotuvchi hamma elementlari nolga aylantirilib, determinant uchburchak shaklga keltiriladi va u bosh diagonali elementlari ko'paytmasiga teng:

$$\Delta=\begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} & \dots & в_{1n} \\ 0 & в_{22} & \dots & в_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & в_{nn} \end{vmatrix}=в_{11}\cdot в_{22}\cdot\ldots\cdot в_{nn}.$$

Misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ -3 & -6 & -9 & 0 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ -3 & -6 & -9 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 5\cdot 12=120.$$

Bu determinantning birinchi satrini 3 ga ko'paytirib to'rtinchi satriga qo'shdik, natijada asosiy diagonaldan pastdagi elementlarning barchasi nolga teng bo'ldi.

1. Mustaqil yechish uchun misollar:

a) Berilgan determinantlarni tartibini pasaytirish usuli bilan yeching:

1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. 1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. 1.3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$. 1.5. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -3 & -6 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \end{vmatrix}$. 1.6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

1.7. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 12 \end{vmatrix}$ 1.8. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \\ 2 & 6 & 11 \end{vmatrix}$. 1.9. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 21 & -5 \end{vmatrix}$. 1.10. $\begin{vmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix}$

b) Quyidagi determinantlarni uchburchak ko'rinishga keltirish usuli bilan yeching:

1.11. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$. 1.12. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 12 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$. 1.13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 3 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. 1.14. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. 1.16. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & -7 & 2 \end{vmatrix}$. 1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.18. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 11 \\ 10 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. 1.19. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. 1.20. $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

2-§. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish usullari.

4-ta'rif *Agar biror* $h_1, h_2, \dots, h_n$ *sonlar sistemasi berilgan (1) chiziqli tenglamalar sistemasining har bir tenglamasini ayniyatga aylantirsa, u holda bu sonlar sistemasi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining* yechimi *deb ataladi.*

Umuman aytganda, chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmasligi yoki cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi mumkin. Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, bunday sistema **birgalikdagi** sistema, aks holda sistema **birgalikda bo'lmagan** sistema deyiladi. Masalan, quyidagi sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$$

birgalikda bo'lmagan sistemaga misol bo'ladi.

Agar birgalikdagi sistema yagona yechimga ega bo'lsa, u holda chiziqli tenglamalar sistemasi *aniq* sistema, agar tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, bunday sistema *aniqmas* sistema deyiladi. Masalan,

$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$ sistema aniq sistema bo'lib, u $x_1 = 13, x_2 = 3$ yechimlarga ega.

Bizga ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \qquad (5)$$

Sistemadan x_1 o'zgaruvchini topish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini esa $-a_{12}$ ga ko'paytirib, ularni qo'shamiz va natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

Xuddi shu ishni x_2 o'zgaruvchini topish uchun ham qaytaramiz va natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

ni hosil qilamiz. So'ngra

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (6)$$

deb faraz qilib,

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (7)$$

ni topamiz. Bundan ko'rinib turibdiki, agar ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining koeffitsientlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, u holda (5) sistemaning yechimini quyidagi tartibda topamiz:

1) Barcha noma'lumlarni kasr ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu holda kasrlarning maxrajlari bir xil bo'lib, u (6) determinantga teng.
2) $x_i = (i = 1,2)$ noma'lumning surati esa (6) determinantda i- ustunni , ya'ni qidirilayotgan noma'lumning koeffitsientlari ustunini (5) sistemaning

ozod hadlaridan iborat ustun bilan almashtirishdan hosil bo'ladigan determinantdan iborat bo'ladi.

Bu keltirgan qoidamiz ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi deb ataladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$ bo'lsa, u holda

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

bo'ladi.

Xuddi shu qoidani uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemalari uchun ham qo'llash mumkin.

Misol. Quyidagi sistemani yeching: $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$

Yechish: Sistema koeffitsientlaridan tuzilgan bosh matritsasi determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 12 - 3 + 8 + 2 - 45 = -30 \neq 0.$$

Demak, sistema yagona yechimga ega va unga Kramer qoidasini qo'llaymiz:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = -60, \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = -90,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 3.$$

Kramer qoidasi n≥4 bo'lganda yuqori tartibli determinantlarni yechishni talab etadi. Shuning uchun bunday sistemalarni yechishda Gauss usulidan foydalanish qulay. Gauss usulini boshqacha qilib, noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli ham deb ataladi.

Biz n ta noma'lumli m ta chiziqli (1) tenglamalar sistemasini, hamda sistema koeffitsientlaridan tuzilgan matritsani ko'raylik.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Bu matritsaga sistemaning ozod hadlaridan tuzilgan ustun qo'shilishidan hosil qilingan quyidagi matritsa (1) sistemaning kengaytirilgan matritsasi deyiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (9)$$

5-ta'rif. (1) sistema ustida elementar almashtirishlar deb, quyidagilarga aytiladi:

1) sistemaning biror tenglamasini noldan farqli songa ko'paytirish;
2) sistemaning biror tenglamasiga noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa tenglamasini qo'shish;
3) sistemaning ikkita tenglamasi joyini almashtirish.

Sistema ustida chiziqli amallar bajarish natijasida yangi sistemaga ega bo'lamiz.

Gauss usuli. Ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasi (1) berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun $a_{11}\neq 0$ deylik. Umuman olganda u nolga teng bo'lishi ham mumkin, albatta. Bu holda biz ishni sistemaning birinchi koeffitsienti noldan farqli bo'lgan boshqa tenglamasidan boshlashimiz kerak bo'ladi.

Birinchi tenglamadan boshqa barcha tenglamalarda x_1 o'zgaruvchini yo'qotamiz, ya'ni birinchi tenglamaning ikkala tomonini $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ songa ko'paytirib, ikkinchi tenglamadan ayiramiz, so'ngra $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ songa ko'paytirilgan birinchi tenglamaning hamma tomonini uchinchi tenglamadan ayiramiz. Bu ishni barcha tenglamalar uchun bajaramiz.

Yuqorida aytib o'tilgan yo'l bilan biz n ta noma'lumli s ta chiziqli tenglamalardan iborat yangi sistemaga ega bo'lamiz, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2', \\ \quad a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 + \ldots + a_{3n}'x_n = b_3', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{s2}'x_2 + a_{s3}'x_3 + \ldots + a_{sn}'x_n = b_n'. \end{cases} \tag{10}$$

Yangi a'_{ij} koeffitsientlar va b_i' ozod hadlar berilgan (1) sistemaning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalanadi.

(10) chiziqli tenglamalar sistemasi (1) sistemaga ekvivalent ekanligi aniq. Keyingi qiladigan ishimiz, (10) sistemada birinchi tenglamaga tegmasdan, sistemaning boshqa tenglamalarini o'zgartirishdan iborat. Bu tenglamalar ichida chap tomonlarining barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lgan tenglamalar yo'q deb faraz qilamiz, agar sistemaning birorta tenglamasining barcha koeffitsientlari va ozod hadi nolga teng bo'lganda bu tenglamani tashlab yuborgan bo'lar edik, aks holda sistemaning barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lib, ozod hadi noldan farqli bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmasligi isbotlangan bo'lar edi. Shunday qilib, a_{ij}' koeffitsientlar orasida noldan farqlilari bor; aniqlik uchun $a_{22}' \neq 0$ deymiz. (10) sistemaning ikkinchi tenglamasini $\frac{a_{32}'}{a_{22}'}, \frac{a_{42}'}{a_{22}'}, \ldots, \frac{a_{s2}'}{a_{22}'}$ sonlarga ko'paytirib, tenglamaning har ikkala qismini uchinchi, to'rtinchi va keyingi tenglamalardan ayirib, sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan boshqa tenglamalaridan x_2 noma'lumni yo'qotdik va quyidagi sistemaga ega bo'ldik:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2', \\
\qquad\qquad a_{33}''x_3 + \ldots + a_{3n}''x_n = b_3'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{t3}''x_3 + \ldots + a_{tn}''x_n = b_t''.
\end{cases}
$$

Hosil bo'lgan sistemamiz t ta tenglamaga ega bo'ladi, $t \le s$, chunki ba'zi tenglamalar tashlab yuborilgan bo'lishi mumkin. Agar sistemamiz birgalikda bo'lsa, u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \ldots + a_{2,k-1}'x_{k-1} + a_{2k}'x_k + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{k-1,k-1}^{(k-2)}x_{k-1} + a_{k-1,k}^{(k-2)}x_k + \ldots + a_{k-1,n}^{(k-2)}x_n = b_{k-1}^{(k-2)}. \\
\qquad a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Bunda

$$
a_{11} \ne 0, \quad a_{22}' \ne 0, \ldots, \quad a_{k-1,k-1}^{(k-2)} \ne 0
$$
$$
a_{kk}^{(k-1)} \ne 0.
$$

Shuningdek, $k \le s$ ekanligini qayd qilib o'tamiz, ravshanki, $k \le n$.

Bu holda (1) sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni u $k=n$ bo'lganda aniq va $k<n$ bo'lganda aniqmas bo'ladi.

Agar $k=n$ bo'lsa sistema quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2', \\
\qquad\qquad a_{33}''x_3 + \ldots + a_{3n}''x_n = b_3'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}.
\end{cases}
\tag{12}
$$

Oxirgi tenglamadan x_n noma'lumni topamiz va bu qiymatni oxiridan ikkinchi tenglamaga qo'yib, x_{n-1} noma'lumni topamiz va hokazo. Bu ishni davom ettirib (12) sistema yagona yechimga ega ekanligini ko'rish qiyin emas.

Agar k<n bo'lsa, u holda "ozod" noma'lumlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ uchun ixtiyoriy sonli qiymatlar olamiz, so'ngra (11) sistemada pastdan yuqoriga qarab harakatlanib yuqoridagi singari $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ noma'lumlar uchun aniq qiymatlarni topamiz. O'zgaruvchilarning qiymatlarini cheksiz ko'p usul bilan tanlab olish mumkin bo'lganligi tufayli (11) sistema, ya'ni (1) sistema birgalikda, ammo aniqmas sistema bo'ladi.

Umuman Gauss usulini ixtyoriy chiziqli tenglamalar sistemalari uchun tatbiq qilish mumkin. Bunda, agar almashtirishlar jarayonida barcha noma'lumlar oldidagi koeffitsientlari nolga teng, ozod hadi esa noldan farqli bo'lgan tenglama hosil bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi, aks holda sistema birgalikda bo'ladi. Agar birgalikdagi (11) sistema "uchburchak" shakliga kelsa, u holda sistema aniq sistema , "trapetsiodal" shakliga kelsa (tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kam bo'lsa k<n), u holda sistema aniqmas sistema bo'ladi.

Yuqorida aytilganlarni chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemalariga ham qo'llasa bo'ladi. Bunday sistema doim birgalikda bo'ladi, chunki uning har doim (0,0,...,0) nol yechimi mavjud.

Agar chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, bu sistema nol echimdan tashqari yana noldan farqli, ya'ni ba'zi noma'lumlarning (hammasi bo'lishi ham mumkin) qiymatlari noldan farqli yechimlarga ega bo'ladi; bunday yechimlar cheksiz ko'p bo'ladi.

Misol. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$ sistemani Gauss usuli bilan yeching:

Yechish. Sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalari o'rnini almashtiramiz,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 5x_1-x_2-x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=16, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 11x_2+16x_3=70, \\ 5x_2+10x_3=40, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 11x_2+16x_3=70, \\ 6x_3=18, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3. \end{cases}$$

Agar chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa, bu sistema trevial nol yechimdan boshqa noldan farqli, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Misol. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Bu sistemada birinchi tenglamani -2 ga ko'paytirib, ikkinchisiga qo'shamiz: $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ -5x_2-3x_3=0. \end{cases}$

Ozod noma'lum sifatida x_2 yoki x_3 lardan birini olish mumkin. Aytaylik $x_3=\lambda$ bo'lsin (bir noma'lumni aniqlaymiz). U holda $x_2=-\frac{3}{5}\lambda$, $x_1=\frac{1}{5}\lambda$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib sistema yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{1}{5}\lambda,\ -\frac{3}{5}\lambda,\ \lambda.$$

Endi matritsaning rangi tushunchasini kiritamiz: *Biror A matritsaning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibi bu matritsaning rangini beradi va u* rang (A) *kabi belgilaniladi.*

Minorni kengaytirish (qo'shimcha satr va ustunlarni qo'shish) natijasida hosil bo'lgan yangi minor berilgan minorni hoshiyalovchi deyiladi.

Matritsaning rangini hisoblash uchun quyidagi umumiy qoidadan foydalanish mumkin:

Matritsaning rangini hisoblash uchun quyi tartibli minorlardan yuqori tartibli minorlarga o'tish kerak. Agar noldan farqli k - tartibli minor topilgan bo'lsa, u holda bu minorni hoshiyalovchi (k+1) – tartibli minorlar ham *hisoblanadi. Agar ularning barchasi nolga teng bo'lsa, u holda berilgan matritsaning rangi k ga teng bo'ladi.*

Masalan, quyidagi matritsalarni ko'rib chiqaylik :

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&1&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&2&5\\2&4&9\end{pmatrix}.$$

A_1 matritsaning rangi 1 ga teng, chunki uning barcha 2 – va 3- tartibli minorlari 0 ga teng, 1-tartibli minorlari esa, ya'ni matritsa elementlari orasida esa 0 dan farqlilari bor. A_2 – matritsaning rangi esa 2 ga teng, chunki $\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&5\\1&7\end{vmatrix}\neq 0$, barcha 3-tartibli minorlari (matritsaning 4 ta 3-tartibli minorlari bor) esa 0 ga teng. A_3 – matritsaning rangi esa 3 ga teng, chunki uning yagona 3-tartibli minori 0 dan farqli.

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, matritsaning rangini topish, umuman olganda juda ko'p hisoblashlar qilishni (ta'rifdan kelib chiqqan holda) taqozo etadi. Lekin matritsa rangini hisoblash uchun ishni kamaytirishning bir yo'li matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarishdan iboratdir.

Teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda, A→B bo'lsa, rang A =rang B.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1&3&2&0&5\\2&6&9&7&12\\-2&-5&2&4&5\\1&4&8&4&20\end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.

Yechish. Bu matritsa elementlari ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz. Uning birinchi satr elementlarini -2 ga ko'paytirib, ikkinchi satr elementlariga qo'shamiz, so'ngra birinchi satrni 2 ga ko'paytirib uchinchi satrga qo'shamiz va birinchi satr elementlaridan to'rtinchi satr elementlarini ayirib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Hosil bo'lgan matritsaning to'rtinchi satridan uchinchisini ayirib, ikkinchi va uchinchi satrlari o'rnini almashtirib

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qildik. Bu matritsaning rangi 3 ga teng, chunki uning 3- tartibli chap o'ng burchakdagi minori noldan farqli bo'lib, barcha to'rtinchi tartibli minorlari nolga teng.

Agar biz oxirgi matritsaning uchinchi satr elementlarini 5 ga bo'lsak (yana bir elementar almashtirish bajarsak) , bosh diagonali birlardan iborat matritsani hosil qilamiz, ya'ni

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bunday ko'rinishdagi matritsa *trapetsiodal* (trapetsiya ko'rinishidagi) matritsa deyiladi.

Endi yana chiziqli tenglamalar sistemasini o'rganishga qaytaylik. Biz n ta noma'lumli m ta chiziqli (1) tenglamalar sistemasini, hamda sistema koeffitsientlaridan tuzilgan matritsasini va uning kengaytirilgan matritsasini ko'raylik

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{pmatrix}$$

Asosiy masalalardan biri bu sistemaning birgalikda bo'lish-bo'lmasligini hal qilishdir. Bu masalani quyidagi teorema to'la hal qiladi.

Kroneker-Kapelli teoremasi. *(1) chiziqli tenglamalar sistemasi kengaytirilgan $\overline{A}$ matritsaning rangi A matritsa rangiga teng bo'lganda va faqat shu holdagina birgalikda bo'ladi.*

2. Mustaqil yechish uchun misollar:

I. Berilgan tenglamalar sistemalarining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo'lsa ularni

a) Kramer formulalaridan foydalanib yeching, b) Gauss usuli bilan yeching:

2.1. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 46, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 27, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 70, \\ 3x_1 \quad - x_3 = -2. \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 23. \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -10, \\ 2x_1 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15. \end{cases}$ 2.9. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$ 2.11. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$ 2.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$ 2.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$ 2.15. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 15, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$ 2.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ 2.18. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

II. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemalarini yeching:

2.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ 2.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ 2.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$ 2.8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_3 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ 2.9. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ 2.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ 2.12. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3-§. Matritsalar ustida amallar.

6-ta'rif Agar (4) matritsada satrlar soni m ga, ustunlar soni esa n ga teng bo'lsa, u holda bu matritsaning o'lchami m×n bo'ladi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Agar m=n bo'lsa, matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

7-ta'rif. Bosh diagonalida turgan elementlari birga teng bo'lib, qolgan elementlari nolga teng bo'lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi. Birlik matritsa E bilan belgilanadi:

$$E= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning determinanti birga teng.

Agar bir xil o'lchamli ikkita matritsaning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, bu matritsalar teng deyiladi.

8-ta'rif. Ikkita m×n o'lchamli A va B matritsalarning yig'indisi deb, o'sha o'lchamli shunday C = A+B matritsaga aytiladiki, uning har bir elementi A va B matritsalarning mos elementlari yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Masalan, $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & -7 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ravshanki, matritsalarni qo'shish amali kommutativlik A+B=B+A va assotsiativlik (A+B)+C=B+(V+C) xossalariga ega.

Matritsalarni ayirish qo'shish uchun teskari amaldir. B va A matritsalarning ayirmasi B-A deb, quyidagi shartni qanoatlantiruvchi shunday X matritsaga aytiladiki A+X=B. Bu shartni qanoatlantiruvchi X matritsa doimo mavjud va yagona bo'lib, uning elementlari quyidagi tenglik bilan aniqlanadi: $x_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$. Shunday qilib, matrisalarni ayirish uchun, mos elementlarni ayirish etarlidir. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Nol matritsa deb, hamma elementlari nolga teng matritsaga aytiladi, hamda, A + O=A, A – A=O.

9-ta'rif. m×n o'lchamli A matritsaning λ songa ko'paytmasi deb, o'sha o'lchamdagi shunday B=λ·A matritsaga aytiladiki, bu matritsa elementlari A matritsa elementlarini λ ga ko'paytirishdan hosil bo'ladi.

Masalan, $$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 4\lambda & 0 \\ -2\lambda & 3\lambda & -4\lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

Quyidagilarni ko'rish qiyin emas: $1 \cdot A = A$, $(-1) \cdot A = -A$, $O \cdot A = O$. Shu bilan birga, quyidagi xossalar ham o'rinli:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$
$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A,$$
$$\alpha(A+B) = \alpha A + \beta B.$$

10-ta'rif. (matritsalarni ko'paytirish). Bizga ikkita

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsin, hamda A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lsin. A matritsaning B matritsaga ko'paytmasi deb shunday

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

matrisaga aytiladiki, uning elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}, \ (i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,p).$$

Misol. Berilgan matrisalarni ko'paytiring:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot9 \\ 4\cdot1+5\cdot1+6\cdot1 & 4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3 & 4\cdot1+5\cdot4+6\cdot9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 36 \\ 15 & 32 & 78 \end{pmatrix}.$$

Bu erda B ni A ga ko'paytirish ma'noga ega emas, chunki B matritsaning ustunlar soni A matritsaning satrlar soniga teng emas.

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. U holda $AB=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ va $BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 12 & 20\\ -5 & -4 & -4\end{pmatrix}$ ga teng, lekin ikkala ko'paytma matritsa bir biriga teng emas, xatto ularning tartiblari ham turli.

v) $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Bu matritsalar uchun $AB=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 12 & 0\end{pmatrix}$ va $BA=\begin{pmatrix}18 & -24\\ 4 & -8\end{pmatrix}$.

Demak agar ikkita teng o'lchovli kvadrat matritsalar ko'paytirilayotgan bo'lsa, u holda AB va BA larning tartiblari berilgan matritsalar tartiblariga teng bo'ladi. Umuman olganda AB BA, lekin ba'zi hollarda AB=BA ham bo'lishi mumkin (bunda matritsalar kvadrat bo'lib, o'lchovlari teng bo'ladi). Bu shartni qanoatlantiruvchi matritsalar kommutativ matritsalar deyiladi.

Masalan, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 22\\ -11 & 13\end{pmatrix}$

3. Mustaqil yechish uchun misollar:

A va B matritsalar berilgan. a) C= 3A-B matritsani toping; b) AB va BA ko'paytmalarni hisoblang:

3.1. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 2\\ 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$ 3.2. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 4 & 7\\ 8 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

3.3. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 3 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 3.4. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

3.5. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$. 3.6. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -9\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3.7. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, 3.8. $A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3.9. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, 3.10. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 8\\ 6 & 9 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$.

3.11. $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 1 & -5\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$. 3.12. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & -1 & -1\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

3.13. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 11 & 9\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 3.14. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 7\\ 9 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3.15 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, 3.16. $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 4\\ 9 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 9 & 9 & 0\\ -2 & 1 & 8\end{pmatrix}$.

3.17. $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}$. 3.18. $A=\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 11 & 21\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

3.19. $A=\begin{pmatrix}12 & 2 & 0\\ 13 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 16 & 0\\ 4 & 9 & 7\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 3.20. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 0 & 8 & 0\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 2 & 7\\ 9 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

19+3+23 —

4-§. Teskari matritsa.

Kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, u maxsus matritsa, aks holda maxsusmas matritsa deyiladi.

11-ta'rif. Bizga A – kvadrat matritsa berilgan bo'lsin. Agar X – kvadrat matritsa (tartibi A matritsanikiga teng) uchun AX = XA = E bo'lsa, u holda X – matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

Umuman olganda matritsalarni ko'paytirish kommutativ bo'lmaganligi sababli AX≠XA ligini hisobga olishimiz kerak, lekin X matritsaga quyidagi ikki shart qo'yiladi: AX=E va XA=E. Bundan X matritsani A matritsa uchun ikki tomonlama teskari matritsa deyish mumkin. Agar boshqa Y va Z matritsalarni olsak va AY=E va ZA=E bo'lsa, u holda Y matritsa o'ng teskari matritsa, Z esa chap teskari matritsa deyiladi. Agar o'ng va chap teskari matritsalar teng bo'lsa, bunday matritsa teskari matritsa deyiladi: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Agar matritsa maxsus bo'lsa, unga teskari matritsa mavjud emas, agar matritsa maxsusmas bo'lsa, unga teskari matritsa doimo mavjud.

A matritsaning A^{-1} teskari matritsasi quyidagicha aniqlanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Bu erda A_{ik} A matritsa determinanti a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi (1-§ ga qarang).

Misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot(-1)+2\cdot 4\cdot 3+2\cdot 1\cdot 1-1\cdot 0\cdot 3-1\cdot 1\cdot 4-2\cdot 2\cdot(-1)=26\neq 0.$$

Demak, A matritsa maxsusmas va uning teskari matritsasi mavjud. Endi uning A_{ik} algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=8;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=14; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4.$$

Nihoyat teskari matritsani tuzamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 8 \\ 14 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{26} & \frac{4}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{5}{26} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ ekanligini tekshirish qiyin emas.

n ta no'malumli n ta tenglamalar

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (15)$$

sistemasini matritsa ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$A \cdot X = B. \quad (16)$$

Bunda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Faraz qilaylik, det $A \neq 0$, u holda Kramer usuliga binoan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega, ikkinchi tomondan sistemaning asosiy matritsasi A ga teskari matritsa mavjud. (4.1) tenglikni ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}B.$$

Shunday qilib, yuqoridagi (16) sistemaning yechimi quyidagicha topiladi:

$$X = A^{-1} \cdot V \quad (17)$$

Misol. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Sistemaning determinanti noldan farqli. (17) formulani qo'llaymiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ikki vektor teng bo'lishi uchun mos koordinatalari teng bo'lishi kerak. Demak, sistemaning yechimi $x_1 = 2, \; x_2 = -5, \; x_3 = 3.$

4. Mustaqil yechish uchun misollar:

Berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini birgalikdaligini tekshiring. Agar sistemalar birgalikda bo'lsa ularni matritsalar usulida yeching:

4.1. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ 4.2. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ 4.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$ 4.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$ 4.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10, \\ 4x_1 + 11x_3 = -29, \\ 7x_1 - 5x_2 = 7. \end{cases}$ 4.8. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$ 4.9. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

4.10. = $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$ 4.11. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -6, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -15, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$ 4.12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10. \end{cases}$ 4.14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ 4.15. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$ 4.17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$ 4.18. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$ 4.20. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ 4.21. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 21, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

II. KOMPLEKS SONLAR

1 - §. Kompleks sonlar

Elementar algebra kursini o'rganish davomida sonlar to'plami bir necha marta kengayib borishini kuzatish mumkin. Maktab kursidan ma'lumki, natural sonlar, butun sonlargacha, barcha butun sonlar ratsional sonlargacha; barcha ratsional sonlar va irratsional sonlar qo'shilib haqiqiy sonlar to'plamigacha kengayib boradi. Nihoyat, eng oxirida haqiqiy sonlar sistemasi kompleks sonlar sistemasigacha kengayadi. Bizga ma'lumki, haqiqiy koeffitsientli ixtiyoriy kvadrat tenglamani yechish uchun haqiqiy sonlarning o'zi etarli emas. Ya'ni haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega bo'lmagan tenglamalar bor. Bunday tenglamalarning eng soddasi

$$x^2+1=0\ .$$

Oldimizga qo'yilgan asosiy masala quyidagicha: *haqiqiy sonlar to'plamini sonlarning shunday to'plamigacha kengaytirish kerakki, unda yuqoridagi tenglama yechimga ega bo'lsin.*

Kompleks songa quyidagicha ta'rif beramiz:

α kompleks son deb ma'lum bir tartibda berilgan bir juft a va b haqiqiy sonlarga aytiladi va bu son quyidagicha yoziladi:

$$\alpha=(a,b) \tag{1}$$

Bu erda *a va b* lar *komponentalar* deyiladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $(a,b)\neq(b,a)$. Agar *b=0* bo'lsa, (1) da $\alpha=(a,0)=a$ deb qabul qilinadi. Bundan ko'rinib turibdiki, barcha haqiqiy sonlar to'plami barcha kompleks sonlar to'plamining qism to'plamidan iborat ekan.

Bizga ikkita $\alpha=(a,b)$ va $\beta=(c,d)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Agar $a=c$ va $b=d$ bo'lsa, u holda $\alpha=\beta$ deymiz va aksincha.

1-ta'rif. Ikki α va β kompleks sonlar yig'indisi deb, quyidagi kompleks songa aytiladi:

$$\alpha+\beta=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

Agar b=d=0 bo'lsa, u holda bu tenglikdan

$$\alpha+\beta=(a,0)+(c,0)=(a+c,0)=a+c$$

hosil bo'ladi.

Ikkita kompleks sonlar ayirmasini topish kompleks sonlar yig'indisidan kelib chiqadi, ya'ni $\alpha=(a,b)$ va $\beta=(c,d)$ sonlarning ayirmasi deb, shunday $\gamma=(x,y)$ songa aytiladiki, β ni γ ga qo'shganimizda α hosil bo'ladi:

$$(c,d)+(x,y)=(c+x,d+y)=(a,b)$$

bundan $c+x=a, d+y=b$, ya'ni $x=a-c, y=b-d$, bundan ayirma uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

$$\alpha-\beta=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d).$$

2-ta'rif. α va β kompleks sonlarni ko'paytmasi deb quyidagi ifodaga aytamiz:

$$\alpha\cdot\beta=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc). \qquad (2)$$

Agar b=d=0 bo'lsa, ko'paytma $\alpha\cdot\beta=(ac,0)=ac$ bo'ladi.

Endi qo'shish va ko'paytirish ta'riflaridan kelib chiqqan holda kompleks sonning boshqa ko'rinishini hosil qilamiz:

$$\alpha=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b(0,1). \qquad (3)$$

(2) tenglikdan $(0,b)=b(0,1)$ ifodaning to'g'riligi kelib chiqadi, (0,1) ning qanday sonligini tekshirish maqsadida, yana (2) tenglikka murojaat qilamiz: $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$. Bu sonni quyidagicha belgilash qabul qilingan

$$(0,1)=i, \quad (0,1)^2=i^2=-1.$$

Bunga asosan (3) dan kompleks sonning $\alpha=a+ib$ algebraik ko'rinishi kelib chiqadi, a va b lar mos ravishda kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari deyiladi va $a=\operatorname{Re}\alpha$, $b=\operatorname{Im}\alpha$ kabi belgilanadi.

Ushbu $\alpha = a + ib$ va $\overline{\alpha} = a - ib$ sonlar o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi. Masalan, $\alpha = 2 + 3i$ va $\overline{\alpha} = 2 - 3i$ sonlar o'zaro qo'shma kompleks sonlardir.

2-§. Kompleks sonlar ustida amallar

Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan to'rt arifmetik amallar kompleks sonlar ustida ham bajariladi.

1. **Qo'shish va ayirish.**

Ikki $\alpha = a + ib$ va $\beta = c + id$ kompleks sonlar quyidagicha qo'shiladi:

$$\alpha + \beta = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

Berilgan $\alpha = a + ib$ va $\beta = c + id$ kompleks sonlarning ayirmasi quyidagtcha hisoblanadi: $\alpha - \beta = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$.

2. **Ko'paytirish va bo'lish.**

Ikki $\alpha = a + ib$ va $\beta = c + id$ kompleks sonlar quyidagicha ko'paytiriladi: $\alpha \cdot \beta = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$. Agar o'zaro qo'shma kompleks sonlarni qo'shsak yoki ko'paytirsak natijada haqiqiy son hosil bo'ladi:

$$\alpha + \overline{\alpha} = 2a, \qquad \alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Berilgan ikki $\alpha = a + ib$ va $\beta = c + id$ kompleks sonlarning bo'linmasi deb shunday $\gamma = x + iy$ songa aytiladiki, u quyidagi

$$\alpha = \beta \cdot \gamma, \text{ ya'ni } a + ib = (c + id)(x + iy)$$

tenglikni qanoatlantirishi kerak. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ko'paytirishni bajargandan so'ng, ikkala tomondagi haqiqiy va mavhum qismlarni tenglaymiz va

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va bu sistemaning yechimi

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+a^2}, \qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+a^2}$$

ga teng bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, agar $c=d=0$ bo'lsa, bo'lish amalini bajarish mumkin bo'lmaydi (nolga bo'lish ma'noga ega emas).

Xossalari:

1) simmetriklik xossasi: $\alpha=\beta$ bo'lsa, $\beta=\alpha$ bo'ladi;

2) tranzitivlik xossasi: $\alpha=\beta$ va $\beta=\gamma$ dan $\alpha=\gamma$ kelib chiqadi.

Bundan tashqari qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagi qonunlariga bo'ysunadi:

1) kommutativlik qonuni: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ va $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$;

2) assotsiativlik qonuni: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ va $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$;

3) distributivlik qonuni: $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Misol:

1. $2+i$ ni $2-i$ga bo'ling.

Yechish. $\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}=\frac{4+4i+i^2}{4-i^2}=\frac{3+4i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$, bunda $i^2=-1$.

2. $\alpha=(2+3i), \beta=(4+i)$ sonlarni ko'paytiring:

Yechish. $(2+3i)(4+i)=8+2i+12i+3i^2=5+14i$.

3-§. Qo'shma kompleks sonlarning xossalari

Qo'shma kompleks sonlarning yig'indisi va ko'paytmasiga doir ba'zi xossalarini ko'rsatib o'tamiz. Bizga $\alpha_1=a_1+ib_1$, $\alpha_2=a_2+ib_2$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin, bu sonlarga qo'shma bo'lgan sonlar quyidagicha

$$\overline{\alpha_1}=a_1-ib_1, \quad \overline{\alpha_2}=a_2-ib_2 .$$

1^0. $\overline{\alpha_1+\alpha_2}=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}$.

Haqiqatdan, $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$ songa qo'shma son $\overline{\alpha_1+\alpha_2}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}$ ga teng. Demak, $\overline{\alpha_1+\alpha_2}=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}$.

Matematik induksiya metodiga asosan

$$\overline{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}+\ldots+\overline{\alpha_n}$$

bo'lishini isbotlash qiyin emas.

2^0. $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$.

Ko'paytirish amaliga ko'ra,

$\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$.

Bu sonning qo'shmasi $\overline{\alpha_1\alpha_2}=(a_1-ib_1)(a_2-ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)$ ga teng. Ikkinchi tomondan,

$$\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}=(a_1-ib_1)\cdot(a_2-ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+a_2b_1)=\overline{\alpha_1\alpha_2}.$$

Bundan, $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$. Umuman olganda, $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\overline{\alpha_n}$ bo'ladi.

1. Mustaqil yechish uchun misollar:

Berilganlarni hisoblang:

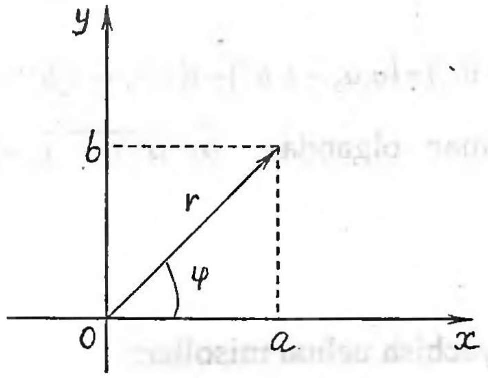
1. $(2+3i)(4-9i)$, $\frac{3-5i}{2+i}$.
2. $(7+3i)(5-6i)$, $\frac{4-i}{4+i}$.
3. $(3-2i)(4+5i)$, $\frac{7-i}{2+i}$.
4. $(-3+i)(-4+2i)$, $\frac{3+i}{3+2i}$.
5. $(9-i)(12+i)$, $\frac{4-2i}{5+2i}$.
6. $(6-i)(5+3i)$, $\frac{3+i\sqrt{2}}{3-i\sqrt{2}}$.
7. $(2+3i)(3+4i)(2-i)$, $\frac{(2-i)(1-i)}{(6+5i)}$.
8. $(-5+i)(4+8i)i$, $\frac{i(2+3i)}{(2-i)(2+i)}$.
9. $i(5+2i)(5-4i)$, $\frac{i^2(2+8i)}{3+i}$.
10. $(2+7i)(-1+i)$, $\frac{(1+i)(3+i)}{4-5i}$.
11. $(4+3i)(3+6i)$, $\frac{(8-5i)(5+i)}{3-7i}$.
12. $(8-i)(9-i)$, $\frac{(9-4i)(2+7i)i}{3-i}$.

4-§. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

Tekislikda to'g'ri burchakli xOy Dekart koordinatalar sistemasini tanlab (1-rasmga qarang), kompleks sonning haqiqiy qismi a ni absissalar o'qiga, mavhum qismi b ni esa ordinatalar o'qiga joylashtirsak, tekislikda $M(a,b)$ nuqtaga ega bo'lamiz. Bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi $\overline{OM}$ vektorni $\alpha = a + ib$ kompleks sonning geometrik tasviri deb qabul qilamiz. Berilgan $\alpha = a + ib$ kompleks songa mos nuqta shu sonning obrazi, va aksincha α kompleks son nuqtaning affiksi deyiladi.

Endi kompleks sonning trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 1-rasmdan foydalanamiz, ya'ni

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi \tag{4}$$



(1- rasm)

Bu erda r kompleks son tasvirlangan vektorning uzunligini ifodalaydi va uni berilgan α kompleks sonning moduli deb ataladi, bu vektorning OX o'qi bilan hosil qilgan φ burchagi esa α ning argumenti deyish qabul qilingan. Kompleks sonning bu elementlari quyidagicha topiladi:

$$|\alpha| = |a + ib| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg\alpha = \varphi, \quad tg\varphi = \frac{b}{a}, \text{ bundan esa } \varphi = arctg\frac{b}{a}.$$

Nihoyat, (4) ga asosan

$$\alpha = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{5}$$

ga ega bo'ldik. (5) ning o'ng tomoni berilgan α kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi. Kompleks tekislikning har bir nuqtasi r ning $[0,+\infty)$

dan olingan aniq bir qiymati va φ ning $[0,\ 2\pi)$ oraliqdan olingan aniq bir qiymati bilan aniqlanadi.

Qo'shma kompleks sonlarga mos nuqtalar absissalar o'qiga nisbatan simmetrik bo'lib, ularning uzunliklari teng, hamda burchaklari qarama-qarshi ishoraga ega: $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$, $\quad \arg\overline{\alpha} = -\arg\alpha$.

Endi kompleks sonning yana bir, Eyler, ko'rsatkichli shaklini ko'raylik. Matematik analiz kursidan ma'lum quyidagi formula mashhur Eyler formulasi deyiladi ([5] ga qarang):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

bu erda φ haqiqiy son. U holda bundan α kompleks sonning ko'rsatkichli shaklini hosil qilamiz ($2 < e < 3$, $\quad e = 2{,}718281828459045\ldots$)

$$\alpha = re^{i\varphi}.$$

Nihoyat, kompleks sonning to'rt xil shakliga ega bo'ldik:

$$\alpha = (a,b), \qquad \alpha = a + ib, \qquad \alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \alpha = re^{i\varphi}. \qquad (6)$$

Misollar. 1) $3+3i$ kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiring.

Yechish. $a = 3 \quad b = 3, r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{3}{3} = 1,$

(1,1) nuqta birinchi chorakka tegishli bo'lganligi sababli $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bo'ladi.

Demak,

$$3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

2) Berilgan $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ sonni trigonometrik shaklga keltiring.

Yechish. $r = \sqrt{1+3} = 2, \quad tg\varphi = \frac{b}{a} = -\sqrt{3},$ berilgan α kompleks songa mos $(-1;\sqrt{3})$ nuqta ikkinchi chorakka tegishli bo'lganligi sababli $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, demak,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Mustaqil yechish uchun misollar:

Berilgan kompleks sonlarni vektorlar bilan tasvirlang va ularning modullari va argumentlarini aniqlab, trigonometrik shaklga keltiring:

1. $\alpha = 3+3i.$	5. $\alpha = 8+8i\sqrt{3}.$	9. $\alpha = 9-3i\sqrt{3}.$
2. $\alpha = 3-i\sqrt{3}.$	6. $\alpha = -1+i$	10. $\alpha = -9+i3\sqrt{3}.$
3. $\alpha = -4i.$	7. $\alpha = 2i\sqrt{2}.$	11. $\alpha = -5-5i\sqrt{3}.$
4. $\alpha = -5-5i.$	8. $\alpha = 2\sqrt{3}-2i.$	12. $\alpha = 6-2i\sqrt{3}.$

5-§. Kompleks sonlarni darajaga ko'tarish va ildizdan chiqarish

Kompleks sonlarni darajaga ko'tarishdan oldin biz ishni trigonometrik shaklda berilgan sonlarni ko'paytirishdan boshlaymiz. Bizga

$$\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlarni ko'paytiraylik:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1\cdot r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Demak, trigonometrik shaklda berilgan ikkita kompleks sonlarni ko'paytirish uchun ularning modullari ko'paytirilib, argumentlarini qo'shish kerak ekan.

Buni trigonometrik shaklda berilgan n ta kompleks sonlarni ko'paytirishga tatbiq qilish natijasida

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)] \qquad (7)$$

formulaga kelamiz.

Demak, ikkitadan ko'p kompleks sonlarni ko'paytirish uchun ularning trigonometrik shaklga keltirib ko'paytirish maqsadga muvofiq bo'lar ekan.

Misol. Berilgan kompleks sonlarni ko'paytiring:

$\alpha = 3(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$, $\beta = 2(\cos 25^0 + i\sin 25^0)$ va $\gamma = 5(\cos 20^0 + i\sin 20^0)$.

Yechish.

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=3\cdot2\cdot5\left(\cos(15^0+25^0+20^0)+i\sin(15^0+25^0+20^0)\right)=30\left(\cos60^0+i\sin60^0\right)=$$

$$=30\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=15+i15\sqrt{3}.$$

Darajaga ko'tarish. Muavr formulasi. Agar (7) tenglikdagi kompleks sonlarni o'zaro teng desak, ya'ni $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\alpha$ bo'lsa, u holda bu sonlarning modullari va argumentlari o'zaro teng bo'ladi. (7) dan

$$\alpha^n=\left[r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (8)$$

Demak, *kompleks sonni n - darajaga ko'tarish uchun uning modulini shu darajaga ko'tarib, argumentini n ga ko'paytirish kerak ekan.*

Daraja kursatkichi manfiy bo'lsa ham shu qoida saqlanadi:

$$\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^{-n}=\frac{1}{\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n}=\frac{1}{r^n}\cdot\frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}=\frac{1}{r^n}\cdot$$

$$\cdot\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{(\cos n\varphi+\sin n\varphi)(\cos n\varphi-\sin n\varphi)}=\frac{1}{r^n}\cdot\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi}=r^{-n}\left[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)\right]$$

Bundan $\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^{-n}=r^{-n}\left[\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)\right]$ kelib chiqadi.

(8) formuladagi r ixtiyoriy musbat son. Agar $r=1$ bo'lsa, (8) formula Muavr formulasi deyiladi, ya'ni

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\sin n\varphi.$$

Ildiz chiqarish. Bizga $\alpha=a+ib$ kompleks son berilgan bo'lsin. Agar $\alpha=\beta^n$ bo'lsa, β kompleks son α ning n-darajali ildizi deyiladi va

$$\beta=\sqrt[n]{\alpha} \qquad (9)$$

kabi yoziladi.

Shu β ni topish bilan shug'ullanamiz. Avval α ni trigonometrik shaklga keltiramiz, $\alpha=a+ib=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Kompleks sonlar ustida to'rt amal bajarganimizda yana kompleks son hosil bo'lishini bilamiz, shuning uchun kompleks sonning ildizi ham kompleks bo'lishini kutish tabiiy. Demak, (9) – tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (10)$$

Bu erda ρ va θ lar noma'lum bo'lib, biz ularni topishimiz kerak. Buning uchun (10) ning ikkala tomonini n- darajaga ko'taramiz, u holda

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

tenglikni hosil qilamiz. Qavslarni ochib tenglikning ikkala tomonidagi kompleks sonlar tengligidan foydalanamiz:

$$\rho^n \cdot \cos n\theta = r\cos\varphi, \qquad \rho^n \cdot \sin n\theta = r\sin\varphi. \tag{11}$$

Bularni kvadratga oshirib, qo'shamiz:

$$\rho^{2n}(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta) = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \quad \text{yoki} \quad \rho^n = r \quad \text{va} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \tag{12}$$

Endi (11) tenglikning chap tomonidagi ρ^n ning o'rniga (12) dagi qiymatini qo'ysak

$$\cos n\theta = \cos\varphi, \qquad \sin n\theta = \sin\varphi \tag{13}$$

kelib chiqadi. Trigonometriyadan ma'lumki,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad (k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

U holda (13) dagi tengliklardan, $n\theta = \varphi + 2k\pi$ yoki $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ bo'ladi. Bu erda $k = 0,1,2,\ldots$.

Demak, noma'lum θ burchak cheksiz ko'p qiymatlarga ega bo'lar ekan. Hosil bo'lgan qiymatlarni (10)ga qo'ysak:

$$\beta_k = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{14}$$

ga ega bo'lamiz. Bunda $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ qiymatlarni qabul qiladi.

Shunday qilib, kompleks sonning n-darajali ildizlari soni n ta bo'lib, ular (14) formulaga asosan topiladi.

Misol. Quyidagi ildizni hisoblang: $\sqrt[3]{i}$.

Yechish. 1) Avval i ni trigonometrik shaklga keltiramiz. $r = 1$ va $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Demak, $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{\pi}{2}$. Endi (14) formulaga ko'ra

$$\beta_k = \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}.$$ Bu misolda k=0,1,2. Bundan,

$$\beta_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\beta_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\beta_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\cdot\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

3. Mustaqil yechish uchun misollar:

Berilgan amallarni bajaring:

1. $(3+3i)^4$; $\sqrt[3]{1-i}$.
2. $(3-i\sqrt{3})^5$; $\sqrt[4]{i}$.
3. $(-2i)^7$; $\sqrt[3]{2+i\sqrt{12}}$
4. $(-5-5i)^3$; $\sqrt[5]{8+8i}$
5. $(8+8i\sqrt{3})^4$; $\sqrt[4]{-4+4i}$.
6. $(-1+i)^5$; $\sqrt[4]{2-2i}$
7. $(2i\sqrt{2})^6$; $\sqrt[3]{-7+7i}$
8. $(2\sqrt{3}-2i)^4$; $\sqrt[4]{2+i}$.
9. $(9-3i\sqrt{3})^5$; $\sqrt{7-i}$
10. $(9+i3\sqrt{3})^4$; $\sqrt{-1-i}$.
11. $(-5-5i\sqrt{3})^3$; $\sqrt{7+7i}$
12. $(6-2\sqrt{3})^3$; $\sqrt[4]{-1}$.

III. KO'PHADLAR

1-§. Ko'phadlar va ular ustida amallar

Natural n uchun n – darajali algebraik tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

Tenglamaning $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks sonlar bo'lsin, bundan tashqari bosh koeffitsient a_0 noldan farqli bo'lishi kerak.

Agar (1) tenglama berilgan bo'lsa, u holda shu tenglamani yechish talab etiladi. Boshqacha aytganda, x noma'lumning shunday qiymatlari topilsinki, ular bu tenglamani qanoatlantirsin. Lekin (1) tenglamani yechish masalasini bu tenglamaning chap tomonidagi

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (2)$$

ifodani tekshirishning umumiy masalasi bilan almashtirish maqsadga muvofiq. (2) ifoda x ning n-darajali ko'phadi (yoki polinomi) deyiladi. Ko'phadlarni yozish uchun f(x), g(x), φ(x) va hokazo belgilashlardan foydalanamiz.

Agar f(x) va g(x) ko'phadlarda noma'lumning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo'lsa, bunday ko'phadlar teng deb ataladi.

Ixtiyoriy n natural son uchun n-darajali ko'phad doimo mavjud. Mumkin bo'lgan ana shunday barcha ko'phadlar ichida birinchi, ikkinchi, uchinchi va hokazo darajali ko'phadlardan tashqari nolinchi darajali ko'phad, (noldan farqli kompleks son) ham mavjud. Nol soni ham ko'phad hisoblanadi. Nol soni darajasi aniqlanmagan yagona ko'phaddir.

Endi ko'phadlar uchun qo'shish va ko'paytirish amallarini aniqlaylik. Bizga kompleks koeffitsientli *f(x) va g(x)* ko'phadlar berilgan bo'lsin:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \qquad a_n \neq 0,$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s, \qquad b_s \neq 0$$

Bunda n≥s, bo'lsin, u holda ularning yig'indisi deb, shunday ko'phadga aytiladiki, bu ko'phadning koeffitsientlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$$

$$c_i=a_i+b_i, \qquad i=0,1,2,\ldots,n.$$

Agar n>s bo'lsa, yig'indining darajasi n ga teng bo'ladi, lekin n=s bo'lsa, hosil bo'lgan ko'phadning darajasi n dan kichik bo'lishi ham mumkin ($b_n=-a_n$ bo'lsa).

Ikkita *f(x) va g(x)* ko'phadlarning ko'paytmasi deb, quyidagi ko'phadga aytiladi:

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s}.$$

Bu ko'phadning koeffitsientlari quyidagicha aniqlanadi:

$$d_i=\sum_{k+l=i}a_kb_l, \qquad i=0,1,\ldots,n+s-1,n+s.$$

Ko'phadlar uchun ham butun sonlar singari qoldiqli bo'lish algoritmi mavjud:

Teorema. *Ixtiyoriy f(x) va g(x) ko'phadlar uchun shunday* $q(x)$ *va* $r(x)$ *ko'phadlar topish mumkinki, ushbu*

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $r(x)$ *ning darajasi g(x) ning darajasidan kichik yoki* $r(x)=0$ *bo'ladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi* $q(x)$ *va* $r(x)$ *ko'phadlar bir qiymatli aniqlanadi.*

Bo'luvchilar.

Kompleks koeffitsientli nolga teng bo'lmagan $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar berilgan bo'lsin. Agar $f(x)$ ni $g(x)$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq nolga teng bo'lsa, ya'ni $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linsa (qoldiqsiz bo'linsa), u holda $g(x)$ ko'phad $f(x)$ ning bo'luvchisi deyiladi.

Ushbu $f(x)=g(x)\varphi(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\varphi(x)$ ko'phad mavjud bo'ganda va faqat shu holda $g(x)$ ko'phad $f(x)$ ning bo'luvchisi bo'ladi.

Xossalari:

1. Agar $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ga bo'linsa, $g(x)$ esa $h(x)$ ga bo'linsa, u holda $f(x)$ ko'phad ham $h(x)$ ga bo'linadi.
2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar $\varphi(x)$ ga bo'linsa, u holda ularning yig'indisi va ayirmasi ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi.

   Haqiqatdan ham, $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, $g(x)=\varphi(x)\chi(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[\psi(x)\pm\chi(x)]$ kelib chiqadi.
3. Agar $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ga bo'linsa, u holda $f(x)$ ning ixtiyoriy $g(x)$ ko'phadga ko'paytmasi ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi.
4. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ ko'phadlarning hammasi $\varphi(x)$ ga bo'linsa, u holda

   $$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\dots+f_n(x)g_k(x)$$

   ko'phad ham $\varphi(x)$ ga bo'linadi. Bunda $g_1(x), g_2(x), \dots g_k(x)$ lar ixtiyoriy ko'phadlar.
5. Har qanday $f(x)$ ko'phad nolinchi darajali ko'phadga, ya'ni noldan farqli songa bo'linadi.
6. Agar $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ga bo'linsa, u holda $f(x)$ ko'phad $c\varphi(x)$ ga ham bo'linadi. Bunda c-noldan farqli ixtiyoriy son.
7. $g(x)=cf(x)$ bo'lganda va faqat shu holdagina $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar bir vaqtda bir-birlariga bo'linadi.
8. $f(x)$ va $cf(x)$ (bunda c≠0) ko'phadlardan birining har qanday bo'luvchisi ikkinchi ko'phad uchun ham bo'luvchi bo'ladi.

2-§. Ko'phadlarning ildizlari

Agar $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ biror ko'phad, c - esa biror son bo'lsa, u holda $f(x)$ ning yuqoridagi ifodasida x noma'lumni c bilan almashtirilsa, u holda $f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\dots+a_n$ son $f(x)$ ning x=c dagi qiymati deyiladi.

Agar $f(x) = g(x)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy c uchun $f(c) = g(c)$ bo'ladi. Bundan tashqari, agar

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \qquad \psi(x) = f(x)g(x)$$

bo'lsa, u holda

$$\varphi(c) = f(c) + g(c), \qquad \psi(c) = f(c)g(c)$$

bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Agar $f(c) = 0$ bo'lsa, u holda c son $f(x)$ ko'phadning ($f(x)=0$ tenglamaning) ildizi deb ataladi.

Quyidagi teorema $f(x)$ ko'phad x-c ko'phadga bo'linayotganda qoldiqni, bo'lishni bajarmasdan turib topishga imkon beradi:

$f(x)$ ko'phadni x-c chiziqli ko'phadga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f(x)$ ko'phadning x=c dagi qiymati $f(c)$ ga teng.

Darhaqiqat,

$$f(x) = (x-c)q(x) + r$$

bo'lsin, x=c da bu tenglikning har ikkala tomonida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f(c) = (c-c)q(c) + r = r$$

Oxirgi tenglik teoremani isbotlaydi.

Bulardan asosiy natija kelib chiqadi:

$f(x)$ ko'phad x-c ga bo'linganda va faqat shundagina, c son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, agar $f(x)$ birinchi darajali biror $ax+b$ ko'phadga bo'linsa, u holda bu ko'phad $x-\left(-\frac{b}{a}\right)$ ko'phadga ham bo'linadi. Shunday qilib $f(x)$ *ko'phadning ildizlarini izlash uning chiziqli bo'luvchilarini izlashga teng kuchlidir.*

Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda $f(x)$ ko'phadni x-c ikkihadga bo'linishining umumiy algoritmiga qaraganda ancha sodda usuli bor. Bu usul Gorner usuli deb ataladi. Aytaylik,

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

va

$$f(x)=(x-c)q(x)+r \qquad (3)$$

bo'lsin. Bunda $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}\ldots+b_{n-1}$. Endi (3) - tenglikda bir xil darajalar oldidagi koeffitsientlarni tenglaymiz:

$$\begin{aligned}
a_0&=b_0,\\
a_1&=b_1-cb_0,\\
a_2&=b_2-cb_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n-1}&=b_{n-1}-cb_{n-2},\\
a_n&=r-cb_{n-1}.
\end{aligned} \qquad (*)$$

Bundan, $b_0=a_0$, $b_k=cb_{k-1}+a_k$, $k=\overline{1,n-1}$ bo'lishi kelib chiqadi. Nihoyat, $r=cb_{n-1}+a_n$, ya'ni $f(c)$ ga tengligi ma'lum bo'lgan r qoldiq ham shu qonun bo'yicha hosil qilinadi.

Misol. $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x-4$ ko'phadni $x+1$ ikkihadga bo'ling.

Yechish. $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x-4$ ni $x+1$ ga bo'lganda hosil bo'ladigan $q(x)$ bo'linmaning koeffitsientlarini topish uchun $(*)$ tengliklardan foydalanamiz:

$a_0=1,\quad a_1=-2,\quad a_2=-5,\quad a_3=6,\quad a_4=-4$ ва $c=-1$

$$\begin{aligned}
&q(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3\\
&a_0=b_0, &&\Rightarrow && b_0=1,\\
&a_1=b_1-cb_0, &&\Rightarrow && b_1=-2+(-1)\cdot 1=-3,\\
&a_2=b_2-cb_1, &&\Rightarrow && b_2=-5+(-1)\cdot(-3)=-2,\\
&a_3=b_3-cb_2, &&\Rightarrow && b_3=6+(-1)\cdot(-2)=8,\\
&a_4=r-cb_3, &&\Rightarrow && r=-4+(-1)\cdot 8=-12.
\end{aligned}$$

Hosil bo'lganlarni jadval ko'rinishda yozamiz. Birinchi qatorda berilgan $f(x)$ ko'phadning koeffitsientlari, bo'linma va qoldiqning ketma-ket hisoblab topiluvchi mos koeffitsientlari esa jadvalning ikkinchi qatorida joylashtirilgan va c ning qiymati chap yon tomondagi birinchi ustunda berilgan:

-1	1	-2	-5	6	-4
	1	-3	-2	8	-12

Demak, $q(x)=x^3-3x^2-2x+8$, qoldiq esa $r=f(-1)=-12$ ga teng bo'ladi.

Karrali ildizlar. Aytaylik c son $f(x)$ ko'phadning ildizi, ya'ni $f(c)=0$ bo'lsin. Shunday hol bo'lishi mumkinki $f(x)$ ko'phad $x-c$ ikkihadning faqat birinchi darajasiga emas, balki uning yuqoriroq darajalariga ham bo'linadi (bizga $f(x)$ ko'phadning $x-c$ ikkihadga bo'linishi ma'lum), ya'ni shunday natural k son topiladiki, $f(x)$ ko'phad $(x-c)^k$ ga qoldiqsiz bo'linadi, lekin $(x-c)^{k+1}$ ga bo'linmaydi. Shuning uchun

$$f(x)=(x-c)^k\varphi(x),$$

bu erda $\varphi(x)$ ko'phad $x-c$ ikkihadga bo'linmaydi. Bu holda, k son c ildizning $f(x)$ ko'phaddagi karraliligi deyilib, c ildizning o'zi esa $f(x)$ ko'phadning k karrali ildizi deb ataladi. Agar $k=1$ bo'lsa, u holda bu oddiy ildiz bo'ladi.

Karrali ildiz tushunchasi ko'phadning hosilasi bilan bog'liq. Biz koeffitsientlari ixtiyoriy kompleks sonlar bo'lgan ko'phadlarni o'rganamiz va ko'phadning hosilasini quyidagicha kiritamiz. Koeffitsientlari kompleks bo'lgan n-darajali ko'phad berilgan bo'lsin: $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

Ta'rif. Ko'phadning birinchi hosilasi deb, $(n-1)$ - darajali

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

ko'phadga aytiladi. Nolinchi darajali ko'phadning, hamda nolning hosilasi nolga teng deb hisoblanadi. $f(x)$ ko'phadning birinchi tartibli hosilasidan olingan hosila ikkinchi tartibli hosila deyiladi va u $f''(x)$ kabi belgilaniladi.

Demak, bundan kelib chiqqan holda n - hosilasi $f^{(n)}(x)=n!a_0$ teng bo'ladi. Shuning uchun $f(x)$ ko'phadning $(n+1)$ - hosilasi nolga teng.

Teorema. *Agar c son $f(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'lsa, u holda $k>1$ bo'lganda u $f(x)$ ko'phaddan olingan birinchi hosilaning $k-1$ karrali ildizi bo'ladi. Agar $k=1$ bo'lsa, u holda c son $f'(x)$ uchun ildiz bo'lmaydi.*

Bu teoremani bir necha marta qo'llash natijasida quyidagi natija kelib chiqadi:

$f(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bu ko'phadning t - hosilasida $k-t$ karrali bo'ladi $(k \geq t)$ va $f(x)$ ning k - hosilasi uchun ildiz bo'lmaydi.

Koeffitsientlari haqiqiy bo'lib, haqiqiy yechimga ega bo'lmagan ko'phadlar mavjudligi bizga ma'lum. Bunday ko'phadga misol, $x^2+1=0$. Endi **algebraning asosiy teoremasini** keltiramiz:

Darajasi birdan kichik bo'lmagan ixtiyoriy son koeffitsientli har qanday ko'phadning hech bo'lmaganda bitta, umumiy holda kompleks ildizi bo'ladi.

Koeffitsientlari kompleks son bo'lgan n - darajali $(n \geq 1)$ ko'phad berilgan bo'lsin:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Yuqoridagi teoremadan (ildizning mavjudligi haqidagi asosiy teorema) *$f(x)$ ko'phad uchun kompleks yoki haqiqiy α_1 ildiz mavjud deyishimiz mumkin, shuning uchun $f(x)$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:*

$$f(x)=(x-\alpha_1)\varphi(x).$$

Bu erdan $\varphi(x)$ ning koeffitsientlari ixtiyoriy, shuning uchun bu ko'phad ham α_2 ildizga ega. Demak, berilgan ko'phadni

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\theta(x)$$

ko'rinishda yoyish mumkin. Ishni shunday davom ettirib $f(x)$ *ko'phadni* n ta chiziqli ko'paytuvchilar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin bo'ladi:

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

Endi n-darajali ko'phad ildizlarini topishning yana bir usulini misolda ko'ramiz. Berilgan $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'phadning $\frac{m}{p}$ ratsional ildizlarini topaylik. Agar $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ lar - butun sonlar bo'lsa, u holda | m | soni $|a_n|$ ning bo'luvchisi, p soni esa $|a_0|$ ning bo'luvchisi bo'ladi.

Misol. $4x^4+8x^3-3x^2-7x+3$ ni chiziqli ko'paytuvchilarga yoying.

Yechish. 3 sonining bo'luvchilari - 1 va 3, 4 ning bo'luvchilari esa – 1,2 va 4. Demak, m ning qiymatlar to'plami {-1,1,-3,3} bo'lsa, p ning qiymatlar to'plami {1,2,4} dan iborat bo'ladi. U holda $\frac{m}{p}$ ko'rinishidagi mumkin bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami $\left\{\pm 1; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{3}{4}\right\}$. Bu sonlarni tenglamadagi noma'lumning o'rniga qo'yib tekshirsak, $x_1 = \frac{1}{2}$ va $x_2 = -\frac{3}{2}$ sonlar ko'phad ildizlari ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, yuqoridagilardan, berilgan ko'phadimiz $x-\frac{1}{2}$ va $x+\frac{3}{2}$ chiziqli ko'phadlarga bo'linadi.

Demak, berilgan ko'phadimiz $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+x-\frac{3}{4}$ ga ham bo'linadi. Bu ikkala ko'phadlarni bo'lish natijasida, $4x^2+4x-4=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlari esa $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Natijada, tenglamaning 4 ta yechimi bor ekan.

Demak, ko'phadimiz quyidagi yoyilmaga ega:

$$4x^4+8x^3-3x^2-7x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

3. Mustaqil yechish uchun misollar:

Berilgan tenglamalarni yeching:

1. $x^2+x+4=0,\quad x^3-x^2+2x-2=0.$ 2. $x^2+64=0,\quad x^3-5x^2-2x+24=0.$
3. $x^2-2x+6=0,\quad x^4-3x+2=0.$ 4. $x^4+2x^2+4=0,\quad x^2+6x^2+9x+4=0.$
5. $x^4-6x^2+10=0,\quad x^4-5x+4=0.$ 6. $x^2+5x^2+16=0,\quad x^4-3x^3+8=0.$
7. $x^4-4x^2+9=0,\quad x^4-5x^2-10x=0.$ 8. $x^3-3x^2+3x-1=0,\quad x^3+16x=0.$
9. $x^3+5x^2-x-5=0,\quad x^4+3x^2+7=0,$
10. $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0,\quad x^4+5x^2+7=0.$
11. $x^3+4x^2+6x+3=0,\quad x^4+81=0.$
12. $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0,\quad x^5+625x=0.$

3-§. Viet formulalari

Bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan n-darajali $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

hamda $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ bu ko'phadning ildizlari bo'lsin (har bir karrali ildiz shuncha marta olinadi). U holda $f(x)$ ko'phad quyidagicha yoyiladi:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) \tag{2}$$

Tenglikning o'ng tomonidagi qavslarni bir – biriga ko'paytirib, o'xshash hadlarini ixchamlab, hosil bo'lgan koeffitsientlarni (1)-tenglikdagi ko'phadning koeffitsientlari bilan taqqoslab, quyidagi Viet formulalarini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n),\\
a_2 &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,\\
a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),\\
a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned}$$

Kvadrat tenglama uchun ($n=2$) Viet formulalari ma'lum. Viet teoremasi bu formulalarning hususiy holidir. Bu formulalar $n=3$ bo'lganda, ya'ni uchinchi darajali ko'phad uchun quyidagi ko'rinishga ega:

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\quad a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\quad a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Viet formulalari ko'phadni uning berilgan ildizlari bo'yicha yozishni osonlashtiradi. Masalan ildizlari 3, -4 va ikki karrali ildizi 1 ga teng bo'lgan to'rtinchi darajali ko'phadni topaylik:

$$\begin{aligned}
a_1&=-(3-4+1+1)=-1,\\
a_2&=3\cdot(-4)+3\cdot1+3\cdot1+(-4)\cdot1+(-4)\cdot1+1\cdot1=-12+6-8+1=-13,\\
a_3&=-(3\cdot(-4)\cdot1+3\cdot(-4)\cdot1+3\cdot1\cdot1+(-4)\cdot1\cdot1)=25,\\
a_4&=3\cdot(-4)\cdot1\cdot1=-12
\end{aligned}$$

Demak, izlanayotgan ko'phad $f(x)=x^4-x^3-13x^2+25x-12$ ko'rinishda ekan.

Agar $f(x)$ ko'phadning bosh koeffitsienti birdan farqli bo'lsa, Viet formulalarini tatbiq qilishdan avval, ko'phadni a_0 ga bo'lish kerak bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Курош. А.Г. Олий алгебра курси .Тошкент. "Ўқитувчи" 1976 й.
2. Ильин В.А,. Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: "Наука" Вып. 6.1974
3. Боревич З.И. «Определители и матрицы» М. «Наука» 1970 г.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.:Мир., 1989 г.
5. С. Сирожиддинов, Ш. Мақсудов, М. Салоҳиддинов. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси. Тошкент."Ўқитувчи" 1979 й.
6. Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: "Наука" .1970 г.

MUNDARIJA