«O’ZBEKISTON TEMIR YO’LLARI» DATK
Toshkent temir yo’l muhandislari instituti

I.G’. G’aniyev, A.M. Karimov,
F. R. Nuriddinov, E. A. Mirsolixov

Oliy matematikadan masalalar to’plami

barcha yo’nalish va mutaxassisliklar bo’yicha ta’lim olayotgan bakalavriat talabalari uchun “Oliy matematika” fanidan masalalar to’plami (2 - qism).

Toshkent – 2008

UDK 516-517

Ushbu o’quv qo’llanma oliy matematika fani bo’yicha amaliyot darslarini olib borishga mo’ljallangan. Qo’llanmada topshiriqlarni bajarish uchun nazariy tavsiyalar berilgan. Dars jarayonida yechiladigan topshiriqlarga moslab uy vazifalari uchun misol va masalalar tanlangan.

Qo’llanma barcha ta’lim yo’nalishlaridagi bakalavriat talabalari uchun mo’ljallangan.

Toshkent temir yo’l muhandislari instituti O’quv-uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar: **I.G’. G’aniyev** – fizika-matematika fanlari doktori, professor;
A.M.Karimov–fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent;
F.R. Nuriddinov – katta o’qituvchi;
E.A. Mirsolixov – katta o’qituvchi.

Taqrizchilar: **M. A. Berdiqulov -** ToshTYMI dotsenti
O.I. Egamberdiyev - O’zMU dotsenti

© Toshkent temir yo’l muhandislari instituti, 2008y

Muharrir: Yu.Yu. Nurmetova

Nashrga ruxsat etildi. Hajmi b. t.

Qog'oz bichimi 60x80 1/16. Adadi Buyurtma №

ToshTYMI bosmaxonasida chop etildi. Toshkent, Odilxo’jayev ko’chasi, 1

Kirish

Davlat ta’lim standartlari talablaridan kelib chiqqan holda oliy texnika o’quv yurtlarining talabalaridan «Oliy matematika» fanini mukammal o’zlashtirish, turli masalalarning matematik modelini yarata olish, mantiqiy fikrlash malakasini kuchaytirish, dars jarayonida olgan bilimlarini amaliy tatbiq qila olish talab qilinadi.

Auditoriyada o’tkaziladigan amaliy darslar, talabalarda olgan bilimlarini masalalar yechishda qo’llash uchun muhim ko’nikmalar hosil qiladi. Ma’ruzada talabalar umumiy ko’rinishdagi bilimlarni o’zlashtirishsa, amaliy darslarda uni chuqurlashtirib, kengaytirib olishadi. Amaliy darslar talabalarning fikrlash qobiliyatini va nutqini rivojlantiradi hamda olayotgan bilimini nazorat qilib borish imkoniyatini beradi. Shu bois talabalarni tegishli adabiyotlar bilan yetarlicha ta‘minlash maqsadga muvofiq bo’ladi.

Oliy matematika fani bo’yicha amaliy darslarda an’anaviy foydalaniladigan adabiyot: V.P. Minorskiy «Oliy matematikadan masalalar to’plami» kitobining o’zbek tilidagi nusxalari yetarlicha emas, borlari ham tamirlashga muhtoj. Ushbu o’quv qo’llanma vujudga kelgan bo’shliqlarni to’ldiradi degan umiddamiz.

Qo’llanma oliy matematikaning quyidagi bo’limlarini o’z ichiga olgan:

1. Differensial tenglamalar.
2. Qatorlar nazariyasi.
3. Karrali integrallar.
4. Ehtimollar nazariyasi.
5. Matematik statistika.

Qo’llanmada, har bir mavzuga doir misol va masalalar berishdan avval, qisqacha nazariy ma’lumotlar keltirilgan. Misollar murakkablik darajasiga asosan berilgan. Dars jarayonida o’zlashtirilishi lozim bo’lgan mavzularga moslab uyga beriladigan topshiriqlar tanlangan.

Mualliflar qo’llanmani tayyorlashda, misol va masalalarni tanlashda, javoblarni tekshirib ko’rishda bergan yordamlari uchun «Oliy matematika» kafedrasining barcha professor-o’qituvchilariga chuqur minnatdorchilik bildiradilar.

1-bob. Oddiy differensial tenglamalar

§1. Umumiy tushunchalar. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar

1° Ushbu

$$F(x; y; y'; y''; ...; y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishdagi tenglama n - tartibli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $y(x)$ - qidirilayotgan noma'lum funksiya. Tenglamani ayniyatga aylantiradigan ixtiyoriy $y = \varphi(x)$ funksiyaga shu tenglamaning yechimi deyiladi.

2° Ushbu

$$P_1(x)Q_2(y)dx + P_2(x)Q_1(y)dy = 0$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bu tenglamani yechish uchun ifodaning har ikkala tomonini $P_2(x)Q_2(y)$ ga bo'lib, natijani bevosita integrallash kifoya.

Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$
2. $y^2(1+x)dx + x^2(1-y)dy = 0$
3. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
4. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$
5. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$
6. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$
7. $6xdx - 6ydy = 2x^2y2y - 3xy^2dy$
8. $2xdx - 3ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$
9. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dy$
10. $(1-y)dx + xdy = 0$
11. $(1-y)xdy + (1+x)ydx = 0$
12. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$
13. $x(y^2 - 9)dx + ydy = 0$
14. $ydx = \cos x \ln ydy$

15. $ctgxdy - tgydx = 0$
16. $(1+x^2)dy + 5ydx = 0$
17. $ydy + xe^y dx = 0$
18. $\sin 2x \cos 2ydx - \sin 2y \cos 2xdy = 0$
19. $dy + \sin(x+y)dx = \sin(x-y)dx$
20. $(5+x^2)dy - (7+y^2)dx = 0$
21. $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$
22. $dy - e^{x+y}dx = e^{x-y}dx$
23. $\sqrt{5+y^2}dx + \sqrt{4+x^2}dy = 0$
24. $x\sqrt{9+y^2}dx + y\sqrt{16+x^2}dy = 0$
25. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$
26. Balandligi 6m va asosining diametri 4m bo'lgan silindr shaklidagi idish suv bilan to'ldirilgan. Agar idishning tagidan radiusi $1/2$ m bo'lgan teshik ochib qo'yilsa, u holda idishdagi suv qancha vaqtning ichida chiqib ketadi?
27. Harorati 20° C bo'lgan honada jisim 20 min ichida 100° C dan 60° C gacha soviydi. Honaning haroratini ko'tarilishini hisobga olmasdan jismning sovush qonuniyatini toping.

§2. Birinchi tartibli bir jinsli differansial tenglamalar

1° Agar $f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ shart o'rinli bo'lsa u holda $f(x; y)$ funksiyani m o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

2° Agar $f(x, y)$ funksiya argumentlarining nol o'lchovli bir jinsli funksiyasi bo'lsa, u holda ushbu

$$y' = f(x; y)$$

ko'rinishdagi tenglamaga birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi. Bir jinsli differensial tenglama $u = \frac{y}{x}$ almashtirish yordamida yechiladi.

3° Ushbu

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

ko’rinishdagi differensial tenglama $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo’lganda $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ almashtirish yordamida birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamag keltirilib so’ngra yechiladi. Bu yerda $(\alpha;\beta)$ ushbu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ va $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ to’g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasidir.

Agar $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, u holda $a_1x + b_1y = t$ almashtirish yordamida o’zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil qilinib, so’ngra yechiladi.

Differensial tenglamaning umumiy integralini toping.

28. $y' = \frac{x+2y}{2x}$
29. $y' = \frac{x+y}{2x}$
30. $y' = \frac{x+3y}{3x}$
31. $y' = \frac{2x+3y}{5x}$
32. $y' = \frac{6y+5x}{4y}$
33. $y' = \frac{2x+4y}{4x}$
34. $y' = \frac{3y-x}{3x}$
35. $y' = \frac{y+x}{2y}$
36. $y' = \frac{3y-x}{y}$
37. $y' = \frac{5y-3x}{4x}$
38. $y' = \frac{4x+3y}{2y}$
39. $y' = \frac{3y-2x}{3x}$
40. $y' = \frac{x+7y}{5x}$
41. $y' = \frac{6y-x}{2x}$
42. $y' = \frac{x+9y}{3x}$
43. $y' = \frac{5y-4x}{3x}$
44. $y' = \frac{8y+3x}{5y}$
45. $y' = \frac{y+4x}{3y}$
46. $y' = \frac{x-y}{3x}$
47. $y' = \frac{x-y}{2y}$
48. $y' = \frac{9y+7x}{2y}$
49. $y' = \frac{8x-5y}{7x}$
50. $y' = \frac{6x+9y}{4y}$
51. $y' = \frac{x-9y}{5x}$
52. $y' = \frac{7x+5y}{9x}$
53. $(x+y+1)dx + (x+2y-1)dy = 0$
54. $(x+y+2)dx + (x+2y-1)dy = 0$
55. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$; $y(1) = 2$
56. $(x-2y+3)dy + (x+y-1)dx = 0$
57. $(x-y+4)dy + (x+y-2)dx = 0$

58. Ushbu $y' = (x+y-2)(y-x-4)$ tenglamaning $M(1;1)$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini toping.

59. Ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmani koordinata o'qidan ajratgan kesmaning kvadrati urinish nuqtasining koordinatalarini ko'paytmasiga teng bo'lgan chiziqni toping.

§3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

1° Ushbu

$$y' + P(x)y = v(x)$$

ko'rinishdagi tenglama birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Tenglamaning yechimi $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda $u(x)$ va $v(x)$ noma'lum finksiyalar.

2° $v(x)$ funksiya sifatida $v' + P(x) = 0$ tenglamaning ixtiyoriy hususiy yechimini tanlash mumkin.

3° $u(x)$ funksiya esa ushbu $u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ ko'rinishdagi differensial tenglamani yechib topiladi.

4° Birinchi tartibli differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi hususy yechimini topishga Koshi masalasi deyiladi.

Koshi masalasining yechimini toping.

60. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ $\quad y(1) = 0$

61. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ $\quad y(1) = 1$

62. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ $\quad y(1) = -\frac{5}{6}$

63. $y' - \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ $\quad y(1) = 1$

64. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ $\quad y(1) = 4$

65. $y' + \frac{y}{x} = 3x$ $\quad y(1) = 1$

66. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ $y(\quad) = 1$

67. $y' + 2xy = -2x^3$ $y(\quad) = e^{-1}$

68. $y' + xy = -x^3$ $y(\quad) = 3$

69. $y' - 4xy = -4x^3$ $y(\quad) = -\frac{1}{2}$

70. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}$ $y(\quad) = 1$

71. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}$ $y(\quad) = 0$

72. $xy' - 2y = x^3$ $y(\quad) = 2$

73. $xy' + y = 3x^2$ $y(\quad) = 2$

74. $y' - 3y = e^{3x}$ $y(\quad) = 0$

75. $y' - \frac{1}{x} y = 1$ $y(\quad) = 0$

76. $3xy' - 2y = 2x$ $y(\quad) = 5$

77. $xy' - y = \frac{1}{x}$ $y(\quad) = 0$

78. $x^3 y' - x^2 y = -6$ $y(\quad) = 2{,}5$

79. $xy' - 3y = 3x^2$ $y(\quad) = 0$

80. $xy' - y = x$ $y(\quad) = \ln 2$

81. $y' + \frac{1}{x} y = 5x$ $y(\quad) = 3$

82. $xy' + 2y = 4x^2$ $y(\quad) = 4{,}25$

83. $\frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 7$ $y(\quad) = 2{,}25$

84. $y' + 3ytg3x = \sin 6x$ $y(\quad) = \frac{1}{3}$

85. Tinch holatda turgan m massali nuqta vaqtga muttanosib bo'lgan (muttanosiblik koeffitsiyenti k_1 ga teng) kuch va tezlikka muttanosib bo'lgan (muttanosiblik koeffitsiyenti k_2 ga teng) muhitning qarshilik kuchi ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Moddiy nuqtaning tezligi bilan vaqt orasidagi bog'lanishni toping.

§4. Bernulli tenglamasi

1° Ushbu

$$y' + P(x)y = Q(x)y^2 \qquad (\alpha \neq 0; \alpha \neq 1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga **Bernulli tenglamasi** deyiladi.

$z = y^{1-\alpha}$ almashtirish yordamida Bernilli tenglamasi chiziqli differensial tenglamaga keltiriladi. Shuningdek, Bernulli tenglamasini $y = u(x) \cdot \vartheta(x)$ almashtirishni qo‘llab, bevosita yechish mumkin.

Differensial tenglamani yeching.

86. $xy' + y = \frac{xy^2}{2}$
87. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3$
88. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$
89. $3xy' + 3y = xy^2$
90. $y' - y = 2xy^2$
91. $y' + 2xy = 2x^3y^3$
92. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$
93. $y' + y = \frac{1}{2}xy^2$
94. $y' - y = xy^2$
95. $y' + y = xy^2$
96. $xy' + y = xy^2$
97. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$
98. $xy' + y = 2y^2 \ln x$
99. $xy' + 2y = 3x^3y^{4/3}$
100. $(x-1)y' - y = y^2$
101. $xy' + y = x^3y^4$
102. $3(xy' + y) = y^2 \ln x$
103. $y' - 2ytgx + y^2 \sin x = 0$
104. $y' - ytgx + y^2 \cos x = 0$
105. $xdy + (y + x^2y^2)dx = 0$
106. $2xdy + (x^2 + 2x + y^2)dx = 0$
107. $y' + y - e^{\frac{x}{2}}y^{\frac{1}{2}} = 0$
108. $2y' + 2xy - (x-1)e^xy^2 = 0$
109. $(x^3 - 1)y' + 3x^2y = (x^3 + 1)^2y^2$
110. $5(xy' + y) = y^2 \ln x$
111. Tinch holatda turgan m massali moddiy nuqta vaqtning kubiga muttanosib bo’lgan (muttanosiblik koeffitsiyenti k_1 ga teng) kuch va tezlikka muttanosib bo’lgan (muttanosiblik koeffitsiyenti k_2 ga teng)

muhitning qarshilik kuchi ta‘sirida to’g’ri chiziqli harakat qilmoqda. Moddiy nuqtaning tezligi bilan vaqt orasidagi bog’lanishni toping.

§5. To’liq differensialli tenglama

1° Agar $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ shart bajarilgan bo‘lsa, u holda

$$P(x;y)dx+Q(x_1y)dy=0$$

ko‘rinishdagi tenglamaga to‘liq differensial tenglama deyiladi va uni $du(x;y)=0$ ko‘rinishda yozish mumkin. $u(x;y)=c$ esa qaralayotgan tenglamaning umumiy integrali bo‘ladi.

2° Agar $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ shart bajarilmagan bo’lsa , u holda qaralayotgan tenglamani $\mu(x,y)$ integrallovchi ko’paytuvchiga ko’paytirib to’liq differensialli tenglama ko’rinishiga keltirish mumkin.

3° Agar tenglamaning faqat x o’zgaruvchidan bog’liq bo’lgan integrallovchi ko’paytuvchisi mavjud bo’lsa, u holda u

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q dx}$$

formula bilan topiladi

4° Agar tenglamaning faqat y o’zgaruvchidan bog’liq bo’lgan integrallovchi ko’paytuvchisi mavjud bo’lsa, u holda u

$$\mu=e^{-\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/P dx}$$

formula bilan topiladi

Differensial tenglamani integrallang.

112. $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0$
113. $(3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0$
114. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0$
115. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$
116. $(3xy^2-x^2)dx+(3x^2y-6y^2-1)dy=0$
117. $(5x\,y^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0$

118. $(1+\frac{y^2}{x^2})dx-\frac{2y}{x}dx=0$

119. $(x^2-4xy-2y)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$

120. $2(3x^2y^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0$

121. $(3x^2+6x^2y+3xy^2)dx+(2x^3+3x^2y)dy=0$

122. $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0$

123. $\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2+y^2}{y^2}dy=0$

124. $e^y 2x+(\cos y+xe^y)dy=0$

125. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+x\cos y)dy=0$

126. $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$

127. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$

128. $(y+e^x\sin y)dx+(x+e^x\cos y)dy=0$

129. $(xy+\sin y)dx+(0{,}5x^2+x\cos y)dy=0$

130. $(x^2+y^2+y)dx+(xy+x+e^y)dy=0$

131. $(x^2+\sin y)dx+(+x\cos y)dy=0$

132. $(e^x\sin y+x)dx+(e^x\cos y+y)dy=0$

133. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$

134. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0$

135. $(\arcsin x+2xy)dx+(x^2+1+arctgy)dy=0$

136. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$

137. $ydx-xdy+\ln xdx=0 \quad (\mu=\phi(x))$

138. $(x^2\cos x-y)dx+xdy=0 \quad (\mu=\phi(x))$

139. $ydx-(x+y^2)dy=0 \quad (\mu=\phi(y))$

140. $y\sqrt{1-y^2}dx+(x\sqrt{1-y^2}+y)dy=0 \quad (\mu=\phi(y))$

§6. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

1° $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi differensial tenglamaning yechimi bevosita n marotaba integrallash bilan topiladi.

2° Tarkibiga y o'zgaruvchi oshkor kirmaydigan $F(x;y';y'')=0$ differensial tenglama $y'=p(x)$ almashtirish yordamida $F(x;p;p')=0$ ko'rinishdagi tartibi pasaytirilgan tenglamaga keltirilib yechiladi.

3° Tarkibiga x o‘zgaruvchi oshkor kirmaydigan $F(y;y';y'')=0$ differensial tenglama $y'=p(y)$ almashtirish yordamida $F\left(y;p;p\dfrac{dp}{dy}\right)=0$ ko’rinishdagi tartibi pasaytirilgan tenglamaga keltirib yechiladi.

Differensial tenglamani integrallang.

141. $y''+6yy'^3=0$
142. $y'^2+2yy''=0$
143. $yy''+y'^2-1=0$
144. $(y-1)y''-2y'^2=0$
145. $x''y''+x^3y'=1$
146. $x^2y''+xy'=1$
147. $x^4y''+x^3y'=4$
148. $(1+x)y''+2xy'=12x^3$
149. $y''y^3+64=0$
150. $yy''-y'^2=y^2\ln y$
151. $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$
152. $y''+\dfrac{2x}{x^3+1}y'=2x$
153. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$
154. $(x-1)y''-y'=x(x-1)^2$
155. $(1-x^2)y''-xy'=2$
156. $2xy''y'=(y')^2-1$
157. $1+(y')^2=yy''$
158. $y''(y+3)-2(y')^2=0$
159. $4(y'')^2=1+(y')^2$
160. $\sqrt{y}\,y''=y'$
161. $(y+y')y''+(y')^2=0$
162. $y''=y'e^y$
163. $(1+\sin x)y''=\cos x\cdot y'$
164. $y''tg8x=8y'$
165. $y''ctg3x+3y'=0$
166. m massali jism boshlang’ich tezliksiz yuqoridan tushmoqda. Unga jism tezligining kvadratiga muttanosib bo’lgan havoning qarshiligi ta ’sir etmoqda. Jism harakatlanish qonunini toping.

§7. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

1° Ushbu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga n tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama deyiladi. Tenglamaning umumiy yechimi $\tilde{y}(x)$ bilan $f(x)$ funksiyaga mos bo‘lgan biror xususiy yechim $y^{(*)}(x)$ ning yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

2°Qaralayotgan tenglamaga mos bo’lgan ushbu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

n tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

a) $k'' + a_1 k^{n-1} + ... + a_n k = 0$

xarakteristik tenglama tuziladi;

b) xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1, k_2 ..., k_n$ lar topiladi;

d) har bir karrali bo‘lmagan k ildiz uchun e^{kx} ko‘rinishdagi xususiy yechim yoziladi;

e) har bir juft karrali bo‘lmagan $k = \alpha \pm ip$ kompleks ildiz uchun $e^{\alpha x} \cos \beta x$ va $e^{\alpha x} \sin \beta x$ xususiy yechimlar yoziladi;

f) har bir m karrali haqiqiy k ildiz uchun $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$ chiziqli erkli xususiy yechimlar yoziladi;

g) har bir juft e karrali $k = \alpha \pm i\beta$ ildiz uchun

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, ..., x^{e-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{e-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$$

xususiy yechimlar yoziladi;

h) yuqorida topilgan n ta chiziqli erkli xususiy $y_1, y_2, . y_n$ yechimlardan foydalanib:

$$\tilde{y}(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

ko‘rinishdagi umumiy yechim topiladi. Bu yerda, $c_1, c_2, ..., c_n$ – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

3° $f(x)$ funksiyaning ba’zi ko‘rinishlari uchun (9) tenglamaning $y^*(x)$ xususiy yechimini qanday ko‘rinishda qidirish lozimligini ta’kidlab o‘tamiz.

a) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda $P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_n$

Agar α xarakteristik tenglama ildizlarining hech qaysinisi bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechim $y^*(x) = e^{\alpha x} Q_n(x)$ ko‘rinishda qidiriladi. Bu yerda $Q_n(x)$ n – tartibli noma’lum koeffitsiyentli ko‘phad.

Agar α xarakteristik tenglamaning biror m karrali ildizi bilan ustma-ust tushib qolsa, u holda xususiy yechim $y^*(x) = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) $f(x) = e^{\alpha x} \left[U_p(x) \cos \beta x + W_q(x) \sin \beta x \right]$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda $U_p(x), W_q(x)$ - mos ravishda p - va q - tartibli ko‘phadlar.

Agar $\alpha \pm i\beta$ xarakteristik tenglamaning birorta ham kompleks ildizi bilan ustma-ust tushmasa, u holda xususiy yechim

$$y^*(x) = e^{\alpha x} \left[N_s(x) \cos \beta x + M_s(x) \sin \beta x \right]$$

ko‘rinishda qidiriladi. Bu yerda, $N_s(x), M_s(x)$ - S - tartibli noma’lum koeffitsiyentli ko‘phadlar, $S = \max\{n; q\}$.

Agar $\alpha \pm i\beta$ xarakteristik tenglamaning biror l karrali kompleks ildizi bilan ustma-ust tushib qolsa, u holda xususiy yechim

$$y^*(x) = x^l e^{\alpha x} \left[N_s(x) \cos \beta x + M_s(x) \sin \beta x \right]$$

ko‘rinishda qidiriladi.

4° $Q_n(x), N_s(x)$ va $M_s(x)$ ko‘phadlarning koeffitsiyentlari noma’lum koeffitsiyentlar usuli bilan topiladi.

Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

167. $y''' + y'' = 3x + 4$

168. $y''' + 2y'' = 4x + 5$

169. $y''' + 3y'' = 2x + 3$

170. $y''' + 4y'' = 4x + 1$

171. $y''' + 5y'' = 6x + 3$
172. $y''' + 6y'' = 4x - 3$
173. $y''' - y'' = 4x - 3$
174. $y''' - 2y'' = 2x - 4$
175. $y''' - 3y'' = 3x - 5$
176. $y''' - 4y'' = 4x - 1$
177. $y''' - 5y'' = 7x + 6$
178. $y''' - 6y'' = 4x - 5$
179. $y''' - 13y'' = 7x + 6$
180. $y''' + 13y'' = 6x + 7$
181. $y''' + 12y'' = 8x + 7$
182. $y''' - 12y'' = 9x + 8$
183. $y''' - 7y'' = x^2 + 3x + 1$
184. $y''' - 8y'' = 2x^2 + x + 3$
185. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2 + 2x + 1$
186. $y''' - 3y'' + 2y' = x^2 + 3x + 3$
187. $y''' - 7y'' + 12y' = 2x^2 + 3x + 5$
188. $y''' - 5y'' + 4y' = x^2 - 16$
189. $y''' + 6y'' + 8y' = x^2 + 4x + 3$
190. $y''' + 8y'' + 12y' = 3x^2 - 7$
191. $y''' - 5y'' + 6y' = x^2 + 4x + 5$
192. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \sin 4x$
193. $y'' - 6y' + 9y = -e^{3x} \sin 4x$
194. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x} \sin 5x$
195. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x} \sin 3x$
196. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$
197. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$
198. $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x} \cos 5x$
199. $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x} \sin 5x$
200. $y'' + 3y' = e^x \sin x$
201. $y'' + 3y' = -2e^x \sin x$
202. $y'' + 4y' = 4e^x \sin x$
203. $y'' + 4y' = 10e^x \cos x$
204. $y'' - 6y' + 25y = 5\sin x + 6\cos x$
205. $y'' - 4y' + 3y = 3e^x \cos x$
206. $y'' + 9y = 2\sin 3x + 4\cos 3x$
207. $y'' + 3y' - 10y = 5x^2 e^{3x}$
208. $y'' + 9y' + 20y = 4x^2 e^{5x}$
209. $y'' - 6y' + 8y = (x^2 + 1)e^{2x}$
210. $y'' + 8y' + 16y = 2xe^{-4x}$
211. $y'' + 10y' + 25y = 3xe^{-5x}$
212. $y'' + 4y = 5\sin 2x + 7\cos 2x$
213. $y'' + 16y = 3\cos 4x + 4\sin 4x$
214. $y'' - 2y' + 2y = 5e^x \cos x$
215. $y'' - 4y' + 8y = 7e^{2x} \cos x$
216. $y'' + 6y' + 10y = 8e^x \sin x$

§8. O'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

1° Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n2}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

ko’rinishdagi sistemaga o’zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli n ta differensial tenglamlar sistemasi deyiladi

2° Differensial tenglamalar sistemasining yechimi ushbu

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t},\ x_2 = p_2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ x_n = p_n e^{\lambda t},\ \lambda = const;\ p_i = const\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

ko’rinishda qidiriladi.

Diifferensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping

217. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -ax_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -ax_1 \end{cases}$

218. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$

219. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

220. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

221. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2 \end{cases}$

222. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \end{cases}$

223. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3 \end{cases}$

224. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\alpha + 1)x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + (\alpha - 1)y \end{cases}$

225. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

226. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$

II bob. Sonli qatorlar

§1. Sonli qatorlar haqida umumiy tushunchalar

Ushbu $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonlar ketma-ketlikni tashkil etasa, ushbu $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ifodaga sonli qator deyiladi. agarda $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sonlarni qatorning hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deb yuritiladi.

Qatorning dastlabki n ta hadini yig'indisiga uning xususiy yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Agar $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limit mavjud bo'lsa, u holda sonli qator yaqinlashuvchi hamda S soni uning yig'indisi deyiladi.

Agar xususiy yig'indining chekli limiti mavjud bo'lmasa, u holda qatorni uzoqlashuvchi deb yuritiladi.

Sonli qatorlar quydagi xossalarga ega:

1º Agar sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2º Agar qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3º Agar $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda $ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ...$ sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi cS ga teng bo'ladi.

4º Agar

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_1 va S_2 larga teng bo'lsa, u holda

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + ... + (a_n \pm b_n) + ...$$

sonli qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S_1 \pm S_2$ ga teng bo'ladi.

227. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10^n + n}$ qatorning dastlabki beshta hadini yozing.

228. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13n}{2^n + 7n}$ qatorning dastlabki yettita hadini yozing.

Qatorning umumiy hadini toping.

229. $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \ldots$

230. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \ldots$

231. $\frac{1}{3} + \frac{5}{26} + \frac{9}{126} + \frac{7}{626} + \ldots$

232. $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots$

Qatorning yig'indisini toping.

233. $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{27} + \ldots$

234. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots$

235. $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \ldots$

236. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$

237. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3^n + n}$ qatorning dastlabki to'rtta hadini yozing.

238. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + n^2 + n + 1}$ qatorning dastlabki beshta hadini yozing.

Qatorning umumiy hadini toping.

239. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots$

240. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$

241. $\frac{10}{13} + \left(\frac{10}{13}\right)^2 \cdot 2^3 + \left(\frac{10}{13}\right)^3 \cdot 3^3 + \left(\frac{10}{13}\right)^4 \cdot 4^3 + \ldots$

242. $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10000}{13}+...$

Qatorning yig'indisini toping.

243. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+...$

244. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+...$

245. $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+...$

246. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+...$

§2. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti

Agar ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ o'rinli bo'ladi, ya'ni yaqinlashuvchi qatorlarning umumiy hadini limiti $n\to\infty$ da nolga teng bo'ladi. Bu shart qator yaqinlashishining zaruriy sharti deb yuritiladi.

Agar zaruriy shart bajarilsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Agar zaruriy shart bajarilmasa, u holda qator albatta uzoqlashuvchi bo'ladi.

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilishini tekshiring.

247. $1-1+1-1+...$

248. $\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^4...$

249. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+...$

250. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...$

251. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\frac{64}{e^n}+...$

Qatorni zaruriy shart yordamida yaqinlashishga tekshiring.

252. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...$

253. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\frac{16}{33}+...$

254. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\left(\frac{12}{13}\right)^4+...$

255. $\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+\frac{8}{9}+\frac{16}{11}+...$

256. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+...$

Qator yaqinlashishining zaruriy shartini bajarilishini tekshiring.

257. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+...$

258. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...$

259. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...$

260. $1-2+3-4+5-...$

261. $1{,}1+1{,}02+1{,}003+1{,}0004+...$

Qatorni zaruriy shart yordamida yaqinlashishga tekshiring.

262. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...$

263. $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{9}{10}+\frac{16}{17}+...$

264. $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}+\frac{10}{15}+\frac{17}{24}+...$

265. $1+\frac{6}{9}+\frac{12}{10}+\frac{20}{17}+...$

266. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+...$

§3. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish belgisi

1º Agar ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

va

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (2)$$

musbat hadli sonli qatorlar berilgan bo'lib, quyidagi

$$a_n \le b_n \quad (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

shart o'rinli bo'lsa, ya'ni (1) qatorning har bir hadi (2) qatorning mos hadidan katta emas, u holda (2) qatorning yaqinlashuvchiligidan (1) qatorning ham yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi va aksincha (1) qatorning uzoqlashuvchiligidan (2) qatorning ham uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

(3) shart $n = N$ haddan boshlab bajarilsa ham bu belgi o'z kuchida qoladi.

2º Agar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda (1) va (2) qatorlarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi yoki ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Qatorni solishtirish belgisi yordamida yaqinlashishga tekshiring.

267. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

268. $\frac{2}{7}+\frac{4}{27}+\frac{8}{127}+\frac{16}{627}+\ldots$

269. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots$

270. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{4}}$

271. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[5]{n^9}}$

272. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^2-1}$

273. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+3}$

274. $\frac{10}{6}+\frac{17}{27}+\frac{24}{128}+\frac{31}{629}+\ldots$

275. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\ldots$

276. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^3+1}$

Qatorni solishtirish belgisi yordamida yaqinlashishga tekshiring.

277. $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+...$

278. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$

279. $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+...$

280. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \left(n+1\right)}{n^2\sqrt{n}}$

281. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^3}}$

282. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n-3}$

283. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+...$

284. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+5}$

285. $\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{30}}+\frac{1}{\sqrt{40}}+...$

286. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{7}}{5^n+1}$

§4. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Dalamber belgisi

1º Ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

musbat hadli sonli qator qaralayotgan bo'lsin. Agar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

chekli limit mavjud bo'lib, $D<1$ bo'lsa, u holda qaralayotgan qator yaqinlashuvchi, $D>1$ bo'lsa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2º Agar chekli limit mavjud bo'lmasa yoki $D=1$ bo'lib qolsa, u holda qatorni yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham deb bo'lmaydi. Bunday hollarda qatorni yaqinlashishga tekshirish uchun boshqa belgini qo'llash lozim bo'ladi.

Qatorni Dalamber belgisi bilan yaqinlashishga tekshiring.

287. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\frac{3^4}{4^{10}}+...$

288. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+...$

289. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\frac{10^4}{4!}+...$

290. $\frac{10}{17}+\left(\frac{10}{17}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{17}\right)^3\cdot 3^5+\left(\frac{10}{17}\right)^4\cdot 4^5+...$

291. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}+...$

292. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}\cdot\sin\frac{3}{2^n}$

293. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{3}{n}}{(n+1)!}$

294. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot tg\frac{5}{3^n}$

295. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{10^n\cdot n^3}$

296. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!(n!)}{(n+1)!}$

Qatorni Dalmber belgisi bilan yaqinlashishga tekshiring.

297. $1+\frac{3}{5\cdot 2}+\frac{3^2}{5^2\cdot 3}+\frac{3^3}{5^3\cdot 4}+\frac{3^4}{5^4\cdot 5}+...$

298. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3\cdot 2^2}}+\frac{3}{\sqrt{5\cdot 2^3}}+\frac{4}{\sqrt{7\cdot 2^4}}+...$

299. $\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+...$

300. $\frac{10}{13}+\left(\frac{10}{13}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{10}{13}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{10}{13}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+...$

301. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{2^4}+...$

302. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}\cdot\sin\frac{5}{7^n}$

303. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{5}{n+1}}{(n+2)!}$

304. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}{2^n\cdot(n+1)!}\cdot tg\frac{1}{5^n}$

305. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!\sqrt[3]{n^2}}{10^n\cdot(n+1)^3}$

306. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!(n+1)!}{(2n)!}$

§5. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishiga tekshirishning Koshi belgisi

1º Ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$$

musbat hadli sonli qator qaralayotgan bo'lsin.
Agar

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=C$$

chekli limit mavjud bo'lib, $C<1$ bo'lsa, u holda qator yaqinlashuvchi bo'ladi, $C>1$ bo'lsa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2º Agar chekli limit mavjud bo'lmasa yoki $C=1$ bo'lib qolsa, u holda qatorni yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham deb bo'lmaydi. Bunday hollarda qatorni yaqinlashishga tekshirish uchun boshqa belgini qo'llash lozim bo'ladi.

Qatorni Koshi belgisi yordamida yaqinlashishga tekshiring.

307. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+...$

308. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{5}{8}\right)^5+\left(\frac{7}{11}\right)^7+...$

309. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{9}{13}\right)^{2}+\left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{5}{2}}+\ldots$

310. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\frac{n}{7^{n}}$

311. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\cdot arctg^{4}\frac{\pi}{5n}$

312. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$ [illegible]

313. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{n+1}}{7^{n+2}}$

314. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^{2}}\cdot\sqrt{n}$

315. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^{2n}\cdot n$

316. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{4n+5}\right)^{3n}\cdot\sqrt[3]{n}$

Qatorni Koshi belgisi bilan yaqinlashishga tekshiring.

317. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}\right)^{3}+\left(\frac{7}{11}\right)^{4}+\ldots$

318. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^{3}+\left(\frac{4}{5}\right)^{5}+\left(\frac{5}{7}\right)^{7}+\ldots$

319. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{7}{10}\right)+\left(\frac{9}{13}\right)^{\frac{4}{3}}+\ldots$

320. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}\cdot\frac{n}{3^{n}}$

321. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{3}arctg^{n}\frac{\pi}{3n}$

322. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+3n+4}{3n^{2}+2n+1}\right)^{n}\cdot\sqrt{n}$

323. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^{n}}{5^{n+1}}$

324. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+1}\right)^{n^{2}}\cdot n$

325. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{5n-1}\right)n^{2}\cdot\sqrt[3]{n}$

326. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-1}\right)^{2n}\cdot\sqrt[5]{n}$

§6. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning integral belgisi

1º Ushbu

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

musbat hadli sonli qator berilgan bo'lib, uning hadlari o'smaydigan bo'lsin, ya'ni $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots$

Agar $x\geq 1$ qiymatlarda $f(x)$ o'smaydigan uzluksiz funksiya bo'lib, Ushbu

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ldots,\ f(n)=a_n\ldots \qquad (1)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda $\int_a^{\infty} f(x)\,dx\ \ (a\geq 1)$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

2º (1) shart $n=N$ tartibli haddan boshlab o'rinli bo'lsa ham belgi o'z kuchida qoladi.

Qatorni integral belgi yordamida yaqinlashishga tekshiring.

327. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

328. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}+\ldots$

329. $\frac{1}{2\cdot\ln^2 2}+\frac{1}{3\cdot\ln^2 3}+\frac{1}{4\cdot\ln^2 4}+\frac{1}{5\cdot\ln^2 5}+\ldots$

330. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{4^3+1}+\ldots$

Qatorni solishtirish va integral belgilari yordamida yaqinlashishga tekshiring.

331. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2(n+3)}$

332. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln 2n}$

333. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

334. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln^2 n}$

335. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2 n}$

336. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+3)\ln(3n+3)}$

Qatorni integral belgisi bilan yaqinlashishga tekshiring.

337. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...$

338. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\frac{1}{39\ln 39}+...$

339. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{38}+...$

340. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{11^2}+...$

Qatorni solishtirish va integral belgi yordamida yaqinlashishga tekshiring.

341. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n}{(3n^2+4)\ln n}$

342. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(3n^2+2)\ln n}$

343. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)\ln^2(4n-5)}$

344. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(n+1)}$

345. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n+2}{(4n^2-9)\ln(n-3)}$

346. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(3n+1)}$

§7. Ishorali o’zgaruvchan bo’lgan sonli qatorlar

1º Ushbu

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

ishoralari navbatma-navbat o’zgaruvchan bo’lgan sonli qator qaralayotgan bo’lsin.

Leybnits belgisi. Agar hadlarni absolyut qiymatlari monoton kamayuvchi bo'lib, $n \to \infty$ da uning umumiy hadi nolga intilsa, ya'ni quydagi shartlar bajarilsa:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

u holda qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi musbat bo'ladi va birinchi haddan katta bo'lmaydi.

2º Agar ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

ishoralari o'zgaruvchan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan iborat bo'lgan

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa u holda qaralayotgan qatorni absolyut yaqinlashuvchi qator deb yuritiladi.

3º Agar ishoralari o'zgaruvchan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning hadlarini absolyut qiymatlaridan bo'lgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda qaralayotgan qatorni shartli yaqinlashuvchi qator deb yuritiladi.

4º Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish qator yaqinlashuviga ta'sir etmaydi.

5º Agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning hadlari o'rinlarini almashtirish natijasida u uzoqlashuvchi qator bo'lib qolishi ham mumkin yoki boshqa songa yaqinlashuvchi qatorga aylanib qolishi mumkin.

6º Agar ishoralari o'zgaruvchan qator absolyut ham, shartli ham yaqinlashmasa, u holda uni uzoqlashuvchi qator deb yuritiladi.

Qatorni yaqinlashishga tekshiring.

347. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

348. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + ...$

349. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - 1{,}0001 + ...$

350. $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + ...$

351. $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+...$

352. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

353. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)\cdot\ln\ln(n+1)}$

354. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ qator yig'indisini $0{,}01$ aniqlikda hisoblang.

355. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)}$ qator yig'indisini $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

356. Ushbu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$ qator yig'indisini $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

Qatorni yaqinlashishga tekshiring.

357. $1-1+1-1+...$

358. $1{,}1-1{,}02+1{,}003-1{,}0004+...$

359. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\frac{1}{\sqrt[5]{10}}+...$

360. $\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos 2\alpha}{2^3}+\frac{\cos 3\alpha}{3^3}+\frac{\cos 4\alpha}{4^3}+...$

361. $\frac{1}{3\ln 3}-\frac{1}{5\ln 5}+\frac{1}{7\ln 7}-\frac{1}{9\ln 9}+...$

362. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$

363. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\cdot\ln^2(3n+1)}$

364. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{2n}}$

365. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ qator yig'indisini $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

366. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$ qator yig'indisini $0{,}001$ aniqlikda hisoblang

III bob. Funksional qatorlar

§1. Funksional qatorlar haqida asosiy tushunchalar

1º Har bir hadi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan ushbu

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...$$

qatorni funksional qator deyiladi.

2º x o'zgaruvchining $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ funksiyalar aniqlangan hamda funksional qator yaqinlashuvchi bo'ladigan qiymatlar to'plamiga funktsional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

3º Funksional qatorlarning yaqinlashish sohasida uning yig'indisi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, ushbu $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} u_k(x) = S(x)$ chekli limit mavjud bo'ladi.

4º Quyidagi $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$ ifodaga funksional qatorning qoldiq hadi deb yuritiladi. x o'zgaruvchining qator yaqinlashish sohasidan olingan har bir qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ bajariladi, ya'ni yaqinlashuvchi qatorning qoldiq hadini limiti $n \to \infty$ da nolga teng bo'ladi.

5ºAgarda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday butun musbat N soni topilsinki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|R_n(x)| < \varepsilon$ shart x o'zgaruvchining shu kesmada olingan hamma qiymatlarida o'rinli bo'lsa, funksional qator $[a;b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi deb yuritiladi.

6º Veyershtars belgisi. Agar funksional qatorning har bir hadini absolyut qiymati yaqinlashuvchi bo'lgan ushbu $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ musbat hadli sonli qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa, ya'ni:
$|u_1(x)| \leq a_1, |u_2(x)| \leq a_2, |u_3(x)| \leq a_3, \ldots$ o'rinli bo'lsa, u holda funksional qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

7º $[a;b]$ kesmada har bir hadi uzluksiz bo'lgan tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning yig'indisi ham uzluksiz bo'ladi.

8º Agar (1) qator $[a;b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ ga teng bo'lsa, u holda

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \int_a^b u_3(x)dx + \ldots$$

o'rinli bo'ladi, ya'ni tekis yaqinlashuvchi qatorni uning yaqinlashish sohasida hadma-had integrallash mumkin.

9º Agar (1) qator $[a;b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi hamda har bir hadi differenlanuvchi bo'lib, ushbu $u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+....+u_n'(x)+...$ qator shu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

o'rinli bo'ladi.

367.Ushbu $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+....+\frac{1}{1+x^{2n}}+....$ qatorni yaqinlashish sohasini toping.

368.Ushbu $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^4}+\frac{1}{3+x^6}-....+\frac{(-1)^{n-1}}{n+x^{2n}}+....$ qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

369.Ushbu $\sin x\frac{\sin^2 2x}{2^2}+\frac{\sin^3 3x}{3^2}+....+\frac{\sin^4 nx}{n^2}+....$ qatorni Veyershtras belgisi yordamida tekis yaqinlashishga tekshiring.

370.Ushbu $arctgx+atctg\frac{x}{2\sqrt{2}}+arctg\frac{x}{3\sqrt{3}}+....+arctg\frac{x}{n\sqrt{n}}+....$ funksional qatorni $[0;\frac{\pi}{4}]$ kesmada hadma-had integrallasa bo'ladimi?

371.Qatorning yaqinlashish sohasini toping. $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+....+\frac{1}{n^x}+...$

372.Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+x^4}$ qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

373.Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}$ qatorni yaqinlashish sohasini toping.

374. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

375. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}\sqrt{1+(n-1)x}}$ qatorni yaqinlashish sohasida uning oxirgi hadi qaysi n dan boshlab $0,001$ dan kichik bo'ladi?

376. Ushbu $1+x+x^2+x^3+....+x^4+....$ qatorni yaqinlashish sohasini toping.

377. Ushbu $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+....+\frac{x^n}{n^2}+....$ qatorni $[-1;1]$ kesmada tekis yaqinlashuvchiligini ko'rsating.

378. $cos+\frac{cos^2 2x}{2^2}+\frac{cos^3 3x}{3^2}+....+\frac{cos^n nx}{4^2}+....$ qatorni Veyershtrass belgisi yordamida tekis yaqinlashishga tekshiring.

379. Ushbu $\sin x+\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\sin\frac{x}{3}+....+\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}+....$ funksional qatorni hadma-had differensiallash mumkinmi?

380. Ushbu $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+....+\frac{\cos^n x}{n!}+....$ funksional qatorni $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada hadma-had integrallash mumkinmi?

381. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)$ funksional qatorni $x=1, x=2$ *va* $x=3$ nuqtalarda yaqinlashishga tekshiring.

382. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x^2-4x+6)$ funksional qatorni $x=1, x=2$ nuqtalarda yaqinlashishga tekshiring.

383. Ushbu $1+1^{-x}+1^{-2x}+....+1^{-(n-1)x}+....$ qatorni yaqinlashish sohasini toping.

384. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^{n-1}}$ qatorni yaqinlashish sohasida uning qoldiq hadi qaysi n dan boshlab $0{,}001$ dan kichik bo'ladi.

385.Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^{2(n-1)}+nx}}$ qatorning yaqinlashish sohasida qaysi n dan boshlab $|P_n(x)|<0{,}01$ shart bajariladi?

§2. Darajali qatorlar

1º Ushbu

$$a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n+....$$

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_1,a_2,a_3,....a_n....$ haqiqiy sonlar bo'lib, darajali qatorning koeffitsiyentlari deb yuritiladi.

2º Abelning birinchi teoremasi: agar darajali qator nolga teng bo'lmagan $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u $|x|<|x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

3º Abelning ikkichi teoremasi: agar darajali qator $x=x$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda u $|x|>|x|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

4º Natija:

1) darajali qator uchun markazi koordinata boshida bo'lgan $(-R;R)$ yaqinlashish oralig'i mavjud. Shu oraliqning ichki nuqtalarida absolyut yaqinlashadi, tashqarisida esa uzoqlashadi. $X=\pm R$ nuqtalarda qator absolyut yaqinlashuvchi ham, shartli yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. R soniga darajali qatorning yaqinlashish radiusi deb yuritiladi. Agar $R=0$ bo'lib qolsa, qator faqat $x=0$ nuqtada yaqinlashadi, $R\to\infty$ bo'lib qolsa, qator butun sonlar o'qida yaqinlashadi.

5º Agar darajali qator koeffitsiyentlari noldan farqli bo'lsa, u holda uning yaqinlashish radiusi

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formula bilan (chekli limit mavjud bo'lsa) topiladi.

6º Agar darajali qator

$$a_0+a_1x^p+a_2x^{2p}+....a_nx^{np}+....$$

ko'rinishida $(p=2,3,4...)$ bo'lsa, u holda uning yaqinlashish radiusi

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

folmula (chekli limit mavjud bo'lsa) bilan topiladi.

7º Agar darajali qator koeffitsiyentlari noldan farqli bo'lsa, u holda uning yaqinlashish radiusi

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$$

formula (chekli limit mavjud bo'lsa) bilan topilishi mumkin.

8º Umuman darajali qatorning yaqinlashish radiusini, uning hadlarini absolyut qiymatlaridan tashkil topgan qatorga Dalamber yoki Koshi belgilarini qo'llab topish mumkin.

9º Agar darajali qator

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+....+a_n(x-a)^n+....$$

ko'rinishida bo'lsa, u holda uning yaqinlashish oralig'i markazi $x=a$ nuqtada bo'lgan $(a-R,a+R)$ oraliqdan iborat bo'ladi.

10º Darajali qatorni uning yaqinlashish oralig'ida hadma-had integrallash hamda differensiallash mumkin.

Darajali qatorning yaqinlashish oralig'ini toping va oraliq chegaralarida uni yaqinlashishga tekshiring.

386. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2+....+\frac{1}{4}\cdot x^n+.....$

387. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....+\frac{x^4}{n!}+....$

388. $1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^5}{10^2}+....+\frac{x^{3n}}{10^n}+...$

389. $2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+....+\frac{2^n\cdot x^{5n}}{2n-1}+...$

390. $(x-3)+\frac{1}{2^2}(x-3)^2+\frac{1}{3^2}(x-3)^3+....+\frac{1}{n^2}(x-3)^n+....$

391. $(x-4)+\frac{(x-4)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-4)^3}{\sqrt{3}}+....+\frac{(x-4)^n}{\sqrt{4}}+....$

392. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+....+\frac{x^{3n}}{8^n\cdot(4n-3)}+....$

393. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+....+\frac{x^n}{n\cdot(n+1)}+....$

394. Ushbu $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+.....+\frac{x^n}{n}+....$ darajali qatorning $|x|<1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yig'indisini toping.

395. Ushbu $-2x+4x^2-6x^2+....+(-1)^n\cdot 2n\cdot x^{2n-1}+.....$ darajali qatorning $|x|<1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yig'indini toping.

Darajali qatorning yaqinlashish oralig'ini toping va oraliq chegaralarida uni yaqinlashishga tekshiring.

396. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+...+\frac{x^4}{3^n\cdot n}+....$

397. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+....+\frac{2^4\cdot x^n}{(2n-1)^2\cdot\sqrt{3^n}}+...$

398. $\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{3!}+\frac{(x+1)^3}{5!}+....+\frac{(x+1)^4}{(2n-1)!}+....$

399. $\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+....+\frac{(x-1)^4}{2^n}+....$

400. $\frac{2x+1}{1}+\frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{(2x+1)^3}{7}+....+\frac{(2x+1)^4}{(3n-2)}+....$

401. $1+\frac{x^3}{100}+\frac{x^6}{100^2}+\frac{x^9}{100^3}+....+\frac{x^{3n}}{100^4}+....$

402. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+....+\frac{4}{n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+....$

403. Ushbu $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+....+\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^n}+....$ darajali qatorning $|x|<a$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yig'indisini toping.

404. Ushbu $1-3x^2+5x^4-7x^6+....+(-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}+.....$ darajali qatorlarni $|x|<1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yig'indini toping.

405. Ushbu $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}x+\frac{3\cdot 4}{a^4}\cdot x^2+....+\frac{n\cdot(n+1)}{a^{n+1}}\cdot x^{n-1}+.....$ darajali qatorni $|x|<a$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yig'indisini toping.

§3. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

1º Teylor qatori. $x=x_0$ nuqtalarning atrofida cheksiz ko'p marta differensiallashuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyani ushbu

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Teylorning darajali qatoriga yoyish mumkin, agar $x=x_0$ nuqtaning atrofida $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ shart o'rinli bo'lsa. Bu yerda $R_n(x)$- Teylor qatorining qoldiq hadi, $c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$

2º Makloren qatori. Agar Teylor qatorida $x_0=0$ bo'lsa, u holda ushbu $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$ ko'rinishdagi Maklorenning darajali qatori hosil bo'ladi.

3º Ba'zi elementar funksiyalarining Makloren qatoriga yoyilmasi:

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....+\frac{x^4}{n!}+...-\infty<x<\infty$

$f_n x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+....+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...-\infty<x<\infty$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1)!}+...-\infty<x<\infty$

$(+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(n-1)}{2!}x^2+\frac{m(n-1)(n-2)}{3!}x^3+....+\frac{m(n-1)...(n-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+...$

Bu ifoda quyidagi hollarda o’rinli bo’ladi:

$m \geq 0$ da, agar $-1 \leq x \leq 1$ bo’lsa

$-1 < m < 0$ da, agar $-1 < x \leq 1$ bo’lsa

$m \leq -1$ da, agar $-1 < x < 1$ bo’lsa

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^4}{n} + ... -1 < x \leq 1$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n-1}\frac{ч^{2m-1}}{2m-1} + ... -1 \leq x \leq 1$$

4º Funksiya uchun yozilgan Teylor yoki Makloren qatorining shu funksiyani ifodalashini isbotlash uchun qatorning qoldiq hadini nolga intilishini yoki qatorni yaqinlashuvchiligini ko’rsatish lozim bo’ladi. Barcha elementlar funksiyalar uchun ularning aniqlanish sohasida bu shart bajariladi.

406. $f(x) = lux$ funksiyani $x_0 = 1$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

407. $f(x) = \sqrt{x^3}$ funksiyani $x_0 = 1$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

408. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyani $x_0 = 3$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

409. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$ funksiyani $x_0 = 2$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

410. $f(x) = x^2 e^x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

411. $f(x) = e^x \cdot \sin x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

412. $f(x) = \cos^2 x$ funksiyani x ning darajalari bo’yicha qatorga yoying.

413. $f(x) = x\ln(1+x)$ funksiyani x ning darajalari bo’yicha qatorga yoying.

414. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ funksiyani x ning darajalari bo’yicha qatorga yoying.

415. $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$ funksiyani x ning darajalari bo’yicha qatorga yoying.

416. $f(x) = \sin 3x$ funksiyani $x + \frac{\pi}{3}$ ning darajalari bo’yicha qatorga yoying.

417. $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ funksiyani $x+\frac{\pi}{2}$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

418. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ funksiyani $x-1$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

419. $f(x)=\ln(1-3x+x^2)$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

420. $f(x)=\ln(1-x+x^2)$ funksiyani x nuqtaning atrofida darajalari qatorga yoying.

421. $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ funksiyani $x_0=-4$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

422. $f(x)=\frac{3}{1+x-2x^2}$ funksiyani $x_0=0$ nuqtaning atrofida darajalari bo'yicha qatorga yoying.

423. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyani $x_0=4$ ning atrofida darajalari qatoriga yoying.

424. $f(x)=\ln(x^2+3x+2)\sqrt{x}$ funksiyani $x_0=0$ ning atrofida darajalari qatoriga yoying.

425. $f(x)=2^x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

426. $f(x)=\sin^2 x$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

427. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyani $x_0=2$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

428. $f(x)=e^{-2x}$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

429. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiyani $x+1$ ning darajali bo'yicha qatorga yoying.

430. $f(x)=\arcsin x$ funksiyani x ning darajali bo'yicha qatorga yoying.

431. $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

432. $f(x)=\frac{1}{}$ funksiyani Makloren qatoriga yoying.

433. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyani $x+1$ ning darajali bo'yicha qatorga yoying.

434. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ funksiyani x ning darajali bo'yicha qatorga yoying.

435. $f(x)=\cos^2 x$ funksiyani $x_0+\frac{\pi}{4}$ nuqtaning atrofida darajali qatorga yoying.

§4. Darajali qatorlar yordamida funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblash

1º $f(x)$ funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash uchun uni darajali qatorga yoyib so'ngra chekli n hadi saqlab qolinib, qolganlari tashlab yuboriladi. Taqribiy qiymatning xatolik darajasini aniqlash uchun tashlab yuborilgan hadlarni baholash lozim bo'ladi. Agar qator hadlarining ishoralari o'zgarmas bo'lsa, u holda tashlab yuborilayotgan hadlarni cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya bilan solishtiriladi. Agar qator hadlarining ishoralari o'zgaruvchan bo'lib, Leybnis teoremasining shartlari bajarilgan bo'lsa, u holda tashlab yuborilayotgan hadlarni ularning birinchisiga solishtiriladi, ya'ni $|R_n|<u_{n+1}$

436. $\sqrt{e}$ ni $0{,}00001$ aniqlikda hisoblang.

437. $1/\sqrt[5]{y}$ ni $0{,}00001$ aniqlikda hisoblang.

438. $\cos 180^0$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

439. $\sqrt[5]{1{,}1}$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

440. $\ln 1{,}04$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

441. Katetlari 1 va 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning kichik kateti qarshisidagi o'tkir burchakni $0{,}001$ radian aniqlashda hisoblang.

442. $\ln 2$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

443. $\ln 5$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

444. Ushbu $e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^4}{n!}, 0<x<n+1$ taqribiy tenglama xatoligini baholang.

445. Ushbu $\frac{\pi}{4}=arctg\left(\frac{1}{2}\right)+arctg\left(\frac{1}{3}\right)$ ayniyatdan foydalanib π ning qiymatini $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

446. e ni $0{,}00001$ aniqlikda hisoblang.

447. $1/\sqrt{e}$ ni $0{,}00001$ aniqlikda hisoblang.

448. $\sin 90^0$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

449. $\sqrt[3]{1{,}06}$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

450. $\ln 0{,}98$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

451. Katetlari 2 va 10 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning kichik kateti qarshisidagi o'tkir burchakni $0{,}001$ radian aniqlikda hisoblang.

452. $\ln 3$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

453. $f(x) = arctgx$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasida $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ deb π ning qiymatini $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

454. $\ln 10$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

455. Ushbu $\ln(1+t) \approx \ln t + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(1+2t)^{2n-1}}$ taqriy tenglikdagi xatolikni baholang.

§5. Darajali qatorlarning limit va aniq integral hisoblashda qo'llanilishi

456. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x}{x - \sin x}$ ni hisoblang.

457. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - arctgx}{x^3}$ ni hisoblang.

458. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1 - x}$ ni hisoblang.

459. $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

460. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

461. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

462. $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

463. $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

464. $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2)\, dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

465. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$ ni hisoblang.

466. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(tgx - \sin x) - x^3}{x^5}$ ni hisoblang.

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x\cdot\left(e^x-1\right)}$ ni hisoblang.

468. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$ ni hisoblang.

469. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$ ni hisoblang.

470. $\int\limits_{0,1}^{0,2}\dfrac{e^{-x}}{x^3}dx$ ya'ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

471. $\int\limits_{0}^{0,5}\dfrac{arctgx}{x}dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

472. $\int\limits_{0}^{0,5}e^{\sin x}dx$ ni $0{,}0001$ aniqlikda hisoblang.

473. $\int\limits_{0}^{0,8}x^{10}\cdot\sin x dx$ ni $0{,}001$ aniqlikda hisoblang.

474. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\sqrt{\cos x}$ ni $0{,}001$ aniqlashda hisoblang.

IV bob. Fur'e qatorlari

§1. Fur'e qatori haqida umumiy tushunchalar

1º Ushbu

$$f(x)=\frac{a_0}{\alpha}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cdot\cos mx+b_m\cdot\sin mx)$$

ko'rinishdagi qatorga $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan, davri $T=2\pi$ ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun Fur'e qatori deyiladi.

Bu yerda $a_0,a_m,b_m\ (n=1,2,3,\ldots)$ - Fur'e koeffitsiyentlari deyiladi va quyidagicha topiladi:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx$$

2º Dirixle teoremasi. Agar davri $T=2\pi$ bo'lgan $f(x)$ funksiya $[-\pi;\pi]$ kesmada bo'lakli monoton va chegaralangan bo'lsa, u holda shu funksiya

uchun yozilgan Fur’e qatori barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi bo’ladi. Funksiya uzluksiz bo’lgan nuqtalarda qatorning yig’indisi funksiyaning qiymatiga, funksiyaning uzilish nuqtalarida esa funksiyaning o’ng va chap limitlarini o’rta arifmetik qiymatiga teng bo’ladi.

475. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = \pi + x$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

476. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = x$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

477. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = x^3$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

478. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & agar \quad -\pi < x \le 0 \\ 3x, & agar \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

479. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan

$$f(x) = \begin{cases} -x, & agar \quad -\pi < x \le 0 \\ 0, & agar \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

funksiyani $(-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

480. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad -\pi < x < 0 \\ 1, & agar \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

481. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = x^2$ funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur’e qatoridan foydalanib, ushbu

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

tenglikni to’g’riligini isbotlang.

482. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = x$ funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur’e qatoridan foydalanib, ushbu

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

tenglikning to’g’riligini isbotlang.

483. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = |x|$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

484. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan $f(x) = x^2$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur’e qatoriga yoying.

485. Davri $T = 2\pi$ bo’lgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad -\pi < x \le 0\\ x, & agar \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$$

funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

486. Davri $T=2\pi$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}x, & agar \quad -\pi < x \le 0\\ 2x, & agar \quad 0 \le x \le \pi\end{cases}$$

funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

487. Davri $T=2\pi$ bo'lgan $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ funksiyani $(-\pi;\pi)$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

488. Davri $T=2\pi$ bo'lgan $f(x)=e^x$ funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

489. Davri $T=2\pi$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad -\pi < x \le 0\\ -2, & agar \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$$

funksiyani $(-\pi;\pi)$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

490. Davri $T=2\pi$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & agar \quad -\pi \le x \le 0\\ \frac{\pi-x}{2}, & agar \quad 0 \le x < \pi\end{cases}$$

funksiyani $[-\pi;\pi]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

491. Davri $T=2\pi$ bo'lgan $f(x)=x^2$ funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur'e qatoridan foydalanib, ushbu

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$$

tenglikni to'g'riligini isbotlang.

492. Davri $T=2\pi$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad -\pi < x \le 0\\ 1, & agar \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$$

funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur'e qatoridan foydalanib, ushbu

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}+...=\frac{\pi}{4}$$

tenglikni to'g'riligini isbotlang.

493. Davri $T=2\pi$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad -\pi < x \le 0\\ x, & agar \quad 0 < x \le \pi\end{cases}$$

funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur'e qatoridan foydalanib, ushbu

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

tenglik to'g'riligini isbotlang.

494. Davri $T=2\pi$ bo'lgan $f(x)=x^2$ funksiyaning $[-\pi;\pi]$ kesmadagi Fur'e qatoridan foydalanib, ushbu

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots$$

qatorning yig'indisini toping.

§2. Davri $2l$ bo'lgan funksiyalarning Fur'e qatori

1º Dirixle teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi, davri $T=2l$ bo'lgan funksiyaning $[-l;l]$ kesmadagi Fur'e qatori ushbu

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}+b_m\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}\right)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu holda Fur'e koeffitsiyentlari quyidagicha topiladi:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$$

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

2º Agar $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda Fur'e qatori ushbu

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}$$

ko'rinishda bo'lib, uning koeffitsiyentlari quyidagicha

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx$$

$$a_m=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$$

topiladi.

3º Agar $f(x)$ funksiya toq bo'lsa, u holda Fur'e qatori ushbu

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\cdot\sin\frac{m\pi x}{l}$$

ko'rinishda bo'lib, uning koeffisiyentlari quyidagicha

$$b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

topiladi.

495. Davri $T = 2$ bo'lgan $f(x) = x^2$ funksiyani $[-1;1]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

496. Davri $T = 2$ bo'lgan $f(x) = |x|$ funksiyani $[-1;1]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

497. Davri $T = 2\pi$ bo'lgan $f(x) = \cos 2x$ funksiyani $[0;\pi]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

498. Davri $T = 2\pi$ bo'lgan $f(x) = \sin 2x$ funksiyani $[0;\pi]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

499. Davri $T = 4$ bo'lgan

$$f(x) = \begin{cases} x, & agar \quad 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & agar \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

funksiyani $[0;2]$ kesmada faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

500. Davri $T = 2$ bo'lgan $f(x) = x$ funksiyani $[0;1]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

501. Davri $T = 2\pi$ bo'lgan $f(x) = \sin x$ funksiyani $[0;\pi]$ kesmada faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

502. Davri $T = 4$ bo'lgan

$$f(x) = \begin{cases} x, & agar \quad 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & agar \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

funksiyani $[0;2]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

503. Davri $T = 2\pi$ bo'lgan $f(x) = \pi - 2x$ funksiyani $[-\pi;0]$ kesmada faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

504. Davri $T = 2\pi$ bo'lgan $f(x) = x^2$ funksiyani $[-\pi;0]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

505. Davri $T = 2$ bo'lgan $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ funksiyani $[0;2]$ kesmada faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

506. Davri $T = 2$ bo'lgan $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ funksiyani $[0;2]$ kesmada faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

507. Davri $T = 2e$ bo'lgan $f(x) = e^x$ funksiyani $(-e;e)$ oraliqda Fur'e qatoriga yoying.

508. Davri $T = 2e$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar \quad -e\le x\le 0\\ x, & agar \quad 0\le x\le \dfrac{e}{2}\\ \dfrac{e}{2}, & agar \quad \dfrac{e}{2}\le x\le e\end{cases}$$

funksiyani $[-e;e]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

509. Davri $T=2$ bo'lgan

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad -1\le x<0\\ x, & agar \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

funksiyani $[-1;1]$ kesmada Fur'e qatoriga yoying.

510. Ushbu $f(x)=2x$ funksiyani $(0;1)$ oraliqda Fur'e qatoriga yoying.

511. Ushbu $f(x)=10-x$ funksiyani $(0;15)$ oraliqda Fur'e qatoriga yoying.

512. Ushbu $f(x)=1$ funksiyani $(0;1)$ oraliqda faqat sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

513. Ushbu $f(x)=1$ funksiyani $(0;1)$ oraliqda faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

514. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad \dfrac{3}{2}<x\le 2\\ 3-x, & agar \quad 2<x<3\end{cases}$$

funksiyani $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$ oraliqda faqat kosinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoying.

§3. Fur'e integrali

1º Agar $f(x)$ funksiya Ox o'qining ixtiyoriy chekli kesmasida Dirixle shartlarini qanoatlantirib, butun sonlar o'qida absolyut integrallanuvchi bo'lsa, u holda ushbu

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\cdot f(x)dx \quad \text{(to'g'ri)}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izx}\cdot F(z)dz \quad \text{(teskari)}$$

Fur'e integrallari o'rinli bo'ladi.

2º Ushbu

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}f(x)\cos zx\,dx$$

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}f_c(x)\cos zx\,dz$$

xosmas integrallarni mos ravishda Fur'ening to'g'ri va teskari kosinus almashtirishlari deb yuritiladi.

3º Ushbu

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}f(x)\sin zx\,dx$$

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\infty}f_s(x)\sin zx\,dz$$

xosmas integrallarni mos ravishda Fur'ening to'g'ri va teskari sinus almashtirishlari deb yuritiladi.

515. Ushbu $f(x)=e^{-x}$ funksiya uchun Fur'ening kosinus-almashtirishi topilsin.

516. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad 0\le x<a\\ \dfrac{1}{2}, & agar \quad x=a\\ 0, & agar \quad x>0\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'ening sinus almashtirishi topilsin.

517. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad -1\le x\le -\dfrac{1}{2}\\ 0, & agar \quad -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}\\ 1, & agar \quad \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'ening kosinus almashtirishlari topilsin.

518. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad 0<x<1\\ 0, & agar \quad x>1\end{cases}$$

va $f(-x)=-f(x)$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

519. Ushbu $f(x)=e^{-\beta x}$ va $f(-x)=f(x)$, $x\ge 0$ funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

520. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad -1<x<1\\ 0, & agar \quad |x|>1\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

521. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & agar \quad |x|\le\pi\\ 0, & agar \quad |x|>\pi\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

522. Ushbu $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$ funksiya uchun Fur'ening sinus almashtirishi topilsin.

523. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & agar \quad 0\le x<a\\ \frac{1}{2}, & agar \quad x=a\\ 0, & agar \quad x>0\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'ening kosinus almashtirishi topilsin.

524. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-1, & agar \quad -1\le x\le -\frac{1}{2}\\ 0, & agar \quad -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\\ 1, & agar \quad \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'ening sinus almashtirishlari topilsin.

525. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & agar \quad -1\le x<0\\ e^{-x}, & agar \quad 0\le x\le 1\\ 0, & agar \quad 1<|x|\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

526. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & agar \quad -1\le x\le -\frac{1}{2}\\ 1, & agar \quad |x|<\frac{1}{2}\\ -x+1, & agar \quad \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & agar \quad 1<|x|\end{cases}$$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

527. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x, & agar \quad -1\le x\le -\dfrac{1}{2} \\ 1, & agar \quad |x|<\dfrac{1}{2} \\ -x, & agar \quad \dfrac{1}{2}\le x\le 1 \\ 0, & agar \quad 1<|x| \end{cases}$$

funksiya uchun Fur'e integrali topilsin.

V bob. Karrali integrallar

§1. Ikki o'lchovli integral

1° Asosiy tushunchalar va ikki o'lchovli integralning ta'rifi

Tekislikda dekart koordinata sistemasi kiritilgan bo'lsa, shu tekislikdagi chegaralangan yopiq D sohaning diametri deb, soha yoki uning chegarasiga tegishli bo'lgan ikki nuqta orasidagi masofalarning eng kattasiga aytiladi va $diam\, D$ bilan belgilanadi.

Masalan, to'g'ri to'rtburchakning diametri uning diagonaliga, ellipsning diametri uning katta o'qiga tengdir.

Aytaylik $f(x,y)$ funksiya tekislikdagi chegaralangan D soha va uning chegarasi ∂D da aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. $D=D\cup\partial D$ sohani yuzasi hisoblanadigan n bo'lakka bo'lamiz. Bo'laklarni $\sigma_1,\sigma_2,....,\sigma_n$, ularning yuzini $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,.....,\Delta\sigma_n$ orqali belgilaymiz. Bo'laklashning maydaligi deb

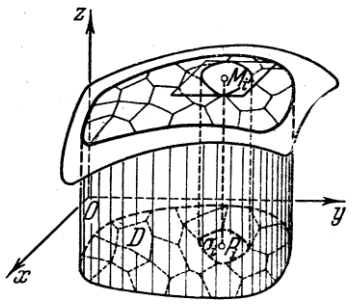
(1) $\delta_n=\max\limits_{1\le i\le n} diam\,\sigma_i$

formula bilan aniqlangan $\sigma_1,\sigma_2,....,\sigma_n$ sohalar diametrlarining eng kattasini aytamiz.

Har bir σ_k, $K=1,.....,n$ sohadan bittadan $P_k(\xi,\eta_k)$ nuqta tanlaymiz va

$$\sigma_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\Delta\sigma_k \qquad (2)$$

integral yig'indini tuzamiz.



Ta’rif. Agar $\overline{D}$ sohani bo’laklash va har bir bo’lakdan $P_k(\xi_k;\eta_k) \in \sigma_k$ nuqtalarni tanlash usuliga bog’liq bo’lmagan holda, bo’laklash maydaligi δ_n nolga intilganida (2) formula bilan aniqlangan integral yig’indilar ketma-ketligining limiti mavjud bo’lsa, bu limit $f(x,y)$ funksiyaning $\overline{D}$ soha bo’yicha ikki o’lchovli integrali deyiladi va $\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)\,dxdy$ bilan belgilanadi.

Bunda, $f(x,y)$ integral ostidagi funksiya, $f(x,y)dxdy$ integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak, ikki o’lchovli integral $$\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n \qquad (3)$$

tenglik bilan aniqlanadi. (3) formulada o’ng tomondagi limit mavjud bo’lsa, $f(x,y)$ funksiya $\overline{D}$ soha bo’yicha integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Ikki o’lchovli integral mavjudligi haqida, quyidagi teorema o’rinli.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya $\overline{D}$ sohada uzluksiz yoki $\overline{D}$ sohada chegaralangan va bir nechta nuqtadan boshqa nuqtalarda uzluksiz bo’lsa, u shu sohada integrallanuvchidir.

2° Ikki o’lchovli integralning xossalari

Ikki o’lchovli integral ham aniq integralning xossalariga o’xshash xossalarga ega.

1-xossa. Integral ostidagi funksiyaga nisbatan chiziqliligi:

a) $\iint\limits_{\overline{D}} [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_{\overline{D}} g(x,y)dx,dy;$

b) $\iint\limits_{\overline{D}} A f(x,y)dxdy = A\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dx,dy,$ bunda A-o’zgarmas son

2-xossa. Sohaga nisbatan additivlik, ya’ni $D = D_1 \cup D_2$ va $D_1 \cap D_2 =$ bo’lsa,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

tenglik o'rinli.

3-xossa. Quyidagi tengsizliklar o'rinli:

a) $\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

b) agar $\overline{D}$ sohada $f(x,y) \le g(x,y)$ bo'lsa, $\iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy$

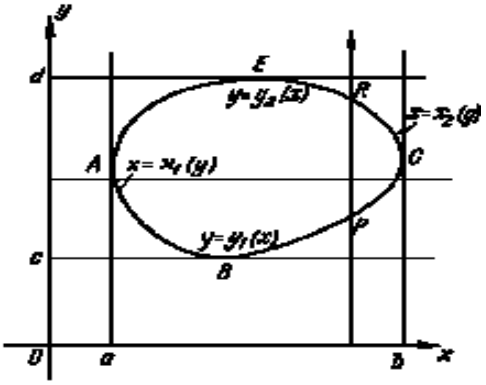
4-xossa. Agar $f(x,y)$ $\overline{D}$ sohada uzluksiz bo'lsa, D sohada shunday (ξ,η) nuqta topiladiki

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi;\eta)\cdot|D|$$

tenglik o'rinli, bunda $|D|$ – yuqoridagi D sohaning yuzasidir.

3° Ikki o'lchovli integralni hisoblash

Agar tekislikda berilgan dekart koordinata sistemasining Oy (Ox) o'qiga parallel har qanday to'g'ri chiziq D sohaning chegarasini ikki martadan ko'p kesib o'tmasa D soha y – muntazam (x-muntazam) soha deyiladi.



Anig'ini aytganda, agar D soha y – muntazam bo'lsa, shunday $y = y_1(x)$ va $y = y_2(x)$, $x \in [a,b]$ funksiyalar mavjudki, ularning grafigi D sohaning quyi va yuqori chegaralarini tashkil qiladi. D soha x – muntazam bo'lganida esa shunday $x = x_1(y)$ va $x = x_2(y)$, $y \in [c,d]$ funksiyalar mavjudki, ularning grafigi D sohaning chap va o'ng chegaralarini tashkil qiladi.

Ikki o'lchovli integralni hisoblashda quyidagi tavsiyalardan foydalanish ma'qul.

a) Agar D soha $y-$muntazam ($x-$muntazam) soha bo'lsa, ikki o'lchovli integralni hisoblash x bo'yicha tashqi va y bo'yicha ichki integraldan iborat ikki karrali integralni hisoblashga keltiriladi:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy \qquad (4)$$

$$\left(\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx \right) \qquad (5)$$

Bunda, avval ichki integral hisoblanadi, so'ngra tashqi integral hisoblanadi.

b) Agar D soha bir vaqtda $x-$muntazam va $y-$muntazam bo'lsa (4) formulaning o'ng qismidan (5) formulaning o'ng qismiga o'tish mumkin. Bu amal ikki o'lchovli integralda chegarani almashtirish deyiladi.

c) Agar D soha $x-$muntazam ham, $y-$muntazam ham bo'lmasa, shu sohani ikkita yoki bir nechta muntazam sohalarga bo'linib ikki o'lchovli integralning 2-xossasidan foydalaniladi.

Berilgan D sohani chizing va shu soha bo'yicha ikki o'lchovli integralni hisoblang

528. $\iint_D \frac{x}{y}dxdy \qquad D: y = x^2; x = y^2$

529. $\iint_D \frac{x}{2}dxdy \qquad D: x = 2 + \sin y; x = 0: y = 0; y = 2\pi$

530. $\iint_D (x^2 + 2y)dxdy \qquad D: x = 0; x = 1; y = 0; y = 2x^2$

531. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} \qquad D: x = 3; x = y; y = 1; y = 2$

532. $\iint_D xydxdy \qquad D: x = 0; y = 0; x + y = 1$

533. $\iint_D 2ydxdy \qquad D: y = \sqrt{x}; y = 0x + y = 2$

534. $\iint_D x^2y^{-2}dxdy \qquad D: x = 2; y = x; y = \frac{1}{x}$

535. $\iint_D e^x dxdy \qquad D: x = 0; y = 1; y = 2; x = \ln y$

536. $\iint_D \sqrt{x+y}dxdy \qquad D: x = 0; y = 0; x + y = 1$

537. $\iint_D (x-y)dxdy \qquad D: y = 0; y = x; x + y = 2$

538. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy \qquad D: x=2; y=x; xy=1$

539. $\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy \qquad D: x=y^2; x=0; y=1$

540. $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy \qquad D: x=0; y=\pi; y=x$

541. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{3x-y^2}} \qquad D: x=0; y^2=9-3x$

542. $\iint_D dxdy \qquad D: y=2-x; y^2=4x+4$

543. $\iint_D (x-y)\,dxdy \qquad D: x+y=1; x+y=2; 2x-y=1; 2x-y=3$

544. $\iint_D e^{x+y}\,dxdy \qquad D: x+y=1, x=0, y=0.$

545. $\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy \qquad D: x=2, x=4, y=x, y=2x.$

546. $\iint_D e^x\,dxdy \qquad D: y=1, y=2, x=0, y=e^x.$

547. $\iint_D x^3y^2\,dxdy \qquad D: x^2+y^2=4.$

548. $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy \qquad D: y=x^2, y=\sqrt{x}.$

549. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dx\,dy \qquad D: x=2, y=x, xy=1.$

550. $\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy \qquad D: x=0, y=\pi, y=x.$

551. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad D: x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0.$

552. $\iint_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy \qquad D: x^3+y^3=1, x\ge 0, y\ge 0.$

§2. Ikki o'lchovli integralda o'zgaruvchini almashtirish. Ikki o'lchovli integralning tatbiqlari

1° Ikki o'lchovli integral uchun ham aniq integral uchun keltirilgan o'zgaruvchini almashtirish formulasi kabi quyidagi formula o'rinli.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|I(u,v)|\,dudv \qquad (6)$$

bunda

$$I\left(\frac{u,\vartheta}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\\ \frac{\partial\Psi}{\partial u} & \frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial j}-\frac{\partial\varphi}{\partial o}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial u}$$

determinant

$$x=\varphi(u,\vartheta),\ y=\Psi(u,\vartheta)$$

almashtirishning yakobiani deyiladi.

Hususan, $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi(\rho\geq 0, 0\leq\varphi<2\pi)$ almashtirish bilan qutb koordinata sistemasiga o'tilsa,

$$I\left(\frac{\rho,\varphi}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho sm\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$$

bo'lib,

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\bar{\Omega}} f(\rho\cos\varphi,\rho sm\varphi)d\rho d\rho d\theta$$

formula o'rinli.

2° a) Zichligi o'zgaruvchi tekis plastinkaning massasi.

Agar plastinkaning zichligi $\delta=\delta(x,y)$ bo'lsa,

$$M=\iint_D\delta(x,y)d\sigma.$$

b) Plastinkaning statistik momentlari va og'irlik markazi.

$$M_x=\iint y\delta(x,y)d\sigma,\quad M_y=\iint x\delta(x,y)d\sigma$$

Og'irlik markazi koordinatalari esa

$$\xi=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\delta(x,y)d\sigma}{\iint_D\delta(x,y)d\sigma},\quad \eta=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\delta(x,y)d\sigma}{\iint_D\delta(x,y)d\sigma}.$$

d) Plastinkaning inersiya momenti.

Agar $\delta(x,y)=1$ bo'lsa,

$$I_x = \iint_D y^2 d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 d\sigma.$$

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = I_x + I_y.,$$

bunda I_o koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti.

e) tekislikda yuzani hisoblash.

Agar $f(x,y) = 1$ uchun sohada, integral yig'indi tuzsak, bu yig'indi shu sohaning yuziga teng bo'ladi

$$S = \sum_{i=1}^{n} 1 \times \Delta S_i,$$

ya'ni

$$S = \iint_D dxdy.$$

formula o'rinli.

Berilgan D sohani chizing va shu sohaning yuzini ikki o'lchovli integral yordamida hisoblang

553. $y = 0;\ x = 1;\ \ y = x^3$

554. $y = 2;\ \ y = x^2 - 1$

555. $y = 0;\ x = 0;\ x = 2;\ y = e^x$

556. $x = 0;\ y = 1;\ y = 3;\ y = \dfrac{1}{x}$

557. $y^2 = x + 2;\ \ x = 2$

558. $y = x^3;\ \ y = 4x$

559. $y = \dfrac{2}{1 + x^2};\ \ y = x^2$

560. $xy = 4;\ \ x + y - 5 = 0$

561. $y^2 = 16 - 8x;\ \ y^2 = 24x + 48$

562. $x + y = 10;\ xy = 4$

563. $y^2 = 6x + 9;\ \ y^2 = -4x + 4$

564. $x + y = 3;\ \ x + y = 5;\ \ y = 2x;\ \ y = 4x$

565. $xy = 4;\ \ xy = 8;\ \ y = x;\ \ y = 2x$

566. $y = 2x;\ y = 4x;\ \ y = 3x^2;\ \ y = 4x^2$

567. $xy = 4;\ \ x + y - 5 = 0$

568. $x = y;\ \ x = 2y;\ \ x + y = 8;\ \ x + 3y = 8$

569. $xy = 4;\ \ xy = 9;\ \ y = 2;\ \ y = 5$

570. $y = x;\ \ y = 5x;\ \ x = 1$

571. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3;\ \ x + y = 3$

572. $y^2 = 10x + 25;\ \ y^2 = -6x + 9$

573. $x^2 = y;\ \ x = -1;\ \ x = 2;\ \ x = y - 2$

574. $x = 0; x = \pi;\ \ y = 0;\ \ x = \arccos(y - 1)$

575. $y = 1; y = 3;\ \ x - y^2 = 0;\ \ 4x - y^2 = 0$

576. $x^2 + y^2 = 4x;\ \ y^2 = 4x;\ \ x = 4$

577. $3x - 5y + 15 = 0;\ \ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9;\ \ y = 0$

Integrallash tartibini o'zgartiring

578. $\int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x, y)\,dy$

579. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y)\,dy$

580. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy$

581. $\int_0^3 dy \int_{\frac{5}{3}(y+3)}^{3-\sqrt{6y-y^2}} f(x, y)\,dx$

582. $\int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y)\,dy$

583. $\int_0^4 dx \int_{tgx}^{x-4} f(x, y)\,dy$

584. $\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y)\,dy$

585. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y)\,dy$

586. $\int_0^6 dx \int_{\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x}} f(x, y)\,dy$

587. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\,dy$

588. $\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y)\,dx$

589. $\int_{-1}^2 dx \int_{00}^{e^{x/2}} f(x, y)\,dy$

590. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\,dx$

591. $\int_1^2 dy \int_0^{1/} f(x, y)\,dx$

592. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx$

593. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-2^2}} f(x, y)\,dy$

594. $\int_1^2 dy \int_{\ln y}^{y} f(x, y)\,dx$

595. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$

596. $\int_0^4 dy \int_{tgx}^{x-4} f(x, y)\,dx$

597. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$

598. $\int_0^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{4-y} f(x, y)\,dx$

599. $\int_{-3}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\,dy$

600. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$ 601. $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$

602. $\int_0^4 dy \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dx$

§3. Uch o'lchovli integral

1° Uch o'lchovli integralni ta'rifi va uni hisoblash

Fazoda dekart koordinata sistemasi berilgan bo'lsa V sohaning diametri deb shu sohaga yoki uning chegarasiga tegishli ikki nuqta orasidagi masofalarning eng kattasiga aytiladi va $diam\,V$ bilan belgilanadi.

Uch o'lchovli integralning ta'rifi, uning xossalari, mavjudligi haqidagi teorema, o'zgaruvchini almashtirish formulalar ikki o'lchovli integral uchun huddi shu savollarda bitta erkli o'zgaruvchini almashtirish bilan farq qiladi. Shu sababli uch o'lchovli integralning ta'rifini keltirish va uni hisoblashni qisqacha keltiramiz.

$\overline{V} = V \cup \partial V$ soha n bo'lakka bo'lingan va har bir bo'lakda bittadan $P_k(\xi_k, \eta_k, \theta_k)$ nuqtalar V sohada aniqlanib tanlangan bo'lsa, $f(x,y,z)$ funksiya uchun.

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta\sigma_k \qquad (7)$$

integral yig'indini tuzamiz va

$$\delta_n = \max\, diam\sigma_k \qquad (8)$$

bo'laklash maydaligi bo'lsin.

Ta'rif. Agar $\overline{V}$ sohani $n-$bo'lakka bo'lish va har bir bo'lakdan bittadan nuqta tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda, bo'laklash maydalik δ_n nolga intilganida (7) integral yig'indilar limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x,y,z)$ funksiyaning $V-$soha bo'yicha uch o'lchovli integrali deyiladi va $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \theta_k)\Delta\sigma_k$$

Agar fazoda berilgan koordinata sistemasining Oz o'qiga parallel har qanday to'g'ri chiziq V soha chegarasini ikki martadan ko'p kesib o'tmasa V soha $z-$muntazam soha deyiladi. Boshqacha aytganda $z-$muntazam V soha uchun D sohada aniqlangan shunday $z = \varphi_1(x,y)$ va $z = \varphi_2(x,y)$ sirtlar mavjudki, ular V sohani quyida va yuqori chegaralarini tashkil qiladi bunda D soha $\overline{V}$ sohani xOy tekisligiga proyeksiyasi.

Uch o'lchovli integralni hisoblashda quyidagi tavsiyalardan foydalanish ma'qul.

a) Agar V soha $z-$muntazam soha bo'lsa, integral

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

formula bilan hisoblanadi, bunda avval ichki integral hisoblanadi, so'ngra ikki o'lchovli integral ikki karrali integralga keltirib hisoblanadi.

b) V soha $z-$muntazam bo'lmasa u ikki yoki undan ko'p $z-$muntazam sohalarga bo'linadi va uch o'lchovli integralning sohaga nisbatan addativligidan foydalaniladi.

2° Uch o'lchovli integralning tatbiqlari

a) V sohaning hajmi $V = \iiint_V dxdydz.$

b) Jismning massasi $M = \iiint_V \delta(x,y,z)dxdydz.$

c) Zichligi $\delta(x,y,z)$ bo'lgan jismning $Oxu,\ Oxz,\ Ouz$ tekisliklariga nisbatan statistik momentlarini M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} bilan, og'irlik markazining koordinatalarini ξ,η,ζ bilan belgilasak,

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_V x\delta dv}{\iiint_V \delta dv}, \eta = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_V y\delta dv}{\iiint_V \delta dv}, \zeta = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_V z\delta dv}{\iiint_V \delta dv}.$$

Agar jism bir jinsli , ya'ni $\delta = const$ bo'lsa, bu formulalar soddalashadi

$$\xi = \frac{\iiint_V xdv}{V}, \eta = \frac{\iiint_V ydv}{V}, \zeta = \frac{\iiint_V zdv}{V},$$

bunda V - jismning hajmi.

Berilgan V sohani chizing va shu sohaning hajmini uch o'lchovli integral yordamida hisoblang

603. $z=0; z=(y-1)^2;\ y=x^2$

604. $z=0; z=x^2;\ x+y=1;\ y=0$

605. $z=0; z=x^2+y^2;\ x=0;\ y=0;\ x+y=1$

606. $z=0;\ z=4-x-y;\ x^2+y^2=4$

607. $z=0;\ \ z=2-y;\ \ y=\frac{1}{2}x^2$

608. $z=0;\ z=x^2;\ \ y=x;\ \ y=1$

609. $z=0;\ \ z=x;\ \ y^2=1-x$

610. $z=0;\ z=y^2+1;\ \ x=0;\ y=0;\ \ x+y=1$

611. $z=0;\ \ z=1-x;\ \ y^2=x$

612. $z=0;\ z=y;\ \ y=\sqrt{1-x^2}$

613. $z=0;\ y+z=2;\ \ y=x^2$

614. $z=0;\ \ x=0;\ \ y=0;\ x=4;\ y=4;\ \ z=x^2+y^2+1$

615. $z=0;\ z=3-x^2-y^2$

616. $z=0;\ \ x=0;\ \ y=0;\ \ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1$

617. $z=0;\ \ x=0;\ \ \ y=0;\ \ x+y=1;\ z=x^2+y^2$

618. $z=0;\ y=1;\ \ z=x^2+y^2;\ \ y=x^2$

619. $z=0;\ z=2x;\ \ x^2+y^2=4x$

620. $z=0;\ z=x;\ \ y=0;\ \ y=4;\ x=\sqrt{25-y^2}$

621. $z=0;\ z=9-y^2;\ \ x^2+y^2=9$

622. $z=0;\ \ z=y^2;\ \ x^2+y^2=9$

623. $z=0;\ 4z=y^2;\ \ 2x-y=0;\ \ \ x+y=9$

624. $z=0;\ z=1-y^2;\ \ x=y^2;\ x=2y^2+1$

625. $z=0;\ \ z=1-x^2;\ \ y=0;\ y=3-x$

626. $z=0;\ y+z=2;\ \ x^2+y^2=4$

627. $z=0;\ \ z=4\sqrt{y};\ \ \ x=0;\ \ x+y=4$

Berilgan V sohani chizing va shu soha bo'yicha uch o'lchovli integralni hisoblang

628. $\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz \quad V: x=0; x=1; y=0; y=1; z=0; z=1$

629. $\iiint_V (1-x)\,yzdxdydz \quad V: x=0; y=0; z=0; z=1-x-y$

630. $\iiint_V x^2y^2z\,dxdydz \quad V: x=1; x=3; y=0; y=2; z=2; z=5$

631. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} \quad V: x=0; y=0; z=0; x=y=z=1$

632. $\iiint_V xyzdxdydz \quad V: x=0; y=0; z=0; x^2+y^2+z^2=1$

633. $\iiint_V xdxdydz \quad V: x^2+y^2=1; z=0; z=3$

634. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2}$ $V: x+y+z=1; x=0; y=0$

635. $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ $V: x^2+y^2=1; z=0; z=1$ $(x\geq 0; y\geq 0)$

636. $\iiint_V (x+y+2z)dxdydz$ $V: x=0; x=3; y=0; y=5; z=0; z=2$

637. $\iiint_V xdxdydz$ $V: x=0; x=0; y=4; x+z=6$

638. $\iiint_V xy^2z^3dxdydz$ $V: z=xy; y=x; x=1; z=0$

639. $\iiint_V (x+y-z)dxdydz$ $V: x+y+z=1; x=0\, y=0$

640. $\iiint_V (x+y)zdxdydz$ $V: x^2+y^2=1; z=0; z=1; (x\geq 0; y\geq 0)$

641. $\iiint_V xyzdxdydz$ $V: z=0; z=x; y=0; y=4; x=\sqrt{1-y^2};$

642. $\iiint_V (x+z)dxdydz$ $V: z=0; z=1-x^2; y=0; y=2-x$

643. $\iiint_V x^2yz^2dxdydz$ $V: z=0; z=4\sqrt{y}; x=0; x+y=2$

644. $\iiint_V xdxdydz$ $V: z=0; x^2+y^2+z=1$

645. $\iiint_V x(x+y)dxdydz$ $V: z=0; x=1; y=1; x+y-z=0$

646. $\iiint_V zdxdydz$ $V: z^2=4(x^2+y^2); z=2$

647. $\iiint_V z(x+y)dxdydz$ $V: y=0; z=0; z=1; x^2+y^2=2z$

648. $\iiint_V (x+y)dxdydz$ $V: z=2; x^2+y^2=2z$

649. $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$ $V: z=0;\ \ z=1-x^2; y=0;\ \ y=3-x$

650. $\iiint_V ye^z dxdydz$ $V: z=0;\ \ x=y^2;\ \ x+z=1$

651. $\iiint_V (x+z)dxdydz$ $V: z=0; y+z=3; x^2+y^2=9$

652. $\iiint_V (y+1)dxdydz$ $V: z=0; x^2+y^2=4; z=6$

VI bob. Ehtimollar nazariyasi

§1. Ehtimolning klassik ta’rifi

Ehtimol hodisaning ro’y berish imkoniyatini tavsiflovchi sondir. Sinashda ro’y berishi mumkin bo’lgan har bir hodisaga elementar natija deyiladi. Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro’y berishiga olib keladigan elementar natijalarni bu hodisani ro’y berishiga qulaylik tug’diruvchi hodisalar deyiladi.

Ehtimolning klassik ta’rifi: Biror *A*-hodisaning ro’y berishiga qulaylik tug’diruvchi elementar natijalar sonini sinashning yagona mumkin bo’lgan, teng imkoniyatli elementar natijalar jami soniga nisbatiga *A* hodisaning ehtimoli deyiladi.

A hodisaning ehtimoli P(A) orqali belgilanadi. Demak ta’rifga ko’ra

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

Bu yerda m hodisa ro’y berishiga qulaylik tug’diruvchi elementar natijalar soni, n - sinashning yagona mumkin bo’lgan, teng imkoniyatli elementar natijalar jami soni.

Nisbiy chastota ta’rifi: *A* hodisa ro’y bergan sinovlar sonini o’tkazilgan sinovlar jami soniga nisbatiga *A*-hodisasining nisbiy chastotasi deyiladi. Statistik ta’rifida hodisaning ehtimoli uchun uning nisbiy chastotasi qabul qilinadi.

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

Tajriba natijasida ro’y berishi ham, ro’y bermasligi ham mumkin bo’lgan har qanday dalilga hodisa deyiladi.

653. O’yin (soqqasi) kubigi 1 marta tashlandi. Quyidagi hodisalar ehtimoli topilsin:

a) juft raqamlar chiqish ehtimoli;

b) 5 dan kam bo’lmagan raqamlar chiqish ehtimoli;

c) ko’pi bilan 5 raqami chiqish ehtimoli, (ya’ni 5 yoki 5 dan kam raqam chiqish ehtimoli).

654. O’yin kubigi 2 marta tashlandi. Chiqqan ochkolar (raqamlar) ko’paytmasi 8 bo’lish ehtimoli topilsin.

655. O’yin kubigi bir marta tashlandi.

a) 2 raqamining chiqish ehtimoli;

b) juft raqam chiqish ehtimoli;

c) kamida 3-raqami chiqish ehtimoli topilsin.

656. Qutida 5 ta oq va 3 ta qora sharlar mavjud bo'lib, ulardan 4 tasi tavakkaliga olindi.

a) Shu olingan sharlar orasida ikkita oq va ikkita qora sharlar mavjud bo'lish ehtimoli topilsin.

b) Oq sharlar soni qora sharlar sonidan ko'p bo'lish ehtimoli topilsin.

657. O'yin kubigi 2 marta tashlandi. Chiqqan ochkolar yig'indisi 8 bo'lishi ehtimoli topilsin.

658. O'yin kubigi 2 marta tashlandi. Chiqqan ochkolar yig'indisi, shu ochkolar ko'paytmasidan katta bo'lish ehtimoli topilsin.

659. Raqamlari 1,2,3,...,*n* deb belgilangan sharlar ketma-ket tavakkaliga idishdan olindi. Chiqqan sharlar 1,2,3,...,*n* tartibda joylashishi ehtimoli topilsin.

660. Idishda o'nikkita oq va sakkizta qizil shar bor. Idishdan tavakkaliga birin-ketin hamma sharlar olindi. Oq rangli sharning qizil rangli shardan oldin chiqish ehtimoli topilsin.

661. Ikkita idishdan birida 6 ta oq to'rtta qora, ikkinchisida esa sakkizta oq, oltita qora sharlar bor. Tavakkaliga ikkita idishdan bittadan sharlar olindi. Chiqqan ikkala sharning ham oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

662. To'qqizta kartochkada 0,1,2,3,4,5,6,7,8 raqamlar yozilgan bo'lib, ulardan tavakkaliga ikkita raqam olindi. Shu raqamlar terilganda juft son chiqish ehtimoli topilsin.

663. Kitob 90 betdan iborat, tavakkaliga ochilgan betning tartib nomeri 3 raqami bilan tugashining ehtimoli topilsin.

664. O'yin kubigi 2 marta tashlanganda, tushgan raqamlar ayirmasi 3 ga teng bo'lish ehtimoli topilsin.

665. O'yin kubigi 2 marta tashlandi. Tushgan ochkolar ayirmasi 3 dan kam bo'lmaslik ehtimoli topilsin.

666. Hamma tomoni bo'yalgan kub, teng 64 ta kublarga ajratildi, so'ngra yaxshilab aralashtirildi. Tavakkaliga olingan kubning 2 tomoni bo'yalgan bo'lish ehtimoli topilsin.

667. Hamma tomoni bo'yalgan kub teng 22 kublarga ajratildi. Yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga olingan kubning 3 tomoni bo'yalgan bo'lish ehtimoli topilsin.

668. Guruhda 15 talaba bo'lib ulardan beshtasi a'lochi talaba. Tavakkaliga ajratilgan ikki talabadan bittasi a'lochi bo'lish ehtimoli topilsin.

669. O'yin kubigi 2 marta tashlandi, chiqqan ochkolar ko'paytmasi 6 bo'lish ehtimoli topilsin.

670. Idishda oltita bir xil buyum bo'lib, ulardan ikkitasi yaroqsizdir.Tavakkaliga ikkita buyum tanlandi. Olingan ikki buyum orasida hech bo'lmaganda bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

671. Korxonada 10 kishi ishlaydi. Ular orasida oltita ayol bor. Tavakkaliga to'rtta kishi saylov komissiyasi uchun tanlandi. Shulardan 2 tasi ayol bo'lish ehtimoli topilsin.

672. O'nta bir xil kartochkada 0, 1, 2,...,9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga terilgan ikkita kartochka olinib terilganda, hosil bo'lgan ikki xonali sonining 18 ga bo'linish ehtimoli topilsin.

673. O'nta bir xil kartochkalarda 0,1,2,...,9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga ikkita kartochka olinib, terilganda, hosil bo'lgan 2 xonali sonning 12 ga bo'lishi ehtimoli topilsin.

674. 1,3,5,7 va 9 sm li tayoqchalar bor. Tavakkaliga olingan uchta tayoqchalardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimoli topilsin.

§2. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari

Ta'rif. *A* va *B* hodisalarining yig'indisi (*A* + *B*) deb, kamida birining ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

Ta'rif. *A* va *B* hodisalarining ko'paytmasi AB deb, ham *A*, ham *B* hodisaning ro'y berishdan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

Ta'rif To'la gruppani tashkil etuvchi yagona mumkin bo'lgan ikkita hodisaga qarama-qarshi hodisalar deyiladi, ya'ni *A* ro'y berganda $\bar{A}$ ro'y bermaydi va aksincha.

Teorema Birgalikda bo'lmagan *A* va *B* hodisalar uchun:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \text{ tenglik o'rinli.}$$

Ta'rif Agar *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli *B* hodisaning ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa, *A* va *B* hodisalar bog'liq bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Teorema Agar A va B lar bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa,

$$P(AB)=P(A)P(B) \text{ tenglik o'rinli.}$$

Agar $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ hodisalar birgalikda bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lib, $P(A_1)=q_1,...,P(A_n)=q_n$ bo'lsa kamida bittasining ro'y berish ehtimoli:

$P=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n)$ yoki $P=1-q_1\cdot q_2\dots q_n$ ga teng bo'ladi.

Agar $q_1=q_2=\dots=q_n=q$ bo'lsa, $P=1-q^n$ bo'ladi.

675. 1 - idishda 1 - navli detallar 30% ni, 2 - idishda 1 - navli detallar 40% ni tashkil etadi. Har bir idishdan 1 tadan tavakkaliga detallar olindi. Olingan ikkita detalning ham 1 - navli bo'lish ehtimoli topilsin.

676. Talaba o’ziga kerakli formulani uchta kitobdan izlamoqda. Formulaning birinchi, ikkinchi, uchinchi kitoblarda bo’lish ehtimoli mos ravishda 0,5, 09, 0,8 ga teng. Formulaning faqat ikkita kitobda bo’lish ehtimoli topilsin.

677. 1 - merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,6, 2 - merganniki esa 0,8 bo’lsa, o’q uzilganda faqat bitta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

678. Ikkita erkli sinovda A hodisaning kamida 1 marta ro’y berish ehtimoli 0,75 ga teng. Agar A hodisaning har bir sinovda ro’y berish ehtimoli bir xil bo’lsa, shu ehtimol topilsin.

679. 1 - va 2 - to’pdan otilganda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,8 va 0,7 bo’lsa, ikkala to’pdan o’q otilganda kamida bittasining nishonga tegish ehtimoli topilsin.

680. 80% yengil jinoyat qilgan, qolganlari esa nisbatan og’ir jinoyat qilgan jinoyatchilar birga joylashgan xonadan tavakkaliga 2 kishi tergovga olib chiqildi. Ikki kishidan biri og’ir, ikkinchisi esa yengil jinoyatchi bo’lish ehtimoli topilsin.

681. 200 ta mahsulotning biryuzelliktasi 1- navli, o’ttiztasi 2 - navli, yigirmattasi esa yaroqsizdir. Tavakkaliga olingan mahsulotning yo 1 - navli yo 2 - navli bo’lish ehtimoli topilsin.

682. Idishda 1, 2, 3, 4, 5, 6 deb belgilangan oltita koptok bor. Tavakkaliga bittadan uchta koptok olindi. Birin-ketin 4, 5, 6 raqamli koptoklar olingan bo’lish ehtimoli quyidagi hollarda topilsin:

1) koptoklar idishga qaytarib solinmaydi;
2) olingan koptoklar idishga qaytarib solinadi.

683. Taxta yashikda oltita detal bo’lib, ularning to’rtasi bo’yalgan. Tavakkaliga ikkita detal olindi. Olingan ikkala detalning ham bo’yalgan bo’lish ehtimoli topilsin.

684. Gruhda o’nta talaba bo’lib, ulardan uchtasi a’lochi talaba. Tavakkaliga ikkita talaba chaqirildi. Shu ikkala talabaning ham a’lochi bo’lish ehtimoli topilsin.

685. 1- idishda faqat rangi bilan ajralib turuvchi beshta oq, o’nbitta qora, sakkizta qizil sharlar bor. Ikkinchi idishda esa o’nta oq, sakkizta qora, oltita qizil xuddi shunday sharlar bor. Ikkala idishdan tavakkaliga bittadan sharlar olindi. Olingan ikkala sharning ham bir xil rangli bo’lish ehtimoli topilsin.

686. Tavakkaliga musbat, butun son tanlandi.

1) Shu sonning 2 ga ham, 3 ga ham bo’linmasligi ehtimoli topilsin.
2) Shu sonning 2 ga yoki 3 ga bo’linmaslik ehtimoli topilsin.

687. Hamshira o’ziga kerakli dorini 3 ta tokchadan izlamoqda. Dorining 1, 2, 3 - tokchalarda bo’lish ehtimollari mos ravishda 0,5: 0,8: 0,9 ga teng bo’lsa, izlanayotgan dorining faqat bitta tokchada bor bo’lish ehtimoli topilsin.

688. Xaridor o’ziga kerakli oyoq kiyimni uchta do’kondan izlamoqda. Poyafzalning 1, 2, 3 - do’konlarda bor bo’lish ehtimoli mos ravishda 0,7, 0,8, 06 ga teng. Izlanayotgan oyoq kiyimning faqat ikkita do’konlarda bor bo’lish ehtimoli topilsin.

689. 14 - masala shartlarida, izlanayotgan oyoq kiyimning uchta do’konda ham bo’lish ehtimoli topilsin.

690. 10 ta ishchi orasida uchta ayol kishi bor. Tavakkaliga ular orasidan ikkita kishi tanlandi, ulardan hech bo’lmaganda bittasi ayol kishi bo’lish ehtimoli topilsin.

691. Ikki mergan nishonga qarata o’q uzmoqda, bitta o’q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7 ikkinchisi uchun esa 0,8 ga teng. Bir yo’la o’q uzganda merganlardan faqat bittasining nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

692. Idishda 200 ta detal bo’lib, ulardan 150 tasi 1 - nav, 30 tasi 2 - nav, 16 tasi 3 - nav va 4 tasi yaroqsizdir. Tavakkaliga olingan detalning 1- yoki 2 - navli bo’lish ehtimoli topilsin.

693. Oilada 3 ta farzand bor. Agar qiz bola va o’g’il bola tug’ilish ehtimollarini teng deb olsak, oilada uchala farzand ham qiz bola bo’lish ehtimoli topilsin.

694. 1- va 2 - to’pdan o’q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda 0,8 va 0,7 ga teng. Bir yo’la 2 ta to’pdan o’q uzganda kamida 1 tasining nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

695. Idishda 4 ta oq, 3 ta qizil va 8 ta ko’k rangli, bir xil o’lchovli sharlar bor. Idishdan tavakkaliga olingan sharning rangli bo’lish ehtimoli topilsin.

§3. To’la ehtimollik formulasi

To’la guruhni tashkil etadigan, birgalikda bo’lmagan $B_1,B_2,...,B_n$ hodisalarning (gipotezalarning) biri ro’y bergandagina ro’y berishi mumkin bo’lgan A hodisaning ehtimoli, gipotezalardan har birining ehtimolini A hodisaning tegishli shartli ehtimoliga ko’paytmalari yig’indisiga teng.

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)$$

bu yerda, $\sum_{i=1}^{n} P(B_i)=1$

696. Bazaga 1- zavoddan 50%, ikkinchi zavoddan 30% va 3-zavoddan esa 20% mahsulot keladi. Mahsulotning yaroqsiz (brak) bo'lishi birinchi zavod uchun 2%, ikkinchi- zavod uchun 3% ni, uchinchi- zavod uchun esa 5% ni tashkil etadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

697. 3 ta idishda sharlar bo'lib, 1- idishda 6 ta oq va 2 ta qizil shar bor. 2- idishda esa, 8 ta oq va 3 ta qizil, uchinchi idishda 5 ta oq va 7 ta qizil sharlar bor. Tavakkaliga 1- idishdan bitta shar olinib, 2- idishga solindi, so'ngra 2- idishdan ham tavakkaliga 1 ta shar olinib, 3- idishga solindi. 3- idishdan ixtiyoriy ravishda olingan sharning qizil rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

698. Dominoning to'liq to'plamidan (28) tavakkaliga 2 tasi tanlandi. Ulardan birini ikkinchisiga ulash mumkin bo'lish ehtimoli topilsin.

699. 1- idishda 12 ta mahsulot, 2- idishda esa 10 ta mahsulot bo'lib, har birida 1 tadan mahsulot yaroqsizdir. 1- idishdan tavakkaliga 1 ta mahsulot olinib, 2- idishga solindi. 2- idishdan tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

700. Ichida 4 ta shar bo'lgan qopga bitta oq shar solingan, so'ngra tavakkaliga qopdan bitta shar olindi. Agar qopdagi sharlarning rangi haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, olingan sharning oq bo'lish ehtimoli topilsin.

701. Guruhda 10 ta mergan bo'lib, ulardan 3 tasi uchun nishonga tekkazish ehtimoli 0,5 ga, 5 tasi uchun 0,8 ga va qolgan 2 tasi uchun esa 0,25 ga teng. Tavakkaliga otilgan o'qning nishonga tekkan bo'lish ehtimoli topilsin.

702. Birinchi idishda 8 ta oq va 2 ta ko'k sharlar bor. Ikkinchi idishda esa 6 ta oq 4 ta ko'k sharlar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga 1 ta shar olinib, ikkinchi idishga solindi. So'ngra 2 - idishdan tavakkaliga bitta shar olindi. Shu olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

703. Ikkita bir xil qoplarning birida «a» ta oq va «b» ta qora koptoklar, ikkinchisida esa «c» ta oq va «d» ta qora koptoklar bor. Birinchi qopdan tavakkaliga bitta koptok olinib, ikkinchisiga solindi. So'ngra ikkinchi qopdan tavakkaliga bitta koptok olindi. Shu olingan koptokning oq bo'lish ehtimoli topilsin.

704. 3 ta bir xil qopning har birida 4 tadan oq va 6 tadan qora sharchalar bor. Birinchi qopdan tavakkaliga bitta shar olinib, ikkinchi xaltaga solindi, so'ngra ikkinchi qopdan bitta shar olinib, uchinchi qopga solindi. Shu uchinchi xaltadan tavakkaliga olingan sharning rangi oq bo'lish ehtimolini toping.

705. «3» ta bir xil idishning har birida «a» ta oq va «b» ta qora sharlar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga shar olinib, ikkinchisiga solindi, so'ngra ikkinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga solindi. Uchinchi idishdan olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

706. 350 mexanizm orasida 160 tasi birinchi nav, 110 tasi ikkinchi nav va 80 tasi uchinchi navli. Birinchi nav mexanizmlar ichida yaroqsiz mexanizm bo'lish ehtimoli 0,01 ni tashkil etadi. Ikkinchi va uchinchi nav mexanizm orasida yaroqsiz mexanizm bo'lish ehtimollari mos ravishda 0,02 va 0,04 ga teng. Tavakkaliga bitta mexanizm olindi. Bu mexanizmning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

707. Tikuv korxonasiga keladigan mahsulotlarning 25% ni A_1 zavod, 35% ni A_2 zavod va 50% ni A_3 zavod yetkazib beradi. A_1 zavodi yetkazadigan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,1, A_2 va A_3 zavodlari uchun shu ehtimol mos ravishda 0,2 va 0,5 ni tashkil etadi. Tavakkaliga tanlangan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

708. 3 ta detali bor yashikka bitta standart detal tashlandi, so'ngra tavakkaliga bitta detal olingan. Agar yashikdagi standart detallar soni haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar (gipotezalar) teng imkoniyatli bo'lsa, shu olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

709. Birinchi yashikda 39 ta detal bo'lib, ulardan 36 tasi standartdir. Ikkinchi yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 16 tasi standartdir. Ikkinchi yashikdan tavakkaliga bitta detal olinib, birinchi yashikka solindi. Birinchi yashikdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

710. Detallarning 2 xil to'plami bo'lib, birinchi to'plamdagi detalning standart bo'lish ehtimoli 0,8 ga, ikkinchi to'plamdagi detalning standart bo'lish ehtimoli esa 0,9 ga teng. Ixtiyoriy to'plamdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

711. Sportchilar komandasida 8 ta chang'ichi, 5 ta velosipedchi va 2 ta yuguruvchi bor. Normativni bajarish ehtimollari: chang'ichi uchun 0,8 ga, velosipedchi uchun 0,7 va yuguruvchi uchun esa 0,05 ga teng bo'lsa, tavakkaliga tanlangan sportchining normativni bajarish ehtimoli topilsin.

712. Birinchi idishda 20 dona mahsulot bo'lib, ulardan 2 tasi yaroqsizdir. Ikkinchi idishda 10 dona mahsulot bo'lib, ulardan 1 tasi yaroqsizdir. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan mahsulot olindi. So'ngra bu ikki mahsulotdan yana bittasi tavakkaliga olindi. Shu olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

713. Yerga ekiladigan o'simliklarning 50% ini A turdagi 30% ini esa B turdagi o'simlik tashkil etadi, 20% ini C turdagi o'simlikdir. A turdagi o'simlikning unib chiqish ehtimoli 0,8 ga, B turdagi o'simlikniki 0,7 ga C

turdagi o’simlikniki 0,6 ga teng. Tavakkaliga tanlangan o’simlikning unib chiqish ehtimoli topilsin.

714. 20 ta mergandan oltitasining o’q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga, sakkiztasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, to’rt tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,6 ga va qolgan ikkitasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,5 ga teng. Tavakkaliga tanlangan merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

715. 3 xil partiyada detallar bo’lib, birinchi partiyada $\frac{2}{3}$ qismi yaroqsiz detallardir. Qolgan ikkita partiyada yaroqsiz detallar yo’q. Nazorat uchun tavakkaliga olingan partiyadagi detalning yaroqsiz bo’lish ehtimoli topilsin.

§4. Sinovlarning takrorlanishi. Bernulli formulasi

Agar sinovlar o’tkazilayotgan bo’lib, ularning har birida A hodisasining ro’y berish ehtimoli qolgan sinovlarning natijalariga bog’liq bo’lmasa, u holda bunday sinovlar A hodisasiga nisbatan erkli deyiladi.

Bernulli formulasi. Har birida A hodisaning ro’y berish ehtimoli p $(0<p<1)$ ga teng bo’lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning rosa «k» marta ro’y berish ehtimoli $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ ga teng bo’lib, bu yerda $q=1-p$

Hodisaning 1) «k» dan kam marta.

2)«k» dan ko’p marta.

3) kamida «k» marta.

4) ko’pi bilan «k» marta ro’y berish ehtimoli quyidagi formulalar bo’yicha topiladi.

1) $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$

2) $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$

3) $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$

4) $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$

716. Agar har bir sinovda A hodisaning ro’y berish ehtimoli 0,3 bo’lsa, beshta erkli sinovda hodisaning kamida 2 marta ro’y berish ehtimolini toping.

717. Bir sutkada elektr energiya sarfining belgilangan normadan ortib ketmaslik ehtimoli $P=\frac{3}{4}$ ga teng. 6 sutkaning 4 sutkasi davomida elektr energiya sarfini normadan ortib ketmaslik ehtimolini toping.

718. Agar bitta o’q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,9 ga teng bo’lsa, ketma-ket uchta o’q uzganda ko’pi bilan 2 marta nishonga tegmaslik ehtimoli topilsin.

719. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o’ynamoqda. Qaysi birida yutish ehtimoli kattaroq? 4 partiyadan uchtasini yutishmi yoki 8 partiyadan beshtasini yutishmi?

720. Agar bitta sinovda A hodisaning ro’y berish ehtimoli 0,3 ga teng bo’lsa, u holda ikkita erkli sinovda A hodisaning kamida 1 marta ro’y berish ehtimoli topilsin.

721. Agar bitta sinovda biror A hodisaning ro’y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo’lsa, u holda beshta erkli sinovda A hodisaning ko’pi bilan bir marta ro’y berish ehtimoli topilsin.

722. Tanga 4 marta tashlanganda, gerb tomoni kamida 3 marta tushish ehtimoli topilsin.

723. Agar har birida A hodisaning ro’y berish ehtimoli 0,6 ga teng bo’lsa, 4 erkli sinovda A hodisaning ko’pi bilan 2 marta ro’y berish ehtimoli topilsin.

724. Uskunaning yaroqsiz detal ishlab chiqarish ehtimoli 0,01 bo’lsa, tavakkaliga olingan uchta detaldan ikkitasining yaroqli bo’lish ehtimoli topilsin.

725. O’yin kubigi 4 marta tashlanganda. 5 raqamining kamida 1 marta chiqish ehtimoli topilsin.

726. Partiyada kelgan detallar orasida yaroqsiz detallar 10% ini tashkil etadi. Tavakkaliga tanlangan uchta detalning barchasi yaroqsiz bo’lish ehtimoli topilsin.

727. Agar yaroqsiz detalning ishlab chiqarish ehtimoli 0,1 ga teng bo’lsa, tavakkaliga olingan uchta detaldan ikkitasining yaroqsiz chiqish ehtimoli topilsin.

728. Tanga 6 marta tashlanganda, gerb tomoni 2 martadan kam marta chiqish ehtimoli topilsin.

729. Tanga 5 marta tashlandi. Gerbli tomoni kamida 2 marta chiqish ehtimoli topilsin.

730. Bitta lotoreya bileti bo’lgan kishining yutish ehtimoli 0,1 ga teng bo’lsa, uchta bileti bo’lgan kishining ikkita biletiga yutuq chiqmaslik ehtimoli topilsin.

731. Nishonga qarata beshta bir-biriga bog’liq bo’lmagan o’q otildi. Agar har bir sinashda nishonga tekkizish ehtimoli 0,2 ga teng bo’lsa, kamida 3 ta o’qning nishonga tegish ehtimoli topilsin.

732. Har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, oltita erkli sinovda A hodisaning kamida 2 marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

733. Agar biror partiyada detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $P = 0{,}1$ ga teng bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta detal orasida ko'pi bilan 1 ta detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

734. Avvalgi masala shartlarida tavakkaliga olingan 3 ta detaldan 2 tasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

735. Nishonga qarata o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli 0,9 bo'lsa, 3 marta o'q uzganda, uchchala o'qning ham nishonga tegmaslik ehtimoli topilsin.

§5. Laplasning lokal va integral teoremalari

Laplasning lokal teoremasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ ga teng bo'lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning «k» marta ro'y berishi ehtimoli taqriban: $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ ga teng.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}; \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}};$$

bu yerda $\varphi(x)$ juft funksiya bo'lib, uning qiymatlari jadvalda beriladi.

Laplasning integral teoremasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(\angle p \angle 1)$ ga teng bo'lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning kamida «k_1» marta va ko'pi bilan «k_2» marta ro'y berish ehtimoli taqriban.

$P_n(k_1 : k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$ ga teng.

bu yerda $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$ Laplas funksiyasi

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \qquad x \in (0 \le x \le 5)$$

Laplas funksiyasi toq funksiya bo'lib, uning qiymatlari jadvalda beriladi, $x > 5$ qiymatlar uchun esa $\Phi(x) = 0{,}5$ deb olinadi.

Agar sinovlar soni katta bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli «p» juda kichik bo'lsa, u holda $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ Puasson formulasidan foydalaniladi,

bu yerda, k –hodisaning «n» ta erkli sinovda ro'y berish soni, $\lambda = np$ - hodisaning «n» ta erkli sinovda ro'y berishlari o'rtacha soni.

736. Tanga 60 marta tashlangan. Yozuvli tomoni gerbli tomondan 2 marta ko’p tushish ehtimolini toping.

737. Agar urug’ning unib chiqish ehtimoli 0,6 ga teng bo’lsa, 2400 ta ekilgan urug’dan 1400 tasining unib chiqish ehtimoli topilsin.

738. Bitta o’q otilganda nishonga tegish ehtimoli 0,4 ga teng bo’lsa, 320 ta o’q uzilganda aniq 100 tasining nishonga tegish ehtimoli topilsin.

739. Agar biror hodisaning har bir sinovda ro’y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo’lsa, bu holda 243 ta erkli sinovda hodisaning rosa 70 marta ro’y berish ehtimolini toping.

740. O’g’il bolaning tug’ilishi ehtimoli 0,516 ga teng. 200 ta tug’ilgan bolalardan o’g’il va qiz bolalar soni teng bo’lish ehtimolini toping.

741. Tanga 1000 marta tashlandi, gerbli tomon rosa 500 marta tushish ehtimolini toping.

742. Sinov o’tkazilayotgan davrda mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli 0,05 ga teng bo’lsa,100 ta mahsulotdan sinash natijasida kamida 5 ta mahsulotni ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

743. Avvalgi masala shartlarida 100 ta mahsulotdan sinash natijasida ko’pi bilan 4 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

744. 7 - masala shartlarida 100 ta mahsulotdan sinash natijasida 5 dan 10 tagacha mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

745. Sotib oluvchiga 41 - razmerli poyafzal zarurligi ehtimoli 0,2 ga teng bo’lsa, 750 ta sotib oluvchidan 120 tasidan ko’p bo’lmaganiga shu razmerli poyafzal kerakligi ehtimoli topilsin.

746. Bitta o’q otishda merganning nishonga tekkizish ehtimoli $P = 0{,}2$ teng bo’lsa, 100 ta otilgan o’qdan 20 tasining nishonga tekkizish ehtimoli qancha?

747. Avvalgi masala shartlarida 100 ta o’q uzganda kamida 20 tasining nishonga tekkizish ehtimoli qancha?

748. Chapaqaylar aholining 1% ini tashkil qiladi. Tavakkaliga olingan 200 ta kishi orasida 4 ta chapaqay bo’lish ehtimoli topilsin.

749. Ishlab chiqarilgan detalning nostandart bo’lish ehtimoli $P = 0{,}2$ ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detaldan 70 tadan 100 tagachasi nostandart bo’lish ehtimoli topilsin.

750. Darslik kitobi 100 000 nusxada (tirajda) bosib chiqarilgan. Darslikning harflari noto’g’ri yig’ilgan bo’lish ehtimoli 0,0001 ga teng bo’lsa, butun 100 000 nusxada beshta kitobning harflari noto’g’ri yig’ilgan bo’lish ehtimoli qanday?

751. 13 - masalani Puasson formulasi orqali yeching.

752. Sinov o’tkazilayotgan davrda mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulotdan sinash natijasida:

a) ko’pi bilan 4 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin;

b) kamida 5 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

753. 17 - masala shartlarida yuzta mahsulot orasida 5 tadan 10 tagacha mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

754. Zavod do’konga 5000 ta spirtli mahsulot jo’natdi. Mahsulotning yo’lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng bo’lsa, do’konga uchta yaroqsiz mahsulot kelish ehtiomli topilsin.

755. 19 - masala shartlarida do’konga 3 tadan kam yaroqsiz mahsulot kelgan bo’lish ehtimoli topilsin.

756. Detal ishlab chiqarishda yaroqsiz detal uchrashining ehtimoli $p = 0{,}02$ ga teng. 400 ta tavakkaliga olingan detallar orasida, 7 dan 10 tagacha nostandart detal bo’lishining ehtimoli topilsin.

§6. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning sonli tavsiflari

Oldindan inobatga olib bo’lmaydigan tasodifiy sabablarga bog’liq bo’lgan, turli son qiymatlar qabul qilishi mumkin bo’lgan o’zgaruvchi miqdorga tasodifiy miqdor deyiladi. Uzlukli (diskret) tasodifiy miqdor deb, ayrim qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi. Tasodifiy miqdorning mumkin bo’lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o’rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda quyidagi formulalar bilan hisoblanadi.

1) $\mathrm{M}(x) = \sum_i x_i p_i$

2) $D(x) = \sum_i (x_i - \mathrm{M}(x))^2 p_i = \mathrm{M}(x^2) - \mathrm{M}^2(x)$

3) $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

757. 2 ta o’yin kubigi bir marta tashlanganda chiqadigan ochkolar ko’paytmasining matematik kutilishi topilsin.

758. Avvalgi masala shartlarida yig’indining matematik kutilishi topilsin.

759. Qutida 5 ta shar bo’lib, ulardan 2 tasi oq va 3 tasi esa qora rangda. Qutidan tavakkaliga ikkita shar olindi. X tasodifiy miqdor oq shar chiqish soni taqsimotining matematik kutilishi topilsin.

760. Avvalgi masala shartlarida X tasodifiy miqdorining dispersiyasi hisoblansin.

761. Diskret 2 ta erkli tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
P	0,3	0,7

XY ko'paytmasining matematik kutilishini toping.

762. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

X	2	4	8
P	0,1	0,5	0,4

Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

763. 10 ta detaldan iborat to'plamda 3 ta nostandart detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor, olingan 2 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining matematik kutilishini toping.

764. Geolog safardan qayta turib, tog'dan 6 ta namuna olib keldi. Shulardan 4 tasida izlanayotgan metal qotishmasi bor. Tavakkaliga 3 ta namuna tanlandi. X diskret tasodifiy miqdor olingan namunalar orasida izlanayotgan metal qorishmasi borligi soni taqsimotning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

765. X diskret tasodifiy miqdor faqat 2 ta mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatlarga ega, shu bilan birga $x_1 < x_2$, X tasodifiy miqdorning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 ga teng. $M(X) = 2{,}6$ ni o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X) = 0{,}8$ ni bilgan holda, X ning taqsimot qonuni topilsin.

766. X diskret tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan $x_3 = 3, x_1, x_2$ qiymatlarga ega shu bilan birga $x_1 < x_2 < x_3$ X ning x_3 va x_2 qiymatlarini qabul qilish ehtimoli mos ravishda 0,5 va 0,4 ga teng. X miqdorning matematik kutilishi $M(X) = 2{,}4$ va dispersiyasi $D(X) = 0{,}44$ ni bilgan holda uning taqsimot qonunini toping.

767. Sinov paytida biror detalning buzilish ehtimoli 0,3 ga teng. Sinov paytida kuzatilgan 20 ta detaldan ishdan chiqqan detallar sonining matematik kutilishi topilsin.

768. Har bir tajribada biror qurilmadagi elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor-elementning 5 ta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasi topilsin.

769. Agar x va y tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, $D(X) = 12$ va $D(Y) = 7$ ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z = 5X - 4Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

770. 3 ta erkli sinovlar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisasi 0,4 ehtimol bilan ro'y bersin. X tasodifiy miqdor A hodisaning ro'y berish sonining matematik kutilishi topilsin.

771. 14-masala shartlarida X tasodifiy miqdor dispersiyasi topilsin.

772. Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa, $M(X)=5;\quad M(Y)=3;\quad Z=4X-2Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

773. Agar 3 ta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=0,6$ bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

774. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Agar x ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,8 ga, matematik kutilishi 2,6 ga, dispersiyasi esa 0,64 ga teng bo'lsa, x ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli topilsin.

775. X tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan qiymatlar $x_1 < x_2 < x_3$ qabul qiladi. X ning x_2 va x_3 qiymatlarni qabul qilish ehtimollari mos ravishda 0,2 va 0,5 ga teng. Matematik kutilishi esa 3,2 va dispersiyasi 0,76 ga teng bo'lsa, X ning taqsimot qonuni topilsin.

776. X, Y lar bog'liq bo'lmagan diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning taqsimot qonunlari berilgan bo'lsin.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Ko'paytma $X \cdot Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 2 usulda:

1) $X \cdot Y$ ning taqsimot qonunini tuzib;
2) matematik kutilishning xossasini qo'llab, topilsin.

§7. Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari

1. Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining integral funksiyasi:

Ta'rif: Har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimotning integral funksiyasi deyiladi.

$$P(X < x) = F(x)$$

Agar $F(x)$ integral funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, X tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

Integral funksiyasi ba'zan taqsimot funksiyasi deb ham nomlanadi.

Integral funksiya xossalari.

1-xossa: Integral funksiya qiymatlari $[0;1]$ oraliqda joylashgandir.

$$0 \le F(x) \le 1$$

2-xossa: Integral funksiya kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2$ bo'lganda $F(x_1) \le F(x_2)$ bo'ladi.

3-xossa: X tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqda yotgan qiymatlarni qabul qilish ehtimoli: $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ ga teng.

Xulosa: Agar X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda

$$F(x) = \begin{cases} 0, agar\ x \le a, bo'lsa \\ 1, agar\ x > b, bo'lsa \end{cases}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining differensial funksiyasi.

Integral funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga ehtimollar taqsimotining differesial funksiyasi deyiladi. $f(x) = F^1(x)$

Ba'zan differensial funksiyasini zichlik funksiyasi deb ham atashadi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqqa tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimoli.

$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$ ga teng.

Integral funksiya differensial funksiya orqali quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Differensial funksiya xossalari.

1-xossa: Differensial funksiya manfiy emas:

$$f(x) \ge 0$$

2-xossa: Quyidagi xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Agar tasodifiy miqdor (a,b) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilsa, u holda:

$\int_a^b f(x)dx = 1$ bo'ladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi quyidagi formulalar orqali ifodalanadi.

1) $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, yoki $M(x) = \int_a^b xf(x)dx$

2) $D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx$, yoki $D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x)$

3) $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

777. X tasodifiy miqdor integral funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{x^3}, agar, x \geq 2, bo'lsa \\ 0, agar, x < 2, bo'lsa. \end{cases}$$

X ning sonli tavsiflari, ya'ni matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

778. X tasodifiy miqdor (0:1) oraliqda differensial funksiyasi $f(x) = x,$ bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ bo'lsa, uning sonli xarakteristikalari hisoblansin.

779. X tasodifiy miqdorining (3:5) oraliqda $f(x) = \frac{1}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ ga teng. X ning integral funksiyasi topilsin.

780. X ning integral funksiyasi berilgan bo'lsa,

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , agar \quad x \geq a, bo'lsa \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arcSin\frac{x}{a} & , \quad a\text{ғар}, -a < x < a, bo'lsa \\ 0 & , \quad agar, x \leq -a, bo'lsa \end{cases}$$

X ning $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

781. X ning zichlik funksiyasi $f(x) = ae^{-x}$

$[0;\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, a - koeffitsiyent topilsin.

782. X ning differensial funksiyasi $f(x) = kxe^{-x} \quad x \in [0;\infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, k – koeffitsiyent topilsin.

783. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning integral funksiyasi berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agar, x < 0, bo'lsa, \\ x, agar & 0 \leq x \leq 1 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar, x > 1, bo'lsa \end{cases}$$

X ning differensial funksiyasi topilsin.

784. X ning taqsimot funksiyasi berilgan.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Uning zichlik funksiyasi topilsin.

785. Agar zichlik funksiyasi $f(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad x \in (-\infty;\infty)$ bo'lsa,

1) a-koeffitsiyent topilsin.
2) integral funksiyasi topilsin.

786. Avvalgi 9-masala shartlarida. X tasodifiy miqdorning (-1;1) oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilish ehtimoli topilsin.

787. $f(x)=ae^{-x^2}$ X tasodifiy miqdorning $(-\infty;\infty)$ oralig'ida zichlik funksiyasi bo'lishi uchun a qanday bo'lishi kerak?

788. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & agar, x\le -1, bo'lsa,\\ \frac{1}{\pi}\cdot arc\sin x, agar, & -1\le x\le 1, \quad bo'lsa,\\ 1, agar & x\ge 1, bo'lsa \end{cases}$$

berilgan. Uning matematik kutilishi va dispersiyasi qanday?

789. Agar X (10:20) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, uning matematik kutilish dispersiyasi topilsin.

790. (1; 7) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

791. (a; b) oraliqda tekis taqsimlansin X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

792. 15-masala shartlarida X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

793. X tasodifiy miqdor (0:2) oraliqda $f(x)=\frac{x}{2}$ differensial funksiyasi bilan berilgan, bu oraliqdan tashqarida esa $f(x)=0$ ga teng. X ning dispersiyasi topilsin.

794. X tasodifiy miqdorning $(-\infty;\infty)$ oraliqda integral funksiyasi $F(x)=1-\frac{1}{x^3}$ ga teng bu oraliqdan tashqarida esa $F(x)=0,$ ga teng bo'lsa, uning matematik kutilishini toping.

795. X tasodifiy miqdor (2:4) oraliqqda $f(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{9}{2x}x+\frac{14}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan. Bu oraliqdan tashqarida esa $f(x)=0$ ga teng. X miqdorning matematik kutilishi topilsin.

796. X tasodifiy miqdor differensial funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases} 0, agar & x\le \frac{-\pi}{2}, bo'lsa,\\ \cos x \ , agar & \frac{-\pi}{2}<x\le 0, bo'lsa,\\ 0, agar & x>0, bo'lsa \end{cases}$$

Uning integral funksiyasi topilsin.

§8. No’rmal taqsimot va ko’rsatkichli taqsimot

Normal taqsimot deb, differensial funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko’rinishda berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi.

Bu yerda, $a=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$

X tasodifiy miqdorning $(\alpha;\beta)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli esa

$P(\alpha<x<\beta)\approx\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ formula yordamida hisoblanadi.

Bu yerda, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – Laplas funksiyasi.

Tasodifiy miqdorning o’zining matematik kutilishidan chetlanishi absolyut qiymatining berilgan musbat sondan kichik bo’lish ehtimoli

$P(|X-a|<\delta)\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ formula bilan hisoblanadi.

Ko’rsatkichli (eksponensial) taqsimot deb, X uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, agar, & x<0, bo'lsa,\\ \lambda e^{-\lambda x}, agar, & x\ge 0, bo'lsa.\end{cases}$$

ko’rinishga ega bo’lgan tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi λ – o’zgarmas, musbat parametr.

Eslatma: $e^{-1}\approx 0{,}3678;\quad e^{-2}\approx 0{,}1352$

Ko’rsatkichli taqsimotning integral funksiyasi quyidagi ko’rinishga ega.

$$F(x)=\begin{cases}0, agar, & x<0, bo'lsa,\\ 1-e^{-\lambda x}, agar\ x\ge 0, bo'lsa.\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning (a;b) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli esa

$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ formula bilan hisoblanadi.

Ko’rsatkichli taqsimotning sonli tavsiflari esa quyidagicha:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};$$

797. O’rtacha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 6 va 4 ga teng. X ning (4:8) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

798. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo’lib, uning o’rtacha kvadratik chetlanishi 0,4 ga teng. Bu miqdorning matematik kutilishidan chetlanishi absolyut qiymati bo’yicha 0,3 dan kichik bo’lish ehtimoli topilsin.

799. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 0,16 ga teng bo’lib, u o’rtacha taqsimlangan. Chetlanishning absolyut qiymati 0,3 dan kichik bo’lish ehtimoli topilsin.

800. X tasodifiy miqdor o’rtacha taqsimlangan bo’lib, uning matematik kutilishi va o’rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 20 va10 ga teng. Chetlanishining absolyut qiymati bo’yicha 3 dan kichik bo’lishining ehtimolini toping.

801. X tasodifiy miqdor o’rtacha taqsimlangan bo’lib, uning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 30 va 100 ga teng bo’lsa, X ning (10:50) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

802. X tasodifiy miqdor o’rtacha taqsimlangan. Uning matematik kutilishi 5 va dispersiyasi 4 ga teng. X ning (1:10) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

803. Uzunligi 20 sm bo’lgan detalni ishlab chiqarishda qo’yilgan xato tasodifiy miqdor bo’lib, u o’rtacha qonunga bo’ysunadi, $\sigma = 0{,}2$ sm. Tayyorlangan detalning uzunligi o’z aslidan 0,3 sm kichik bo’lgan miqdorga farq qilishi ehtimoli topilsin.

804. O’rtacha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi 3 va 4 ga teng. X ning (1:7) oraliqda yotadigan qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

805. X tasodifiy miqdor o’rtacha taqsimlangan uning sonli tavsiflari $M(X) = 3$ va $D(X) = 4$ bo’lsa, X ning 2 dan katta va 4 dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

806. X tasodifiy miqdor o’rtacha taqsimlangan bo’lib, uning matematik kutilishi $a = 25$ ga teng. Agar X ning (10:15) oraliqqa tushish ehtimoli 0,2 ga teng bo’lsa, uning (35:40) oraliqqa tushish ehtimoli qanchaga teng bo’ladi?

807. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(X) = 5$ ga teng bo’lib, o’rtacha taqsimlangan. Agar X ning (5:10) oraliqqa tushish ehtimoli $\frac{1}{5}$ ga teng bo’lsa, uning (0:5) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli nechchiga teng?

808. Agar ko'rsatkichli taqsimotning parametri 0,4 bo'lsa, uning differensial va integral funksiyasini toping.

809. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $f(x) = 2e^{-2x}$ differensial funksiya bilan berilgan $x < 0$ bo'lganda esa $f(x) = 0$. Sinov natijasida X ning (0,5:1) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

810. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $F(x) = 1 - e^{-3x}$ integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangandir. $x < 0$ bo'lganda $F(x) = 0$ ga teng. X ning sinov natijasida $\left(\frac{1}{3} : \frac{2}{3}\right)$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

811. Differensial funksiyasi $f(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$ ga teng bo'lgan, ko'rsatkichli taqsimotning sonli xarakteristikalari topilsin.

812. $f(x) = 20e^{-20x}\ (x \geq 0)$ differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasi topilsin.

813. Ko'rsatkichli taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 0,01 ga teng bo'lsa, X ning differensial va integral funksiyalarini yozing.

814. Elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$ ko'rsatkichli taqsimotga ega. Davomiyligi $t = 100$ soat bo'lgan vaqt ichida elementning buzilmaslik ehtimolini toping.

815. Ikkita erkli ishlaydigan element sinalmoqda, birinchi elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}4t}$ ko'rsatkichli taqsimotga, ikkinchi elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$ ko'rsatkichli taqsimotga ega. Davomiyligi 5 soat bo'lgan vaqt ichida ikkala elementning buzilishi ehtimolini toping.

816. 19-masala shartlarida kamida bitta elementning buzilish ehtimolini toping.

817. X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi 10 ga teng bo'lsa, X ning integral funksiyasini toping.

818. X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimlangan bo'lib, uning o'rtacha kvadratik chetlanishi $1/5$ ga teng. X ning differentsial funksiyasi topilsin.

819. O'rtacha taqsimlangan X tasodifiy miqdor $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/2}$ differensial funksiya bilan berilgan. X ning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

VII bob. Matematik statistika elementlari

§1. Tanlanma. Empirik taqsimot funksiyasi. Gistogramma. Poligon.

Aytaylik X $F(x)$ taqsimot funksiyali tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorning n ta sinov natijasida qabul qilgan qiymatlari $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ n hajmi tanlanma deyiladi. Sinovlar bir xil sharoitda erkli ravishda o'tkazilgan deb hisoblanadi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning har biri X kabi taqsimlangan erkli X_i tasodifiy miqdordan tuzilgan n o'lchovli tasodifiy vektor deb qaralishi mumkin.

Ba'zan $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning asosiy majmui (bosh birlashmasidan) olingan deyiladi.
O'sib borish bo'yicha tartiblashtirilgan tanlanma variatsion qator deyiladi.

Hajmi n bo'lgan tanlanma har xil $z_1, z_2, ..., z_k$ elementlardan iborat, bunda z_i tanlanma m_i marta ishtirok etadi. m_i soni z_i elementning chastotasi, $\nu_i = \frac{m_i}{n}$ esa nisbiy chastotasi deyiladi. Ravshanki, $\sum_{i=1}^{K} m_i = n$.

(z_i, m_i) juftliklar ketma-ketligi statistik qator deyiladi. Odatda statistik qator birinchi qatorda z_i elementlardan, ikkinchi qatori chastotalardan iborat jadval shaklida beriladi.

Uchlari (z_i, m_i) nuqtalarda bo'lgan siniq chiziq chastotalar poligoni deyiladi.

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{x_i < x} 1$ formula bilan aniqlanadigan funksiya empirik taqsimot funksiyasi deyiladi. $F_n(x)$ taqsimot funksiyasining bahosi xizmatini bajaradi, ya'ni $F_n(x) \approx F(x)$. Ravshanki $F_n(x)$ kamayuvchi bo'lmagan pog'onali funksiyalar.

Aytaylik X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lib, $f(x)$ uning zichlik taqsimot funksiyasi bo'lsin. $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma bo'yicha $f(x)$ zichlikni baholash uchun X ning qiymatlari sohasini $h_i (= 1, ..., k)$ intervallarga bo'lamiz, x^*_i bu intervallarning o'rtasi ν_i - tanlanma elementlaridan h_i intervalga tushganlari soni bo'lsin. U holda $f(x^*_i) \approx \frac{\nu_i}{n \cdot h_i} (= 1, ...k)$ zichlikning x^*_i dagi bahosidir. Dekart koordinatalar sistemasida asosi h_i, balandligi $\frac{\nu_i}{nh_i}$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarni chizamiz. Hosil bo'lgan geometrik figura tanlanmaning gistogrammasi deyiladi.

1. Quyidagi tanlanmaning variatsion va statistik qatorlarini yozing:
5, 3, 7, 10, 5,5, 2, 10, 7, 7, 4, 2, 4.

2. Statistik qatorlari

a)

z_i	1	4	5	7
m_i	20	10	14	6

b)

z_i	2	3	4	5	7	10
m_i	3	1	2	3	4	2

bo'lgan tanlanmalarning chastotalar poligonini quring.

3. Statistik qatori

z_i	1	4	6
m_i	10	15	25

bo'lgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini toping.

4. Statistik qatorlari

a)

z_i	2	5	7	8
m_i	1	3	2	4

b)

z_i	4	7	8
m_i	5	2	3

bo'lgan tanlanmalarning empirik taqsimot funksiyasini toping.

5. Chastotalar jadvali bilan berilgan tanlanmaning gistogrammasini quring. Tanlanma hajmi $n = 55$.

Interval raqami	Interval chegarasi	Intervalga tegishli tanlanma elementlari soni
i	$x_i - x_{i+1}$	ν_i
1	10 – 12	2
2	12 - 14	4
3	14 – 16	8
4	16 – 18	12
5	18 – 20	16
6	20 – 22	10
7	22 - 24	3

6. Chastotalar jadvali bilan berilgan tanlanmaning gistogrammasini quring. Tanlanma hajmi $h = 100$.

i	$x_i - x_{i+1}$	ν_i
1	0 -2	20
2	2 -4	30
3	4 - 6	50

7. Statistik qatori

z_i	1	3	5	7	9
m_i	10	15	30	35	12

bo'lgan tanlanmaning chastotalari poligonini quring.

8. Statistik qatori

z_i	15	16	17	18	19
m_i	1	4	5	4	2

z_i	2	3	4	5	6	7	8
m_i	1	3	4	6	5	2	1

bo'lgan tanlanmalarning empirik taqsimot funksiyasi grafigini, chastotalar poligonini, va gistogrammasini chizing.

9. Sotilgan erkaklar oyoq kiyimi taqsimotining jadvali bo'yicha chastotalar poligoni va gistogrammasini chizing.

Oyoq kiyim razmeri	36	37	38	39	40	41	42	43
Sotilganlar soni	1	1	5	8	17	21	18	8

10. Chastotalar jadvali

i	$x_i - x_{i+1}$	i
1	10 – 20	1
2	20 – 30	2
3	30 – 40	7
4	40 – 50	18
5	50 -60	12
6	60 – 70	8
7	70 - 80	2

bo’lgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi, grafigi, chastotalar poligoni va gistogrammasini chizing.

Tanlanmaning quydagi taqsimoti bo’yicha uning empirik funksiyasini toping.

820. x_i; 2 6 10
n_i; 12 18 30

821. x_i; 2 5 7 8
n_i; 1 3 2 4

822. x_i; 5 4 9
n_i; 1 4 7

823. x_i; 7 6 8
n_i; 1 4 6

824. x_i; 1 5 7 10
n_i; 4 7 10 15

825. x_i; 1 5 7 10
n_i; 5 1 2 6

826. x_i; 7 8 11
n_i; 4 5 8

827. x_i; 5 8 10
n_i; 9 11 14

828. x_i; 5 7 9
n_i; 1 3 5

829. x_i; 3 7 11
n_i; 1 3 5

Quydagi tanlanmaning taqsimotlari bo’yicha chastotalar poligoni va gistogrammasini yasang.

830. x_i; 5 7 10 15
n_i ; 2 3 8 7

831. x_i ; 8 11 13
n_i; 1 7 4

832. x_i ; 5 8 10
n_i 4 6 8

833. x_i; 6 8 10

834. x_i; 7 9 11
n_i 4 6 8

n_i; 1 3 5

835. x_i; 1 8 10

n_i; 3 1 7

836. x_i; 1 6 8

n_i; 4 5 6

837. x_i; 5 6 10

n_i; 1 5 8

838. x_i; 1 3 5 7

n_i; 10 15 20 25

839. x_i; 2 4 6 8

n_i; 1 3 5 7

840. x_i; 4 7 10 13

n_i; 5 10 15 20

§2. Taqsimotning noma'lum parametrlarini nuqtaviy baholash

Aytaylik $X_1, X_2, ..., X_n$ X tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari bo‘lsin. Tanlanmaning o‘rtacha qiymati $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $M(\bar{x})$ matematik kutilishning, tanlanma dispersiyasi

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

$D(\bar{x})$ dispersiyaning nuqtaviy bahosi bo'ladi.

Agar tanlanma hajmi n juda katta bo‘lmasa

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$D(\bar{x})$ dispersiyaning nuqtaviy siljimas bahosi bo'ladi.

s – tanlanmaning o'rta kvadratik chetlanishi

$\sigma = \sqrt{D(\bar{x})}$ o‘rta kvadratik chetlanishning nuqtaviy bahosi bo'ladi.

11. Statistik qatori

z_i	1000	1200	1400
m_i	1000	6000	3000

bo’lgan taqsimot uchun $\bar{x}, s^2, s$ hisoblansin j: $\bar{x} = 1240, s^2 = 14400$.

12. Statistik qatori

z_i	4	7	10	15
m_i	10	15	20	5

bo’lgan taqsimot uchun, $\bar{x}, s^2, s,$ hisoblansin j: $\bar{x} = 8{,}4; s^2 = 9{,}84$

13. Statistik qatori

z_i	1	2	5	8	9
m_i	3	4	6	4	3

bo ‘lgan taqsimot uchun $s^2, \bar{s}^2$ hisoblansin j: $s^2 = 8{,}4; \bar{s}^2 = 8{,}84$.

14. Shirkat maydonlarining hosildorligi quyidagi jadvaldagi bo’lsa,

Hosildorlik (s/ga)	Maydon (ga)
18	10
20	20
21	20

tanlanma o‘rta qiymati $\bar{x}$ va o‘rta kvadratik chetlanish $\bar{s}$ ni toping.

j: $\bar{x} = 20ц,\ \tilde{s} \cong 1{,}1ц$:

15. Hajmi $n = 51$ bo ‘lgan tanlanma bo‘yicha tanlanma dispersiyasi $s^2 = 5$ topildi. $\tilde{s}^2$ ni hisoblang j: $\tilde{s}^2 = 5{,}1$.

16. Hajmi $n = 100$ bo’lgan

z_i	340	360	375	380
m_i	20	50	18	12

tanlanma bo‘yicha o‘rta qiymatni toping j: $\bar{x} = 561{,}1$.

17. Hajmi $n = 10$ bo’lgan

z_i	0,1	0,4	0,6
m_i	3	2	5

tanlanma bo’yicha tanlanma dispersiyasi s^2 ni toping j: $s^2 = 0{,}0469$.

18. Statistik qator

z_i	186	192	194
m_i	2	5	3

bo'lgan tanlanma uchun $\bar{x}$ va s^2 ni hisoblang j: $\bar{x}=191{,}4; s^2=8{,}04$.

19. Hajmi $n=41$ bo'lgan tanlanma dispersiyasi $s^2=3$ bo'lsa, aniqlashtirilgan dispersiya $\tilde{s}^2$ ni toping j: $\tilde{s}^2=3{,}075$.

20. Ixtiyoriga yuzta talabalar bo'yi jadvali

Bo 'yi	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Talabalar soni	10	14	26	28	12	8	2

Tanlanmaning o 'rta qiymati va dispersiyasini toping. j. $\bar{x}=166;\ s^2=33{,}44$

§3. Noma'lum parametrlarni baholashda ishonchlilik intervallari usuli

Baholanayotgan parametrni $1-\alpha$ ehtimollik bilan qoplaydigan interval ishonchlilik intervali deyiladi.

X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lsa, dispersiya $\sigma^2=D(X)$ ma'lum bo'lganda uning matematik kutilishi $a=M(X)$ uchun

$$\bar{x}-\lambda_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\lambda_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ishonchlilik intervali bo 'ladi, bunda $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ – o'rta qiymat;

$\lambda_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – baholash aniqligi; n – tanlanma hajmi; $2\Phi(\lambda_\alpha)=\alpha$,

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$ - Laplas funksiyasi.

Agar dispersiya $D(X)$ noma'lum bo'lsa, matematik kutilish $a=M(X)$ uchun

$$\bar{x}-t_\alpha\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t_\alpha\frac{\tilde{S}}{\sqrt{n}}$$

ishonchlilik intervali bo'ladi, bunda $\tilde{S}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, n – tanlanma hajmi, t_α – talaba taqsimotining kvantili, n va α bo'yicha topiladi. 21-23- masalalarda normal taqsimlangan asosiy majmuaning o'rta kvadrat chetlanishi, tanlanmaning o'rta qiymati, va tanlanma hajmi berilganda matematik kutilish a uchun ishonchlilik intervalini toping.

21. $\sigma=3;\ \bar{x}=4{,}1;\ \ n=36;\ \alpha=0{,}05.$ j: $3{,}12<a<5{,}08$

22. $\sigma = 2;\ \bar{x} = 5{,}4;\quad n = 10;\ \alpha = 0{,}05.$ j: $4{,}16 < a < 6{,}64$

23. $\sigma = 3;\ \bar{x} = 20{,}12;\quad n = 25;\ \alpha = 0{,}01.$ j: $18{,}57 < \bar{a} < 21{,}67$

Agar matematik kutilish $a = m(x)$ ma'lum bo'lsa, o'rta kvadratik chetlanish $\sigma^2 = D(x)$ uchun $\frac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{n\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}$ ishonchlilik intervali bo'ladi, bunda $\chi^2_p(n) - n^2$ erklilik darajali χ^2-taqsimot kvantili.

Agar matematik kutilish a noma'lum bo'lsa, o'rta kvadratik chetlanish $\sigma^2 = D(x)$ uchun

$$\frac{n\tilde{s}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{n\tilde{s}^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

ishonchlilik intervali bo'ladi.

24 – 27 masalalarda tanlanmaning aniqlashtirilgan o'rta kvadratik chetlanishi, o'rta qiymat va tanlanma hajmi berilganida matematik kutilish a uchun ishonchlilik intervalini toping.

24. $\tilde{s} = 0{,}8;\ \bar{x} = 20{,}2;\ n = 16,\ \alpha = 0{,}05.$ $j: 19{,}774 < a < 20{,}626$

25. $\tilde{s} = 1{,}5;\ \bar{x} = 16{,}8;\ n = 12,\ \alpha = 0{,}05.$ $j: 15{,}85 < a < 17{,}75$

26. $\tilde{s} = 2{,}4\ \ \bar{x} = 14{,}2;\ n = 9,\ \alpha = 0{,}01.$ $j: 11{,}512 < a < 16{,}888$

27. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan $n = 25$ hajmli tanlanma bo'yicha $\tilde{s} = 0{,}8$ topildi. 0,05 ishonchlilik bilan o'rta kvadratik chetlanish σ uchun ishonchlilik intervalini toping. $j:\ 0{,}544 < \sigma < 1{,}056$.

28. 15 ta o'lchash natijasida aniqlashtirilgan o'rta kvadratik chetlanish $\tilde{s} = 0{,}12$ topildi. 0,01 ishonchlilik bilan o'lchash xatoligi σ uchun ishonchlilik intervalini toping $j:\ 0{,}03 < \sigma < 0{,}21.$

29. O'n oltitta o'lchash natijasida fizik miqdorning o'rta qiymati $\bar{x} = 23{,}161$ va aniqlashtirilgan o'rta kvadratik chetlanishi $\tilde{s} = 0{,}4$ topildi. Shu o'lchanayotgan miqdorning haqiqiy qiymati a va o'lchash xatoligi σ ni 0,05 ishonchlilik bilan baholang.

$$j:\ \ 22{,}948 < a < 23{,}374$$

$$0{,}224 < \sigma < 0{,}576$$

30. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan n hajmli tanlanma bo'yicha aniqlashtirilgan o'rta kvadratik chetlanish S hisoblandi.

Haqiqiy o'rta kvadratik chetlanishni qoplovchi intervalni 0,001 ishonchlilik bilan toping.

a) $n = 10;\ s = 5{,}1;$ b) $n = 50;\ s = 14.$

j: a) $0 < \sigma < 14{,}28;$ b) $7{,}98 < \sigma < 20{,}02.$

§4. Taqsimot haqidagi gipotezani statistik tekshirish
χ^2 - mezoni

Biror tasodifiy miqdor X, ya'ni asosiy majmua $X_1, X_2, ..., X_n$ tanlanma bilan o'rganilganida, taqsimot qonuni haqida taxmin qilish mumkin. Bu taxminlar statistik gipotezalar χ^2 – mezon bo'yicha tekshirib qabul qilinadi yoki inkor etiladi.

Agar $n_1, n_2, ..., n_m$ empirik chastotalar, $n'_1, n'_2, ..., n'_m$ nazariy chastotalar bo'lsa,

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

tasodifiy miqdor, erkinlik darajasi $k = m - 3$ hisoblanadi.

Taxmin qilingan statistik gipoteza quyidagicha tekshiriladi.
Avvaldan ahamiyatlilik darajasi α beriladi, ya'ni shunday ehtimollik α ko'rsatiladiki, tasodifiy hodisa $\chi_0^2 > \chi^2$ bu ehtimollik bilan bir nechta sinov natijasida yuz bermaydi deyish mumkin. χ^2 – mezon kvantillari jadvalidan k va α bo 'yicha $\chi^2(k, \alpha)$ topiladi. Agar $\chi_0^2 > \chi^2(k, \alpha)$ bo'lsa, H gipoteza inkor etiladi, agar $\chi_0^2 < \chi^2(k, \alpha)$ bo 'lsa, H gipoteza qabul qilinadi. Odatda $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$ yoki $\alpha = 0{,}001$ bo'ladi. Quyida ahamiyatlilik darajasi bilan empirik va nazariy chastotalari ma'lum bo'lgan X tasodifiy miqdor normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshiring.

31. $\alpha = 0{,}05$.

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n'_i	3	14	42	82	99	76	37	13

j: $\chi_0^2 = 7{,}19$, $\chi^2(0{,}05; 5) = 11{,}1$; Gipotezani inkor etishga asos yo'q.

32. $\alpha = 0{,}05$..

n_i	6	12	16	40	13	8	5
n'_i	4	11	15	43	15	6	6

j: $\chi_0^2 = 2{,}5$, $\chi^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$

33. $\alpha = 0{,}05$..

n_i	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
n'_i	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

j: $\chi_0^2 = 3$, $\chi^2(0{,}05; 7) = 14{,}07$.

34. $\alpha = 0{,}05.$

n_i	5	13	12	44	8	12	6
n'_i	2	20	12	35	15	10	6

$j:\ \chi_0^2 = 13;\ \chi^2\ 0{,}05;4\ = 9{,}5$ Gipoteza inkor etiladi.

35. $\alpha = 0{,}01.$

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

$j:\ \chi_0^2 = 3{,}068,\ \chi^2\ 0{,}01;4\ = 13{,}3$

36. $\alpha = 0{,}05.$

n_i	5	10	40	8	7
n'_i	6	14	18	7	5

$j:\ \chi_0^2 = 2{,}47,\ \chi^2\ 0{,}05;2\ = 6.$

37. $\alpha = 0{,}05..$

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n'_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7

$j:\ \chi_0^2 = 1{,}52,\ \chi^2\ 0{,}05;6\ = 12{,}6$

38. $\alpha = 0{,}05.$

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n'_i	10	24	34	80	18	22	12

$j:\ \chi_0^2 = 13{,}93,\ \chi^2\ 0{,}05;4\ = 9{,}5.$ Gipoteza inkor etiladi.

39. $\alpha = 0{,}05..$

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n'_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

$j:\ \chi_0^2 = 0{,}83;\ \chi^2\ 0{,}05;6\ = 12{,}6.$

40. Tangani Byuffon $n = 4040$ marta tashlaganida $\nu_1 = 2048$ marta “gerb”, $\nu_2 = 1992$ marta “raqam” tushdi.

Ahamiyatlilik darajasi $\alpha = 0{,}05$ deb, “gerb” $p = \frac{1}{2}$ ehtimollik bilan tushdi degan gipotezani tekshiring

$j:\ \chi_0^2 = 0{,}776,\ \chi^2\ 0{,}05;1\ = 3{,}8.$

Javoblar

229) $a_n = \frac{2n-1}{3^n}$

230) $a_n = (-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}$

231) $a_n = \frac{2^n+1}{5^n+1}$

232) $a_n = \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^2$

233) $S = 0{,}9$

234) $S = \frac{1}{2}$

235) $S = \frac{23}{90}$

236) $S = 0{,}25$

239) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

240 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

241) $a_n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^3$

242) $a_n = \frac{10^n}{2n+5}$

243) $S = \frac{1}{3}$

244) $S = \frac{11}{18}$

245) $S = \frac{4}{3}$

246) $S = \frac{1}{12}$

247) bajarilmaydi

248) bajariladi

249) bajarilmaydi

250) bajariladi

251) bajariladi

252) uzoqlashuvchi

253) uzoqlashuvchi

255) uzoqlashuvchi

256) uzoqlashuvchi

257) bajariladi

258) bajariladi
259) bajariladi
260) bajarilmaydi
261) bajarilmaydi
262) uzoqlashuvchi
263) uzoqlashuvchi
264) uzoqlashuvchi
265) uzoqlashuvchi
266) uzoqlashuvchi
267) uzoqlashuvchi
268) yaqinlashuvchi
269) uzoqlashuvchi
270) yaqinlashuvchi
271) yaqinlashuvchi
272) uzoqlashuvchi
273) yaqinlashuvchi
274) yaqinlashuvchi
275) uzoqlashuvchi
276) yaqinlashuvchi
277) uzoqlashuvchi
278) yaqinlashuvchi
279) uzoqlashuvchi
280) yaqinlashuvchi
281) yaqinlashuvchi
282) yaqinlashuvchi
283) uzoqlashuvchi
284) yaqinlashuvchi
285) uzoqlashuvchi
286) yaqinlashuvchi
287) uzoqlashuvchi
288) yaqinlashuvchi
289) yaqinlashuvchi
290) uzoqlashuvchi
291) yaqinlashuvchi
292) yaqinlashuvchi
293) yaqinlashuvchi
294) yaqinlashuvchi
295) uzoqlashuvchi
296) uzoqlashuvchi
297) yaqinlashuvchi

298) yaqinlashuvchi
299) yaqinlashuvchi
300) yaqinlashuvchi
301) yaqinlashuvchi
302) yaqinlashuvchi
303) yaqinlashuvchi
304) yaqinlashuvchi
305) uzoqlashuvchi
306) uzoqlashuvchi
307) yaqinlashuvchi
308) yaqinlashuvchi
309) yaqinlashuvchi
310) yaqinlashuvchi
311) yaqinlashuvchi
312) yaqinlashuvchi
313) yaqinlashuvchi
314) yaqinlashuvchi
315) yaqinlashuvchi
316) yaqinlashuvchi
317) yaqinlashuvchi
318) yaqinlashuvchi
319) yaqinlashuvchi
320) yaqinlashuvchi
321) yaqinlashuvchi
322) yaqinlashuvchi
323) yaqinlashuvchi
324) yaqinlashuvchi
325) uzoqlashuvchi
326) yaqinlashuvchi
327) uzoqlashuvchi
328) yaqinlashuvchi
329) yaqinlashuvchi
330) yaqinlashuvchi
331) yaqinlashuvchi
332) uzoqlashuvchi
333) yaqinlashuvchi
334) uzoqlashuvchi
335) yaqinlashuvchi
336) uzoqlashuvchi
337) uzoqlashuvchi

338) uzoqlashuvchi
339) uzoqlashuvchi
340) yaqinlashuvchi
341) uzoqlashuvchi
342) uzoqlashuvchi
343) yaqinlashuvchi
344) uzoqlashuvchi
345) uzoqlashuvchi
346) yaqinlashuvchi
347) shartli yaqinlashuvchi
348) absolyut yaqinlashuvchi
349) uzoqlashuvchi
350) uzoqlashuvchi
351) absolyut yaqinlashuvchi
352) shartli yaqinlashuvchi
353) shartli yaqinlashuvchi
357) uzoqlashuvchi
358) uzoqlashuvchi
359) shartli yaqinlashuvchi
360) absolyut yaqinlashuvchi
361) shartli yaqinlashuvchi
362) absolyut yaqinlashuvchi
363) absolyut yaqinlashuvchi
364) absolyut yaqinlashuvchi
367) $-\infty < x < -1$
368) $-\infty < x < \infty$
369) $-\infty < x < \infty$
370) mumkin
371) bo'ladi
372) $1 < x < \infty$
373) $-\infty < x < \infty$
374) $-\infty < x < \infty$
345) $-1 \le x \le 1$
376) $n = 5$
377) $-1 < x < 1$
379) $-\infty < x < \infty$
380) mumkin
381) mumkin
382) $x = 1$ da uzoqlashuvchi, $x = 2$ da uzoqlashuvchi, $x = 3$ da yaqinlashuvchi

383) $x=1$ da uzoqlashuvchi, $x=2$ da yaqinlashuvchi

384) $0<x<\infty$

385) $n=11$

386) $n=8$

387) $-1<x<1$

388) $-\infty<x<\infty$

389) $-\sqrt[3]{10}<x<\sqrt[3]{10}$

390) $-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\le x<\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$

391) $2\le x\le 4$

392) $3\le x<5$

393) $-2\le x<2$

394) $-1\le x\le 1$

395) $-\ln(-x)$

396) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

397) $-3\le x<3$

398) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

399) $-\infty<x<\infty$

400) $1<x<3$

401) $--1\le x<0$

402) $-\sqrt[3]{100}<x<\sqrt[3]{100}$

403) $-1<x<3$

404) $\frac{a}{(a-x)^2}$

405) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

406) $\frac{2a}{(a-x)^3}$

407) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-n)^n}{n}$

408) $1+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}$

409) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$

410) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}$

411) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!}$

413) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n} \cdot \sin\frac{\pi n}{n} \cdot \frac{x^n}{n!}$

414) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n}$

415) $1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}$

416) $2-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$

417) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

418) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2n-1)\cdot\pi}{n}}{(n-1)!\cdot 2^{n-1}} \cdot \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$

419) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi^n}{3^n \cdot n!} \cdot (x-1)^n$

420) $\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty} (1+2^{-n}) \cdot \frac{x^n}{n}$

421) $-2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{3} \cdot \frac{x^n}{n}$

422) $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1}-3^{-n-1}) \cdot (x+4)^n$

423) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n \cdot 2^{n+1}) \cdot x^n$

424) $2+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{(x-4)^n}{2^{2n}}$

425) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot (1+2^{-n}) \cdot \frac{x^n}{n}$

426) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \ln^n 2}{n!}$

427) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

428) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$

429) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!} \cdot x^n$

430) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (x+1)^n$

431) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

432) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot x^{n-1}$

433) $1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot \ldots\cdot (3n-2)}{3^n\cdot n!}\cdot x^{3n}$

434) $-1+\frac{x+1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots\cdot (3n-1)}{3^{n+1}\cdot (n+1)!}\cdot (x+1)^{n+1}$

435) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

436) $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}$

437) $\approx 1{,}648719$

438) $\approx 0{,}81873$

439) $\approx 0{,}9511$

440) $\approx 1{,}0192$

441) $\approx 0{,}0392$

442) $\approx 0{,}197$

443) $\approx 0{,}6931$

444) $\approx 1{,}60940$

445) $R_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}$

446) $\approx 3{,}1416$

447) $\approx 2{,}71828$

448) $\approx 0{,}60653$

449) $\approx 0{,}1564$

450) $\approx 1{,}0196$

451) $\approx -0{,}0202$

452) $\approx 0{,}197$

453) $\approx 1{,}0986$

454) $\approx 3{,}142$

455) $\approx 2{,}3026$

456) $R_n<\frac{1}{2\cdot (n+1)\cdot t\cdot (t+1)\cdot (t+1)^{2n-1}}$

457) 2

458) $\frac{1}{6}$

459) $\frac{1}{3}$

460) 1

461) $\approx 0{,}2483$

462) $\approx 0{,}098$

463) $\approx 0{,}742$

464) $\approx 0{,}1996$

465) $\approx 0{,}102$

466) $\approx 0{,}015$

467) $\frac{1}{6}$

468) $\frac{1}{4}$

469) 1

470) $\frac{2}{3}$

471) $\frac{1}{3}$

472) $\approx 32{,}831$

473) $\approx 0{,}487$

474) $\approx 0{,}6449$

475) $\approx 0{,}006$

476) $\approx 0{,}511$

477) $\pi + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \sin mx$

478) $-2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \sin mx$

479) $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \left(\frac{12}{m^3} - \frac{2\pi^2}{m} \right) \cdot \sin mx$

480) $\frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((m-1)x)}{(m-1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{\sin mx}{m}$

481) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((m+1)x)}{(m+1)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{\sin mx}{m}$

482) $\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((m-1)x)}{2m-1}$

485) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((m+1)x)}{(m+1)^2}$

486) $\frac{\pi^3}{3} - 4\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\cos mx}{m^2}$

487) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m-1)x}{(m-1)^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m}$

488) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m-1)x}{(m-1)^2}+3\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin mx}{m}$

489) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cdot\cos mx}{m^2}$

490) $\frac{2}{\pi}sh\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1}(\cos mx-m\sin mx)\right)$

491) $-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(m+1)x}{2m+1}$

492) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}$

496) $\frac{\pi^2}{12}$

497) $\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cdot\cos m\pi x$

498) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(m+1)\pi x}{(m+1)^2}$

499) $-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+...\right)$

500) $2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2mx}{m}$

501) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(m+1)\pi x}{(m+1)^2}$

502) $\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot\frac{\sin m\pi x}{m}$

503) $\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+...\right)$

504) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot\frac{\sin\frac{(m+1)\pi x}{2}}{(m+1)^2}$

505) $\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(m+1)x}{(m+1)^2}$

506) $2\pi\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-...\right)-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+...\right)$

507) $\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{2}$

508) $\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\cdot\sin\frac{m\pi x}{2}$

509) $\frac{e^e-e^{-e}}{2e}+e\cdot\left(e^e-e^{-e}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m\cdot\cos\frac{m\pi x}{e}}{e^2+m^2\pi^2}+\pi\cdot\left(e^e-e^{-e}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m-1}\cdot m\cdot\sin\frac{m\pi x}{e}}{e^2+m^2\pi^2}$

510) $e\left(\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cdot\cos\frac{\pi x}{e}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{e}\right)+...\right)$

511) $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+...\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\pi x}{1}+\frac{\sin 2\pi x}{2}+...\right)$

512) $1-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\pi x}{m}$

513) $\frac{10}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-1\right)^m\frac{\sin\frac{m\pi x}{5}}{m}$

514) $\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\left(m-1\right)\pi x}{2m-1}$

515) 1

516) $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\cos\frac{2m\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cdot\cos 2m\pi x$

517) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{z^2+1}$

518) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1-\cos az}{z}$

519) $\frac{\sin z-\sin\frac{z}{2}}{z}$

520) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos z}{z}\cdot\sin zxdz$

521) $\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos zx}{\beta^2+z^2}dz$

522) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin z\cdot\cos zx}{z}dz$

523) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cdot\cos\pi z$

524) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{z}{z^2+1}$

525) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin az}{z}$

526) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\frac{z}{2}-\cos z}{z}$

527) $\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{z\cdot e-\sin z-z\cdot\cos z}{e\cdot\left(+z^2\right)}$

Adabiyotlar ro’yxati

1. В.П. М и н о р с к и й. Сборник задач по высшей математике, Наука 1969г.,

2. Н.С. П и с к у н о в. Дифференциальное и интегральное исчисление, том 1. Наука, 1985 г.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу, под редакцией Б. П. Демидовича. Государственное издательство физико-математической литературы, 1963 г.

4. Г.Н. Б е р м а н. Сборник задач по курсу математического анализа. Наука, 1985 г.

5. П.Е. Д а н к о, А. Г. П о п о в, Т. Я. К о ж е в н и к о в а. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 1. Высшая школа, 1986 г.

6. Л.А. К у з н е ц о в. Сборник задач по высшей математике. Высшая школа, 1983 г.

7. В.Е. Г м у р м а н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, Ўқитувчи 1977.

8. В.Е. Г м у р м а н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, Ўқитувчи 1980.

9. И.Г. Ғ а н и е в, А. М. К а р и м о в, Ф. Р. Н у р и д д и н о в, Э. А. М и р с о л и х о в. Олий математикадан масалалар тўплами, I-қисм, Тошкент, 2005 йил

10. И.Г. Ғ а н и е в, М. Э. И к р о м о в а. Эхтимоллар назарияси. Тошкент, 2006.

Mundarija

Kirish ……3

I bob. Oddiy differensial tenglamalar

§1.Umumiy tushunchalar. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar……..4

§2. Birinchi tartibli bir jinsli differansial tenglamalar…….....5

§3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar……7

§4. Bernulli tenglamasi……...8

§5. To'liq differensialli tenglama…….10

§6. Yuqori tartibli differensial tenglamalar……..11

§7. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar…….13

§8.O'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi……15

II bob. Sonli qatorlar

§1. Sonli qatorlar haqida umumiy tushunchalar……...17

§2. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti……19

§3. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning solishtirish belgisi……..20

§4. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Dalamber belgisi……22

§5. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning Koshi belgisi……..24

§6. Musbat hadli sonli qatorlarni yaqinlashishga tekshirishning integral belgisi……...26

§7. Ishorali o'zgaruvchan bo'lgan sonli qatorlar……..27

III bob. Funksional qatorlar

§1. Funksional qatorlar haqida asosiy tushunchalar……..29

§2. Darajali qatorlar……...32

§3. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish……35

§4. Darajali qatorlar yordamida funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblash…….....38

§5.Darajali qatorlarning limit va aniq integral hisoblashga qo'llanilishi……39

IV bob. Fur’e qatorlari
§1. Fur’e qatori hamda umumiy tushunchalar……40
§2. Davri $2l$ bo’lgan funksiyalarning Fur’e qatori……..43
§3. Fur’e integrali……45

V bob. Karrali integrallar
§1. Ikki o’lchovli integral……48
§2.Ikki o’lchovli integralda o’zgaruvchini almashtirish. Ikki o’lchovli integralning tatbiqlari…….....52
§3. Uch o’lchovli integral……..56

VI bob. Ehtimollar nazariyasi
§1. Ehtimolning klassik ta’rifi……..60
§2. Ehtimollarni qo’shish va ko’paytirish teoremalari…….62
§3. To’la ehtimollik formulasi……..64
§4. Sinovlarning takrorlanishi. Bernulli formulasi……...67
§5. Laplasning lokal va integral teoremalari……69
§6. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning sonli tavsiflari……..71
§7. Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari……73
§8. Normal taqsimot va ko’rsatkichli taqsimot…….....77

VII bob. Matematik statistika elementlari
§1.Tanlanma. Empirik taqsimot funksiyasi. Gistogramma. Poligon..…….....80
§2.Taqsimotning noma’lum parametrlarini nuqtaviy baholash.....84
§3. Noma’lum parametrlarni baholashda ishonchlilik intervallari….....86
§4. Taqsimot haqidagi gipotezani statistik tekshirish…….....88
Javoblar…….90
Adabiyotlar ro’yxati……...100