

УДК 537.533.2:519.633

ББК 22.311

М34

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и прикладной математики МГУСИ *А. Г. Кюркчай*;  
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики НИУ ВШЭ *В. М. Четвериков*

Авторы:

В. Г. Данилов, В. Ю. Руднев, Р. К. Гайдуков, В. И. Кретов

**М34 Математическое** моделирование эмиссии из катодов малых размеров. – М.: Горячая линия–Телеком, 2014. – 232 с.: ил.  
**ISBN 978-5-9912-0425-2.**

Представлена новая математическая модель теплопереноса в кремниевом автоэмиссионном острейном катоде малого размера, которая позволяет учитывать возможное его частичное проплавление. Приведенная математическая модель основана на системе фазового поля – современного обобщения задачи типа Стефана. Используемый авторами подход является не чисто математическим, а основан на понимании структуры решения (построении и изучении асимптотических решений) и компьютерных вычислениях. В книге приведен алгоритм численного решения уравнений полученной математической модели, в том числе его параллельная реализация. В заключение приведены результаты численного моделирования.

Для специалистов, проводящих исследования в области процессов теплопереноса и автоэлектронной эмиссии, может быть полезна студентам старших курсов и аспирантам.

**ББК 22.311**

Адрес издательства в Интернет [WWW.TECHBOOK.RU](http://WWW.TECHBOOK.RU)

ISBN 978-5-9912-0425-2

© В. Г. Данилов, В. Ю. Руднев,  
Р. К. Гайдуков, В. И. Кретов, 2014

© Издательство «Горячая линия–Телеком», 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	<b>6</b>
<b>Глава 1. Введение</b>	<b>9</b>
1.1. Краткая история открытия явления эмиссии электронов	9
1.2. Виды электронной эмиссии .....	10
1.3. Постановка задачи .....	12
1.4. Математическая постановка задачи. Модель теплопере- носа .....	15
<b>Глава 2. Физические основы автоэлектронной эмиссии</b>	<b>18</b>
2.1. Зонная теория и уровень Ферми .....	18
2.2. Удельная проводимость полупроводников .....	24
2.2.1. Концентрация электронов и дырок .....	26
2.2.2. Эффективная масса .....	29
2.2.3. Подвижности электронов и дырок .....	29
2.2.4. Зависимость удельной проводимости от температу- ры в кремнии .....	30
2.3. Термоэлектричество .....	31
2.4. Теплопроводность твердых тел .....	32
2.4.1. Электронная теплопроводность.....	33
2.4.2. Теплопроводность кристаллической решетки.....	34
2.5. Плотность эмиссионного тока и эффект Ноттингама .	35
2.5.1. Функция поддержки в металлах .....	37
2.5.2. Туннелирование электронов через потенциальный барьер .....	39
2.5.3. Формула для коэффициента прозрачности барьера в случае автоэмиссионного катода .....	51
2.5.4. Плотность эмиссионного тока в металлах .....	56
2.5.5. Особенности автоэлектронной эмиссии из полупро- водникового катода .....	56

2.5.6. Аппроксимация формулы для плотности эмиссионного тока . . . . .	60
2.5.7. Эффект Ноттингама . . . . .	62
2.5.8. Оптимальные значения параметров аппроксимаций . . . . .	67
2.5.9. Зависимость инверсионной температуры от напряженности внешнего электрического поля . . . . .	69
<b>Глава 3. Математическая модель</b>	<b>72</b>
3.1. Система фазового поля и ее использование при моделировании теплопереноса . . . . .	72
3.2. Система фазового поля как регуляризация предельных задач со свободной границей . . . . .	78
3.3. Асимптотическое решение системы фазового поля и модифицированная задача Стефана . . . . .	84
3.3.1. Построение асимптотического решения . . . . .	87
3.3.2. Примеры . . . . .	96
3.4. Слабое решение системы фазового поля и модель зоны проплавления . . . . .	98
3.4.1. Слабые решения и условия типа Гюгонио . . . . .	104
3.4.2. Решения типа «волновой поезд» и соответствующая предельная задача . . . . .	115
3.5. Вывод решения предельной задачи Стефана–Гиббса–Томсона из численного решения системы фазового поля . . . . .	133
3.6. Рождение и слияние диссипативных волн . . . . .	143
<b>Глава 4. Численное моделирование и его результаты</b>	<b>151</b>
4.1. Модель нанокатода . . . . .	151
4.2. Вычисление плотности тока внутри катода . . . . .	155
4.3. Вычисление плотности эмиссионного тока и моделирование эффекта Ноттингама . . . . .	157
4.4. Разностная схема . . . . .	159
4.4.1. Разностная схема для уравнения на потенциал . . . . .	162
4.4.2. Разностная схема для уравнения на функцию порядка . . . . .	164
4.4.3. Разностная схема для уравнения теплопроводности . . . . .	166
4.4.4. Устойчивость разностной схемы . . . . .	168
4.4.5. Об еще одном варианте разностной схемы . . . . .	173
4.4.6. Выбор шагов разностной схемы . . . . .	175

---

4.5. Алгоритм решения разностных уравнений и возможные варианты его распараллеливания . . . . .	177
4.6. Результаты численных экспериментов . . . . .	182
4.6.1. Немонотонное поведение свободных границ . . . . .	183
4.6.2. Результаты моделирования с физическими параметрами, соответствующими экспериментальным . . . . .	186
4.7. Образование зародышей плавления и кристаллизации в модели . . . . .	196
4.8. Заключение . . . . .	213
<b>Литература</b>	<b>218</b>