А. А. ТРУХАН,
В. Г. КОВТУНЕНКО

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
МОСКВА
КРАСНОДАР
2018

ББК 22.143я73
Т 80

Трухан А. А., Ковтуненко В. Г.

Т 80 Линейная алгебра и линейное программирование: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 316 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2744-4

В пособии излагаются вопросы теории линейной алгебры для решения систем линейных алгебраических уравнений и линейного программирования в рамках курса высшей математики для технических вузов. Пособие содержит основные теоретические положения линейной алгебры и некоторые ее практические приложения, такие как матричное исчисление, векторная алгебра и аналитическая геометрия в трехмерном и двумерном евклидовом пространстве, что позволяет решать практические инженерные задачи. Большое внимание уделено рассмотрению квадратичных форм и их геометрической иллюстрации. Кроме того, в данном пособии рассмотрено такое интересное приложение линейной алгебры, как линейное программирование, с помощью которого решаются задачи оптимизации.

Даны также некоторые физические, инженерные и даже экономические приложения линейной алгебры, что важно для понимания студентами окружающего мира. Пособие построено в виде лекций и практических занятий, содержит решения типовых примеров, и в него включен большой набор типовых индивидуальных заданий для самостоятельной работы.

Издание предназначено для студентов первого курса, обучающихся по направлениям подготовки, входящих в УГС: «Математика и механика», «Компьютерные и информационные науки», «Информатика и вычислительная техника», «Информационная безопасность», «Физико-технические науки и технологии», и других физико-математических и инженерно-технических направлений подготовки и специальностей.

ББК 22.143я73

Рецензенты:

В. Г. ВЛАСОВ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Иркутского национального исследовательского технического университета;

А. В. ТАЩИЛИН — доктор физико-математических наук, зав. лабораторией Института солнечно-земной физики СО РАН.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, математика занимается исследованием логических структур, где методом исследования являются логические рассуждения. Данное пособие посвящено рассмотрению линейных и билинейных алгебраических структур в рамках требований, предъявляемых к выпускникам технических вузов.

Алгебраической структурой называется некоторое множество, на котором заданы алгебраические операции, подчиняющиеся некоторому набору аксиом.

Алгебраическая операция – это внутренние правила композиции, по которым любому упорядоченному набору элементов множества ставится в соответствие единственный элемент того же множества.

Алгебра – это раздел математики, где исследуются операции, аналогичные сложению, вычитанию, умножению и делению чисел, но выполняемые не только над числами, но и над другими математическими объектами, а именно над многочленами, векторами, матрицами, тензорами и другими.

Подчеркнем, что алгебра является учением об операциях, где исследуются свойства самих операций для разных математических объектов. Алгебра формирует общие понятия и методы для всей математики и других наук.

В любой конкретной науке определяется объект для исследования и его алгебра. Так, дифференциально-интегральное исчисление является алгеброй бесконечно малых величин. В теории вероятностей определяют алгебру событий для подсчета соответствующих им вероятностей и так далее.

Линейная алгебра имеет большое прикладное значение, поскольку позволяет, прежде всего, решать системы линейных алгебраических или системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие системы описывают многообразные явления, происходящие в природе или технологические производственные процессы.

В данном пособии рассматривается линейная алгебра в применении, прежде всего, к решению систем линейных алгебраических уравнений. Кроме того, к изложению основ линейной алгебры применен аксиоматический подход, что позволяет не приводить доказательства ее многочисленных теорем.

Вы, несомненно, сталкивались с решением систем двух и трех линейных алгебраических уравнений с двумя и тремя неизвестными соответственно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{11}x_2 = b_2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

где: x_i – неизвестные, a_{ij} – постоянные коэффициенты при неизвестных ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$) и b_j – постоянные из правой части этих уравнений, которые называются свободными членами. Запись $i = \overline{1,n}$ означает, что индекс i пробегает все целочисленные значения от 1 до n. Если число уравнений больше трех, то возникают технические трудности вычисления таких систем.

Для облегчения вычислений вводится некоторый формализм векторных пространств, который позволяет свести систему уравнений только к одному операторному уравнению

$$\widehat{A}\overline{x} = \overline{b},$$

где $\widehat{A}$ является оператором, который описывается матрицей, представляющей собой таблицу чисел, записанных в определенном порядке. Так, например, для первой из написанных систем

$\widehat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных и $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – вектор, определяемый постоянными из правой части данной системы, называемыми свободными членами. Отметим, что матрица несет в себе информацию о решаемой системе.

В рамках данного формализма вводится алгебра векторов и матриц, которая позволяет делать анализ систем линейных алгебраических уравнений с любым количеством уравнений и неизвестных. При этом необходимо определять совместность системы, определять зависимые и независимые уравнения системы, так как от этого зависит решение единственное или имеется бесчисленное множество решений. Если же система несовместна, то решения нет и не надо прилагать усилия по поиску несуществующего решения. Просто следует проверить правильность постановки задачи.

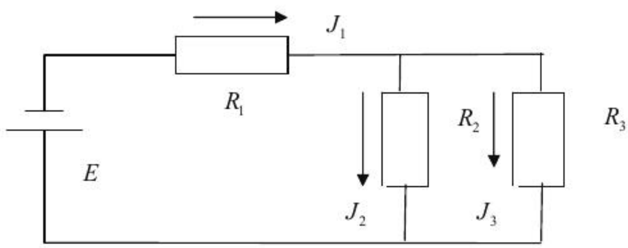


Рис. В.1

Покажем на простом примере, как в процессе решения знакомых вам задач возникают матрицы. Рассмотрим простую электрическую схему, приведенную на рисунке В.1. С учетом законов Кирхгофа, составляем систему уравнений для определения токов в цепи.

Перепишем данную систему в определенном порядке

$$\begin{cases} J_1 - J_2 - J_3 = 0 \\ J_1R_1 + J_2R_2 = E \\ J_2R_2 - J_3R_3 = 0 \end{cases},$$

которую можно представить в эквивалентном операторном виде $\widehat{A}\overline{J} = \overline{\varepsilon}$, где $\widehat{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ R_1 & R_2 & 0\\ 0 & R_2 & -R_3\end{pmatrix}$, $\overline{J}=\begin{pmatrix}J_1\\ J_2\\ J_3\end{pmatrix}$ и $\overline{\varepsilon}=\begin{pmatrix}0\\ E\\ 0\end{pmatrix}$.

Подробнее остановимся на понятии матрицы. Как уже было определено, матрица есть таблица чисел, записанных в определенном (является предметом договора) порядке. Матрица является способом хранения и обработки информации для сознательного исследования и преобразования окружающего нас мира.

Матричное исчисление как нельзя лучше подходит для использования компьютерной техники. Базы данных, представляемые в виде таблиц, описываются непосредственно матрицами. Операторы, производящие заданные действия с этими данными, тоже являются матрицами.

Понятие матрицы является многообразным и часто встречается нам в повседневной жизни, например, школьный классный журнал, трехмерными матрицами являются книги, динамическими матрицами являются кинофильмы, телевидение и так далее.

Другим примером матрицы может служить матрица поворота осей декартовых координат на плоскости *XOУ*. Пусть оси координат повернуты на угол φ и образуют новую систему координат *X'OУ'*.

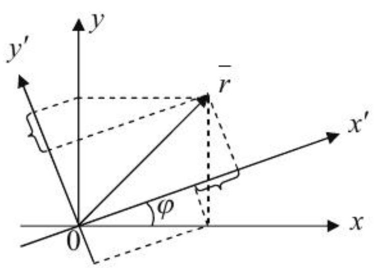


Рис. В.2

Найдем, как связаны координаты некоторого вектора $\bar{r}$ в этих системах, то есть получим правило перехода от одной системы координат к другой.

Из рисунка В.2 видно, что координаты связаны следующими уравнениями:

$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$, или в операторном виде: $\bar{x}' = \widehat{U}\bar{x}$.

Здесь обозначены двухмерные векторы $\bar{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ и $\bar{x}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$. Матрица поворота U на угол φ имеет вид:

$$\widehat{U}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Система уравнений в матричной форме запишется как

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица осуществляет обратный поворот и определяется выражением

$$\hat{U}^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{x}=\hat{U}^{-1}\bar{x}'.$$

Линейная алгебра непосредственно применяется к инженерным задачам векторной евклидовой алгебры и аналитической геометрии в двумерном и трехмерном пространствах. Здесь к перечисленным алгебраическим операциям добавляются операции скалярного и векторного произведения векторов, что позволяет измерять длины векторов и углы между ними. Линейная алгебра в двумерном и трехмерном евклидовом пространствах позволяет аналитически решать многие практические инженерные задачи. В данном учебном пособии рассмотрена также теория линейных форм, интерпретируемых как прямые линии на плоскости или в пространстве или плоскости в пространстве.

В пособии достаточно подробно изложена и теория квадратичных форм, которые рассматриваются как кривые второго порядка на плоскости или поверхности второго порядка в пространстве.

Кроме того, линейная алгебра широко применяется для решения задач оптимизации. Мы ограничимся рассмотрением простейшей из них, а именно задачи линейного программирования. В этом случае к системе линейных алгебраических уравнений, которые ограничивают физические и экономические возможности системы, добавляется уравнение цели. Совместное их решение приводит к оптимальному решению.

Сами матрицы не абстрактны, а зачастую вполне соотносятся с конкретными физическими понятиями. Так, например, знакомый вам закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$ на самом деле выглядит как

$$\bar{j} = \hat{\sigma}\ \bar{E}$$

или в компонентах $j_j=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ik}E_k$, где $\bar{j}$ – вектор плотности тока, $\bar{E}$ – вектор напряженности электрического поля и $\hat{\sigma}$ – проводимость, представленная в виде квадратной матрицы, состоящей из $3\cdot 3$ = 9 чисел. С помощью этой матрицы учитывается анизотропия и неоднородность вещества проводника тока. В пособии рассматривается приложение матриц к некоторым задачам физики, теоретической механики и экономики.

В данное учебное пособие не входят такие мощные приложения линейной алгебры, как тензорная алгебра, являющаяся математическим аппаратом общей теории относительности, и теория представлений групп симметрий относительно сдвигов и вращений, играющая важную роль в физике, химии и кристаллографии.

Данное пособие содержит большой набор индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов и успешного освоения ими данной темы.

ЛЕКЦИЯ 1: «Векторные пространства»

Векторы и их алгебра. Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства.

Векторы и их алгебра. Совокупность (множество или последовательность) n действительных чисел

$$\overline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

расположеных в определенном порядке, называется ***n-мерным вектором*** и обозначается как $\overline{x}$. Иногда вектор записывают как $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, поскольку круглые скобки обозначают упорядоченную последовательность.

Числа x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ называются компонентами или координатами вектора $\overline{x}$, $x_i \in \overline{x}$ ($\in$ – знак принадлежности). Величина, характеризующаяся только одним числом, называется ***скаляром***. Таким образом, компоненты вектора являются скалярами. ***Нулевой*** вектор имеет нулевые компоненты

$$\overline{0} = \{\,0, 0, ..., 0\}.$$

Заметим, что двумерные ($n = 2$) и трехмерные ($n = 3$) векторы имеют простое геометрическое истолкование как направленный отрезок на плоскости и в пространстве соответственно.

Так, например, двумерный вектор $\overline{x} = \{x, y\}$, где $x = 3$ и $y = 2$, изображен на рисунке 1.1 в декартовой системе координат. Видно, что значения координаты x откладываются по оси абсцисс *OX*, а значения y – по оси ординат *OY* и эти значения независимы.

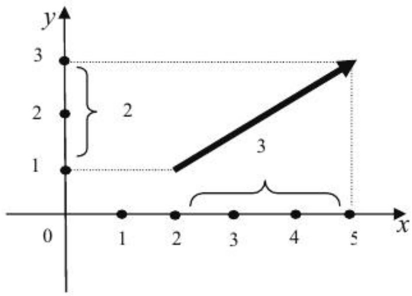


Рис. 1.1

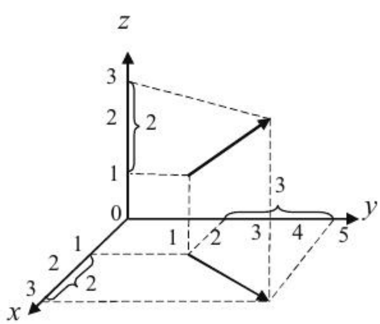


Рис. 1.2

Трехмерный вектор $\overline{x} = \{x, y, z\}$, где $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$, изображен на рисунке 1.2 в декартовой системе координат. В плоскости *XOY* проекция этого вектора представляет двумерный вектор $\overline{x} = \{x, y, 0\}$ как более частный случай.

Совокупность всех n–мерных векторов называют n–мерным векторным пространством A_n, $\overline{x} \in A_n$.

Ограничимся рассмотрением векторных пространств конечной размерности n. Отметим только, что бесконечномерные пространства изучаются в курсе математического анализа, где вводится понятие непрерывной переменной величины.

Векторное пространство A_n, $\overline{x} \in L_n$, $A_n = L_n$ называется линейным, если выполняются следующие три требования:

1. Любым двум векторам в пространстве L_n ставится в соответствие третий вектор из этого же пространства, называемый суммой векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y},$$

при этом соответствующие координаты складываются

$$\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\}.$$

Заметим, что алгебраическая операция называется корректной относительно множества действительных чисел, если всякой паре чисел из этого множества операция ставит в соответствие определенное число из этого же множества. То есть если $\overline{x} \in L_n$ и $\overline{y} \in L_n$, то и $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} \in L_n$.

2. Любому вектору $\overline{x}$ из L_n и любому действительному числу λ ставится в соответствие вектор $\overline{z} = \lambda\overline{x}$ этого же пространства, причем выполняется

$$\overline{z} = \lambda\overline{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\},$$

$$\left(\overline{x} \in L_n, \overline{z} \in L_n\right).$$

Еще раз подчеркнем, что сложение векторов и умножение на действительное (вещественное) число не выводит векторы из пространства L_n. Получим замкнутую алгебру операций относительно сложения векторов и умножения их на действительное число.

3. Указанные требования подчиняются 8 аксиомам, где устанавливаются их перестановочные, сочетательные и распределительные свойства.

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x},$$

$$(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}),$$

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}.$$

Для каждого вектора $\overline{x}$ существует такой вектор $\overline{x}'$, что выполняется

$$\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}.$$

Вектор $\overline{x}'$ – называют противоположным вектором. Выполняются также следующие соотношения

$$1 \cdot \overline{x} = \overline{x},$$

$$(\lambda + \mu)\ \overline{x} = \lambda\overline{x} + \mu\overline{x},$$

$$\lambda(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda\overline{x} + \lambda\overline{y},$$

$$\lambda\ (\mu\overline{x}) = \mu\ (\lambda\overline{x}) = (\lambda\mu)\overline{x}.$$

Заметим, что в линейном пространстве не вводится понятие метрики как способа измерения векторов. Для измерений длин векторов и углов между ними необходимо введение скалярного произведения векторов друг на друга, которое мы определим в метрическом пространстве. Для поставленной нами задачи – решения систем линейных алгебраических уравнений – нет необходимости этого делать. В такой постановке решается множество экономических, технологических задач, например, теория электрических или коммутационных сетей и так далее.

Ограничимся рассмотрением векторов, определяемых только действительными числами. Обобщение понятия вектора для комплексных чисел не представляет принципиальных трудностей, но может существенно усложнить начальное понимание сути линейной алгебры.

Линейная зависимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Если $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ есть совокупность векторов n–мерного векторного пространства A_n, то из них можно составить линейную форму, называемую ***линейной комбинацией векторов***

$$\overline{z} = c_\alpha \overline{x}_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha \overline{x}_\alpha = c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + \dots + c_k\overline{x}_k,$$

где c_α – произвольные действительные числа и символ $\sum$ обозначает конечную сумму произведений произвольных постоянных на данные векторы.

Совокупность k–векторов считается линейно независимой, если вектор $\overline{z}$ обращается в нуль-вектор лишь при условии, что все эти числа $c_i = 0$

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_k = 0.$$

В противном случае, когда $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0 \dots, c_k \neq 0$ или хотя бы не все они равны нулю и $\overline{z} = \overline{0}$, то совокупность k векторов называется линейно зависимой.

Условие линейной зависимости векторов имеет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} c_\alpha \overline{x}_\alpha = \overline{0}.$$

Размерность n- мерного пространства A_n определяется количеством его линейно независимых векторов. Размерность обозначается как $\dim A_n = r$, где $r \le n$. Размерность линейного векторного пространства является основной и единственной его характеристикой.

Теорема 1. Для того чтобы векторы системы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них являлся линейной комбинацией остальных векторов системы.

Необходимость. Действительно, пусть векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}$ в A_n линейно зависимы, то есть справедливо выражение

$$c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + \dots + c_n\overline{x}_n + c_{n+1}\overline{x}_{n+1} = \overline{0},$$

и пусть для определенности $c_{n+1} \neq 0$, тогда получим

$\overline{x}_{n+1} = -\dfrac{c_1}{c_{n+1}}\overline{x}_1 - \dfrac{c_2}{c_{n+1}}\overline{x}_2 - \dots - \dfrac{c_n}{c_{n+1}}\overline{x}_n \neq \overline{0}$, а это значит, что вектор $\overline{x}_{n+1}$ является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Достаточность. Пусть один вектор из $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}$ является линейной комбинацией остальных векторов системы. Для определенности пусть это будет вектор $\overline{x}_{n+1}$, то есть справедливо выражение

$$c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + ... + c_n\overline{x}_n = \overline{x}_{n+1} \neq \overline{0}.$$

Откуда следует

$$c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + ... + c_n\overline{x}_n - \overline{x}_{n+1} = \overline{0},$$

так как из чисел $c_1, c_2, ..., c_3$ хотя бы одно отлично от нуля, то равенство устанавливает линейную зависимость векторов системы.

Следствия.

1. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
2. Если система векторов содержит нулевой вектор, то система линейно зависима.

Например, всякие два вектора на прямой линии пропорциональны, то есть линейно зависимы. На плоскости можно найти два линейно независимых вектора, а уже три вектора являются линейно зависимыми. В пространстве можно найти три линейно независимых вектора, а всякие четыре уже будут линейно зависимы.

Итак, линейное пространство A_n называется n–мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов уже являются линейно зависимыми. Отсюда следует важное утверждение, что любой вектор может быть разложен по системе линейно независимых векторов

$$\overline{x}_{n+1} = a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + ... + a_n\overline{x}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{x}_i.$$

Введем определение ***базиса*** линейного векторного пространства A_n.

Совокупность линейно независимых векторов

$$\overline{\mathrm{I}}_n = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$$

этого пространства называется базисом, если для каждого вектора $\overline{x}$ этого A_n пространства существуют действительные числа $x_1, x_2, ..., x_n$, для которых выполняется равенство

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + ... + x_n\overline{e}_n.$$

Данное выражение называется разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ с компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$, которые определяются в этом базисе однозначно.

Действительно, пусть имеется другое разложение по этому базису $\overline{x} = x'_1\overline{e}_1 + x'_2\overline{e}_2 + ... + x'_n\overline{e}_n$. Образуем разность этих разложений.

$$\overline{0} = (\overline{x} - \overline{x}) = (x_1 - x'_1)\overline{e}_1 + (x_2 - x'_2)\overline{e}_2 + ... + (x_n - x'_n)\overline{e}_n,$$

так как $\overline{e}_i \neq \overline{0}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ и они линейно независимы, то получается, что $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2, ..., x'_n = x_n$.

Базис вводится для того, чтобы перейти от алгебры векторов к алгебре компонент в выбранном базисе векторов, т.е. для упрощения вычислений.

Должны выполняться следующие равенства

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1)\overline{e}_1 + (x_2 + y_2)\overline{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\overline{e}_n,$$
$$\lambda\overline{x} = \lambda x_1\overline{e}_1 + \lambda x_2\overline{e}_2 + \ldots + \lambda x_n\overline{e}_n.$$

Очевидно, что удобнее работать с векторами, представленными в одном выбранном базисе, чем с векторами в разных базисах. Заметим, что базисом n – мерного векторного пространства A_n могут быть любые n линейно независимых векторов этого пространства.

Изоморфизм векторных пространств. Подпространства векторного пространства. Поскольку единственной характеристикой векторного пространства L_n является его размерность, то два любых таких пространства одинаковой размерности должны быть алгебраически тождественны – изоморфны. Другими словами, одинаково устроенными. Два произвольных линейных векторных пространства A_n и B_n называются изоморфными в том случае, когда между векторами этих пространств существует взаимно однозначное соответствие такое, что если $\overline{x} \in A_n$, $\overline{y} \in A_n$ и $\overline{x}' \in B_n$, $\overline{y}' \in B_n$, то вектору $\overline{x} + \overline{y} \in A_n$ соответствует вектор $\overline{x}' + \overline{y}' \in B_n$, а вектору $\lambda\overline{x} \in A_n$ соответствует вектор $\lambda\overline{x}' \in B_n$. Таким образом, если пространства A_n и B_n изоморфны, то максимальное число линейно независимых векторов в каждом из этих пространств одинаково $n = m = r$ или $\dim A_n = \dim B_n = r$.

Пространства разной размерности не могут быть изоморфны.

Если в линейном векторном пространстве A_n определена совокупность векторов B_m $(n > m)$, для которых операции сложения и умножения на действительное число не выводят их из этой совокупности $\overline{x} \in A_n$, $\overline{y} \in A_n$, но $\overline{x} \in B_m$, $\overline{y} \in B_m$ и $\overline{x} + \overline{y} \in B_m$, $\lambda\overline{x} \in B_m$ и, кроме того, $\overline{x} + \overline{y} \in A_n$ и $\lambda\overline{x} \in A_n$, то говорят, что задано подпространство B_m векторного пространства A_n $(m \le n)$.

Подпространством B_m линейного пространства A_n называют любое не пустое множество векторов этого пространства, в котором корректны операции сложения и умножения на число, введенные в пространстве A_n, но не выводящие их из подпространства B_m. Так как $n > m$ $(\dim A_n > \dim B_m)$, то говорят, что подпространство B_m включено в A_n и обозначается как $B_m \subset A_n$. Здесь знак $\subset$ – знак включения. Если обозначено $B_m \subseteq A_n$, то говорят, что пространство A_n включает в себя подпространство B_m вплоть до совпадения.

Если L_1 и L_2 два подпространства линейного векторного пространства L, то совокупность всех векторов L, принадлежащих одновременно как L_1 $(\overline{x} \in L_1)$, так и L_2 $(\overline{x} \in L_2)$, образуют подпространство называемое пересечением подпространств L_1 и L_2.

Суммой двух подпространств L_1 и L_2 называют совокупность всех векторов $\overline{x} + \overline{y}$ $(\overline{x} \in L_1, \overline{y} \in L_2)$, образующих другое подпространство пространства L.

Пусть размерность пересечения пространств l, а размерность L_1 равна $k + l$ и L_2 равна $m + l$ соответственно, то размерность суммы подпространств L_1 и L_2 равно $k + m + l$. Векторы, входящие в пересечение подпространств L_1 и L_2, учитываются только один раз.

Поясним это на примере трехмерного пространства L_3. Пусть L_1 – подпространство векторов $\overline{x} = \{x, y, 0\}$ параллельных плоскости XOY, $\dim L_1 = 2$, L_2 – подпространство векторов $\overline{x} = \{x, 0, z\}$ параллельных плоскости XOZ, $\dim L_2 = 2$. Тогда пересечением L_1 и L_2 будет совокупность векторов параллельных оси OX $\overline{x} = \{x, 0, 0\}$ с размерностью равной единице. Тогда как суммой подпространств L_1 и L_2 будет совокупность векторов $\overline{x} = \{x, y, z\}$ с размерностью $n = 3$.

ЛЕКЦИЯ 2: «Матрицы»

Отображение векторных пространств.
Матрицы. Алгебра матриц и их свойства.

Отображение векторных пространств. Матрицы. Покажем, что линейное отображение (назовем его оператором) одного векторного пространства на другое в фиксированных базисах задается матрицей. Определим ее свойства и алгебру. Пусть L_n и L_m два линейных векторных пространства размерностей n и m соответственно. Если посредством некоторого правила каждому вектору $\overline{x} \in L_n$ ставится в соответствия вектор $\overline{y} \in L'_m$, то говорят, что задано отображение из L_n в L'_m. Обозначают отображение как

$$\overline{x} = A\overline{y},$$

где A – линейный оператор отображения. Для него должно выполняться требование линейности, что в принципе является его определением,

$$A\left(c_1\overline{y}_1 + c_2\overline{y}_2\right) = c_1 A\overline{y}_1 + c_2 A\overline{y}_2 .$$

Таким образом, если на эти отображения непосредственно переносятся свойства сложения и умножения на действительное число, характерное для векторного пространства, то их называют линейными отображениями. Кроме того, должно выполняться следующее отображение: $A\overline{0} = \overline{0}'$, где $\overline{0} \in L_n, \overline{0}' \in L'_m$.

Определим свойства отображений. Отображение $\hat{A}: L_n \to L'_m$ называют сюръективным, если каждый вектор $\overline{x} \in L_n$ является отображением некоторого вектора $\overline{y} \in L'_m$, и инъективным, если разные векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in L_n$ имеют разные отображения $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in L'_n$. Отображения одновременно сюръективные и инъективные называют биективными. Биективные отображения устанавливают взаимно однозначное соответствие между двумя векторными пространствами.

Два линейных пространства L_n и L'_n называются изоморфными, если существует линейное биективное отображение $A: L_n \to L'_n$.

Пусть совокупность $\overline{e}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ является базисом в A_n, а совокупность векторов $\overline{f}_j \left(j = \overline{1,m}\right)$ является базисом в B_m, то есть выполняется

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i, \quad \overline{y} = \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{f}_j.$$

Тогда операция отображения запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i = \sum_{j=1}^{m} y_j A\overline{f}_j.$$

Разложим вектор $A\overline{f}_j$ по базису $\overline{e}_i$ и получим $A\overline{f}_j = \sum_{1}^{n} a_{ij}\overline{e}_j$.

Поменяв местами конечные суммы, получим соотношение

$$\sum_{1}^{n} x_i \overline{e}_i = \sum_{1}^{n} \overline{e}_i \sum_{1}^{m} a_{ij} y_j .$$

Рассматривая это соотношение как уравнение относительно базисных векторов $\overline{e}_i$, получим связь компонент векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ между собой

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j .$$

Числа a_{ij} называются компонентами или элементами матрицы *A*, которую можно записать в виде таблицы

$$A = \{ a_{ij} \} \equiv \left\| a_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \equiv (n \times m).$$

Как правило, матрица записывается в круглых скобках, квадратных или двойных. Мы будем пользоваться в основном круглыми скобками. Принято, что первый индекс является номером строки, а второй индекс является номером столбца.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, записанная в определенном порядке и состоящая из n строк и m столбцов. Числа n и m называются порядками матрицы. Если $n = m$, то матрица называется квадратной, а n ее порядком. Главная диагональ квадратной матрицы имеет элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ..., a_{nn}$. Сумму элементов квадратной матрицы, стоящих на главной ее диагонали, называют следом матрицы и обозначают как

$$Tr\, A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn} .$$

Вспомогательная или побочная диагональ состоит из элементов $a_{n1}, a_{n-12}, a_{n-23}, ... a_{1n}$.

Нулевая матрица состоит только из компонент равных нулю. Квадратная ***единичная матрица*** представляет собой диагональную матрицу, где по главной диагонали располагаются единицы, а остальные компоненты равны нулю. Единичная матрица обозначается как E

$$E = \left(\delta_{ik} \right),$$

где символ Кронекера $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$.

Например, для $n = 3$ единичная матрица выглядит как $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца, называется ***вектором–столбцом*** или просто вектором $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$.

Договоримся, что в дальнейшем изложении под вектором будем понимать именно вектор–столбец!

Базисные векторы также можно представить в виде столбца векторов.

$$\overline{\mathrm{I}}_n = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ . \\ . \\ \overline{e}_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная квадратная матрица определяется как матрица, у которой компоненты, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Например, для квадратной матрицы порядка $n = 2$ диагональная матрица имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Если $d_1 = d_2$, то матрица называется ***скалярной.***

Транспонированная матрица отличается тем, что строки меняются местами со столбцами, соответственно, $A^T = \{a_{ij}\}^T = \{a_{ji}\}$.

Например, для матрицы размерности $n = m = 2$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

при этом должны выполняться свойства: $\left(A^T\right)^T = A$,

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Кроме того, очевидно, что выполняется условие $Tr\ A^T = Tr\ A$.

Квадратная симметрическая матрица определяется как $A = A^T$ и имеет одинаковые компоненты симметрично главной диагонали и может быть образована следующим образом:

$S = \dfrac{1}{2}\left(A + A^T\right)$. Для нее выполняется соотношение: $S^T = S$.

Кососимметрическая квадратная матрица определяется как $A=-A^T$, и хотя они имеют одинаковые компоненты относительно главной диагонали, но отличаются знаками

$K=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$. Для нее выполняется: $K^T=-K$.

Прямоугольная матрица, состоящая из одной строки, называется ***вектором–строкой*** и получается из вектора столбца его транспонированием

$$(\overline{x})^T=\{x_1,x_2,x_3,..,x_n\}.$$

Матрица называется ***не отрицательной***, если все ее элементы $a_{ik}\ge 0$, где, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$.

Матрица называется ***положительной***, если $a_{ik}>0$.

Матрица называется ***блочной (клеточной),*** если ее можно представить в виде блоков. Например, матрица $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ является блочной, если элементы A,B,C и D сами являются матрицами $A=(k\times n)$, $B=(p\times m)$, $C=(n\times l)$, $D=(t\times m)$. Размерность матрицы M определяется как $k+n$ строк и $l+m$ столбцов.

Нормой матрицы*,* как правило*,* называется квадратный корень из суммы квадратов всех ее элементов. Например, для квадратной матрицы размерности $n=2$ $\|A\|=\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{21}^2+a_{22}^2}$. Отметим, что норма матрицы может определяться и по-другому. Нам будет удобнее работать именно с этой нормой, являющейся обобщением геометрического расстояния в пространстве двух и трех измерений. Как частный случай норма вектора строки или вектора столбца будет выражаться:

$$\|(x_1,x_2,...x_n)\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}.$$

Квадратная матрица называется ***верхней треугольной*** (***нижней треугольной***), если равны нулю все элементы матрицы, расположенной под главной диагональю (над главной диагональю). Приведем пример верхней треугольной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Алгебра матриц и их свойства.

1. Две матрицы считаются равными, если их порядки равны и все их компоненты совпадают

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} a_{ik} = b_{ik} \\ n = m, \quad p = l \end{cases} \quad \left(i = \overline{1,n}; k = \overline{1,l}\right).$$

2. Складываются матрицы только одного порядка, причем складываются соответствующие компоненты:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \Rightarrow C = A + B.$$

Свойства операции сложения: $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Если матрица умножается на число, то каждый элемент матрицы умножается на это число:

$$c_{\alpha\beta} = \lambda a_{\alpha\beta} \Rightarrow C = \lambda A.$$

Пример. $3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Определим правило умножения матриц. Пусть вектор $\overline{x}$ отображается на вектор $\overline{y}$ $\left(B\overline{x} = \overline{y}\right)$, а вектор $\overline{y}$ в свою очередь отображается на вектор $\overline{z}$ $\left(A\overline{y} = \overline{z}\right)$, то вектор $\overline{x}$ отображается на вектор $\overline{z}$ как $\overline{z} = A\overline{y} = AB\overline{x} = C\overline{x}$ $(A \cdot B = C)$. Компоненты матрицы C определяются следующим образом:

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta},$$

где по повторяющему индексу идет суммирование.

Видно, что элементы столбца матрицы B умножаются на элементы строки матрицы A и их произведения складываются. Необходимо, чтобы число строк умножаемой матрицы равнялось числу столбцов матрицы, которая умножается. Количество столбцов матрицы B определяет количество столбцов матрицы C, а количество ее строк определяет количество строк матрицы A. Можно сформулировать правило умножения: элемент $c_{\alpha\beta}$, стоящий на пересечении α строки и β столбца матрицы $C = A\,B$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов α строки матрицы A и β столбца матрицы B.

Пример, для квадратных матриц с размерностью $n = 2$ выполняется

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим конкретный пример. Перемножим матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

И еще один пример $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$.

Видим, что порядки произведения матриц определяются следующим образом:

$$(n \times k) \cdot (k \times m) = (n \times m).$$

Видим также, что нельзя перемножать такие матрицы, как, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Перемножим вектор-столбец с вектором-строкой.

Решение. Рассмотрим вектор $\overline{x} = (3 \times 1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и вектор $\overline{y} = (3 \times 1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Тогда по правилу перемножения матриц следует, что

$\overline{x}^T \cdot \overline{y} = \overline{y}^T \cdot \overline{x} = (1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ является просто числом.

Разложение вектора по базисным векторам можно представить в следующем виде

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i = \overline{x}^T \cdot \overline{\mathrm{I}} = (x_1, x_2, ..., x_n) \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \cdot \\ \overline{e}_n \end{pmatrix} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + ... + x_n \overline{e}_n.$$

Здесь x_i – компоненты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{\mathrm{I}}$.

Свойства произведения матриц:

$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$ (сочетательное или «ассоциативное»),

$A \cdot (B + C) = AB + AC$ (распределительное или «дистрибутивное»),

$AB \neq BA$ (перестановочное или «коммутативное» свойство не выполняется)!

Последнее свойство показывает, что произведение матрицы не обладает перестановочным свойством. Поэтому порядок следования матриц при перемножении следует строго соблюдать.

Заметим, что блочные матрицы умножаются таким же способом. Однако надо следить, чтобы в перемножаемых блоках количество строк и столбцов соответствовало правилам перемножения матриц.

Пример 1. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Видно, что $AB \neq BA$. Коммутируют, то есть переставляются при умножении, только некоторые матрицы, например, единичная матрица, $A \cdot E = E \cdot A$.

Нормальной матрицей называется матрица, которая коммутирует со своей транспонированной матрицей, то есть выполняется равенство

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T.$$

Пример 2. Умножить квадратную матрицу второго порядка на вектор столбец $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$.

Таким образом наглядно видно, как система, например, двух алгебраических уравнений может быть сведена к матричному уравнению

$$A\overline{x} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

способы решения которого будут рассмотрены в дальнейшем.

Пример 3. Найти матрицу зеркального отражения декартовых координат относительно прямой $y = x$.

Решение. Матрица поворота на угол 45° определяется (смотрите «Введение»)

$$\overline{x'} = U\ \overline{x}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos 45^{\circ} & -\sin 45^{\circ} \\ \sin 45^{\circ} & \cos 45^{\circ} \end{pmatrix} \circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица зеркального отражения определяется из системы преобразованных координат

$$\begin{cases} x'' = x' + 0y' \\ y'' = 0x' - y' \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица будет иметь вид $\overline{x''} = B\ U\ \overline{x} = C\overline{x}$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Возвести матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ в степень 100.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

и так далее.

Видим закономерность $A^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$, которую можно доказать методом математической индукции. Покажем это, перемножив матрицы $A^{n-1} \cdot A = A^n$.

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n} & 2^{n}-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если выполняется $A^2 = E$, то матрицу называют ***инволютивной.*** Если $A^2 = A$, то матрицу называют ***идемпотентной.*** Отметим также, что существует достаточно много специальных матриц. Например, ***переставляющие строки*** матрицу. Как пример приведем переставляющую матрицу $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, которая при умножении на другую квадратную матрицу справа переставляет в ней вторую и третью строки.

Пример 5. Получить вид симметрической матрицы на примере матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Транспонированная матрица имеет вид $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$. Видно, что эта матрица действительно симметрична относительно главной диагонали. Получить самостоятельно из данной матрицы кососимметрическую матрицу.

Рассмотрим преобразование координат при смене базиса в n–мерном векторном пространстве.

Пусть вектор $\overline{x} = \overline{e}_1 x_1 + \overline{e}_2 x_2 + \ldots + \overline{e}_n x_n$ представлен в базисе линейно независимых векторов $\overline{e}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Выберем другой базис $\overline{x} = \overline{e}_1' x_1 + \overline{e}_2' x_2' + \ldots + \overline{e}_n' x_n'$, где $\overline{e}_i'$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – компоненты вектора в этом базисе. Любой базисный вектор $\overline{e}_i'$, как и любой вектор, может быть разложен по базису $\overline{e}_i$. Получим систему

$$\begin{cases} \overline{e}_1' = V_{11}\overline{e}_1 + V_{12}\overline{e}_2 + \ldots + V_{1n}\overline{e}_n \\ \overline{e}_2' = V_{21}\overline{e}_1 + V_{22}\overline{e}_2 + \ldots + V_{2n}\overline{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}_n' = V_{n1}\overline{e}_1 + V_{n2}\overline{e}_2 + \ldots + V_{nn}\overline{e}_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \overline{\mathrm{I}}' = V\overline{\mathrm{I}}.$$

Таким образом, переход от базиса $\overline{e}_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ к базису $\overline{e}_i'$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ определяет ***преобразующую*** матрицу V, где

$$V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как вектор $\overline{x}$ один и тот же $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{e}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{e}_i' x_i'$, то, подставив разложение векторов $\overline{e}_i'$, получим систему преобразований координат при смене базиса

$$\begin{cases} x_1=V_{11}x_1'+V_{12}x_2'+\ldots+V_{1n}x_n' \\ x_2=V_{21}x_1'+V_{22}x_2'+\ldots+V_{2n}x_n' \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=V_{n1}x_1'+V_{n2}x_2'+\ldots+V_{nn}x_n' \end{cases},$$

которую можно записать в операторной форме как $\overline{x}=V\ \overline{x}'$ или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{n1} & V_{n2} & \dots & V_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Если имеются два последовательных преобразования базиса B_1 и B_2 сначала от координат x_i к координатам x_i' ($\overline{x}=V_1\overline{x}'$), а затем от x_i' к x_i'' ($\overline{x}'=V_2\overline{x}''$), очевидно, что можно перейти от координат x_i'' к координатам x_i с помощью преобразования $\overline{x}=V_1V_2\overline{x}''$.

Пример. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} x_1'=2x_1+3x_2+4x_3 \\ x_2'=x_1+x_2+5x_3 \\ x_3'=3x_1-2x_2+x_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1''=x_1'+2x_2'+2x_3' \\ x_2''=-3x_2'+x_3' \\ x_3''=2x_1'+3x_3' \end{cases}.$$

Найти линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через x_1'', x_2'', x_3''.

Решение. Здесь $\overline{x}'=V_1\overline{x}$ и $\overline{x}''=V_2\overline{x}_1=V_2V_1\overline{x}$, где $V_1=\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{Bmatrix}$ и

$$V_2=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{Bmatrix},\quad V=V_2\cdot V_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 1 & 16 \\ 0 & -5 & -14 \\ 13 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\overline{x}''=V\,\overline{x}$ задается преобразованием координат

$$\begin{cases} x_1'' = 10x_1 + x_2 + 16x_3 \\ x_2'' = -5x_2 - 14x_3 \\ x_3'' = 13x_1 + 11x_3 \end{cases}.$$

В заключении этой лекции введем понятие ***прямой суммы*** квадратных матриц A и B порядков n и m соответственно, которое определяет квадратную блочную матрицу C порядка $n+m$

$$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = A \oplus B,$$

где $O-$ прямоугольные нулевые матрицы размерности $(m \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно и $\oplus-$ знак прямой суммы.

Определим также ***прямое произведение*** матриц (декартовое умножение) произвольного порядка, например, двух квадратных матриц второго порядка следующим образом

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\alpha & A\beta & B\alpha & B\beta \\ A\gamma & A\sigma & B\gamma & B\sigma \\ C\alpha & C\beta & D\alpha & D\beta \\ C\gamma & C\sigma & D\gamma & D\sigma \end{pmatrix}.$$

Здесь $\otimes-$ знак прямого умножения матриц. В частности, прямое перемножение двух трехмерных векторов определится как

$$\overline{a}^T \otimes \overline{b} = (a_x, a_y, a_z) \otimes \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}.$$

Если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ два произвольных непустых множества, то прямым произведением этих множеств называется множество всех упорядоченных пар (x_i, y_j), где $x_i \in \overline{x}$, $y_j \in \overline{y}$. Например, если $\overline{x}^T = (1, 2)$, $\quad \overline{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, то

$$\overline{x}^T \otimes \overline{y} = \begin{pmatrix} (1,4)\,(2,4) \\ (1,5)\,(2,5) \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 3: «Определитель квадратной матрицы»

Определитель. Метод Крамера.
Минор и алгебраическое дополнение.
Теоремы Лапласа. Свойства определителя.

Каждая квадратная матрица, кроме ее порядка, характеризуется еще одним числом, а именно – определителем, который показывает масштаб изменения вектора при отображении его в другое пространство. На примере матрицы второго порядка покажем, как вводится определитель, и дадим способ его подсчета.

Пусть дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \ A\,\bar{x} = \bar{b},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Умножая первое уравнение на a_{22}, а второе на a_{12} и вычитая, получим

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \equiv \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \text{аналогично}\ x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – основной определитель системы

и $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – вспомогательные определители системы, получаемые из основного определителя заменой соответствующего столбца на столбец из свободных членов уравнения. Наглядно видно, как подсчитывается определитель матрицы второго порядка – для этого необходимо от произведения элементов, стоящих на главной диагонали, отнять произведение элементов, стоящих на вспомогательной диагонали:

$$\det A \equiv \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Этот метод можно обобщить на систему n линейных алгебраических уравнений. Получим следующий алгоритм решения.

Метод Крамера. Для решения системы n алгебраических линейных уравнений с n неизвестными необходимо найти ряд определителей $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n$, где Δ основной определитель системы, а остальные вспомогательные, причем номер каждого из них означает, что именно под этим номером столбец основного определителя заменяется столбцом из свободных членов уравнений. Неизвестные определяются по правилу:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, решение систем уравнений сводится к вычислению нескольких определителей.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -7$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{3}{7}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2}{7}$. Проверка дает: $\begin{cases} \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7} \equiv 1 \\ \dfrac{6}{7} - \dfrac{6}{7} \equiv 0 \end{cases}$.

Если порядок матрицы $n = 1$, то эта матрица состоит из одного компонента a_{11} и определителем этой матрицы будет величина этого компонента.

Способы вычисления определителей. Перечислим способы вычисления определителя матрицы с размерностью $n \le 3$.

1. ***Метод звездочки.***

Для $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{13}a_{22} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Схематически это можно изобразить следующим образом:

Видно, что произведения элементов, стоящих на главной диагонали и образующих треугольники вокруг нее, берутся с положительными знаками, а произведения элементов, стоящих на вспомогательной диагонали и вокруг нее, берутся с отрицательными знаками.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot3 + 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot1\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 - 3\cdot2\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 = -9$.

2. ***Метод Саррюса.*** Дописываются элементы двух первых строк снизу или второй и третьей строки сверху определителя третьего порядка. Можно дописывать элементы двух первых столбцов справа или двух последних слева.

Затем элементы на главных диагоналях перемножаются и образуют сумму с положительными знаками, а произведение элементов, стоящих на вспомогательных диагоналях, образуют сумму с отрицательными знаками. Например, для определителя с n=3 добавляем два первых столбца справа и получим

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Отметим, что для вычисления четных по порядку определителей необходимо дописывать элементы ближайших строк или столбцов.

Пример. Вычислить тот же определитель.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} = 1\cdot1\cdot3 + 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot3\cdot2 - 2\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot1 - 3\cdot3\cdot2 = -9.$$

3. ***Метод Маклорена,*** связывающий определитель третьего порядка с пятью определителями второго порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{22}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

4. ***Метод разложения по строке (столбцу).*** Для того чтобы воспользоваться этим методом, необходимо прежде ввести некоторые вспомогательные характеристики матрицы.

Минором любого элемента a_{ij} квадратной матрицы A n–го порядка называется определитель $n-1$ порядка, соответствующий той матрице, которая получается из данной путем вычеркивания i–й строки и j–го столбца

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Для матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ найти минор элемента a_{21}

Ответ: $M_{21}= a_{12}$.

Пример 2. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти миноры элементов $a_{22} = 6$ и $a_{31} = 2$

Решение**.** $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$ и $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -19$.

Главные миноры матрицы определяются как $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\ A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ .. & .. & . & .. \\ .. & .. & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{matrix} \right\}.$$

Базисным минором называется минор отличный от нуля. Очевидно, что у матрицы может быть несколько миноров одного порядка. Строки и столбцы матрицы, которые определяют базисный минор, называются базисными.

*Пример***.** Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ найти минор элемента a_{32}.

Решение**.** $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$

Алгебраическое дополнение*,* или ***адъюнкта****,* какого-либо элемента матрицы отличается от его минора только знаком по правилу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример. Найти алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} для матрицы из предыдущего примера. Ответ: $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

Для подсчета определителей n–го порядка ($n>3$) существуют 3 способа. Приведем их в виде теорем, но доказательства опустим.

Теорема 1 (2). Каков бы ни был номер строки (столбца) $i\ \left(i=\overline{1,n}\right)\ \left(j,\left(j=\overline{1,n}\right)\right)$ квадратной матрицы n–ого порядка, ее определитель вычисляется по формуле (свойство определителя)

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}\ a_{ij}\ A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\ a_{ij}\ A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+j}\ a_{ij}\ M_{ij}\,.$$

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения. Так, для $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\equiv a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}\ \text{и т.д.}$$

Пример. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Вычислим ее определитель сначала разложением по первой строке, а затем по третьему столбцу.

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3+1-12=-8$. Сделаем разложение по третьему столбцу $\Delta=4\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-12-1+5=-8$.

Видно, что это правило основано на рекуррентном соотношении определителя n-го порядка с определителями $n-1$ порядка.

Теорема 3. (Правило звездочки является основным определением $\det A$.) Выражает определитель n–го порядка через произведение его элементов $a_{\alpha_1 1}\cdot a_{\alpha_2 2}\cdot a_{\alpha_3 3}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_n n}$.

$$\det A=\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_n}^{n}(-1)^{\sum N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}\ a_{\alpha_1 1}\cdot a_{\alpha_2 2}\cdot a_{\alpha_3 3}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha_n n}\,,$$

где $N-$ символ общего числа беспорядка, образованного из последовательности 1,2,3,.., n.

При этом членами определителя служат всевозможные произведения по n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. Эти произведения берутся со знаком $(-1)^N$, где N – сумма числа инверсий (беспорядков) в верхнем и нижнем рядах подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов элементов матрицы, входящих в произведение,

$$N = \begin{cases} 1, & \text{при } (2;1),\ (3;1),\ (3;2), \ldots \ \text{– беспорядок} \\ 0, & \text{при } (1;2),\ (0;1),\ (2;2), \ldots \ \text{– порядок} \end{cases}.$$

Продемонстрируем действие правила звездочки для определителя второго порядка, который имеет два члена $2! = 2 \cdot 1 = 2$ ($n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$). Знак плюс стоит перед членом с нулевой инверсией, а минус перед членом с инверсией равной единице.

$$\Delta = (-1)^{0+0}\, a_{11}a_{12} + (-1)^{0+1}\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка состоит из шести слагаемых ($3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$), три из которых по числу инверсий будут положительны, а оставшиеся три отрицательны. Покажем, как подсчитывается знак инверсий.

Например, положительное слагаемое $a_{21}a_{32}a_{13}$ имеет нулевые инверсии по столбцам (вторые цифры индекса). Здесь последовательность 1,2,3 состоит из нулевых инверсий 1,2; 2,3; 1,3 ($(-1)^{0+0+0} = 1$). Инверсия по строчкам состоит из последовательности цифр 2,3,1, состоит из суммы инверсий 2,3; 3,1 ; 2,1 и определяется как $(-1)^{0+1+1} = 1$. Таким образом, знак у данного члена определителя будет положительным. Отрицательный знак у члена $a_{21}a_{12}a_{33}$ определяется суммой инверсий по столбцам (1,2,3) как $(-1)^{0+0+0} = 1$, и по строчкам (2,1,3) как $(-1)^{1+0+0} = -1$. Таким образом, получим $(-1)^{0+0+0+1+0+0} = -1$.

Определитель четвертого порядка будет иметь уже 24 слагаемых (4!=24). Подсчет знака слагаемых ($n!$) в определителе n–го порядка по числу инверсий можно делать следующим образом

$$\begin{gathered} 1, 2, 3, \ldots, n, \\ j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n. \end{gathered}$$

Сосчитаем число цифр во второй строчке, стоящих впереди единицы. Это будет число инверсий с единицей. Затем вычеркнем единицу и определим число цифр, стоящих впереди двойки. Это будет число инверсий с числом 2 и так далее.

Все полученные числа сложим и получим сумму числа инверсий, определяющих знак данного элемента. Видно, что подсчет определителя таким способом принципиально не рационален. Отметим, что вычисление определителя с помощью теоремы 3 достаточно сложно.

Перечислим основные свойства определителя.

1. Свойство равноправности строк и столбцов.

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

$$\det A = \det A^{\mathrm{T}}.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из теорем 1 и 2, где утверждается, что можно раскладывать определитель как по строке, так и по столбцу. Кроме того, это легко проверить на примере определителя второго порядка.

2. Свойство антисимметричности определителя.

При перестановке двух любых строк (столбцов) между собой определитель меняет знак, а абсолютное значение определителя остается тем же самым.

Покажем это на примере определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Свойство линейности определителя.

Если каждый элемент i строки (j столбца) определителя представить в виде двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы определителей. Покажем на примере для $n = 2$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}' & a_{12} + a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left(a_{11} + a_{11}'\right)a_{22} - \left(a_{12} + a_{12}'\right)a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} +$$

$$+ a_{11}'a_{22} - a_{12}'a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Умножение определителя на число $\lambda \neq 0$ равносильно умножению некоторой строки (любой) или столбца (любого) на это число. Видно принципиальное отличие от матрицы, где на это число умножается каждый элемент матрицы.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12}\lambda \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы столбца (строки) определителя равны нулю, то и определитель равен нулю.

Действительно, определитель можно разложить по этому столбцу (строке) и везде будут сомножителями нули (по теореме 3).

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

Действительно, пусть $a_{21} = \lambda\, a_{11}$, $a_{22} = \lambda\, a_{12}$, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число λ, то величина определителя не изменится.

Покажем это, используя свойство линейности и свойство под номером 6,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{22}} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

так как второй определитель в сумме равен нулю.

8. Сумма произведения элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраическое дополнение другой строки (столбца) равно нулю

$$\sum_{i=1, k\neq j}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0.$$

Покажем это на примере определителя третьего порядка. Доказательство базируется на теореме 1 (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Образуем сумму, которая является разложением Δ по первому столбцу

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i3} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

(свойство 6), что и требовалось показать.

9. Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей

$$\det AB = \det A \ \det B .$$

Видно, что определитель обладает мультипликативным свойством. Покажем это на примере матриц второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ A\ B\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \{\text{по свойству линейности}\} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{12} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det A \ \det B .$$

Следует обратить внимание на то, что элементы строк (столбцов) сами являются минорами первого порядка. Если в определителе n–го порядка взять минор k–го порядка $(k < n)$ и вычеркнуть все его строчки и столбцы, то оставшиеся элементы составляют минор $(n-k)$–го порядка, который называется дополнительным минором к минору M. Соответствующее алгебраическое дополнение минора M называют его дополнительным минором, взятым со знаком $(-1)^{S(M)}$, где $S(M)$ сумма номеров строк и столбцов на пересечении которых располагается минор M. Тогда можно обобщить теоремы 1 и 2.

Теорема Лапласа. Если в определителе матрицы A n-го порядка выбраны k-строк $(1 \le k \le n-1)$, то сумма произведений всех миноров k-го порядка, расположенных на данных строках, и их алгебраических дополнений равна определителю матрицы A.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Заметим, что вторая и четвертая строка имеют только один минор второго порядка (остальные равны нулю). Тогда по теореме Лапласа можно довольно легко вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} (-1)^{(2+4)(3+5)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 23 = -69.$$

Здесь $S(M) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) = (2+4) + (3+5) = 14$ есть величина четная.

Пример. Представить произведения двух определителей в виде одного определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. По теореме Лапласа $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & -1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 2 & -2 & 3 \\ a_{51} & a_{52} & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

при произвольных значениях $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{51}$ и a_{52}.

Заметим, что для быстрого подсчета определителя удобно использовать свойство под номером 7. Покажем это на примере. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -30.$$

Здесь сделаны следующие операции: первый столбец складываем со вторым, вычитаем его из третьего столбца и, умножив на коэффициент 2 (в уме), складываем с последним столбцом. Получаем строку, состоящую из одного элемента $a_{11}=1$. Раскладываем по этой строке определитель и переходим к одному определителю уже третьего порядка. Те же процедуры делаем и дальше до определителя 2-го или 1-го порядка.

Сделаем еще одно замечание по поводу быстрого подсчета определителя. Можно просто довести его до треугольного вида и тогда он будет определяться произведением элементов, стоящих на главной диагонали. Рассмотрим предыдущий пример

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = -30.$$

В заключении этой лекции обобщим понятия определителя на блочные квадратные размерности $2n$ матрицы треугольного типа:

$$\det\begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C,$$

где A, B, C и O сами матрицы порядка n. Справедливы также следующие формулы: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix} = (-1)^n \det B \cdot \det C$ и

$$\det A \oplus B = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

ЛЕКЦИЯ 4: «Обратная матрица»

Метод обратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.

Введем понятие обратной матрицы, поскольку с ее помощью можно построить один из простых способов решения систем линейных алгебраических уравнений. Действительно, из операторного уравнения $A\overline{x} = \overline{b}$ следует, что $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$, где A^{-1} – обратная матрица. Остается только перемножить эту матрицу на вектор из правой части.

Пусть A – квадратная матрица n–го порядка, тогда обратная матрица определяется как $AA^{-1} = E$.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу и притом только одну, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля. В этом случае говорят, что матрица ***не вырождена***. Если же $\det A = 0$, то матрица A ***вырождена*** (***особенная*** или ***сингулярная***) и в ней обязательно имеются линейно зависимые строки или столбцы. Обратная матрица определяется как

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & .. & A_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & .. & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .. & A_{n2} \\ .. & .. & .. & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & .. & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Структура этой формулы просматривается из правила Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\sum_j^n b_j (-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta}.$$

С другой стороны, $x_i = \sum_{j=1} (A_{ij})^{-1} b_j$ и из сравнения следует, что

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\Delta} = \frac{A_{ji}}{\Delta}.$$

Отметим, что транспонированная матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}$, называется ***присоединенной***

$$B = \{A_{ij}\}^T = \{A_{ji}\}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица имеется только у квадратной невырожденной матрицы.

Покажем справедливость определения A^{-1} для обратной квадратной матрицы размерности $n = 2$, умножив A^{-1} на саму матрицу.

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{22} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix}.$$

По свойству определителей

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=\det A$, $\quad a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}=\det A$, $\quad a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}=0$ и $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=0$ (восьмое свойство определителя).

Таким образом, получим $AA^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A & 0\\ 0 & \det A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$, что и требовалось показать.

Сделаем несколько замечаний и введем несколько новых определений.

1. Имеет место следующее свойство $(AB)^{-1}=\ B^{-1}\,A^{-1}$, которое легко доказывается умножением слева сначала на B и затем на A.

$$B\,(AB)^{-1}\,=\,B\;B^{-1}\;A^{-1}\,=\,A^{-1},\,(AB)\,(AB)^{-1}\,=\,A^{-1}\;A\,=\,E\,.$$

Можно обобщить на произведение нескольких матриц, например, трех $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

2. Операции транспонирования и получения обратной матрицы перестановочны: $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$ (доказать самостоятельно).

3. $A^{-1}\,A\,=\,A\,A^{-1}\,=\,E$ (доказать самостоятельно).

4. Квадратная матрица называется ***ортогональной,*** если выполняется

$$A^T A=E\text{, то есть выполняется }\ A^T=\,A^{-1}\,.$$

Для нее выполняются следующие соотношения – сумма квадратов элементов тов любого столбца должна быть равна единице, а сумма произведения соответствующих элементов разных столбцов должно быть равна нулю.

Примером ортогональной матрицы может быть матрица преобразования вектора из одного базиса в другой – *V,* так, для двухмерного вектора она имеет вид

$$V=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad V^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ +\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$VV^T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ +\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. Матрица называется ***унитарной***, если выполняется условие $A^*=A^{-1}$, где A^* есть матрица комплексно сопряженная и транспонированная матрица. Для действительных матриц условие унитарности имеет вид $A^T=A^{-1}$, что совпадает с определением ортогональности матрицы.

6. Если определитель ортогональной матрицы равен 1, то эта матрица называется собственной и несобственной, если ее определитель равен –1.

7. Выполняется условие $\det\,A^{-1}\ =\ \frac{1}{\det A}$ для ортогональной матрицы. Получить самостоятельно.

8. Определитель присоединенной матрицы равен единице, $\det B = \Delta^{n-1}$, где B – присоединенная матрица размерности n (доказать самостоятельно).
9. Напомним, что ***нормальной матрицей*** называется такая матрица, которая коммутирует со своей транспонированной матрицей, то есть выполняется равенство $A^T \cdot A = A \cdot A^T$.
10. Квадратная матрица A называется ***подобной*** матрице B, если существует невырожденная матрица V $(\det V \neq 0)$, такая что выполняется $VA = BV$ или $A = V^{-1}BV$. Примером такой матрицы может быть матрица преобразования вектора из одного базиса в другой одного линейного пространства.

Свойство подобия матриц используют для преобразования их к диагональному виду, который называют ***каноническим.***

Представление матрицы в виде произведения нескольких специальных матриц называют разложением матрицы, например, LV, QR, сингулярным, полярным, скелетным и другими разложениями матриц.

Преобразования подобия позволяет переводить векторы из одного базиса в другой

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{e}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{e}'_i x'_i, \text{ где } x_i = V_{ij} x'_j \text{ и } x'_i = V_{ij}^{-1} x_j \ (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}).$$

Тогда решение систем алгебраических уравнений можно существенно упростить. Действительно, имеем последовательность действий

$$A\overline{x} = \overline{b} \Rightarrow VA\overline{x} = V\overline{b} \Rightarrow VV^{-1}DV\overline{x} = V\overline{b} \Rightarrow D\overline{x}' = V\overline{b} \Rightarrow D\overline{x}' = \overline{b}',$$

где D – диагональная матрица. Последнее выражение содержит в себе ответ.

Алгебра подобных матриц следующая:

$$V^{-1}(A_1 + A_2)V = V^{-1}A_1V + V^{-1}A_2V,$$

$$V^{-1}A_1A_2V = V^{-1}A_1V \cdot V^{-1}A_2V.$$

Отметим, что нормальные матрицы всегда приводятся к диагональному виду.

Примеры.

1. Найти обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = 2 \neq 0$, матрица не вырождена и, следовательно, имеет обратную матрицу.

$$A_{11} = 2,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = 3. \text{ Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = -1$, матрица не вырождена. $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = -41,\ A_{23} = 29,$

$A_{31} = -1,\ A_{32} = 34,\ A_{33} = -24$. Получим $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$.

Проверка дает $A\ A^{-1} = E$.

3. Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x + y = 2 \end{cases}.$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -11$,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{11}.$$

Тогда $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\ \bar{b} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}\frac{1}{-11}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 5/11 \\ y = 2/11 \end{cases}$

Проверка: $AA^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = E$.

4. Решить систему алгебраических уравнений $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$.

Решение. $\det A = 4$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. ***Рангом*** матрицы A (в общем случае прямоугольной) называется наибольшее натуральное число $r = Rg\ A$, для которого существует не равный нулю определитель порядка r матрицы A. Очевидно, что $r \le n, m$. Дадим и другое определение. ***Рангом*** матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Например, поскольку в квадратной матрице *n* порядка возможны строчки или столбцы пропорциональные друг другу (линейно зависимы), то определитель такой матрицы (свойство определителя номер 6) равен нулю. Необходимо вычеркнуть такую строку или столбец и у новой матрицы вычислить все определители n–1 порядка. Если хотя бы один из них отличен от нуля, то все строчки и столбцы линейно независимы и порядок этого определителя будет рангом данной матрицы. Таким образом, можно дать еще одно определение ранга. ***Ранг*** матрицы A равен максимальному числу ее независимых строк и столбцов.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 24 \end{pmatrix}$. Видно, что $\det A = 0$, так как первая строчка пропорциональна третьей. Значит $r < 3$. Поскольку $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ имеет $\det A_1 \neq 0$, то следует $r = 2$.

Перечислим элементарные преобразования матриц, не меняющие ранга матриц.

1. Умножение строки или столбца на действительное число $\lambda \neq 0$.
2. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число $\lambda \neq 0$.
3. Перестановка строк (столбцов) между собой.
4. Отбрасывание строки (столбца), состоящей из нулей.

В результате таких преобразований матрица меняет вид, определители этих матриц разные, но, однако, у таких матриц остается одно и то же число независимых строк и столбцов – r и такие матрицы называются ***эквивалентными*** ($\propto$, $\sim$, $\Leftrightarrow$ – знаки эквивалентности).

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_{....} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Элементарным преобразованиям легко дать интерпретацию на примере систем линейных алгебраических уравнений. Так, умножение строки на число $\lambda \neq 0$ тождественно умножению уравнения на это число, при этом число независимых уравнений не меняется, и решение остается прежним.

Перестановка строк и столбцов матрицы – это просто перестановка уравнений в системе или перестановка неизвестных и опять, очевидно, решение системы то же самое. Далее, прибавление к одному уравнению другого, умноженного на какое-либо число, также не изменяет количество независимых уравнений.

И последнее, отбрасывание строки (столбца), состоящего из нулей, это не что иное, как удаление зависимого уравнения из системы. Например,

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 0 - 0 = 0 \end{cases}.$$

Системы алгебраических уравнений называются ***равносильными*** (эквивалентными), если они имеют одно и то же решение.

Еще раз подчеркнем, что после элементарных преобразований матрицы эквивалентны, но не равны. Очевидно, что и определители у этих матриц разные. Главное – сохраняется ранг, то есть число независимых строк (столбцов).

Перечислим свойства ранга матрицы.

1. $Rg\ A \le \min\{m;n\}$, т. е. не превосходит наименьшей размерности матрицы.

2. $|RgA - RgB| \le Rg(A+B) \le RgA + RgB$.

3. $Rg(A \cdot B) \le \min\{RgA; RgB\}$ – ранг произведения матриц не превосходит ранга любого из сомножителей.

Как частный случай, $RgAB = RgA$, если A и B квадратные матрицы одного порядка, но $\det B \ne 0$.

Перейдем к правилам вычисления ранга матриц. Вычислить ранг матрицы можно двумя способами.

С помощью элементарных преобразований можно довести матрицу до диагональной формы, тогда количество единиц на главной диагонали дает непосредственно ранг матрицы.

Примеры.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -20 & -52 \\ 3 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -52 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \propto$$

$$\propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\, A = 2.$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 8 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $Rg\, A = 3$.

3. Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 19 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -5 & -1 & -14 & 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \propto$$

$$\propto\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&-4&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\propto\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\propto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\ \textit{Ответ}:\ Rg\,A=4.$$

Другим методом определения ранга является метод окаймляющего минора. По определению рангом матрицы называется наивысший порядок ненулевых миноров этой матрицы. Минор наивысшего порядка отличный от нуля, называется ***базисным.*** Матрица может иметь их несколько.

Если не все элементы матрицы равны нулю (миноры первого порядка M_1 и есть элементы матрицы), то ранг матрицы $r \geq 1$. Далее любой элемент матрицы не равный нулю ($M_1 \neq 0$) окаймляется строкой и столбцом, в результате чего получаем набор миноров второго порядка M_2. Если все миноры второго порядка равны нулю, то ранг матрицы равен $r = 1$. Если хотя бы один из них отличен от нуля, то ранг матрицы $r \geq 2$.

Далее опять окаймляется минор второго порядка не равный нулю строкой и столбцом. В результате опять получается набор миноров третьего порядка M_3. Если все $M_3 = 0$, то ранг матрицы однозначно равен $r = 2$. Если хотя бы один из миноров $M_3 \neq 0$, то $r \geq 3$. Не равный нулю минор третьего порядка опять окаймляется, и анализируются миноры четвертого порядка и так далее.

При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если найдется минор порядка отличный от нуля, то необходимо вычислить миноры $k+1$ порядка, окаймляющие данный минор. Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен $r = k$.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&5&4\\3&1&3&1\\2&4&10&8\\4&3&8&5\end{pmatrix}$.

Решение**.** Удобно начинать вычисления с главных миноров $M_1 = D_1 = 1 \neq 0$, что означает, что $Rg\,A \geq 1$. Далее $M_2 = D_2 = \begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix} = -5 \neq 0$, поэтому $Rg\,A \geq 2$.

Составляем окаймляющие миноры $M_3' = \begin{vmatrix}1&2&5\\3&1&3\\2&4&10\end{vmatrix} = 0$, $M_3'' = \begin{vmatrix}1&2&5\\3&1&3\\4&3&8\end{vmatrix} = 0$

и $M_3''' = \begin{vmatrix}1&2&4\\3&1&1\\4&3&5\end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что $Rg\,A = 2$.

ЛЕКЦИЯ 5: «Собственные значения и векторы матриц»

Характеристический многочлен. Собственные значения и собственные векторы матрицы. Собственные векторы подобных матриц.

Ранее было показано, что матрица A отображает вектор $\overline{x}$ одного векторного пространства на вектор $\overline{y}$ другого векторного пространства $\left(\overline{x} \subset A_n, \overline{y} \subset B_m\right)$. Если же отображение осуществляется на то же векторное пространство для любого $\overline{x} \neq \overline{0}$ и выполняется

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x},$$

то матрица A осуществляет переход от одного базиса векторного пространства $\left(\overline{x} \subset A_n\right)$ к другому базису этого же пространства. Число λ называется ***собственным значением матрицы*** *A*, а вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий данному уравнению, называют ***собственным вектором*** этой матрицы. Каждому собственному значению λ матрицы соответствует собственный вектор $\overline{x}$, то есть собственное направление.

Матрица

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

называется ***характеристической матрицей.*** Ее определителем является многочлен степени n относительно переменной λ

$$P_n(\lambda) = \left|A - \lambda E\right| = (-1)^n\left(\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} - \ldots \pm c_n\right),$$

который называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A. Коэффициенты c_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ можно по теореме Виета выразить через корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, определяемые из уравнения

$$P_n(\lambda) = 0,$$

следующим образом

$$\begin{cases} c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \\ c_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + ..\lambda_{n-1}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n \end{cases}.$$

Видно, что $c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = Tr\,A$ является следом матрицы A. Последнее выражение $c_n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \det A$ есть определитель матрицы A, так как $P_n(0) = \det A = |A|$.

Покажем, что характеристические многочлены подобных матриц равны друг другу. Пусть матрицы A и B подобны, то есть $A = V^{-1}BV$ $\left(\det V \neq 0\right)$.

Тогда $|A-\lambda E| = |V^{-1}BV-\lambda E| = |V^{-1}BV-\lambda V^{-1}V| = |V^{-1}|\ |(B-\lambda E)|\ |V| = |B-\lambda E|$, так как $\det V^{-1} = \dfrac{1}{\det V}$. Значит у подобных матриц определители и следы одинаковы.

Отметим, что транспонированная матрица A^T имеет одинаковые с матрицей A характеристические многочлены и характеристические числа.

Отметим также, что для характеристического многочлена выполнится теорема Гамильтона–Кэли – всякая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Покажем это на примере.

Пример. Дана $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Показать, что матрица A удовлетворяет своему характеристическому многочлену.

Решение**.** Составим характеристический многочлен $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2-6\lambda+5=0$ или $(\lambda-1)(\lambda-5)=0$. Вместо λ подставляем *A*, тогда

$$A^2-6A+5E=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось показать.

Если характеристический многочлен имеет кратные корни, то приходится вводить понятие ***минимального характеристического многочлена***, у которого все корни различны, то есть необходимо отбросить все кратности.

Например, если $P_n(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda+1)$, то минимальный характеристический многочлен определяется как $P_{n\min}(\lambda)=(\lambda-5)\ (\lambda+1)$.

Рассмотрим метод получения собственных чисел и векторов матрицы A.

Теорема. Для того чтобы числа λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ были собственными значениями матрицы A, необходимо и достаточно, чтобы эти числа были корнями характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot \lambda^k = 0. \qquad (*)$$

Действительно, из уравнения $A\overline{x}=\lambda\overline{x}$ образуем систему однородных линейных алгебраических уравнений, записанную в операторной форме

$$(A-\lambda E)\overline{x}=\overline{0}, \qquad (*)$$

которая имеет не нулевое решение $(\overline{x} \neq \overline{0})$, когда ее определитель равен нулю ($\det(A-\lambda E)=0$). Это непосредственно следует из правила Крамера для систем без правой части ($b_1=0, b_2=0,...,b_n=0$). Когда основной определитель не равен нулю, то решение может быть только тривиальным (нулевым, $\overline{x}=\overline{0}$), так как все вспомогательные определители равны нулю. Если же основной определитель равен нулю (его строки линейно зависимы), то получаем бесконечное множество ненулевых решений, поскольку уравнения линейно зависимы и хотя бы одно из них следует отбросить. Получаем систему, в которой количество неизвестных больше числа уравнений системы. Решение (*) определяют все собственные значения $-\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$. ***Спектром матрицы*** A называют множество всех собственных значений $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

Перечислим свойства собственных векторов матрицы A.

1. Для того чтобы матрица была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные векторы $\overline{e}_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ были собственными векторами матрицы

$$A\overline{e}_i=\lambda\overline{e}_i \Leftrightarrow D\overline{e}_i=\lambda_i\overline{e}_i .$$

Покажем это. Пусть действительные векторы $\overline{e}_i$ являются собственными векторами матрицы A, то есть выполняется

$$A\overline{e}_i=\lambda_k\overline{e}_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\overline{e}_i=\lambda_k\overline{e}_i .$$

Очевидно, что в равенстве при одних и тех же векторах справа и слева от знака равенства коэффициенты должны быть равны. Отсюда получаем

$$a_{ik}=\delta_{ik}\cdot\lambda_i, \text{ где } \delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases} \text{ – символ Кронекера.}$$

Таким образом, матрица A является диагональной

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{pmatrix}\equiv D, \text{ что и требовалось показать.}$$

2. Если собственные значения матрицы A различны $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i\neq j)$, то соответствующие собственные векторы линейно независимы. Покажем это на примере матрицы второго порядка. Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$ и предположим, что собственные векторы линейно зависимы (противоположное утверждение) $c_1\overline{x}_1+c_2\overline{x}_2=\overline{0}$. Тогда

$$A(c_1\overline{x}_1+c_2\overline{x}_2)=c_1A\overline{x}_1+c_2A\overline{x}_2=c_1\lambda_1\overline{x}_1+c_2\lambda_2\overline{x}_2=\overline{0}.$$

Получим систему векторных уравнений

$$\begin{cases}c_1\overline{x}_1+c_2\overline{x}_2=\overline{0}\\ c_1\lambda_1\overline{x}_1+c_2\lambda_2\overline{x}_2=\overline{0}\end{cases}.$$

Исключая, например, вектор $\overline{x}_1$, получаем $c_2\overline{x}_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \overline{0}$ и, так как $\overline{x}_2 \neq \overline{0}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то следует, что $c_2 = 0$. То есть предположение о линейной зависимости векторов не выполняется. Таким образом, собственные векторы при различных значениях собственных чисел линейно независимы и определяют разные направления в пространстве.

Пример. Найти собственные векторы и значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A\overline{x} = \lambda\overline{x} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$, решения которого есть $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$. Заметим, что порядок следования корней определяется порядком возрастания их значений $(\lambda_2 > \lambda_1)$. Находим собственные векторы A. Для $\lambda_1 = -2$, получаем $A\overline{x} = -2\overline{x}$ или

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4y_1 = -2x_1 \\ 5x_1 + 2y_1 = -2y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4y_1 = 0 \\ 5x_1 + 4y_1 = 0 \end{cases}.$$

Так как $\det(A - \lambda E) = 0$, то имеем бесконечное множество решений. Выбираем одно как более удобное: $x_1 = 4$, $y_1 = -5$. Собственному значению $\lambda = -2$ соответствует собственный вектор $\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda = 7$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_2 + 4y_2 = 0 \\ 5x_2 - 5y_2 = 0 \end{cases}$.

Собственному значению $\lambda = 7$ соответствует собственный вектор $\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти собственные значения и векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -11 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ следует, что

$$\begin{vmatrix} -(11+\lambda) & -2 & 12 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получим $\lambda^3 - 9\lambda^2 - \lambda + 9 = 0$ или $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0$.

Спектр матрицы: $\lambda_1 = -11$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 9$. Найдем собственные векторы матрицы.

Для значения $\lambda_1 = -11$, $\begin{pmatrix} -11 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -11\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} -11x - 2y + 12z = -11x \\ 4y + 3z = -y \\ 5y + 6z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + 12z = 0 \\ 5y + 3z = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Следует, что $z = 0$ и $y = 0$, а $x = k$ – произвольное число. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -11$, имеет вид

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для значения $\lambda = 1$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 12z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases}.$$

Видно, что $y = -z$, и, полагая $y = 1$, получаем $z = -1$ и $x = -7$. Следовательно, для значения $\lambda = 1$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для значения $\lambda = 9$,

$$\begin{pmatrix} -11 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10x - 2y + 12z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{cases}.$$

Полагая $z = 5$, получим $y = 3$ и $x = \frac{54}{10} = 5{,}4$. Третий собственный вектор матрицы определится тогда как

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда матрица имеет кратные собственные значения. Покажем, что от величины ранга характеристической матрицы $A - \lambda E$ зависит, будут ли у кратных собственных значений независимые собственные векторы или их не будет. Для выяснения этого вопроса введем следующие определения.

Геометрическая кратность матрицы A по λ_i определяется как $l_i = n - r_i$, где r_i – ранг матрицы $A - \lambda_i E$. Геометрическая кратность определяет максимальное количество линейно независимых собственных векторов соответствующих λ_i.

Алгебраическая кратность λ определяется кратностью k, с которой λ входит корнем в характеристический многочлен $|A-\lambda E|$.

Квадратная матрица A называется ***простой,*** если для каждого ее собственного значения его геометрическая кратность равна алгебраической кратности. В этом случае возможно определение собственных векторов для всех λ_i, даже кратных, а матрица A приводится к диагональному виду. Если алгебраическая кратность больше геометрической кратности, то матрица называется ***дефектной*** и ее нельзя привести к диагональному виду, а собственные векторы соответствуют только различным λ_i без учета их кратности (λ определяются минимальным характеристическим многочленом).

Покажем это на конкретных примерах.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 7 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix}5-\lambda & 9 & 7\\ 0 & 3-\lambda & -2\\ 0 & 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(5-\lambda)(\lambda-1)^2=0\cdot$

Характеристические числа $\lambda_1=1$ кратности $k_1=2$ и $\lambda_2=5$ кратности $k_2=1$.

Для $\lambda=1$ получим систему $\begin{cases}4x_1+9y_1+7z_1=0\\ 2y_1-2z_1=0\\ 2y_1-2z_1=0\end{cases}\cdot$

Геометрическая кратность $l_1=n-r_1=3-2=1$. Видно, что $k_1>l_1$, поэтому собственному значению $\lambda_1=1$ кратности 2 соответствует только один собственный вектор. Полагаем $y=z=1$ и получаем $x=4$. Вектор определится как

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Для значений $\lambda_2=5$ получим систему $\begin{cases}9y_2+7z_2=0\\ -2y_2-2z_2=0\\ 2y_2-6z_2=0\end{cases}$, откуда следует

$y=0$ и $z=0$, а x_2 – произвольно, $x_2=m$. Получаем второй вектор матрицы A

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем, что трем собственным значениям данной матрицы соответствуют только два независимых собственных вектора.

Пример 2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ - & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda-1) = 0 \cdot$

Собственные числа данной матрицы $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности $k_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ кратности $k_2 = 2$.

Для значения $\lambda_1 = 1$ получим систему $\begin{cases} -2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 4y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 3y_1 \qquad = 0 \end{cases}.$

Ранг данной системы равен $r_1 = 2$. Полагаем $x_1 = y_1 = 1$, получим $z_1 = 1$.

Таким образом, значению $\lambda_1 = 1$ соответствует вектор $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для значения $\lambda_2 = 2$ получим систему $\begin{cases} -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \\ -3x_2 + 3y_2 - z_2 = 0 \end{cases}.$

Ранг данной системы $r_2 = 1$. Поэтому геометрическая кратность $l_2 = n - r_2 = 3 - 1 = 2$. Видно, что $k_2 = l_2$, поэтому собственным числам $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 2$ соответствуют два линейно независимых собственных вектора. Получим их из уравнения $z_2 = -3x_2 + 3y_2$.

Полагаем $x_2 = 0$ и $y_2 = 1$, получим первый вектор $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Полагаем $x_2 = 1$ и $y_2 = 0$, получим второй вектор $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Таким образом, трем собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 2$ соответствуют три линейно независимых собственных вектора.

Рассмотрим, каким образом формируется матрица преобразований V, которая диагонализирует матрицу A. Пусть имеется невырожденная квадратная матрица A, для которой выполняется $V^{-1}AV = D$, где D есть диагональная матрица. Тогда, исходя из уравнения $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$, умножая его слева на V^{-1}, получим

$$V^{-1}A\overline{x} = \lambda V^{-1}\overline{x} \Rightarrow V^{-1}AVV^{-1}\overline{x} = \lambda V^{-1}\overline{x} \Rightarrow DV^{-1}\overline{x} = \lambda V^{-1}\overline{x} \Rightarrow D\overline{e} = \lambda\overline{e}.$$

По первому свойству собственных векторов для диагональной матрицы векторы $V^{-1}\overline{x}$ являются базисными $V^{-1}\overline{x} = \overline{e}$ и $\overline{x} = V\overline{e}$, где

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда на примере, для матрицы размерности $n = 2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{11} = x_1 \\ V_{21} = y_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{12} = x_2 \\ V_{22} = y_2 \end{cases}.$$

Таким образом, матрица, которая диагонализирует данную матрицу A, состоит из столбцов собственных векторов матрицы A

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Видно, что когда геометрическая кратность меньше алгебраической кратности и число собственных векторов меньше числа собственных значений матрицы A, то нельзя составить квадратную матрицу преобразования V, переводящую матрицу A в диагональную. Если матрица A является простой, то существует базис, состоящий из собственных векторов этой матрицы, и в этом базисе эта матрица имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix},$$

которая получается из D обратным преобразованием

$$D = V^{-1}AV\ .$$

Представление матрицы A в виде произведения трех таких специальных матриц называется, как уже упоминалось, каноническим

$$A = V\,DV^{-1}.$$

Такое разложение часто используется в вычислительной практике. Отметим, что нормальные матрицы всегда приводятся к диагональному виду.

Рассмотрим на примере, как происходит возведение в степень матриц.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Найти A^{100}.

Решение. A^m представим в канонической форме

$$A^m=(V^{-1}\Lambda V)^m=(V^{-1}\Lambda V)(V^{-1}\Lambda V)...(V^{-1}\Lambda V)=V^{-1}\Lambda^m V=V^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & . & 0\\ 0 & \lambda_2^m. & . & .\\ . & . & . & .\\ 0 & . & . & \lambda_n^m\end{pmatrix}V(*)$$

Для данного примера $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$.

Получим спектр $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$.

Для $\lambda_1=1$, $\begin{cases}x_1+2y_1=x_1\\ -------\end{cases}\Rightarrow\quad y_1=0,\ x_1=k$ – любое, положим $k=1$.

Для $\lambda_2=3$, $\begin{cases}x_2+2y_2=3x_2\\ -------\end{cases}\Rightarrow\quad x_2=y_2=1$. Получим

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \text{и}\quad V=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad V^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Lambda=V^{-1}AV\ =\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

Возведение в степень дает следующий результат:

$$A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^{100} & 0\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3^{100}-1\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}.$$

Формула (*) выполняется и при $m=\dfrac{1}{k}$, где k – целое. Необходимо только, чтобы матрица A была неотрицательной. Тогда выполняется

$$\sqrt[k]{A}=V\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & 0 & .. & 0\\ 0 & \sqrt[k]{\lambda_2} & .. & 0\\ .. & .. & .. & ..\\ 0 & 0 & .. & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}V^{-1}.$$

Арифметическим корнем k степени неотрицательной матрицы (все $\lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}$) называется матрица B такая, что $B^k=A$. Для вычисления $\sqrt[k]{A}$ следует построить каноническое разложение $A=V\Lambda V^{-1}$ и вычислить

$$\sqrt[k]{A} = V\ \sqrt[k]{D}V^{-1}.$$

Пример. Найти $\sqrt{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 10 \\ 15 & 22-\lambda \end{vmatrix} = 0$; $\lambda^2 - 29\lambda + 4 = 0$; $\lambda_1 = 0{,}14$, $\lambda_2 = 28{,}85$.

Для значения $\lambda_1 = 0{,}14$, получим систему

$$\begin{cases} 7x_1 + 10y_1 = 0{,}14x_1 \\ \text{———————} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6{,}86x_1 + 10y_1 = 0 \\ \text{———————} \end{cases}.$$

Полагая $y_1 = 0{,}686$, получим $x_1 = -1$. Тогда $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}686 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 28{,}85$, получим $\begin{cases} 7x_2 + 10y_2 = 28{,}85x_2 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -21{,}86x_2 + 10y_2 = 0 \\ \end{cases}$.

Полагая $x_2 = 1$, получим значение $y_2 = 2{,}18$ и $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}18 \end{pmatrix}$. Тогда

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix} \text{ и } V^{-1} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$VV^{-1} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -2{,}87 & 0 \\ 0 & -2{,}87 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим корень из данной матрицы:

$$\sqrt{A} = V\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}V^{-1} = \frac{1}{-2{,}87}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}68 & 2{,}18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}37 & 0 \\ 0 & 5{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}18 & -1 \\ -0{,}68 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Такая задача может быть решена непосредственно впрямую, поскольку число уравнений, используемых при ее решении, ограничено и равно четырем.

Матрица $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ положительно определенная. Нужно найти матрицу, которая при умножении самой на себя дает $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

Итак, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, где a,b,c,d целые положительные числа.

$$\begin{cases} a^2+bc=7 \\ (a+d)b=10 \\ c(a+d)=15 \\ bc+d^2=22 \end{cases} \Rightarrow \qquad \frac{c}{b}=\frac{3}{2}, \qquad d^2-a^2=22-7=15, \qquad c(a+d)=15,$$

$(d-a)(d+a)=15=5\cdot 3$.

Отсюда $d=4,\ a=1,\ c=3,\ b=2$. Ответ: $\sqrt{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример. Найти $\sqrt{A}$, где $A=\begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 41 & 32 \\ 16 & 32 & 41 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A не отрицательна. Характеристическое уравнение дает алгебраический многочлен $\lambda^3-99\lambda^2+1539\lambda-6561=0$, имеющий следующие корни $\lambda_1=81$, $\lambda_2=\lambda_3=9$. Тогда $D=\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Для значения $\sqrt{\lambda_1}=9$ получим $\overline{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Для $\sqrt{\lambda_2}=3$ получим $\overline{x}_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и для $\sqrt{\lambda_3}=3$ получим $\overline{x}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда видим, что

$$V=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$A=V^{-1}DV=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 41 & 32 \\ 16 & 32 & 41 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\sqrt{A}=V\ \sqrt{D}V^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}11&4&4\\4&17&8\\4&8&17\end{pmatrix}.$$

Если известно каноническое разложение матрицы, то может быть предложен еще один способ решения систем линейных алгебраических уравнений. Действительно, пусть дана система $A\overline{x}=\overline{b}$. Переходим к системе $VAV^{-1}V\overline{x}=V\overline{b}$. Так как $VAV^{-1}=D$, то $DV\overline{x}=V\overline{b}$. Обозначив $\overline{b}'=V\overline{b}$ и $\overline{z}=V\overline{x}$, получим систему в виде $D\overline{z}=\overline{b}'$, которая легко решается. Затем возвращаемся к вектору $\overline{x}=V^{-1}\overline{z}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases}3x+4y=3\\5x+2y=-2\end{cases}$.

Решение. Собственные значения и собственные векторы данной матрицы были уже получены в этом параграфе: $\lambda_1=-2$ и $\overline{x}_1=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$; $\lambda_2=7$ и $\overline{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Тогда $V=\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}$ и $V^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}$. Далее приводим матрицу A к диагональному виду

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&2\\35&28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-18&0\\0&63\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}=D.$$

Начальное уравнение запишется так:

$$\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}\overline{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\begin{pmatrix}1&-1\\5&4\end{pmatrix}\overline{x}=\overline{y}$, тогда $\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}\overline{y}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$.

Решение последнего уравнения дает $y_1=-\frac{5}{18}$ и $y_2=\frac{1}{9}$.

Окончательно: $\overline{x}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&1\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}-18\\27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{cases}x=-1\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$.

Видно, что такой метод является достаточно громоздким в вычислениях, поэтому применяется редко.

ЛЕКЦИЯ 6: «Решение систем линейных алгебраических уравнений»

Исследование систем. Теорема Кронекера – Капелли о совместности системы. Метод Гаусса. Фундаментальная система решений. Приближенные методы решения.

Исследование систем. Одним из важных и непосредственных приложений теории матриц является решение систем линейных алгебраических уравнений. Собственно рационализация решения систем и привела к понятию матрицы.

Как известно из практики, системы могут вообще не иметь решения, иметь единственное решение или иметь бесконечное множество решений. Давайте свяжем эти случаи с количеством уравнений в системе $-m$, с количеством независимых уравнений – r, определяемых рангом этой системы, и наконец с количеством неизвестных в системе $-n$.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow A\overline{x} = \overline{b}.$$

Здесь a_{ij} – заданные числа $\left(A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$, $x_i\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ – искомые числа, определяющие вектор–столбец неизвестных $\overline{x}^T = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$, и $b_j\ \left(j = \overline{1,m}\right)$ – свободные члены системы, определяющие вектор-столбец $\overline{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right)^T$.

Решением системы называют такую совокупность чисел $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \ldots\ldots x_n = \alpha_n$, которые при подстановке в систему вместо неизвестных обращают все уравнения в тождества.

Системы называются ***равносильными*** или ***эквивалентными***, если они имеют одинаковые решения. Систему уравнений называют ***совместной*** (решаемой), если существует хотя бы одно ее решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Например, система $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ несовместна, так как из нее непосредственно следует 1 = 3, что бессмысленно. Графически это означает, что на плоскости *XOY* заданы две параллельные прямые, которые нигде не пересекаются. Данная система не имеет решения.

Совместную систему линейных алгебраических уравнений называют ***определенной***, если она имеет единственное решение и неопределенной, если уже существуют по крайней мере два различных решения.

Очевидно, что решать имеет смысл только совместную систему алгебраических уравнений. Поэтому прежде чем приступить к решению, необходимо провести исследование системы на совместность и определенность. Установим необходимое и достаточное условие совместности системы.

Начнем с исследования однородной системы, когда все числа $b_1, b_2, ..., b_m$ равны нулю

$$A\overline{x} = \overline{0}.$$

Эта система всегда совместна, так как обладает нулевым (тривиальным) решением $\overline{x} = \overline{0}$.

Различают два случая решения.

1. Если $m = n$ и $\det A \neq 0$, то система имеет только нулевое решение $\overline{x} = \overline{0}$. Например, система $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ имеет $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, $RgA = 2$. По правилу Крамера определим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

получим решение

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0.$$

Ответ: $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Если $m = n$ и $\det A = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений. Например, система $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$ имеет $\det A = 0$, $RgA = 1$. Ее решением является любая точка на прямой $y = 3x$, где $x = c$ есть произвольное число. Ответ: $\overline{x} = \begin{pmatrix} c \\ 3c \end{pmatrix}$. Это решение включает в себя тривиальное решение $\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, как частный случай, когда $c = 0$.

Если $\det A = 0$ и ранг системы RgA меньше числа неизвестных $r < n$, то система также имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 4x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$.

Решение. Здесь $\det A = 0$, так как, умножая первую строку на 2 и складывая ее со второй, получим третью строку. Значит, третье уравнение можно отбросить, так как оно линейно зависимо. Переходим к новой равносильной системе $\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$, где базисный минор $M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, поэтому ранг этой системы $RgA' = RgM = 2 = m$ и $n = 3$. Разрешая систему относительно переменных x и y, получим $\begin{cases} x-2y=-5z \\ 2x-3y=-z \end{cases}$, которую решаем по формуле Крамера.

Ответ: $\bar{x}=\begin{pmatrix} 13z \\ 9z \\ z \end{pmatrix}$.

Следовательно, множество решений имеет вид $\begin{cases} x=13c \\ y=9c \\ z=c \end{cases}$, где c – произвольное число.

Теорема Кронекера–Капелли о совместности системы. Вернемся к рассмотрению задачи о совместности неоднородной системы, когда $b_i \neq 0$ или не все $b_i=0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Итак, имеем $A\bar{x}=\bar{b}$.

Составим расширенную матрицу, включающую еще один столбец

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Здесь вертикальная черта символически обозначает умножение на столбец неизвестных и знак равенства.

Теорема Кронекера–Капелли. Для того, чтобы линейная система алгебраических уравнений являлась совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу ее основной матрицы $RgA_1=RgA$. Если же $RgA_1>RgA$, то система несовместна и не имеет решений.

Отметим, что если ранг совместной матрицы равен числу переменных $(r=n=m)$, то система имеет единственное решение. Если ранг системы меньше числа переменных $(r<n)$, то система неопределенна и имеет бесконечное множество решений.

Покажем необходимость первого утверждения. Пусть $RgA=r=m$ и имеет m независимых уравнений. Пусть система совместна и имеет решение $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \dots, x_n=\alpha_n$, которые при подстановке в систему, превращают все уравнения в тождества $\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n \equiv b_1 \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n \equiv b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\dots+a_{mn}\alpha_n \equiv b_m \end{cases}$.

Видно, что последний столбец в расширенной матрице A является линейной композицией остальных столбцов и его можно превратить в нулевой с помощью элементарных преобразований. Таким образом, добавление столбца из нулей не изменит ранг основной матрицы, поэтому $RgA_1=RgA$.

Покажем достаточность этого утверждения. Пусть $RgA_1 = RgA$, тогда базисный минор матрицы A является базисным и для A_1. Значит, последний столбец не базисный и является линейной композицией всех остальных столбцов матрицы A, то есть

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .. \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ .. \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

а это означает, что числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ являются решением системы. Значит, система совместна.

Приведем поясняющий пример, построенный на очевидном утверждении. Пусть имеем заранее несовместную систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases}$. Она несовместна, так как $3 \neq 2$. Ранг основной матрицы $RgA = 1$, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Ранг расширенной матрицы $\left(M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \right)$ $RgA_1 = 2$. Видно, что несовместная система действительно имеет разные ранги RgA=1 и RgA_1=2.

Можно сформулировать правило решения систем алгебраических уравнений следующим образом:

— исследовать систему на совместность, определив RgA и RgA_1,

— если система совместна ($RgA_1 = RgA$), то надо выбрать метод решения и приступить к решению. Если система не совместна, то решать ее не имеет смысла.

Отметим, что существует три точных метода решения, а именно – метод Крамера, метод обратной матрицы и метод Гаусса. Кроме этого, существует большое число приближенных методов решения, таких как метод регуляризации, метод итераций, метод Зейделя, метод наименьших квадратов, метод псевдообратной матрицы и так далее.

Метод Гаусса. Познакомимся с методом Гаусса (метод последовательных исключений), который позволяет исследовать систему на совместность, одновременно решая ее. Этот метод значительно целесообразней методов Крамера и обратной матрицы, связанных с громоздкими вычислениями определителей и алгебраических дополнений.

Метод Гаусса состоит в приведении расширенной матрицы к диагональному виду или доведения ее до треугольной формы. С помощью элементарных преобразований, а именно, складывая и вычитая строки, умноженные на требуемые числа, приводим матрицу к диагональному виду. Проще говоря, доведя основную матрицу до единичной, умножение на которую столбца неизвестных непосредственно дает ответ. Так, для квадратной основной матрицы $m = n = r$ получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & .. & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & .. & 0 & b'_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & b'_n \end{array}\right),$$

где ответ просто считывается $\begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = b'_n \end{cases}$.

Видно, что переходим к матрице, состоящей из базисных векторов, и где эта матрица диагональна, в частности равна единичной

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ . \\ . \\ b'_n \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Решение. Расширенную матрицу $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$ $\times 2$ $-$ $-$

доведем до треугольной формы $A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$, где $x_3 = \frac{1}{2}$ из третьей строчки и $x_2 = 1$ из второй строчки. Подставляя полученные значения в первую строчку $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, определяем, что $x_1 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0{,}5 \end{cases}$.

Более последователен и прост метод приведения к диагональному виду, когда сразу получаем решение по строчкам. Покажем это на примере.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ответ считывается $\begin{cases} x_1 = -0{,}5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0{,}5 \end{cases}$. Проверка: $\begin{cases} -\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=1 \\ -1+1+1=1 \\ -\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=2 \end{cases}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$.

Решение. $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 2 - \\ \times 3 - \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 4 \\ \times 7 + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \times 2 - \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$.

Здесь символ $\times 2-$ обозначает умножение всей строки на 2 и вычитание ее из второй строки. В результате этого получаем 0 во второй строке и во втором столбце. Последовательно «зануляем» элементы в первой, второй и других строках. Удобно оперировать строчками, где есть элемент равный 1. Если его нет, например в столбце $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ - \end{array}$, то единица легко выделяется последовательным вычитанием строк до появления столбца $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что диагонализация производится с помощью элементарных преобразований строк и только строк (в этом случае структура уравнений системы сохраняется) и тем самым принципиально отличается от процедуры определения ранга, когда можно оперировать как строчками, так и столбцами.

Пример. Решить однородную систему $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+2y-5z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$.

Решение. $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 2 \\ \times 3 - \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 0 \end{array}\right) \sim$

$$\sim\begin{pmatrix}0 & -5 & 13 & 0\\ 1 & 2 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Видно, что первое и последнее уравнения линейно зависимы (просто равны) и одно из них можно отбросить. Приходим к новой равносильной системе $\begin{cases}2x-y=-3z\\ x+2y=5z\end{cases}$. Положим $z=k$ – произвольному числу.

Тогда новая расширенная матрица

$$A_1=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -1 & -3k\\ 1 & 2 & 5k\end{array}\right) \times 2 - \sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & -5 & -13k\\ 1 & 2 & 5k\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \frac{13k}{5}\\ 1 & 2 & 5k\end{array}\right) \times 2 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & \frac{13k}{5}\\ 1 & 0 & -\frac{k}{5}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{k}{5}\\ 0 & 1 & \frac{13k}{5}\end{array}\right)$$

Ответ: $\begin{cases}x=-\frac{k}{5}\\ y=\frac{13k}{5}\\ z=k\end{cases}$ система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\ 2x_1+4x_2+6x_3=3\\ 3x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$.

Решение.

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ \hline 2 & 4 & 6 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & -5 & -10 & -11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\det A=0$. Итак $RgA=2$, а ранг расширенной матрицы $RgA_1=3$. Система несовместна и не имеет решения.

Пример. Решить систему $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=6\\ x_1-5x_2+x_3=12\\ x_1+2x_2=-3\\ 2x_1+x_2+3x_3=3\end{cases}$.

Решение. $A_1=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 1 & 6\\ 1 & -5 & 1 & 12\\ 1 & 2 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 3 & 3\end{array}\right) \times 2 - \sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -7 & 1 & 15\\ 0 & -7 & 1 & 15\\ 1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 9\end{array}\right)\sim$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Видно, что два первых уравнения в системе одинаковы и одно можно отбросить.

Новая расширенная матрица $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 1 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$

$\times 7$ $+$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$. Проверка: $\begin{cases} 3+2+1=6 \\ 1+10+1=12 \\ 1-4=-3 \\ 2-2+3=3 \end{cases}$.

Рассмотрим случай, когда число неизвестных в системе больше ранга данной системы, то есть система не определена, но совместна $(RgA = RgA_1)$. Тогда в основной матрице системы A выбираем базисный минор порядка $r = RgA$ не равный нулю. Переменные, определяемые столбцами базисного минора, называются ***базисными,*** а остальные — ***свободными***. Необходимо переписать систему в базисных переменных, а свободные перенести в правые части уравнений. Таким образом, задавая произвольные значения свободных переменных, получаем бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$.

Решение.

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 22 & -18 & -24 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Видно, что $RgA_1 = RgA = 2$. Система совместна. Последнее уравнение можно отбросить. Так как количество неизвестных $n = 3$ больше ранга системы, то будет иметь место бесчисленное множество решений. В качестве базисного минора можно выбрать $M = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$. При таком выборе минора базисными переменными являются x_2 и x_3, а свободными x_1 и x_4.

Новая равносильная система имеет вид $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 7 - x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2 - 2x_1 + x_4 \end{cases}$.

Положим $x_1 = c_1$ и $x_4 = c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа. Тогда

$$A_1=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 4 & 5 & 2-2c_1+c_2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 0 & 11 & -12+9c_2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 7-c_1-4c_2\\ 0 & 1 & \dfrac{-12+9c_2}{11}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \dfrac{41-11c_1-17c_2}{22}\\ 0 & 1 & \dfrac{-12+9c_2}{11}\end{array}\right).$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=c_1\\ x_2=\dfrac{41-11c_1-17c_2}{22}\\ x_3=\dfrac{-12+9c_2}{11}\\ x_4=c_2\end{cases}.$

В заключение отметим, что методом Гаусса можно довольно просто и быстро вычислять обратные матрицы. Исходя из матричного уравнения $AA^{-1}=E$, где матрицу A^{-1} будем рассматривать как неизвестную, составим расширенную матрицу (A/E), которая после диагонализации с помощью элементарных преобразований строк будет задавать в правой части после черты матрицу B, т.е. (E/B). Но так как имеем соотношение $EA^{-1}=A^{-1}$ или (E/A^{-1}), то $B=A^{-1}$. Алгоритм решения запишем как

$$(A/E)\Rightarrow(E/A^{-1}).$$

Пример. Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. $(A/E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 4 & -2 & 3\end{array}\right)\sim$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Пример. Найти A^{-1} методом Гаусса, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & 5 & 6\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. $A_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 13 & 7 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 6 & 7 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -3\\ 0 & 6 & 7 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & -1 & 7 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & 0 & 7 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{18}{7}\\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{13}{49} & \frac{18}{49}\\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{13}{49} & \frac{18}{49}\\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{2}{49} & \frac{1}{49}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{2}{49} & \frac{1}{49}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{13}{49} & \frac{18}{49}\end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}14 & -2 & 1\\ 0 & -7 & 21\\ 7 & 13 & 18\end{pmatrix}$. Проверка дает $AA^{-1}=E$.

***Пример*.** Установить, пересекаются ли прямые линии $2x-3y=6$, $3x+y=9$ и $x+4y=3$ в одной точке. Найти эту точку.

Решение. Система характеризуется $m=3$, $n=2$.

$$A_1=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 6\\ 3 & 1 & 9\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & -11 & 0\\ 0 & -11 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right).$$

$RgA_1=RgA=2$, система совместна. Точка пересечения есть. Решаем эквивалентную систему

$$\begin{cases}3x+y=9\\ x+4y=3\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3 & 1 & 9\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & -11 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{array}\right).$$

***Ответ*:** $\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$.

Получим обратные матрицы блочных квадратных матриц треугольного вида.

Пусть задана блочная матрица $M=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$, где матрицы *A*, *B* и *D* имеют обратные матрицы. Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc}A & B & E & 0\\ 0 & D & 0 & E\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}AD & BD & ED & 0\\ 0 & BD & 0 & BE\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}AD & 0 & D & -B\\ 0 & BD & 0 & B\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & D^{-1}A^{-1}D & -D^{-1}A^{-1}B \\ 0 & E & 0 & D^{-1}B^{-1}B \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & E & 0 & D^{-1} \end{array}\right).$$

Отсюда следует, $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$. Аналогично можно получить (проверить самостоятельно) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

Пример. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$D^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 19 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}.$$

Получим окончательный ответ: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 3{,}1x_2 - 1{,}4x_3 = 1{,}8 \\ 3{,}4x_1 + 5{,}1x_2 + 2x_3 = 3 \\ 0{,}5x_1 - 2{,}2x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}3 \end{cases}$.

Решение. Здесь $n = m = 3 = 3$, $\det A \neq 0$. Первую строчку делим на ведущий элемент $a_{11} = 1{,}2$, вторую на $a_{21} = 3{,}4$ и третью на $a_{13} = 0{,}5$.

Получаем новую систему

$$\begin{cases} x_1 + 2{,}6x_2 - 1{,}2x_3 = 1{,}5 \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}4x_3 = 0{,}9 \\ x_1 - 4{,}4x_2 + 2{,}6x_3 = 4{,}6 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & -0{,}9 & 1{,}8 & -0{,}6 \\ 0 & -7 & -3{,}8 & 3{,}1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0{,}4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & -0{,}3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2{,}6 & -1{,}2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & -2 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 6{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}2 \end{array}\right). \sim$$

Ответ: С точностью до 0,1 получим $\begin{cases} x_1 = 0{,}5 \\ x_2 = 6{,}3 \\ x_3 = -0{,}2 \end{cases}$.

Фундаментальная система решений. Рассмотрим сначала однородную систему с m уравнениями и n неизвестными

$$A\overline{x} = \overline{0},$$

где $A = (m \times n)$. Как показано, такие системы имеют бесчисленное множество решений, когда $RgA < n$. Если найдено два решения данной системы $\overline{x}^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)^T$ и $\overline{x}^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(21)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)^T$, то в силу линейности системы линейная композиция этих решений

$$c_1\overline{x}^{(1)} + c_2\overline{x}^{(2)}$$

тоже является решением данной системы. Пусть базисный минор, отличный от нуля, находится в левом верхнем углу матрицы *A*. Заметим, что это всегда возможно сделать перестановкой переменных величин (столбцов) и перестановкой уравнений (строк). Тогда $x_1, x_2, \ldots x_r$ будут базисными переменными, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ будут свободными переменными. Векторы, состоящие из базисных переменных, изначально линейно независимы. Нашей задачей будет выразить базисные переменные через композицию свободных переменных. Если задавать свободные переменные, а их $n-r$, следующие значения (по аналогии с базисными или 0, или 1)

$$(n-r)\begin{cases} x_{r+1} = 1, & x_{r+2} = 0, & \ldots.., & x_n = 0; \\ x_{r+1} = 0, & x_{r+2} = 1, & \ldots, & x_n = 0; \\ \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots... \\ x_{r+1} = 0, & x_{r+2} = 0, & \ldots.. & x_n = 1; \end{cases},$$

то $n-$мерные векторы тоже будут линейно независимы. Получим $n-r$ независимых столбцов решений

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ . \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ . \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ \overline{x}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ x_2^{(n-r)} \\ , \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ , \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Совокупность таких решений называется ***фундаментальной системой решений,*** а решение $\overline{x} = c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + \ldots + c_{n-r}\overline{x}_{n-r}$, где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ произвольные числа, называется ***общим решением однородной системы***.

Пример. Найти фундаментальные решения и построить общее решение системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение. $RgA = 2$, так как минор $M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Базисные переменные x_2 и x_3, а свободные x_1 и x_4. Составим равносильную систему $\begin{cases} x_2 - x_3 = -2x_1 - x_4 \\ 2x_2 + x_3 = -4x_1 - 3x_4 \end{cases}$.

Решение этой системы имеет вид $\begin{cases} x_2 = -2x_1 + \dfrac{2}{3}x_4 \\ x_3 = \dfrac{5}{3}x_4 \end{cases}$.

Положим $x_1 = 1$ и $x_4 = 0$, получим $\begin{cases} x_2^{(1)} = -2 \\ x_3^{(1)} = 0 \end{cases}$.

Положим $x_1 = 0$ и $x_4 = 1$, получим $\begin{cases} x_2^{(2)} = \dfrac{2}{3} \\ x_3^{(2)} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$.

Фундаментальная система решений данной системы есть совокупность столбцов $\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, а общее решение определяется как

$$\overline{x} = c_1\overline{x}^{(1)} + c_2\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 + \dfrac{2}{3}c_2 \\ \dfrac{5}{3}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Перейдем к рассмотрению неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$.

Здесь, как было показано, бесчисленное множество решений имеет место, когда $RgA < n$. Покажем, что общее решение неоднородной системы m уравнений с n неизвестными при $RgA < n$ состоит из суммы общего решения однородной системы и какого-либо частного решения неоднородной системы.

Действительно, пусть $\overline{x}^{(1)}$, $\overline{x}^{(2)}, ..., \overline{x}^{(r)}$ решение однородной системы $A\overline{x} = \overline{0}$ и общее решение неоднородной системы: $\overline{x}_{общ} = c_1\overline{x}^{(1)} + c_2\overline{x}^{(2)} + ... + c_{n-r}\overline{x}^{(r)}$ и пусть $\overline{x}_1$ – частные решения неоднородной системы $A\overline{x}_1 \equiv \overline{b}$, тогда решение данной неоднородной системы имеет вид $\overline{x} = \overline{x}_{общ} + \overline{x}_1$. Подставим это решение в уравнение $A\overline{x} = \overline{b}$ и получаем $c_1 A\overline{x}^{(1)} + c_2 A\overline{x}^{(2)} + ... + c_r A\overline{x}^{(r)} + A\overline{x}_1 \equiv \overline{b}$, где $A\overline{x}^{(1)} \equiv \overline{0}$, $A\overline{x}^{(2)} \equiv \overline{0}$, …, $A\overline{x}^{(r)} \equiv \overline{0}$. Получим тождество: $A\overline{x}_1 \equiv \overline{b}$. Что и требовалось доказать.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}.$$

Решение. Отметим, что этот пример уже был решен и поэтому будет интересно сравнить результаты решений.

Итак, $A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 7 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. $RgA_1 = RgA = r$.

Перепишем однородную систему в базисных переменных

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -x_1 - 4x_4 \\ 4x_2 + 5x_3 = -2x_1 + x_4 \end{cases}.$$

Зададим $x_1 = 1,\ x_4 = 0$ и получим систему

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим $x_1 = 0,\ x_4 = 1$ и получим систему $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{17}{22} \\ x_3 = \dfrac{9}{11} \end{cases}$ и

$\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22} \\ \dfrac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\overline{x}^{(1)}$ и $\overline{x}^{(2)}$ являются фундаментальными решениями однородной системы. Общее решение однородной системы имеет вид

$$\overline{x}_{общ} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22} \\ \dfrac{9}{11} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим частное решение неоднородной системы, задавая $x_1 = 0,\ x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 4x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{41}{22} \\ -\dfrac{12}{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, общее решение неоднородной системы получим сложением $\overline{x} = \overline{x}_{общ} + \overline{x}_1$.

$$\textit{Ответ:}\ \overline{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -\dfrac{c_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{17}{22}c_2 \\ \dfrac{9}{11}c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{41}{22} \\ -\dfrac{12}{11} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dfrac{41 - 17c_2 - 11c_1}{22} \\ \dfrac{-12 + 9c_2}{11} \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ совпадает с ранее полученным результатом.

Приближенные методы решения. Рассмотрим только некоторые приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. ***Метод итерации*** – это метод последовательных приближений (итерация – повторение). Пусть дана система $A\overline{x} = \overline{b}$ с $\det A \neq 0$. Преобразуем ее так, чтобы диагональные элементы отличались от нуля, $a_{ij} \neq 0\ \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Выразим неизвестные, стоящие по диагонали в левой части системы, следующим образом

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Rightarrow a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ \text{где}\ a_{ii} \neq 0.$$

Получим следующее выражение

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{i \neq j}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j.$$

Обозначим $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$ и $\alpha_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{где}\ i \neq j \\ 0, & \text{где}\ i = j \end{cases}$, получим систему, записанную уже в так называемом нормальном виде

$$\overline{x}(1) = \overline{\beta} + \hat{\alpha}\,\overline{x}(0).$$

Алгоритм расчета следующий: $\overline{x}(k) = \overline{\beta} + \alpha\,\overline{x}(k-1)$, где $\overline{x}(k-1)$ предыдущее решение. В первом приближении, как правило, полагают $\overline{x}(0) = \overline{\beta}$. Далее, последовательно применяя данную формулу, получают решение с любой степенью точности. Видно, что сразу выделяются диагональные элементы, как и в методе Гаусса. Рассмотрим действие метода итераций на примере.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = -17 \end{cases}$.

Решение. Приведем систему к нормальному виду $\overline{x}(1) = \overline{\beta} + \alpha\overline{x}(0)$ или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 = -\frac{17}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{cases}, \text{ где } \beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{17}{4} \end{pmatrix} \text{ и } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом приближении примем $\overline{x}(0) = \overline{\beta}$, тогда $\overline{x}(1) = \overline{\beta} + \alpha\overline{\beta}$,
во втором $\overline{x}(2) = \overline{\beta} + \alpha\,\overline{x}(1)$,

………………..

в k –ом приближении $\overline{x}(k) = \overline{\beta} + \alpha\,\overline{x}(k)$. Проследим вычисления.

Полагаем $\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{17}{4} \end{pmatrix}$, $\overline{x}(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{17}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ -\frac{17}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}06 \\ 2 \\ -4{,}56 \end{pmatrix}$,

$$\overline{x}(2) = \begin{pmatrix} 0{,}89 \\ 1{,}88 \\ -5{,}02 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}(3) = \begin{pmatrix} 1{,}04 \\ 2{,}03 \\ -4{,}94 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}(4) = \begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 1{,}98 \\ -5{,}02 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}(5) = \begin{pmatrix} 1{,}01 \\ 2{,}01 \\ -4{,}99 \end{pmatrix}.$$

Видно, что приближенное решение сходится к следующему решению

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -5 \end{cases}.$$

Достаточный признак сходимости итерационного процесса заключается в следующем: если максимальная сумма модулей коэффициентов при неизвестных правых частях каждого уравнения нормальной системы меньше единицы. Таким образом, если $\max\sum_{j=i}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| < 1,\ \left(j = \overline{1,n}\right)$, то итерационный процесс быстро сходится. Проще говоря, коэффициенты при неизвестных, стоящих по диагонали в левой части начальной системы, должны быть большими. Так, в разобранном примере в первом уравнении данной системы коэффициент при первом неизвестном больше по модулю суммы модулей других коэффициентов, а именно, $4 > 1 + 1$. То же самое можно сказать о втором и третьем уравнениях.

Метод Зейделя представляет модификацию метода итераций и имеет лучшую сходимость, но более громоздок в вычислениях, что несущественно при расчетах на ЭВМ.

Идея метода заключается в том, что при вычислении $\overline{X}_2(k+1)$ уже надо учитывать значение $\overline{X}_1(k+1)$. Схема вычисления (алгоритм) такова: в последующее решение подставляется предыдущее

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k+1)} + \sum\limits_{j=3}^{n} \alpha_{3j} x_j^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_n^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

*Пример****.*** Решить систему $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$.

Решение. Представим систему в нормальном виде $\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{cases}$.

Нулевое приближение выберем как $x_1^{(0)} = 1{,}2,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$.

Заметим, что вариации выбора нулевого решения не сказываются на конечном ответе. Тогда метод Зейделя в первом приближении дает

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0 - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2(1{,}2) - 0{,}1 \cdot 0 = 1{,}06 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2(1{,}2) - 0{,}2(1{,}06) = 0{,}948 \end{cases}.$$

Во втором приближении $\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1(1{,}06) - 0{,}1(0{,}948) = 0{,}9992 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2(0{,}992) - 0{,}1(0{,}948) = 1{,}00536 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2(0{,}992) - 0{,}2(1{,}00536) = 0{,}999098 \end{cases}$.

Точный ответ будет: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ \ x_3 = 1$.

Отметим, что существует достаточно много других приближенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, таких как, например, метод регуляризации, методы, основанные на полярном и сингулярном разложении матриц, и многие другие.

В заключении рассмотрим вопрос об устойчивости решения систем $A\overline{x} = \overline{b}$. Для случая, когда $n = m,\ \Delta \neq 0$, как следует из метода Крамера, решение имеет вид: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1, n}$. Если определитель системы имеет достаточно малые значения, то при небольших возмущениях данной системы, ее решения могут существенно меняться. Под возмущениями понимают небольшие изменения коэффициентов при неизвестных. В этом случае говорят, что система неустойчива.

Пример. $\begin{cases} 1{,}3x_1 + 1{,}6x_2 = 2{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 4{,}1x_2 = 5{,}8 \end{cases}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 4{,}1 \end{vmatrix} = -0{,}27,\ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2{,}1 & 1{,}6 \\ 5{,}8 & 4{,}1 \end{vmatrix} = -0{,}67 \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1{,}3 & 2{,}1 \\ 3{,}5 & 5{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}2.$$

Решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{-0{,}67}{-0{,}27} = 2{,}4 \quad x_2 = \frac{0{,}2}{-0{,}27} = -0{,}7.$$

Составим возмущенную систему, изменяя коэффициент $a_{11} = 1{,}3$ на 10%. Тогда $\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1{,}4 & 1{,}6 \\ 3{,}5 & 4{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}14$, $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 = -0{,}67$ и $\tilde{\Delta}_2 = 0{,}77$.

Ответ: $\tilde{x}_1 = \dfrac{-0{,}67}{0{,}14} = -4{,}9$, $\tilde{x}_2 = \dfrac{0{,}77}{0{,}14} = 5{,}2$.

Видно, что решение изменяется кардинальным образом. Таким образом, прежде чем начать решение данной системы, необходимо убедиться в ее устойчивости.

Говорят, что обратная матрица A^{-1} устойчива, если при малом изменении элементов матрицы A элементы матрицы A^{-1}изменяются соответственно мало. При этом A называют ***хорошо обусловленной матрицей.*** Если же это условие не выполняется, то A^{-1} является неустойчивой, а матрицу A называют плохо обусловленной.

Как правило, неустойчивые решения не имеют смысл и их появление связано с неправильным заданием систем линейных алгебраических уравнений. Надо перепроверить начальную постановку задачи. Для приближенных решений систем с $n \neq m$, как совместных, так и несовместных существует несколько достаточно надежных способов получения устойчивых решений, а именно – метод наименьших квадратов, метод регуляризации и все итерационные методы.

ЛЕКЦИЯ 7: «Метрические пространства. Векторная алгебра в n–мерном евклидовом (R_n) пространстве»

Алгебра векторов в евклидовом пространстве.
Скалярное произведение векторов.
Метод ортогонализации Грама–Шмидта.
Алгебра векторов в трехмерном пространстве.
Свойства проекции векторов.

Евклидово n-мерное пространство. Ортонормированный базис векторного пространства. Так как мы работаем с вещественными векторами, то метрические пространство является евклидовым. Евклидово n-мерное векторное пространство R_n является частным случаем линейного n-мерного векторного пространства L_n и отличается тем, что вводится операция скалярного умножения векторов, когда всякой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ ($\overline{x} \subset R_n, \overline{y} \subset R_n$) ставится в соответствие действительное число – скаляр (x, y).

Напомним, что ***скаляром*** называется величина, характеризующаяся только одним числом. Так, например, двухмерный вектор характеризуется двумя числами, расположенными в определенном порядке, то есть двумя скалярами.

Скалярное произведение векторов обозначается как $(\overline{x}, \overline{y}) \equiv \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x}^T \cdot \overline{y}$ и должно удовлетворять следующим условиям.

1. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$.
2. Для любых действительных чисел α и β выполняется
$$(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \overline{z}) = \alpha(\overline{x}, \overline{z}) + \beta(\overline{y}, \overline{z}).$$
3. $(\overline{x}, \overline{x}) > 0,\ x \neq 0$.

Длиной или ***нормой*** вектора $\overline{x}$, как правило, называют число
$$|\overline{x}| = \sqrt{\overline{x}^T \overline{x}} = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}.$$

Говорят, что вводится **метрика.** Под знаком $\sqrt{\ }$ обозначено неотрицательное значение корня (модуль).

Частным случаем линейного пространства является также нормированное пространство, когда каждому его вектору ставится по какому-либо правилу действительное число, называемое нормой $\|\overline{x}\|$, которое, как правило, совпадает с модулем скалярного произведения. Вектор $\overline{x}$ называется ***нормированным*** или ***единичным***, если $\|\overline{x}\| = 1$.

Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из евклидова пространства выполняется неравенство Коши–Буняковского
$$|(\overline{x}, \overline{y})| \leq |\overline{x}||\overline{y}|.$$

Действительно, для любого действительного числа λ в силу определения скалярного произведения следует
$$(\lambda\overline{x} - \overline{y},\ \lambda\overline{x} - \overline{y}) \geq 0 \text{ и } \lambda^2(\overline{x}, \overline{x}) - 2\lambda(\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{y}, \overline{y}) \geq 0.$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена является отрицательность или равенство нулю его дискриминанта $D = (\overline{x},\overline{y})^2 - (\overline{x},\overline{x})(\overline{y},\overline{y}) \le 0$, откуда и следует утверждение Коши–Буняковского.

Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются ***ортогональными***, если выполняется

$$(\overline{x},\overline{y}) = 0.$$

Введем понятие базиса n–мерного векторного пространства R_n по аналогии с пространством L_n. Базисом в линейном пространстве R_n может быть любая система n независимых векторов этого пространства и любой вектор может быть разложен в этом базисе с соответствующими координатами. Базис вводится для упрощения алгебры векторов. Обозначается как $\overline{\mathrm{I}}_n^T = \left\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots \overline{e_n}\right\}$, где $\overline{e_i}$ $(i = \overline{1,n})$ —базисные векторы в R_n. Удобно работать в ортонормированном базисе, когда каждый вектор этого базиса имеет длину равную единице и выполняются соотношения

$$\left(\overline{e}_i, \overline{e}_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases},$$

$$\left|\overline{e_i}\right| = 1 \ \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Ортонормированные базисы играют в линейной алгебре роль, аналогичную роли прямоугольной системы координат в аналитической геометрии.

Приведем пример стандартного естественного базиса

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \overline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Тогда разложение вектора $\overline{x}$ в этом базисе имеет вид

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{e}_i x_i = \overline{e}_1 x_1 + \overline{e}_2 x_2 + \ldots. + \overline{e}_n x_n,$$

где x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ являются компонентами вектора в этом базисе. Таким образом, алгебра векторов сводится к алгебре компонент

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1)\overline{e}_1 + (x_2 + y_2)\overline{e}_2 + \ldots.(x_n + y_n)\overline{e}_n \ ,$$
$$\lambda\overline{x} = \lambda x_1 \overline{e}_1 + \lambda x_2 \overline{e}_2 + \ldots + \lambda x_n \overline{e}_n .$$

В евклидовом n-мерном векторном пространстве скалярное произведение выражается через координаты векторов формулой

$$(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}^T \widehat{\Gamma} \ \overline{y} = \sum_{i,j=1}^{n} x_j \ g_{ij} y_i \ ,$$

где x_i и y_i компоненты векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ в базисе $\overline{\mathrm{I}}_n^{\,T} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots \overline{e}_n\}$ и где $g_{ij} = (\overline{e}_i, \overline{e}_j)$, $\Gamma = \{g_{ij}\}$ есть так называемая ***матрица Грама*** в этом базисе.

В ортонормированном базисе $\widehat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix} = E$ есть единичная матрица, и скалярное произведение определяется как

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,T} g_{ij} y_j = (x_1, x_2, \ldots x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Окончательно получим $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + .. + x_n y_n$.

Длина вектора (норма) тогда совпадает с формулой полученной нами ранее

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

что является обобщением теоремы Пифагора на *n*–мерный случай.

Отметим, что скалярное произведение векторов не является алгебраической операцией, так как скалярное умножение двух векторов не является вектором, а является числом.

Приведем стандартный ***метод ортогонализации Грама–Шмидта.***

Пусть задана система линейно независимых векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \ldots, \overline{a}_n$. Тогда можно перейти к ортогональной системе попарно ненулевых векторов $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \ldots, \overline{b}_n$, где $(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$ для $i \neq j$.

Полагаем $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$.

Далее положим $\overline{b}_2 = \alpha_1 \overline{b}_1 + \overline{a}_2$.

Из условия $(\overline{b}_i, \overline{b}_j) = 0$ получим $\alpha_1 (\overline{a}_1, \overline{b}_1) = -(\overline{a}_1 \overline{a}_2)$.

Таким образом,

$$\overline{b}_2 = -\frac{(\overline{a}_1, \overline{a}_2)}{(\overline{a}_1, \overline{a}_1)} \overline{a}_1 + \overline{a}_2.$$

Затем положим

$$\overline{b}_3 = \beta_1 \overline{b}_1 + \beta_2 \overline{b}_2 + \overline{a}_3.$$

Из условий $(\overline{b}_1, \overline{b}_3) = 0$ и $(\overline{b}_2, \overline{b}_3) = 0$ получим, что

$$\beta_1=-\frac{\left(\overline{b}_1,\overline{a}_3\right)}{\left(\overline{a}_1,\overline{b}_1\right)} \text{ и } \beta_2=-\frac{\left(\overline{b}_2,\overline{a}_3\right)}{\left(\overline{b}_2,\overline{b}_2\right)}.$$

Тогда

$$\overline{b}_3=-\frac{\overline{b}_1,\overline{a}_3}{\left(\overline{a}_1,\overline{b}_1\right)}\overline{b}_1-\frac{\left(\overline{b}_2,\overline{a}_3\right)}{\left(\overline{b}_2,\overline{b}_2\right)}+\overline{a}_3$$

и так далее.

Пример. Даны линейно независимые векторы $\overline{a}_1=\left(1,1,0,0\right)^T$, $\overline{a}_2=\left(1,0,1,0\right)^T$, $\overline{a}_3=\left(1,0,0,1\right)^T$ и $\overline{a}_4=(0,1,0,1)^T$. Найти ортонормированный базис при условии, что скалярное произведение задается единичной матрицей Грама.

Решение. Полагаем $\overline{b}_1=\overline{a}_1$, $\overline{b}_1=\left(1,1,0,0\right)^T$. Далее

$\overline{b}_2=\alpha_1\overline{b}_1+\overline{a}_2=\alpha_1\left(1,1,0,0\right)^T+\left(1,1,0,0\right)^T$, где $\alpha_1=-\dfrac{\left(\overline{b}_1,\overline{a}_2\right)}{\left(\overline{b}_1,\overline{b}_1\right)}=-\dfrac{1}{2}$.

Тогда $\overline{b}_2=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0\right)^T$.

Наконец положим

$\beta_3=\beta_1\overline{b}_1+\beta_2\overline{b}_2+a_3$ где $\beta_1=-\dfrac{\left(\overline{b}_1,\overline{a}_3\right)}{\left(\overline{b}_1,\overline{b}_1\right)}=-\dfrac{1}{2}$ и $\beta_2=-\dfrac{\left(\overline{b}_2,\overline{a}_3\right)}{\left(\overline{b}_2,\overline{b}_2\right)}=-\dfrac{1}{3}$.

Получим

$$\overline{b}_3=-\frac{1}{2}\overline{b}_1-\frac{1}{3}\overline{b}_2+\overline{a}_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)^T.$$

Положим далее, что

$$\overline{b}_4=\gamma_1\overline{b}_1+\gamma_2\overline{b}_2+\gamma_3\overline{b}_3+\overline{a}_4, \text{ где } \gamma_1=-\frac{(\overline{b}_1,\overline{a}_4)}{(\overline{b}_1,\overline{b}_1)}=-\frac{1}{2},$$

$$\gamma_2=-\frac{(\overline{b}_2,\overline{a}_4)}{(\overline{b}_2,\overline{b}_2)}=\frac{1}{3} \text{ и } \gamma_3=-\frac{(\overline{b}_3,\overline{a}_4)}{(\overline{b}_3,\overline{b}_3)}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, получим

$\overline{b}_1=(1,1,0,0)^T$, $\vec{b}_2=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)^T$, $\overline{b}_3=(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},1)^T$ и $\overline{b}_4=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})^T$.

Остается только нормировать данные векторы и окончательный ответ имеет вид:

$$\overline{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)\right)^T,\ \overline{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right)^T,\ \overline{e}_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T,$$

$$\overline{e}_4=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T.$$

Рассмотрим частный случай векторных евклидовых пространств с размерностью $n \le 3$. Этот случай весьма важен, поскольку с таким пространством мы ассоциируем пространство, в котором мы живем и действуем, измеряем длину, высоту и ширину материальных тел. Такое векторное пространство имеет специфическое обозначение $A_2 = R_2$ или $A_3 = R_3$ в соответствии с размерностью $n = 2$ или $n = 3$. Напомним определение вектора.

Вектором в пространстве R_3 называют последовательность трех действительных чисел, расположенных в определенном порядке

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$

где a_x, a_y, a_z – компоненты вектора. Такой вектор имеет геометрическую интерпретацию как направленный отрезок. Если $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ начальная точка вектора $\overline{a}$, а точка $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ конечная, то вектор $\overline{AB}$ направлен в точку B и определяется в координатной форме

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Вектор называют ***свободным***, так как его можно передвигать параллельно самому себе, поскольку он зависит от координат точек A и B относительно.

Действительно, имеет место

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 7-4 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5 \\ 10-7 \\ 6-5 \end{pmatrix}.$$

В своей совокупности векторы могут быть ***скользящими***, когда их можно передвигать только вдоль их направления, например вектор силы или вектор угловой скорости, и ***связанными***, например для вектора момента сил, для которого важна точка приложения силы.

Вектор называют нулевым, если его начало и конец лежат в одной точке, обозначают как $\overline{0} = \left(0;0;0\right)^T$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых линиях, то есть $\overline{a} \,//\, \overline{b}$ или $\overline{a} = \lambda \overline{b}$, где λ коэффициент пропорциональности действительное число $\lambda \ne 0$ (рис. 7.1).

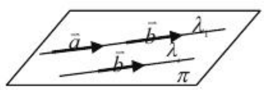


Рис. 7.1

Векторы называют ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рис. 7.2).

Рис. 7.2

Два вектора называют ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ или модулем называется неотрицательное число равное наикратчайшему расстоянию между точками A и B, определяемое как

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

или через компоненты

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ .$$

Можно определять сумму векторов по правилу параллелограмма, когда вектора приводятся к одному общему началу, как показано на рисунке 7.3. Тогда $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ есть диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Введем понятие единичного вектора в направлении данного следующим образом

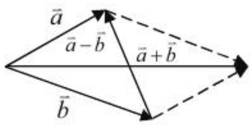


Рис. 7.3

$$\overline{e} = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}, \qquad \left|\overline{e}\right| = 1 \ .$$

Пример. Найти вектор биссектрисы угла, образованного векторами $\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Образуем единичные векторы $\overline{e}_1 = (3/5;4/5)^T$ и $\overline{e}_2 = (1;0)^T$. Вектор биссектрисы тогда определится как $\overline{e} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 = (3/5 + 1;4/5 + 0)^T = (8/5;4/5)^T$.

Заметим, что сумму векторов можно определить и по-другому, а именно, суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ при условии, что вектор $\overline{b}$ приложен в конец вектора $\overline{a}$. Это так называемое правило треугольника. Смотрите рисунок 7.4.

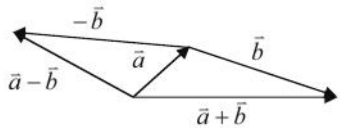


Рис. 7.4

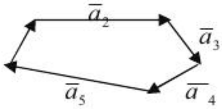


Рис. 7.5

Если при последовательном сложении нескольких векторов последний вектор приходит в начало первого вектора, то сумма этих векторов равна нулевому вектору.

Для случая, изображенного на рисунке 7.5, выполняется

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4 + \overline{a}_5 = \overline{0} \ .$$

Пример. Точка O пересечения медиан треугольника ABC является к тому же центром тяжести этого треугольника. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{O}$.

Решение. Непосредственно из рисунка 7.6 следует, что $\overline{MA}+\overline{AC}+\overline{CM}=\overline{O}$, $\overline{OA}=\frac{2}{3}\overline{MA}$ и $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CB}$. Получим $\overline{OA}=\frac{2}{3}\left(\overline{CA}+\frac{1}{2}\overline{BC}\right)$, аналогично получим

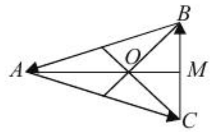


Рис. 7.6

$$\overline{OB}=\frac{2}{3}\left(\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{CA}\right)$$

и $\overline{OC}=\frac{2}{3}\left(\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{AB}\right)$.

Тогда $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\frac{2}{3}\left(\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\frac{1}{2}\left(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)\right)=\overline{O}+\overline{O}=\overline{O}$, что и требовалось показать.

Для суммы векторов выполняются перестановочное и сочетательное свойства

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$
$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right).$$

Для каждого вектора можно определить противоположный вектор равный данному по длине, но имеющий противоположное направление

$$\overline{a}+\overline{a}'=\overline{0}, \quad \overline{a}'=-\overline{a}.$$

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ $(\lambda \neq 0)$ называется вектор коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $\lambda\left|\overline{a}\right|$ и то же направление, если $\lambda > 0$, и противоположное, если $\lambda < 0$.

Приведем основные теоремы о линейной композиции векторов в трехмерном евклидовом пространстве (R_3).

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Покажем это. Положим, что два вектора линейно зависимы, тогда выполняется $c_1\overline{a}_1+c_2\overline{a}_2=\overline{0}$, откуда непосредственно следует, что они коллинеарны

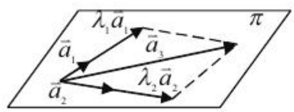


Рис. 7.7

$$\overline{a}_2=-\frac{c_1}{c_2}\overline{a}_1=\lambda\overline{a}_1, \quad \overline{a}_2 \,//\, \overline{a}_1.$$

Условие коллинеарности векторов для их компонент имеет вид (рис. 7.7):

$$\frac{a_{1x}}{a_{2x}}=\frac{a_{1y}}{a_{2y}}=\frac{a_{1z}}{a_{2z}}=\lambda.$$

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Покажем это. Пусть три вектора линейно зависимы $c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + c_3\overline{a}_3 = \overline{0}$, тогда $\overline{a}_3 = -\frac{c_1}{c_3}\overline{a}_1 - \frac{c_2}{c_3}\overline{a}_2 = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2$ есть сумма двух векторов. Видно, что вектор $\overline{a}_3$ лежит в той же плоскости, что и векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$. Таким образом, операция сложения двух векторов ($\overline{a}_1 \subset \pi$, $\overline{a}_2 \subset \pi \Rightarrow \overline{a}_3 \subset \pi$) не выводит их из плоскости, где они расположены, и является алгебраической операцией.

Теорема 3. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы. Покажем это геометрически. Пусть три любых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, тогда четвертый вектор $\overline{d}$ всегда можно выразить через них. Действительно, построим их, как показано на рисунке 7.8.

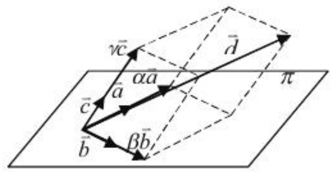


Рис.7.8

Домножим векторы на постоянные α, β и γ так, чтобы выполнялось $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} \neq \overline{0}$. Видно, что вектор $\overline{d}$ является линейной композицией векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Тогда $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \mu\overline{d} = \overline{0}$, где $\mu = -1$ есть условие линейной зависимости четырех векторов.

Вернемся к понятию базиса. Любая тройка некомпланарных векторов (линейно независимых) образует в пространстве базис, по которому можно разложить любой вектор. Отметим, что базис вводится для удобства вычисления. Пусть тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны, то есть не принадлежат одной плоскости, сложение векторов $\overline{d}_1$ и $\overline{d}_2$, где $\overline{d}_1 = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} + \gamma_1\overline{c}$ и $\overline{d}_2 = \alpha_2\overline{a} + \beta_2\overline{b} + \gamma_2\overline{c}$ определяется как

$$\overline{d_1} + \overline{d_2} = \overline{a}(\alpha_1 + \alpha_2) + \overline{b}(\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)\overline{c}.$$

Здесь числа α, β и γ являются компонентами вектора $\overline{d}$ в базисе векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Пример. Даны некомпланарные векторы $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\overline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти разложение вектора $\overline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ в базисе этих векторов.

Решение. Итак, по определению $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Надо определить числа α, β, γ.

Распишем векторы через компоненты

$$\begin{cases} d_x = \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x \\ d_y = \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y \\ d_z = \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = 1 \\ 3\alpha + 2\gamma = 2 \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = 1 \end{cases}; \quad \begin{matrix} \Delta = 34 \\ \Delta_1 = 20 \\ \Delta_2 = 6 \\ \Delta_3 = 4 \end{matrix}.$$

По правилу Крамера получим значения: $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{17}$, $\beta = \frac{3}{17}$, $\gamma = \frac{2}{17}$.

Ответ: $\vec{d} = \frac{10}{17}\vec{a} + \frac{3}{17}\vec{b} + \frac{2}{17}\vec{c}$.

Наиболее удобным базисом для вычислений является тройка ортогональных (взаимно перпендикулярных) единичных векторов, называемых ***ортами***, $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Орт

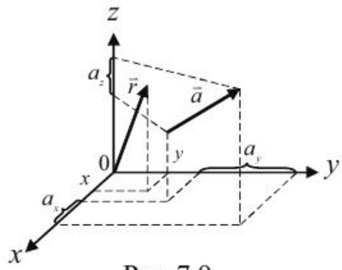


Рис. 7.9

$\bar{i}$ направлен по *OX*, орт $\bar{j}$ по оси *OУ* и орт $\bar{k}$ по оси *OZ*. На рисунке 7.9 представлен радиус-вектор $\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ и некоторый вектор

$$\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$$

с длиной $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

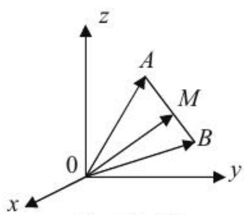


Рис. 7.10

Пример. Найти координаты точки *M,* делящей заданный отрезок *AB* в отношении λ .

Решение. Дано $\overline{BM} = \lambda\overline{MA}$. Из рисунка 7.10 видно, что $\overline{OM} - \overline{OB} = \lambda(\overline{OA} - \overline{OM})$. Отсюда следует, что $\overline{OM} = \frac{\overline{OB} + \lambda\overline{OA}}{1+\lambda}$. Тогда координаты точки *M* определяются: $x_M = \frac{x_B + \lambda x_A}{1+\lambda}$, $y_M = \frac{y_B + \lambda y_A}{1+\lambda}$ и $z_M = \frac{z_B + \lambda z_A}{1+\lambda}$.

Пример. Найти координаты точки, делящей расстояние между точками $A(1,-7,8)$ и $B(3,2,1)$ в отношении 1/2.

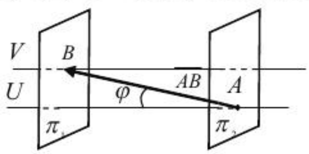


Рис.7.11

Решение. Здесь $\lambda = \frac{1}{2}$. $x_M = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$, $y_M = -4$, $z_M = \frac{17}{3}$.

Введем понятие проекции вектора на некоторую ось. Пусть дана прямая (ось) U и вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 7.11). Проведем плоскости перпендикулярные данной оси и проходящие через начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$. Проведем ось V параллельную U и проходящую через точку A.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось U равна модулю вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, умноженного на косинус угла вектора $\overrightarrow{AB}$ к оси U.

$$np_u AB = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi .$$

Основные свойства проекции:

1. $np_u\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = np_u\overline{a} + np_u\overline{b}$,
2. $\lambda np_u\vec{a} = np_u\lambda\vec{a}$. (рис.7.12).

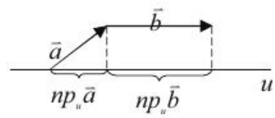


Рис. 7.12

В декартовой системе координат компоненты вектора $\overline{a}$ равны проекциям вектора на оси *OX, OУ* и *OZ,* то есть $np_{ox}\vec{a} = a_x$, $np_{oy}\vec{a} = a_y$, $np_{oz}\vec{a} = a_z$.

Пусть α, β, γ – углы наклона вектора $\overline{a}$ к этим осям, тогда выражения $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют направляющими косинусами.

Для радиус–вектора $\overline{r} = \overline{i}x + \overline{j}y + \overline{k}z$, выполняется $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$ (рисунок 7.13).

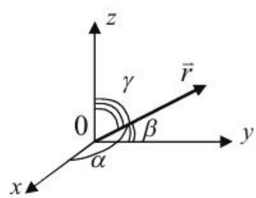


Рис. 7.13

Если воспользоваться теоремой Пифагора $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$, то получим важное соотношение для направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице. В случае плоскости, когда $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha = 90^o - \beta$, получим известную школьную формулу $\cos^2\alpha + \sin^2 a = 1$ как частный случай.

Единичный вектор можно выразить через направляющие косинусы следующим образом

$$\overline{e} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вектор можно задать тремя способами.

1. Двумя последовательными точками A и B

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

2. Тремя компонентами $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$.

3. Модулем вектора и тремя направляющими косинусами, причем из четырех параметров только три являются независимыми.

.

ЛЕКЦИЯ 8: «Векторная алгебра в трехмерном пространстве (R_3)»

Скалярное произведение векторов.
Векторное произведение векторов.
Смешанное произведение векторов.
Двойное векторное произведение.

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\equiv(\bar{a},\bar{b})=/\,\bar{a}\,/\cdot/\,\bar{b}\,/\cos\varphi\,.$$

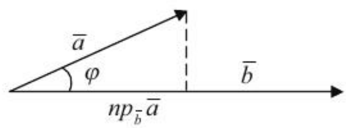


Рис. 8.1

Или, так как $np_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|np_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b}$ (рисунок 8.1).

Наглядной физической интерпретацией скалярного произведения является работа, совершаемая по перемещению некоторого материального тела под воздействием силы $\bar{F}$:

$$A=\left(\bar{F},\bar{S}\right),$$

где $\left|\bar{S}\right|$ — пройденный телом путь.

Непосредственно из определения скалярного произведения вытекают следующие свойства:

1. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=0\ \Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\,.$$

2. Два вектора составляют острый угол, если их скалярное произведение положительно, и тупой, если отрицательно.

3. $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{b},\bar{a}\right)$ – перестановочное свойство.

4. $\left(\alpha\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{a},\alpha\bar{b}\right)$ – сочетательное свойство.

5. $\left(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{c}\right)+\left(\bar{b},\bar{c}\right)$ – распределительное свойство.

Выразим скалярное произведение через компоненты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе. Используем тот факт, что по определению

$$\left(\bar{i},\bar{i}\right)=\left(\bar{j},\bar{j}\right)=\left(\bar{k},\bar{k}\right)=1,\quad\left(\bar{i},\bar{j}\right)=\left(\bar{i},\bar{k}\right)=\left(\bar{j},\bar{k}\right)=0\,.$$

Итак, $\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left(\bar{i}a_x+\bar{j}a_y+\bar{k}a_z\right)\left(\bar{i}b_x+\bar{j}b_y+\bar{k}b_z\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ или

$$\left(\bar{a},\bar{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.$$

Можно этот же результат получить, вспомнив, что вектор это матрица, состоящая из одного столбца, и применить правило перемножения матриц

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\overline{a}^T\cdot\overline{b}=\left(a_x,a_y,a_z\right)\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Получим формулу, удобную для вычисления угла между заданными векторами,

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Пример. Даны координаты вершины треугольника ABC: $A(1,2,3)$, $B(-1,8,1)$ и $C(3,-1,-1)$. Найти угол при вершине A.

Решение. Образуем два вектора выходящих из вершины A.

$\overline{AB}^T=\{-2,6,-2\}$ и $\overline{AC}^T=\{2,-3,-4\}$. Угол определяется следующим образом:

$$\varphi=\arccos\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}=\arccos\frac{-4-18+8}{\sqrt{4+36+4}\cdot\sqrt{4+9+16}}=\arccos\frac{-14}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{29}},$$ что

приблизительно равно 115°.

Векторное произведение векторов. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем требованиям.

1. Длина этого вектора равна произведению длин перемножаемых векторов на синус угла между ними

$$\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi.$$

2. Полученный вектор ортогонален как вектору $\overline{a}$, так и вектору $\overline{b}$.

3. Вектор $\overline{c}$ направлен так, что тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ является правой (правило буравчика, рисунок 8.2) и обозначается:

$$\overline{c}=\left[\overline{a},\overline{b}\right]\equiv\overline{a}\times\overline{b}.$$

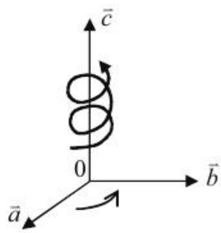


Рис.8.2

Как физическую интерпретацию векторного произведения можно привести вектор момента сил, приложенных к рычагу $\overline{r}$:

$$\overline{M}=\overline{r}\times\overline{F}.$$

Непосредственно из определения следуют два важных практических вывода.

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения

$$\overline{a}\,//\,\overline{b}\Rightarrow\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}.$$

2. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах (рисунок 8.3).

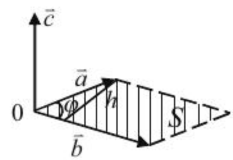


Рис. 8.3

$$S = h\left|\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$$
$$\text{или } \left[\overline{a},\overline{b}\right] = \overline{e}S,$$

где $\overline{e}_c$ — единичный вектор в направлении $\overline{c} = \left|\overline{c}\right|\overline{e}_c$.

Получим формулу, удобную для подсчета площадей параллелограммов или треугольников, расположенных в пространстве:

$$S = \left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right|,\ S_\Delta = \frac{1}{2}S.$$

Выразим векторное произведение через компоненты умножаемых векторов. Пусть $\overline{a} = \overline{i}a_x + \overline{j}a_y + \overline{k}a_z$ и $\overline{b} = \overline{i}b_x + \overline{j}b_y + \overline{k}b_z$, учитывая, что $\left[\overline{i},\overline{i}\right] = \left[\overline{j},\overline{j}\right] = \left[\overline{k},\overline{k}\right] = \overline{0}$ и по правилу буравчика $\left[\overline{j},\overline{k}\right] = \overline{i}$, $\left[\overline{k},\overline{i}\right] = \overline{j}$, $\left[\overline{j},\overline{i}\right] = -\overline{k}$ получим

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right] = \overline{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) - \overline{j}\left(a_x b_z - a_z b_x\right) + \overline{k}\left(a_x b_y - a_y b_x\right).$$

Видно, что это разложение по первой строке определителя. Таким образом, получим известную формулу

$$\overline{a}\times\overline{b} = \left[\overline{a},\overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Свойства векторного произведения определяются свойствами определителя:

1. $\left[\overline{a},\overline{b}\right] = -\left[\overline{b},\overline{a}\right]$,
2. $\left[\alpha\overline{a},\overline{b}\right] = \alpha\left[\overline{a},\overline{b}\right]$, $\alpha \in R$,
3. $\left[\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\overline{c}\right] = \left[\overline{a},\overline{c}\right] + \left[\overline{b},\overline{c}\right]$,
4. $\left[\overline{a},\overline{a}\right] = \overline{0}$ для любых векторов.

Пример. Заданы три вершины треугольника $A(1;2;0); B(3;0;-3)$ и C(5; 2; 6).

Найти площадь данного треугольника.

Решение. Определим два вектора $\overline{AB} = (2,-2,-3)^T$ и $\overline{AC} = (4,0,6)^T$, соответственно. Образуем векторное произведение этих векторов $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right] = -12\overline{i} - 24\overline{j} + 8\overline{k}$.

По определению, модуль $\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]$ равен площади параллелограмма, а значит, площадь искомого треугольника равна $S_\Delta = \frac{1}{2}2\sqrt{6^2+12^2+4^2} = 14$ квадратных единиц.

Получим формулу для вычисления площади треугольника, лежащего в заданной плоскости. Пусть вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат в плоскости XOY.

Тогда $\overline{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\overline{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ 0 \end{pmatrix}$. Получим их векторное произведение

$$\overline{c} = \left[\overline{AB}, \overline{AC}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{k}\left[(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right].$$

Рабочая формула для определения площади в плоскости точек A, B и C

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right].$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2), B(2;4), C(2;5)$.

Решение. Получим $S = \frac{1}{2}[1 \cdot 3 - 1 \cdot 2] = 0{,}5$ единиц площади.

Покажем, как векторное произведение связано с прямым произведением векторов

$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} = (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} \overline{i} \times \overline{i} & \overline{i} \times \overline{j} & \overline{i} \times \overline{k} \\ \overline{j} \times \overline{i} & \overline{j} \times \overline{j} & \overline{j} \times \overline{k} \\ \overline{k} \times \overline{i} & \overline{k} \times \overline{j} & \overline{k} \times \overline{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \equiv (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}) \times \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{i} \\ \overline{j} \\ \overline{k} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_x, a_y, a_z)\begin{pmatrix} 0 & \overline{k} & -\overline{j} \\ -\overline{k} & 0 & \overline{i} \\ \overline{j} & -\overline{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Видно, что векторное произведение векторов является алгебраической операцией в пространстве R_3, так как если $\overline{a} \in R_3$, $\overline{b} \in R_3$, то и $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b} \in R_3$ Очевидно, что векторное произведение векторов не является алгебраической операцией в пространстве R_2, так как $\overline{a} \in R_2, \overline{b} \in R_2$, но $\overline{a} \times \overline{b} \notin R_2$.

Смешанное произведение векторов. Смешанное произведение векторов можно получить, умножив векторное произведение двух векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$ скалярно на вектор $\overline{a}$. Оно обозначается как

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \equiv \left(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]\right) \equiv \overline{a} \cdot \overline{b} \times \overline{c}$$

и имеет интересный геометрический смысл. Если данные векторы привести к одному началу, то модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Действительно,

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = S\overline{e}_d, \; S = \left|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right|,$$

тогда

$$|\overline{c}|\cos\varphi = h, \; (\overline{e}_d, \overline{c}) = h, \; V = Sh = \left(\overline{c}, \left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right).$$

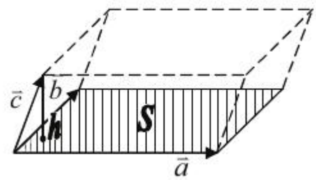


Рис.8.4

Таким образом, объем параллелепипеда со сторонами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ определяется как (рисунок 8.4)

$$V = \left| \left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) \right|.$$

Заметим, что если эти векторы компланарны, то есть все лежат в одной плоскости, то смешанное произведение равно нулю $(V = 0)$. Получаем полезную формулу для проверки компланарности трех векторов:

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0.$$

В декартовой системе координат смешанное произведение векторов выражается через компоненты этих векторов с помощью определителя

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Покажем это. Дано $\bar{a} = \bar{i} a_x + \bar{j} a_y + \bar{k} a_z$ и векторное произведение

$$\left[\bar{b}, \bar{c}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Образуем скалярное произведение

$$\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

что и требовалось показать.

Свойства смешанного произведения определяются так же свойствами определителя.

1. Если два вектора из трех коллинеарны, то $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0$.

2. Если три вектора компланарны, то $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = 0$.

3. При перестановке двух рядом стоящих векторов знак смешаного произведения меняется.

4. Смешаное произведение не меняется при циклической (круговой) перестановки векторов $\left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right) = \left(\bar{c}, \left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right) = \left(\bar{b}, \left[\bar{c}, \bar{a}\right]\right) = \left(\bar{b}, \left[\bar{c}, \bar{a}\right]\right)$.

Пример 1.

Доказать, что точки $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ и $D(0;1;9)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Определим векторы $\overline{AB}=(-2,-1,-5)^T$, $\overline{AC}=(1,-2,-5)^T$ и $A\overline{D}=(-1,1,2)^T$. Образуем из них смешанное произведение

$$\left(\overline{AB},\left[\overline{AC},\overline{AD}\right]\right)=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -5\\ 1 & -2 & -5\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0.$$

*Ответ***:** Все точки лежат в одной плоскости.

*Пример 2***.** Вычислить объем тетраэдра (пирамиды), вершины которого находятся в точках $O(1,1,2)$, $A(2,3,-1)$, $B(2,-2,4)$, $C(-1,1,3)$.

Решение. Образуем векторы $\overline{OA}=(1,2,-3)^T$, $\overline{OB}=(1,-3,2)^T$, $\overline{OC}=(-2,0,1)^T$. Заметим, что $V_T=\frac{1}{6}V_П=|\ \left(\overline{OA},\left[\overline{OB},\overline{OC}\right]\right)\ |$.

Получим объем $V_T=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{5}{6}$ куб. ед.

Пример 3. Даны четыре вершины пирамиды $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$ и $A_4(1;5;0)$. Найти длину ребра A_1A_2, угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3, угол между ребром A_1A_2 и гранью $A_2A_3A_4$, площадь грани $A_2A_3A_4$, объем пирамиды и высоту, опущенную из вершины A_1 на грань $A_2A_3A_4$.

Решение. Образуем векторы $\overline{A_1A_2}=(-4;5;-3)^T$, $\overline{A_1A_3}=(-4;0;2)^T$ и вектор $\overline{A_1A_4}=(-3;3;-5)^T$. Длина ребра A_1A_2 определится как

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} \approx 7{,}1.$$

Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 определится из $\cos\varphi=\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_3}\right|}=$

$=\frac{10}{7{,}1\sqrt{20}}\approx 0{,}3$ и φ составит примерно 25°.

Далее определим угол между ребром A_1A_2 и гранью $A_2A_3A_4$, для этого вычислим вектор перпендикулярный этой грани

$$\overline{d}=\left[\overline{A_2A_3},\overline{A_2A_4}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & -5 & 5\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=20\overline{i}+5\overline{j}+5\overline{k}.$$

Таким образом, этот угол определится из $\sin\psi=\frac{\left(\overline{A_1A_2},\overline{d}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{d}\right|}=0{,}8.$

Определим площадь грани $A_2A_3A_4$: $S=1/2\ \sqrt{400+25+25}\approx 10{,}5$ кв.ед.

Для получения значения высоты пирамиды $h = 3V/S$ необходимо вычислить объем пирамиды $V = 1/6\ (A_1\overline{A}_2, [A_1\overline{A}_3, A_1\overline{A}_4])$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 32 \text{ куб. ед.}$$

Тогда высота равна $h = 9$ единиц длины.

Двойное векторное произведение. Рассмотрим двойное векторное произведение трех векторов. Для этого векторное произведение двух векторов умножим векторно еще на один вектор.

Двойное векторное произведение обозначается как

$$\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right] \equiv \overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right).$$

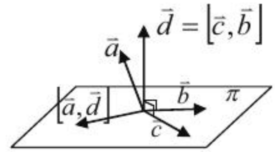


Рис. 8.5

Для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ справедлива формула

$$\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right] = \overline{b}\left(\overline{a},\overline{c}\right) - \overline{c}\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

Действительно, обозначим $\overline{d} = \left[\overline{c},\overline{b}\right]$. Из рисунка 8.5 видно, что $\left[\overline{a},\overline{d}\right]$ лежит в плоскости π, так как он перпендикулярен вектору $\overline{d}$, а $\overline{d}$ перпендикулярен плоскости π. Таким образом, вектор $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]$ лежит в плоскости π, а значит, может быть представлен в виде линейной композиции двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, лежащих в этой плоскости. Получим $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right] = \alpha\overline{b} - \beta\overline{c}$, где коэффициенты α и β определяются как скалярные произведения оставшихся векторов (других нет), поэтому

$$\alpha = \left(\overline{a},\overline{c}\right) \text{ и } \beta = \left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

Знак в формуле определяется свойством асимметрии векторного произведения.

Получим формулу по–другому. Если векторы $\overline{b}$ и $\overline{c}$ коллиниарны ($\overline{b} = \lambda\overline{a}$), то очевидно выполняется соотношение

$$\lambda\overline{c}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a},\lambda\overline{c}) = \overline{0}, \quad [\lambda\overline{c},\overline{c}] = \overline{0}.$$

Получаем тождество $\overline{0} \equiv \overline{0}$, значит формула верна.

Если данные векторы не коллинеарны, то учитывая, что

$$\overline{d} = [\overline{b},\overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

получим, выделяя соответствующие компоненты векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$,

$$[\overline{a},\overline{d}] = \overline{i}\left[b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z)\right] -$$
$$-\overline{j}\left[-b_y(a_x c_x + a_z c_z) + c_y(a_x b_x + a_z b_z)\right] + \overline{k}\left[b_z(a_x c_x + a_y c_y) - c_z(a_x b_x + a_y b_y)\right].$$

Видно, что, например, в первом слагаемом (в квадратной скобке) стоят неполные скалярные произведения, поэтому его можно представить в виде

$$\left[b_x(a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_yb_y + a_zb_z)\right] = \left[b_x((\overline{a},\overline{c}) - a_xc_x) - c_x((\overline{a},\overline{b}) - a_xb_x)\right] =$$
$$= \left[b_x(\overline{a},\overline{c}) - c_x(\overline{a},\overline{b})\right].$$

Аналогичные действия можно проделать с двумя другими слагаемыми. Тогда непосредственно получим искомую формулу

$$\left[\overline{a},\overline{d}\right] = \left[\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]\right] = (\overline{i}b_x + \overline{j}b_y + \overline{k}b_z)(\overline{a},\overline{c}) - (\overline{i}c_x + \overline{j}c_y + \overline{k}c_z)(\overline{a},\overline{b}) =$$
$$= \overline{b}(\overline{a},\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a},\overline{b}).$$

Пример. Даны векторы $\overline{a} = (1,0,1)^T$ $\overline{b} = (2,1,3)^T$ и $\overline{c} = (0,1.2)^T$. Найти $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]$.

Решение. $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right] = 2\overline{b} - 5\overline{c} = (4,2,6)^T - (0,5,10)^T = (4,-3,-4)^T$, так как $\left(\overline{a},\overline{c}\right) = 2$ и $\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 5$.

Можно решить эту же задачу по-другому

$\left[\overline{b},\overline{c}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$. Отсюда $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

В заключение разберем решения некоторых типовых задач.

Пример 1. Буквами A, B и C обозначим вершины правильного треугольника, вписанного в окружность. Точка M расположена на этой окружности. Показать, что $\left|\overline{AM}\right|^2 + \left|\overline{BM}\right|^2 + \left|\overline{CM}\right|^2$ не зависит от выбора точки M.

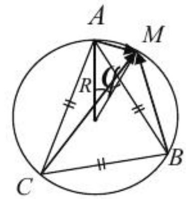


Рис. 8.6

Решение. Непосредственно из рисунка 8.6 следует, что

$$\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}.$$

$$\left|\overline{AM}\right|^2 = \left|\overline{OM}\right|^2 + \left|\overline{OA}\right|^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{OA}.$$

$$\overline{BM} = \overline{OM} - \overline{OB} \Rightarrow \left|\overline{BM}\right|^2 = \left|\overline{OM}\right|^2 + \left|\overline{OB}\right|^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{OB}$$

$$\overline{CM} = \overline{OM} - \overline{OC} \Rightarrow \left|\overline{CM}\right|^2 = \left|\overline{OM}\right|^2 + \left|\overline{OC}\right|^2 - 2\overline{OM}\cdot\overline{OC}.$$

Суммируем $\left|\overline{AM}\right|^2 + \left|\overline{BM}\right|^2 + \left|\overline{CM}\right|^2 = 6R^2 - 2\overline{OM}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = 6R^2 = const$.

Для равных векторов, расположенных под углом 120° друг к другу, выполняется векторное равенство $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

Пример 2. Три некомпланарных вектора $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ приведены к общему началу. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $\overline{m} = \overline{a}\times\overline{b} + \overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{a}$.

Решение. Образуем векторы, лежащие в плоскости π: $\overline{a} - \overline{c}$ и $\overline{a} - \overline{b}$. Далее образуем вектор, перпендикулярный данной плоскости (рисунок 8.7):

$\overline{n} = \left(\overline{a} - \overline{c}\right)\times\left(\overline{a} - \overline{b}\right) = -\overline{c}\times\overline{a} - \overline{a}\times\overline{b} + \overline{c}\times\overline{b} = -\overline{c}\times\overline{a} - \overline{a}\times\overline{b} - \overline{b}\times\overline{c} = -\overline{m}$, что и требовалось показать.

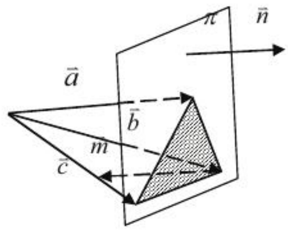


Рис.8.7

Пример 3. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{n}$, причем $(\overline{a},\overline{n})=0$ и $|\overline{n}|=1$. Найти вектор $\overline{b}$, образованный $\overline{a}$ поворотом на угол φ вокруг оси $\overline{n}$.

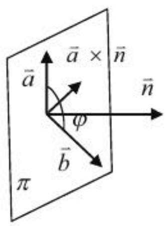


Рис.8.8

Решение. Введем новый базис $\overline{e}_1=\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ и $\overline{e}_2=\dfrac{[\overline{n},\overline{a}]}{|\overline{a}|}$.

Разложим вектор $\overline{b}$ в этом базисе $\overline{b}=\overline{e}_1 b_1+\overline{e}_2 b_2$, где $b_1=|\overline{a}|\cos\varphi$ и $b_2=|\overline{a}|\sin\varphi$. Окончательно получаем:

$$\overline{b}=\overline{a}\cos\varphi+[\overline{n},\overline{a}]\sin\varphi \text{ (рисунок 8.8).}$$

Пример 4. Решить уравнение $\overline{x}=\left[\overline{a},\left(\overline{x}+\overline{b}\right)\right]$.

Решение. Умножим векторное уравнение векторно на $\overline{a}$ слева. Получаем $[\overline{a},\overline{x}]=-\overline{x}a^2+\left[\overline{a},\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right]$. Из исходного уравнения следует

$$[\overline{a},\overline{x}]=\overline{x}-\left[\overline{a},\overline{b}\right].$$

Окончательно получим:

$$\overline{x}=-\overline{x}a^2+\left[\overline{a},\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right]+\left[\overline{a},\overline{b}\right].$$

Ответ: $\overline{x}=\dfrac{\left[\overline{a},\left(\overline{b}+\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right)\right]}{1+a^2}$.

ЛЕКЦИЯ 9: «Алгебраические формы и их приложение»

Алгебраическая форма первого порядка.
Прямая линия на плоскости.
Уравнение плоскости в пространстве.

Рассмотрим вопрос об аналитическом представлении линии или некоторой поверхности. Линия задается аналитически в виде уравнения или системы уравнений, которые уже можно исследовать методами алгебры или математического анализа с целью выяснения ее характерных особенностей и представления ее в графическом виде. Вид уравнения линии зависит от выбора системы координат и в некоторых из них существенно упрощается. Очевидно, что уравнение линии — это некоторая функция, определяющая связь переменных x и y на плоскости или x, y и z в пространстве. Наиболее наглядной для описания линии является декартова система координат, в которой в основном и будем работать.

Рассмотрим линию на плоскости. Линия — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\Phi(x, y) = 0.$$

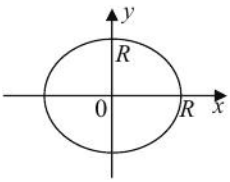


Рис. 9.1

Так, уравнение $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ задает окружность радиуса R (рис. 9.1). Тогда как уравнение $x^2 + y^2 + R^2 = 0$ не удовлетворяет ни одной точке плоскости XOY. Линия называется алгебраической, если $\Phi(x, y)$ есть алгебраический полином. Алгебраическая форма имеет вид

$\Phi(x, y) = \sum_{k,l}^{m,n} \alpha_{kl} x^k y^l$, $k = \overline{0, m}; l = \overline{0, n}$, где α_{kl} – действительные числа. Например, уравнение окружности определяют такие коэффициенты:

$$\alpha_{02} = 1, \quad \alpha_{20} = 1, \quad \alpha_{00} = -R^2, \quad \alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{01} = 0,$$

а остальные равны нулю.

Все линии, которые нельзя представить в виде алгебраического полинома, называются трансцендентными. Например, $y = \mathrm{tg}^2 x$, $y^2 = \lg^3 x$ и так далее.

Уравнение линии может быть задано в явном виде, когда уравнение разрешается относительно y: $y = f(x)$, или в неявном виде как

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Например, уравнение кубики $y = \pm\sqrt{(x+1)(x^2+\varepsilon)}$ представлено в явном виде и изображено условно на рисунке 9.2.

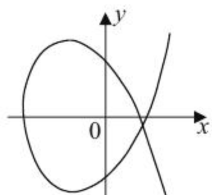


Рис. 9.2

Уравнение линии можно задать параметрически в виде системы равенств относительно параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

Исключая t, можно вновь перейти к виду $\Phi(x, y) = 0$. Например, окружность можно представить в виде

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \text{ где } 0 \le t < 2\pi .$$

Алгебраическая форма первого порядка от двух переменных $\overline{x}^T = \{x, y\}$ есть $\Phi(x, y) = (\overline{n}, \overline{x})$. Тогда уравнение прямой линии на плоскости будет иметь вид

$$(\overline{n}, \overline{x}) = 0 .$$

Алгебраическую форму первого порядка от трех переменных $\overline{x} = \{x, y, z\}^T$ можно применить к описанию плоскости в пространстве.

Алгебраическая форма второго порядка является билинейной формой переменной $\overline{x} = \{x, y\}^T$ и определяется как $(\overline{x}, A\overline{x}) = \Phi(x, y)$. Тогда уравнение

$$(\overline{x}, A\overline{x}) = 0$$

представляет линию второго порядка на плоскости. Так как эти линии являются сечениями конуса, то их называют «кониками».

Алгебраическая форма второго порядка от переменной $\overline{x} = \{x, y, z\}^T$ описывает канонические поверхности в пространстве, например, такие как однополостной гиперболоид, эллипсоид и другие.

Алгебраические формы третьего порядка от двух переменных описывают линии, называемые «кубиками», которая характеризуются наличием угловых точек, точек возврата (ласточкин хвост) и петель.

Алгебраические формы четвертого порядка от двух переменных описывают линии, называемые «квадриками» и так далее.

Зачастую в задачах требуется найти точки пересечения линий. Для этого необходимо решать систему уравнений этих линий совместно:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0 \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Уравнение поверхности в пространстве задается в виде

$$\Phi(x, y, z) = 0 ,$$

где $\Phi = \sum_{ijk} \alpha_{ijk} x^i y^j z^k$ – алгебраический полином.

Поверхность — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$.

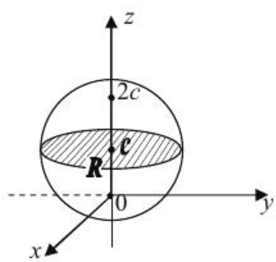


Рис.9.3

Например, уравнение $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2$ описывает поверхность сферы, смещенной по оси OZ на величину $c=R$ (рисунок 9.3).

Уравнение линии в пространстве задается пересечением двух поверхностей и получается при решении системы двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z)=0 \\ \Phi_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

которая описывает бесконечное множество решений, в совокупности изображающих линию. Точки пересечения трех поверхностей могут быть определены из решения совместной системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z)=0 \\ \Phi_2(x,y,z)=0. \\ \Phi_3(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Алгебраическая форма первого порядка. Прямая линия на плоскости.

Итак, прямая линия на плоскости характеризуется тем, что в функцию $\Phi(x,y)$ неизвестные входят в первой степени:

$$\Phi(x,y)=\alpha_{10}x+\alpha_{01}y+\alpha_{00}=0 \text{ или } (\bar{n},\bar{x})\le 0,$$

где введено обозначение $\alpha_{10}x=A, \alpha_{01}=B, \alpha_{00}=C$.

Таким образом, ***общее уравнение прямой*** на плоскости имеет вид

$$Ax+By+C=0. \qquad \text{I}$$

Будем обозначать формы прямой на плоскости римскими цифрами в кружках. Для рационального решения задач выбирается одна из 9 таких форм.

Если прямая линия проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$, то должно выполняться $Ax_0+By_0+C\equiv 0$. Если вычесть эти уравнения друг из друга, то получим ***уравнение прямой проходящей через заданную точку*** M_0:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad \text{II}$$

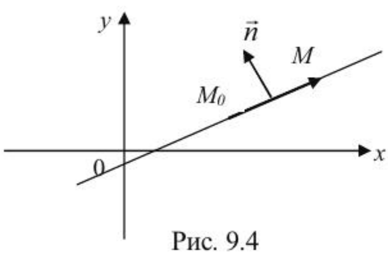


Рис. 9.4

Рассмотрим геометрическую интерпретацию коэффициентов A и B. Определим текущий вектор $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M}=\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \bar{i}(x-x_0)+\bar{j}(y-y_0)$. Введем вектор нормальный к вектору $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 9.4)

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\bar{i}A+\bar{j}B.$$

Очевидно, что $\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}\right)=0$. $\qquad$ III

Это уравнение прямой линии в ***векторной форме***. Отсюда следует ранее полученное уравнение прямой линии

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Таким образом, коэффициенты A и B, входящие в уравнение прямой, являются компонентами вектора перпендикулярного к этой прямой.

Приведем частные случаи уравнения прямой линии (рис. 9.5).

1. $C = 0,\ Ax + By = 0 \Rightarrow y = kx$.
2. $A = 0,\ By + C = 0 \Rightarrow y = b$.
3. $B = 0,\ Ax + C = 0 \Rightarrow x = a$.
4. $A = C = 0,\ y = 0$ это ось OX.
5. $B = C = 0,\ x = 0$ это ось OY.

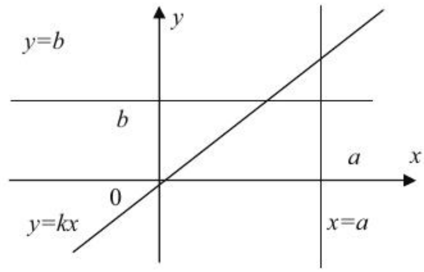


Рис.9.5

Рассмотрим и другие формы записи прямой, удобные для решения различных практических задач. Действительно, в зависимости от постановки задачи, простота их решения зачастую зависит от того, какой формой записи прямой линии воспользовались.

Уравнение прямой в отрезках. Поставим задачу об определении площади треугольника (рис. 9.6), отсекаемого прямой от координатных осей OX и OY. Из общего уравнения прямой перейдем к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{B}} + \frac{y}{-\frac{C}{A}} = 1$$

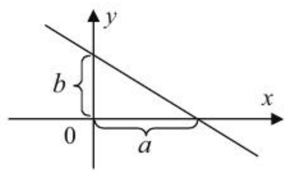


Рис. 9.6

и обозначим $-\frac{C}{A} = a,\ -\frac{C}{B} = b$. Получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. (IV)

Каноническое уравнение прямой. Задана точка, через которую проходит прямая и вектор вдоль прямой $\bar{q} = \{l; m\}$. Тогда, поскольку вектор $\overline{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ коллинеарен $\bar{q}$, то их компоненты пропорциональны (рис. 9.7).

Рис. 9.7

Отсюда следует

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \quad \text{(V)}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

В таком случае вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M}$, и тогда, очевидно, выполняется

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad \text{(VI)}$$

Параметрические уравнения прямой линии. Из канонического вида следует

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases},\ a \le t \le b. \quad \text{(VII)}$$

Заметим, что это уравнение в физике называется уравнением траектории физической точки, равномерно двигающейся по прямой со скоростью $v=\sqrt{l^2+m^2}$, здесь t – время, а x и y координаты точки.

Прямая с угловым коэффициентом. Из канонического вида получим

$$y = kx + b\,, \qquad \text{VIII}$$

где $k=\dfrac{m}{l},\;\; b = y_0 - \dfrac{m}{l}x_0$.

При $x=0$ $\;y=b$,

$\bar{q}=\{l;m\},\qquad l=|\bar{q}|\cos\theta,$

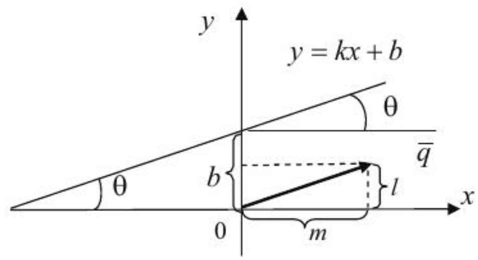


Рис. 9.8

$m=|\bar{q}|\sin\theta,\qquad k=\dfrac{m}{l}=\mathrm{tg}\theta$. Здесь приведен вспомогательный рисунок 9.8.

Нормированное уравнение прямой. Это уравнение очень удобно использовать для задач, где надо определять расстояние от точки до прямой.

Введем единичный вектор, перпендикулярный прямой, который имеет составляющие $\vec{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$.

Из рисунка 9.9 видно, что

$$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}=np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM}=p\,.$$

Тогда нормированное уравнение прямой можно представить в виде:

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0\,. \qquad \text{IX}$$

Поставим задачу: найти наикратчайшее расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой заданной в данной форме

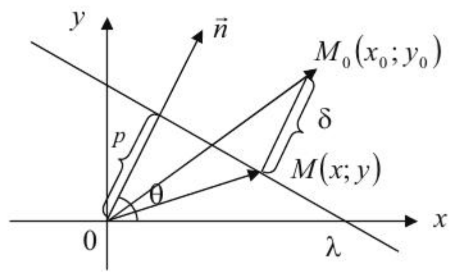


Рис. 9.9

Из рисунка 9.9 следует, что

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM_0}=p+\delta$$

или $\;x\cos\theta+y\sin\theta=p+\delta$. Отсюда следует: $\delta=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p$.

Получили удобное правило нахождения отклонения δ точки $M_0(x_0,y_0)$ до данной прямой, не лежащей на этой прямой. Если получаем отрицательное значение, то это значит, что начало координат и точка M_0 лежат по одну сторону от прямой.

Пример. Задана прямая линия $3x+4y+1=0$. Найти наименьшее расстояние от точки $M_0(1;2)$ до этой прямой.

Решение. Единичный вектор перпендикулярный прямой $\vec{n}=\{3/5;4/5\}^T$. Тогда

$$\delta=\frac{3}{5}x_0+\frac{4}{5}y_0+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}+\frac{8}{5}+\frac{1}{5}=2{,}4$$

Ответ: $\delta=2{,}4$.

Пример. Найти наименьшее расстояние от точки $M(4;0)$ до кривой $y^2 = 2x$.

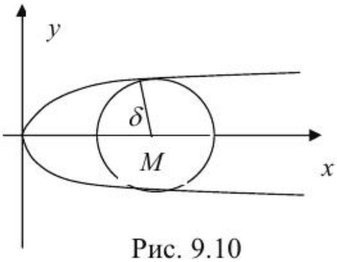


Рис. 9.10

Решение. Впишем окружность с центром в точке М и касающуюся данную кривую (риссунок 9.10). Решаем уравнения $\begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-4)^2 + y^2 = \delta^2 \end{cases}$. Исследуем на экстремум $\delta(x)$ и получим $x = 3$, $\delta = \sqrt{1+6}$.

Ответ: $\delta = \sqrt{7} \approx 2{,}6$.

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых линий.

Пусть заданы две прямые

L_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\vec{n}_1 = (A_1;B_1)^T$ и $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $\vec{n}_2 = (A_2;B_2)^T$.

Тогда следует

$$\cos\theta = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Получаем условие перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ и условие параллельности: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Удобно получить эти же условия для прямых линий, заданных угловыми коэффициентами. Из рисунка 9.11 видно, что $\theta = \theta_2 - \theta_1$,

$L_1 : y = k_1x + b_1$, L_2: $y = k_2x + b_2$, $k = \mathrm{tg}\theta$.

Тогда $\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{\mathrm{tg}\theta_2 - \mathrm{tg}\theta_1}{1 + \mathrm{tg}\theta_2\mathrm{tg}\theta_1}$, то есть

$$k = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}.$$

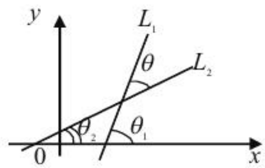


Рис. 9.11

Отсюда условие параллельности определяется как

$$k_2 = k_1,$$

а условие перпендикулярности при значении $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $(k = \infty)$ есть $1 + k_1k_2 = 0$.

Получаем связь угловых коэффициентов перпендикулярных прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример. Найти длину высоты треугольника с вершинами $A(1;2)$, $B(1;5)$, $C(3;4)$, опущенную из точки A на сторону BC (рисунок 9.12).

Решение *1.* Получим уравнение прямой линии

$$BC:\ \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\Rightarrow\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-5}{4-5}\Rightarrow x+2y-11=0.$$

Уравнение прямой перпендикулярной BC и проходящей через точку $A(1;2)$ есть $-y=2x$, так как $k_{BC}=-\frac{1}{2}$, то $k_{AD}=2$.

Наконец найдем точку пересечения AD и BC $\begin{cases}x+2y=11\\2x-y=0\end{cases}\Rightarrow D(11/5;22/5)$.

Таким образом, получаем

$$AD=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}=\sqrt{(2{,}2-1)^2+(4{,}4-2)^2}\approx 2{,}5.$$

Решение *2.* Составим нормированное уравнение прямой линии BC

$$\frac{x+2y-11}{\sqrt{5}}=0.$$

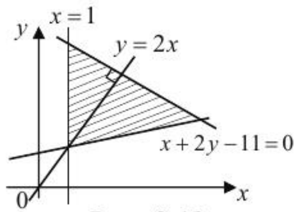


Рис. 9.12

Подставляем в него значения координаты точки A и по правилу, сформулированному выше, получим искомое расстояние

$$\delta=\frac{x_A+2y_A-11}{\sqrt{5}}=\frac{1+4-11}{\sqrt{5}}\approx -2{,}5.$$

Знак говорит о том, что точка A лежит вместе с прямой по одну сторону от начала координат.

Дадим простую геометрическую интерпретацию решений линейной системы алгебраических уравнений второго порядка. Пусть дана система двух совместных уравнений $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$, схематично изображенных на рисунках 9.13 на плоскости и в пространстве

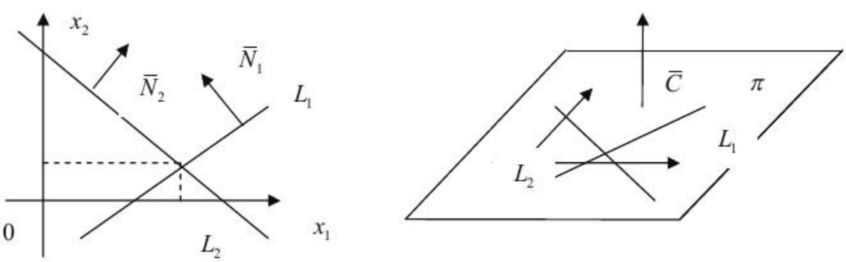


Рис. 9.13

Здесь векторы, характеризующие пересекающиеся прямые линии, имеют

$\overline{N}_1 = (a_{11};a_{12};0)^T = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{N}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$. Образуем их векторное произведение

$$\overline{C} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} = \overline{k}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \overline{k}\,\Delta .$$

Видим, что $|\Delta| = S$ — модуль основного определителя системы равен площади параллелограмма, построенного на векторах с компонентами, являющимися коэффициентами при неизвестных данной системы. Образуем новые векторы системы

$$\overline{N}_+ = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}_- = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что выполняется соотношение $\left|\overline{N}_1 \times \overline{N}_2\right| = \left|\overline{N}_+ \times \overline{N}_-\right| = \Delta$. Тогда правило Крамера будет иметь вид $x_1 = \dfrac{\left|\ \overline{b} \times \overline{N}_-\ \right|}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\left|\ \overline{N}_+ \times \overline{b}\ \right|}{\Delta}$. Здесь в числителях стоят площади, построенные на данных векторах. Отметим, что знак решений потерян и определяется дополнительным перебором решений.

Нетрудно эти выводы обобщить на систему трех линейных уравнений.

Пример. Найти наименьшее расстояние от параболы $y = x^2$ до прямой $x - y - 2 = 0$. Смотрите вспомогательный рисунок 9.14.

Решение. Перейдем к нормированному уравнению прямой линии:

$\dfrac{x-y-2}{\sqrt{2}} = 0; \quad p = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Искомая точка лежит на параболе $y = x^2$, тогда $\delta(x) = \dfrac{x - x^2 - 2}{\sqrt{2}}$. Исследуем ее на экстремум $\delta'(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{2}} = 0$. Получим $x = \dfrac{1}{2}$ и $y = \dfrac{1}{4}$.

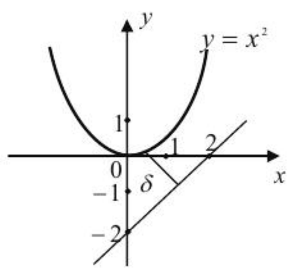


Рис. 9.14

Искомое расстояние равно $\delta = \left| \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2}{\sqrt{2}} \right| = 2{,}5$.

ЛЕКЦИЯ 10: «Уравнения плоскости и прямой линии в пространстве»

Уравнение плоскости в пространстве.
Уравнения прямой линии в пространстве. Примеры.

Уравнение плоскости в пространстве. Общее алгебраическое уравнение, описывающее некоторую поверхность в пространстве, имеет вид

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

где $\Phi(x, y, z) = \sum_{k,l,m} \alpha_{klm} x^k y^l z^m$ — алгебраический полином по степеням переменных *x, y* и *z*. В зависимости от порядка полинома получаются различные поверхности в пространстве. Плоскость описывает полином первого порядка с отличными от нуля коэффициентами

$$\alpha_{000} = D,\ \alpha_{100} = A,\ \alpha_{010} = B,\ \alpha_{001} = C.$$

Таким образом, уравнение плоскости в пространстве имеет ***общий вид:***

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad \text{I}$$

Будем, как и раньше для прямой, обозначать различные формы плоскости римскими цифрами в кружках. Существует 6 способов задания плоскости в пространстве.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Так как по условию плоскость содержит точку M_0, то выполняется равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычтем это выражение из уравнения общего вида. Получим ***уравнение плоскости, проходящей через заданную точку*** M_0

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad \text{II}$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного уравнения (рис. 10.1).

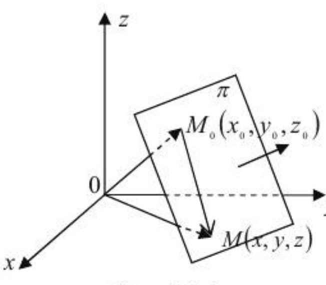


Рис.10.1

Пусть имеется некоторая плоскость π в пространстве. На рисунке 10.1 эта плоскость представлена в декартовой системе координат.

Введем вектор

$$\vec{n} = \bar{i}A + \bar{j}B + \bar{k}C$$

перпендикулярный этой плоскости. Определим также вектор $\overrightarrow{M_0M}$ от заданной точки на плоскости $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до текущей точки $M(x; y; z)$, тоже принадлежащей этой плоскости. Образуем вектор.

$$\overline{M_0M} = \bar{i}(x - x_0) + \bar{j}(y - y_0) + \bar{k}(z - z_0)$$

Так как вектор перпендикулярен плоскости, то он будет перпендикулярен любому вектору, лежащему в этой плоскости

$$\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0. \qquad \text{III}$$

Это выражение является ***векторным уравнением плоскости.*** Отсюда получим уравнение плоскости в общем виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Таким образом, числа *A, B* и *C* являются компонентами вектора перпендикулярного данной плоскости. Вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}^T$ называют нормальным вектором плоскости.

Приведем частные случаи неполных уравнений плоскости:

1. $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0,\ \mathrm{D}=0$ – плоскость, проходящая через начало координат.
2. $A=0,\quad By+Cz+D=0$ – уравнение плоскости параллельной оси OX (рис. 10.2,). Если же и $D=0$, то это совокупность плоскостей, содержащих ось *OX*.
3. $B=0,\ Ax+Cz+D=0$ (рисунок 10.3).

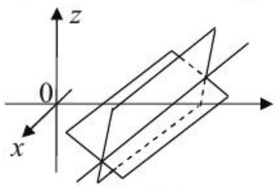


Рис. 10.2

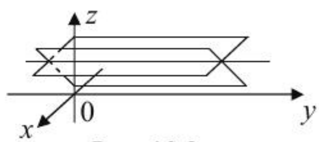


Рис. 10.3

4. $C=0,\ Ax+By+D=0$ (рис. 10.4).

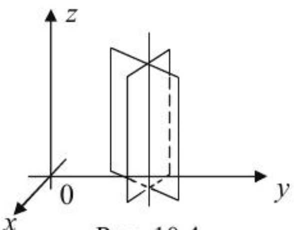


Рис. 10.4

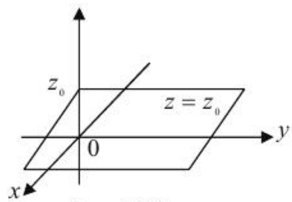


Рис. 10.5

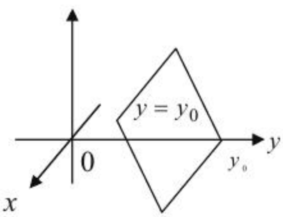


Рис. 10.6

5. $A=B=0,\ Cz=D\ \Rightarrow\ z=z_0=\dfrac{-D}{C}$ (рис. 10.5).
6. $A=C=0,\ y=y_0$, где $y_0=\dfrac{-D}{B}$ (рис. 10.6).
7. $B=C=0$, $x=x_0$, где $x_0=-\dfrac{D}{A}$ (рис. 10.7).

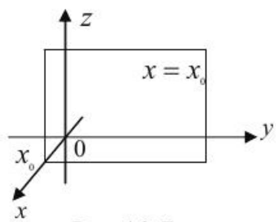
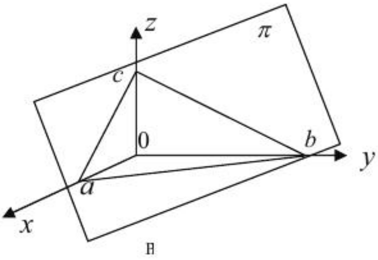


Рис.10.7

Получим ***уравнение плоскости в отрезках***. Из общего вида уравнения плоскости после элементарных преобразований получим

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad \text{IV}$$



На рисунке 10.8 видно, что плоскость пересекает оси координат в точках

$$A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(0,0,c).$$

Объём пирамиды, образованной пересечением плоскости с координатными плоскостями, легко определяется как

$$V = \left|\ \frac{1}{6} a \cdot b \cdot c\ \right|$$

Рис.10.8

Рассмотрим задачу о нахождении угла между двумя заданными плоскостями (рисунок 10.9). Каждая плоскость характеризуется нормальным вектором $\overline{n}$.

Итак, пересечение плоскостей образует прямую линию в пространстве

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

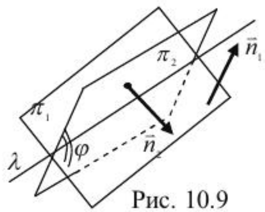


Рис. 10.9

Тогда угол между данными плоскостями будет определяться углом между нормальными векторами плоскостей $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ условием перпендикулярности плоскостей будет:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Для $\varphi = 0$ условием параллельности плоскостей будет:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

соответствующее условию коллинеарности векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

Получим ***уравнение плоскости, проходящей через три точки,*** не лежащие на одной прямой. Пусть имеем три различные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3 z_3)$ (рисунок 10.10). Составим векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M}$, где где $\overline{M_1M} = \{(x-x_1);(y-y_1);(z-z_1)\}^T$, а $M(x; y; z)$ – текущая точка на плоскости.

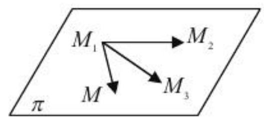


Рис. 10.10

Так как все эти векторы находятся в одной плоскости по построению, то они компланарны и их смешанное произведение должно равняться нулю

$$\left(\overline{M_1M}, \left[\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}\right]\right) = 0.$$

Получим
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{V}$$

или $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$

где $A = +\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$ и $C = +\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Заметим, что если три точки лежат на одной прямой, то две последние строчки в определителе пропорциональны и он тождественно равен нулю, то есть уравнение плоскости не определяется.

Получим ***нормированное уравнение плоскости.*** Выразим нормальный вектор плоскости через направляющие косинусы

$\overline{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}^T$, то есть положим его единичным, $|\overline{n}| = 1$.

Образуем радиус вектор

$$\overline{OM} = \{x, y, z\}^T,$$

где точка M лежит на плоскости π. Тогда непосредственно из рисунка 10.11 видно, что p наименьшее расстояние от начала координат до плоскости π.

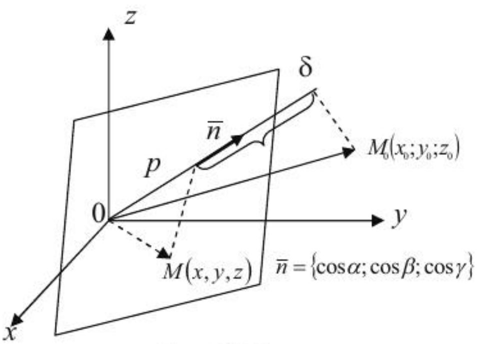


Рис. 10.11

Получим искомое уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad VI$$

Поставим задачу определить наименьшее расстояние от заданной плоскости до некоторой заданной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащей вне плоскости. Из рисунка следует, что $(\overline{n}, \overline{OM_0}) = p + \delta$. Отсюда получим удобное правило нахождения наименьшего расстояния точки до плоскости

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p = \delta$$

Таким образом, для получения величины отклонения δ точки от плоскости следует в левую часть нормированного уравнения подставить координаты точки. Заметим, что если $\delta > 0$, то точку M_0 от начала координат отделяет плоскость; если же $\delta > 0$, то они находятся по одну сторону от плоскости.

Пример. Задана плоскость $3x + 4y + 12z + 5 = 0$ и точка $M_0(-1;0;2)$. Найти наименьшее расстояние от этой точки до заданной плоскости.

Решение. Переходим к нормированному виду плоскости (рисунок 10.12)

$$\overline{n} = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|} = \frac{3\overline{i} + 4\overline{j} + 12\overline{k}}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{3}{13}\overline{i} + \frac{4}{13}\overline{j} + \frac{12}{13}\overline{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{13},\ \cos\beta = \frac{4}{13},\ \cos\gamma = \frac{12}{13},$$

$$\delta = \frac{3}{13}\cdot(-1) + \frac{4}{`3}\cdot(0) + \frac{12}{13}\cdot 2 + \frac{5}{13} = 2.$$

Ответ: $\delta = 2$.

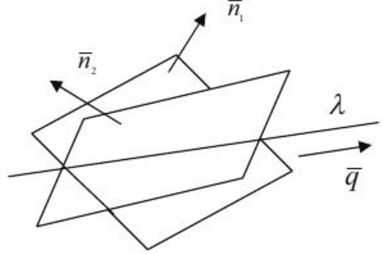


Рис. 10.12

Прямая линия в пространстве. Существует четыре способа задания прямой линии в пространстве R_3. Обозначим их римскими цифрами в кружках.

Пересечением двух плоскостей

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}. \qquad \text{I}$$

В этом случае имеем два уравнения с тремя неизвестными. Получаем бесконечное множество решений, т.е. если система совместна, то решение не определено. Исследуем расширенную матрицу системы

$$\hat{M}_1=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), Rg\,\hat{M}_1=2, \quad Rg\,\hat{M}=2, \quad \overline{x}=\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \ n=2, \ m=3.$$

Совместное решение дает уравнение прямой в пространстве.

Если плоскости параллельны, то $\overline{N_1}=\lambda\overline{N_2}$ и $\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & 0 & 0 & -D_2+\lambda D_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

$Rg\,\hat{M}_1=2, \quad Rg\,\hat{M}=1$. Уравнения не совместны, решения нет.

Каноническое уравнение прямой. Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на прямой и текущая точка $M(x;y;z)$ также лежит на прямой. Образуем вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}^T$. Если дан некоторый вектор $\overline{q}=\{l;m;n\}^T$ параллельный данной прямой, то эти векторы коллинеарны, поэтому имеем

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \qquad \text{II}$$

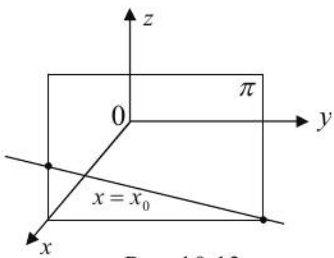


Рис. 10.13

причем вектор $\overline{q}$ можно образовать из векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ с помощью векторного произведения $\overline{q}=[\overline{n}_1,\overline{n}_2]$. Заметим, что если, например, $l=0$ (рис. 10.13), то, поскольку на ноль делить не принято, уравнение данной прямой записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \\ x=x_0 \end{cases}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Образуем два вектора из заданных точек $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и точки $M(x;y;z)$ на этой же прямой (рис. 10.14). Так как вектора $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M}$ коллинеарны, то получим

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}^T,$$

$$\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}^T \text{ и}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \text{III}$$

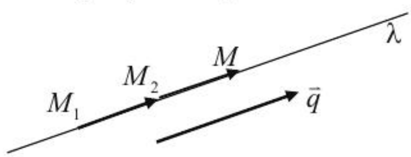


Рис.10.14

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;5;7)$, $A_2(8;7;9)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$. Найти уравнение прямой A_1A_2, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, уравнение высоты, опущенной из A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. Уравнение прямой A_1A_2 находим с помощью третьей формы

$$A_1A_2: \frac{x-3}{5} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{3}.$$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ находим с помощью формулы

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Последнее уравнение определяет плоскость $A_1A_2A_3$ и имеет вид:

$$-5(x-3)-19(y-5)+21(z-4)=0.$$

Здесь $\overline{N} = \{-5;-19;21\}^T$. Уравнение высоты A_4M определим как

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y-7}{-19} = \frac{z-8}{21}.$$

Параметрическое задание прямой линии. Непосредственно из канонической формы прямой следует $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t$, где t некоторый параметр, меняющийся произвольно. Получаем систему

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

Если представить $S = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ как путь в пространстве, вектор скорости как $\overline{V} = \bar{i}l + \bar{j}m + \bar{k}n$ и t как время, тогда данная система описывает равномерное движение материальной точки по прямой со скоростью

$$V = \sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении величины угла между заданными прямыми. Прямые линии характеризуются направляющими векторами $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$.(рис. 10.15)

$$L_1: \quad \overline{q}_1 = \{l_1;m_1;n_1\}^T,$$

$$L_2: \quad \overline{q}_2 = \{l_2;m_2n_2\}^T.$$

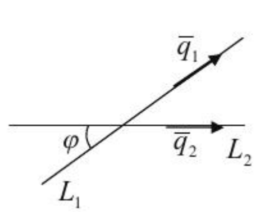


Рис. 10.15

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{q}_1,\overline{q}_2)}{|\overline{q}_1||\overline{q}_2|} = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

Условие перпендикулярности прямых линий:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

Условие параллельности прямых линий:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Получим также условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и быть параллельными. Пусть прямые пересекаются, тогда через них можно провести одну плоскость (рис. 10.16). Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на прямой L_1, точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$ на прямой L_2. Тогда три вектора $\overline{M_1M_2}$, $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ будут компланарны, и условие принадлежности двух прямых плоскости будет иметь вид:

$\left(\overline{M_1M_2}, [\overline{q}_1, \overline{q}_2]\right) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

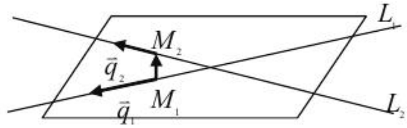


Рис. 10.16

В заключении этой лекции рассмотрим типовые задачи в приложении плоскости и прямой в пространстве и дадим некоторые алгоритмы решений.

1. Даны три плоскости. Найти точку их пересечения.

Решаем систему $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases}$ трех уравнений с тремя неизвестными. Если нет параллельных плоскостей, то получаем единственную точку пересечения.

2. Найти уравнение плоскостей, являющихся биссектрисными для данных двух пересекающихся плоскостей. На рисунке 10.17 представлен вид с торца пересекающихся плоскостей π_1 и π_2. Так как точка на биссектрисной плоскости должна равноотстоять от данных плоскостей, то, используя формулы $\delta_1 = \delta_2$, где $\delta_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1$

и $\delta_2 = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2$,

получим две биссектрисные плоскости (рисунок 10.17)

$$x(\cos\alpha_1 \pm \cos\alpha_2) + y(\cos\beta_1 \pm \cos\beta_2) + z(\cos\gamma_1 \pm \cos\gamma_2) - (p_1 \pm p_2) = 0.$$

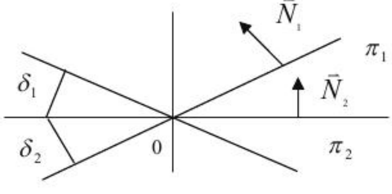


Рис. 10.17

3. Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 и перпендикулярную плоскости, задаваемой нормальным вектором $\overline{n} = \{A; B; C\}^T$.

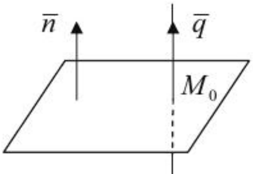


Рис.10.18

Ответ: $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$.

4. Найти точку M_1', симметричную точке M_1 относительно плоскости π (рисунок 10.19).

Способ решения таков. Находим координаты точки M_0 пересечения прямой

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

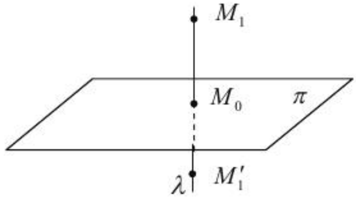


Рис. 10.19

с плоскостью $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$. Затем из условий деления отрезка пополам $\dfrac{x_1 + x_1'}{2} = x_0$, $\dfrac{y_1 + y_1'}{2} = y_0$ и $\dfrac{z_1 + z_1'}{2} = z_0$ находим координаты точки M_1'.

5. Найти точку M_1, симметричную точке M_1' относительно прямой. Находим плоскость, перпендикулярную данной прямой $\overline{n} = \{l, m, n\}$ и содержащую в себе точки M_1 и M_1'. Находятся координаты точки пересечения прямой и плоскости, которая и является точкой отражения.

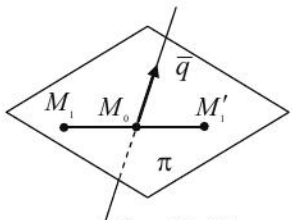


Рис. 10.20

Так же, как и в предыдущей задаче, из условий деления отрезка пополам определяем искомую точку M_1' (рисунок 10.20).

6. Найти наименьшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. (рис. 10.21 и рис.10.22)

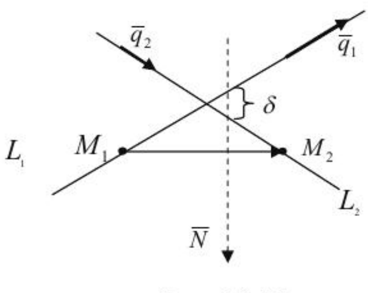


Рис. 10.21

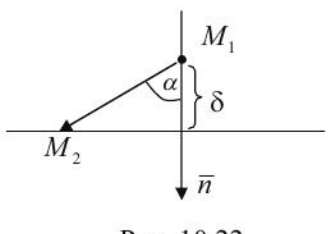


Рис. 10.22

Решение. $\overline{N}=\overline{q}_1\times\overline{q}_2$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}^T$. Тогда находим

$$\delta=\frac{\left(\overline{N}\cdot\overline{M_1M_2}\right)}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{M_1M_2}\right|}\cdot\left|\overline{M_1M_2}\right|.$$

Ответ: $\delta=\left|\dfrac{\left(\overline{N},\overline{M_1M_2}\right)}{\left|\overline{N}\right|}\right|$.

Используя данные алгоритмы решения, рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x-2y+z-8=0$ и удаленной от нее на расстояние $d=4$.

Решение. Перейдем к нормированному виду плоскости $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{8}{3}=0$.

По правилу поиска наименьшего отклонения точки от плоскости находим множество точек плоскостей, удаленных на $d=4$ от данной:

$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{8}{3}=\pm 4$$

$\pi_1:\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{20}{3}=0$. Ответ: $2x+2y+z-20=0$,

$\pi_2:\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{4}{3}=0$. Ответ: $2x+2y+z+4=0$.

Пример 2. Найти расстояние от точки $M(2;-1;3)$ до прямой: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{5}$ (рисунок 10.23).

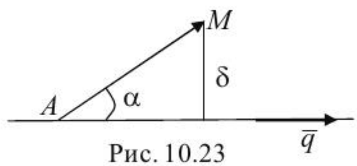


Рис. 10.23

Решение. $A(-1;-2;1)$ точка на прямой $\overline{AM}=\{3;1;2\}$. Видно, что $\delta=\left|\overline{AM}\right|\sin\alpha$. Образуем векторное произведение

$$\overline{q}\times\overline{AM}=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\3&4&5\\3&1&2\end{vmatrix}=+3\left(\overline{i}+3\overline{j}-3\overline{k}\right)\text{ и}$$

определим $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overline{q}\times\overline{AM}\right|}{\left|\overline{q}\right|\left|\overline{AM}\right|}=\dfrac{3\sqrt{19}}{\sqrt{50}\sqrt{14}}$.

Ответ: $\delta=\sqrt{14}\cdot\dfrac{3\sqrt{19}}{\sqrt{50}\sqrt{14}}=0{,}3\sqrt{38}\approx 1{,}85$.

Пример 3. Найти следы прямой на координатных плоскостях (рис. 10.24).

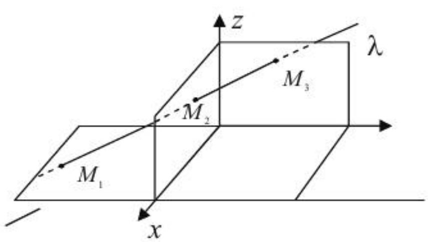


Рис. 10.24

Решение. Положим $z=0$, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}\\ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2},\\ x=4\end{cases}$$

откуда получим $M_1(4;2;0)$.

Далее полагаем $x=0$ и получаем $\begin{cases} -4=\dfrac{y-2}{2} \\ -4=\dfrac{z}{-2} \end{cases} \Rightarrow M_2(0;-6;8)$.

Полагаем $y=0$, $\begin{cases} x-4=-1 \\ x-4=-\dfrac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow M_3(3;0;2)$.

Ответ: $\begin{cases} M_1(4;2;0) \\ M_2(0;-6;8) \\ M_3(3;0;2) \end{cases}$.

Пример 4. Даны плоскости $3x+4y+2=0$ и $x+y+z-1=0$. Найти одну из биссектрисных плоскостей.

Решение. Перейдем к нормированной записи данных плоскостей

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{2}{5}=0 \quad \text{и} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$$

Искомое уравнение имеет вид: $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)x+\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)y-\dfrac{z}{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$.

Пример 5. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ и плоскости $x+2y+3z-29=0$.

Решение. $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-z-1=0 \\ x+2y+3z-29=0 \end{cases}$; $A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 29 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 5 & 25 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right)\sim$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Ответ: $M(6;4;5)$.

Пример 6. Найти точку симметричную точке $M(1;2;-1)$ относительно плоскости $x-2y+z-1=0$.

Решение. Дано $\overline{q}=\{1;-2;1\}^T$, прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости π, имеет вид (рисунок 10.25):

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

Найдем точку пересечения данной прямой и нашей плоскости

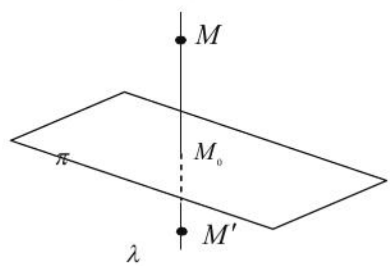


Рис.10.25

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2} \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z+1}{1} \\ x-2y+z-1=0 \end{cases};\ A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0{,}33 \\ 1 & 0 & 0 & 1{,}85 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}15 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} x_0=1{,}85 \\ y_0=0{,}33 \\ z_0=-0{,}15 \end{cases}.$$

Далее используем: $\begin{cases} \dfrac{x+x'}{2}=x_0, \\ \dfrac{y+y'}{2}=y_0, \\ \dfrac{z+z'}{2}=z_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'=2x_0-x_1=2{,}7 \\ y'=2y_0-y_1=-1{,}4 \\ z'=2z_0-z_1=0{,}7 \end{cases}.$

Ответ: $M'(2{,}7;-1{,}4;0{,}7)$.

ЛЕКЦИЯ 11: «Билинейные алгебраические формы»

Квадратичные формы. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Инварианты преобразования на плоскости.

На предыдущей лекции мы познакомились с алгебраическими формами первого порядка и показали, что их геометрической иллюстрацией является прямая линия на плоскости или плоскость и прямая линия в пространстве.

Познакомимся с билинейной и квадратичной алгебраическими формами и рассмотрим геометрическое приложение последней.

Функцию от двух векторных переменных $F(\overline{x},\overline{y})$, определенную в линейном пространстве, называют ***билинейной формой***, если эта функция линейна по каждому из своих аргументов

$$F(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\overline{z})=\alpha F(\overline{x},\overline{z})+\beta F(\overline{y},\overline{z}),$$

$$F(\overline{x},\alpha\overline{y}+\beta\overline{z})=\alpha F(\overline{x},\overline{y})+\beta F(\overline{x},\overline{z}),$$

где α,β любые действительные и $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ любые векторы из данного линейного пространства. Для любых n–мерных векторов в базисе $\overline{e}=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n)$ билинейная форма определится следующим образом

$$F(\overline{x},\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j(\overline{e}_i,\overline{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_i y_j=\overline{x}^T B\overline{y}=(\overline{x},B\overline{y}).$$

Здесь матрица B называется матрицей билинейной формы.

Частным случаем билинейной формы является скалярное произведение двух разных векторов.

Квадратичной формой $F(\overline{x})$ называется однородный многочлен второй степени относительно одной векторной переменной $\overline{x}$, определяемой скалярным произведением

$$F(\overline{x})=(\overline{x},\ A\overline{x})=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j\ .$$

Например: 1. $F_1=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2$. 2. $F_2=x_1^2-x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2+3x_3^2$.

3. $F_3=-x_1^2-2x_2^2-x_3^2-2x_4^2$.

В этих примерах квадратичная форма является функциями двух, трех и четырех координат (переменных) соответственно. Удобно использовать симметричную форму записи, выделив диагональные элементы, когда выполняется

$$F(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i\neq j}^{n}a_{ij}x_i x_j.$$

Тогда для двух первых из приведенных выше примеров квадратичные формы можно переписать в виде

$$F_1=2x_1^2-2\cdot\frac{1}{2}x_1x_2+x_2^2,\qquad a_{11}=2,\ a_{12}=a_{21}=\frac{1}{2},\ a_{22}=1.$$

$$F_2 = x_1^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + 3x_3^2, \qquad a_{11} = 1,\ a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2},\ a_{13} = a_{31} = 1,$$

$$a_{23} = 0,\ a_{33} = 3,\ a_{22} = -1.$$

Квадратичной форме $F(\overline{x})$, записанной в симметричном виде в базисе *B,* соотносят симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & . \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & . \\ .. & .. & .. & . \end{pmatrix}.$$

Для вышеприведенных примеров матрицы имеют вид соответственно:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как соответствуют матрицы квадратичным формам на примере квадратичной формы двух переменных:

$$F(\overline{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

С другой стороны по определению квадратичной формы получим

$$(\overline{x}, A\overline{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

что и требовалось показать.

Пусть в базисе B' квадратичная форма $F(\overline{x})$ не содержит произведений компонент $x_i \cdot x_j$ для $i \neq j$, то есть

$$F(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

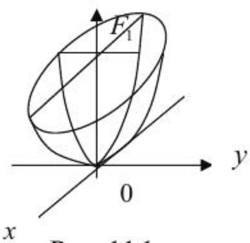


Рис. 11.1

В этом случае говорят, что квадратичная форма имеет ***канонический вид***. В частности, если $\lambda_i = 0, \pm 1$, то квадратичная форма имеет нормальный вид. Переход к нормальному виду может быть осуществлен заменой переменной $x_i' = \sqrt{|\lambda_i|}x_i$. В этом случае зависимости $F(\overline{x})$ от двух переменных ее можно интерпретировать как поверхность в координатах $x,\ y,\ z$.

Например, $F_1(x, y) = 2x^2 + y^2$ имеет канонический вид и определяет параболоид при всех x и y, где $F_1(x, y) \geq 0$. Линии уровня $F(x, y) = c$ определяют эллипсы. Поверхность представлена на рисунке 11.1

Другой пример, $F_2 = x^2 - y^2$ имеет канонический вид и является гиперболическим параболоидом, который приведен на рисунке 11.2 .

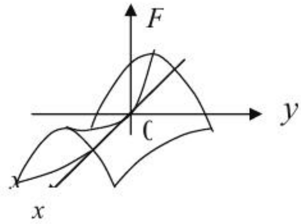


Рис. 11.2

Рассмотрим еще один пример квадратичной формы $F_3 = x^2 - 2xy + y^2$, которая может быть приведена к каноническому виду заменой переменных $x' = x - y,\ y' = y$.

Тогда $F_3(x', y') = (x')^2$ и ее вид представлен на рисунке 11.3. Отметим, что здесь имеет место вырождение формы, что связано с уменьшением числа независимых переменных.

В общем случае можно утверждать, что для всякой квадратичной формы существует такой базис, в котором она имеет канонический вид 11.3 и который является единственным для данной квадратичной формы.

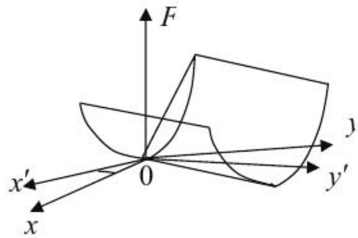


Рис. 11.3

Заметим, что $F(x, y) = const$ интерпретируется как линия второго порядка на плоскости, а $F(x, y, z) = const$ как поверхность второго порядка в пространстве. В дальнейшем мы подробно остановимся на этом.

Квадратичную форму $F(\overline{x})$ называют ***положительно (отрицательно)*** определенной, если $F(\overline{x}) \geq 0$ $\left(F(\overline{x}) \leq 0\right)$ при всех $\overline{x} \subset R$. Например, на первом рисунке квадратичная форма $F_1 = 2x^2 + y^2$ является положительно определенной.

Квадратичную форму называют ***знакопеременной*** (неопределенной), если ее значения могут быть как положительными, так и отрицательными, как это видно из рисунка 11.2 формы $F_2 = x^2 - y^2$.

Тип квадратичной формы легко устанавливается, если эту форму привести к каноническому виду. При этом справедлив ***закон инерции***: число слагаемых с положительными коэффициентами и число слагаемых с отрицательными коэффициентами постоянно и не зависит от линейного невырожденного преобразования, с помощью которого можно привести квадратичную форму к каноническому виду. Этот закон имеет очень простое объяснение. Как бы мы ни поворачивали фигуру (например, эллипс на плоскости), она остается той же фигурой (то есть эллипсом и не может превратиться в гиперболу или параболу). Кроме процедуры приведения квадратичной формы к каноническому виду существует альтернативный и простой способ определения ее типа – ***критерий Сильвестра***. Суть его заключается в следующем. По заданной матрице A формы $F(\overline{x})$ составляется последовательность ее главных миноров

$$D_1 = a_{11};\ \ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

Тогда:

1) если $D_k > 0, \left(k = \overline{1,n}\right)$, то $F(\overline{x})$ — является положительно определенной;

2) если $D_k(-1)^k > 0, \left(k = \overline{1,n}\right)$, то $F(\overline{x})$ — является отрицательно определенной;

3) если оба условия не выполняются, то $F(x)$ является знакопеременной формой. При $D_k = 0$ применяется метод Лагранжа (смотрите далее).

Например, для $F(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, а главные миноры $D_1 = 3;\ \ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6,\ \ D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 28$ и так далее положительны. Значит, данная квадратичная форма является положительно определенной.

Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Инварианты преобразования. Приведение к каноническому виду квадратичных форм двух переменных производится следующим образом. Существуют два метода приведения к каноническому виду. Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении полных квадратов. Рассмотрим действие этого метода на примере квадратичной формы трех переменных

$$F(\overline{x}) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2.$$

Выделим полный квадрат, содержащий все слагаемые с x_2:

$$F(\overline{x}) = -\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + x_1^2 + 4x_1x_3 - 8x_3^2.$$

Далее выделим полный квадрат, содержащий x_1:

$$F(\overline{x}) = -(x_1 - x_2)^2 + \left(x_1^2 + 2x_1(2x_3) + 4x_3^2\right) - 4x_3^2 - 8x_3^2.$$

Вводим новые переменные $x_1' = (x_2 - x_1);\ x_2' = (x_1 + 2x_3);\ x_3' = x_3$, получим знакопеременный канонический вид $F\left(\overline{x'}\right) = -x_1'^2 + x_2'^2 - 12x_3'^2$.

Другой способ – это метод собственных векторов. Так как матрица квадратичной формы симметрична, то ее можно представить в виде $A = UDU^T$, где D – диагональная матрица и элементы, стоящие на диагонали, являются собственными числами матрицы A.

$$F(\overline{x}) = (\overline{x}, A\overline{x}) = \left(\overline{e}, U^T AU\overline{e}\right) = (\overline{e}, D\overline{e}).$$

Матрица U ортогональна $\left(U^T = U^{-1}\right)$. Векторы $\overline{e}_i$ являются базисными.

Собственные числа λ_i, как показано в пятой лекции, находятся из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

Для каждого собственного числа находится свой собственный вектор $\bar{x}$ $A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow D\bar{e}_i = \lambda_i\bar{e}_i$, где $U\bar{x} = \bar{e}$ и матрица U в качестве столбцов имеет координаты векторов $\bar{e}_i$. В базисе $B = \left\{\bar{e}_i,\ i = \overline{1,n}\right\}^T$ квадратичная форма имеет канонический вид. Напомним, что если λ_i различны, то собственные векторы независимы. Подробнее рассмотрим преобразование квадратичной формы двух переменных

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \text{ с } \hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

которая при $F = -H$ интерпретируется как линия второго порядка на плоскости XOY. Если $H = 0$, то уравнение называется однородным и фигура, определяемая этим уравнением, обладает центром симметрии относительно начала координат. Сущность приведения к каноническому виду состоит в повороте координат на угол, при котором уравнение не содержит произведения xy, т.е. полагаем коэффициент $B = 0$.

$$F(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = (\bar{x}', D\bar{x}'), \text{ где } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая матрица для $F(x, y)$ $\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ определяет характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. Его решение имеет стандартный вид

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \left(AC - B^2\right) = 0$$

или по теореме Виета

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

где $A + C = \lambda_1 + \lambda_2 = Tr\ \hat{A}$ и $AC - B^2 = \lambda_1\lambda_2$ являются инвариантами.

Величина $\det A \equiv \delta = AC - B^2$ является главным инвариантом, который не меняется при линейном преобразовании координат. Действительно, после произвольного линейного преобразования координат форма меняет вид

$$F(x', y') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

Но обе эти формы преобразуются к одному и только одному каноническому виду

$$F(x'', y'') = \lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2.$$

Уравнения имеют одни и те же корни, поэтому имеем два инварианта

$$A + C = A' + C' = const \text{ и } AC - B^2 = A'C' - B'^2 = const,$$

где главный инвариант $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 = const$.

Для собственных значений λ матрицы A возможны два варианта реализации:

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае собственные векторы определяют два главных направления новых осей координат, и в этих координатах линия будет иметь канонический вид;

б) $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда $A = C$ и $B = C$ $\left(A + C = 2\lambda,\ CA - B^2 = \lambda^2\right)$. В этом случае любое одно направление главное, а линия симметрична относительно оси координат. Например, эллипс вырождается в окружность.

Приведем классификацию квадратичных форм двух переменных.

1. Квадратичная форма называется ***эллиптической***, если λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют одинаковые знаки. При этом $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ и канонической линией является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Квадратичная форма называется ***гиперболической***, если λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют различные знаки. При этом $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$ и канонической линией является гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Квадратичная форма называется ***параболической***, если одно из чисел λ равно нулю. При этом

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

и канонической линией является парабола

$$y = 2ax^2.$$

В следующей лекции мы подробно проанализируем эти линии.

Заметим, что эти линии называются кониками, потому что являются фигурами сечения плоскостями π_1, π_2 и π_3 конуса в пространстве R_3.

Передвигая плоскости π_1, π_2 и π_3 параллельно самим себе, легко увидеть трансформацию фигур второго порядка. Например, можно увидеть, что гипербола вырождается в две прямые линии, когда плоскость π_2 совпадает с плоскостью XOZ, и как парабола при движении плоскости π_3 вырождается в прямую линию, образующую конус (рисунок 11.4).

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $F(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$. Определить тип линии и угол поворота на плоскости XOY.

Решение. Данная квадратичная форма имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Применяя критерий Сильвестра, получим $D_1 = 17 > 0$ и $\delta = D_2 = \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} > 0$.

Таким образом, фигура является эллипсом, а квадратичная форма является знакоположительной.

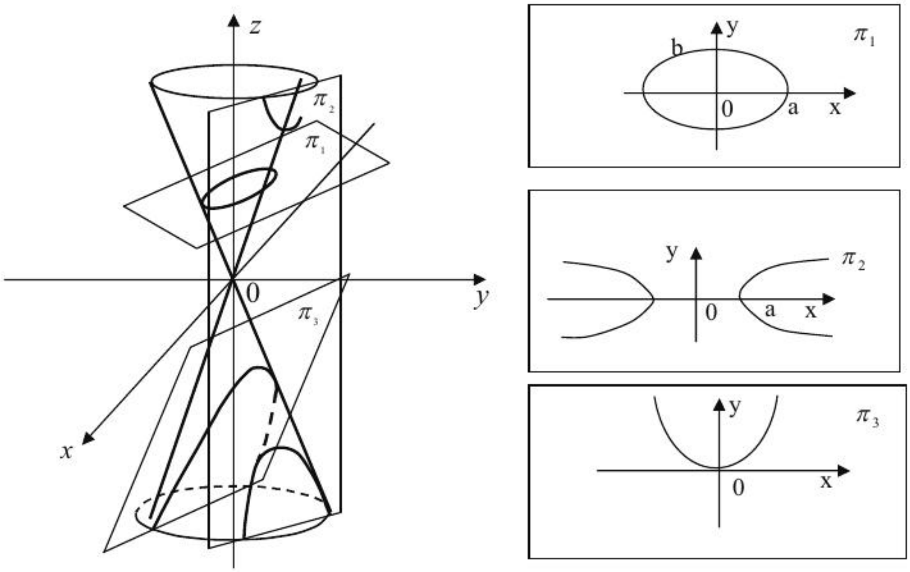


Рис. 11.4

Характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Его решение дает $\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$. Получим два корня $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 20$. Заметим, что корни необходимо располагать по мере их возрастания по величине. Это связано с тем, что величина x стоит на первом месте и y на втором в записи квадратичной формы. Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 = 80 \text{ или } \frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Найдем собственные векторы данной матрицы, то есть базис, где она диагональна. Собственные векторы матрицы определяют главные направления.

Для значения $\lambda_1 = 5$ из системы

$$A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12x_1' - 6y_1' = 0 \\ 6x_1' - 3y_1' = 0 \end{cases}$$

получим $y_1' = 2x_1'$, где, положив $x_1' = 1$, определим $y_1' = 2$. Получим $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Произвол выбора x_1' связан, как уже отмечалось, с тем, что $\det(A - \lambda E) = 0$ и уравнения системы линейно зависимы, поэтому одно из них отбрасываем. Для $\lambda_2 = 20$ по аналогии получим $\begin{cases} -3x_2' - 6y_2' = 0 \\ -6x_2' - 12y_2' = 0 \end{cases}$.

Полагая $y_2' = 1$, получим $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Видно, что векторы ортогональны, так как $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1;2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$. Образуем из этих векторов единичные векторы $\bar{i}' = \frac{\bar{x}_1'}{|\bar{x}_1'|} = \frac{\bar{i} + 2\bar{j}}{\sqrt{5}}$ и $\bar{j}' = \frac{-2\bar{i} + j}{\sqrt{5}}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ единичные ортогональные векторы старого базиса. Так как $\bar{x} = x\bar{i} + y\bar{j} = \bar{x}'\bar{i}' + \bar{y}'\bar{j}'$, то получим систему

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y' \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y' \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = U\bar{x}'.$$

Матрица поворота определяется как

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Определяем угол поворота $\varphi \approx 70^\circ$.

Линия представлена на рисунке 11.5.

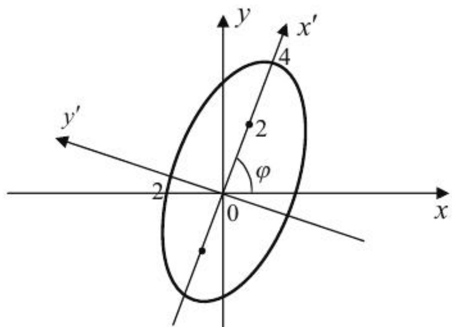


Рис. 11.5

ЛЕКЦИЯ 12: «Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы»

Каноническое уравнение эллипса. Канонические уравнения гиперболы и параболы. Полярная система координат.

Каноническое уравнение эллипса. ***Эллипсом*** называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости есть величина постоянная.

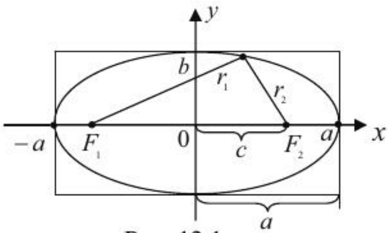


Рис. 12.1

Точки F_1 и F_2 являются фокусами эллипса. Если фокусы совпадают, то эллипс вырождается в окружность.

По определению $r_1 + r_2 = 2a = const$. Тогда используя соотношения

$$r_1 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$
$$r_2 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2},$$

получим уравнение

$$2a = \sqrt{y^2 + (x+c)^2} + \sqrt{y^2 + (x-c)^2}.$$

Возводя части равенства последовательно два раза в квадрат, после достаточно громоздких выкладок получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где введено обозначение $b^2 = a^2 - c^2$. Здесь a называется большой полуосью, а b — малой полуосью. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются фокусами эллипса, а точки $A(-a;0)$ и $B(a;0)$ —вершинами эллипса. Как видно из рисунка 12.1, эллипс имеет две оси симметрии OX и OY. Кроме того, весь эллипс находится внутри прямоугольника

$$\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases}.$$

Эксцентриситетом эллипса называют величину $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{в^2}{a^2}} < 1$. Для окружности $e = 0$ (так как $a = b$).

Директрисой $D_i(i=1,2)$ эллипса, отвечающей соответствующему фокусу $F_i(i=1,2)$, называется прямая, расположенная в полуплоскости $\sigma_i(i=1,2)$ перпендикулярно большой оси эллипса на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра. Так как

$e < 1$, то прямые D_1 и D_2 расположены вне эллипса. Из рисунка 12.2 видно, что $P = \frac{a}{e} - c$ есть расстояние от фокуса до ближайшей директрисы

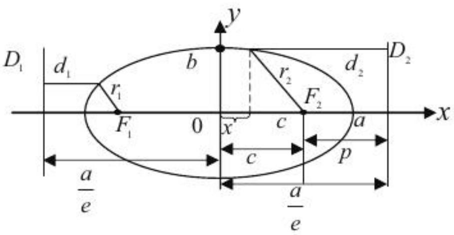


Рис. 12.2

Уравнения директрис:

$$D_1 : x = -\frac{a}{e}, \ (\sigma_1),$$

$$D_2 : x = \frac{a}{e}, \ (\sigma_2), \ e < 1.$$

Свойство эллипса: отношение расстояния r_i, от произвольной точки эллипса до фокуса F_i, к расстоянию от этой точки до директрисы d_i, соответствующей этому фокусу, равно величине эксцентриситета этого эллипса, то есть постоянно $\frac{r_i}{d_i} = e \quad (i = 1,2)$.

Заметим, что данная формула может быть альтернативным определением эллипса. Покажем это. Для правого фокуса $\frac{r_2}{d_2} = e$. Итак, имеем $r_2{}^2 = y^2 + (c - x)^2$, подставим уравнение эллипса $y^2 = b^2 - \frac{x^2}{a^2} b^2$ и получим

$$r_2{}^2 = b^2 - \frac{x^2}{a^2} b^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 - 2cx + x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) =$$
$$= a^2 - 2cx + x^2 \frac{c^2}{a^2} = \left(a - \frac{xc}{a} \right)^2 = (a - xe)^2.$$

Откуда $r_2 = \pm(a - xe)$. Так как $r_2 > 0$, то выбираем положительный знак $(e < 1, x < a)$. Окончательно получим $r_2 = a - ex$. С другой стороны $d_2 = \frac{a}{e} - x$.

Получим искомый результат $r_2 / d_2 = (a - xe) / \left(\frac{a}{e} - x \right) = e$.

Аналогично можно получить выражение и для левого фокуса

$$r_1 / d_1 = (a + xe) / \left(\frac{a}{e} + x \right) = e.$$

Рекомендуем получить его самостоятельно.

Каноническое уравнение гиперболы. ***Гиперболой*** называют геометрическое место точек плоскости, для которой абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Имеются две ветви W_1 и W_2 гиперболы (рисунок 12.3).

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$, где $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

После достаточно громоздких преобразований можно получить каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

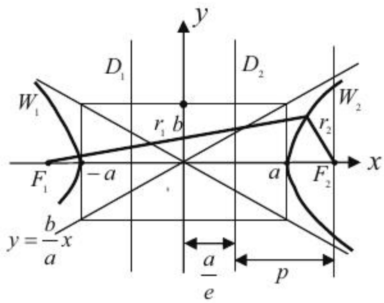


Рис.12.3

Здесь $b^2 = c^2 - a^2$. При значениях $x \to \pm\infty$ имеем уравнения асимптот гиперболы

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Фигура имеет две оси симметрии и лежит вне прямоугольника

$$\begin{cases} x \le -a, & x \ge a \\ y \le -b, & y \ge b \end{cases}.$$

Ось OX называется действительной осью гиперболы, а ось OY – мнимой осью гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы определяется как $e \equiv \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1.$

Директрисой гиперболы $D_i\left(i = \overline{1,2}\right)$, соответствующей фокусу $F_i(i = 1,2)$, называется прямая, перпендикулярная действительной оси гиперболы и лежащая на расстоянии $\frac{a}{e}$ от ее центра. Уравнения директрис

$$D_1 : x = -\frac{a}{e} \text{ и } D_2 : x = \frac{a}{e} \quad e > 1.$$

Свойство гиперболы. Отношение расстояний от фокуса до точки, лежащей на гиперболе, к расстоянию от этой точки до директрисы (соответствующему этому фокусу) есть величина постоянная и равная эксцентриситету гиперболы, то есть $\frac{r_i}{d_i} = e \quad (i = 1,2)$ для обеих ветвей гиперболы.

Покажем это для одного из фокусов, например F_2. Для фокуса F_1 сделать это самостоятельно. Возможны два варианта для каждой из двух ветвей гиперболы.

Для ветви W_2 имеем

$$r_2 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 + x^2 - 2cx + e^2} = \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} - 2ca + a^2} =$$

$$= \pm\left(\frac{xc}{a} - a\right) = (xe - a).$$

Так как $r_2 > 0,\ x > a,\ e > 1$, то выбираем положительный знак $r_2 = xe - a$.
С другой стороны, из рисунка 12.4 видно, что

$$d_2 = x - \frac{a}{e}.$$

Тогда получаем искомый результат

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{xe - a}{x - \frac{a}{e}} = e.$$

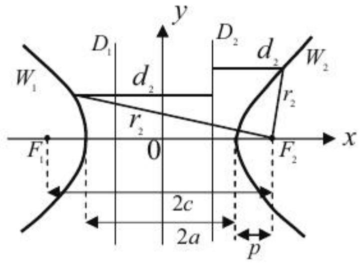


Рис. 12.4

Для ветви W_1:

$$r_2 = \sqrt{y^2 + (|x| + c)^2} = +(|x|e + a),\quad |x| > a,\ e > 1.$$

Выбираем положительный знак.

С другой стороны, $d_2 = |x| + \dfrac{a}{e}$.

Получим $\dfrac{r_2}{d_2} = \dfrac{|x|e + a}{|x| + \frac{a}{e}} = e$, что и требовалось показать.

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой так же расположенной в этой плоскости. Здесь точку F называют фокусом параболы, а указанная прямая является директрисой.

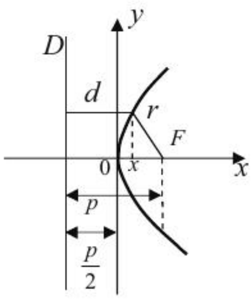


Рис. 12.5

Так как по определению $r = d$, то $e = 1$ (эксцентриситет параболы равен единице). Легко получить уравнение параболы

$$\begin{cases} r^2 = \left(\dfrac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 \\ d^2 = \left(\dfrac{p}{2} + x\right)^2 \end{cases}$$

$$y^2 = 2px.$$

Это каноническое уравнение параболы. Постоянная p является параметром параболы, $p > 0$ для рисунка 12.5.

Парабола имеет одну ось симметрии (OX). Область определения параболы $x > 0$. Директриса определяется D: $x = -\dfrac{p}{2}$ и $e = 1$.

Другие варианты расположения параболы могут быть следующими:

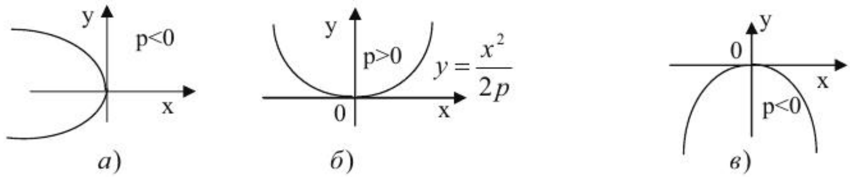


Рис. 12.6

Общее уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$. На рис. 12.7 представлено ее положение в зависимости от значений корней квадратного трехчлена при $y = 0$.

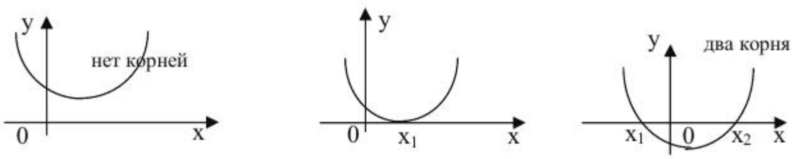
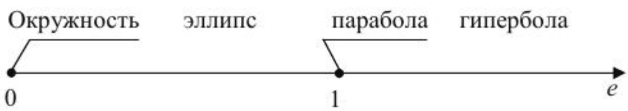


Рис. 12.7

Если по оси отложить значения эксцентриситета, то имеем следующую классификацию коников.



В заключении этой лекции получим уравнение коник в полярной системе координат. Полярные координаты характеризуются двумя независимыми переменными – длиной ρ и углом φ $\left((x, y) \Rightarrow (\rho, \varphi)\right)$.

Связь декартовых и полярных координат осуществляется с помощью следующих преобразований (рис. 12.8).

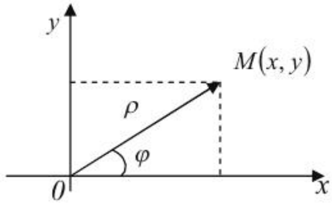


Рис. 12.8

Прямого преобразования:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

и обратного:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Для параболы удобно поместить фокус в центр полярных координат, при этом парабола сдвинется на величину $-\dfrac{p}{2}$. Тогда по определению параболы $r=\rho=d$, где

$$d=p+x=p+\rho\cos\varphi.$$

Отсюда получим уравнение параболы в полярных координатах:

$$\rho(\varphi)=\frac{p}{1-\cos\varphi},\ \varphi\in(0,2\pi).$$

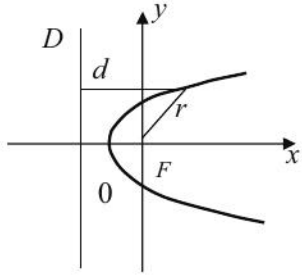


Рис. 12.9

Отметим оптические свойства параболы. Из рисунка 12.9 видно, что если поместить источник света в фокус параболы, то отраженные от кривой лучи света будут распространяться параллельно друг другу. На этом свойстве параболы основано действие таких технических устройств, как прожектор и телескоп.

Для эллипса поместим первый фокус в начало полярных координат (рисунок 12.10).

Тогда $r_1=ed_1$, $d_1=p+x=p+\rho\cos\varphi$.

Отсюда $\rho=e(p+\rho\cos\varphi)$ и получим уравнение эллипса в полярных координатах:

$$\rho(\varphi)=\frac{ep}{1-e\cos\varphi},\varphi\in[0,2\pi].$$

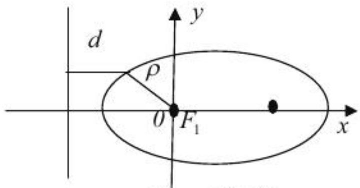


Рис. 12.10

Отметим оптическое свойство эллипса. Лучи света, исходящие из одного его фокуса, фокусируются в другом фокусе.

Для гиперболы сместим начало полярных координат, например, во второй фокус (рисунок 12.11). Тогда для первой ветви гиперболы $r_2=\rho$ и $r_2/d_2=e$, где $d_2=p+x=p+\rho\cos\varphi$.

Получим выражение $\rho=e(p+\rho\cos\varphi)$,

откуда следует: $\rho(\varphi)=\dfrac{ep}{1-e\cos\varphi}$.

Для второй ветви W_2: $d_2=|x|-p$, получим $\rho=e(\rho/\cos\varphi/-p)$. Откуда

$$\rho(\varphi)=\frac{ep}{e|\cos\varphi|-1}\text{ при }\cos\varphi>\frac{1}{e}.$$

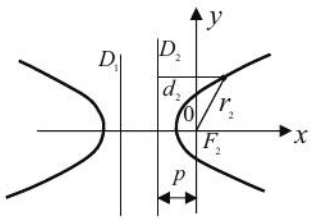


Рис. 12.11

Отметим также оптическое свойство гиперболы. Лучи света, исходящие из одного фокуса после отражения от гиперболы, будут распространяться так, как будто их источником был другой фокус. Оптические свойства эллипса и гиперболы широко применяются для создания оптических иллюзий.

Пример. Привести уравнение линии $y = \dfrac{3x^2 - 12x + 4}{4x - 8}$ к каноническому виду и построить график функции.

Решение. Получим $4y(x-2) = 3(x-2)^2 - 8$, $(x \neq 2)$. Сделаем параллельный перенос начала координат в точку $M(2{,}0)$. Вводим новую координату $x_1 = x - 2$. Перепишем уравнение в виде $3x_1{}^2 - 4yx_1 = 8$. Находим собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 4$ и $\delta = -4 < 0$. Получаем уравнение гиперболы $-x_1{}^2 + 4y^2 = 8$ с $a = 2\sqrt{2}$ и $b = \sqrt{2}$.

Собственные векторы для $\lambda_1 = -1$ $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и для $\lambda_2 = 4$ $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Новый базис $\bar{e}_1' = \dfrac{\bar{i} + 2\bar{j}}{\sqrt{5}}$ и $\bar{e}_2' = \dfrac{-2\bar{i} + \bar{j}}{\sqrt{5}}$. Образуем матрицу поворота $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Из выражения $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ получим $\varphi \approx 70^\circ$.

На рисунке 12.12 представлен график данной функции.

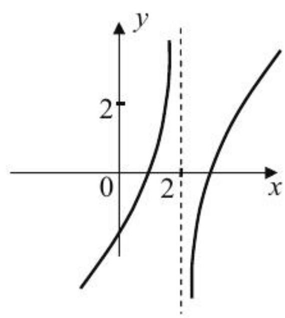


Рис.12.12.

ЛЕКЦИЯ 13: «Уравнение центра и признаки вырождения кривых второго порядка»

Уравнение центра и признаки вырождения кривых на плоскости.
Приведение квадратичных форм от трех переменных к каноническому виду.

Уравнение центра и признаки вырождения кривых на плоскости.

Пусть дано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Нашей целью будет приведение его к каноническому виду. Квадратичную форму $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ с помощью матрицы поворота можно привести к каноническому виду. От линейных членов избавляемся методом сдвига фигуры относительно осей координат:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\mu_1 x' + 2\mu_2 y' + F = 0,$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 = -F + \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2} \equiv H.$$

Заменой переменных (сдвиг координат):

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} \end{cases},$$

уравнение приводится к каноническому виду

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 = H.$$

Если $H < 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки, то получаем мнимый эллипс. При $H < 0$ получаем обычный эллипс и при $H = 0$ вырожденный эллипс в виде точки $x'' = 0, y'' = 0$.

Если $H < 0$, то при разных знаках $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ получаем гиперболу типа $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и при $H > 0$ другую – типа $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, повернутую на угол $\frac{\pi}{2}$.

При $H = 0$ гипербола вырождается в две линии $y = \pm\frac{b}{a}x$ $(a^2 = \frac{H}{\lambda_1}, b^2 = \frac{H}{\lambda_2})$.

Если одно из значений λ равно нулю, то получим параболу, например$(\lambda_2 = 0)$,

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 y' = H \Rightarrow \lambda_1 x''^2 + 2\mu_2 y'' = H, \text{ где } H = -F + \frac{\mu_1}{\lambda_1}.$$

Для $H<0$ получим уравнение мнимой параболы. При $\mu_2=0$ парабола вырождается в одну из линий $\left(\lambda_1(x'')^2-H=0\right)$: $x''=\pm\sqrt{\dfrac{H}{\lambda_1}}$.

Рассмотрим задачу нахождения центра фигуры (коники) в общем виде. Итак, требуется найти центр (x_0,y_0) фигуры, заданной уравнением $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Сначала сделаем перенос осей координат: $x=\underline{x}+x_0$, $y=\underline{y}+y_0$, где $\underline{x}$ и $\underline{y}$ координаты той же точки исследуемой линии.

$$A\underline{x}^2+2B\underline{x}\underline{y}+C\underline{y}^2+2A\underline{x}x_0+Ax_0^2+2Bx_0\underline{y}+2B\underline{x}y_0+Cy_0^2+2C\underline{y}y_0+$$
$$+2D\underline{x}+2Dx_0+2E\underline{y}+2Ey_0+F\equiv$$
$$\equiv A\underline{x}^2+2B\underline{x}\underline{y}+C\underline{y}^2+2\overline{D}\underline{x}+2\overline{E}\underline{y}+\overline{F}=0,$$

где $\begin{cases}\overline{D}=D+Ax_0+By_0=0,\\ \overline{E}=E+Cy_0+Bx_0=0,\\ \overline{F}=F+Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0.\end{cases}$

Точка M(x_0,y_0) является центром при $\overline{D}=0$, $\overline{E}=0$.

Получим $\begin{cases}Ax_0+By_0=-D\\ Bx_0+Cy_0=-E\end{cases}$, где $\delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}\neq 0$. По правилу Крамера получим координаты центра:

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{\delta};\ y_0=\frac{\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{\delta}.$$

Выражение для определения свободного члена перегруппируем

$$\overline{F}=\left(Ax_0+By_0+D\right)x_0+\left(Bx_0+Cy_0+E\right)y_0+\left(Dx_0+Ey_0+F\right)=Dx_0+Ey_0+F.$$

Замечаем, что два первых слагаемых равны нулю. Окончательно получим, подставляя координаты центра

$$\overline{F}=D\frac{\begin{vmatrix}B & D\\ C & E\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}+E\frac{\begin{vmatrix}D & A\\ E & B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}+F\frac{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}}.$$

Видно, что это определитель третьего порядка, разложенный по последней строке. Таким образом, получим

$$\overline{F}=\frac{\Delta}{\delta},\text{ где }\Delta=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}.$$

Окончательно после сдвига и поворота координат получаем каноническое уравнение первоначального уравнения в общем виде

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

При $\Delta = 0$ линия второго порядка (коника) является вырожденной. Напомним, что для $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ эллипс вырождается в точку. Для $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $(\delta < 0$, гипербола$)$ вырождается в две прямые $y = \pm\frac{a}{b}x$. Для $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ $(\delta = 0$, парабола$)$ вырождается в прямую линию $y = 0$.

Пример. Найти площадь эллипса $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, где $AC - B^2 > 0$.

Решение. В системе $X'O'Y'$ уравнение эллипса имеет вид $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Его площадь определяется, как известно, $S = \pi ab$ и сохраняется при операции поворота и сдвига эллипса. В системе $X'O'Y'$ уравнение эллипса

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

где $\lambda_1\lambda_2 = \det A = \delta$, $A = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ и $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

Получим $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = -\frac{\Delta}{\delta} \Rightarrow -\lambda_1\frac{\delta}{\Delta}x'^2 - \lambda_2\frac{\delta}{\Delta}y'^2 = 1$.

Откуда $a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}$ и $b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}$.

Таким образом, $S = \pi ab = -\frac{\pi\Delta}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\delta} = -\frac{\pi\Delta}{\delta^{3/2}} = -\frac{\pi\Delta}{\left(AC - B^2\right)^{3/2}}$.

Ответ: $S = -\frac{\pi\Delta}{\left(AC - B^2\right)^{3/2}}$.

В заключении этой лекции рассмотрим геометрический смысл определителя линейного преобразования A. Пусть $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ образуют базис

$$\begin{cases} \overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 \\ \overline{y} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 \end{cases}.$$

Причем $\left(A\overline{e_1} = \lambda_1\overline{e_1}, A\overline{e_2} = \lambda_2\overline{e_2}\right)$, где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ два произвольных вектора.

Определим площадь параллелограмма $\left[\overline{e_1}, \overline{e_2}\right] = S_0\overline{n}$.

Обозначим $S\overline{n} = \pm\left[\overline{x}, \overline{y}\right]$. Получим

$$\overline{n}S = \pm\left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\left[\overline{e_1}, \overline{e_2}\right],$$

где $S = \pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} S_0$. Знаки $\pm$ соответствуют двум ориентированным площадям (рисунок 13.1).

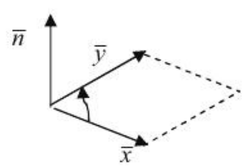


Рис. 13.1

Рассмотрим произвольное линейное преобразование $\bar{x}' = V\bar{x}$ и $\bar{y}' = V\bar{y}$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Как для векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, так и для векторов $\bar{x}'$ и $\bar{y}'$ должно выполняться $S' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} S_0$.

Кроме того, очевидно, выполняется $\begin{pmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, где два вектора рассматриваем как систему. Так как $\det AB = \det A \cdot \det B$, то $\begin{vmatrix} x_1' & y_1' \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix} = \det A \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Таким образом, получим выражение

$$S' = \det A \cdot S .$$

При линейном преобразовании плоскости все параллелограммы деформируются так, что их ориентированные площади изменяются пропорционально. Коэффициентом изменения площади является модуль определителя преобразования A.

Зная, что определитель третьего порядка определяет изменения масштабов объемов, можно получить соотношение $V' = \det A \cdot V$.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 + 24xy + 11y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Определить центр и линию этой фигуры.

Решение. $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} = -100$ (гипербола).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 12 & -1 \\ 12 & 11 & 2 \\ -1 & 2 & -20 \end{vmatrix} = 1925 .$$

Откуда определяются координаты центра: $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}}{-100} = -0{,}35$ и $y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{-100} = 0{,}2$. $F = \dfrac{\Delta}{\delta} = \dfrac{1925}{-100} = -19{,}25$.

Определим собственные числа: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$ и $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 20$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид

$$-5x'^2 + 20y'^2 - 19{,}25 = 0$$

и ее центр определяется координатами: $\begin{cases} x_0 = -0{,}35 \\ y_0 = 0{,}2 \end{cases}$.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Найти угол поворота канонической фигуры.

Решение. Возводим части равенства два раза в квадрат и получим $x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

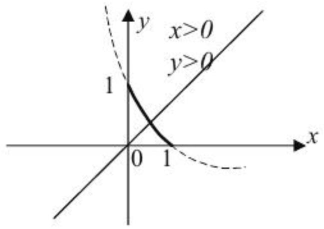


Рис. 13.2а

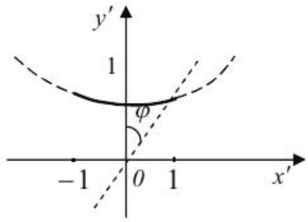


Рис. 13.2б

Так как $\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (парабола), то $F = \dfrac{\Delta}{\delta}$ не определяется. Найдем собственные значения $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$.

Преобразуем исходное уравнение $(x-y)^2 + 2(x+y) + 1 = 0$, сделав замену переменных $\begin{cases} x - y = x' \\ x + y = y' \end{cases}$, где $-1 \le x' \le 1$. В результате рисунок 13.2а преобразуется в рисунок 13.2б.

Получим $x'^2 - 2y' + 1 = 0$. Видно, что поворот определяется углом $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Приведение квадратичных форм от трех переменных к каноническому виду. Рассмотрим систему декартовых координат в пространстве. Базисными векторами выберем тройку нормированных ортогональных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Любой вектор может быть разложен по этому базису, поэтому имеем $\bar{x}^T = \{x; y; z\} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$. Квадратичная форма от трех переменных будет иметь вид

$$\Phi(x, y, z) = (\bar{x}, A\bar{x}) = \sum_{i,j}^{3} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33},$$

где симметричная матрица A, порождаемая данной формой, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Уравнение $\Phi(\bar{x}) = 0$ описывает алгебраическую поверхность в пространстве. Заметим, что эта поверхность симметрична относительно начала координат, так как точки поверхности $M(x; y; z)$ и $N(-x; -y; -z)$ принадлежат ей. С помощью матрицы поворота системы координат $U^T A U = D$, где $U^T = U^{-1}$, можно привести квадратичную форму к каноническому виду

$$\Phi(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + L,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ —собственные значения матрицы A, определяемые из решения характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Данное уравнение является линейным уравнением третьей степени относительно λ и имеет вид

$$\lambda^3 - \sigma\lambda^2 + \varpi\lambda - \delta = 0 \text{ или } (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = 0.$$

Здесь обозначено: $\sigma = a_{11} + a_{22} + a_{33} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = -(Tr\,A)$,

$$\varpi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Коэффициенты δ, ϖ и σ являются инвариантами квадратичной формы от трех переменных и не зависят от поворотов системы координат в пространстве, так как решение $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$— единственное и, кроме того, при вращении некоторой поверхности относительно центра симметрии сущность ее не должна меняться (например, эллипсоид при вращении остается эллипсоидом и превратиться в эллиптический параболоид не может).

Зная собственные значения λ, можно определить собственные векторы матрицы A, в базисе которых квадратичная форма имеет канонический вид. Заметим, что решение характеристического уравнения может иметь следующие варианты.

1. Все $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны. Собственные векторы ортогональны и образуют три главных направления, характеризующих исследуемую поверхность.

2. Два из трех корней равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ или $\lambda_1 = \lambda_3 \neq \lambda_2$. В этом случае имеются только два главных направления. Поверхность имеет симметрию по одному из направлений.

3. Все три корня равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Главное направление одно, и поверхность имеет полностью симметричную форму. Например, поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Рассмотрим технику приведения формы к каноническому виду на конкретном примере.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение поверхности и определить ее вид. Дано $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz - 28 = 0$.

Решение. Матрица данной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ дает $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$, которое имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$. Находим собственные векторы.

Для $\lambda_1 = 1$ $\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0 \\ 2x_1 + 3y_1 - 2z_1 = 0 \\ -2y_1 + 4z_1 = 0 \end{cases}$. Полагая $x_1 = 2$, получим $y_1 = -2$, $z_1 = -1$.

Нормируем собственный вектор и обозначим как $\overline{i'}$

$$\overline{i'} = \frac{\overline{x_1}}{|x_1|} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}^T.$$

Для $\lambda_2 = 4$ по аналогии получим $\overline{j'} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}^T$.

Для $\lambda_3 = 7$ соответственно $\overline{k'} = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}^T$.

Видно, что векторы попарно ортогональны. Действительно $\left(\overline{i'}, \overline{j'}\right) = 0$ $\left(\overline{i'}, \overline{k'}\right) = 0$ и $\left(\overline{k'}, \overline{j'}\right) = 0$. В новом базисе $\overline{i'}, \overline{j'}, \overline{k'}$ квадратичная форма принимает канонический вид

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 7(z')^2 - 28 = 0.$$

Ортогональная матрица поворота системы координат имеет вид $U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ и соответствует преобразованию координат по правилу

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{cases}.$$

Поверхность, описываемая данным уравнением, является эллипсоидом, имеющим три главные оси (направления):

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{28}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} + \frac{(z')^2}{2^2} = 1, \text{где } a = \sqrt{28},\ b = \sqrt{7},\ c = 2.$$

В заключении этой лекции приведем матрицу поворота в пространстве.

Для этого введем углы Эйлера θ, ψ, φ (рис. 13.3). Любой поворот в пространстве можно разложить на три ортогональных поворота:

1) поворот на угол φ вокруг оси OZ;
2) поворот на угол θ вокруг оси OX';
3) поворот на угол ψ вокруг оси OZ'.

Итак, последовательно

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

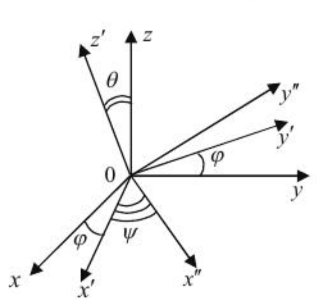


Рис. 13.3

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \;\; U_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $U = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3$, то перемножив матрицы, получим искомую матрицу поворота

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 14: «Канонические поверхности второго порядка и признаки их вырождения»

Уравнение центра. Признак вырождения поверхностей второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка. Канонические поверхности.

Уравнение центра. Признаки вырождения поверхностей второго порядка. Рассмотрим уравнение поверхности в общем виде с учетом линейных членов по трем независимым переменным

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Матрицу этой формы представим как

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Квадратичную форму, содержащую высшие степени, преобразуем поворотом в пространстве к каноническому виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$.

Тогда квадратичная форма перепишется

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + a_{44} = 0.$$

Пусть $\delta \neq 0$, $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$. Дополняя до полных квадратов, получим

$$\lambda_1\left(x' + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right) = H.$$

Здесь обозначено $H = -a_{44} - \lambda_1\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(\frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)^2$.

Перейдем в новые координаты, сдвинутые относительно старых,

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} \\ y'' = y' + \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} \\ z'' = z' + \dfrac{\mu_3}{\lambda_3} \end{cases}$$ и получим $$\frac{(x'')^2}{\frac{H}{\lambda_1}} + \frac{(y'')^2}{\frac{H}{\lambda_2}} + \frac{(z'')^2}{\frac{H}{\lambda_3}} = 1,$$ при $H \neq 0$.

1. При различных знаках $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и при $H > 0$ получим следующие поверхности:

$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 > 0$ — эллипсоид;

$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 < 0$ — однополостной гиперболоид;

$\lambda_1 < 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 > 0$ — двуполостной гиперболоид.

При $H < 0$ эллипсоид становится мнимым.

При $H = 0$ и $\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 < 0$ поверхность становится конусом.

Конус можно рассматривать как случай вырождения двуполостного и однополостного гиперболоидов.

2. Пусть теперь $\delta = 0$ (то есть один из трех $\lambda = 0$). Пусть $\lambda_3 = 0$. Получим

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + a_{44} = 0.$$

Делаем сдвиг координат $\begin{cases} x' = x + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} \\ y' = x + \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} \\ z' = z - \dfrac{H}{2\mu_3} \end{cases}.$

Окончательно получим уравнение параболоида

$$z' = \frac{x'^2}{-\dfrac{H_2}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{-\dfrac{H}{\lambda_2}}.$$

Соотношения знаков λ_1 и λ_2 определяет или эллиптический, или гиперболический параболоид. Наконец, если $\mu_3 = 0$, то $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + H = 0$ определяет или эллиптический, или гиперболический цилиндры.

3. Рассмотрим случай, когда $\delta = 0$ (два из трех $\lambda = 0$). Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Тогда $\lambda_1 x^2 + 2\mu_1 x + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + a_{44} = 0$ преобразуем сдвигом $x' = x + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1}$ и $H = a_{44} - \dfrac{\mu_1^2}{\lambda_1^2}$. Переобозначив переменные, окончательно получим уравнение $\lambda_1 x'^2 + 2\mu_2 y + 2\mu_3 z + H = 0$, которое поворотом на угол α вокруг оси $OX'\left(\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\mu_2}{\mu_3}\right)$ и переносом вдоль оси OX' на $-\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}$

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} \\ y'' = \dfrac{\mu_2}{\mu_3} y' + \dfrac{\mu_3}{\mu} \\ z'' = -\dfrac{\mu_2}{\mu} y' + \dfrac{\mu_3}{\mu} z' \end{cases},$$

где $\mu = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}$, приобретает следующую форму:

$$\lambda_1 x''^2 + 2\mu y'' + H = 0.$$

Сместив по оси OY'' на $y''' = y'' - \dfrac{H}{2\mu}$, получим уравнение параболического цилиндра

$$\lambda_1 (x''')^2 + 2\mu y''' = 0.$$

В конце этой лекции приведем рисунки данных поверхностей и их классификацию.

Перейдем к задаче нахождения центра поверхностей второго порядка. Пусть имеется общее уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Матрица A, как показано, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Введем точку $M(x_0; y_0; z_0)$, характеризующую центр поверхности.

Преобразование $x = \overline{x} + x_0$, $y = \overline{y} + y_0$, $z = \overline{z} + z_0$ должно исключать линейные члены в данном уравнении поверхности. После несложных, но достаточно громоздких выкладок можно получить:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

где основной определитель $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$. Тогда координаты центра находятся по правилу Крамера: $x_0 = \dfrac{\delta_x}{\delta}$, $y_0 = \dfrac{\delta_y}{\delta}$ и $z_0 = \dfrac{\delta_z}{\delta}$, где, например,

$$\delta_x = \begin{vmatrix} -a_{14} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{24} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{34} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{14} & a_{13} \\ a_{12} & -a_{24} & a_{23} \\ a_{13} & -a_{34} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если ввести определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$, то можно получить каноническую форму данной поверхности в виде

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

При $\Delta = 0$ и $\delta \neq 0$ имеет место вырождение поверхности. При $\Delta = 0$ и $\delta = 0$ поверхности превращаются в цилиндрические поверхности.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz+2x-6y-18=0.$$

Определить координаты центра поверхности.

Решение. Здесь $\delta=\begin{vmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}=162$ и $\Delta=\begin{vmatrix}7&-2&0&1\\-2&6&-2&-3\\0&-2&5&0\\1&-3&0&-18\end{vmatrix}=-5\cdot 841$.

Тогда $F=\dfrac{\Delta}{\delta}=-\dfrac{5\cdot 841}{162}=-26$. Найдем собственные значения

$$\begin{vmatrix}7-\lambda&-2&0\\-2&6-\lambda&-2\\0&-2&5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(6-\lambda)\left(\lambda^2-12\lambda+27\right)=0.$$

Получим $\lambda_1\approx 3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3\approx 9$.

Окончательный ответ: поверхность $3x'^2+6y'^2+9z'^2\approx 26$ является эллипсоидом с $a=\sqrt{\dfrac{26}{3}}\approx 3{,}2$, $b=\sqrt{\dfrac{26}{6}}\approx 2{,}1$ и $c=\sqrt{\dfrac{26}{9}}\approx 1{,}8$.

Определим координаты центра

$$\delta_x=\begin{vmatrix}1&-2&0\\-3&6&-2\\0&-2&5\end{vmatrix}=-4,\ \delta_y=\begin{vmatrix}7&1&0\\-2&-3&-2\\0&0&5\end{vmatrix}=-95 \text{ и}$$

$$\delta_z=\begin{vmatrix}7&-2&1\\-2&6&-3\\0&-2&0\end{vmatrix}=-38.$$

Получим $x_0=\dfrac{\delta_x}{\delta}\approx -0{,}02$, $y_0=\dfrac{\delta_y}{\delta}\approx -0{,}6$ и $z_0=\dfrac{\delta_z}{\delta}\approx -0{,}23$.

Классификация поверхностей второго порядка. Канонические поверхности. Как было показано, у квадратичной формы от трех переменных имеется четыре инварианта, не меняющихся при линейном преобразовании: $\sigma=a_{11}+a_{22}+a_{33}\equiv Tr\,A$ (след матрицы A),

$\varpi=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}^2-a_{31}^2-a_{12}^2$, $\delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ и Δ.

В зависимости от их значений и знаков получаем пять типов поверхностей и 17 различных канонических поверхностей

	$\sigma\delta > 0,\ \varpi > 0$ $\boxed{\delta \neq 0}$	$\sigma\delta$ и ϖ имеют различные знаки
$\Delta < 0$	Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Двуполостной гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	Однополостной гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
$\Delta = 0$	Мнимый конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$	Конус $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
$\Delta \neq 0$	Эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$ $\boxed{\delta = 0}$	Гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$
$\Delta = 0$	Цилиндрические поверхности	

Приведем рисунки некоторых канонических поверхностей, наиболее часто встречающихся в практических приложениях:

1. Сфера (рисунок 14.1):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

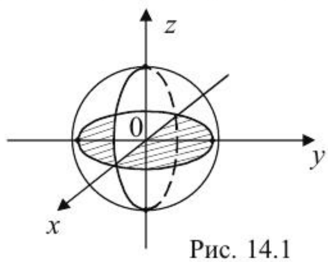


Рис. 14.1

2. Эллипсоид (рисунок 14.2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

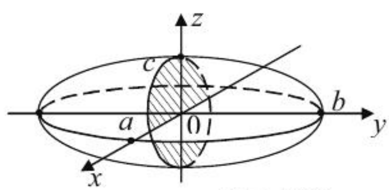


Рис. 14.2

3. Однополостной гиперболоид, который является линейчатой поверхностью (рисунок 14.3):

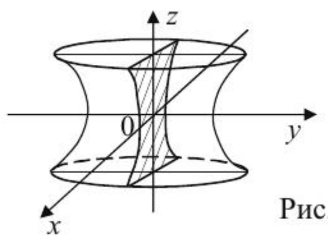


Рис. 14.3

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

поскольку ее можно представить в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

4. Двуполостной гиперболоид (рисунок 14.4):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

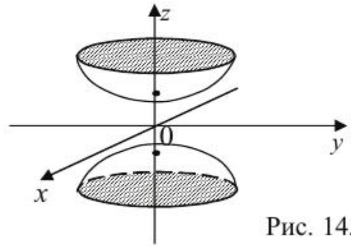


Рис. 14.4

5. Конус (рисунок 14.5):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,,$$

или

$$\left(\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\frac{y^2}{b^2}.$$

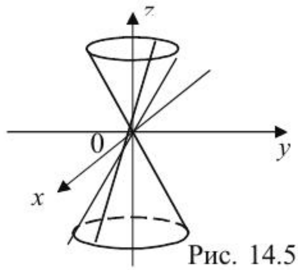


Рис. 14.5

6. Эллиптический параболоид (рисунок 14.6):

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

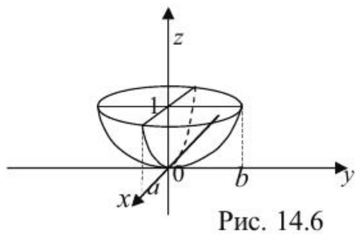


Рис. 14.6

7. Гиперболический параболоид (седловина) тоже является линейчатой поверхностью, то есть образуется прямыми линиями (рисунок 14.7):

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

или

$$z=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

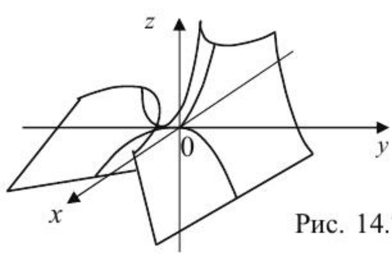


Рис. 14.7

8. Эллиптический цилиндр (рисунок 14.8):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

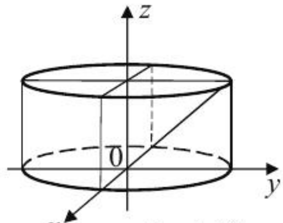


Рис.14.8

9. Гиперболический цилиндр (рисунок 14.9):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

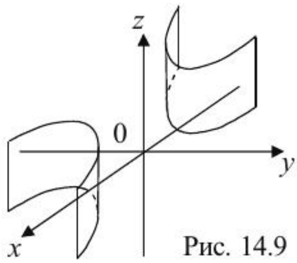


Рис. 14.9

10. Параболический цилиндр (рисунок 14.10):

$$y^2=2px.$$

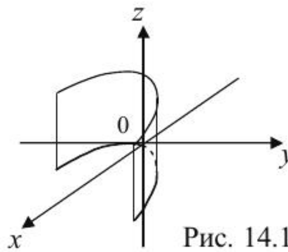


Рис. 14.10

В заключение рассмотрим, как образуются поверхности вращения из плоских кривых. Пусть на плоскости XOY задана линия $F(x,y)=0$. При вращении данной линии вокруг оси *OX,* точки линии описывают окружности в пространстве. Таким образом, необходимо ввести еще одну координату в уравнение линии следующим способом $y \Rightarrow \pm\sqrt{y^2+z^2}$.

Например, если линию эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вращать вокруг оси *OX*, то уравнение образованной поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

Аналогично образуются поверхности вращения вокруг осей *OУ* или *OZ*.

Пример. Сфера переменного радиуса касается двух перпендикулярных непересекающихся прямых, наименьшее расстояние между которыми равно δ.

Найти геометрическое место точек сферы.

Решение. Пусть в плоскости *XOZ* одна прямая совпадает с осью *OX*, а другая, параллельная оси *OУ*, проходит через точку $M(0,0,\delta)$(рис. 14.11а,б).

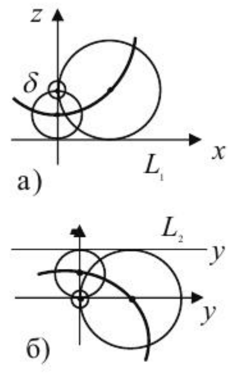


Рис. 14.11а,б

Уравнением геометрического центра всех окружностей (проекция сферы на *XOZ*) будет

$$z = \frac{x^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2},$$

где $p = \delta$. Аналогично в плоскости *YOZ* имеем уравнение $z = \frac{\delta}{2} - \frac{y^2}{2\delta}$.

Ответ: $z = \frac{\delta}{2} + \frac{x^2}{2\delta} - \frac{y^2}{2\delta}$ есть поверхность гиперболического параболоида.

Пример. Даны две окружности $x^2 + y^2 = R^2$, центры которых отстоят от начала координат по оси *OZ* на R симметрично плоскости *XOУ*. Найти геометрическое место, описываемое прямой, пересекающей эти плоскости так, что расстояние между точками окружностей на прямой равно $\sqrt{6}\,R$.

Решение. Только три поверхности состоят из прямых. Это конус, однополостной гиперболоид и гиперболический параболоид. Из рисунка видно, что это однополостной гиперболоид вращения с $a = b$. Таким образом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Из рисунка 14.12 следует, что $M_1(R;0;-R)$, $M_1'(0;R;R)$ и

$$L = \sqrt{(R-0)^2 + (0-R)^2 + (2R)^2} = \sqrt{6}R.$$

Причем $\overline{q}_1 = \{R;-R;2R\}^T$ и $\overline{q}_2 = \{-R;R;2R\}^T$. В плоскости *XOУ* наименьшее расстояние от начала координат до этих векторов определим, как $x_0 = \frac{R+0}{2}$ и $y_0 = \frac{0+R}{2}$. Эти точки должны удовлетворять уравнению окружности

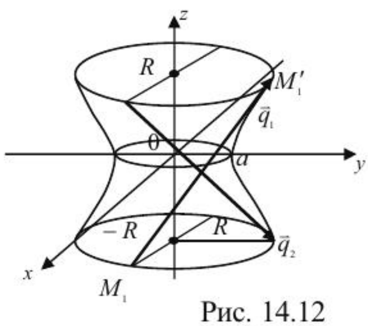


Рис. 14.12

$$\frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = a^2 \Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Далее уравнение прямой $\frac{x-R}{-R} = \frac{y}{R} = \frac{z+R}{2R}$

должно удовлетворять уравнению однополостного гиперболоида $\frac{x^2+y^2}{R^2/2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, то есть, подставляя в него уравнения

$$\begin{cases} \frac{x}{R}=\frac{1}{2}-\frac{z}{2R}, \\ \frac{y}{R}=\frac{1}{2}+\frac{z}{2R} \end{cases}$$

получим $c=R$. Таким образом, уравнение поверхности будет $\frac{x^2+y^2}{R^2/2}-\frac{z^2}{R^2}=1$ и является однополостным гиперболоидом, ограниченным плоскостями $z=R$ и $z=-R$. Следует отметить, что подобная фигура, состоящая из пересекающихся прямых, является устойчивой к нагрузкам сжатия, колебания и поворотам относительно оси и легла в основу построения конструкций высотных башен российским инженером В.Н. Шуховым (например, знаменитая телевизионная башня на Шаболовской улице в Москве).

Пример. Показать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ до ее асимптот есть величина постоянная (рисунок 14.13).

Решение. Как известно, кратчайшее расстояние от точки $M(x,y)$ (точка на гиперболе) до прямой $Ax+By+C=0$ (асимптота) определяется как

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пусть точки M_1 и M_2 проекции точки M на асимптоты гиперболы

$$bx-ay=0 \text{ и } bx+ay=0$$

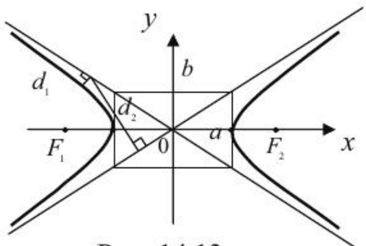


Рис. 14.13

соответственно. Тогда расстояния до этих асимптот определятся следующим образом:

$$d_1=\frac{\left|bx-b\sqrt{x^2-a^2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и}$$

$$d_2=\frac{\left|bx+b\sqrt{x^2-a^2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Здесь учтено, что $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Образуем их произведение и получим ответ

$$d_1d_2=\frac{b^2x^2-b^2x^2+b^2a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

ЛЕКЦИЯ 15: «Задача линейного программирования» Графический и матричный способы решения задач оптимизации. Метод Канторовича.

Рассмотрим одно из важнейших приложений линейной алгебры, а именно – метод оптимизации функции многих переменных. Из всего многообразия методов оптимизации ограничимся рассмотрением задачи линейного программирования. В этом случае к решению систем линейных алгебраических уравнений–ограничений присоединяется уравнение цели. Совместное их решение приводит к оптимальному решению. Функция, экстремальное значение которой надо найти, называется ***целевой*** или показателем эффективности, или критерием оптимальности. Физические и экономические возможности формулируются в виде систем ограничений. Математическая модель включает в себя одну или несколько целевых функций, равенства и неравенства.

Совокупность переменных $\overline{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, входящих в целевую функцию и в систему ограничений, называют ***планом задачи,*** вектором управления или стратегией. Значения $\overline{x}$ определяют набор допустимых решений, из которых выбирают оптимальное решение. Повторим, что если целевая функция и система равенств–ограничений линейна относительно своих переменных, то решается задача линейного программирования (ЛП).

Основная задача линейного программирования формируется в виде m ($i = \overline{1,m}$) линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, причем с положительными значениями, $x_j \geq 0$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \text{.......................................} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

и линейной формы

$$F(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \geq 0$$

или $\left(F(\overline{x}) = \overline{c} \cdot \overline{x}\right)$, где $\overline{c}$ вектор цены, $\overline{c} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$.

Требуется среди всех неотрицательных решений данной системы выбрать такое, при которых форма $F(\overline{x})$ принимает наименьшее значение. Решение системы $\overline{x}^T = \{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$, которое минимизирует $F(\overline{x})$, называется оптимальным.

Задача имеет смысл, когда система неравенств–ограничений совместна $(RgA = RgA_1)$. При $r = n = m$ решение единственно и не представляет интереса, так как оптимизировать нечего. Нас интересует случай, когда $n > r$ и $m > r$ и среди нескольких решений можно выбрать оптимальное.

Отметим, что можно решить задачу как на максимум, так и на минимум. Для этого необходимо произвести замену целевой функции $\Phi(\overline{x}) = -F(\overline{x})$. Отметим также, что методы оптимизации с помощью производных здесь неприменимы, так как, во-первых, $F(\overline{x})$ линейная функция, а во-вторых, поиск решения в задаче линейного программирования идет на границе области допустимых решений, тогда как метод дифференциального исчисления определяют экстремумы внутри областей допустимых решений. Отметим также, что для решения задач линейного программирования не требуется определение скалярного произведения.

Постановка задачи линейного программирования имеет три формы.

1. Общая постановка задачи

$$\max(\min)F(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad x_i \ge 0, \text{где } j=\overline{1,n} \text{ и } i=\overline{1,m} \end{cases}.$$

Напомним, что n – количество неизвестных, m – количество уравнений–ограничений и r – количество независимых уравнений–ограничений.

2. Симметричная постановка задачи

А. $\min F(\overline{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ или **Б**. $\max F(\overline{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0,\ i = m;\ j=\overline{1,n} \qquad\qquad x_j \ge 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

3. Каноническая постановка задачи

$$\max F(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0\cdot\sum_{i=1}^{m} x_{n+i},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\quad x_i \ge 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

В векторной форме каноническая постановка задачи имеет вид

$$\max F(\overline{x}) = \overline{c}\cdot\overline{x},$$

$$A\overline{x} = \overline{b},\ x \ge 0.$$

Переход к канонической форме от других форм происходит с помощью введения дополнительных балансовых неотрицательных переменных $x_{n+i} \geq 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$. При этом неравенства-ограничения оказываются равенствами.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют ***базисными***, а $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$ — ***свободными***.

Рассмотрим две классические задачи линейного программирования.

1. **Задача об оптимальном использовании сырья или максимальной прибыли.** На фабрике выпускают два вида продукции $П_1$ и $П_2$, для этого используется четыре вида сырья S_1, S_2, S_3 и S_4. Составим общую и частную таблицы распределения сырья по видам продукции (табл. 15.1 и табл. 15.2).

Таблица 15.1

Виды сырья	Запасы	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
доходы		c_1	c_2

Таблица 15.2

Виды сырья	Запасы	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	19	2	3
S_2	13	2	1
S_3	15	0	3
S_4	18	3	0
$F(\overline{x})$	$\overline{b}$	7	5

Здесь $F(\overline{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ – доход от продажи продукций $П_1 + П_2$, c_1 – цена единицы продукции $П_1$ и c_2 цена единицы продукции $П_2$, x_1– количество изделий продукции $П_1$ и x_2 – количество изделий продукции $П_2$.

Задано: $c_1 = 7$ и $c_2 = 5$ условных единиц дохода.

Математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 2x_1 + x_2 \leq 13 \\ 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 \leq 18 \end{cases} \qquad F(x) = 7x_1 + 5x_2 \quad \Rightarrow \max.$$

Отметим, что данные уравнения–неравенства определяют полуплоскости. Перейдем к канонической форме. Введем новые переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \ge 0 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_2 + x_6 = 18 \end{cases}.$$

В матричной форме $A\overline{x} = \overline{b}$, где A_1 есть расширенная матрица, где добавлена еще строка функции цены.

$$\begin{array}{c} A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}. \\ F(\overline{x}) \quad 7 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Поскольку переменных всего две x_1 и x_2, то задача допускает графическое решение на плоскости X_1OX_2. На рисунке 15.1 изображен вектор цены $\overline{c} = \{7;5\}$ и функции цели $F(\overline{x})$, которая представлена как прямая линия

$$F(\overline{x}) = 7x_1 + 5x_2 = const .$$

Задавая различные значения константы, получаем серию параллельных прямых. Прямые линии, определяемые уравнениями-неравенствами, определяют область допустимых значений. Стрелочками на этих прямых показано положение области допустимых значений.

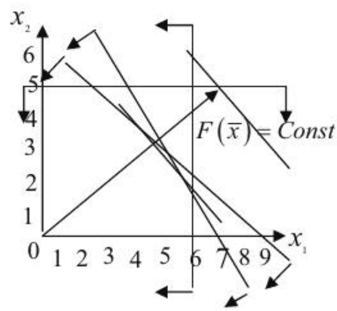


Рис. 15.1

Из построения видно, что пересечения прямых $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$ дает точку $Q(5;3)$, которая является крайней при перемещении прямой $7x_1 + 5x_2 = const$ параллельно самой себе. Видно, что максимальный доход составляет величину

$$F_{\max} = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50 \text{ при } \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

Итак, для получения максимального дохода необходимо выпустить 5 изделий продукции $П_1$ и 3 изделия продукции $П_2$, при этом сырье S_1 и S_2 будет использовано полностью, а сырье S_3 и S_4 останется в запасе

$$\Delta S_3 = 15 - 9 = 6 \text{ и } \Delta S_4 = 18 - 15 = 3.$$

Покажем, как эта же задача решается другим способом с помощью введения новых переменных (метод Канторовича).

Идея оптимизации заключается в том, чтобы в функции цели перейти к свободным переменным от базисных и затем свободные переменные положить равными нулю.

$F(\overline{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = A - \alpha x_3 - \beta x_4 - \gamma x_5 - \mu x_6$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$.

При $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ получим максимальное значение $F_{\max} = A$. Покажем это на том же примере. Выразим переменные x_1 и x_2 через x_3 и x_4:

$$x_1 = \frac{20 - 3x_4 + x_3}{4}, \quad x_2 = \frac{6 - x_3 + x_4}{2}.$$

Тогда получим $F(\overline{x}) = 7x_1 + 5x_2 = 7\dfrac{20 - 3x_4 + x_4}{4} + 5\dfrac{6 - x_3 + x_4}{2}$.

Задавая $x_4 = x_3 = 0$, получим $F_{\max}(\overline{x}) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$. Ответы совпадают.

Заметим, что линейное программирование – это раздел выпуклого программирования. Область допустимых решений должна быть обязательно выпуклой, то есть прямая линия, соединяющая две любые точки границы области допустимых значений, должна обязательно проходить внутри области допустимых решений. Рассмотрим возможные варианты решений на плоскости при $n = 2$:

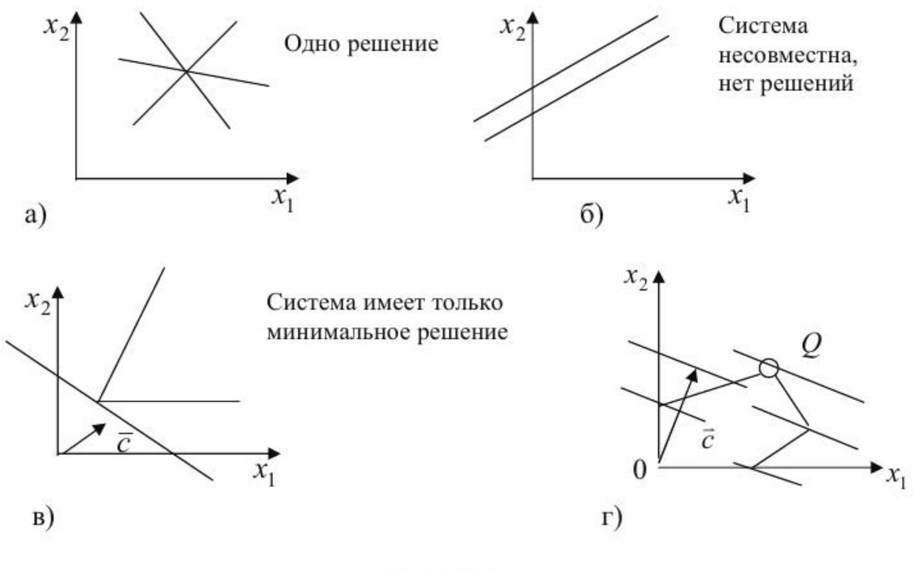


Рис. 15.2

Из рисунка 15.2г видно, что для получения оптимального решения надо перебирать базисные решения. План (решение) улучшается, если переходим от одной угловой точки (базисные решения) к другой более близкой к оптимальному решению. На данном рисунке показано, что прямая линия, перпендикулярная вектору цели, проходит через точку Q, обеспечивая его максимальное значение в данном направлении. Дадим определение выпуклости для многомерной задачи линейного программирования, когда $n > 3$ и невозможно графическое решение. Совокупность точек n–мерного пространства называется выпуклым телом, если наряду с любыми его точками M_1, M_2 к этой совокупности принадлежат и все точки отрезка $M_1 M_2$.

Гиперплоскостью в n–мерном пространстве называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + ... + c_nx_n = 0,$$

где $c_i, (i = \overline{1,n})$ произвольные действительные числа, характеризующие данную гиперплоскость.

На следующем рисунке 15.3 представлено графическое решение задачи линейного программирования для трех переменных x_1, x_2, x_3, когда еще возможно графическое решение задачи линейного программирования. Здесь изображена гиперплоскость, определяющая оптимальное решение. Отметим, что если гиперплоскость совпадает с ребром или гранью многоугольника, то имеет место бесконечное число решений. В этом случае не имеет смысла говорить об оптимальном решении.

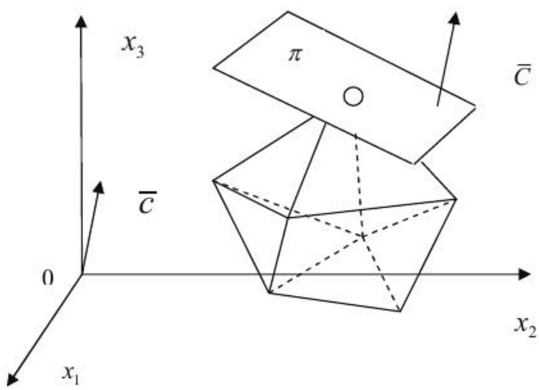


Рис. 15.3

Решим ту же самую задачу матричным способом (методом Гаусса). Приводим матрицу к диагональному виду, выбирая базисными векторами первый и второй столбцы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vline & 19 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vline & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vline & 15 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vline & 18 \\ -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & \vline & 9{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & \vline & 6{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \vline & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \vline & 6 \\ -7 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & \vline & 9{,}5 \\ 0 & -1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & \vline & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \vline & 5 \\ 0 & -1{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \vline & 3{,}5 \\ 0 & -5{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & \vline & -66{,}5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & \vline & 5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & \vline & 3 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & \frac{1}{3} & 0 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & \vline & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & \vline & -50 \end{pmatrix}.$$

Точками отмечены элементы матрицы, не представляющие интереса, так как всегда можно положить $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

В результате получаем тот же ответ: $x_1 = 5, x_2 = 3$ и $F_{\max}(\overline{x}) = 50$.

2. **Транспортная задача.** На двух складах A_1 и A_2 содержится a_1 и a_2 единиц однородного груза. Этот груз следует доставить в три магазина B_1, B_2 и B_3 в количестве b_1, b_2 и b_3 соответственно. Стоимость перевозки груза из A_i в B_j задана матрицей стоимости c_{ij}. Рассмотрим закрытую задачу, когда общее количество груза, имеющегося на складе и пунктах назначения, равно

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Таблица 15.3

	Запас	Пункты назначения		
		B_1	B_2	B_3
A_1	a_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
A_2	a_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
Потребность		b_1	b_2	b_3

Отметим, что транспортная задача, когда выполняются условия $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b_3$, называется задачей открытого типа, способы решения которых дадим в следующей лекции.

Составим общую таблицу 15.3 и конкретную таблицу данных 15.4.

Требуется составить такой план перевозки, чтобы общая стоимость их была наименьшей

$$F(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \to \min.$$

Здесь x_{ij} – количество груза со склада i в пункт назначения j.

Должно выполняться: $\begin{cases} x_{11}+x_{21}=10 \\ x_{12}+x_{22}=30 \\ x_{13}+x_{23}=10 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=20 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=30 \end{cases}$.

Кроме того $x_{ij} \ge 0$.

В данной задаче имеем пять уравнений и шесть неизвестных. Примем в качестве основных базисных переменных x_{11}, x_{12} и выразим через них остальные.

$$x_{21}=10-x_{11}\ge 0,\quad x_{22}=30-x_{12}\ge 0,\quad x_{13}=20-x_{11}-x_{12}\ge 0,$$
$$x_{23}=10-x_{13}=-10+x_{11}+x_{12}\ge 0 \text{ и } F(\overline{x})=330-2x_{11}-x_{12}.$$

Таблица 15.4

	Пункты назначения			
	B_1	B_2	B_3	Запас
A_1	4	9	3	20
A_2	4	8	1	30
Потребность	10	30	10	50

Видно, что базисные переменные x_{11} и x_{12} не являются оптимальными, так как при $x_{11}=x_{12}=0$ получаем $x_{23}=-10<0$, что противоречит положению $x>0$ (количество груза не может быть отрицательным числом).

Рассмотрим графическое решение на плоскости (рисунок 15.4). Вектор цели имеет компоненты $(20;10)$.

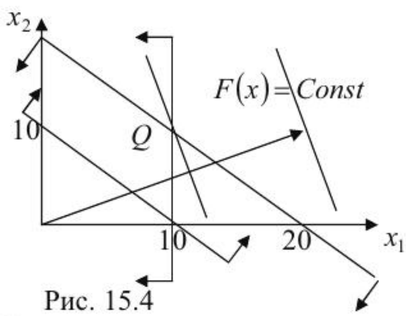


Рис. 15.4

$$\begin{cases} x_{11}\le 10, \\ x_{12}\le 30 \text{ – уравнение не работает,} \\ x_{11}+x_{12}\le 20, \\ x_{11}+x_{12}\ge 10. \end{cases}$$

Самая удаленная точка для линии $F(\overline{x})=const$ является $Q(10;10)$. Таким образом, наименьшие затраты на перевозку груза будут составлять $F_{\min}=330-20-10=300$, при этом $x_{11}=10$ и $x_{12}=10$, а $x_{21}=0$, $x_{22}=20$, $x_{13}=0$ и $x_{23}=10$.

Решим эту же задачу методом Гаусса. Ранг данной системы $RgA=RgA_1=4$.

$$
A_1 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\
4 & 9 & 3 & 4 & 8 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array},
$$

так как сумма трех первых строк равна сумме четвертой и пятой строчек.

Если выбрать базисными столбцами x_{11} и x_{12}, то получим

$$
\sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\
0 & 9 & 3 & 0 & 8 & 1 & -40
\end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & . & . & . & . & 10 \\
0 & 1 & . & . & . & . & 30 \\
0 & 0 & . & . & . & . & 10 \\
0 & 0 & . & . & . & . & -20 \\
0 & 0 & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & . & -310
\end{array}\right).
$$

Видно, что решение не оптимально, $F_{\min} = 310$, так как x_{11} и x_{12} не образуют базис. Графический способ решения дал $F_{\min} = 300$. Возьмем за базисные переменные столбцы x_{12} и x_{13}, тогда:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\
4 & 9 & 3 & 4 & 8 & 1 & 0
\end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -10 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\
4 & 0 & 3 & 4 & -1 & 1 & -270
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -20 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \\
4 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -300
\end{array}\right).
$$

Видно, что $F_{\min} = 300$ является оптимальным решением, и мы угадали с выбором базисных переменных. Способов организовать базис из двух столбцов в данной задаче достаточно много, $N = C_6^2 = 15$, и поэтому необходимо выработать правило, по которому можно было бы выделять базисные переменные, чем и займемся на следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 16: «Симплекс–метод»

Метод жордановых исключений.
Модифицированная симплекс таблица.

Представим систему равенств ограничений, как разложение m–мерного вектора столбца $\overline{b}$, по векторам–столбцам $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$

$$\overline{a}_1 x_1 + \overline{a}_2 x_2 + ... + \overline{a}_n x_n = \overline{b},$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ можно рассматривать как коэффициенты разложения, а векторы-столбцы $\overline{a}_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, например, для $\overline{a}_1$, имеют вид

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что в евклидовой векторной алгебре R_3 (трехмерное векторное пространство, где определено скалярное произведение векторов) решают подобную задачу, когда раскладывают трехмерный вектор $\overline{d}$ по базису линейно независимых (некомпланарных) векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, где $\left(\overline{a}, \left[\overline{b}, \overline{c}\right] \neq 0\right)$,

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} \Rightarrow \overline{d} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ в базисе векторов } \overline{a}, \overline{b} \text{ и } \overline{c}.$$

Здесь та же самая ситуация, но m–мерный вектор $\overline{b}$ раскладывается по n–мерным векторам. Переход к другому базису совершается следующим образом с помощью метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & ... & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & ... & 0 & a'_{1r+1} & ... & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a'_{2r+1} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ .. & .. & ... & .. & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a'_{mr+1} & ... & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right).$$

Напомним, что для решения систем линейных алгебраических уравнений и решения задач оптимизации, введение скалярного произведения совсем не обязательно.

Напомним также, что $x_1, x_2, ..., x_n$ называются базисными переменными, а переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ — свободными.

Покажем, что не все решения x_i являются базисными на примере.

Пример. Найти все базисные решения системы $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ 2x_1 - 3x_3 = 7 \\ 2x + x_3 = 7 \end{cases}.$

Решение. $RgA = RgA_1 = r = 2$. Имеем два линейно независимых уравнения

$$\begin{cases} x_1 = 14 - 3x_2 \\ x_3 = 7 - 2x_2 \end{cases}.$$

Полагая $x_1 = 0$, получим решение $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{14}{3}$, $x_3 = -\frac{7}{3}$, которое не является базисным решением, так как x_3 отрицательно.

Полагая $x_2 = 0$, получим базисное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$.

Полагая $x_3 = 0$, получим базисное решение $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 0$.

Видно, что для данной системы существуют всего два базисных решения.

Неотрицательные базисные решения называются ***опорными решениями*** или ***планами***.

Симплекс-метод заключается в переходе от одного опорного решения к другому с целью поиска оптимального опорного решения, когда целевая функция оптимизируется. В основе симплекс-метода лежит принцип жордановых исключений. Рассмотрим на примере переход $(y_1 y_2) \Rightarrow (y_1, x_3)$, где

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, y_2) \\ x_3 = f_2(x_1, x_2, y_2) \end{cases}.$$

Разрешим второе уравнение в системе относительно x_3

$$x_3 = \frac{y_2}{a_{23}} - \frac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \frac{a_{22}}{a_{23}}x_2 - \frac{b_2}{a_{23}}.$$

Назовем величину a_{23} разрешающим элементом. Тогда система перепишется

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{23}}x_1 + \dfrac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{23}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{23}}y_2 + \dfrac{b_1 a_{23} - b_2 a_{13}}{a_{23}}, \\ x_3 = -\dfrac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \dfrac{a_{22}}{a_{23}}x_2 + \dfrac{y_2}{a_{23}} - \dfrac{b_2}{a_{23}}. \end{cases}$$

Все это можно оформить в матричном виде в форме жордановых таблиц (табл. 16.1 и табл. 16.2)).

Таблица 16.1

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2

Таблица 16.2

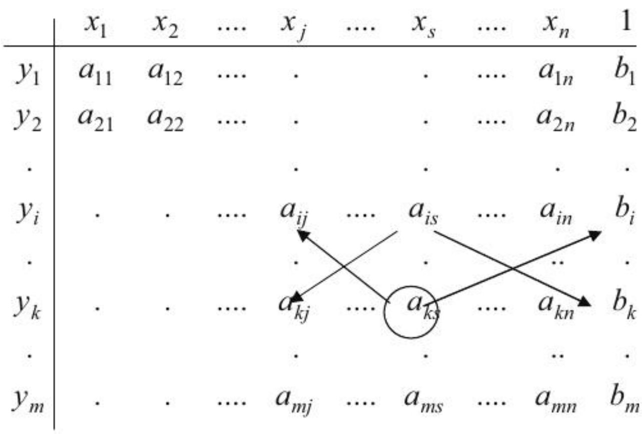
	x_1	x_2	y_2	1
y_1	$\dfrac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{23}}$	$\dfrac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{23}}$	$\dfrac{a_{13}}{a_{23}}$	$\dfrac{b_1 a_{23} - b_2 a_{13}}{a_{23}}$
	……………………..	………………	…	……………
x_3	$-\dfrac{a_{21}}{a_{23}}$	$-\dfrac{a_{22}}{a_{23}}$	$\dfrac{1}{a_{23}}$	$-\dfrac{b}{a_{23}}$

Видно, что своя строка и свой столбец разрешающего элемента делятся на него, а строка меняет знак. Все остальные элементы находят по правилу прямоугольника:

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{13} \\ a_{21} & & a_{23} \end{matrix} \Rightarrow \frac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{23}},$$

$$\begin{matrix} a_{13} & & b_{1} \\ a_{23} & & b_{2} \end{matrix} \Rightarrow \frac{b_1 a_{23}-b_2 a_{13}}{a_{23}}.$$

В общем случае системы m уравнений и n неизвестных таблица будет иметь вид



	x_1	x_2	....	x_j	....	x_s	....	x_n	1
y_1	a_{11}	a_{12}	....	.		.	....	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	....	.		.	....	a_{2n}	b_2
.				.		.		.	.
y_i	.	.	....	a_{ij}	....	a_{is}	....	a_{in}	b_i
.				.		.		..	.
y_k	.	.	....	a_{kj}	....	a_{ks}	....	a_{kn}	b_k
.				.		.		..	.
y_m	.	.	....	a_{mj}	....	a_{ms}	....	a_{mn}	b_m

Правило прямоугольника: $\begin{matrix} a_{ij} & & a_{is} \\ a_{kj} & & a_{ks} \end{matrix}$ дает замену переменной y_k на x_s, при этом элементы таблицы преобразуются как

$$y_i' = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq s}}^{m} \frac{a_{ij}a_{ks}-a_{is}a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_s + \frac{b_i a_{ks} - b_k a_{is}}{a_{ks}}.$$

Сформулируем правила преобразования симплекс–таблицы:

1. Все элементы своей строки и своего столбца разрешающего элемента a_{ks} делятся на него, а строка к тому же меняет знак. При этом выполняется

$$a_{ks} \Rightarrow \frac{1}{a_{ks}}.$$

2. Остальные элементы a_{ij}', включая свободные члены b_i', находятся по правилу прямоугольников.

Переходя от одного опорного решения к другому, находим оптимальный план. Важно не совершать лишних вычислений и делать такой переход в сторону оптимального решения за наименьшее количество таких переходов. Это называется методом улучшения плана. Для этого должны выполняться следующие два требования.

Прежде всего, разрешающий элемент должен быть положительным $a_{ks} > 0$ и свободный член этой строки тоже $b_k > 0$, очевидно, что $a_{ks} \neq 0$.

Кроме того, чтобы при жордановых исключениях не появлялось отрицательных свободных членов, необходимо выполнение условия

$$\frac{b_k}{a_{ks}} \le \frac{b_i}{a_{is}},$$

следующего непосредственно из правила прямоугольников. Отсюда получаем правило выбора разрешающей строки

$$\min \frac{b_k}{a_{ks}},$$

которое называется ***симплекс–отношением***. То есть отношение свободного члена этой строки к разрешающему элементу должно быть минимальным среди других отношений. В этом случае переход к оптимальному плану осуществляется наиболее коротким способом.

Систему ограничений представляют в виде модифицированной жордановой таблицы, так, чтобы свободные члены b_i были неотрицательны. Исходное опорное решение находится приравниванием верхних (свободных) переменных нулю, а базисных (боковых) — свободным членам. Суть идеи такова:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \end{cases}.$$

Посмотрим, как работать с жордановыми модифицированными таблицами 16.3, на примере о максимальном доходе.

Таблица 16.3

Итак, имеем

$$x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2$$
$$x_4 = 13 - 2x_1 - x_2$$
$$x_5 = 15 - 3x_2$$
$$x_6 = 18 - 3x_1$$
$$F = 7x_1 + 5x_2$$

Базисные перемен-ные	1	Свободные переменные	
		$-x_1$	$-x_2$
x_3	19	2	3
x_4	13	2	1
x_5	15	0	3
x_6	18	3	0
F	0	-7	-5

I

Договоримся обозначать последовательные преобразования одной и той же таблицы римскими цифрами в кружках.

Свободные переменные переводим в базисные с помощью правила прямоугольника. Получаем несколько последовательных жордановых таблиц. Давайте, например, перебросим x_2 в базисные переменные. Выберем разрешающий элемент. В данном случае удобно выбрать элемент равный единице (обведем кружком), так как вычисления по правилу прямоугольника существенно упрощается. Получим следующие две таблицы.

Базис.	1	Свобод.
		$-x_1$
x_3	30	4
x_2	13	2
x_5	24	6
x_6	18	3
F	65	3

II

Базисные переменные	1
x_1	5
x_2	3
x_5	–6
x_6	4
F	50

III

Очевидно, что записывать x_4 в свободные переменные не имеет смысла, так как, в конце концов, все дополнительные переменные положим равными нулю. Опять выбираем разрешающий элемент для переброски свободной переменной x_1 в базисные переменные. Получаем следующую окончательную таблицу, где считываем ответ $F_{\max} = 50$ при оптимальном плане выпуска $x_1 = 5$ и $x_2 = 3$.

Отметим, что в данной задаче имеется 6 базисных опорных решений и одно из них оптимальное, поэтому выбор минимального симплекс–отношения непринципиален.

Таким образом, для решения задачи линейного программирования симплекс-метода необходимо перейти к ее канонической форме, вводя дополнительные переменные, которые в этом случае будут базисными. Затем разрешим систему равенств–ограничений относительно этих дополнительных переменных и составляем модифицированную жорданову таблицу, где сбоку располагаем (базисные) переменные, а сверху свободные. Добавляем в таблицу функции цели и начинаем поиск оптимального решения, переводя свободные переменные в базисные и, соответственно, наоборот.

Пример. Фирма производит x туристических беговых лыж в день и y слаломных. Прибыль определяется целевой функцией стоимости всех выпущенных в день лыж $F = 50x + 80y$. Туристических лыж могут выпускать в два раза больше, чем слаломных. Возможности фирмы по выпуску $20 \le 2x + y \le 70$ и $y \le 50$. Найти оптимальный план выпуска лыж с максимальной прибылью.

Решение. Составляем математическую модель задачи:

$$\begin{cases} 2x + y \le 70 \\ 2x + y \ge 20 \\ y \le 50, \;\; x \ge 0, \;\; \mathrm{y} \ge 0 \end{cases}$$

$F = 50x + 80y$.

Графический метод дает $\bar{x}_{onm} = \{10;50\}$ с максимальной прибылью $F_{\max} = 50 \cdot 10 + 50 \cdot 80 = 4500$. График решения представлен на рисунке 16.1.

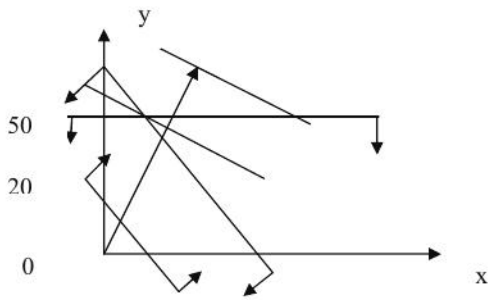


Рис. 16.1

Симплекс-метод. Приводим задачу к канонической форме.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 70 \\ x_2 + x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20 \\ F = 50x_1 - 80x_2. \end{cases}$$

Таблица 16.4

Базис. перем.	1	Свободные переменные	
		$-x_1$	$-x_2$
x_3	70	2	1
x_4	50	0	1
x_5	20	2	1
F	0	-50	-70

В таблицах с 16.4 по 16.6 последовательно переносим свободные переменные в базисные.

Таблица 16.5

Базис. перем.	1	Св.
		$-x_1$
x_2	70	2
x_4	20	2
x_5	50	0
F	5100	110

Таблица 16.6

Базисные переменные	1
x_2	50
x_1	10
x_5	100/250
F	4500

Сформулируем правила проверки опорного плана на оптимальность.

1. Если в F–строке цели нет отрицательных элементов (не считая свободного члена), то план оптимален. Кроме того, если в F–строке нет также и нулевых элементов, то оптимальный план единственен. Если же есть хотя бы один нулевой, то оптимальных планов бесконечное множество (линия $F(\overline{x}) = const$ параллельна одной из линий выпуклого многоугольника).

2. Если в F–строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в его столбце нет положительных элементов, то целевая функция неограниченна в области допустимых значений. Задача неразрешима.

3. Если в F–строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в его столбце есть хотя бы один положительный элемент, то можно перейти к опорному плану более близкому к оптимальному. Для этого столбец, где $F < 0$

и наименьшее, берут как разрешающий. Затем определяют по минимальному симплекс–отношению разрешающую строку и делают жорданово исключение. Полученный план проверяют на оптимальность.

4. Если любая строчка будет состоять из нулей, то это означает, что имеется бесконечное множество решений.

5. Если же в любой строчке все элементы равны нулю, а свободный член не равен нулю, то система несовместна и задача не имеет решения.

Рассмотрим решение задачи, поставленной сразу в канонической форме. В этом случае придется пользоваться жордановой таблицей, записанной в общем виде.

Пример. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$

$F = 3x_1 - x_2 + 5 \to \max .$

Решение. Умножаем первое и второе уравнение на (–1), чтобы свободные члены были положительны. Последовательность преобразования таблицы 16.7 отмечена римскими цифрами.

Таблица 16.7

I

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
0	4	–1	–1	1	1	0
0	7	–1	2	1	0	1
0	7	2	–1	0	1	1
F	5	–3	1	0	0	0

II

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_4	4	–1	–1	1	0
0	7	–1	2	1	1
0	3	3	0	–1	1
F	5	–3	1	0	0

III

$x_б$	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
x_4	4	–1	–1	1
0	4	–4	2	2
x_5	3	3	0	–1
F	5	–3	1	0

$x_б$	1	$-x_1$	$-x_2$
x_4	2	1	–2
x_3	2	–2	1
x_5	5	1	1
F	5	–3	+1

IV

Получим опорный план в базисе x_3, x_4 и x_5. Так как в F–строке есть элемент $F_1 = -3$, план не оптимален, а так как в столбце есть положительные элементы равные 1, то план можно улучшить.

$x_б$	1	$-x_4$	$-x_2$
x_1	2	1	–2
x_3	6	2	–3
x_5	3	–1	3
F	11	3	–5

V

$\Rightarrow$

VI

$x_б$	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	4		
x_3	9		
x_2	1		
F	16	4/3	5/3

Здесь в F строке все элементы положительны, значит, план оптимален.

Ответ: $\overline{x} = \{4;1;9\}^T$ и $F_{\max} = 16$.

Эту же задачу можно решить более коротким путем, сразу организуя базис из x_1, x_2 и x_3.

$x_б$	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$
x_3	4	–1	–1	1	0
0	3	0	3	–1	1
0	7	2	–1	1	1
F	5	–3	1	0	0

II

$x_б$	1	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$
x_3	15/3	–3/2	3/2	1
0	3	3	–1	1
x_1	7/2	–1/2	1/2	1/2
F	31/2	–1/2	3/2	3/2

III

Для удобства вычисления поделим всю строчку на 3.

$x_б$	1	$-x_4$	$-x_5$
x_3	9		
x_2	1		
x_1	4		
F	16	7/6	11/6

Получим тот же ответ $F_{\max} = 16$, при плане $\overline{x} = \{4, 1, 9\}^T$.

IV

Данная задача допускает графическое решение (рисунок 16.2).

$x_5 = 0$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -7 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 5$$

$x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ 2x_1 - 4x_2 = 4$$

$x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = -4 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ 2x_1 + x_2 = 2$$

$Q(4;1)$ и $x_3 = 4 + x_1 + x_2 = 9$

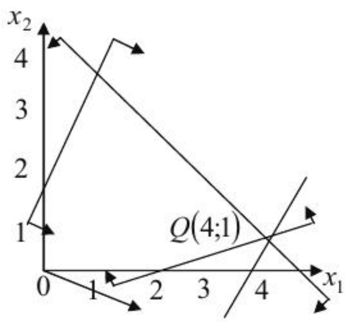


Рис. 16.2

Получим $\overline{x}^T_{опт} = \{4; 1; 9\}$ и $F_{\max} = 5 + 12 - 1 = 16$.

Пример. Решить

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 84 \\ 3x_1 + 13x_2 - x_4 = 150 \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,4}\right)$$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$.

Решение. Задача имеет канонический вид

Таблица 16.8

$x_б$	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0	84	3	2	–1	0
0	150	3	13	0	1
F	0	–2	–3	0	0

Таблица.16.9

$x_б$	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
x_1	26	2/3	–1/3	0
0	66	11	1	–1
F	–56	–5/3	–2/3	0

Таблица 16.10

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1	24	–13/33	2/33
x_2	6	1/11	–1/11
F	–66	–17/33	–5/33

Таблица 16.11

	1	$-x_2$	$-x_4$
x_1	50	13/3	–1/3
x_3	66	11	–1
F	100	17/3	–2/3

Если $F_2 < 0$ и весь столбец имеет отрицательные элементы, то F неограниченно и имеет только $F_{\min} = -100$ при $x_1 = 50$, $x_3 = 66$, $x_2 = 0$.

ЛЕКЦИЯ 17: «Методы линейной оптимизации»

Метод искусственного базиса. Двойственность постановки задачи ЛП. Решение транспортной задачи методом потенциалов.

Если в задаче линейного программирования, представленной в канонической форме, в системе равенств некоторые коэффициенты при неизвестных отрицательны, то симплекс–метод может и не приводить к решению. Тогда применяется более общий так называемый, ***М–метод.***

Вводятся искусственные переменные, а из целевой функции вычитают сумму искусственных переменных, умноженных на сколь угодно большое положительное число M. Иногда этот метод называется еще «методом больших штрафов».

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + x_{n+i} = b_{i0} \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$

где переменные x_{n+i} образуют искусственный базис. При $x_1 = x_2 = ... x_n = 0$ получаем опорный план M–задачи $\overline{x}_0^T = \left(0,0,...,b_{10},...,b_{m0}\right)$. Если после решения M–задачи все искусственные переменные $x_{n+i} = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$, то план $\overline{x}^T = \left(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0\right)$ будет оптимальным.

Покажем на примере потребность введения искусственных переменных.

Пример. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{Переходим к каноническому виду}}$ $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$.

$F = x_1 + x_2$. $\qquad F = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$.

Видно, что при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ получим, что $x_3 < 0$ и $x_4 < 0$. Чтобы этого не происходило, необходимо добавить «компенсационные» переменные или, как говорят, искусственные переменные.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 10 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 3 \\ x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,6}\right) \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 - M\left(x_5 + x_6\right) + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max.$$

Здесь M – весовой множитель (штраф), $M > 0$. Далее производятся те же действия, как и в симплекс–методе. При подстановке $x_5 = x_6 = 0$ штраф уходит. Удобно ввести две функции цели — стандартную и искусственную в виде $M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. В процессе реализации симплекс–метода исключаются искусственные переменные.

Пример.
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$
$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \to \max.$$

Решение. В первом уравнении x_1 с коэффициентом единица, поэтому весовой множитель можно не вводить. Во втором и третьем уравнении вводятся x_6 и x_7, целевая функция задается в виде $\Phi = F - M(x_6 + x_7)$.

Переходим к задаче
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 1 \qquad x_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1,7}\right) \end{cases}$$
$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 - M(x_6 + x_7).$$

Выразим Φ через $x_2,\ x_3,\ x_4$ и x_5.
$$\Phi = -14x_2 + 9x_3 - 11x_4 + 14x_5 - 6 - M(-2x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 + 7).$$

Тогда модифицированная симплекс–таблица запишется так

Таблица 17.1

I

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
x_1	3	–4	2	–5	9
x_6	6	1	–3	4	–5
x_7	1	1	–1	1	–1
F	–6	14	–9	11	–14
M	7	–2	4	–5	6

II

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_1	8	1	–3	4
x_6	2	–3	1	–1
x_4	1	1	–1	–1
F	–17	3	2	–3
M	–2	3	–1	1

Так как $x_6 = x_7 = 0$.

Здесь преобразование таблицы 17.1 идет под римскими цифрами

III

	1	$-x_2$	$-x_5$
x_1	14	–8	1
x_3	2	–3	–1
x_4	3	–2	–2
F	–21	9	–1
M		0	0

	1	$-x_2$	$-x_1$
x_5 x_3 x_4	14 16 31		
F	-7	1	1

IV

Ответ: оптимальный план $\bar{x}^T = (0; 0; 16; 31; 14)$ дает максимальные значения $F_{\max} = -7$.

Рассмотрим двойственность постановки задачи линейного программирования. Действительно, с каждой такой задачей связана другая альтернативная задача.

$$\begin{matrix} A\bar{x} \le \bar{b} & & A^T\bar{y} > \bar{c}^T \\ \bar{x} > \bar{0} & \Leftrightarrow & \bar{y} \ge 0 \\ L = \bar{c}\bar{x} \to \max & & L = \vec{b}^T\bar{y} \Rightarrow \min. \end{matrix}$$

Заметим, что ответ должен быть одним и тем же. $L_{\min} = L_{\max}$.

Пример. Задача о прибыли (пример 1).

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases}$$

$$L = 7x_1 + 5x_2 \to \max.$$

Пример решен и имеет ответ $F_{\max} = 50$ при плане выпуска продукта $\bar{x}^T = (5; 3)$.

Рассмотрим ту же задачу, но под другим углом зрения – экономии сырья.

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5 \end{cases}$$

$$L = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min.$$

Здесь y_1 – доля первого вида сырья в цене продукции, а y_2 – доля второго вида сырья в цене продукции.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Приводим задачу к каноническому виду $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 = 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_6 = 5 \end{cases}$

$$L = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4.$$

Составим симплексную таблицу новых данных 17.2.

Таблица 17.2

$y_б$	1	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5 y_6	7 5	2 3	2 1	0 3	–1 –1
L	0	–19 !	–3	–15	–18

минимум

Таблица 17.3

$y_б$	1	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$
y_5 y_1	11/3 5/3	4/3 1/3	–2 1	–1/3 –1/3
L	95/3	–20/3	4	–35/3

Таблица 17.4

$y_б$	1
y_1 y_2	11/12 9/12
L	50

Видно из таблиц 17.3, 17.4, что ответ совпадает с ответом прямой задачи ЛП. Причем доли сырья в ценах продукции составляет y_1 =11/12 и y_2 = 9/12.

Рассмотрим решение задачи ЛП, а именно, транспортной задачи, сформулированной в 15–й лекции, **методом потенциалов** аналогичным симплекс–методу.

Пусть в пунктах направлений (склады) $A_1, A_2, ..., A_n$ сосредоточены запасы однородного груза в количестве $a_1, a_2, ..., a_n$ единиц. В пункты назначения $B_1, B_2, ..., B_m$ (магазины) надлежит доставить $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц груза. Если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_m ,$$

то транспортная задача, как уже отмечалось, называется задачей закрытого типа. Стоимость задается матрицей $c = \{c_{ij}\}$, где c_{ij} стоимость перевозки из пункта A_i в пункт B_j, причем выполняется условие $c_{ij} \geq 0$.

Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость перевозок $L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$ была бы наименьшей и все заявки были бы выполнены. Здесь x_{ij} называется тарифом и обозначает количество груза, перевезенного из A_i в B_j. План перевозок задается тарифной матрицей $X = \{x_{ij}\}$, причем должно выполняться $x_{ij} \ge 0$. Составим таблицу перевозок в виде таблицы 17.5.

Таблица 17.5

Склад	Магазины				Запас
	B_1	B_2	$\dots$	B_m	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{21} x_{21}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$		$\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$
A_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}		c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности	b_1	b_2		b_m	

Здесь в каждой клетке вверху обозначена стоимость этой перевозки.

Математическая модель задачи

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \end{cases}, \quad c_{ij} \ge 0, \quad x_{ij} \ge 0$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \quad \to \quad \min.$$

Решение задачи ищется среди опорных решений путем их целенаправленного перебора и проверки каждого на оптимальность.

Итак, имеется $n+m$ уравнений. Число занятых клеток в таблице равно $r = n+m-1$. Опорный план имеет $r = m+n-1$ неизвестных. В этом случае задача ***невырожденная***. Если же $n+m-1 > r$, то задача ***вырожденная.***

Существуют два способа построения начального опорного плана.

1. Метод северо-западного направления, когда основное количество груза распределяют по главной диагонали таблицы.

2. Метод двойного предпочтения, когда основное количество груза распределяют в клетки с минимальной стоимостью по строке и столбцу таблицы.

Как правило, первоначальный опорный план не оптимален. Тогда проводится улучшение плана.

Идея метода заключается в следующем. Если имеется любое первоначальное допустимое решение, то его можно улучшить (оптимизировать) путем распределения груза в те транспортные артерии, где тариф перевозок минимален. Первоначальный опорный план проверяется на оптимальность методом потенциалов. Стоимость перевозок представляют в виде суммы потенциалов u_i (строка) и v_j (столбец)

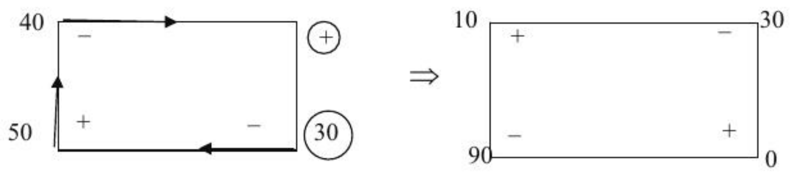
$$c_{ij} = u_i + v_j \qquad \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right).$$

Значения потенциалов находят для занятых клеток таблицы перевозок груза. Поскольку число потенциалов равно $n+m$, а уравнений для их определения только $n+m-1$, то такая система имеет бесконечное множество решений. Поэтому, как правило, полагают $u_1 = 0$, тогда все потенциалы определятся однозначно. Заметим еще раз, что потенциалы определяются только для занятых перевозками груза клетками таблицы перевозок. Затем определяются так называемые оценки потенциалов свободных клеток. Для этого вводится понятие оценки свободных клеток

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

и если все $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если же хотя бы одно из $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя к другому опорному плану. Значение оценок свободных клеток называется еще теневыми ценами, которые показывают, на сколько уменьшится (увеличится) общая стоимость транспортных расходов, если в свободную клетку таблицы поместить одну единицу перевозимого груза (тариф).

Алгоритм поиска оптимального решения следующий. Для свободной клетки таблицы строится цикл (многоугольник), все вершины которого кроме одной (данная свободная клетка с $\Delta_{ij} > 0$) находятся в занятых клетках. Углы цикла должны быть прямыми и число вершин четным. Около свободной клетки цикла ставится знак $(+)$, а затем поочередно ставятся знаки $(-)$ и $(+)$ у всех вершин цикла. У вершины со знаком $(-)$ с минимальным грузом убирают этот груз в свободную клетку. Так как количество груза при этом сохраняется, то этот груз прибавляется к грузам, стоящим у вершин со знаком $(+)$, и отнимается от всех грузов вершин со знаком $(-)$. Например,



Полученное опорное решение опять проверяется на оптимальность расчетом потенциалов по занятым клеткам и оценками Δ_{ij} свободных клеток. Получают также значение целевой функции. И так до тех пор, пока все оценки свободных клеток не будут $\Delta_{ij} \le 0$. Это и будет означать, что опорное решение оптимально, а целевая функция минимальна.

Рассмотрим два конкретных примера.

1. Пусть на складах стройматериалов C_1, C_2 и C_3 имеются грузы в количестве 100, 200 и 300 т соответственно. В магазины M_1, M_2 и M_3 должны завести данные грузы в количестве 190, 180 и 230 т соответственно. Расходы по перевозке одной тонны груза задается ценовой матрицей (цена в условных единицах) в виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти такой вариант поставок со складов в магазины, чтобы сумма транспортных затрат была минимальна.

Решение. Составим таблицу данных 17.6 и выберем, допустим, следующее опорное решение.

Таблица 17.6

	C_1	C_2	C_3	Потребности
M_1	2 100	4 90	1	190
M_2	5	1 110	3 70	180
M_3	4	5	6 230	230
Запасы	100	200	300	

Получим опорный план $X = \begin{pmatrix} 100 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 70 \\ 0 & 0 & 230 \end{pmatrix}$. Число занятых клеток $m+n-1=3+3-1=5$, а уравнений $m+n=3+3=6$. Стоимость такой перевозки определяется как

$$F = 100 \cdot 2 + 90 \cdot 4 + 110 \cdot 1 + 70 \cdot 3 + 230 \cdot 6 = 2260.$$

Проверим данное решение на оптимальность. Прежде всего, определим потенциалы для занятых клеток данной таблицы грузоперевозок. Для первой занятой клетки (1,1) имеем $c_{11} = u_1 + v_1 = 2$. Полагаем $u_1 = 0$, получаем $v_1 = 2$. Далее для занятой клетки (1,2) $c_{12} = u_1 + v_2 = 4$ и получим $v_2 = 4$. Следующая занятая клетка таблицы (2,2). Для нее $c_{22} = u_2 + v_2 = 1$ и, так как $v_2 = 4$, то $u_2 = 1 - 4 = -3$. Для занятой клетки (2,3) $c_{23} = u_2 + v_3 = 3$ получим $v_3 = 3 - (-3) = 6$. Для последней клетки (3,3) получим $c_{33} = u_3 + v_3 = 6$, откуда $u_3 = 6 - 6 = 0$.

Перепишем таблицу 17.6, добавив справа и снизу значения потенциалов.

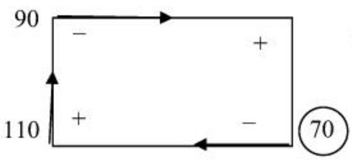
Получим расширенную таблицу 17.7. Далее вычислим оценки свободных клеток таблицы.17.7.

Таблица 17.7

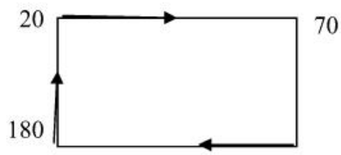
	100	200	300	u_i
190	2 100	4 90	1 *	0
180	5	1 110	3 70	–3
230	4	5	6 230	0
v_j	2	4	6	

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 6 + 0 - 1 = 5 > 0 \quad *$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 2 - 5 = -6 < 0$$
$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 0 + 2 - 4 = -2 < 0$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 0 + 4 - 5 = -1 < 0.$$

Видно, что одно из значений, а именно $\Delta_{13} > 0$. Значит данный план (решение) не оптимально. Попытаемся его улучшить. Строим для клетки (1,3) ($\Delta_{13} > 0$) цикл, такой, чтобы все остальные клетки цикла были заняты. Такой цикл только один.



$\min\{90,70\} = 70$
$\Rightarrow$



Получим новый опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 70 \\ 0 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 230 \end{pmatrix}.$$

Можно рассчитать цену цикла: $Ц = +1 - 4 + 1 - 3 = -5$. Так как по циклу переместилось 70 единиц груза, то $\Delta F = Ц \cdot \Delta x = (-5) \cdot 70 = -350$. Действительно, значение целевой функции определяется:

$$F_2 = 100 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 70 \cdot 1 + 180 \cdot 1 + 230 \cdot 6 = 1910.$$

Видно, что затраты на перевозку заметно уменьшились. Проверим новое решение на оптимальность. Для этого на втором шаге заново определим потенциалы по занятым клеткам новой таблицы перевозок и оценки свободных клеток (таблица 17.8)

Таблица 17.8

	100	200	300	u_i
190	2 100	4 20	1 70	0
180	5	1 180	3	–3
230	5	5	6 230	5
v_j	2	4	1	

Полагаем $u_1 = 0$,

$c_{11} = u_1 + v_1 = 2,\ \ v_1 = 2$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4,\ \ v_2 = 4$

$c_{13} = u_1 + v_3 = 6,\ \ v_3 = 1$

$c_{22} = u_2 + v_2 = 1,\ \ u_2 = -3$

$c_{33} = u_3 + v_3 = 6,\ \ u_3 = 5$.

Оценки свободных клеток дают следующие значения

$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 2 - 5 = -6 < 0$, $\Delta_{23} = -3 + 1 - 3 = -5$, $\Delta_{31} = 2 + 5 - 4 = 3 > 0$, $\Delta_{32} = 5 + 4 - 5 = 4 > 0$.

Видно, что $\Delta_{31} = 2 + 5 - 4 = 3 > 0$. Значит, новый план не оптимален.

Образуем цикл

20 –	+70		0	90	
*+	– 230		20	210.	

Таблица 17.9

Получим новый опорный план (табл. 17.9)

	100		90	0
		180		1
		20	210	5
v	2	0	1	u

Проверим его на оптимальность: $\Delta_{12} = 0 + 0 - 4 < 0$, $\Delta_{12} = 2 + 1 - 5 < 0$, $\Delta_{23} = 1 + 1 - 3 < 0$, $\Delta_{31} = 2 + 5 - 4 > 0$!. План не оптимален. Образуем новый цикл перемещения груза

100 –	+ 90		0	190
* +	– 210		100	110

Получим следующий опорный план (табл. 17.10).

Таблица 17.10

			190	0
		180		1
	*	20	110	5
v	2	0	1	u

$\Delta_{11} = 0 - 1 - 2 < 0$, $\Delta_{12} = 0 + 0 - 4 < 0$, $\Delta_{21} = 1 - 1 - 5 < 0$, $\Delta_{23} = 1 + 1 - 3 < 0$.

План оптимален и минимальная стоимость всех перевозок составляет величину $F = 1530$ усл. ед.

2. Рассмотрим другой пример. Дана таблица перевозок и их стоимость в виде таблицы 17.11. Определить оптимальный план перевозок.

Решение. По условию $n + m - 1 = 6$. Составляем допустимое опорное решение.

Видно, что решение вырождено, так как занято только 5 клеток таблицы.

В этом случае записывают нулевые перевозки (0) в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом так, чтобы образовался какой–либо цикл.

Таблица 17.11

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	6	4	4	5	80
A_2	3	6	5	4	50
A_3	4	5	5	6	10
Заявки	30	50	20	40	140

Нуль рекомендуется помещать в такую клетку, чтобы в каждой строке и каждом столбце таблицы было не менее одной занятой клетки. Только в этом случае появляется возможность организовать цикл перемещения грузов с целью поиска оптимального решения. В этом случае записывают нулевые перевозки в одну из свободных клеток с наименьшим тарифом так, чтобы образовался какой-либо цикл.

В данном примере удобно заполнить нулевой перевозкой клетку (3,1).

Получим табл. 17.12.

Таблица 17.12

	6 30	4 50	4 *	5	u_i 0
	3	6	5 20	4 30	- –4
	4 0	5	5	6 10	–2
v_i	6	4	9	8	

Далее по схеме вычислений определим потенциалы занятых клеток. Полагаем $u_1 = 0$ и получаем

$c_{11} = u_1 + v_1 = 6, \ \ v_1 = 6$;

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4, \ \ v_2 = 4$;

$c_{31} = u_3 + v_1 = 4, \ \ u_3 = -2$.

Теперь можно определить v_4.

Действительно, для занятой клетки (3,4) $c_{34} = u_3 + v_4 = 6$ следует, что $v_4 = 6 - (-2) = 8$.

Далее для $c_{24} = u_2 + v_4 = 4$ следует, что $u_2 = 4 - 8 = -4$.

Последняя занятая клетка $c_{23} = u_2 + v_3 = 5$ дает значение $v_3 = 5 - (-4) = 9$.

Вычислим оценки свободных клеток

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 9 - 4 = 5 > 0$ * – отмечаем клетку звездочкой.

$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 8 - 5 = 3 > 0$,

$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -4 + 6 - 3 = -1 < 0$,

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -4 + 4 - 6 = -6 < 0$,

$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 4 - 5 = -3 < 0$ и $\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 1 > 0$.

Видно, что опорный план опять не оптимален $(\Delta_{13} > 0, \Delta_{14} > 0, \Delta_{33} > 0)$.

30 –	50	+ *	
	–	20	+ 30
0 +			– 10

Для улучшения плана образуем цикл для клетки (1,3). Здесь минимальный груз цикла находится в клетки (3,4) и имеет значение 10. Новый опорный план опять невырожден, так как опять заняты только 5 клеток из 6.

Проверим этот план на оптимальность (табл.17.13). Опять полагаем $u_1 = 0$ и по занятым клеткам определим потенциалы.

$c_{11} = u_1 + v_1 = 6,\ \ v_1 = 6$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 4,\ \ v_2 = 4$
$c_{13} = u_1 + v_3 = 4,\ \ v_3 = 4$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 5,\ u_2 = 1$
$c_{24} = u_2 + v_4 = 4,\ v_4 = 3$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 4,\ \ u_3 = -2$.

Таблица 17.13

					u_i
	6 20	4 50	4 10	5	0
	3 *	6	5 10	4 40	1
	4 10	5	5	6	–2
v_i	6	4	4	3	

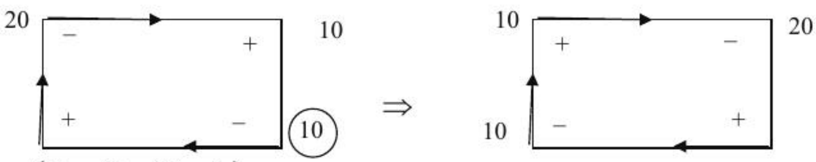
Определим оценки свободных клеток таблицы перевозок.

$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = -2 < 0$, $u_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 > 0$ *– обозначим звездочкой.

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 < 0, \quad \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4 < 0,$

$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -3 < 0, \quad \Delta_{34} = u_3 + v_4 - c_{34} = -5 < 0.$

Видно, что план не оптимален, так как $\Delta_{21} > 0$. Образуем цикл для этой клетки и получим новый опорный план (табл.17.14). Он опять невырожден.



$$X = \begin{pmatrix} 10 & 50 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Снова проверим этот план на оптимальность.

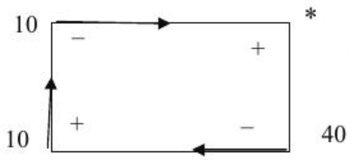
$u_1 = 0$
$c_{11} = u_1 + v_1 = 6,\ \ v_1 = 6$
$c_{12} = 4,\ \ v_2 = 4$
$c_{13} = 4,\ \ v_3 = 4$
$c_{21} = 3,\ u_2 = -3,\ c_{24} = 4,$
$v_4 = 7;\ \ c_{31} = 4,\ u_3 = -2$

Таблица 17.14

					u_i
	6 10	4 50	4 20	5 *	0
	3 10	6	5	4 40	–3
	4 10	5	5	6	–2
v_i	6	4	4	7	

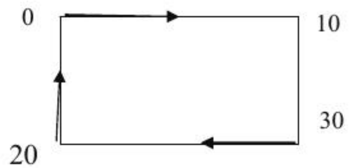
Получим оценки пустых клеток $\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 7 - 5 > 0$*, $\Delta_{22} = -3 < 0$, $\Delta_{23} = -2 < 0$, $\Delta_{32} = -7 < 0$, $\Delta_{33} = -7 < 0$, $\Delta_{34} = -1 < 0$

Так как план не оптимален $(\Delta_{14} > 0)$, образуем цикл перемещения груза для клетки (1,4).



$\min\{10; 40\} = 10$

$\Rightarrow$



Получим новый опорный план, который теперь невырожден. Повторяем всю процедуру снова. Выбираем $u_1 = 0$ и для занятых клеток определяем потенциалы (табл. 17.15)

$c_{12} = u_1 + v_2 = 4,\ v_2 = 4$

$c_{13} = 4,\ v_3 = 4$; $c_{14} = 5,\ v_4 = 5$;

$c_{24} = 4$, $u_2 = -1$, $c_{21} = 3,\ v_1 = 4$;

$c_{31} = 4$, $u_3 = 0$.

Делаем оценки свободных клеток

$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = -2 < 0$,

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 < 0$,

Таблица 17.15

					u_i
	6	4 50	4 20	5 10	0
	3 20	6	5	4 30	-1
	4 10	5	5	6	0
v_i	4	4	4	5	

$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0$, $\Delta_{32} = -1 < 0$, $\Delta_{33} = -1 < 0$, $\Delta_{34} = -1 < 0$.

Наконец, получим все оценки отрицательными $(\Delta_{ij} \le 0)$, что означает оптимальность данного плана.

Ответ: Оптимальным планом перевозок является

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом стоимость перевозок определяется следующим образом

$$F_4 = 50 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 550$$

и меньше быть не может. Для примера, на третьем шаге стоимость перевозок определялась следующим образом

$$F_3 = 10 \cdot 6 + 50 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 4 = 570.$$

Цена третьего цикла $Ц_3 = -6 + 5 - 4 + 3 = -2$. По циклу перемещалось 10 единиц груза, поэтому стоимость перевозки уменьшилась на $\Delta F = 10 \cdot (-2) = -20$.

Рассмотрим открытую транспортную задачу. Здесь возможны два случая.

1. Если объем запасов больше и некоторое количество запасов остается на складах, потребность магазинов тем не менее удовлетворена: $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$.

2. Потребность магазинов неудовлетворенна, так как на складах груз уже закончился, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Для решения первой задачи вводится фиктивный $(n+1)$ потребитель $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \geq 0$ и решается математическая модель транспортной задачи закрытого типа:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \end{cases},$$

$$L = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \cdot$$

Для решения второй задачи вводится фиктивный $(m+1)$ поставщик (склад)

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \geq 0 \cdot$$

Модель имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \end{cases},$$

$$L = \sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

которая также является моделью закрытого типа. Далее решается стандартно, как рассмотрено выше. Очевидно, что тарифы фиктивных потребителей полагают равными нулю или устанавливают очень большую стоимость перевозки. В целевой функции фиктивные потребители и поставщики не учитываются.

ЛЕКЦИЯ 18: «Приложение линейной алгебры к задачам физики, теоретической механики и экономики»

Евклидова и псевдоевклидова геометрия.
Преобразования Галилея и Лоренца.
Движение в центральном поле. Законы Кеплера.
Модель В.В. Леонтьева межотраслевой экономики.

Рассмотрим некоторые приложения линейной алгебры и теории квадратичных форм к задачам геометрии, физики и экономики.

1. **Евклидова и псевдоевклидова геометрия. Преобразования Галилея и Лоренца.** Рассмотрим преобразование координат на плоскости (R_2). Как мы уже знаем, при скалярном произведении векторов каждой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из R_2 поставлено в однозначное соответствие число $(\overline{x},\overline{y})$, для которого выполняется $(\lambda\overline{x},\overline{y})=\lambda(\overline{x},\overline{y})$ и $(\overline{x}+\overline{y},\overline{z})=(\overline{x},\overline{z})+(\overline{y},\overline{z})$. Длиной вектора является $|\overline{x}|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})}$, которая совместно с углом между векторами $\cos(\overline{x},\overline{y})=\dfrac{(\overline{x},\overline{y})}{|\overline{x}||\overline{y}|}$ полностью определяет метрику, определяемую билинейной формой $(\overline{x},\overline{y})=\sum\limits_{i,j}^{2}q_{ij}x_iy_j$, где q_{ij} являются компонентами матрицы Грама – $\hat{\Gamma}=\{q_{ij}\}$. В евклидовой геометрии $q_{11}=1,\ q_{12}=q_{21}=0,\ q_{22}=1$. Таким образом, получим знакомый результат $(\overline{x},\overline{y})=x_1y_1+x_2y_2$, где $\overline{x}=\{x_1;x_2\}^T$ и $\overline{y}=\{y_1;y_2\}^T$.

Для описания процессов приходится вводить еще одну координату, связанную с течением времени. Необходимо ввести понятие комплексного числа $z=x+iy$ и комплексного сопряжения $z=x-iy$, где $i=\sqrt{-1}$ есть мнимая величина. Таким образом, получают псевдоевклидовую геометрию Минковского, где

$$q_{11}=1,\ q_{12}=q_{21}=0,\ q_{22}=-1, \text{ тогда } (\overline{x},\overline{y})=x_1y_1-x_2y_2,$$

где $x_2=ct$ и $y_2=ct$, а t имеет смысл времени, c — скорость света в вакууме. Таким образом, модуль вектора определится как

$$|\overline{x}|=\sqrt{x^2-c^2t^2}.$$

Введем матрицу поворота $A\overline{x}=\overline{x}'$, где $\overline{x}=x_1\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2$, $\overline{x}'=x_1'\overline{e}_1'+x_2'\overline{e}_2'$.

Причем скалярное произведение не должно меняться в результате линейного ортогонального преобразования координат $\left(A^T=A^{-1}\right)$

$$(A\overline{x},A\overline{y})=(\overline{x}',\overline{y}')=(\overline{x},\overline{y})=(\overline{x},A^{-1}A\overline{y}), \quad \text{где} \quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \text{ и выполняется}$$

$$(A\overline{e}_1,A\overline{e}_1)=1,\ (A\overline{e}_2,A\overline{e}_2)=-1 \text{ и } (A\overline{e}_1,A\overline{e}_2)=0.$$

Новые векторы раскладываем по старым ортам $A\overline{e}_1=a_{11}\overline{e}_1+a_{12}\overline{e}_2$, $A\overline{e}_2=a_{21}\overline{e}_1+a_{22}\overline{e}_2$. Отсюда $a_{11}^2-a_{12}^2=1$, $a_{21}^2-a_{22}^2=-1$, $a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}=0$.

Из последнего равенства получим $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \beta$. Здесь введено обозначение β. Тогда следует, что $a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a_{12} = a_{21} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Матрица преобразования имеет вид $A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим физическую интерпретацию данной формулы. Итак, любое событие характеризуется точкой в пространстве и времени (x,t). Пусть система координат S движется относительно другой со скоростью v. Тогда преобразование координат имеет вид $\begin{cases} x = x' + vt, \\ t = t'. \end{cases}$ Легко получить закон сложения скоростей $u = u' + v$. Для ускорений $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} = 0$. Последнее выражение обозначает, что ускорение одинаково в обеих системах координат $\left(m\overline{x}'' = \sum \overline{F}\right)$. Законы Ньютоновской механики инвариантны относительно преобразования координат $A = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, которое является преобразованием Галилея. Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах.

Опыты Майкельсона показали, что скорость света одинакова во всех направлениях в любой инерциальной системе (двигающейся с постоянной скоростью). Отсюда Эйнштейном был сделан вывод о том, что нет абсолютного времени, в каждой системе отсчета (координат) свое время.

В этом случае скорость света является величиной постоянной $(c = const)$. Это положение составляет основной постулат специальной теории относительности. Таким образом, одно и то же событие в разных инерциальных системах координат описывается разными временами $t' \neq t$.

В данном примере двумерная плоскость называется пространством событий.

Установим связь между событиями в различных системах координат, предполагая, что x', t' и x, t связаны линейной зависимостью. Пусть в начальный момент $(t = t' = 0)$ из общего начала координат пущен луч света $(x' = x = 0;)$.

В системе координат S его приняли в точке x в момент t, а в системе S', движущейся со скоростью v относительно S, этот сигнал приняли в точке x' в момент t'.

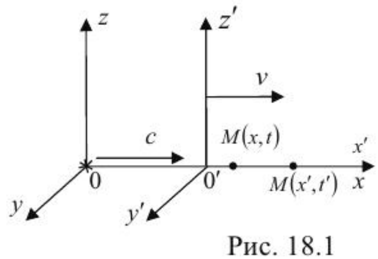


Рис. 18.1

Так как $\left|\frac{x}{t}\right| = \left|\frac{x'}{t'}\right| = c$,

то $x^2 - c^2t^2 = 0, x'^2 - c^2t'^2 = 0$.

Расстояние $|\overline{x}| = \sqrt{(x-x')^2 - c^2(t-t')^2}$ в пространстве событий между точками является инвариантом во всех инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим физический смысл параметра β в такой постановке задачи.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1' + \beta x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_2 = \dfrac{\beta x_1' + x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}, \text{ где } A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{x' + \beta c t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ ct = \dfrac{\beta x' + ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}.$$

Обратное преобразование Лоренца имеет вид $\begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{-\dfrac{\beta}{c}x + t}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}.$

Пусть в системе S' точка покоится $M'(0,t)$, то есть мы движемся вместе с системой S', тогда в S $x - \beta c t = 0$, $\dfrac{x}{t} = \beta c = v$, где v относительная скорость систем координат S и S'. Получим, что $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Таким образом, преобразования Лоренца имеют вид $\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}.$

Формулы Лоренца имеют смысл только при $v < c$ (скорость движения физических тел ограничена скоростью света). При $v << c$ формулы Лоренца переходят в формулы Галилея $\{x' = x - vt,\ t' = t\}$.

Получим так же правило сложения скоростей

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} : \frac{dt'}{dt} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{-\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt} + 1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}.$$

Таким образом, $u' = \dfrac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}$.

Интересным является эффект сокращения длин физических тел, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Так как $x_1 = \dfrac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ и $x_2 = \dfrac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, то $l = x_2 - x_1$ и окончательно $l' = l\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$. Длина, допустим стержня, в движущейся системе координат уменьшается (стержень сжимается). Напротив, масса физического тела в движущейся системе координат увеличивается $m = \dfrac{m}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$, поэтому разогнать физическое тело до скорости света в принципе невозможно, так как для этого необходимо совершать все большую и большую работу.

2. Рассмотрим классическую задачу движения небесных тел, важную для принципиального понимания нами законов окружающего мира. Попробуем объяснить природу наблюдаемого нами периодического и непериодического движения небесных тел.

Уравнение Ньютона, описывающее движение материального тела, например, планеты, в центральном поле тяготения Солнца, является квадратичной формой относительно скоростей и координат, поэтому логично ожидать, что траектория движения материального тела будет кривой второго порядка на плоскости, то есть эллипсом, гиперболой или параболой. Рассмотрим задачу подробнее.

Тяготеющие тела будем рассматривать как материальные точки и, кроме того, рассматривать взаимодействие только двух тел, хотя на самом деле в Солнечной системе движутся несколько планет. Если ввести полярные координаты r и φ с началом, связанным с Солнцем, то можно свести задачу о движении двух тел к задаче движения тела в центральном поле притяжения другого тела. Для этого поместим начало координат в центре инерции двух тел (обозначим $\overline{r} = \overline{r_1} - \overline{r_2}$)

$$m_1\overline{r_1} + m_2\overline{r_2} = \overline{0} \quad \text{и получим} \quad \overline{r_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overline{r}, \quad \overline{r_2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\overline{r}.$$

В этом случае Лагранжева функция, описывающая систему двух тел, преобразуется следующим образом

$$L = \frac{m_1\dot{\overline{r_1}}^2}{2} + \frac{m_2\dot{\overline{r_2}}^2}{2} - U(|\overline{r_1} - \overline{r_2}|) = \frac{m\dot{\overline{r}}^2}{2} - U(r),$$

где $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ является приведенной массой. Функция описывает движение одного тела с массой m во внешнем поле U, сферически симметричном относительно неподвижного начала координат, $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$ является скоростью тела.

Сила тяготения Ньютона определяется как $F = -\dfrac{dU}{dr} = \dfrac{\alpha}{r^2}$, где α — положительная постоянная ($\alpha > 0$ описывает притяжение тел). Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел есть $U = -\dfrac{\alpha}{r}$. Траекторию движения тела можно получить из решения уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \ \left(i = \overline{1,2}\right), \ \ \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt},$$

где $q_1 = r$ и $q_2 = \varphi$ — обобщенные координаты.

Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$ и не содержит координаты φ, поэтому такая координата называется циклической. Для нее уравнение движения Лагранжа упрощается и перепишется $(\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0)$ в виде закона сохранения – момента импульса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 .$$

Отсюда получаем закон сохранения момента импульса $\overline{M} = \left[\overline{r}, \overline{p}\right] = const$ или в полярной системе координат $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left|\overline{M}\right| = mr^2\dot{\varphi} = const$. Следовательно, планета движется по плоской траектории (орбите), плоскость которой перпендикулярна $\overline{M}$ и содержит траектории обоих тел. В данном случае траектории планеты и Солнца. Отметим, что выражение $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = \Delta S$ является площадью сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус–векторами и элементом дуги траектории, поэтому сохранение момента импульса интерпретируется как постоянство секториальной скорости. Таким образом, за равные промежутки времени радиус-вектор тела описывает равные площади (рис. 18.2,). Это формулировка так называемого ***второго закона Кеплера.***

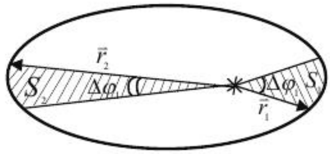


Рис. 18.2

Теперь используем закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad где\ E = \sum_{i=1}^{2}(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \text{ или}$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) .$$

Отсюда получим $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{M}{m^2r^2}}$ или $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{M}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M}{mr^2}}}$.

Здесь сделана замена $dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi$. После интегрирования дифференциального уравнения с разделяющими переменными, получим уравнение траектории планеты в полярной системе координат

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + const\,. \qquad (*)$$

Здесь величина $M^2 / 2mr^2$ называется центробежной энергией.

Так как $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, то график (рис.18.3) «эффективной» потенциальной энергии $U^{эфф} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$ имеет минимум при значениях радиуса $r = \frac{M^2}{\alpha m}$. Получим, что $U^{эфф}_{\min} = -\alpha^2 \frac{m}{2M^2}$. Данный интеграл является табличным.

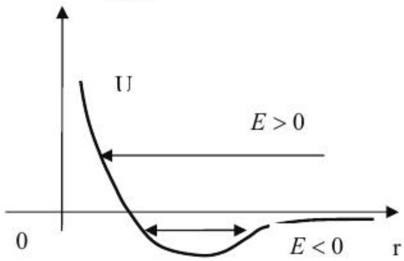


Рис. 18.3

Из рисунка 18.3 видно, что при $E \ge 0$ движение тела инфинитно (неограниченно) и тела удаляются друг от друга. При $E < 0$ движение тел ограничено (финитно) и тяготеющие тела находятся как бы в связанном состоянии. Формулу траектории получим в виде

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + const\,.$$

Выбираем начало отсчета $const = 0$ и, вводя обозначения $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ и $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, перепишем формулу траектории тела в поле центральных сил как

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где p и e есть параметр и эксцентриситет орбиты соответственно. При $E < 0$ и $e < 1$ получаем уравнение эллипса, где большая и малая оси определяются следующим образом соответственно как

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Наименьшее и наибольшее расстояния до центра поля (один из фокусов) определяются следующим образом соответственно,

$$r_{\min} = a(1-e), \quad r_{\max} = a(1+e).$$

Таким образом, планета совершает движение по эллипсу, как это показано на рисунке 18.4. Условие замкнутости траектории заключается в том, что при интегрировании (*) от минимального до максимального расстояния значение величины угла $\Delta\varphi = 2\pi \dfrac{m}{n}$ должно быть рациональным числом, где m и n целые числа. Траектория замкнута, когда $m = n$.

Примером такой траектории может быть траектория спутников УКВ связи (GPS, ГЛОНАСС), когда $m_2 = M \gg m_1$.

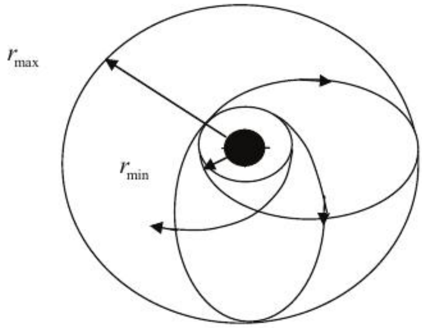


Рис. 18.4

Получим ***первый закон Кеплера*** – планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Третий закон Кеплера гласит, что квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит этих планет $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M_c} a^3$, M_c – масса Солнца (γ – постоянная гравитационного поля). При $E = 0$ и эксцентриситете $e = 1$ материальное тело движется по параболе с расстоянием в перигелии $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$. Например, это могут быть кометы, метеориты. При $E > 0$ и $e > 1$ движение также инфинитно (неограниченно) и траектория является гиперболой, огибающей центр поля притяжения (один из фокусов).

Отметим, что рассмотренный механизм взаимодействия двух тел можно привлечь и для описания взаимодействия заряженных частиц.

В заключение приведем значения скоростей, которые необходимо сообщить материальному телу, чтобы оно стало космическим объектом.

Первая космическая скорость необходима для того, чтобы тело стало искусственным спутником Земли и имело хотя бы круговую орбиту. Отметим, что для выведения на эллиптические орбиты требуются достаточно большие скорости. Первая космическая скорость (минимальная) определяется из равенства силы притяжения Земли и центробежной силы вращения тела на высотах, где сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Получим $v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_з}{r}}$,

где $M_з$ – масса Земли, r – радиус круговой орбиты. У поверхности Земли эта скорость примерно равна $v_1 \simeq 8$ км/сек.

Второй космической скоростью называют наименьшую скорость, которую необходимо сообщить материальному телу, чтобы оно могло без воздействия дополнительных сил преодолеть земное притяжение и превратиться в искусственный спутник Солнца. Эту скорость называют параболической, так как она соответствует параболической траектории тела в поле тяготения Земли.

Вторая космическая скорость определяется $v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_з}{r}}$ $r = R$, где r – расстояние от места запуска тела до центра Земли. Значение второй космической скорости составляет примерно 11,2 км/сек у поверхности Земли.

Третьей космической скоростью называется наименьшая скорость, которую необходимо сообщить телу, запускаемому с поверхности Земли, для того, чтобы оно преодолело притяжение Солнца и покинуло Солнечную систему. Значение этой скорости $v_3 \geq 16{,}7$ км/сек.

3. Рассмотрим приложение линейной алгебры к задачам экономики.

Американский экономист В.В. Леонтьев успешно применил матричный метод для анализа причин экономической депрессии Америки, наблюдавшейся в 1929—1932 годах. Он составил балансовые соотношения между различными отраслями хозяйств в Америке того времени и нашел в них проявление некоторых закономерностей.

Пусть производственная сфера хозяйства страны состоит из n отраслей.

Рассмотрим их работу за один год. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Например, сельскому хозяйству требуются сельскохозяйственные машины (тракторы, комбайны и так далее). Для производства техники машиностроению требуется различный металл, поставляемый металлургической отраслью и так далее. Итак, пусть

— x_i есть общий объем продукции i отрасли (валовый выпуск),

— x_{ij} есть объем продукции i отрасли, потребляемый j отраслью,

— y_i есть объем продукции i отрасли, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере. Это конечный продукт потребления. К нему относятся личное потребление граждан (например, автомобили), общественное потребление (например, театры, кинотеатры и так далее), содержание государственных служб и государственных институтов.

Балансовый принцип связи различных отраслей экономики заключается в том, что валовый выпуск i отрасли должен быть равен сумме объектов потребления в производственной и непроизводственной сферах

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots + x_{in} + y_i,$$

где $\overline{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ вектор валового выпуска по отраслям хозяйства страны, а $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ есть вектор конечного потребления.

В.В. Леонтьев, проанализировав статистический материал по валовому продукту и отраслевым валовым продуктам, установил, что значения элементов матрицы по отраслям меняются очень слабо и определяются

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i} = const$$

технологией производства. Изменения заметны только при смене технологии производства, например, с повсеместным использованием электроэнергии.

Таким образом, получим, что при определенной в данной стране технологии выполняется $x_i \approx a_{ij} x_j$, то есть валовый продукт по одной из отраслей является линейной композицией других отраслевых валовых продуктов. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 \\ .... \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases},$$

где матрица $\widehat{A}$ положительна, то есть $a_{ij} \geq 0$.

Здесь $\widehat{A} = \{a_{ij}\}$ матрица коэффициентов прямых затрат, которые определяются действующими технологиями в стране. Очевидно, что и $y_i \geq 0$.

Данная система называется матричным уравнением межотраслевого баланса определяется как

$$\overline{x} = \widehat{A}\overline{x} + \overline{y}.$$

Если известен вектор потребления и определены все коэффициенты матрицы прямых затрат, то можно получить значения выпуска продукции по отраслям x_i, необходимые для успешного ведения хозяйства страны и позволяющие избежать кризиса перепроизводства в какой–либо отрасли. Отметим, что кризис 30–х годов был обусловлен именно перепроизводством в металлургической промышленности и в сельском хозяйстве.

В.В. Леонтьев сформулировал два основных требования к модели межотраслевого баланса, выполнение которых позволяет экономике любой страны быть успешной.

I. Матрица $\widehat{A}$ должна быть ***продуктивной***, в этом случае должно выполняться условие $x_i \geq 0$, что означает рост валового дохода. Кроме того, матрица должна быть положительной. Отсюда следует, что

$$(E - A)\overline{x} = \overline{y}, \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y}.$$

Таким образом, матрица $\widehat{A}$ продуктивна, если матрица $(E - A)^{-1}$ существует и все её элементы неотрицательны. Максимальное собственное значение матрицы $\widehat{A}$ не должно превышать единицы.

II. Сумма элементов в матрице $\widehat{A}$ по любому столбцу (строке) не должна превосходить единицы и хотя бы для одной из них быть строго меньше единицы.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 1. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СЛАУ.

Вариант 1.

1. Выполнить действия: $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 4 строке, по 1 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}.$$

Вариант 2.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\5\\6\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&-1&0\\4&3&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5&0&6\\1&2&-1\\3&5&8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}-1&2&3\\4&0&1\\2&4&7\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 3 строчке и 2 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольной формы

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\2&-3&4&1\\3&4&-3&9\end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+3x_2-13x_3=-6\\4x_1-x_2+x_3=3\\2x_1-x_2+3x_3=3\end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases}6x_1-3x_2+2x_3+4x_4=5\\2x_1-x_2+2x_3+4x_4=7\\8x_1-4x_2+3x_3+6x_4=8\end{cases}.$$

Вариант 3.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix}1&8&7&-12\\1&-5&-6&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&6&8&-2\\-2&-4&7&9\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -7 & 10 & 12 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 4 строке, по 1 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -6 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 6 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}.$$

Вариант 4.

1. Выполнить действия: $3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу "звездочки";
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 1 строке и 4 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix}10 & 1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 1 & -1\\ 12 & -3 & 4 & 1\\ 38 & 4 & -3 & 9\end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-2\\ 4x_1-3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+4x_4=2\\ 3x_1+3x_2-x_3+3x_4=2\\ 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4=4\end{cases}.$$

Вариант 5.

1. Выполнить действия: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 5\\ 4 & 2 & 0 & 7\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 10 & 0 & 20\\ 0 & 0 & 25 & 50\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
  а) по правилу “звездочки”;
  б) по правилу Саррюса;
  в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 2 строке и по 1 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
  а) по правилу Крамера;
  б) с помощью обратной матрицы;
  в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 15 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -7 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 14 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 1x_4 = -1 \end{cases}.$$

Вариант 6.

1. Выполнить действия: $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить определитель третьего порядка:
  а) по правилу “звездочки”;
  б) по правилу Саррюса;
  в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 4 строке и 1 столбцу, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
  а) по правилу Крамера;
  б) с помощью обратной матрицы;
  в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad = 3 \\ 10x_1 - 4x_2 + x_3 + 9x_4 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}.$$

Вариант 7.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & -6 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить определитель третьего порядка:
  а) по правилу “звездочки”;
  б) по правилу Саррюса;
  в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 3 строчке и 2 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \end{cases}.$$

Вариант 8.

1. Выполнить действия: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 11 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц AB

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Вариант 9.

1. Выполнить действия: $0{,}1\begin{pmatrix} 10 & 30 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} - 0{,}3\begin{pmatrix} 15 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 1 столбцу и 2 строке и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
а) по правилу Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}.$$

Вариант 10.

1. Выполнить действия: $5\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
а) по правилу “звездочки”;
б) по правилу Саррюса;
в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
а) по правилу Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x_1 \qquad -x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}.$$

Вариант 11.

1. Выполнить действия: $4\begin{pmatrix} 0{,}1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -0{,}3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 2{,}5 & 1{,}1 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 4 строке и по 1 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 4 \\ 5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}.$$

Вариант 12.

1. Выполнить действия: $3\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 9x_1 - 9x_2 - x_3 = 37 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}.$$

Вариант 13.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix} 5 & 0 & -7 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & 9 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 2 строке и 1 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \end{cases}.$$

Вариант 14.

1. Выполнить действия: $0{,}1\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти B^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&4&7\\5&3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&4&-3\\1&0&2\\1&-3&-1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\5&1&2\\2&0&-4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&7\\1&6&3\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix}2&1&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=2\\2x_1-x_2+2x_3=3\\4x_1+x_2+4x_3=3\end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=3\\x_1+2x_2+7x_3-4x_4=1\\3x_1+6x_2+9x_3-7x_4=4\end{cases}.$$

Вариант 15.

1. Выполнить действия: $0,5\begin{pmatrix}1&3&-2\\0&2&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5&-1&2\\6&0&-3\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&5&8\\3&7&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&1&2\\4&5&1\\6&3&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&1&0&-5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7&0\\-4&4\\1&2\\0&-3\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;

б) по правилу Саррюса;
в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 14 & 26 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 1 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
а) по правилу Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 17 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 29 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Вариант 16.

1. Выполнить действия: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить определитель третьего порядка:
а) по правилу “звездочки”;
б) по правилу Саррюса;
в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 11x_4 = -9 \end{cases}.$$

Вариант 17.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix} 0,3 & 1,1 & 2 \\ 1 & 0,5 & -0,1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2,2 & 1,1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 8 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 1 строке и по 3 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -7 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}.$$

Вариант 18.

1. Выполнить действия: $0{,}2\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} - 0{,}3\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1}, B^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:

а) по правилу Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6 \end{cases}.$$

Вариант 19.

1. Выполнить действия: $4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
а) по правилу “звездочки”;
б) по правилу Саррюса;
в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 2 строке и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
а) по правилу Крамера;
б) с помощью обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Вариант 20.

1. Выполнить действия: $3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
   а) по правилу “звездочки”;
   б) по правилу Саррюса;
   в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 3 строке и 1 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
   а) по правилу Крамера;
   б) с помощью обратной матрицы;
   в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -35 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 20 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 + x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}.$$

Вариант 21.

1. Выполнить действия: $5\begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 8 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

Вариант 22.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\\ 1 & -5 & -6\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 9 & -3\\ -6 & 12 & 9\\ -3 & 15 & 3\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1}, B^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ 2 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 3\\ 7 & 9 & 4 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}9 & -9 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 3\end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3=8\\ 2x_1-x_2-3x_3=-4\\ x_1+5x_2+x_3=0\end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases}x_1 \qquad +3x_3-4x_4=5\\ 3x_1+5x_2-x_3+5x_4=0\\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4=5\end{cases}.$$

Вариант 23.

1. Выполнить действия: $3\begin{pmatrix}0,2 & 1,3\\ 1 & 0,5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1,6 & -3,1\\ 1,1 & 4\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 6\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”;
 б) по правилу Саррюса;
 в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 4 & 2 & 6\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4-го порядка методом понижения порядка по 2 строке и 4 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases}2x_1+7x_2 \qquad +8x_4=2\\ 4x_1+x_2+2x_3-2x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=2\end{cases}.$$

Вариант 24.

1. Выполнить действия: $0{,}5\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ 4 & 2 & 14\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1{,}5 & 1 & 2{,}1\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A\cdot B$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ 3 & 2 & 5\\ 6 & -2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка:
 а) по правилу “звездочки”

б) по правилу Саррюса

в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 9 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка, методом Гаусса и доведением до матрицы треугольного вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
  а) по правилу Крамера;
  б) с помощью обратной матрицы;
  в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 13x_4 = 2 \end{cases}.$$

Вариант 25.

1. Выполнить действия: $2\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Найти A^{-1} и произведение матриц $A \cdot B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix};$ б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить определитель третьего порядка:
  а) по правилу “звездочки”;
  б) по правилу Саррюса;
  в) разложением определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определитель 4–го порядка методом понижения порядка по 2 строке и 4 столбцу и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений:
 а) по правилу Крамера;
 б) с помощью обратной матрицы;
 в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}.$$

6. Исследовать совместность и найти общее решение системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 11 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 2. МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

А. Найти значение матричного многочлена

1. $A^2 - 2A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $A^2 + 3A - 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $3A - A^2 + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $2A^2 - 3A + 5E$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $3A^2 + 2A - 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $2A^2 - 7A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $5A + 2E - 4A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $3A^2 + 6A - 5E$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $6E - 3A^2 + 5A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $5E + 4A - 3A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

11. $4E - A^2 + 3A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

12. $4A - 2E - 3A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

13. $4A^2 - 2A + 3E$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $3A - 4E - A^2$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

15. $2A + 3A^2 - A^3 + 2E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $4A + 5E - 2A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $-2A^2+3A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

18. $A^3-2A^2+3A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

19. $4A^2-3A-E$, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

20. $A^2-7A+2E-A^3$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 6 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

21. $5A\ -2A^2+3E$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

22. $3A^2+4A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

23. A^3-3A^2+5A-E, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

24. $-A^2+5A-4E$, если $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 4 & -3 & 1\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

25. $3A^2+4A-5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Б. Даны два линейных преобразования. Средствами матричного исчисления найти преобразования, выражающие x_1, x_2, x_3 через x_1'', x_2'', x_3''.

1. $\begin{cases}x_1' = x_1+2x_2+4x_3\\ x_2' = 5x_1+x_2+2x_3;\\ x_3' = 3x_1-x_2+x_3\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'' = 3x_1'-x_2'+5x_3'\\ x_2'' = x_1'+2x_2'+4x_3'.\\ x_3'' = 3x_1'+2x_2'-x_3'\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1' = x_1-4x_2-2x_3\\ x_2' = 3x_1+x_2+x_3\ ;\\ x_3' = 3x_1-5x_2-6x_3\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'' = x_2'\\ x_2'' = 2x_1'+3x_2'+2x_3'.\\ x_3'' = 4x_1'-x_2'+5x_3'\end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 8x_1 + 3x_2 - 6x_3; \\ x_3' = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_2' - 6x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 7x_3' \\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 11x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + x_3' \\ x_2'' = 2x_2' + x_3' \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3' \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3; \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$.

6. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 7x_1' + 4x_3' \\ x_2'' = 4x_2' - 9x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + x_2' \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3; \\ x_3' = x_1 - 5x_2 - 8x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$.

8. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3; \\ x_3' = x_1 + x_2 + 4x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - x_2' - x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 4x_2' + 7x_3' \\ x_3'' = 8x_1' + x_2' - x_3' \end{cases}$.

9. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3' \\ x_2'' = -3x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_3' \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3; \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3' \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + 5x_3' \\ x_2'' = x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3'' = 3x_2' - 6x_3' \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - 7x_2 - 2x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 5x_1' - 19x_2' - x_3' \\ x_2'' = 2x_1' - 5x_2' - x_3' \\ x_3'' = 8x_1' - 31x_2' - 4x_3' \end{cases}$.

13. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 11x_3 \\ x_3' = 7x_1 - 5x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 12x_1' - 13x_2' - 4x_3' \\ x_2'' = 7x_1' - 9x_2' - 11x_3' \\ x_3'' = 12x_1' - 17x_2' - 15x_3' \end{cases}$.

14. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 2x_2 + 13x_3 \\ x_3' = 3x_1 - x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 8x_1' - x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = 4x_1' - x_2' + 6x_3' \\ x_3'' = 13x_1' + x_2' + 16x_3' \end{cases}$.

15. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 5x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - 7x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' + 7x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$.

16. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 3x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 7x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 5x_3' \end{cases}$.

17. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_3' = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 7x_3' \\ x_2'' = 3x_1' + 2x_2' - 7x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - x_2' + 3x_3' \end{cases}$.

18. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + x_3 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 9x_2 + 2x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - 2x_2' + 8x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 7x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$.

19. $\begin{cases} x_1' = -5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_3' = 4x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 7x_2' + x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 4x_2' - x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 6x_3' \end{cases}$.

20. $\begin{cases} x_1' = -7x_1 + 3x_3 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 + x_3; \\ x_3' = 5x_1 + x_2 + 3x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 5x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -x_1' + 3x_2' - 4x_3' \\ x_3'' = 2x_1' - 2x_2' + 5x_3' \end{cases}$.

21. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 9x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3; \\ x_3' = 7x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 7x_1' - 3x_2' + 4x_3' \\ x_2'' = -2x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' + 7x_2' + 3x_3' \end{cases}$.

22. $\begin{cases} x_1' = 7x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 2x_3; \\ x_3' = x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 4x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + x_3' \end{cases}$.

23. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + x_3; \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 3x_2' + 4x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + 3x_3' \end{cases}$.

24. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ ; \\ x_3' = 2x_1 + x_2 - 4x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' - x_3' \\ x_3'' = 5x_1' - 2x_2' + 3x_3' \end{cases}$.

25. $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 5x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + x_3; \\ x_3' = x_1 + 4x_2 - x_3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' + 5x_3' \\ x_2'' = -3x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_3'' = 3x_1' - 2x_2' + 4x_3' \end{cases}$.

В. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB, б) BA–AB, в) A^{-1}, г) AA^{-1}, д) $A^{-1}A$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&6&0\\2&4&-6\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}-6&1&11\\9&2&5\\0&3&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&2&7\\1&-3&2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\-1&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&1\\3&7&1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&3&-1\\4&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&1&2\\5&3&0\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}6&7&3\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&5\\4&-1&-2\\4&3&7\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}-2&3&4\\3&-1&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&2\\1&9&2\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}1&7&3\\-4&9&4\\0&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&5&2\\1&9&2\\4&5&2\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2&6&1\\1&3&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-3&2\\-4&0&5\\3&2&-3\end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix}6&9&4\\-1&-1&1\\10&1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\0&5&2\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\3&1&7\\2&1&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&4\\-3&0&1\\5&6&-4\end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&5\\7&1&2\\1&6&0\end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&0&6\\4&3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\5&-5&-1\\10&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix}3&-7&2\\1&-8&3\\4&-2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&5&-3\\2&4&1\\2&1&-5\end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&-7&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Г. Определить ранг матрицы:

а) методом окаймляющего минора;

б) диагонализируя матрицу с помощью элементарных преобразований до единичной, когда сумма неуничтожаемых единиц на главной диагонали равна рангу матрицы.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 3\\ -4 & 5 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 2. $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$; 4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 2 & -3 & -1\\ 2 & -7 & -5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -4 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -4\\ 3 & 5 & -1 & -5\\ -3 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 4 & -1\\ 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 10. $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -6 & 4\end{pmatrix}$;

11. $A=\begin{pmatrix}4 & -6 & 3 & 0\\ 2 & 8 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 12. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

13. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & -2\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 14. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 5 & -4\\ 0 & 7 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

15. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & 3\\ -4 & 5 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$; 16. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 2 & 2\\ -1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$;

17. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -5 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 5\\ 1 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$; 18. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 7\\ 7 & -5 & 0 & -5\\ 4 & 0 & 11 & 11\end{pmatrix}$;

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$; 20. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 6 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$;

21. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & -\\ 2 & -1-1 & 2\end{pmatrix}$; 22. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$;

23. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -6\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$; 24. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 7 & -5 & 0\\ 4 & 0 & 11\end{pmatrix}$;

25. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 3\\ 4 & -3 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$

Д. Найти собственные значения и векторы матриц. Показать справедливость теоремы Гамильтона – Келли. Вычислить A^{100} и $\sqrt{B}$.

1. а) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$.

2. а) $A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}19/3 & 2/3 & -2/3\\ 2 & 5 & -2\\ 2/3 & -2/3 & 11/3\end{bmatrix}$.

4. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2/3 & 7/3 & -4/3\\ 2/3 & -2/3 & 5/3\end{bmatrix}$.

5. а) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -2/3\\ -2/3 & 5/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -13/3\end{bmatrix}$.

6. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 2/3 & 13/3 & -4/3\\ 2/3 & -2/3 & 11/3\end{bmatrix}$.

7. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -5\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}4 & -3 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

8. а) $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}7 & -4 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

9. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$.

10. а) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -2/3\\ -2/3 & 5/3 & -2/3\\ -2/3 & 2/3 & -13/3\end{bmatrix}$.

11. а) $A=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}5/3 & -2/3 & -4/3\\ 0 & 1 & 0\\ -2/3 & 2/3 & 7/3\end{bmatrix}$.

12. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & -6\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}13 & 2 & -2\\ 6 & 9 & -6\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix}$.

13. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

14. а) $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}7/5 & 2/3 & -2/3\\ 4/3 & 5/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

15. а) $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}7 & -6 & 6\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

16. а) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -5 & -3\end{bmatrix}$;   б) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

17. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

18. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

19. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

20. а) $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$.

21. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

22. а) $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}5 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 12 & 6 & 3\end{bmatrix}$.

23. а) $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

24. а) $A=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 2 & -8\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$.

25. а) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -6 & 3\end{bmatrix}$; б) $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

А. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить:

а) по формулам Крамера,

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом),

в) методом Гаусса и методом собственных векторов $V^{-1}AV\overline{x} = V^{-1}\overline{b}$.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 \qquad = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 \qquad + x_3 = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x - 2y - z = 4 \\ -x + 3y - z = -6 \\ x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + 2y - z = -6 \\ -x + \quad 5z = 12 \\ 5x - y + 3z = -5 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 2 \\ 5x \qquad + z = 6 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 11 \\ 3x - 3y + z = -1 \\ 4x + y - 2z = 2 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 5x + 2y - z = -7 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x - 3y \qquad = 8 \\ -2x + 2y + z = -3 \\ x - 3y + 4z = 8 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33 \\ 7x_1-5x_2 \qquad =24 \\ 4x_1 \qquad +11x_3=39 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=4 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y-z=9 \\ -x+5y+3z=-3 \\ 4x+4y-2z=16 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12 \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33 \\ 4x_1 \qquad +x_3=-7 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x_1+3x_2-5x_3=0 \\ 9x_1+4x_2-7x_3=3 \\ 3x_1+x_2-2x_3=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 5y+3z=12 \\ 2x+2y-3z=15 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6 \\ 5x_2+4x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=6 \\ 3x_1+4x_2+9x_3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y-3z=-5 \\ -x-3y+z=-4 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=21 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=9 \\ 2x_1-x_2-x_3=10 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=9 \\ 3x_1+3x_2-x_3=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+ \qquad z=3 \\ 2x+3y+z=-6 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3=5 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12 \\ x_1-2x_2+3x_3=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=3 \\ x_1+3x_2-5x_3=0 \\ 2x_1+x_2-8x_3=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ -2x+y-z=1 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3=19 \\ 2x_1-x_2+2x_3=11 \\ x_1+x_2+2x_3=8 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+x_2-x_3=2 \\ x_1 \quad -2x_3=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ -5x+y-z=-10 \\ x+2y-2z=2 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=6 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=2 \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+y-2z=11 \\ x-2y+3z=-5 \\ -3x-3y+z=-14 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=8 \\ x_1+x_2+2x_3=11 \\ 4x_1+x_2+4x_3=22 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1+8x_2-7x_3=0 \\ 2x_1-5x_2+6x_3=1 \\ 4x_1+3x_2-x_3=7 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+5y \qquad =-4 \\ -x+3y-2z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9 \\ x_1+5x_2+x_3=20 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=15 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1+2x_2-4x_3=8 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=1 \\ 5x_1+6x_2-9x_3=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x+y-3z=4 \\ -2x-y-3z=2 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ -x + 2y + 4z = -13 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 2 \\ 2x - y - 2z = 4 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 3y - 5z = 10 \\ 2x - 2y - 3z = 3 \\ x - 5y + 2z = -5 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -x + 3y - 2z = -3 \\ 4x + 2y - z = 2 \end{cases}$.

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x - y + 3z = 12 \\ x + 3y - z = -6 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + 10y - 3z = -6 \\ 4x - 2y + z = 5 \end{cases}$.

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y - 8z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + z = -3 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ -x + 5y + 3z = -1 \\ 2x - y + z = 7 \end{cases}$.

Б. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_3 = 0 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

22. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

24. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

B. Найти фундаментальную систему решений.

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 12x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 13 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 5x_1 \quad - 4x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 3 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 \quad - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 11x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + 14x_2 + 22x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad = 13 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 12x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 10x_1 - 4x_2 + x_3 + 9x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \quad = 3 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 12x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 \quad + 2x_3 \quad = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_2 - 4x_3 = 15 \\ 5x_1 \quad - 2x_3 = 10 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 22x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \\ 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 - 16x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -24 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 24 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ \end{cases}$.

21. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ -8x_1 + 12x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$.

22. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 \quad = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$.

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 \quad - 2x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 \quad + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 \quad + 2x_4 = 5 \end{cases}$.

Г. Решить приближенно методом итерации и методом Зейделя, сравнить ответы.

1. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -5 \end{cases}$. $\quad$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -4 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ -x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$. $\quad$ 4. $\begin{cases} 3{,}5x_1 + x_2 - 2x_3 = 10{,}5 \\ -2x_1 + 8{,}2x_2 + 2{,}3x_3 = 12{,}8 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6{,}1x_3 = -2{,}8 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 3{,}5x_2 - 7{,}1x_3 = 12{,}1 \\ 5{,}2x_1 - 1{,}8x_2 + 2.5x_3 = -10{,}8 \\ 3{,}1x_1 + 7{,}5x_2 - 1.7x_3 = 4{,}2 \end{cases}$. $\quad$ 6. $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 11 \\ -x + 3y + y = -3 \\ 2x - y + 7z = 5 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$.   8. $\begin{cases} 2{,}1x_1 - 1{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = -2{,}8 \\ 5{,}2x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}7x_3 = 5{,}1 \\ 1{,}3x_1 - 4{,}7x_2 - 2{,}1x_3 = 0{,}8 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} 3{,}1x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}8x_3 = 1{,}2 \\ -1{,}7x_1 + 2{,}1x_2 + 5{,}6x_3 = 7{,}2 \\ 5{,}1x_1 - 1{,}1x_2 + 2{,}3x_3 = -2{,}5 \end{cases}$.   10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} 1{,}4x_1 + 2{,}1x_2 + 7{,}2x_3 - 1{,}8x_4 = 2{,}8 \\ 6{,}4x_1 - 1{,}2x_2 - 3{,}1x_3 + 2{,}2x_4 = -3{,}2 \\ 2{,}3x_1 + 7{,}7x_2 + 1{,}3x_3 - 1{,}8x_4 = 5{,}1 \\ -1{,}2x_1 + 0{,}9x_2 - 3{,}1x_3 + 5{,}8x_4 = 12 \end{cases}$.   12. $\begin{cases} 2x - 3y + 9z = 18 \\ -x + 5y - 2y = 1 \\ 6x - 2y + z = -3 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$.   14. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - 3y = -3 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 5 \end{cases}$.   16. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$.   18. $\begin{cases} 7x - 2y - z = -35 \\ 4x + 9y + 3y = 27 \\ 2x - 3y + 6z = -12 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} 6{,}2x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 - 0{,}9x_4 = 3{,}1 \\ 1{,}8x_1 - 7{,}3x_2 - 1{,}1x_3 + 1{,}2x_4 = 2{,}8 \\ 2{,}5x_1 - 3.1x_2 + 9{,}4x_3 - 2{,}1x_4 = -12{,}3 \\ -3.1x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}4x_3 + 12{,}8x_4 = -6{,}4 \end{cases}$.   20. $\begin{cases} 4{,}2x + 1{,}1y - 2{,}3z = -8{,}3 \\ -0{,}9x + 5{,}7y + 1{,}4y = 12 \\ 1{,}5x - 0{,}7y + 3{,}4z = 7 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 5x - y - 2y = -10 \\ 2x + 7y - z = 0 \end{cases}$.   22. $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}7x_2 + 5{,}4x_3 - 2{,}1x_4 = -3{,}8 \\ 7{,}4x_1 - 1{,}2x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}1x_4 = 12{,}2 \\ 20{,}7x_1 + 5{,}1x_2 - 2{,}1x_3 - 1{,}7x_4 = -5{,}4 \\ 3{,}1x_1 - 2{,}8x_2 - 1{,}5x_3 + 9{,}1x_4 = 4{,}5 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 14 \\ -2x_1 + 5x_2 + 12x_3 = -3 \end{cases}.$ 24. $\begin{cases} 3{,}24x_1 + 0{,}75x_2 - 1{,}25x_3 = 6{,}25 \\ -1{,}18x_1 + 2{,}12x_2 + 5{,}31x_3 = 12{,}07 \\ 2{,}41x_1 - 7{,}08x_2 + 3{,}14x_3 = 13{,}82 \end{cases}.$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 12 \\ -3x_1 + x_2 = 15 \\ 2x_1 - 7x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 10 \end{cases}.$

Примечание. Для лучшей сходимости итерационного процесса необходимо преобразовать уравнения, выделив наибольшие диагональные элементы при неизвестных. Для этого необходимо или переобозначить неизвестные (циклическая перестановка), или переставить уравнения.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 4.
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

А. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора $\overline{a}$; б) скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$; в) проекцию вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$; г) координаты точки M, делящий отрезок l в отношении $\alpha:\beta$.

1. $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $\overline{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{c}=\overrightarrow{CB}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AB$, $\alpha=5$, $\beta=4$.

2. $A(4,3,-2)$, $B(-3,-1,4)$, $C(2,2,1)$, $\overline{a}=-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$, $\overline{b}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overline{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=BC$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

3. $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(1,4,2)$, $\overline{a}=2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$, $\overline{b}=\overrightarrow{BC}$, $\overline{c}=\overrightarrow{BC}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=1$.

4. $A(2,4,3)$, $B(3,1,-4)$, $C(-1,2,2)$, $\overline{a}=2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{BA}$, $\overline{c}=\overline{b}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=1$, $\beta=4$.

5. $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$, $\overline{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{BC}$, $\overline{c}=\overline{b}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

6. $A(-1,-2,4)$, $B(-1,3,5)$, $C(1,4,2)$, $\overline{a}=3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{c}=\overline{b}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=AC$, $\alpha=1$, $\beta=7$.

7. $A(1,3,2)$, $B(-2,4,-1)$, $C(1,3,-2)$, $\overline{a}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$, $\overline{b}=\overrightarrow{AC}$, $\overline{c}=\overline{b}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AB$, $\alpha=2$, $\beta=4$.

8. $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$, $\overline{a}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{d}=\overrightarrow{CB}$, $l=AC$, $\alpha=2$, $\beta=1$.

9. $A(3,4,-4)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,-3,1)$, $\overline{a}=5\overrightarrow{CB}+5\overrightarrow{AC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{BA}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BA$, $\alpha=2$, $\beta=5$.

10. $A(0,2,5)$, $B(2,-3,4)$, $C(3,2,-5)$, $\overline{a}=-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=AC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

11. $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,4,5)$, $\overline{a}=\overline{4AC}-8\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{AB}$, $\overline{d}=\overrightarrow{BC}$, $l=AB$, $\alpha=4$, $\beta=2$.

12. $A(-2,-3,-2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,-3,3)$, $\overline{a}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=1$.

13. $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$, $\overline{a}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AB}$, $l=BC$, $\alpha=3$, $\beta=2$.

14. $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$, $\overline{a}=5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$, $\overline{b}=\overline{c}=\overrightarrow{BA}$, $\overline{d}=\overrightarrow{AC}$, $l=CB$, $\alpha=1$, $\beta=5$.

15. $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$, $\overline{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, \overline{b} = \overrightarrow{BA}, \overline{c} = \overrightarrow{AC}, \overline{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

16. $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$, $\overline{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

17. $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$, $\overline{a} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{AC}$, $\overline{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$.

18. $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$, $\overline{a} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}, \overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{CA}, \overline{d} = \overrightarrow{BA}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$.

19. $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$, $\overline{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{AC}$, $\overline{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$.

20. $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$, $\overline{a} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}, \overline{b} = \overrightarrow{BC}, \overline{c} = \overrightarrow{AC}, \overline{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

21. $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\overline{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$, $\overline{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overline{c} = \overrightarrow{CA}$,

$l = BA, \overline{d} = B\overline{C}, \alpha = 5, \beta = 3$.

22. $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$, $\overline{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

23. $A(3,4,1)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$, $\overline{a} = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{BC}$, $\overline{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

24. $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$, $\overline{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{BA}$, $\overline{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

25. $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$, $\overline{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, \overline{b} = \overline{c} = \overrightarrow{CA}, \overline{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

Б. Решить задачи.

Вариант 1.

1. Разложить вектор $\overline{d} = \{5;7;8\}$ по базису векторов $\overline{a} = \{4;5;8\}$, $\overline{b} = \{3;0;1\}$ и $\overline{c} = \{-1;4;2\}$.
2. На оси ординат найти точку *M*, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.
3. Найти работу силы $\overline{F} = \{1;2;1\}$ по перемещению тела из точки $A(1;2;3)$ в точку $B(3;3;8)$ вдоль прямой.
4. Упростить $[\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}, \overline{c}] + [\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}, \overline{b}] + [\overline{b} - \overline{c}, \overline{a}]$.
5. Показать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

6. Найти площадь треугольника *ABC*, где $A(1;2;7)$, $B(8;3;0)$ и $C(-1;-1;-1)$. Найти величину высоты *AM*.

Вариант 2.

1. Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}\{7;23;4\}$ в этом базисе, где $\overline{a}=\{5;4;1\}$, $\overline{b}=\{-3;5;2\}$ и $\overline{c}=\{2;-1;3\}$.
2. Дано $|\overline{a}|=|\overline{b}|=3$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=60^\circ$, $(\widehat{\overline{b},\overline{c}})=120^\circ$. Найти проекцию $(\overline{a}-2\overline{b})$ на ось параллельную вектору $\overline{c}$.
3. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(2;1;-4)$, $B(1;3;5)$ и $C(7;2;3)$. Найти координаты вершины D.
4. Найти единичный вектор перпендикулярный векторам $\overline{a}=\{1;1;2\}$ и $\overline{b}=\{2;1;1\}$.
5. Сила $\overline{F}=3\overline{i}+2\overline{j}-4\overline{k}$ приложена к точке $M(2;-1;1)$. Найти величину момента силы относительно точки $A(-3;2;4)$.
6. Выяснить, лежат ли точки $A(1;0;7)$, $B(-1;-1;2)$, $C(2;-2;2)$ и $D(0;1;9)$ в одной плоскости.

Вариант 3.

1. Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\overline{d}\{16;6;15\}$ в этом базисе, где $\overline{a}=\{3;1;2\}$, $\overline{b}=\{-7;-2;-4\}$ и $\overline{c}=\{-4;0;3\}$.
2. Доказать тождество $[\overline{a},\overline{b}]^2+(\overline{a},\overline{b})^2=a^2b^2$.
3. Компланарны ли векторы $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-3\overline{k}$ и $\overline{c}=\{3;-4;7\}$?
4. Даны вершины четырехугольника $A(1;2;3)$, $B(7;4;2)$, $C(-3;0;6)$ и $D(9;2;4)$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.
5. Найти площадь параллелограмма, построенного на вершинах $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$ и $\overline{b}=2\overline{p}+\overline{q}$, где $\overline{p}$ и $\overline{q}$ — единичные векторы и угол между ними равен $\dfrac{\pi}{3}$.
6. Даны вершины тетраэдра $O(-5;-4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(6;3;7)$. Найти длину высоты опущенной на грань *ABC* из вершины *O*.

Вариант 4.

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{8;-16;17\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{3;4;-3\}$, $\overline{b}=\{-5;5;0\}$ и $\overline{c}=\{2;1;-4\}$.
2. Построить параллелограмм на векторах $\overline{OA}=\overline{i}+2\overline{j}$ и $\overline{OB}=2\overline{k}-\overline{j}$. Определить длину его диагоналей и угол между ними.
3. Найти площадь треугольника *ABC* с вершинами $A(7;3;4)$, $B(1;0;6)$ и $C(4;5;-2)$. Найти величину высоты *AM*.
4. Компланарны ли векторы $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$ и $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$?
5. Найти работу равнодействующей сил $\overline{F_1}=\{1;2;-3\}$ и $\overline{F_2}=\{-3;1;1\}$ по перемещению тела из точки $A(4;1;-3)$ в точку $B(-1;2;1)$ по прямой.

6. Упростить $2\left(\bar{i},\left[\bar{j},\bar{k}\right]\right)+3\left(\bar{j},\left[\bar{i},\bar{k}\right]\right)+4\left(\bar{k}\left[\bar{i},\bar{j}\right]\right)$.

Вариант 5.

1. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $\left(\bar{x},3\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}\right)=2$, $\left(\bar{x},4\bar{i}-5\bar{j}+2\bar{k}\right)=1$ и $\left(\bar{x},5\bar{i}-6\bar{j}+4\bar{k}\right)=3$.
2. Разложить вектор $\bar{d}=\{-4;2;-12\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{1;0;5\}$, $\bar{b}=\{3;2;7\}$ и $\bar{c}=\{5;0;9\}$.
3. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\{1;3;4\}$ и $\bar{b}=2\bar{i}+5\bar{j}+8\bar{k}$.
4. Найти работу силы $\bar{F}=\{1;0;2\}$ по перемещению по прямой тела из точки $A(1;-3;-2)$ в точку $B(0;-5;-4)$, а затем в точку $C(3;2;8)$.
5. Найти объем пирамиды $A(0;1;1)$, $B(2;4;1)$, $C(3;6;3)$ и $D(5;-3;2)$. Найти величину высоты AM.
6. Раскрыть скобки и упростить $\left[\bar{i},\bar{j}-\bar{k}\right]+\left[\bar{j},\bar{i}+\bar{k}\right]+\left[\bar{k},\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}\right]$.

Вариант 6.

1. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3)$ и $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции. Найти угол при вершине C.
2. Разложить вектор $\bar{d}=\{1;20;1\}$ по базису векторов $\bar{a}=\{-2;3;5\}$, $\bar{b}=\{1;-3;4\}$ и $\bar{c}=\{7;8;-1\}$.
3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\{2;1;0\}$.
4. Определить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$, $\bar{b}=\{0;-3;1\}$ и $\bar{c}=2\bar{j}+5\bar{k}$. Определить длину главной диагонали.
5. Найти внутренний угол $\Delta\ ABC$ из вершины A, если $A(3;1;2)$, $B(1;1;1)$ и $C(5;8;3)$. Найти длину высоты AM и медианы AN.
6. Определить работу силы $\bar{F}=\{3;-2;4\}$ по перемещению по прямой тела из точки $A(1;2;-1)$ в точку $B(-2;5;4)$, а затем в точку $C(3;8;2)$.

Вариант 7.

1. Найти разложение вектора $\bar{d}=\{14;6;3\}$ по базису векторов $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{b}=\{2;1;1\}$ и $\bar{c}=3\bar{i}+\bar{j}$.
2. Даны точки: $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8), C(2;2;-7)$ и $D(5;-4;2)$. Проверить, какие векторы, построенные с помощью этих точек, колинеарны.
3. Найти проекцию $\left(\bar{a}-\bar{b}\right)$ на $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, если $\bar{a}=\{-1;2;1\}$ и $\bar{b}=-4\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.
4. Найти работу сил $\bar{F}_1=\{-1;1;4\}$ и $\bar{F}_2=3\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$ по перемещению тела из точки $A(1;1;1)$ в точку $B(3;-2;2)$.
5. Даны: $A(3;5;4)$, $B(8,7,4)$, $C(5;10;4)$. Найти $\left|\left[\overline{AB},\overline{BC}\right]\right|$.

6. Вычислить длину высоты тетраэдра, опущенной на грань *ABC,* если $A(4;4;10)$, $B(4;10;2)$, $C(2;8;4)$, $D(9;6;4)$.

Вариант 8..

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;1;4)$, $B(2;3;-1)$ и $C(-2;2;0)$. Найти координаты вершины D.

2. Даны $\overline{a}=\{2;0;-1\}$, $\overline{b}=3\overline{i}-4\overline{j}$ и $\overline{c}=\{1;1;2\}$. Найти орт вектора $\left(\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}\right)$ и его направляющие косинусы.

3. Найти вектор $\overline{x}$, если он перпендикулярен вектору $\overline{a}=\{2;-3;1\}$ и вектору $\overline{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\left(\overline{x},\overline{i}+2\overline{j}-7\overline{k}\right)=-10$.

4. Разложить вектор $\overline{d}=2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ по базису векторов $\overline{a}=\{2;3;1\}$, $\overline{b}=\{-1;2;-2\}$ и $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$.

5. Определить объем пирамиды $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4)$ и площадь грани *ABC*, а также высоту *AM.*

6. Даны $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ и вектор биссектрисы из вершины *A*. Определить площадь $\Delta_{АБС}$.

Вариант 9.

1. Найти разложение вектора $\overline{d}=8\overline{i}+11\overline{j}+\overline{k}$ по базису векторов $\overline{a}=\{3;2;4\}$, $\overline{b}=\{2;4;-3\}$ и $\overline{c}=\{-4;-5;2\}$.

2. Даны вершины $\Delta\ ABC$ $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$. Найти смежный угол при вершине *B*. Найти высоту *AM* и площадь треугольника.

3. Что за фигура $A(2;1;-4), B(1;3;5), C(7;2;3)$ и $D(8;0;-6)$?

4. Доказать, что точки $A(1;0;7), B(-1;-1;2), C(2;-2;2), D(0;1;9)$ лежат в одной плоскости.

5. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\{1;-2;1\}$ и $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{k}$.

6. Может ли некоторая ось l составлять с координатными осями углы $\alpha=90^\circ$, $\beta=150^\circ$ и $\gamma=60^\circ$?

Вариант 10.

1. Дано $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Определить $\left|\left[\overline{a}+3\overline{b},3\overline{a}-\overline{b}\right]\right|$.

2. Разложить вектор $\overline{d}=\{14;6;3\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;1;1\}$, $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{c}=\{3;1;0\}$.

3. При каких значениях m векторы $\overline{a}=2\overline{i}-3m\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{b}=3\overline{i}+3j+5m\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

4. Найти объем пирамиды $A(2;3;4), B(7;6;9), C(4;9;3), D(3;6;7)$ и определить высоту *AM.*

5. Доказать, что вектор $\overline{p}=\overline{b}-\dfrac{\overline{a}(\overline{a},\overline{b})}{\overline{a}^2}$ перпендикулярен к вектору $\overline{a}$.

6. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям $(\overline{x},\overline{a})=36$, $(\overline{x},\overline{b})=7$ и $(\overline{x},\overline{b})=-17$, где $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-3\overline{k}$ и $\overline{c}=6\overline{i}-5\overline{k}$.

Вариант 11.

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{0;4;16\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;3;5\}$, $\overline{b}=\{0;2;0\}$ и $\overline{c}=\{5;7;9\}$.

2. Найти орт и направляющие косинусы $\overline{AB}$, где $A(1;0;-1)$, $B(3;1;-3)$.

3. На оси ординат найти точку *M*, равноудаленную от точек $A(3;-8;2)$, $B(-2;5;6)$.

4. Упростить $\left(2\overline{i}\left[\overline{j},\overline{k}\right]+3\left(\overline{j},\left[\overline{i},\overline{k}\right]\right)+4\left(\overline{k},\left[\overline{i},\overline{j}\right]\right)\right)$.

5. Даны $A(3;4;3)$, $B(7;6;3)$, $C(4;9;3)$, $D(3;6;7)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$, площадь грани ACD, длину медианы *AM*, где *M* точка на ребре *AB*. Найти угол между ребром *AC* и гранью CBD.

6. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=45^\circ$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=60^\circ$.

Вариант 12

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{2;10;4\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;3;4\}$, $\overline{b}=2\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{c}=\{1;1;-2\}$.

2. Вычислить $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)^2$, если $|\overline{a}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=+4$ и $(\overline{a},\overline{b})=135^\circ$.

3. Вычислить момент силы $\overline{F}=\{2;8;1\}$, приложенной к точке $A(3;-2;5)$ относительно точки $B(-2;1;3)$.

4. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

5. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=90^\circ$, $\beta=150^\circ,\gamma=60^\circ$.

6. Даны вершины треугольника ABC $A(3;2;-3)$, $B(1;-3;4)$, $C(-1;5;1)$. Определить угол при вершине *A,* длину медианы *AM* и высоту AN.

Вариант 13.

1. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точек $A(4;-1;2)$ и $B(0;2;-1)$.

2. Даны точки $A(1;2;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(5;4;4)$. Найти точку D, если точки принадлежат параллелограмму.

3. Установить компланарны ли векторы $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\{1;1;-1\}$ и $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$.

4. Даны $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=-3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{c}=\{1;2;3\}$. Найти вектор $\left[\left[\overline{a},\overline{b}\right],\left[\overline{a},\overline{c}\right]\right]$.

5. Найти разложение вектора $\overline{d}=-4\overline{i}+5\overline{j}-16\overline{k}$ по базису векторов $\overline{a}=3\overline{i}-5\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=4\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{c}=-3\overline{i}-4\overline{k}$.

6. Найти проекцию вектора $\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)$ на вектор $\overline{c}$, если $\left|\overline{a}\right|=2, \left|\overline{b}\right|=1$, $(\widehat{\overline{b},\overline{c}})$=30°, $(\widehat{\overline{a},\overline{c}})$=45°.

Вариант 14.

1. Найти проекцию $\overline{a}-2\overline{b}$ на $\overline{a}+\overline{b}$, если $\overline{a}=\{-1;2;1\}$ и $\overline{b}=-4\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

2. Найти работу сил $\overline{F_1}=\{-2;3;1\}$ и $\overline{F_2}=3\overline{i}-4\overline{j}+\overline{k}$ по перемещению тела из точки $A(1;0;2)$ в точку $B(2;-3;4)$.

3. Найти разложение вектора $\overline{d}=-4\overline{i}+3\overline{j}-16\overline{k}$ по базису векторов $\overline{a}=3\overline{i}-5\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{b}=4\overline{i}+5\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{c}=-\overline{i}+2\overline{k}$.

4. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\{1;3;2\}$ и $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}$.

5. Даны вершины треугольника ABC $A(1;2;0), B(-1;-3;5), C(5;0;2)$. Найти высоту AN и величину медианы *AM*.

6. Даны вершины пирамиды $A(3;3;9), B(6;9;7), C(1;7;3), D(8;5;8)$. Найти объем пирамиды и высоту AN.

Вариант 15.

1. Показать, что точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-1), D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

2. Разложить вектор $\overline{d}=\{3;7;-7\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{2;1;0\}$, $\overline{b}=\{1;-1;2\}$ и $\overline{c}=\{1;-15;20\}$.

3. Найти работу силы $\overline{F}=\{1;2;1\}$ при перемещении тела из точки $A(-1;2;0)$ в точку $B(2;1;3)$, а также момент этой силы относительно точки *B*.

4. Даны вершины пирамиды $A(3;3;9), B(6;9;1), C(1;7;3), D(8;5;8)$. Найти площадь грани *ABC*, угол между гранью *ABC* и ребром CD, высоту DN.

5. Вектор $\overline{a}$ составляет с координатными осями углы $\alpha=120°$ и $\beta=30°$. Найти координаты, если $\left|\overline{a}\right|=4$.

6. Построить параллелограмм на вершинах $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}$ и $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$. Определить его площадь и диагонали.

Вариант 16.

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{1;20;1\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{-2;3;5\}$, $\overline{b}=\overline{i}-3\overline{j}+4\overline{k}$ и $\overline{c}=\{7;8;-1\}$.

2. Найти вектор $\overline{c}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a}=\{2;3;-1\}$ и $\overline{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\left(\overline{c},2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}\right)=-6$.

3. При каких α и β вектора $\overline{a}=\{3\alpha;2;5\}$ и $\overline{b}=\{9;6;\beta\}$ колинеарны?

4. Упростить $\left[\overline{i},\overline{j}-\overline{k}\right]+\left[\overline{j},\overline{i}+\overline{k}+\overline{j}\right]+\left[\overline{k},\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}\right]$.

5. В тетраэдре $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2), D(3;4;-3)$ вычислить высоту DM и угол между ребрами AD и гранью DBC.

6. Найти момент силы $\overline{F}=\{1;2;-1\}$, приложенной к точке $A(4;-1;3)$ относительно $O(0;0;0)$.

Вариант 17.

1. Доказать, что четырехугольник $A(2;1;-4), B(1;3;5), C(7;2;3), D(8;0;-6)$ есть параллелограмм. Найти длины диагоналей и углы между ними.

2. Разложить вектор $\overline{d}=\{14;6;3\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;1;1\}$, $\overline{b}=\{2;1;1\}$ и $\overline{c}=\{3;1;0\}$.

3. Найти работу силы $\overline{F}=\{2;0;8\}$ по перемещению тела из точки $A(2;0;0)$ в точку $B(1;0;2)$, а затем в точку $C(3;5;9)$.

4. Найти площадь треугольника *ABC* с вершинами $A(7;3;4), B(1;0;2), C(4;5;-2)$. Найти высоту *AM.*

5. Проверить компланарность векторов $\overline{a}=3\overline{i}+3\overline{j}$, $\overline{b}=\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{c}=5\overline{i}+3\overline{j}+4\overline{k}$.

6. Найти проекцию $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ на $(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})$, если $\overline{a}=\{2;1;-4\}$, $\overline{b}=\{-3;4;1\}$ и $\overline{c}=\{2;1;3\}$.

Вариант 18.

1. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=\{2;1;0\}$ и $\overline{b}=\{0;-1;1\}$. Найти наименьшие расстояния между его сторонами.

2. Дан треугольник *ABC* с вершинами $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти высоту AN, медиану *AM* и угол при вершине *C*.

3. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. Найти $[2\overline{a}-\overline{b},\overline{a}+2\overline{b}]$.

4. Найти разложение вектора $\overline{d}=\{-3;0;3\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;1;-1\}$, $\overline{b}=\{-2;3;4\}$ и $\overline{c}=\{-3;-5;1\}$.

5. Найти момент силы $\overline{F}=\{-1;3;-4\}$, приложенной к точке $A(2;1;1)$ относительно $B(-4;3;-2)$.

6. При каких значениях α и β векторы $\overline{a}=\{1;\alpha;\beta\}$ и $\overline{b}=\{3;6;-6\}$ колинеарны?

Вариант 19.

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{3;2;7\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{5;0;0\}$, $\overline{b}=\{1;0;5\}$ и $\overline{c}=\{-4;2;-12\}$.

2. Найти единичный вектор перпендикулярный векторам $\overline{a}=-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$.

3. Компланарны ли векторы $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{c}=\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$?

4. Найти работу сил $\overline{F_1} = \{1;3;5\}$ и $\overline{F_2} = \{2;-1;3\}$ по перемещению тела из точки $A(1;2;-1)$ в точку $B(5;6;7)$.
5. Найти направление вектора, заданного проекциями $x = 7$, $y = 4$, $z = -4$.
6. Даны вершины треугольника ABC $A(-3;1;2), B(5;2;5), C(0;-3;-2)$. Найти его площадь, высоту AN и медиану AM.

Вариант 20.

1. Проверить, что точки $A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3)$ являются вершинами трапеции. Найти угол при вершине *C*.
2. Найти вектор $\overline{x}$, если он перпендикулярен $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ и $\overline{b} = \{2;-3;1\}$ и удовлетворяет условию $(\overline{x}, \overline{c}) = 10$, если $\overline{c} = \overline{i} + 2\overline{j} - 7\overline{k}$.
3. Даны точки $A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1)$. Найти $\left|\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]\right|$ и угол между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.
4. Показать, что точки $A(5;7;-2), B(3;1;-2), C(9;4;-4), D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.
5. Дано $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$ и $(\overline{a}, \overline{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $\left|\left[\overline{a} + 3\overline{b}, 3\overline{a} - \overline{b}\right]\right|$.
6. Сила $\overline{F} = \overline{i} - \overline{k}$ приложена к точке $M(1;2;2)$. Найти момент силы относительно точки $A(0;3;5)$.

Вариант 21.

1. Разложить вектор $\overline{d} = \{5;0;3\}$ по базису векторов $\overline{a} = \{3;1;4\}$, $\overline{b} = \{2;1;-1\}$ и $\overline{c} = \{1;-1;5\}$.
2. На оси *OX* найти точку, равноудаленную от точек $A(-3;2;4)$ и $B(2;1;-3)$.
3. Найти работу сил $\overline{F_1} = \{1;-2;5\}$, $\overline{F_2} = 3\overline{i} - \overline{j} - 2\overline{k}$ и $\overline{F_3} = \{0;2;1\}$ по перемещению тела из точки $A(1;-1;2)$ в точку $B(3;5;7)$.
4. Упростить $\left[\overline{a} + \overline{b}, 2\overline{c} - \overline{a}\right] + \left[\overline{c} + \overline{b}, \overline{b} - \overline{a}\right]$.
5. Найти объем пирамиды, площадь грани BCD, высоту AN, если $A(9;5;5), B(-3;7;1), C(5;7;8), D(6;9;12)$.
6. Найти координаты вектора $\overline{b}$, колинеарного вектору $\overline{a} = \{2;-3;5\}$ и удовлетворяющему условию $(\overline{a}, \overline{b}) = 5$.

Вариант 22.

1. Определить, при каких α и β векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$ и $\overline{b} = 8\overline{i} - 4\overline{j} + \beta\overline{k}$ колинеарны.
2. Дано $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$ $(\overline{a}, \overline{c}) = \dfrac{\pi}{4}$ и $(\overline{b}, \overline{c}) = 150^\circ$. Найти проекцию вектора $(\overline{a} - \overline{b})$ на вектор $\overline{c}$.

3. Определить смешанное произведение векторов $\overline{a}+2\overline{b}, \overline{a}+\overline{c}$ и $\overline{b}-\overline{c}$, если $\overline{a}=\{1;2;3\}$, $\overline{b}=\{2;-1;1\}$ и $\overline{c}=\{-3;4;-1\}$.

4. В тетраэдре с вершинами $A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2), D(3;4;-3)$ вычислить высоту DM.

5. Найти вектор, перпендикулярный векторам $\overline{a}=-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$.

6. Найти координаты разложения вектора $\overline{d}=\{0;12;-6\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{4;3;-1\}$, $\overline{b}=\{5;0;4\}$ и $\overline{c}=\{2;1;2\}$.

Вариант 23.

1. В треугольнике с вершинами $A(-1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$ найти высоту BD.

2. При каких значениях m векторы $\overline{a}=m\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}$ и $\overline{b}=3\overline{i}-m\overline{j}+2\overline{k}$ взаимно перпендикулярны?

3. Компланарны ли векторы $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$, $\overline{b}=\{1;3;-1\}$ и $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$?

4. Даны $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{k}$ и $\overline{b}=-\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$. Найти векторное произведение $\overline{a}-2\overline{b}$ на $3\overline{a}+\overline{b}$.

5. Вычислить объем тетраэдра, если $\overline{OA}=3\overline{i}+4\overline{j}$, $\overline{OB}=-3\overline{i}+\overline{k}$ и $\overline{OC}=2\overline{i}+5\overline{k}$.

6. Проверить, что точки $A(2;4;1), B(3;7;5), C(4;10;9)$ лежат на одной прямой.

Вариант 24.

1. Разложить вектор $\overline{d}=\{12;-10;6\}$ по базису векторов $\overline{a}=\{1;3;2\}$, $\overline{b}=\{3;2;5\}$ и $\overline{c}=\{-6;5;-3\}$.

2. В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC}=\overline{a}$ и $\overline{BD}=\overline{b}$. Разложить по этим двум векторам векторы сторон ромба.

3. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$. Найти орт вектора $\overline{c}=2\overline{a}+\overline{b}$, модуль вектора $-\overline{a}+3\overline{b}$ и проекцию вектора $\overline{a}-2\overline{b}$ на ось OY.

4. Даны вершины пирамиды $A(-1;-3;-4), B(3;2;1), C(1;5;4)$ и $D(-5;0;2)$. Найти высоту пирамиды .

5. Векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ составляют с осью l $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{\pi}{4}$ соответственно. Найти проекцию на ось l вектора $(2\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})$ если $|\overline{a}|=|\overline{b}|=|\overline{c}|=2$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;3;-5), B(5;-1;2)$ и $C(-1;0;-1)$.

Вариант 25.

1. Может ли вектор составлять с координатными осями углы $\alpha=90^\circ$, $\beta=150^\circ$ и $\gamma=30^\circ$.

2. Даны векторы $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$, $\overline{b}=5\overline{i}+3\overline{k}$ и $\overline{c}=5\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k}$. Найти вектор $\left[\left[\overline{a},\overline{b}\right],\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]$.

3. Силы $\overline{F_1} = 3\bar{i} + \bar{k}$ и $\overline{F_2} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ приложены к точке $M(2;0;-1)$. Найти момент сил относительно точки $A(1;3;-2)$.
4. Найти высоту AN в треугольнике с вершинами $A(7;7;3), B(6;5;8)$ и $C(3;5;8)$. Найти величину медианы AM.
5. Проверить, лежат ли точки $A(6;6;-5), B(4;9;5), C(4;6;11)$ и $D(-1;3;10)$ в одной плоскости.
6. Вычислить длину высоты тетраэдра, опущенную на грань ABC из точки D, если $A(4;4;10), B(4;10;2), C(2;8;4)$ и $D(9;6;4)$.

В. Решить задачи.

Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить:
а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$; г) высоту, опущенную на данную грань.

1. $A(3;4;5), B(1;2;1), C(-2;-3;6), D(3;-6;-3)$; а) ACD; б) $l = AB$, C и D.

2. $A(-7;-5;6), B(-2;5;-3), C(3;-2;4), D(1;2;2)$; а) BCD; б) $l = CD$, A и B.

3. $A(1;3;1), B(-1;4;6), C(-2;-3;4), D(3;4;-4)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.

4. $A(2;4;1), B(-3;-2;4), C(3;5;-2), D(4;2;-3)$; а) ABD; б) $l = AC$, B и D.

5. $A(-5;-3;-4), B(1;4;6), C(3;2;-2), D(8;-2;4)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.

6. $A(3;4;2), B(-2;3;-5), C(4;-3;6), D(6;-5;3)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.

7. $A(-4;6;3), B(3;-5;1), C(2;6;-4), D(2;4;-5)$; а) ACD; б) $l = AD$, B и C.

8. $A(7;5;8), B(-4;-5;3), C(2;-3;5), D(5;1;-4)$; а) BCD; б) $l = BC$, A и D.

9. $A(3;-2;6), B(-6;-2;3), C(1;1;-4), D(4;6;-7)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.

10 $A(-5;-4;-3), B(7;3;-1), C(6;-2;0), D(3;2;-7)$; а) BCD; б) $l = AD$, B и C.

11. $A(3;-5;-2), B(-4;2;3), C(1;5;7), D(-2;-4;5)$; а) ACD; б) $l = BD$, A и C.

12. $A(7;4;9), B(1;-2;-3), C(-5;-3;0), D(1;-3;4)$; а) ABD; б) $l = AB$, C и D.

13. $A(-4;-7;-3), B(-4;-5;7), C(2;-3;3), D(3;2;1)$; а) BCD; б) $l = BC$, A, D.

14. $A(-4;-5;-3), B(3;2;1), C(5;7;-6), D(6;-1;5)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.

15. $A(5;2;4), B(-3;5;-7), C(1;-5;8), D(9;-3;5)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.

16. $A(-6;4;5), B(5;-7;3), C(4;2;-8), D(2;8;-3)$; а) ACD; б) $l = AD$, B и C.

17. $A(5;3;6), B(-3;-4;4), C(5;-6;8), D(4;0;-3)$; а) BCD; б) $l = BC$, A и D.

18. $A(5;-4;4), B(-4;-6;5), C(3;2;-7), D(6;2;-9)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.

19. $A(-7;-6;-5), B(5;1;-3), C(8;-4;0), D(3;4;-7)$; а) BCD; б) $l = AD$, B , C.

20. $A(7;-1;-2), B(1;7;8), C(3;7;9), D(-3;-5;2)$; а) ACD; б) $l = BD$, A и C.

21. $A(5;2;7), B(7;-6;-9), C(-7;-6;3), D(1;-5;2)$; а) ABD; б) $l = AB$, C и D.

22. $A(-2;-5;-1), B(-6;-7;9), C(4;-5;1), D(2;1;4)$; а) BCD; б) $l = BC$, A, D.

23. $A(-6;-3;-5), B(5;1;7), C(3;5;-1), D(4;-2;9)$; а) ACD; б) $l = BC$, A и D.

24. $A(7;4;2), B(-5;3;-9), C(1;-5;3), D(7;-9;1)$; а) ABD; б) $l = BD$, A и C.

25. $A(-8;2;7), B(3;-5;9), C(2;4;-6), D(4;6;-5)$; а) ACD; б) $l = AD$, B и C.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

А. Даны вершины треугольника $ABC:(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$.
Найти: а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

1. $A(-2,4),\ B(3,1),\ C(10,7)$.
2. $A(-3,-2),\ B(14,4),\ C(6,8)$.
3. $A(1,7),\ B(-3,-1),\ C(11,-3)$.
4. $A(1,0),\ B(-1,4),\ C(9,5)$.
5. $A(1,-2),\ B(7,1),\ C(3,7)$.
6. $A(-2,-3),\ B(1,6),\ C(6,1)$.
7. $A(-4,2),\ B(-6,6),\ C(6,2)$
8. $A(4,-3),\ B(7,3),\ C(1,10)$
9. $A(4,-4),\ B(8,2),\ C(3,8)$.
10. $A(-3,-3),\ B(5,-7),\ C(7,7)$.
11. $A(1,-6),\ B(3,4),\ C(-3,3)$.
12. $A(-4,2),\ B(8,-6),\ C(2,6)$.
13. $A(-5,2),\ B(0,-4),\ C(5,7)$.
14. $A(4,-4),\ B(6,2),\ C(-1,8)$.
15. $A(-3,8),\ B(-6,2),\ C(0,-5)$.
16. $A(6,-9),\ B(10,-1),\ C(-4,1)$.
17. $A(4,1),\ B(-3,-1),\ C(7,-3)$.
18. $A(-4,2),\ B(6,-4),\ C(4,10)$.
19. $A(3,-1),\ B(11,3),\ C(-6,2)$.
20. $A(-7,-2),\ B(-7,4),\ C(5,-5)$.
21. $A(-1,-4),\ B(9,6),\ C(-5,4)$.
22. $A(10,-2),\ B(4,-5),\ C(-3,1)$.
23. $A(-3,-1),\ B(-4,-5),\ C(8,1)$.
24. $A(-2,-6),\ B(-3,5),\ C(4,0)$.
25. $A(-7,-2),\ B(3,-8),\ C(-4,6)$.

Б. Прямые и плоскости.

Вариант 1.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(3;4;-5)$, $M_2(1;5;-4)$, $M_3(-5;-2;0)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x-3y+5=0$; $2x-y+5z-16=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}2x+y+z-2=0,\\2x-y-3z+6=0.\end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+3}{-2};\quad x+2y-5z+16=0.$$

Вариант 2.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;-1;2)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x-3y+z-1=0$; $x+z-1=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}x-3y+2z+2=0,\\x+3y+2z+14=0.\end{cases}$

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}; \qquad 3x-y+4z=0.$$

Вариант 3.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-3;-2;1)$, $M_2(-0;1;-5)$, $M_3(3;-5;4)$.
2. Найти угол между плоскостями: $4x-5y+3z-1=0$; $x-4y-z+9=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой: $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}; \qquad 3x-2y+5z-3=0.$$

Вариант 4.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-1;1;-1)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(2;1;-1)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3x-y+2z+15=0$; $5x+9y-3z+2=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}; \quad x+4y+13z-23=0..$$

Вариант 5.

1.Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;1;-2)$, $M_3(0;-1;1)$.

1. Найти угол между плоскостями: $3x-y+2z-15=0$; $5x+9y-3z-5=0$.
2. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$
3. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}; \quad x+2y+3z-14=0..$$

Вариант 6.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;0;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(2;-2;3)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x-y\sqrt{2}+z-1=0$; $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}; \quad x+2y-5z+20=0..$$

Вариант 7.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3y-z=0$; $2y+z=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} x+2y+5z+11=0, \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}; \qquad x-3y+4z-24=0.$$

Вариант 8.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$.
2. Найти угол между плоскостями: $6x+3y-2z=0$; $x+2y+6z-12=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}; \qquad 2x-y+4z=0.$$

Вариант 9.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;4)$, $M_3(3;0;-1)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x+2y+2z-7=0$; $16x+12y-15z-1=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}; \qquad 3x+y-5z-12=0..$$

Вариант 10.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(0;-3;1)$, $M_2(-4;1;2)$, $M_3(2;-1;5)$.
2. Найти угол между плоскостями: $2x-y+5z+16=0$; $x+2y+3z+2=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}; \qquad x+3y-5z+9=0..$$

Вариант 11.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;4;0)$, $M_2(4;-1;2)$, $M_3(2;-1;5)$.

2. Найти угол между плоскостями: $2x+2y+z-1=0, \quad x+z+2=0.$

3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0, \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}; \quad x-2y+5z+17=0..$$

Вариант 12.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-2;-1;-1)$, $M_2(0;3;-2), M_3(3;1;-4)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3x+y+z-4=0; \quad y+z+5=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 3x+3y-2z-2=0, \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}; \quad x-2y+4z-19=0..$$

Вариант 13.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4)$, $M_3(0;-3;-1)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3x-2y-2z-16=0; \quad x+y-3z-7=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 6x-7y-3z-2=0, \\ x+5y-z-9=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}; \quad 2x-y+3z+23=0.$$

Вариант 14.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0)$, $M_3(-1;0;-3)$.
2. Найти угол между плоскостями: $2x+2y-z-9=0; \quad x-y+3z-1=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0, \\ x+y+z+7=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}, \quad 2x-3y-5z-74=0..$$

Вариант 15.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$, $M_3(1;-1;0)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x+2y+2z-3=0; \quad 2x-y+2z+4=0.$

3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 6x-5y-4z+3=0, \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}; \qquad 4x+2y-z-11=0.$$

Вариант 16.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1)$, $M_3(-1;0;-1)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3x+2y-3z-1=0$; $x+y+z-7=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} x+5y-z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}; \qquad 3x-2y-4z-8=0.$$

Вариант 17.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0)$, $M_3(-10;5;8)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x-3y-2z-8=0$; $x+y-z+5=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0, \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}; \qquad x+2y-z-2=0.$$

Вариант 18.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(7;2;4)$, $M_2(7;-1;-2)$, $M_3(-3;-2;0)$.
2. Найти угол между плоскостями: $3x-2y+3z+23=0$; $y+z+5=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 5x+y+2z+4=0, \\ x-y-3z+3=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}; \qquad 5x-y+4z+3=0.$$

Вариант 19.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(2;1;4)$, $M_2(3;5;-2)$, $M_3(-7;-3;2)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x+y+3z-7=0$; $y+z-1=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z+7=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}; \qquad x+3y+5z-42=0.$$

Вариант 20.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-1;-5;2)$, $M_2(-6;0;-3)$, $M_3(3;6;-3)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x-2y+2z+3=0;\quad x-2y-1=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}2x+y-3z-2=0,\\ 2x-y+z+6=0.\end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}; \qquad 7x+y+4z-47=0.$$

Вариант 21.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(0;-1;-1)$, $M_2(-2;3;5)$, $M_3(1;-5;-9)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x+2y-1=0;\quad x+y+6=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}x+y-2z-2=0,\\ x-y+z+3=0.\end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}; \qquad 2x+3y+7z-52=0.$$

Вариант 22.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0)$, $M_3(1;2;4)$.
2. Найти угол между плоскостями: $2x-z+5=0;\quad 2x+3y-7=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}x+y-z-12=0,\\ x-y+2z-1=0.\end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}; \qquad 3x+4y+7z-16=0.$$

Вариант 23.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(2;-1;-2)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(5;0;-6)$.
2. Найти угол между плоскостями: $5x+3y+z-18=0;\quad 2y+z-9=0.$
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases}x-y+z-2=0,\\ x-2y-z+4=0.\end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}; \qquad 2x-5y+4z+24=0.$$

Вариант 24.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1)$, $M_3(4;-8;-4)$.
2. Найти угол между плоскостями: $4x+3z-2=0$; $x+2y+2z+5=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-4z-5=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}; \qquad x-2y-3z+18=0.$$

Вариант 25.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3: $M_1(1;1;-2)$, $M_2(-1;1;-4)$, $M_3(2;2;0)$.
2. Найти угол между плоскостями: $x+4y-z+1=0$; $2x+y+4z-3=0$.
3. Написать канонические уравнения прямой линии: $\begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$
4. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}; \qquad 3x+7y-5z-11=0.$$

В. Решить следующие задачи.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y-7=0$ и $x+3y-6=0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.
2. Найти проекцию точки $A(-8,12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2,-3)$ и $C(-5,1)$.
3. Даны две вершины треугольника ABC: $A(-4;4), B(4;-12)$ и точка $M(4;2)$ – пересечения его высот. Найти вершину *С*.
4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3)$ и точку пересечения прямых $2x-y=5$ и $x+y=1$.
6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3;6)$, $B(5;2)$, $C(-1;-3)$, $D(-5;5)$.
7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;1)$ перпендикулярно к прямой *ВС*, если $B(2;5)$ и $C(1;0)$.
8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$ параллельно прямой MN, если $M(-3;-2), N(1;6)$.
9. Найти точку, симметричную точке $M(2;-1)$ относительно прямой $x-2y+3=0$.

10. Найти уравнение высот треугольника *ABC*, проходящего через вершины *A* и *B*, если $A(-4;2), B(3;-5), C(5;0)$.

11. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2;3)$, $B(0;-3)$, $C(6,;-3)$.

12. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину *A* треугольника *ABC*, зная уравнения его сторон: $AB - 2x - y - 3 = 0$, $AC - x + 5y - 7 = 0$, $BC - 3x - 2y + 13 = 0$.

13. Дан треугольник с вершинами $A(3;1)$, $B(-3;-1)$, $C(5;-12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины *C*.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$.

15. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

16. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей.

17. Составить уравнения медианы *CM* и высоты *CK* треугольника *ABC*, если $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$.

18. Через точку $P(5;2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на y осях координат; б) параллельную оси *Ox*; в) параллельную оси *Oy*.

19. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$ и составляющей с осью *Ox* угол: а) 45^o, б) $90°$, в) $0°$.

20. Какую ординату имеет точка *C*, лежащая на одной прямой с точками $A(-6;-6)$, $B(-3;-1)$ и имеющая абсциссу, равную 3?

21. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, которая делит отрезок между точками $A(4;-3)$, $B(-1;2)$ в отношении $\lambda = 2/3$.

22. Даны две прямые $2x + 3y - 5 = 0$ и $7x + 15y + 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку их пересечения и перпендикулярной к прямой $12x - 6y - 1 = 0$.

23. Найти точку симметричную точке $M(2;-1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

24. Известны уравнение стороны $AB: 4x + y - 12 = 0$ треугольника ABC, его высоты $BH: 5x - 4y - 12 = 0$ и высоты AM: $x + y - 6 = 0$. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

25. Через точку пересечения прямых линий $2x - 3y + 10 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ провести прямую перпендикулярно прямой линии $2x - y = 0$.

Г. Решить следующие варианты задач.

Вариант 1.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$;

б) проходящей через точку $A(1;\sqrt{3})$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{4;-1\}$;

в) проходящей через точки $A(1;2)$ и $B(0;-3)$;

г) проходящей через точку $A(-1;2)$ параллельно прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$;

д) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку $A(1;-3)$.

2. Даны две вершины треугольника $A(-1;5)$, $B(3;2)$ и точка $H(5;-3)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон и медианы, проведенной из вершины *B*.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $O(0;0)$ и имеющей центр в вершине параболы $y^2=3(x-4)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 4, а фокус $F(3;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если большая полуось равна 13, а эксцентриситет равен $14/13$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса ее задана уравнением $x=-4$.

7. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Написать уравнение гиперболы, имеющей с этим эллипсом общие фокальные хорды.

Вариант 2.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{4;1\}$;

б) проходящей через точку $A(2;2\sqrt{3})$ и составляющей с осью Ox угол $30°$;

в) проходящей через начало координат и точку $B(2;-1)$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $8x-2y+5=0$ и $2x+y-4=0$ параллельно оси *Ox*;

д) отсекающей на осях координат отрезки $a=2;\ b=4$.

2. Даны две вершины $A(0;7)$ и $B(-2;3)$ треугольника, площадь которого равна 3, и прямая $x-7=0$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника.

3. Составить уравнение окружности радиуса $r=2$, касающейся осей координат.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 7/8 и эллипс проходит через точку $A(8;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 14, а эксцентриситет равен $\sqrt{85}/7$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если директриса её задана уравнением $y=1$.

7. Дана равносторонняя гипербола $x^2-y^2=4$. Написать уравнение эллипса, имеющего с этой гиперболой общие фокальные хорды.

Вариант 3.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-3)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;-2\}$;

б) проходящей через начало координат и образующей с осью Ox угол $45°$;

в) проходящей через точки $A(2;-7)$ и $B(1;2)$;

г) проходящей через точку $A(5;10)$ перпендикулярно к прямой $x-y+1=0$;

д) проходящей через точку пересечения прямой $2x-y+1=0$ и осью Oy и отсекающей на оси Ox отрезок $a=\dfrac{1}{3}$.

2. Составить уравнения сторон треугольника *ABC,* зная одну из его вершин $A(3;0)$ и уравнения двух медиан $7x-5y+15=0$ и $4x+y+6=0$.

3. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(3;0)$, касающейся оси Oy.

4. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(1;2)$, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\dfrac{1}{2}x$.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 2, а фокус имеет координаты $F(4\sqrt{2};0)$.

6. Составить уравнение параболы, если директриса ее задана уравнением $x=-2$.

7. Дана парабола $y=\dfrac{3}{4}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду, т.е. хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси.

Вариант 4.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол $135°$;

б) проходящей через точку $P(1;2)$ и отсекающей на оси координат равные отрезки;

в) проходящей через точку $A(2;-3)$ параллельно прямой $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$;

г) проходящей через точку $A(2;-7)$ и точку пересечения прямой $2x-y+3=0$ с осью Oy;

д) проходящей через точку $A(-2;-1)$ перпендикулярно оси Oy.

2. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0;2)$ и уравнения высот BM и CM: $x+y=4$ и $y=2x$, где M – точка пересечения высот.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2-12x+4y-9=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 7, а фокус имеет координаты $(5;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 12, а известны уравнения асимптот $y=\pm\frac{5}{6}x$.

6. Составить уравнение параболы, если директриса ее задана уравнением $y=-3$.

7. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2-y^2=2$ с прямой $x+y-2=0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.

Вариант 5.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(3;5)$ параллельной оси Ox;

б) проходящей через точки $A(2;6)$ и $B(1;-6)$;

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n}=\{1;1\}$;

г) параллельной прямой $2x+3y-1=0$ и отсекающей на положительной полуоси абсцисс отрезок, равный 4;

д) проходящей через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$ и $x+2y-3=0$ параллельно вектору $\vec{S}=\{2;-3\}$.

2. Даны координаты двух противоположных вершин ромба $M(-3;2)$ и $N(7;-6)$. Составить уравнения диагоналей ромба и найти внутренний угол при вершине M.

3. Записать уравнение окружности, проходящей через левую вершину гиперболы $5x^2-9y^2=45$, имеющей центр в точке $A(0;-6)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 4, а фокус имеет координаты $(9;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $A(6;-1)$, $B(-8;2\sqrt{2})$.

6. Составить уравнение параболы, если ось симметрии Ox и парабола проходит через точку M(-5;15)

7. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса проходящего через точку М(4;5) и имеющего фокусы совпадающие с фокусами данной гиперболы.

Вариант 6.

1. Составить уравнение прямой:

а) отсекающей на положительной полуоси Oy отрезок, равный 3, и образующей с осью Ox угол $150°$;

б) проходящей через точки $A(1;-3)$ и $B(4;6)$;

в) проходящей через точку $A(1;2)$ и отсекающую на осях координат равные отрезки;

г) проходящей через точку начало координат и точку пересечения прямых $x - 6y + 1 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$;

д) проходящей через точку $A(-1;0)$ параллельно вектору $\vec{S} = \{2;2\}$.

2. Составить уравнения сторон, высоты AH и медианы BM треугольника с вершинами: $A(2;6)$, $B(-6;0)$, $C(-3;-4)$. Найти внутренний угол при вершине C.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 50, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 44, а фокус имеет координаты $(-7;0)$.

6. Найти фокус и директрису параболы $y = 4x^2$.

7. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось Ox, если известно, что расстояние от ее фокуса до центра окружности $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0$ равно 5.

Вариант 7.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(-1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -1$;

б) проходящей через точку $A(7;2)$ параллельно вектору $\vec{S} = \{1;0\}$;

в) проходящей через точку $M_0(1;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-3} = 1$;

г) проходящей через точку $A(-1;-9)$ и отсекающей на отрицательной полуоси Ox отрезок втрое меньший, чем на отрицательной полуоси Oy;

д) проходящей через точку пересечения прямых $2x + 2y - 1 = 0$ параллельно оси Oy.

2. Вершины четырехугольника имеют координаты $P(1;0)$, $Q\left(2;\frac{5}{3}\right)$, $R(5;2)$, $N(6;-1)$. Найти точку пересечения его диагоналей, внутренний угол при вершине *P*.

3. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $9x^2+25y^2=1$ и имеющий центр в точке $A(0;6)$.

4. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная её фокус $F(2;0)$ и асимптоту $x=1$.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет равен 7/8 и эллипс проходит через точку .

6. Составить каноническое уравнение параболы, если осью симметрии является ось *Ox*, и парабола проходит через точку $A(-5;10)$.

7. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента её асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3;-1)$. Ее действительная ось лежит на оси *Ox*, а центр в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2+y^2=10$.

Вариант 8.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1;1)$ и $B(2;5)$;

б.) проходящей через точку $A(2;-3)$ и образующей с осью *Ox* угол $120°$;

в) проходящей через точку $A(-1;4)$ перпендикулярно оси *Oy*;

г) отсекающей на оси *Oy* отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y-x=3$;

д) проходящей через точки пересечения прямых $2x-y-1=0$ с осью *Ox* и $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$, с осью *Oy*.

2. Известны уравнения стороны *AB* треугольника *ABC* $4x+y=12$, его высот *BH* $5x-14y=12$ и *AM* $x+y=6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+4x-6y-12=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 30, а эксцентриситет его равен 15/17.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 4, а фокус имеет координаты $(-11;0)$.

6. Записать уравнение параболы, проходящей через точку $A(-45;15)$, если ось симметрии *Oy*.

7. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2-y^2=8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2=12x$ с гиперболой $8x^2-y^2=8$.

Вариант 9.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2;-2)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;-6\}$;

б) проходящей через точку $A(1;-6)$ и составляющей с осью абсцисс угол $120°$;

в) проходящей через точку $A(-1;-2)$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок вдвое меньший, чем на оси ординат;

г) проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x-y-3=0$ и $2x+y-6=0$;

д) проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно прямой PQ, если $P(1;7)$, $Q(-2;-5)$.

2. Составить уравнение сторон треугольника, если $A(-3;3), B(5;-1)$ — его вершины, а $M(4;3)$ — точка пересечения его высот.

3. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2-4x+y^2+2y-4=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через две точки $A(2;0)$ и $B(0;\sqrt{2})$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если уравнения асимптот $y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}x$, а эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

6. Записать уравнение параболы, если ее директриса задана уравнением $y=4$.

7. Директриса параболы пересекает эллипс $9x^2+20y^2=324$ в точках $(-4;3)$ и $(4;3)$, а расстояние от этих точек до фокуса параболы равно $2\sqrt{5}$. Составить уравнение параболы.

Вариант 10.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k=\dfrac{1}{2}$;

б) проходящей через точку $A(1;0)$ и отсекающей на оси *Oy* отрезок $b=3$;

в) проходящей через точки $A(1;3)$ и $B(-1;-1)$;

г) проходящей через точку $A(-2;4)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{1;7\}$;

д) проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $3x-2y+1=0$.

2. Показать, что четырехугольник $ABCD$, где $A(-2;-2), B(-3;1)$, $C\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, $D(3;1)$ является трапецией. Составить уравнение средней линии и диагоналей этой трапеции. Вычислить внутренний угол при вершине *A*.

3. Составить уравнение окружности, для которой точки $M_1(0;0)$ и $M_2(3;3)$ являются концами ее диаметра.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0;0)$ и $C(1;-4)$.

7. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$, а фокусы в его вершинах.

Вариант 11.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;-6)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{-1;-1\}$;

б.) проходящей через точку $A(-2;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$;

в) проходящей через точку $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ и точку пересечения прямых $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ и $2x-y-7=0$;

г) проходящей через точку пересечения прямой $x+3y-1=0$ с осью Ox и отсекающей на оси Oy отрезок равный 3;

д) проходящей через точку $A(2;-7)$ параллельно оси Oy.

2. Составить уравнения сторон треугольника, если одна из его вершин $(1;3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

3. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ найти ее полуось, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10.

5. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что парабола имеет фокус $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$.

6. Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3;9)$ и $B(7;3)$.

7. Записать уравнение траектории движения точки, если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5;0)$, чем от прямой $5x-16=0$.

Вариант 12.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $M(-1;-3)$ и имеющей угловой коэффициент $k=1$;

б) проходящей через точку $A(-2;\sqrt{2})$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{4;4\}$;

в) проходящей через точку пересечения прямой $x-6y+2=0$ с осью *Ox* и составляющей с этой осью угол $30°$;

г) проходящей через середину отрезка *AB,* если $A(-1;6)$, $B(9;-8)$ и параллельной прямой $2x-3y+5=0$;

д) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку $M(2;-1)$.

2. В ромбе $ABCD$ с острым углом $60°$ точки $A(0;-1)$ и $C(2;1)$ являются противоположными вершинами, причем *AC* меньшая диагональ. Написать уравнения сторон ромба.

3. Дана точка $A(-4;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок *OA*.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами $2a=8$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $A(2;-4)$ и симметричной относительно оси *Oy*.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершины гиперболы $4x^2-9y^2=36$ и имеющей центр в точке $A(0;4)$

Вариант 13.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(0;2)$ и образующей с осью *Ox* угол, вдвое больше угла, который составляет с той же осью прямая $\sqrt{3}x-y+1=0$;

б) проходящей через точки $A(2;-6)$ и $B(1;2)$;

в) проходящей через начало координат и параллельно прямой $x+y-7=0$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x+6y-1=0$ и $x+y-3=0$ перпендикулярно оси абсцисс;

д) проходящей через точку $A(1;6)$ и отсекающей на оси *Ox* отрезок вдвое меньше, чем на оси *Oy.*

2. Известны уравнения сторон треугольника $x+3y-3=0$, $3x+y+11=0$, $x-y-3=0$. Найти длину высоты, которая проведена из вершины, лежащей на оси абсцисс.

3. Построить окружность $x^2+y^2+5x=0$, прямую $x+y=0$ и найти точки их пересечения.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что большая полуось равна 6, а эксцентриситет равен 0,5.

5. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси *Oy* и проходящей через точку $M(6;-2)$.

6. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(6;-2\sqrt{2}\right)$ и мнимая полуось $b=2$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершины гиперболы $12x^2-13y^2=156$ и имеющей центр в точке $A(0;-2)$.

Вариант 14.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $K(9;-2)$ и $M(-3;-2)$;

б) проходящей через точку $A(2;-6)$ и составляющей с осью абсцисс угол $135°$;

в) отсекающей на оси *Oy* отрезок $b=2$ и имеющей угловой коэффициент $k=1$;

г) проходящей через начало координат и перпендикулярный к прямой $x-2y+3=0$;

д.) проходящей через точку пересечения прямых $6x+2y-1=0$ и $2x+y-1=0$ параллельно оси *Oy*.

2. Даны уравнения $x+y-5=0$, $3x+y-7=0$ двух медиан треугольника и уравнение одной из сторон $2x+y-5=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через точки пересечения окружности $x^2+y^2+4x-4y=0$ с прямой $y=-x$ и через точку $A(4;4)$.

4. Для эллипса $x^2+y^2=16$. Найти фокусы и эксцентриситет.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось $a=2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1,2}$.

6. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через точку $A(-1;2)$.

7. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через правый фокус эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Вариант 15.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и составляющей с осью угол $30°$;

б) проходящей через точку $A(-2;5)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{1;-3\}$;

в) отсекающей на положительной оси *Ox*, отрезок равный 3, и проходящей через точку $B(1;2)$;

г) проходящей через точку пересечения прямой $x-2=0$ с осью Ox параллельно прямой $\frac{x}{4}-\frac{y}{1}=1$;

д) проходящей через точки $A(2;4)$ и $B(0;-7)$.

2. Даны вершины треугольника $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(3;2)$. Составить уравнения высоты AM и прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC.

3. Даны точки $A(-3;0)$, $B(3;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

4. На эллипсе найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса. Эллипс задан уравнением $9x^2+25y^2=225$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

6. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $A(-3;1)$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через вершину гиперболы $x^2-16y^2=24$ и имеющей центр в точке $A(0;-2)$.

Вариант 16.

1. Составить уравнение прямой:

а) являющейся биссектрисой I и III координатных углов;

б) проходящей через начало координат перпендикулярно прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=-3$;

в) отсекающей на осях координат равные отрезки и проходящей через точку пересечения прямых $x+3y-1=0$ и $x-y+3=0$;

г) проходящей через точку H, где H — середина отрезка MN $(M(-1;0), N(-3;-3))$, перпендикулярно MN;

д) проходящей через точки $A(1;-7)$ и $B\left(-\frac{1}{2};4\right)$.

2. Написать уравнения сторон квадрата, если длина стороны равна a, а за оси прямоугольной декартовой системы координат приняты его диагонали.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2-6x+4y-23=0$.

4. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси OX, проходит через точку $M(-4;\sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы–векторы точки M.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 8, а между вершинами $2a=6$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y = 6$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $B(2;-5)$ и имеющей центр в вершине параболы $x^2 = -2(y+1)$.

Вариант 17.

1. Составить уравнение прямой:

а) отсекающей от оси *Oy* отрезок $b = 2$ и имеющей угловой коэффициент $k = -\dfrac{4}{3}$;

б) проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x - y + 6 = 0$ и $2x - 3y + 7 = 0$;

в) проходящей через точку $B(1;9)$ и отсекающей на положительной полуоси *Ox* отрезок втрое больший, чем на положительной полуоси *Oy*;

г) проходящей через точку $M(1;-3)$ параллельно прямой $x - y + 1 = 0$;

д) проходящей через точку $C(1;-3)$ перпендикулярно оси *Oy*.

2. Даны уравнения высот треугольника *ABC* $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координата его вершины $A(2;3)$. Найти уравнения сторон *AB* и *AC* треугольника.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 = 5x - 7y + 2{,}5 = 0$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого расстояние одного из фокусов от концов большой оси равны 5 и 1.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$.

6. Построить параболу, заданную уравнением $x^2 = -4y$, а также определить фокус и написать уравнение директрисы.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $9x^2 - 5y^2 = 30$ и имеющей центр в точке $A(0;1)$.

Вариант 18.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат параллельно вектору $\vec{S} = \{2;-4\}$;

б) проходящей через точку $A(-1;-3)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок вдвое больший, чем на отрицательной полуоси *Oy*;

в) проходящей через точку $A(2;-7)$ перпендикулярно оси *Oy*;

г) проходящей через точку пересечения прямых $3x + y - 6 = 0$ и $x - y = 1$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$;

д) проходящей через точки $M_1\left(-\dfrac{1}{2};4\right)$, $M_2(1;2)$.

2. Даны две вершины треугольника $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ и координаты одной из вершин $A(2;3)$. Найти уравнения всех сторон треугольника.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой $x^2+y^2=4$.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 5, а малая полуось равна 12.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{13}x$ и действительная ось $2a=26$.

6. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$ и симметричной относительно оси Ox.

7. Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку $M(4\sqrt{2};3)$.

Вариант 19.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-3$;

б) проходящей через середину отрезка *AB*, где $A(2;4)$, $B(-6;7)$ перпендикулярно *AB*;

в) проходящей через точки $P(1;-3)$ и $Q(-1;6)$;

г) проходящей через точку $M(1;3)$ перпендикулярно оси *Oy*;

д) отсекающей на осях координат отрезки $a=-4$ и $b=2$.

2. Дана прямая $2x+y-6=0$ и на ней две точки *A* и *B* с ординатами $y_A=6$ и $y_B=-2$. Написать уравнение высоты *АД* треугольника *ОАД*, найти ее длину и угол *ДАВ*.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через точку $A(-2;3)$, диаметром которой служит отрезок *OA*.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между директрисами равно 32, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна $2b=88$, а фокус имеет координаты $F(-7;0)$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y=4$.

7. Написать уравнение окружности, проходящей через правую вершину гиперболы $3x^2-16y^2=48$ и имеющей центр в точке $M(1;3)$.

Вариант 20.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через начало координат и наклоненной к оси *Oy* под углом $45°$;

б) проходящей через точку $M_0(2;-3)$ и образующей с прямой *Oy* под углом $45°$;

в) проходящей через точку $M(-2;2)$ и отсекающей на отрицательной полуоси *Ox* отрезок равный 3;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x-y+1=0$ и $x-6y=0$;

д) проходящей через две точки $A(1;-7)$ и $B(-1;3)$.

2. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 2x+y+5=0$ и $AC: x-3y+6=0$ и точка $P(1;3)$ пересечения его медиан. Найти уравнение сторон BC.

3. Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3;8)$ и $B(5;2)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна $2b=6$, а расстояние между фокусами равно 14.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $x=-2$.

7. Через фокус параболы $y^2=-4x$ проведена прямая под углом $120°$ к оси OX. Написать уравнение прямой и найти длину образовавшейся хорды.

Вариант 21.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2;-6)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{S}=\{4;2\}$;

б) проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y=0$ и $x+6y-7=0$ параллельно оси *Oy*;

в) походящей через точку $B(-1;-1)$ и отсекающей на оси Оу отрезок равный 4;

г) проходящей через точку $M(1;6)$ и имеющей угловой коэффициент $k=-1$;

д) проходящей через две точки $P(-1;6)$ и $Q(1;2)$.

2. В треугольнике *ABC* даны уравнения стороны *AB* $x+7y-6=0$ и биссектрис AL $x+y-2=0$ и *BM* $x-3y-6=0$. Найти координаты вершин.

3. Даны точки $A(-2;2)$ и $B(4;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок *AB*.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 18, а малая ось равна 8.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ и вещественная ось $2a = 12$.

6. Написать уравнение параболы симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$.

7. Записать уравнение окружности, проходящей через левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$ и имеющей центр в точке $A(-1;-2)$.

Вариант 22.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(1;7)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{n} = \{1;2\}$;

б) проходящей через точку $M(1;-2)$ параллельно прямой $2x+3y-3=0$;

в) проходящей через точку $M(-2;2)$ и отсекающей от одного из координатных углов треугольник с площадью 5,4 кв. ед.;

г) проходящей через две точки $A(1;-6)$ и $B(-3;1)$;

д) проходящей через точки пересечения прямых $x-2=0$ и $y-6=0$ с осями координат;

2. Даны две смежные стороны параллелограмма $2x-y+2=0$ и $x-2y-2=0$ и точка $M(1;1)$ пересечения диагоналей. Найти уравнения двух других сторон.

3. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат и через точки пересечения прямой $x+y+1=0$ с окружностью $x^2+y^2=1$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 8, а расстояние между фокусами равно 6.

5. Гипербола проходит через точку $M(6;\ 3\frac{\sqrt{5}}{2})$ и имеет вещественную ось $2a=8$. Написать каноническое уравнение гиперболы.

6. Составить уравнение параболы, если директриса ее задана уравнением $x=4$.

7. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+4y=0$ и симметрична относительно оси OY. Построить окружность, прямую и параболу.

Вариант 23.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точку пересечения прямой $x-9=0$ с осью Ox и наклоненной к оси Ox под углом $120°$;

б) проходящей через точку $A(2;-2)$ и имеющей нормальный вектор $\overrightarrow{AB}$, если $B(1;3)$;

в) проходящей через точку $M\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ и отсекающей на отрицательной полуоси Ox отрезок равный 3;

г) проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-2;4)$;

д) проходящей через точку $N(2;-4)$ и перпендикулярный прямой $x+6y-1=0$.

2. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $x+2y=4$ и $x+2y=10$ и уравнение одной из его диагоналей $y=x+2$.

3. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA, если дана точка $A(-3;2)$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая ось равна 5, а фокус имеет координаты $(-10;0)$.

5. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через две точки $A(\sqrt{8};0)$ и $B\left(\dfrac{\sqrt{20}}{3};2\right)$.

6. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(-1;2)$.

7. Найти общие точки эллипса $x^2+4y^2=4$ и окружности, проходящей через фокусы эллипса и имеющей центр в его верхней вершине.

Вариант 24.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-1;6)$ и $B\left(\dfrac{1}{3};7\right)$;

б) проходящей через точку $M(2;3)$ и отсекающей на оси Ox отрезок равный 2;

в) проходящей через начало координат и образующей с прямой $2x-y+1=0$ угол $45°$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $x-6y+1=0$ и $2x-y-3=0$ параллельно оси Ox;

д) проходящей через точку $A(2;-6)$ параллельно вектору $\vec{S}=\{4;2\}$.

2. Дана прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5;7)$. Найти проекцию B точки A на заданную прямую. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A под углом 30^0 к данной прямой.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2+y^2+5x=0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет равен $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$ и проходит через точку $A(-6;0)$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{1}{2}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси OY и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(2;-4)$.

7. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат.

Вариант 25.

1. Составить уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(-3;-1)$ и $B(2;6)$;

б) проходящей через точку $M(-1;-3)$ и отсекающей на оси OY отрезок равный 5;

в) проходящей через начало координат и образующей с прямой $x - 2y + 1 = 0$ угол $60°$;

г) проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 4 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ параллельно оси OY;

д) проходящей через точку $A(3;2)$ и перпендикулярно вектору $\overline{q} = \{1;2\}$.

2. Дана прямая $2x - 3y - 1 = 0$ и точка $A(7;1)$. Найти проекцию B точки A на заданную прямую. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A под углом $60°$ к данной прямой.

3. Найти центр и радиус окружности $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $A(6;0)$ с эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известны уравнения асимптот $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $O(0;0)$ и $A(3;5)$.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$. Построить гиперболу.

Д. Решить задачи.

Вариант 1.

1. Найти расстояние от точки $A(7;\ 1;\ 1)$ до прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{2}$.

2. Определить направляющие косинусы прямой L: $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+y-3z-7=0. \end{cases}$
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB, перпендикулярно отрезку AB, если A (0; –1; 2), B(–4; 1; 2).
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $2x-3y+12z-12=0$; *b*) $3y-4=0$.
5. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $O(0;\ 0)$ и имеющей центр в вершине параболы $y^2=3\left(x-4\right)$.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна 13, а эксцентриситет равен 14/13.

Вариант 2.

1. Найти расстояние от точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM:MB=2:3$, до плоскости $4x-3y+12z-36=0$, если A (5; 0; 2), B(-10; 5; 4,5).
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку C(-7; 0; 2) параллельно вектору $\vec{s}=16\vec{i}-13\vec{j}+7\vec{k}$.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(1; -2; 1) перпендикулярно прямой L: $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x+12y-z+12=0$; *b*) $2y+6=0$.
5. Составить уравнение окружности радиуса $R=2$, касающейся осей координат.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y=1$.

Вариант 3.

1. Найти расстояние от точки C(6; 4; 0) до прямой AB, если A(5; 5; 4), B(9; 7; 0).
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A (2; 0; 3) и B(1; 1;0) перпендикулярно плоскости $2x+2y-3z-6=0$.
3. Даны вершины треугольника A(-5; 7; 1), B(2; 4; -1), C(-1; 3; 5). Найти каноническое уравнение медианы, опущенной из вершины B на сторону AC.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x-2y+z-1=0$; *b*) $y-2z=0$.
5. Составить уравнение окружности с центром в точке C(3; 0), касающейся оси OY.
6. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку

$A(1;\ 2)$, асимптотами которой служат прямые $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Вариант 4.

1. Найти расстояние от точки $A(2;\ 3;\ -1)$ до прямой L: $\begin{cases} x = 3t + 5, \\ y = 2t, \\ z = -2t - 25. \end{cases}$
2. Через точку A (-1; 2; 5) провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям: $3x - 4y + z + 2 = 0$ и $2x - 3y + z = 0$.
3. Написать уравнение прямой $\begin{cases} 2x + y - 8z - 16 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ в канонической форме.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $2x - 3y + 6z - 6 = 0$; b) $2x + y - 1 = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 4, а фокус $F(3;\ 0)$.
6. Найти фокус и директрису параболы $y = 4x^2$.

Вариант 5.

1. Найти расстояние от точки $C(0;\ 1;\ -1)$ до прямой AB, если $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 4;\ -1)$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;\ 0;\ 1)$ и перпендикулярной к вектору $\vec{N} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x - y + z - 1 = 0$; b) $x + 2y = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 2, а фокус имеет координаты $\left(4\sqrt{2};0\right)$.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $A(6;\ -1)$, $B(-8;\ 2\sqrt{2})$.

Вариант 6.

1. Найти расстояние от точки $P(1;\ 1;\ 1)$ до прямой L: $\begin{cases} x = 2t + 11, \\ y = 5t + 18, \\ z = -2t + 4. \end{cases}$
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A (3; –1; 2), $B(4;\ –1;\ -1)$, $C(2;\ 0;\ 2)$.

3. Написать уравнение перпендикуляра, проведенного из точки $M(1; -2; 3)$ на прямую $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $x-2y+4z-6=0$; *b*) $2x-3y+12=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 7, а фокус имеет координаты $(5;0)$.
6. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $A(-45; 15)$, если осью симметрии является ось OY.

Вариант 7.

1. Найти расстояние от точки $M(3; 0; 4)$ до прямой L: $\begin{cases} y=2x+1, \\ z=2x. \end{cases}$
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ и точку $M(3; 4; 0)$.
3. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -5; 3)$ и образующей с осями координат углы $\alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{2\pi}{3}$.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x-2y+3z+4=0$; *b*) $2x-3z=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если малая полуось равна 4, а фокус имеет координаты $(9;0)$.
6. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус $F(2; 0)$ и асимптоту $y=x$.

Вариант 8.

1. Найти расстояние от точки $C(4; -2; 1)$ до прямой AB, если $A(3; -1; 5)$, $B(7; 1; 1)$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(-1; 2; 0)$ и параллельную прямой L: $\begin{cases} 2x-3y+z-7=0, \\ 5x+y-2z+5=0. \end{cases}$
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0; 1; 2)$ и $B(-2; 3; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+z-7=0$.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $x-3y+4z-1=0$; *b*) $2x-2z-4=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 50, а эксцентриситет $\varepsilon=3/5$.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если осью симметрии является ось абсцисс и парабола проходит через точки $O(0;\ 0)$ и $C(1;\ -4)$.

Вариант 9.

1. Найти расстояние от т очки $M(0;\ 1;\ 2)$ до прямой L: $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t, \\ z = 3t+2. \end{cases}$
2. Написать уравнение плоскости, проходящей по середине между параллельными плоскостями $x-2y+2z-11=0$ и $2x-4y+4z-9=0$.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $2x+2y-4z+8=0$; $b)$ $x+2y+3=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 30, а эксцентриситет его равен $15/17$.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(6;\ -2\sqrt{2})$ и мнимая полуось $b=2$.

Вариант 10.

1. Найти расстояние от точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = 2 : 3$, до точки пересечения прямой $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ с плоскостью $x-2y-4z-3=0$, если $A(5;\ 0;\ 2)$, $B(-10;\ 5;\ 4{,}5)$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-5;\ 2;\ -1)$ параллельно плоскости xOy.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $x+2y-3z+2=0$; $b)$ $2x-4=0$.
5. Составить уравнение окружности, для которой точки $M_1(0;0)$ и $M_2(3;3)$ являются концами ее диаметра.
6. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $A(2;\ -4)$ и симметричной относительно оси OY.

Вариант 11.

1. Найти расстояние от точки $A(2;\ 3;\ -1)$ до прямой L: $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;\ 2;\ 1)$ и параллельной векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} x - 2y + 3z - 8 = 0, \\ 2x + y - 5z + 11 = 0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x + y + 2z - 6 = 0$; *b*) $3x - 4y = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет его равен $3/5$.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$.

Вариант 12.

1. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(2;\ 3;\ -5)$ на плоскость $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(8;\ -3;\ 1)$ и $B(4;\ 7;\ 2)$ перпендикулярно плоскости $3x + 5y - 7z - 21 = 0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -5)$ и параллельную прямой L: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $3x - 4y + z + 4 = 0$; *b*) $3z - 1 = 0$.
5. Дана точка $A(-4;\ 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если осью симметрии является ось OX, и парабола проходит через точку $A(-1;\ 2)$.

Вариант 13.

1. Найти расстояние от точки $A(1;\ 3;\ 5)$, до прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $B(8;\ -7;\ 5)$ и перпендикулярной к отрезку AB, если $A(2;\ -1;\ -2)$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(2;\ -5;\ 3)$ и параллельную прямой L: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $x - 2y + 3z - 4 = 0$; *b*) $2y - z + 3 = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10.

6. Написать каноническое уравнение гиперболы, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\frac{3}{4}x$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

Вариант 14.

1. Найти расстояние от точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = 3$, до плоскости $x-2y+2z+5=0$, если $A(1; -2; 0)$, $B(1; 2/3; 4)$.
2. Через точку $A\ (-1; -1; 2)$ провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям: $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $P(2; -3; -8)$ и параллельную прямой L: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+3}{5}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $6x-2y+3z+6=0$; *b*) $3y-2z+3=0$.
5. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $y=6$.

Вариант 15.

1. Найти расстояние от плоскости $2x-2y+z-6=0$ до начала координат.
2. Написать уравнение плоскости, параллельной оси OY и проходящей через точки $A(1; -5; 1)$ и $B(3; 2; -2)$.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases}5x+y+z=0,\\ 2x+3y-2z+5=0.\end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   a) $x+5y-2z-10=0$; *b*) $2x-z-1=0$.
5. Даны точки $A(-3; 0)$ и $B(3; 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если мнимая полуось равна 88, а фокус имеет координаты $(-7; 0)$.

Вариант 16.

1. Найти расстояние от точки $P(-1; 1; -6)$ до точки пересечения прямой $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ с плоскостью $x-2y-4z-3=0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -3; 2)$ и $B(3; 5; 4)$ и перпендикулярно плоскости $3x+2y-2z+7=0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; 6; -2)$.

4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $x - 5y + 2z + 10 = 0;$ $\qquad$ $b)$ $x + 2y - 3 = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 6, а эксцентриситет равен 0,5.
6. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точки $O(0;\, 0)$ и $A(1;\, 2)$ и симметричной относительно оси OX.

Вариант 17.

1. Найти расстояние от точки $M(-8;\, 2;\, 0)$ до прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$.
2. Даны две точки $A(3;\, -1;\, 5)$ и $B(5;\, 4;\, -2)$. Через точку A провести плоскость, перпендикулярно к отрезку AB.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, з аписать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $3x - 2y - 6z - 6 = 0;$ $\qquad$ $b)$ $3x - 2z = 0$.
5. Дан эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$. Найти его фокусы и эксцентриситет.
6. Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 8, а между вершинами $2a = 6$.

Вариант 18.

1. Найти расстояние от точки $C(2;\, 2;\, 3)$ до плоскости $8x - 4y + z - 38 = 0$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1;\, -2;\, 0)$ и $B(1;\, 1;\, 2)$ и перпендикулярно плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\, -1;\, 3)$ и параллельную прямой L: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 6, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $2x + 4y - 6z + 12 = 0;$ $\qquad$ $b)$ $x - 2z + 1 = 0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его малая ось равна 12, расстояние между фокусами равно 5.
6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно уравнение директрисы $x = -2$.

Вариант 19.

1. Найти расстояние от точки C, делящей отрезок AB в отношении $AC : CB = 1 : 2$, до плоскости $2x - 3y - 6z + 5 = 0$, если $A(1;\, -2;\, 3)$, $B(-2;\, 10;\, -9)$.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\, -5;\, 0)$ и

$B(6;\ 0;\ 2)$ и перпендикулярно плоскости $x+5y+2z=10$.

3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+y+4z-14=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $x-2y+3z-2=0$; $b)$ $2x-4=0$.
5. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что расстояние между фокусами $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$.
6. Написать каноническое уравнение гиперболы, асимптотами которой служат прямые $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ и действительная ось равна 12.

Вариант 20.

1. Найти расстояние от точки $M(4;\ 3;\ 0)$ от плоскости, проходящей через три точки: $A(1;\ 3;\ 0)$, $B(4;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 0;\ 1)$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ –1;\ –2)$ и $B(3;\ 1;\ 4)$ и перпендикулярно плоскости $5x-3y+z+4=0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(3;\ –1;\ 2)$ и $B(2;\ 4;\ 1)$.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $3x+2y-4z+12=0$; $b)$ $3x+y-1=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если большая ось равна 8, а расстояние между фокусами равно 6.
6. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси OY и проходящей через точки $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ 4)$.

Вариант 21.

1. Найти расстояние от точки C, делящей отрезок AB в отношении AC:CB= 2, до прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, если A (1; 2; –4), B(4; –1; 2).
2. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$ и $x+2y+z-2=0$.
3. Привести к каноническому виду уравнение прямой L: $\begin{cases} 2x+y+8z-16=0, \\ x-2y-z+2=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $2x-6y+z+12=0$; $b)$ $x-3y=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его малая ось равна 8, расстояние между фокусами равно 18.
6. Составить каноническое уравнение гиперболы, если она проходит через точки $A(\sqrt{8};\ 0)$, $B(\sqrt{20}/3;\ 2)$.

Вариант 22.

1. Найти расстояние от точки M, делящей отрезок AB пополам, до прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{2}$, если $A(-10;\ 2;\ -1)$, $B(-6;\ 2;\ 1)$.
2. Даны две точки $A(0;\ -1;\ 3)$ и $B(1;\ 3;\ 5)$. Через точку A провести плоскость, перпендикулярно к отрезку AB.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;\ 1;\ -1)$ и параллельную прямой, проходящей через две точки $A(3;\ -1;\ 4)$ и $B(1;\ 1;\ 3)$.
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $x-2y+3z+1=0$; $b)$ $2x-3z-3=0$.
5. Даны точки $A(-2;\ 2)$ и $B(4;\ 6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.
6. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точки $O(0;\ 0)$ и $A(2;\ -4)$ и симметричной относительно оси OY.

Вариант 23.

1. Найти расстояние от точки $A(4;\ 3;\ 10)$, до прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.
2. Через точку $A\ (-1;\ 0;\ 3)$ провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям: $3x-2y+z+4=0$ и $x+y-4z+2=0$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\ 3;\ -2)$ и параллельную прямой L: $\begin{cases} 2x+4y-3z+7=0, \\ x-3y+2z-1=0. \end{cases}$
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $5x-3y-5z-5=0$; $b)$ $2z+1=0$.
5. Дана точка $A(-3;\ 2)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA.
6. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот. Сделать рисунок.

Вариант 24.

1. Найти расстояние от точки $M(3;\ -1;\ 3)$ до точки пересечения прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$ с плоскостью $2x+y-3z+27=0$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0;\ 1;\ 3)$ и $B(2;\ 4;\ 5)$ параллельно оси OX.
3. Записать уравнение медианы AM треугольника ABC, если $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$.

4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $2x-3y+4z-3=0;$ $b)$ $2y-z=0$.
5. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его малая полуось равна 5, а фокус имеет координаты (–10; 0).
6. Построить параболу, заданную уравнением $x^2=2y$, определить ее фокус и записать уравнение директрисы.

Вариант 25.

1. Найти расстояние от точки $A(1;-1;-2)$, до прямой $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-3;-2)$ и $B(2;2;-1)$ и перпендикулярно плоскости $2x-3y+2z-1=0$.
3. При каком значении n прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{n}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?
4. Построить плоскость, указать нормаль, записать уравнения линий пересечения плоскости с координатными плоскостями:
   $a)$ $x-2y-3z-6=0;$ $b)$ $3y+1=0$.
5. Написать каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет $\varepsilon=3/5$ и проходит через точку $A(-6;0)$.
6. Написать каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно 10, а между вершинами $2a=8$.

Е. Решить следующие задания.

Даны четыре точки в пространстве $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ и $A_4(x_4,y_4,z_4)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2. Вычислить**:**

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$.
2. $A_1(3;-1;2)$, $A_2(-1;0;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$.
3. $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;2;-2)$, $A_4(-1;0;2)$.
4. $A_1(2;4;3)$, $A_2(1;1;5)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$.

5. $A_1(9;5;5)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$.
6. $A_1(0;7;1)$, $A_2(2;-1;5)$, $A_3(1;6;3)$, $A_4(3;-9;8)$.
7. $A_1(5;5;4)$, $A_2(1;-1;4)$, $A_3(3;5;1)$, $A_4(5;8;-1)$.
8. $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$.
9. $A_1(7;5;3)$, $A_2(9;4;4)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(7;9;6)$.
10. $A_1(6;8;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;7)$.
11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;1)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.
12. $A_1(4;4;10)$, $A_2(7;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;9)$.
13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.
14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.
15. $A_1(10;9;6)$, $A_2(2;8;2)$, $A_3(9;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.
16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.
17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.
18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(-5;7;-7)$, $A_3(5;-3;1)$, $A_4(2;3;7)$.
19. $A_1(8;-6;4)$, $A_2(10;-5;5)$, $A_3(5;6;-8)$, $A_4(8;10;7)$.
20. $A_1(1;-1;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.
21. $A_1(1;-2;7)$, $A_2(4;2;10)$, $A_3(2;3;5)$, $A_4(5;3;7)$.
22. $A_1(4;2;10)$, $A_2(1;2;0)$, $A_3(3;5;7)$, $A_4(2;-3;5)$.
23. $A_1(2;3;5)$, $A_2(5;3;-7)$, $A_3(1;2;7)$, $A_4(4;2;0)$.
24. $A_1(5;3;7)$, $A_2(-2;3;5)$, $A_3(4;2;10)$, $A_4(1;2;7)$.
25. $A_1(4;3;5)$, $A_2(1;9;7)$, $A_3(0;2;0)$, $A_4(5;3;10)$.

Ж. Решить следующие задачи.

1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1;5;6)$, $M_2(-1;7;10)$.

3. Найти расстояние от точки $M(2;0;-0{,}5)$ до плоскости $x-4y+2z+17=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;5)$ параллельно плоскости Oxy.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2;5;-1)$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-3;5)$ и $B(-3;1;3)$ параллельно оси Oy.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;4;0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$

8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x-y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3;2;-5)$.

10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6;-10;1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a=-3$, а на оси Oz — отрезок $c=2$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-4)$ параллельно двум векторам $a=(4;1;-1)$ и $b=(2;-1;2)$.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;0)$ и $B(2;-1;-1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+2y+3z-7=0$.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-3y+z-1=0$ и $x-y+5z+3=0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;1;4)$ параллельно вектору $a=(5;-2;-1)$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;-2;3)$, $B(1;-3;5)$.

16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2;-3;3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-1;2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2;3;-4)$ и $M_1(-1;2;-3)$.

18. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z-1=0$, а прямая $x=t+7, y=t-2, z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-4;1)$ параллельно координатной плоскости OXZ.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось OY и точку $M(3;-5;2)$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;2;3)$ и $N(-3;4;-5)$ параллельно оси OZ.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ и прямую $x=t-3, y=2t+5, z=-3t+1$.

23. Найти проекцию точки $M(4;-3;1)$ на плоскость $x-2y-z-15=0$.

24. Определить, при каком значении B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны.

25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-3;-4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

3. Решить следующие задачи.

1. Доказать параллельность прямых линий $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $x-2y+2z-8=0$, $x+6z-6=0$.

2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-3;3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равны $60°$, $45°$ и $120°$.

4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой $\left.\begin{matrix}2x+y-4z-2=0\\4x-y-5z+4=0\end{matrix}\right\}$.

5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3;6;-7)$, $B(-5;1;-4)$, $C(0,2,3)$, проведенной из вершины C.

6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ параллельна прямой $\left.\begin{matrix}x+y-z=0\\x-y-5z-8=0\end{matrix}\right\}$.

7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

8. Найти проекцию точки $P(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

9. При каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны?

10. При каком значении A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?

11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?

12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, параллельно прямой $x=2t+5$, $y=-3t+1$, $z=-7t-4$.

13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0;0;2)$, $B(4;2;5)$ и $C(12;6;11)$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-5;3)$ параллельно прямой $2x-y+3z-1=0$, $5x+4y-z-7=0$.

15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$.

16. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

17. Показать, что прямая $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $x=t+7$, $y=t-2$, $z=2t+1$ лежит в этой плоскости.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3;1;-2)$.

19. Показать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $3x+y-5z+1=0$ $2x+3y-8z+3=0$ перпендикулярны.

20. При каком значении D прямая $3x-y+2z-6=0$, $x+4y-z+D=0$ пересекает ось Oz?

21. При каком значении p прямые $\left.\begin{array}{l} x=2t+5 \\ y=-t+2 \\ z=pt-7 \end{array}\right\}$ и $\left.\begin{array}{l} x+3y+z+2=0 \\ x-y-3z-2=0 \end{array}\right\}$ параллельны?

22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$.

23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2;-5;3)$ параллельно плоскости OXZ.

24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5;3;2)$.

25. При каких значениях B и D прямая $x-2y+z-9=0$, $3x+By+z+D=0$ лежит в плоскости Oxy?

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 6. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

А. Привести к каноническому виду. Найти центр фигуры. Определить угол поворота данной фигуры относительно координат *XOY*.

1. $5x^2+8xy+5y^2+2x-3y-9=0$.
2. $15x^2-2\sqrt{55}xy+9y^2-x+3y-20=0$.
3. $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2x+5y-12=0$.
4. $15x_1{}^2-48x_1x_2+27x_2^2+15x_2-3x_1-15=0$.
5. $5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2-12x-7y-22=0$.
6. $-2yx=5+2x-5y$.
7. $3x^2-2\sqrt{5}xy-y^2-4x+2y-16=0$.
8. $4x^2+24xy+11y^2-5x+8y-20=0$.
9. $4xy+3y^2=72-8x$.
10. $x^2+4xy+4y^2-2x-4y+1=0$.
11. $6x^2-4\sqrt{14}xy+5y^2-8x+2y-26=0$.
12. $x^2-2xy+y^2+4x-6y+1=0$.
13. $2yz+7-2x=0$.
14. $x^2+3xy+2y^2+2x+5y-3=0$.
15. $4xy+3y^2-36-9y=0$.
16. $x^2-2\sqrt{21}xy+5y^2-2y-2x-24=0$.
17. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.
18. $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$.
19. $2x^2-3y^2-4xy+8x-3y-4=0$.
20. $4x_1{}^2+24x_1x_2+11x_1^2-4x_1+3x_2-20=0$.
21. $x^2+2xy-y^2-6x+4y-3=0$.
22. $5x^2+y^2+10x-3y+14=0$.
23. $x_1{}^2-2x_1x_2+x_2^2-4x_1+6x_2+4=0$.
24. $3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-4x+2y-12=0$.
25. $5x^2-4\sqrt{14}xy+6y^2+2x-3y-20=0$.

Б. Привести к каноническому виду и определить тип поверхности. Найти центр поверхности.

1. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz+3x-8z+6=0$.
2. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-24y-16z+32=0$.
3. $17x^2-16xy+8xz+17y^2-8yz+11z^2+15z-11=0$.
4. $2x^2+y^2-4xy-4yz-3x+2z-4=0$.
5. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-2x+3y-12=0$.
6. $3x^2+3z^2+4xy+4xz-2yz+x-y+27=z$.
7. $2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+10x_2+1=0$.
8. $x^2-4xy+2xz+4y^2+z^2-12x-20=0$.
9. $x^2+2xy+2y^2+4yz+5z^2+2x-5y+4z-1=0$.
10. $2x^2+y^2+z^2-4xy-4yz-3=0$.
11. $x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz-6x-8y-12=0$.
12. $17x^2-16xy+8xz+17y^2-8yz+11z^2-18z-13=0$.
13. $x^2+y^2-z^2-8x+5y-4z+2=0$.
14. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-4x+8y-z-16=0$.
15. $2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-2x_1+3x_2-3=0$.
16. $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3-12x_1-8x_2+8x_3+6=0$.
17. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+6=0$.
18. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-24y+18z+18=0$.
19. $x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2-4x_1-20=0$.
20. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+6x-8y+6=0$.
21. $5x^2+6y^2+7z^2-4xy-4yz+3x-8y-18=0$.
22. $x^2+2y^2-2xy-6yz-3=0$.
23. $11x^2+17y^2+17z^2+8xy-8xz-6yz-18=0$.
24. $x^2+y^2-z^2-6x-2y+4z+27=0$.
25. $x^2-y^2+2z^2-4xz-2x+4z-12=0$.

В. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

1. а) $y^2=2z,\ Oz$; б) $9y^2+4z^2=36; Oy$.

2. а) $4x^2-3y^2=12,\ Ox$; б) $x=1,\ y=2;\ Oz$.

3. а) $x^2 = -3z,\ Oz$; б) $3x^2 + 5z^2 = 15;\ \ Ox$.

4. а) $3y^2 - 4z^2 = 12,\ Oz$; б) $y = 1,\ z = 2;\ \ Ox$.

5. а) $x^2 = 3y,\ Oy$; б) $3x^2 + 4z^2 = 15;\ Oz$.

6. а) $2x^2 - 6y^2 = 12,\ Ox$; б) $y^2 = 4z;\ \ Oz$.

7. а) $x^2 + 3z^2 = 9,\ Oz$; б) $x = 4,\ z = 6;\ Oy$.

8. а) $3x^2 - 5z^2 = 15,\ Oz$; б) $z = -1,\ y = 3;\ \ Ox$.

9. а) $y^2 = 3z,\ Oz$; б) $2x^2 + 3z^2 = 6;\ \ Ox$.

10. а) $y^2 - 5x^2 = 5,\ Oy$; б) $y = 3,\ z = 1;\ Ox$.

11. а) $x^2 = -4z,\ Oz$; б) $y^2 + 4z^2 = 4;\ Oy$.

12. а) $5x^2 - 6z^2 = 30,\ Ox$; б) $x = 3,\ z = -2;\ Oy$.

13. а) $z^2 = 2y,\ Oy$; б) $2x^2 + 3z^2 = 6; Oz$.

14. а) $y^2 = -4z,\ Oz$; б) $3y^2 + z^2 = 6;\ Oy$.

15. а) $7x^2 - 5y^2 = 35,\ Ox$; б) $x = -1,\ y = -3;\ Oz$.

16. а) $2x^2 = z,\ Oz$; б) $x^2 + 4z^2 = 4; Ox$.

17. а) $2y^2 - 5z^2 = 10,\ Oz$; б) $y = 2,\ z = 6;\ Ox$.

18. а) $x^2 = -5y,\ Oy$; б) $2x^2 + 3z = 6;\ Oz$.

19. а) $x^2 - 9y^2 = 9,\ Ox$; б) $3y^2 = z;\ \ Oz$.

20. а) $x^2 + 2z^2 = 4,\ Oz$; б) $x = 3,\ z = -1;\ Oz$.

21. а) $15x^2 - 3y^2 = 1,\ Ox$; б) $x = 3,\ y = 4;\ Oz$.

22. а) $y^2 = 5z,\ Oz$; б) $3x^2 + 7z^2 = 21;\ Oy$.

23. а) $15y^2 - x^2 = 6,\ Oy$; б) $y = 5,\ z = 2;\ \ Oy$.

24. а) $5z = -x^2,\ Oz$; б) $3y^2 + 18z^2 = 1;\ Oy$.

25. а) $3x^2 - 8y^2 = 288,\ Ox$; б) $x = 5,\ z = -3;\ Oy$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ 7. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.

А. Решить задачу ЛП симплекс методом и дать геометрическую иллюстрацию решения.

1. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 6x_1 + 12x_2 \le 73 \end{cases}$.
$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$.
$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$.
$F = x_1 + x_2 \to \max$

4. $\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 20 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 19 \end{cases}$.
$F = 16x_1 + 14x_2 \to \max$

5. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 13 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 5 \end{cases}$.
$F = 4x_1 + x_2$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ -3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \ge 4 \end{cases}$.
$F = 3x_1 + 5x_2$

7. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$.
$F = 3x_1 + 5x_2 \to \max$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$.
$F = 3x_1 + x_2 \to \max$

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 - 5x_2 \ge -5 \end{cases}$.
$F = 2x_1 - 10x_2 \to \min$

10. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$.
$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \end{cases}$.
$F = 4x_1 + 6x_2 \to \min$

12. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1 \le 4 \\ 2x_2 \ge 5 \end{cases}$.
$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 18 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 5x_1 - 3x_2 \le 15 \end{cases}$.

$F = 4x_2 \to \min$

14. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 20 \\ x_2 \ge 5 \end{cases}$.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \end{cases}$.

$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \min$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge 10 \end{cases}$.

$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min$

17. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$.

$F = 6x_1 + x_2 - 8 \to \max$

18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 \le 5 \\ x_3 + x_5 \ge -3 \end{cases}$.

$F = x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 \to \min$

19. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26 \end{cases}$.

$F = 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 15x_4 \to \max$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ -x_1 + 3x_3 \le 2 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4 \end{cases}$.

$F = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

22. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 - x_4 = 4 \end{cases}$.

$F = x_1 - 2x_2 + 4x_4 \to \min$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$.

$F = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min$

24. $\begin{cases} 0{,}2x_1 + 3{,}1x_2 \le 12{,}3 \\ 5x_1 + 0{,}3x_2 \le 51 \\ 2x_1 \le 16 \end{cases}$.

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$25.\ \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 21 \\ 7x_1 + 15x_2 \le 35 \\ \qquad\quad x_1 \le 6 \end{cases}.$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

Б. Построить математическую модель задачи ЛП. Привести к канонической форме и решить симплекс–методом. Дать геометрическое истолкование задачи.

Предприятие располагает производственными ресурсами (сырье оборудование, электроэнергия) и может организовать производство двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства дан в таблице в условных единицах. При первом способе производства предприятие выпускает α изделий, при втором β изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие с учетом перестройки способов производства, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

Ресурсы	Расход ресурсов за один месяц		Общий ресурс
	1 способ	2 способ	
Сырье Оборудование Электроэнергия	a_1 a_2 a_3	b_1 b_2 b_3	p_1 p_2 p_3
Объем продукции	α	β	

$$1.\ \begin{matrix} a_1 = 9 & b_1 = 4 & p_1 = 182 \\ a_2 = 6 & b_2 = 7 & p_2 = 204 \\ a_3 = 3 & b_3 = 8 & p_3 = 163 \end{matrix} \quad \alpha = 3 \quad \beta = 2.$$

$$2.\ \begin{matrix} a_1 = 4 & b_1 = 3 & p_1 = 45 \\ a_2 = 3 & b_2 = 4 & p_2 = 42 \\ a_3 = 3 & b_3 = 5 & p_3 = 48 \end{matrix} \quad \alpha = 6 \quad \beta = 5.$$

$$3.\ \begin{matrix} a_1 = 16 & b_1 = 4 & p_1 = 75 \\ a_2 = 8 & b_2 = 7 & p_2 = 51 \\ a_3 = 5 & b_3 = 9 & p_3 = 62 \end{matrix} \quad \alpha = 4 \quad \beta = 6.$$

4. $\begin{matrix} a_1 = 3 & b_1 = 2 & p_1 = 121 \\ a_2 = 3 & b_2 = 3 & p_2 = 153 \\ a_3 = 2 & b_3 = 5 & p_3 = 181 \end{matrix}$ $\alpha = 4$ $\beta = 5$.

5. $\begin{matrix} a_1 = 6 & b_1 = 3 & p_1 = 213 \\ a_2 = 5 & b_2 = 10 & p_2 = 261 \\ a_3 = 3 & b_3 = 12 & p_3 = 314 \end{matrix}$ $\alpha = 3$ $\beta = 9$.

6. $\begin{matrix} a_1 = 3 & b_1 = 5 & p_1 = 53 \\ a_2 = 4 & b_2 = 8 & p_2 = 72 \\ a_3 = 3 & b_3 = 11 & p_3 = 78 \end{matrix}$ $\alpha = 2$ $\beta = 5$.

7. $\begin{matrix} a_1 = 10 & b_1 = 6 & p_1 = 73 \\ a_2 = 9 & b_2 = 3 & p_2 = 36 \\ a_3 = 5 & b_3 = 1 & p_3 = 45 \end{matrix}$ $\alpha = 8$ $\beta = 4$.

8. $\begin{matrix} a_1 = 12 & b_1 = 3 & p_1 = 86 \\ a_2 = 10 & b_2 = 5 & p_2 = 80 \\ a_3 = 3 & b_3 = 6 & p_3 = 64 \end{matrix}$ $\alpha = 6$ $\beta = 2$.

9. $\begin{matrix} a_1 = 3 & b_1 = 5 & p_1 = 41 \\ a_2 = 9 & b_2 = 3 & p_2 = 72 \\ a_3 = 10 & b_3 = 2 & p_3 = 78 \end{matrix}$ $\alpha = 12$ $\beta = 6$.

10. $\begin{matrix} a_1 = 11 & b_1 = 3 & p_1 = 68 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 & p_2 = 59 \\ a_3 = 5 & b_3 = 3 & p_3 = 42 \end{matrix}$ $\alpha = 5$ $\beta = 2$.

11. $\begin{matrix} a_1 = 4 & b_1 = 3 & p_1 = 72 \\ a_2 = 3 & b_2 = 4 & p_2 = 70 \\ a_3 = 2 & b_3 = 6 & p_3 = 81 \end{matrix}$ $\alpha = 2$ $\beta = 4$.

12. $\begin{matrix} a_1 = 15 & b_1 = 4 & p_1 = 110 \\ a_2 = 11 & b_2 = 5 & p_2 = 86 \\ a_3 = 9 & b_3 = 10 & p_3 = 100 \end{matrix}$ $\alpha = 3$ $\beta = 2$.

$$13.\quad \begin{array}{lll} a_1=5 & b_1=7 & p_1=36 \\ a_2=9 & b_2=2 & p_2=58 \\ a_3=10 & b_3=5 & p_3=60 \end{array} \quad \alpha=11 \quad \beta=7.$$

$$14.\quad \begin{array}{lll} a_1=7 & b_1=5 & p_1=35 \\ a_2=9 & b_2=2 & p_2=30 \\ a_3=8 & b_3=1 & p_3=38 \end{array} \quad \alpha=11 \quad \beta=3.$$

$$15.\quad \begin{array}{lll} a_1=7 & b_1=8 & p_1=45 \\ a_2=6 & b_2=3 & p_2=38 \\ a_3=5 & b_3=1 & p_3=32 \end{array} \quad \alpha=11 \quad \beta=10.$$

$$16.\quad \begin{array}{lll} a_1=10 & b_1=18 & p_1=123 \\ a_2=8 & b_2=15 & p_2=110 \\ a_3=3 & b_3=10 & p_3=50 \end{array} \quad \alpha=11 \quad \beta=13.$$

$$17.\quad \begin{array}{lll} a_1=5 & b_1=7 & p_1=25 \\ a_2=6 & b_2=5 & p_2=89 \\ a_3=7 & b_3=1 & p_3=36 \end{array} \quad \alpha=9 \quad \beta=7.$$

$$18.\quad \begin{array}{lll} a_1=5 & b_1=13 & p_1=36 \\ a_2=7 & b_2=8 & p_2=23 \\ a_3=9 & b_3=2 & p_3=43 \end{array} \quad \alpha=6 \quad \beta=4.$$

$$19.\quad \begin{array}{lll} a_1=8 & b_1=7 & p_1=61 \\ a_2=7 & b_2=3 & p_2=49 \\ a_3=5 & b_3=10 & p_3=50 \end{array} \quad \alpha=11 \quad \beta=9.$$

$$20.\quad \begin{array}{lll} a_1=8 & b_1=10 & p_1=46 \\ a_2=7 & b_2=5 & p_2=39 \\ a_3=7 & b_3=2 & p_3=47 \end{array} \quad \alpha=9 \quad \beta=8.$$

$$21.\quad \begin{array}{lll} a_1=7 & b_1=12 & p_1=36 \\ a_2=7 & b_2=8 & p_2=30 \\ a_3=8 & b_3=2 & p_3=42 \end{array} \quad \alpha=6 \quad \beta=4.$$

$$22.\quad \begin{matrix} a_1 = 12 & b_1 = 5 & p_1 = 51 & & \\ a_2 = 8 & b_2 = 6 & p_2 = 72 & \alpha = 3 & \beta = 5. \\ a_3 = 3 & b_3 = 8 & p_3 = 61 & & \end{matrix}$$

$$23.\quad \begin{matrix} a_1 = 1 & b_1 = 5 & p_1 = 89 & & \\ a_2 = 3 & b_2 = 3 & p_2 = 54 & \alpha = 5 & \beta = 2. \\ a_3 = 7 & b_3 = 2 & p_3 = 72 & & \end{matrix}$$

$$24.\quad \begin{matrix} a_1 = 2 & b_1 = 4 & p_1 = 120 & & \\ a_2 = 3 & b_2 = 1 & p_2 = 105 & \alpha = 2 & \beta = 4 \\ a_3 = 4 & b_3 = 3 & p_3 = 86 & & \end{matrix}.$$

$$25.\quad \begin{matrix} a_1 = 3 & b_1 = 5 & p_1 = 89 & & \\ a_2 = 4 & b_2 = 2 & p_2 = 75 & \alpha = 5 & \beta = 3 \\ a_3 = 5 & b_3 = 6 & p_3 = 66 & & \end{matrix}.$$

В. Составить математическую модель задачи и найти ее решение симплекс–методом.

1. Для производства комплектной продукции требуется изготовить два вида изделий. Их изготовление может быть поставлено на каждом из пяти предприятий; производственная мощность предприятий и количество предприятий каждого типа указаны в таблице.

Тип предприятия	Число предприятий	Производственная мощность предприятия (в тыс.)	
		по изделию № 1	по изделию № 2
1	5	100	15
2	3	400	200
3	40	20	2,5
4	9	200	90
5	2	600	250

Определить, сколько предприятий каждого типа необходимо поставить на производство первого и сколько на производство второго изделий, чтобы обеспечить максимум выпуска комплектов, если в каждый комплект должно входить два изделия первого вида и одно второго.

2. На заводе ежемесячно скапливается около 14 тонн отходов металла, из которого можно штамповать большие и малые шайбы.

Месячная потребность завода в больших шайбах 600 тыс. штук, в малых 1100 тыс. штук. Оптовая цена больших шайб 11,9 ден. ед. (за тысячу штук) и малых 5,2 ден. ед. Расход металл на тысячу больших шайб – 22 кг, на тысячу малых шайб – 8 кг. Для изготовления шайб используются два процесса холодной штамповки.

Производительность каждого за смену 9 тыс. штук больших либо 11,5 тыс. штук малых шайб. Завод работает в две смены. Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу определения месячного плана производства шайб, обеспечивающую максимальную прибыль.

3. В области имеется два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Заводы	Производство цемента, т/сут.	Стоимость перевозки 1 т цемента		
		комбинат 1	комбинат 2	комбинат 3
1	40	10	15	25
2	60	20	30	30
Потребность в цементе, т/сут.		50	20	30

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

4. Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в таблице.

Характеристики	Материалы		
	Металл	Стекло	Пластмасса
Стоимость за м^2	25	20	40
Масса, кг/м^2	10	15	3

Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составить 14 м^2, из них не менее 4 м^2 и более 5 м^2 следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

5. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в таблице.

Длина заготовки, см	Варианты разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Величина отходов, см	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого типа при минимальных отходах.

6. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырех видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение одного часа, а также затраты, связанные с производством одного изделия, приведены в таблице.

Тип оборудования	Количество производимых в течение одного часа изделий вида				Затраты (ден. ед.), связанные с производством в течение одного часа изделий вида			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
2	6	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Оборудование 1 типа предприятие может использовать не более 80 часов, а оборудование 2 типа – не более 60 часов. Учитывая, что предприятию следует изготовить изделий каждого вида соответственно не менее 240, 160, 150 и 220 ед., определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготовлять каждое из изделий так, чтобы получить не менее нужного количества изделий при минимальных затратах на производство.

7. Имеются три базы A_1, A_2, A_3, на которых сосредоточены определенные боевые средства, например, ракеты в количестве:

на базе A_1 — 11 единиц,
на базе A_2 — 11 единиц,
на базе A_3 — 8 единиц.

Имеются также четыре объекта B_1, B_2, B_3, B_4, которые могут быть уничтожены следующим количеством ракет:

объект B_1 — 5 единиц,
объект B_2 — 9 единиц,
объект B_3 — 9 единиц,

объект B_4 — 7 единиц.

Стоимость уничтожения различных объектов ракетами с различных баз показана в таблице.

Базы, объекты	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	5	3
A_2	2	4	5	9
A_3	6	3	1	2

Необходимо найти оптимальный план распределения боевых средств по объектам, обеспечивающий минимум затрат.

8. Для контроля за работой космической ракеты используются четыре вида датчиков. Результаты измерений этих датчиков регистрируются тремя типами наземных регистраторов-самописцев.

Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и т.д.) и передает результаты по отдельному каналу связи на любой самописец. Количество датчиков и самописцев, а также время, затрачиваемое на выключение соответствующего канала связи, указаны в таблице.

Самописцы, датчики	20	40	50	40
70	2	1	5	3
90	3	2	3	4
60	3	4	1	2

Определить оптимальное закрепление датчиков к регистрирующим устройствам, при котором достигается минимум суммарных затрат времени на переключение каналов.

9. Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты, включающие 4 детали первого типа, 3 детали второго типа и 2 детали третьего типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами. Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в таблице.

Первая партия				Вторая партия		
Детали, способ раскроя	**1**	**2**	**3**	Детали, способ раскроя	**1**	**2**
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального количества комплектов.

10. Экспериментальные установки, предназначенные для использования двигателей, камер сгорания и турбин, могут работать только с одной из четырех высотно-компрессорных станций (ВКС).

Месячный баланс времени у каждой из станций различен: 200, 300, 100, 250. Для испытания двигателей (Д), камер сгорания (К) и турбин (Т) нужно разное время в зависимости от номера станции: 1, 2, 3 ,4.

Стоимость работы одного часа ВКС также не одинакова.

Номер ВКС	Время работы станции над каждым видом испытания			Стоимость одного часа работы ВКС	Месячный баланс времени
	Д	К	Т		
1	5	20	30	2	200
2	10	15	20	5	300
3	8	10	15	4	100
4	10	18	25	2	250

Найти оптимальный план загрузки ВКС на месяц, т.е. план, которому соответствует максимальное число комплектов (1 двигатель, 1 камера сгорания, 1 турбина), прошедших испытания. Общий расход на эксперимент не должен превышать 2800 ден. единиц.

11. Полицейская служба «Шумгам-сити» имеет следующие минимальные потребности в количестве полицейских в различное время суток.

Время суток, часы	Порядковый номер периода	Минимальное число полицейских, требуемых в указанный период
2-6	1	20
6-10	2	50
10-14	3	80
14-18	4	100
18-22	5	40
22-2	6	30

При этом нужно иметь в виду, что период 1 следует сразу же за периодом 6. Каждый полицейский работает восемь часов без перерыва. Полицейская служба пытается составить служебное расписание на каждые сутки таким образом, чтобы обойтись минимальным числом полицейских, но не нарушая сформулированных выше условий. Чтобы составить расписание, требуется построить соответствующую модель линейного программирования.

12. Три автохозяйства должны ежедневно подавать подвижной состав четырем крупным грузоотправителям. Расстояние между автохозяйствами и клиентами, а также потребность грузовладельцев в автомобилях и наличие их в автохозяйствах приводится в таблице.

Автохозяйства	Грузоотправители				Наличие автомобилей
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	$\boldsymbol{B_4}$	
$\boldsymbol{A_1}$	2	4	1	3	$\boldsymbol{a_1} = 200$
$\boldsymbol{A_2}$	7	3	9	4	$\boldsymbol{a_2} = 600$
$\boldsymbol{A_3}$	10	15	14	8	$\boldsymbol{a_3} = 500$
Потребности	$\boldsymbol{b_1} = 300$	$\boldsymbol{b_2} = 500$	$\boldsymbol{b_3} = 400$	$\boldsymbol{b_4} = 100$	

Найти оптимальный план закрепления автохозяйств за грузоотправителями, обеспечивающий минимальный пробег автомобилей.

13. Предприятию задана программа на изготовление четырех наименований изделий в количествах:

1 – 500 штук; 2 – 2000 штук; 3 – 3000 штук; 4 – 1600 штук.

На предприятии имеются три группы станков с различной производительностью. Задано суммарное допустимое время работы за этот период для каждой группы станков:
для первой группы – 800 часов,
для второй группы – 1000 часов,
для третьей группы – 1500 часов.
Данные о нормах времени (в часах) на изготовление одного изделия на каждом станке и данные об издержках (в денежных единицах) на изготовление каждого изделия на станках различных групп приведены в таблице.

№ группы станков	Норма времени на различных станках, часы				Издержки на изготовление одного			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	0,5	0,15	0,4	0,6	0,12	0,2	0,3	0,25
2	0,4	0,12	0,2	0,5	0,16	0,14	0,35	0,2
3	0,42	0,14	0,35	0,45	0,17	0,25	0,4	0,3

Распределить изделия по станкам так, чтобы месячная программа была выполнена при наименьших издержках.

14. Три типа самолетов нужно распределить между четырьмя авиалиниями. В приведенной ниже таблице задано количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям				Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям			
		1	2	3	4	1	2	3	4
№1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
№2	20	20	25	10	70	70	28	15	45
№3	30	35	50	30	45	40	70	40	65

Надо распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000 и 500 единиц груза.

15. Строительной организации необходимо выполнить четыре вида земляных работ, объем которых соответственно 7000, 6500, 7600 и 8100 м^3.

Для их осуществления предлагается использовать три механизма.

Производительность механизмов и себестоимость одного часа работы каждого из них приведены в таблице.

Показатели	Механизмы и виды работ											
	I механизм				И механизм				III механизм			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Производительность механизма по виду работы, $м^3/ч$	20	15	16	30	14	18	35	32	15	29	40	15
Себестоимость 1 часа работы механизма по виду работ, ден. ед.	2	5	3	6	2	4	5	7	8	3	6	3

Плановый фонд времени I, II и III механизмов составляет соответственно 350, 600 и 290 машино-часов. Построить модель, на основе которой можно сформулировать задачу нахождения плана организации работ с минимальными затратами на его осуществление.

16. Введение на мебельной фабрике новой технологии привело к экономии 500 погонных метров досок типа $\boldsymbol{A}$ и 300 погонных метров досок типа $\boldsymbol{B}$. Изучение заказов мебельных магазинов дает основание предположить, что из сэкономленных материалов целесообразно изготовить, по крайней мере, 40 столов, 130 стульев, 30 сервантов и не более 10 книжных шкафов. Для изготовления сверхплановой продукции фабрика располагает 800 человеко-часами. В таблице указан расход материалов и рабочего времени на единицу продукции, а также прибыль от ее реализации.

Ресурсы	Типы изделий			
	Стол	Стул	Сервант	Кн. шкаф
Доски типа $\boldsymbol{A}$	1,7	0,1	3,1	4,0
Доски типа $\boldsymbol{B}$	0,7	1,1	13	0,3
Рабочее время	3	2	5	10
Прибыль на единицу продукции	6	2	8	5

Спланировать выпуск продукции из сэкономленных материалов так, чтобы продукция могла быть реализована и прибыль от ее реализации была наибольшей.

17. Некоторый однородный груз сосредоточен в пунктах A_1 (40 единиц), A_2 (20 единиц) и A_3 (40 единиц). Этот груз следует переправить через пункты B_1 (25 единиц), B_2 (10 единиц), B_3 (20 единиц), B_4 (30 единиц) и B_5 (15 единиц). Стоимость перевозки единицы груза от пунктов его сосредоточения до пунктов потребления в рублях указана в таблице.

Пункты хранения грузов	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	55	30	40	50	40
A_2	35	30	100	45	60
A_3	40	60	95	35	30

Спланировать перевозки грузов так, чтобы суммарная стоимость этих перевозок была наименьшей.

18. Производственный участок изготовляет изделия И-1, И-2, И-3 для сборочного конвейера предприятия-заказчика. Потребность в них 300, 500 и 400 штук соответственно. Запасы металла на изделие И-1 ограничены, поэтому их можно производить не более 350 штук. Все изделия последовательно обрабатываются на станках С–1, С–2 и С–3.

Технология изготовления каждого изделия предусматривает три способа обработки. Нормы времени на обработку, плановая себестоимость и оптовая цена предприятия на все изделия приведены в таблице.

Показатели		Изделия и способы обработки								
		И-1			И-2			И-3		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
Норма	на С– 1	3	7	0	8	4	5	4	3	2
	на С–2	2	3	6	3	2	0	2	3	1
	на С–3	7	5	6	9	3	6	5	6	3
Плановая себестоимость, руб.		13	15	11	26	20	25	19	20	18
Оптовая цена предприятия, руб.		16			25			20		

Плановый фонд времени работы станков составляет: для станков С-I и С-III по 6048 часов, для станков С-П - 3932 часа.

Построить модель, на основе которой можно сформулировать экстремальную задачу нахождения плана загрузки станков, обеспечивающего максимальную прибыль от реализации готовой продукции. Решив задачу без учета условия целочисленности компонент оптимального плана, получить целочисленное решение округлением найденного оптимального плана. Подсчитать потери от округления по целевой функции.

19. Имеется три типа самолетов C_1, C_2, C_3 в количестве соответственно 156, 102, 59 штук. Эти самолеты нужно распределить между четырьмя авиалиниями. В таблице в числителе указан месячный объем перевозок самолетом каждого типа по каждой линии. В знаменателе даны месячные эксплуатационные расходы в денежных единицах на каждый тип самолета по каждой авиалинии. Определить число самолетов каждого типа, которое следует закрепить за каждой линией для обеспечения перевозок по ним соответственно 1000, 1500, 850, 655 единиц груза.

Самолеты	Линии			
	1	2	3	4
C_1	15/45	25/45	20/25	10/18
C_2	8/15	16/24	14/18	16/24
C_3	15/27	20/46	15/27	12/26

20. Предприятие может выпускать продукцию по трем технологически отработанным способам производства. При этом за один час по первому способу производства оно выпускает 20 единиц продукции, по второму – 25 единиц и по третьему – 30 единиц продукции. Количество производственных факторов, расходуемых за час при различных способах производства, и располагаемые ресурсы этих факторов представлены в таблице.

Способ производства,	Сырье	Станочный парк	Рабочая сила	Энергия	Транс-порт	Прочие расходы
1	2	3	7	2	1	4
2	1	4	3	1	0	2
3	3	2	4	3	1	1
Располагаемые ресурсы факторов	66	80	70	50	40	50

Спланировать работу предприятия из условий получения максимума продукции, если известно, что общее время работы предприятия составляет 30 часов.

21. Местное управление гражданского воздушного флота имеет самолеты трех типов, которые используются для перевозки пассажиров на четырех воздушных линиях. Каждый самолет имеет определенные расходы, связанные с выполнением перевозок.

Месячные расходы (в ден. единицах) на один самолет, количество самолетов каждого типа и потребности авиалиний в самолетах заданы таблицей.

Тип самолета	Воздушные линии				Количество самолетов
	1	2	3	4	
A	1,8	2,1	18	16	10
B	10	15	16	1,4	19
C	8	10	12	9	25
Потребности	20	10	15	14	

Как закрепить самолеты за воздушными линиями, чтобы эксплуатационные расходы были минимальными ?

22. Для производства комплектной продукции требуется изготовить два вида изделий. Эти изделия делаются на станках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Мощности этих станков и их количество даны в таблице.

Тип станка	Число станков	Производственная мощность	
		Изделие 1	Изделие 2
A	30	2	1
B	20	4	2

Сколько станков каждого типа надо поставить на производство первого и второго типа изделий, чтобы обеспечить изготовление максимального числа комплектов? В каждый комплект должны входить два изделия первого типа и одно – второго типа.

В. Транспортная задача.

Составить план перевозок однородного груза из пунктов A_1, A_2 и A_3 в пункты назначения B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 так, чтобы стоимость перевозок была минимальной. Дана матрица стоимости перевозок C и количество груза на пунктах назначения и пунктах складирования грузов.

1.

$a_1 = 28,\ \ a_2 = 22,\ \ a_3 = 30$ $$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 19,\ b_2 = 14, b_3 = 18, b_4 = 12, b_5 = 17$

2.

$a_1 = 20,\ \ a_2 = 15,\ \ a_3 = 15$ $$C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 27 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 14 & 16 & 26 & 12 & 20 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 9,\ b_2 = 10, b_3 = 7, b_4 = 13, b_5 = 11$

3.

$a_1 = 30,\ \ a_2 = 28,\ \ a_3 = 22$ $$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 18,\ b_2 = 14, b_3 = 19, b_4 = 12, b_5 = 17$

4.

$a_1 = 15,\ \ a_2 = 15,\ \ a_3 = 20$ $$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 10,\ b_2 = 7, b_3 = 13, b_4 = 11, b_5 = 9$

5.

$a_1 = 25,\ \ a_2 = 20,\ \ a_3 = 15$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 18,\ b_2 = 12, b_3 = 9, b_4 = 11, b_5 = 10$

6.

$a_1 = 40,\ \ a_2 = 25,\ \ a_3 = 35$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 17 & 13 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 20,\ b_2 = 17, b_3 = 23, b_4 = 22, b_5 = 18$

7.

$a_1 = 15,\ \ a_2 = 20,\ \ a_3 = 15$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 19 & 6 & 10 & 15 \\ 3 & 13 & 11 & 14 & 16 \\ 14 & 20 & 10 & 11 & 18 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 16,\ b_2 = 7, b_3 = 9, b_4 = 8, b_5 = 10$

8.

$a_1 = 28,\ \ a_2 = 30,\ \ a_3 = 22$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 26 & 10 & 5 & 16 & 5 \\ 33 & 12 & 10 & 13 & 1 \\ 28 & 14 & 9 & 23 & 13 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 17,\ b_2 = 12, b_3 = 19, b_4 = 14, b_5 = 18$

9.

$a_1 = 15,\ \ a_2 = 25,\ \ a_3 = 20$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 17 & 10 & 9 & 11 & 5 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 18,\ b_2 = 12, b_3 = 9, b_4 = 11, b_5 = 10$

10.

$a_1 = 25,\ \ a_2 = 40,\ \ a_3 = 35$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 40 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 30,\ b_2 = 16, b_3 = 22, b_4 = 18, b_5 = 14$

11

$a_1 = 25, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 15$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 18 & 7 & 12 \\ 10 & 1 & 12 & 10 & 18 \\ 16 & 13 & 23 & 14 & 17 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 18, \; b_2 = 12, b_3 = 9, b_4 = 11, b_5 = 10$

12.

$a_1 = 20, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 25$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 & 8 & 11 \\ 9 & 4 & 11 & 7 & 16 \\ 8 & 11 & 15 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 7, \; b_2 = 13, b_3 = 8, b_4 = 15, b_5 = 17$

13.

$a_1 = 50, \quad a_2 = 70, \quad a_3 = 40$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 17 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 9 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 30, \; b_2 = 60, b_3 = 45, b_4 = 25, b_5 = 0$

14.

$a_1 = 15, \quad a_2 = 17, \quad a_3 = 11$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 & 5 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 11, \; b_2 = 12, b_3 = 8, b_4 = 5, b_5 = 7$

15.

$a_1 = 40, \quad a_2 = 50, \quad a_3 = 30$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 35, \; b_2 = 40, b_3 = 40, b_4 = 30, b_5 = 0$

16.

$a_1 = 20, \quad a_2 = 30, \quad a_3 = 40$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 & 10 & 7 \\ 4 & 9 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 10, \; b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 30, b_5 = 20$

17.

$a_1 = 160, \ \ a_2 = 90, \ \ a_3 = 140$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 10 & 7 \\ 4 & 9 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 90, \ b_2 = 60, b_3 = 80, b_4 = 70, b_5 = 90$

18.

$a_1 = 60, \ \ a_2 = 130, \ \ a_3 = 150$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 & 7 \\ 9 & 15 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 12 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 30, \ b_2 = 80, b_3 = 60, b_4 = 110, b_5 = 60$

19.

$a_1 = 90, \ \ a_2 = 50, \ \ a_3 = 40$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 70, \ b_2 = 30, b_3 = 20, b_4 = 40, b_5 = 20$

20.

$a_1 = 25, \ \ a_2 = 20, \ \ a_3 = 35$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 7 & 10 \\ 7 & 6 & 6 & 8 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 30, \ b_2 = 20, b_3 = 12, b_4 = 18, b_5 = 0$

21.

$a_1 = 45, \ \ a_2 = 20, \ \ a_3 = 35$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 10, \ b_2 = 20, b_3 = 20, b_4 = 30, b_5 = 30$

22.

$a_1 = 160, \ \ a_2 = 90, \ \ a_3 = 140$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 10 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$

$b_1 = 90, \ b_2 = 80, b_3 = 60, b_4 = 70, b_5 = 90$

23.

$a_1 = 200, \quad a_2 = 300, \quad a_3 = 400$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 11 & 8 \\ 5 & 10 & 11 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 100, \; b_2 = 100, b_3 = 200, b_4 = 300, b_5 = 200$

24.

$a_1 = 50, \quad a_2 = 120, \quad a_3 = 140$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 14 & 4 & 7 \\ 8 & 14 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 11 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 30, \; b_2 = 70, b_3 = 60, b_4 = 100, b_5 = 50$

25.

$a_1 = 80, \quad a_2 = 150, \quad a_3 = 70$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 & 8 \\ 5 & 18 & 2 & 7 & 10 \\ 8 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = 40, \; b_2 = 70, b_3 = 50, b_4 = 60, b_5 = 80$

Приложение 1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММЕ MATHCAD

Цель работы: Решить систему линейных уравнений произвольного порядка точными методами с проверкой полученного решения оператором **lsolve** программы Mathcad.

Задание:

1. Решить систему уравнений методом Гаусса.
2. Решить систему уравнений методом обратной матрицы.
3. Проверить полученное решение оператором **lsolve** программы Mathcad.
4. Сравнить полученные в пунктах 2–3 результаты.

Пример выполнения работы для системы уравнений, заданной в матричном виде:

AX=B, где:

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6.4 & 5.2 & 0 & 11.1 & 6.7 & 0 \\ 0 & 5.1 & -7 & 0 & 2.4 & 0 & 8.5 & 6.7 \\ 6.5 & 4 & 4.6 & 0 & -3.7 & 3.7 & 0 & 5.7 \\ 0 & -6.7 & 1.8 & 0.9 & 0 & 6.2 & 1.9 & 3.8 \\ -3.8 & 4.7 & 2.7 & 0 & 6.7 & 3.7 & 0 & 4.9 \\ 9.4 & 0 & 4.9 & 0 & 3.6 & 5.1 & 0 & 5.7 \\ 2.8 & 0 & -1.6 & 5.7 & 0 & 4.7 & -8.7 & 0 \\ 2.5 & 0 & -4.2 & 3.3 & 0 & -6.4 & 5.1 & 9.5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 9.5 \\ 0 \\ 13.8 \\ 0 \\ -21.4 \\ 7.3 \\ 3.5 \\ 22.2 \end{pmatrix}$$

1. Решение системы методом Гаусса:

1.1. Создать расширенную матрицу A1 оператором **augment(A,B)**

$$A1 := \mathrm{augment}(A,B) \quad A1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6.4 & 5.2 & 0 & 11.1 & 6.7 & 0 & 9.5 \\ 0 & 5.1 & -7 & 0 & 2.4 & 0 & 8.5 & 6.7 & 0 \\ 6.5 & 4 & 4.6 & 0 & -3.7 & 3.7 & 0 & 5.7 & 13.8 \\ 0 & -6.7 & 1.8 & 0.9 & 0 & 6.2 & 1.9 & 3.8 & 0 \\ -3.8 & 4.7 & 2.7 & 0 & 6.7 & 3.7 & 0 & 4.9 & -21.4 \\ 9.4 & 0 & 4.9 & 0 & 3.6 & 5.1 & 0 & 5.7 & 7.3 \\ 2.8 & 0 & -1.6 & 5.7 & 0 & 4.7 & -8.7 & 0 & 3.5 \\ 2.5 & 0 & -4.2 & 3.3 & 0 & -6.4 & 5.1 & 9.5 & 22.2 \end{pmatrix}$$

1.2. Привести расширенную матрицу системы A1 к диагональному виду AG оператором **rref(A1).**

1.3. Выделить столбец решения системы оператором **submatrix(AG,0,n-1,n,n)**, где n – порядок системы

$$X := \text{submatrix}(AG,0,7,8,8) \qquad X = \begin{pmatrix} 1.759485626 \\ -0.20695481 \\ 0.69533956 \\ 2.90311525 \\ -1.522975308 \\ -1.086578342 \\ 1.351132778 \\ -0.284573347 \end{pmatrix}$$

2. Решение системы уравнений методом обратной матрицы:

2.1. Найти обратную матрицу системы оператором $\mathbf{X}^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.003 & 0.02 & -0.019 & -0.043 & -0.067 & 0.092 & 0.008 & -0.007 \\ 0.014 & 0.03 & 0.047 & -0.083 & 0.023 & -0.015 & 0.011 & -0.019 \\ 0.035 & -0.092 & 0.02 & -0.034 & 0.034 & 0.019 & -0.048 & 0.038 \\ 0.083 & -0.039 & -0.049 & -0.075 & -0.023 & 0.018 & 0.061 & 0.088 \\ 0.005 & 0.001 & -0.109 & -0.037 & 0.039 & 0.093 & -0.001 & 0.005 \\ 0.002 & 0.06 & 0.023 & 0.056 & -0.005 & -0.007 & 0.031 & -0.072 \\ 0.05 & 0.03 & -0.03 & -0.027 & -0.046 & 0.034 & -0.047 & 0.01 \\ -0.039 & -0.008 & 0.062 & 0.074 & 0.062 & -0.046 & 0.001 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$AG := \text{rref}(A1) \qquad AG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.759 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.207 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.695 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.903 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1.523 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1.087 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.351 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.285 \end{pmatrix}$$

2.2. Умножить обратную матрицу на столбец свободных членов оператором $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 1.759485626 \\ -0.20695481 \\ 0.69533956 \\ 2.90311525 \\ -1.522975308 \\ -1.086578342 \\ 1.351132778 \\ -0.284573347 \end{pmatrix}$$

3. Проверка полученных решений оператором **lsolve(A,B)** программы Mathcad:

$$soln := lsolve(A, B) \qquad soln = \begin{pmatrix} 1.759485626 \\ -0.20695481 \\ 0.69533956 \\ 2.90311525 \\ -1.522975308 \\ -1.086578342 \\ 1.351132778 \\ -0.284573347 \end{pmatrix}$$

4. Сравнительный анализ полученных в пунктах 2–3 результатов показывает их совпадение в пределах точности 10^{-9}.

<u>Примечание:</u> При представлении результатов решения системы в пп. 1.3, 2.2 и 3 увеличить количество знаков после запятой до 9. (**Format – Result…- Number of decimal place –** Установить «9»).

Приложение 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ ПРОГРАММЕ MICROSOFT EXCEL.

В отличие от метода MathCAD программирование в прикладной программе Excel производится с помощью оператора функции f_x, находящегося на панели инструментов.

Поиск значений переменных, при которых достигается экстремум целевой функции, осуществляется через пункт меню «**Сервис**», подпункт «**Поиск решения**». Если команда отсутствует, выбирите команду «**Сервис –Надстройка**» и активируйте надстройку «**Поиск решения**».

Рассмотрим решение задачи линейного программирования на примере задачи о максимальном доходе, решенной ранее несколькими способами. Прежде всего, в программе Excel заполняем таблицу начальными данными в определенном порядке.

Таблица 1

	A	B	C	D
1	X1	X2		
2				
3	7	5	f_x	
4	2	3		19
5	2	1		13
6		3		15
7	3			18

Видно, что в третьей строчке расположена целевая функция, а в последующих заполняются данные системы–ограничений. Во второй строчке располагаются ожидаемые решения, которые называются изменяемыми параметрами. Оптимизирующий результат вычислений будет находиться в клетке С3. Далее, выделяя С3, обращаемся к функции f_x и находим среди математических функций операцию сумма произведения – «суммпроизв».

Нажав клавишу «Enter», заполняем требуемые массивы. Первый массив A2: B2, заводится объединяющим движением курсора, и далее нажатием клавиши F4 переводим его из относительных величин в абсолютные. При этом появляется знак A2:B2$. Заполняем второй массив введением A3:B3. В результате в выделенной ячейке С3 появится цифра 0, так как $7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$.

Взяв курсором за правый нижний край ячейки С3 ,протянем курсор до клетки С7, включая последнюю. Везде появится цифра 0. Все готово для последующего решения. Далее нажимаем команду «**Сервис**» и в ней находим «поиск решения». На экране возникнет диалоговое окно, где надо назначить целевую ячейку С3, выбрать операцию – «максимальное значение», ввести изменяемые ячейки A2:B2 и ввести последовательно ограничения, нажимая на клавишу «добавить».

Отметим, что все записи автоматически выполняются в абсолютных ссылках, т.е. везде будет знак $. При этом записываются ячейки от С4 <= D4 до

C7<=D7 в зависимости от знака неравенства–ограничения, нажатием «добавить» заносим в диалоговое окно. Затем нажимаем клавишу «параметры» и выбираем: «линейная модель» и «неотрицательные значения».

Возвращаемся в диалоговое окно и нажимаем «выполнить» и получаем ответ.

Таблица 2

	A	B	C	D
1	X1	X2		
2	**5**	**3**		
3	7	5	**50**	
4	2	3	19	19
5	2	1	13	13
6		3	9	15
7	3		15	18

Заметим, что если у какой–либо ячейки появится черный флажок, то нажимаем «пропустить ошибку».

Рассмотрим решение транспортной задачи линейного программирования.

Составляются две вспомогательные таблицы в программе Excel. Первая таблица представляет из себя исходные данные. В первой строчке располагаются возможности базы, в последнем столбике располагаются потребности магазинов и даны стоимости соответствующих перевозок.

Таблица 1

	A	B	C	D	F
1	250	100	150	50	
2	6	6	1	4	80
3	8	30	6	5	320
4	5	4	3	30	100
5	9	9	9	9	50

Во второй таблице располагаем изменяемые ячейки со з начениями равными единице (зарезервирванно), куда будут записаны оптимальные результаты решения. Суммируем единицы по строчкам и столбцам с помощью операции суммирования $\sum$.

Таблица 2

	A	B	C	D	F
7	1	1	1	1	4
8	1	1	1	1	4
9	1	1	1	1	4
10	1	1	1	1	4
11	4	4	4	4	
13	f_x				

Назначим целевую ячейку A13 и обращаемся к функции f_x. Опять выбираем среди математических функций «суммпроизв» и вводим последовательно два массива A2;D5 и A7;D10 в относительных единицах, т.е. так как они записаны. Нажимаем команду «Enter». Очевидно, что в целевой ячейке появится значение цены всех перевозок (цены перевозок множатся на единицы и складываются), в данном примере это цифра 144. Далее нажимается «**Сервис**» и находится команда «**Поиск решения**». Заводим целевую ячейку A13, выбираем клавишу «минимальное значение», вводим изменяемые ячейки A7$:$D10. Далее вводим равенства–ограничения следующим образом A11:D11=A1:D1 (будет выглядеть как A11$:$D11=A1$D1) через знак равенства и F7:F10= F2:F5.

Кнопкой «параметры» отмечаем «линейная модель» и «неотрицательные значения» и, возвращаясь в диалоговое окно, нажимаем «выполнить».

Появляется решение транспортной задачи ЛП по оптимальной перевозке груза.

Таблица 3

	A	B	C	D	F
7	0	0	80	0	80
8	200	0	70	50	320
9	0	100	0	0	100
10	50	0	0	0	0
11	250	100	150	50	

13 3200 усл. ед. – оптимальная цена перевозки всех грузов.

Открытая модель перевозок решается приведением к закрытой модели, вводом фиктивной базы или фиктивного магазина, когда стоимости перевозок полагаются нулю.

Отметим, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи и решается аналогично, только вместо значения количества груза необходимо указывать одну единицу.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.—М.: Наука,1984.—192 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.—М.: Наука,1984.—319 с.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. —М.: Наука, 1971.—288 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. —М.: Наука,1967. —272 с.
5. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы.—М.: Наука, 1975.—160 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.—М.: Наука, 1971.— 232 с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. —М.: Наука, 1974.—296 с.
8. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра.—М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.—328 с.
9. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия.—М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.—388 с.
10. Беклемишев Л.А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.—М.: Наука, 1978.—496 с.
11. Бугров Я.С., Никольский С.М. Задачник.—М.: Наука, 1982.—192 с.
12. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. —М.: Высшая школа, 1985.—232 с.
13. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.—М.: Высшая школа, 1999. Ч.1.—304 с.
14. Ефимов Н.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа.—М.: Наука, 1986. Ч.1.—464 с.
15. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре.—М.: Наука, 1975.—320 с.
16. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.—М.: Наука, 1986.—224 с.
17. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Т.1 (под ред. Рябушко А.П.).—Минск: Высшая школа, 1982.—240 с.
18. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и ответах. —М.: Высшая школа, 1985.—120 с.
19. Шелохова Н.Л., Абалакова Л.М., Лучников В.А. Линейное программирование.—Иркутск: Изд. ИВВАИТУ (ВИ),1999.—74 с.
20. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров. (Учебное пособие).—М.: Финансы и статистика, 1999.—656 с.

Дополнительная литература.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1966.—576 с.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.—М.: Наука, 1968.—620 с.

3. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии.—М.: Высшая школа, 1972.—422 с.
4. Шевцов Г.С. Линейная алгебра.—М.: «Гардарики», 1999.—200 с.
5. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.—М.: Наука, 1984—320 с.
6. Боревич З.И. Определители и матрицы.—М.: Наука, 1988.—184 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1. Механика.—М.: Наука, 1988.—216 с.
8. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования.—М.: Наука, 1965.—276 с.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование.—Минск. Высшая школа, 2001.—352 с.
10. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию.—Минск. Высшая школа, 2001. —448 с.
11. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование.—М.: Высшая школа, 2004.—144 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Александр Алексеевич ТРУХАН,
Виктор Григорьевич КОВТУНЕНКО

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Учебное пособие

Зав. редакцией
естественнонаучной литературы *М. В. Рудкевич*
Ответственный редактор *Т. С. Спирина*
Выпускающие *Н. В. Черезова, Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д. 1, лит. А
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 20.09.17.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 26,00. Тираж 100 экз.

Заказ № 383-17.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД»
РФ, 196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, 1
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82
тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru
ICQ: 446-869-967

www.lanbook.com
пункт меню **«Где купить»**
раздел **«Прайс-листы, каталоги»**

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС»
109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85
e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ»
350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35
e-mail:lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин

Издательство «Лань»: http://www.lanbook.com

магазин электронных книг

Global F5

http://globalf5.com/