**O’ Z B E K I S T O N R E S P U B L I K A S I**

**OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**J I Z Z A X P O L I T E X N I K A I N S T I T U T I**

**Kimyoviy texnologiya fakulteti**

**«OLIY MATEMATIKA» kafedrasi**

**“OLIY MATEMATIKA” FANIDAN**

**MA’RUZA MATNI**

**Matematik analiz bo’limi bo’yicha**

**JIZZAX – 2020**

**TUZUVCHILAR:** f.m.f.n Soatov U**.**A. **,** Djonizaqov U.A.,Haydarov T.T **.** “Oliy matematika” fanidan ma’ruza matni. ( Matematik analiz bo’limi bo’yicha. **).** 108 bet.

**Taqrizchilar:**

Otaqulov S. Jizzax Politexnika instituti «Oliy matematika» kafedrasining katta o’qituvchisi, fiz-mat. fan. doktori, prof.

Shamsiyev A. Jizzax Davlat Pеdagogika instituti «Matematika o’qitish metodikasi» kafеdrasi mudiri,dotsent, iqtisod fanlari nomzodi

Jizzax politexnika institutning “Oliy matematika” kafedrasining 2020 yil 27- avgustdagi №1-sonli umumiy yig’ilishida chop etish uchun tavsiya etilgan.

Jizzax politexnika institutning

“Oliy matematika” kafedrasi mudiri: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ f-m.f.n. A.Berdiyorov.

Jizzax politexnika institutning “Oliy matematika” kafedrasining 2020 yil 28- avgustdagi №1-sonli umumiy yig’ilishida chop etish uchun tavsiya etilgan.

Jizzax politexnika institutning

“Kimyoviy texnologiya” fakulteti dekani: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ k.f.d. prof. N.Tangyariqov.

**Jizzax Politеxnika instituti, 2020**.

**3.1. HAQIQIY SONLAR**

**3.1.1. To‘plam**

*To‘plаm*mаtеmаtiкаning bоshlаng‘ich (ta‘riflanmaydigan) va muhim tushunchаlаridаn biri hisoblanadi. To‘plam deganda tаyin хоssаgа еgа bo‘lgаn iхtiyoriy tаbiаtli оb’екtlаr mаjmuаsi tushuniladi. Mаsаlаn, guruhdаgi tаlаbаlаr to‘plami, butun sоnlаr to‘plami, bеrilgаn nuqtаdаn o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlаr to‘plami.

To‘plamni tаshкil еtuvchi оb’екtlаrga to‘plаmning *еlеmеntlаri* dеyilаdi. To‘plam odatda lоtin аlfаvitining bоsh hаrflаri bilаn, uning еlеmеntlаri еsа shu аlfаvitning кichiк hаrflаri bilаn bеlgilаnаdi. ** to‘plamning **еlеmеntlаrdаn tashkil topganligi  kabi yozilаdi. Bazan to‘plam sоnlаr, bеlgilаr, so‘zlаr yoкi fоrmulаlаr yordаmidа bеriladi.

** elementning  to‘plamgа tеgishli екаnligi  deb yoziladi.  еlеmеnt- ning  to‘plamgа tеgishli еmаsligi (yoki ) каbi bеlgilаnаdi. Mаsаlаn,  to‘plаm uchun  vа 

** to‘plam chekli sondagi еlеmеntlardan tashkil topgan bo‘lsa ** to‘plamgа *chекli to‘plаm*, aks holda *chекsiz* to‘plam dеyiladi. Mаsаlаn,  chекli to‘plam,  chекsiz to‘plam bo‘ladi.

Bittа hаm еlеmеntgа еgа bo‘lmаgаn to‘plam *bo‘sh* to‘plam dеb ataladi vа Ø каbi bеlgilаnаdi. Mаsаlаn,  bo‘sh to‘plam, chunкi  tеnglаmа hаqiqiy sоnlаr to‘plami dа yеchimgа еgа еmаs.

Аgаr  to‘plamning hаr bir еlеmеnti  to‘plamning hаm еlеmеnti bo‘lsа

 to‘plamga  to‘plamning *qismi* (*qismiy**to‘plami*) dеyilаdi vа  (yoki ) каbi bеlgilаnаdi. Mаsаlаn,  vа ** bo‘lsа  bo‘lаdi.

Аgаr  vа  bo‘lsа  vа to‘plаmlаrga *tеng to‘plamlаr* dеyilаdi vа ** каbi yozilаdi. Demak, ** tеnglik  va  to‘plamlarning bir хil еlеmеntlаrdаn tаshкil tоpgаnini bildiradi.

 vа to‘plamlаrning hаr iккаlаsigа tеgishli bo‘lgаn еlеmеnt bu to‘plamlаrnng *umumiy еlеmеnti* dеyilаdi.

**1-ta’rif**.  vа  to‘plamlаrning *birlаshmаsi* (yoki *yig‘indisi*)dеb ulаrning каmidа bittаsigа tеgishli bo‘lgаn еlеmеntlаrdаn tashkil topgan to‘plamgа аytilаdi va **(yoki kabi belgilanadi. Demak, 

**2-ta’rif**.  vа to‘plamlаrning *кеsishmаsi* (yoki *ko‘paytmasi*) dеb ulаrning bаrchа umumiy еlеmеntlаridаn tashkil topgan to‘plamgа аytilаdi va **

( yoki) kabi belgilanadi. Demak, 

**3-ta’rif**. to‘plamdаn  to‘plamning *аyirmаsi* dеb to‘plamning  to‘plamgа kirmаgаn еlеmеntlаridаn tashkil topgan to‘plamgа аytilаdi va **\** kabi belgilanadi. Demak, **\**

Masalan, vato‘plamlar uchun    bo‘ladi.

to‘plam  to‘plamning qismiy to‘plami bo‘lsa **\** ayirmato‘plamning  to‘plamga *to‘ldiruvchisi* deyiladi.



*A* **\** *B*

1-shakl

1-3 ta’riflarning chizmadagi ifodasi 1-shaklda keltirilgan. Bunda ,

, **\**  shtrixlarda ko‘rsatilgan.

**3.1.2. Sonli to‘plamlar**

***Haqiqiy sonlar va ularning asosiy xossalari***

Elementlari sonlardan iborat bo‘lgan to‘plam *sonli* to‘plam deyiladi.

Sonmatematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uzoq tarixiy rivojlanish yo‘liga ega. Narsalarni, buyumlarni sanash zaruriyati tufayli natural sonlar paydo bo‘lgan. Natural sonlar to‘plamiga ularga qarama-qarshi sonlarni va nol sonini qo‘shish bilan butun sonlar to‘plami hosil qilingan. Matematikaning taraqqiyoti ratsional sonlarning va keyinchalik irratsional sonlarning kiritilishini taqozo etgan. Ratsional sonlar to‘plami va irratsional sonlar to‘plami haqiqiy sonlar to‘plami deb atalgan.

Shunday qilib,  sonli to‘plamlar hosil qilingan, bu yerda barcha natural sonlar to‘plami; barcha butun sonlar to‘plami; barcha ratsional sonlar to‘plami;  barcha haqiqiy sonlar to‘plami.

Har qanday ratsional son yoki chekli o‘nli kasr bilan yoki cheksiz davriy o‘nli kasr bilan ifodalanadi. Masalan,  ratsional sonlar.

Ratsional bo‘lmagan haqiqiy sonlarga irratsional sonlar deyiladi. Irratsional son cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasr bilan ifodalanadi. Masalan,  irratsional sonlar.

Shunday qilib, *haqiqiy sonlar*to‘plaminibarcha cheksiz o‘nli kasrlar to‘plami deyish va  kabi yozish mumkin, bu yerda 

Haqiqiy sonlar to‘plami  quyidagi asosiy xossalarga ega bo‘ladi.

  to‘plam tartiblangan to‘plamdir, ya’ni istalgan ikkita har xil  va  sonlar uchun  (yoki ) tengsizlik bajariladi.

  to‘plam zichdir, ya’ni istalgan ikkita har xil  va  sonlar orasida  tengsizlikni qanoatlantiruvchi cheksiz ko‘p  haqiqiy sonlar mavjud bo‘ladi;

  to‘plam uzluksizdir.

***Sonlarning sodda to‘plamlari***

Haqiqiy sonlarning uzluksizligi xossasi asosida barcha haqiqiy sonlar to‘plami bilan to‘g‘ri chiziq nuqtalari to‘plami orasida bir qiymatli moslik o‘rnatiladi.

Buning uchun biror to‘g‘ri chiziqda (u gorizontal yo‘nalgan bo‘lsin (2-shakl)) musbat yo‘nalishni,  hisob boshini va masshtab birligini tanlaymiz. Musbat sonini ifodalash uchun bu to‘g‘ri chiziqda  hisob boshidan o‘ng tomonda tanlangan masshtab birligida berilgan  songa teng masofada yotuvchi  nuqtani olamiz; manfiy sonini ifodalash uchun esa bu to‘g‘ri chiziqda  hisob boshidan chap tomonda  songa teng masofada yotuvchi  nuqtani olamiz;  soniga

2-shakl



**.**



**.**



hisob boshi mos keladi.

Barcha nuqtalari uchun barcha haqiqiy sonlar to‘plami bilan ko‘rsatilgan bir qiymatli moslik o‘rnatilgan to‘g‘ri chiziqqa *son o‘qi* (yoki *sonli to‘g‘ri chiziq*) deyiladi.

Shunday qilib har bir haqiqiy songa son o‘qining yagona nuqtasi mos qo‘yiladi va aksincha, bu son o‘qining har bir nuqtasiga yagona  haqiqiy son mos keladi. Bunda haqiqiy son va son o‘qining nuqtasi bitta belgi bilan ifodalanadi. Shu sababli « son» so‘zi o‘rniga ko‘p hollarda «nuqta» so‘zi ishlatiladi.

Son o‘qi haqiqiy sonlarning joylashishi to‘g‘risida ko‘rgazmali ma’lumot beradi.  tengsizlik  nuqta nuqtaga nisbatan chapda yotishini anglatadi,  tengsilik  nuqta  va  nuqtalar orasida yotishini bildiradi.

 bo‘lsin. Haqiqiy sonlar to‘plamining quyidagi qism

to‘plamlariga *oraliqlar* (*intervallar*)deyiladi:

kesma (yopiq oraliq, sigment);

interval (ochiq oraliq);

, yarim ochiq intervallar;

    cheksiz intervallar. Bunda  va  sonlar mos ravishda bu oraliqlarning chap va o‘ng chegaralarini aniqlaydi, va  belgilar son o‘qi nuqtalarining nuqtadan chapga va o‘ngga qarab cheksiz uzoqlashishini simvolik tasvirlaydi.

nuqtani o‘z ichiga olgan har qanday intervalga * nuqtaning atrofi* deyiladi. Xususan,  interval * nuqtaning  atrofi*deb ataladi. Bunda ** soniga bu atrofning markazi,  soniga bu atrofning radiusi deyiladi.

Agar bo‘lsa, u holda  yoki  tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikning bajarilishi  nuqta ** nuqtaning  atrofiga

tushishini bildiradi.

***Sonli to‘plamning aniq chegaralari***

**5-ta’rif**. Agar shunday soni topilsaki istalgan uchun  tengsizlik bajarilsa,  haqiqiy sonlar to‘plami *yuqoridan chegaralangan* deyiladi.

Masalan,  to‘plam yuqoridan chegaralangan.

**6-ta’rif**. Agar shunday  soni topilsaki istalgan uchun  tengsizlik bajarilsa,  haqiqiy sonlar to‘plami *quyidan chegaralangan* deyiladi.

Masalan, barcha natural sonlar to‘plami quyidan chegaralangan.

**7-ta’rif**. Agar to‘plam ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, y’ani shunday  va  sonlari topilsaki istalgan  uchun  tengsizlik bajarilsa,  haqiqiy sonlar toplamiga *chegaralangan* deyiladi.

Bu ta’rifdan agar  to‘plamning elementlari biror kesmada joylashsa, u holda bu to‘plam chegaralangan bo‘ladi degan xulosa kelib chiqadi.

Yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan to‘plamga *yuqoridan* (*quyidan*) *chegaralanmagan* deyiladi. Masalan, barcha natural sonlar to‘plami yuqoridan chegaralanmagan (ammo quyidan chegaralangan) bo‘lsa, barcha manfiy sonlar to‘plami quyidan chegaralanmagan (ammo yuqoridan chegaralangan). Barcha butun sonlar to‘plami, barcha ratsional sonlar to‘plami, shuningdek, barcha haqiqiy sonlar to‘plami yam quyidan va ham yuqoridan chegaralanmagan.

**3.2. SONLI KETMA - KETLIKLAR**

**3.2.1. Sonli ketma-ketliklar**

**1-ta’rif**.  natural sonlar qatorining har bir  natural soniga mos qo‘yilgan  haqiqiy sonlar to‘plamiga *sonli ketma-ketlik* (yoki *ketma-ketlik*) deyiladi va bilan belgilanadi.

Bunda  sonlar ketma-ketlikning hadlari,  bu ketma-ketlikning ymymiy hadi,  uning nomeri deb ataladi.

Agar ketma-ketlikning har bir hadini topish mumkin bo‘lsa, ketma-ketlik berilgan deyiladi. Ketma-ketlik analitik yoki rekurrent usullarda berilishi mumkin.

*Analitik usul*da ketma-ketlikning umumiy hadi formula ko‘rinishida beriladi. Bunda  ga  qiymatlar beriladi va ketma-ketlikning mos hadlari topiladi. Masalan,  tenglik  ketma-ketlikni beradi.

*Rekurrent usul*da ketma-ketlikning birinchi (yoki bir nechta birinchi) hadi beriladi va keyingi hadni (yoki bir nechta keyingi hadlarni) birinchi (yoki bir nechta birinchi) had asosida topish formulasi beriladi. Masalan,  rekurrent formula arifmetik progressiyani,  rekurrent formula geometrik progressiyani beradi.

Agar  uchun () bo‘lsa,  ketma-ketlikka *o‘zgarmas ketma-ketlik* deyiladi.

**2-ta’rif**. Agar shunday soni ( soni) topilsaki,  uchun  () tengsizlik bajarilsa,  ketma-ketlikka *yuqoridan chegaralangan* (*quyidan chegaralangan*) deyiladi.

**3-ta’rif**. Agar  ketma-ketlik ham quyidan hamyuqoridanchegaralangan bo‘lsa, y’ani shunday  va  sonlari topilsaki,  uchun  tengsizlik bajarilsa,  ketma-ketlikka *chegaralangan* deyiladi.

bo‘lsin. U holda ketma-ketlikning chegaralanganlik shartini  ko‘rinishda yozish mumkin.

**4-ta’rif**. Agar  son uchun  ketma-ketlikning  (yoki  yoki ) tengsizlikni qanoatlantiruvchi hadi topilsa,  ketma-ketlikka*chegaralanmagan* deyiladi.

Ta’riflardan ko‘rinadiki, ketma-ketlikning barcha elementlari: u yuqoridan chegaralangan bo‘lsa  oraliqqa, u quyidan chegaralangan bo‘lsa  oraliqqa, u ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa  oraliqqa tegishli bo‘ladi. Chegaralanmagan ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lishi mumkin.

Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklarga misollar keltiramiz.

1. quyidan chegaralangan, ammo yuqo-ridan chegaralanmagan ().

2. yuqoridan chegaralangan, ammo quyidan chegaralanmagan .

3. chegaralangan .

4. chegaralanmagan.

**5-ta’rif**. Agar uchun:  bo‘lsa, ** ketma-ketlikka *qat‘iy o‘suvchi*deyiladi;  bo‘lsa, ** ketma-ketlikka *qat‘iy kamayuvchi* deyiladi;  bo‘lsa, ** ketma-ketlikka *kamaymaydigan* deyiladi;  bo‘lsa, ** ketma-ketlikka o‘*smaydigan*  deyiladi.

Barcha bunday ketma-ketliklar umumiy *monoton ketma-ketlik* nomi bilan birlashtiriladi. Bunda o‘suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklarga *qat‘iy monoton*ketma-ketliklar deyiladi.

Monoton ketma-ketliklarga misollar keltiramiz.

1.  o‘suvchi va chegaralangan ketma-ketlik.

2. kamaymaydigan va chegaralanmagan ketma-ketlik.

3.  kamayuvchi va chegaralangan ketma-ketlik.

4. o‘smaydigan va chegaralangan ketma-ketlik.

Ikkita  va  ketma-ketlikning *yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi, bo‘linmasi* (bunda deb, har bir hadi by ketma-ketliklar mos hadlarining yig‘indisidan, ayirmasidan, ko‘paytmasidan va bo‘linmasidan iborat bo‘lgan ketma-ketlikka aytiladi.

Ko‘rsatilgan amallar simvolik tarzda quyidagicha yoziladi:

 

 

Xususan,  ketma-ketlikning  songa ko‘paytmasi deb, har bir hadi  ketma-ketlik mos hadining shu songa ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan

 ketma-ketlikka aytiladi.

**3.2.2. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar**

**6-ta’rif**. Agar  son uchun shunday nomer topilsaki,  uchun  tengsizlik bajarilsa,  ketma-ketlikka *cheksiz katta*ketma-ketlik deyiladi.

Har qanday cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘ladi. Ammo chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta bo‘lmasligi mumkin. Masalan,  shunday ketma-ketliklardan biridir.

**7-ta’rif**. Agar  son uchun shunday  nomer topilsaki,  uchun  tengsizlik bajarilsa,  ketma-ketlikka *cheksiz kichik*

ketma-ketlik deyiladi.

*Misol*

 ketma-ketlik cheksiz kichik ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun  son olamiz. tengsizlikdan tengsizlik kelib chiqadi. , ya’ni  ning butun qism, desak,  uchun  bo‘ladi. Demak, ta’rifiga ko‘ra ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

Keltirilgan misolda nomer ga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni  ning turli

qiymatida har xil qiymatlarga ega bo‘ladi. Masalan,  da   da . Shu sababli cheksiz kichik ketma-ketlikning ta’rifida  deb

yozilgan.

**1-teorema**. Agar **** ketma-ketlik cheksiz katta va  bo‘lsa, u holda  ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi, va aksincha **** cheksiz kichik va bo‘lsa,  cheksiz katta bo‘ladi.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

***1-xossa****.*Ikkita (chekli sondagi) cheksiz kichik ketma-ketlikning algebraik yig’indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

***2-xossa****.*Ikkita (chekli sondagi) cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

***3-xossa****.*Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo’ladi.

***4-xossa****.* Cheksiz kichik ketma-ketlikning chekli songa ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo’ladi.

Xossalardan biriniisbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

*3-xossaning isboti.*  chegaralangan ketma-ketlik,  cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsin.  ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ishini isbotlash kerak.

 ketma-ketlik chegaralangan. Shu sababli shunday  son topiladiki,  had uchun  bo‘ladi.

 son olamiz. cheksiz kichik bo‘lgani sababli  son uchun shunday  nomer topiladiki,  uchun  bo‘ladi. U holda da  bo‘ladi.

Demak,  cheksiz kichik ketma-ketlik.

**3.1.3. Ketma-ketlikning limiti**

**8-ta’rif**. Agar  son uchun shunday nomer topilsaki,  uchun  tengsizlik bajarilsa,  o‘zgarmas songa  *ketma-ketlikning*

*limiti* deyiladi va  kabi yoziladi

*Misol*

 bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun  olamiz. Misolning shartidan topamiz:



 tengsizlikni qanoatlantiruvchi  ning qiymatlarini topish uchun

 tengsizlikni yechamiz: 

 nomer sifatida  sonining butun qismini, ya’ni  sonini olish mumkin. Bunda  son olinganda ham  uchun  bo‘ladi. U holda ketma-ketlik limitining ta’rifiga asosan

.

Ma’lumki,  tengsizlik  had  nuqtaning atrofiga tushishni bildiradi.

Shu sababli ketma-ketlikning limiti ta’rifini quyidagicha talqin qilish mumkin: agar bo‘lsa, u holda nuqtaning istalgan  atrofi uchun shunday  nomer topiladiki,  no-merli barcha  nuqtalar  nuqtaning  atrofiga, ya’ni  intervalda yotadi va bu intervaldan tashqarida berilgan ketma-ketlikning chekli sondagi nuqtalari joylashishi mumkin (3-shakl). Bu jumla ketma-ketlik *limitining*



3-shakl



*geometrik ma’nosini* anglatadi.

**3.1.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar**

**9-ta’rif**. Ghekli limitga ega bolgan ketma-ketlikka *yaqinlashuvchi* ketma-ketlik deyiladi.

Yaqinlashuvchi bo‘lmagan ketma-ketlikka *uzoqlashuvchi* ketma-ketlik deyiladi.

 ketma-ketlik yaqinlashuvchi va  limitga ega bo‘lsin. U holda  cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi, chunki  son uchun shunday  nomer topiladiki,  uchun  bo‘ladi. Shu sababli yaqinlashuvchi va  limitga ega bo‘lgan ixtiyoriy  ketma-ketlikning umumiy hadini  ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi va aksincha,  ketma-ketlikning istalgan hadini  ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda  bo‘ladi, bu yerda  cheksiz kichik ketma-ketlik.

Shunday qilib, cheksiz kichik ketma-ketlikning limiti nolga teng bo‘ladi. Cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega bo‘lmaydi. Uning limiti  deb belgilanadi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

***1-xossa****.* Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo‘ladi.

***2-xossa****.* Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi.

***3-xossa****.*Agar  va ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va  bo‘ladi.

***4-xossa****.* Agar  va ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va bo‘ladi.

***5-xossa****.*Agar va  yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va  bo‘lsa, u holda  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va  bo‘ladi.

***6-xossa****.*Agar  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda  () bo‘ladi.

***7-xossa****.*Agar  va  yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va  uchun   bo‘lsa, u holda  () bo‘ladi.

***8-xossa****.*Agar  va  yaqinlashuvchi ketma-ketliklar,  va uchun  bo‘lsa, u holda  bo‘ladi.

Xossalardan biriniisbotini keltirish bilan chegaralanamiz.

*3-xossaning isboti.*  bo‘lsin. U holda  va  bo‘ladi, bu yerda – cheksiz kichik ketma-ketliklar. Bundan kelib chiqadi.

Cheksiz kichik ketma-ketlikning 1-xossasiga asosan  cheksiz kichik ketma-ketlik. Shu sababli  ketma-ketlik  limitga ega bo‘ladi, ya’ni

.

*Misol*

 ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanini ko‘rsatamiz.

Birinchidan da.

Ikkinchidan  da.

  belgilash kiritamiz. Bunda  va  uchun  bo‘ladi.

U holda  xossaga ko‘ra  ya’ni berilgan ketma-ketlik

yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo‘lmaydi. Ketma-ketlik limiti mavjud bo‘lishi haqidagi teorema bilan tanishamiz.

**2-teorema** (*Veershtrass teoremasi*). Har qanday monoton chegaralangan ketma-ketlik limitiga ega bo‘ladi.

*Izoh.* Monoton ketma-ketlikning chegaralanganligi uning yaqinlashuvchi

bo‘lishining zarur va yetarli shartini beradi.

Haqiqatdan ham, agar monoton ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, u holda 2-teoremaga ko‘ra u yaqinlashadi; agar monoton ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, yaqinlashuvchi ketma-ketlikning 2-xossasiga asosan u chegaralangan bo‘ladi.

2- teoremadan ichma-ich qo‘yilgan kesmalar haqidagi lemma kelib chiqadi.

…kesmalar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, bunda har bir keyingi kesma o‘zidan oldingi kesmning ichiga joylashgan: 

… , ya’ni barcha  lar uchun  bo‘lsin va

 bo‘lsin. Bu kesmalarga ichma-ich qo‘yilgan kesmalar deyiladi.

**Lemma** (*Kantor lemmasi*). Ixtiyoriy ichma-ich qo‘yilgan kesmalar ketma-ketligi uchun bu ketma-ketlikning har biriga tegishli bo‘lgan  nuqta mavjud va yagona bo‘ladi.

Bu lemma haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizligi yoki son o‘qining to‘laligi haqidagi muhim xossani ifodalaydi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalari va limitlar haqidagi teoremalar nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhim ahamiyatga ega. Ulardan, masalan, ketma-ketliklarning limitini hisoblashda keng foydalaniladi.

*Izoh.* Limitlarni hisoblashda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalaridan keltirib chiqarilgan quyidagi o‘tish formulalari qo‘llaniladi:

 

 

*Misollar*

1.  limitni topamiz. Bu kasrning surati va maxrajidagi ketma-ketliklar limitga ega emas, chunki ular chegaralanmagan. U holda bo‘linmaning limiti haqidagi 5-xossani qo‘llab bo‘lmaydi. Bu xossani qo‘llash uchun avval ketma-ketlikning surat va maxrajini  ga bo‘lamiz va keyin yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalarini qo‘llaymiz:



Keyingi limitlarni topishda avval ketma-ketlikning xossalarini qo‘llashga olib

keluvchi almashtirishlar bajaramiz, so‘ngra xossalarni qo‘llaymiz:

 



3. 







ketma-ketlik cheksiz katta. Shu sababli  ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi. Bundan

.

Demak, 

4. 





**3.2.5.  soni**

 ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlik uchun (14.1) Nuyton binomi formulasini  da qo‘llaymiz:



yoki

 (3.2.1)

(3.2.1) tenglikdan ko‘rinadiki,  ning o‘sishi bilan uning o‘ng tomonida musbat qo‘shiluvchilar soni ortib boradi. Bundan tashqari  ning o‘sishi bilan  kamayadi va  kattaliklar ortadi. Shu sababli  ketma-ketlik monoton o‘suvchi bo‘1adi.

(3.2.1) tenglikka ko‘ra  (3.2.2)

(3.2.1) tenglikda qavs ichidagi har bir ifoda birdan kichik va shu bilan birga  da  bo‘ladi. Bundan

 (3.2.3)

kelib chiqadi.

Demak, (3.2.2) va (3.2.3) tengsizliklarga ko‘ra , ya’ni chgaralangan.

Shunday qilib,  ketma-ketlik monoton o‘suvchi va chegaralangan.

U holda Veershtrass teoremagasiga ko‘ra u yaqinlashadi, ya’ni chekli limitga ega bo‘ladi. Bu limitni  harfi bilan belgilaymiz.

Demak,  (3.2.4)

 soniga *Neper soni* deyiladi. soni irrarsional son.  soni matematikaning bir qancha masalalarida muhim rol o‘ynaydi.  soni, masalan, natural logarifmlarning asosi bo‘ladi:  sonining natural logarifmi  bilan belgilanadi. Bu paragrafda  soniga faqat ta’rif berildi va u  tengsizlikni qanoatlantirishi ko‘rsatildi. Keyinchlik  sonining qiymatini istalgan aniqlikda topish usullari ko‘rsatiladi.

*Izoh.* (3.24) formula umuman olganda  da cheksizlikka intiluvchi  funksiyalar uchun o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

 bu yerda  da . (3.2.5)

*Misol*

 limitni topamiz:

.

 deb olsak,  da  Shu sababli ichki qavs uchun (3.2.5) va o‘tish formulalarini hamda tashqi qavs uchun yaqinlashuvchi ketma- ketlikning ******xossasini qo‘llab, topamiz:



**3.3. BIR O‘ZGARUVCHINING FUNKSIYASI**

**3.3.1. Funksiya**

Ikki to‘plan elmentlari orasidagi bog‘lanishni o‘rnatishga asoslangan funksiya tushunchasi matematik analiz kursida o‘rganilsada, nafaqat bu kursning, balki butun matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

***Funksiya tushunchasi***

Ikkita bo‘sh bo‘lmagan  va  to‘plamlar berilgan bo‘lsin.  funksiya deb shunday  tartiblangan juftliklar to‘plamiga aytiladiki, bunda ,  bo‘ladi va har bir  bu to‘plamning faqat bitta jufligiga kiradi, har bir  esa bu to‘plamning hech bo‘lmaganida bitta juftligiga kiradi.  funksiya  yoki  kabi yoziladi. Bunda elementga element mos qo‘yilgan deyiladi yoki boshqacha  funksiya to‘plamni  to‘plamga akslantiradi deb aytiladi.

to‘plam  *funksiyaning aniqlanish sohasi* deb ataladi va bilan belgilanadi. Barcha  elementlar to‘plamiga  *funksiyaning qiymatlar sohasi* deyiladi va  bilan belgilanadi.

 funksiya berilgan bo‘lsin. Umuman aytganda  va  to‘plamlarning elementlari ixtiyoriy ob’ektlardan iborat bo‘lishi mumkin.

Agar  va  to‘plamlarning elementlari haqiqiy sonlardan iborat, ya’ni  bo‘lsa, funksiyaga *sonli funksiya*deyiladi. Bunda  *argument* yoki *erkli o‘zgaruvchi*,  *funksiya* yoki *bog‘liq o‘zgaruvchi* ( ga) deb ataladi; va  o‘zgaruvchilar funksional bog‘lanishga ega deyiladi; Funksional bog‘lanish ba’zan  kabi belgilanadi.

 *funksiyaning dagi* *xususiy qiymati*  yoki

4-shakl



**.**



**.**

 kabi belgilanadi. Masalan,  bo‘lsa, 

*Misol*

 funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz. Bunda logarifm

ostidagi ifoda musbat, ya’ni  bo‘lishi kerak. Bundan 

*Misol*

 funksiyaning qiymatlar sohasini topamiz. Bunda  va da  ekanidan ning barcha qiymatlarida   bo‘lgani uchun 

* funksiyaning grafigi* deb  koordinatalar tekisligining abssissasi  argumentning qiymatlaridan va ordinatasi  funksiyaning mos qiymatlaridan tashkil topgan barcha  nuqtalari to‘plamiga aytiladi. Funksiyaning grafigi tutash chiziqdan (egri chiziqdan yoki to‘g‘ri chiziqdan) iborat bo‘lishi yoki ayrim nuqtalardan tashkil topishi mumkin,

***Funksiyaning berilish usullari***

Funksiyaning berilishi, ya’ni har bir ga mos yagona ni topish usuli turlicha bo‘lishi mumkin. Amalda funksiya berilishining analitik, jadval va grafik usullari ko‘p qo‘llaniladi.

*Analitik usul*da  va  o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish bir yoki bir nechta formula yoki tenglamalar orqali beriladi.

Masalan, 

5-shakl



Agar formulada funksiyaning aniqlanish sohasi ko‘rsatilmagan bo‘lsa  sifatida argumentning sunday qiymatlari to‘plami tushuniladiki, bu qiymatlarda berilgan funksiya ma’noga ega bo‘ladi va haqiqiy qiymatlarni beradi.

*Jadval usuli*da va  o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish jadval orqali beriladi.Masalan, logorifmik fuksiyalarning, trigonometrik fuksiyalarning jadvallari.

Amalda jadval bilan funksiyaning kuzatish natijalari yoki tajribada olingan qiymatlari beriladi.

*Grafik usuli*da fuksiyaning grafigi beriladi. Ko‘p hollarda grafik o‘zi yozar asboblar yoki displey ekranlarida tasvirlangan bo‘ladi. Bunda funksiyaning argumentning u yoki bu qiymatlariga mos qiymatlari bevosita shu grafikdan topiladi.

***Funksiyaning monotonligi***

 funksiya  to‘plamda aniqlangan va  bo‘lsin.

**1-ta’rif**. Agar  uchun bo‘lganda  tengsizlik bajarilsa,  funksiyaga  to‘plamda *o‘suvchi*(*kamayuvchi*) deyiladi.

**2-ta’rif**. Agar  uchun  bo‘lganda 

tengsizlik bajarilsa,  funksiyaga  to‘plamda

*Kamaymaydigan* (o*’smaydigan*) deyiladi.

Masalan, grafigi 5-shaklda berilgan funksiya intervalda kamayuvchi, intervalda kamaymay-digan,  intervalda o‘suvchi.

Barcha bunday funksiyalar *monoton funksiya* nomi bilan umumlashtiriladi. Bunda o‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarga *qat‘iy monoton* funksiyalar deyiladi.

Funksiya monoton bo‘lgan intervallar *monotonlik intervallari* deb ataladi.

Misol

 funksiyaning monotonlik intervallarini va eng kichik qiymatini topamiz. Buning uchun  belgilash kiritamiz:



Bu funksiya  intervalda manfiy,  intervalda o‘sadi va  intervalda kamayadi.

U holda  funksiya intervalda kamayadi va 

intervalda o‘sadi. Bunda 

***Funksiyaning juft va toqligi***

 funksiya  to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

Agar  uchun  va bo‘lsa  funksiyaga *juft funksiya* deyiladi. Masalan,  juft funksiyalar. Juft funksiya-ning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Agar  uchun  va bo‘lsa  funksiyaga *toq funksiya* deyiladi. Masalan,  toq funksiyalar. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Juft yoki toq bo‘lmagan funksiya umumiy ko’rinishdagi funksiya deb ataladi.

Masalan,  umumiy ko‘rinishdagi funksiyalar.

va  funksiyalar juft funksiyalar bo‘lsa

, , ,  funksiyalar ham juft bo‘ladi.

va  funksiyalar toq funksiyalar bo‘lsa  

funksiyalar toq bo‘ladi,

,  funksiyalar esa juft bo‘ladi.

*Misol*

 funksiya toq ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun berilgan funksiya uchun  yoki  bo‘lishini tekshirib ko‘ramiz:



 Demak, funksiya toq.

***Funksiyaning chegaralanganligi***

 funksiya  to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

**3-ta’rif**. Agar shunday o‘zgarmas soni topilsaki, uchun  tengsizlik bajarilsa  fuksiya to‘plamda *yuqoridan chegaralangan* deyiladi.

**4-ta’rif**. Agar shunday o‘zgarmas  soni topilsaki, uchun  tengsizlik bajarilsa  fuksiya  to‘plamda *quyidan chegaralangan* deyiladi.

**5-ta’rif**. Agar funksiya ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, y’ani shunday o‘zgarmas  va  sonlari topilsaki,  uchun  tengsizlik bajarilsa  funksiya  to‘plamda *chegaralangan* deyiladi.

Masalan,  funksiya yuqoridan  soni bilan chegaralangan,  funksiya quyidan  soni bilan chegaralangan,  funksiya

qo‘yidan  soni bilan, yuqoridan  soni bilan chegaralangan.

***Funksiyaning davriyligi***

 funksiya  to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

**6-ta’rif**. Agar shunday o‘zgarmas  son topilsaki uchun   bo‘lsa, funksiyaga *davriy funksiya*deyiladi. Bunda  larning eng kichik musbat qiymati  ga  *funksiyaning*

*davri*deyiladi.

Masalan,  funksiyaning davri ga,  funksiyaning davri ga

teng.

*Misollar*

1. davrini topamiz.  funksiyaning davri  bo‘ladi. Bundan .

2.  davrini topamiz. Bunda  va  funksiyalarning davrlari mos ravishda  va . U holda  funksiyaning davri  va sonlarining eng kichik umumiy karralisiga teng bo‘ladi, ya’ni 

**3.3.2. Teskari funksiya**

Aniqlanish sohasi  va qiymatlar sohasi  bo‘lgan  funksiya berilgan bo‘lsin. Agar bunda har bir  qiymatga yagona  qiymat mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda aniqlanish sohasi  va qiymatlar sohasi bo‘lgan  funksiya aniqlangan bo‘ladi. Bu funksiya  ga *teskari funksiya* deb ataladi va  kabi belgilanadi.

 va  funksiyalar *o‘zaro teskari funksiyalar* deyiladi. Bunda  funksiyaga teskari  funksiyani topish uchun  tenglamani ga nisbatan yechish (agar mumkin bo‘lsa) yetarli. Masalan,  funksiyaga teskari funksiya  funksiya bo‘ladi.  funksiyaga da teskari funksiya mavjud,  da esa mavjud emas, chunki bunda  ning har bir qiymatiga  ning ikkita qiymati, masalan,  ga  mos keladi.

Teskari funksiya ta’rifiga ko‘ra  va  to‘plamlar o‘rtasida bir qiymatli moslik o‘rnatilsagina  funksiya teskari funksiyaga ega bo‘ladi. Bundan *har qanday qat’iy monoton funksiya teskari funksiyaga ega bo’ladi* deyish mumkin bo‘ladi. Bunda agar funksiya o‘ssa (kamaysa), u holda unga teskari funksiya ham o‘sadi (kamayadi).



6-shakl

**.**

**.**

 va unga teskari  funksiyalar bitta egri chiziq bilan ifodalanadi’ ya’ni ularning grafigi ustma-ust tushadi. Odatdagidek argument (erkli o‘zgaruvchi)  bilan va funksiya (bog‘liq o‘zgaruvchi)  bilan belgilansa,  funksiyaga teskari funksiya deb yoziladi. Bu  egri chiziqning  nuqtasi  egri chiziqning nuqtasi bo‘lishini bildiradi, ammo bu nuqtalar  to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi (6-shakl). Shu sababli *o‘zaro teskari  va  funksiyalarning grafiklari va  choraklar koordinata burchaklarining bissektrisalariga nisbatan simmetrik*  bo‘ladi.

*Misol*

 funksiyaga teskari funksiyani topamiz.  bo‘lgani sababli berilgan funksiya intervalda aniqlangan. Bu funksiya uchun , ya’ni funksiya toq. Funksiya  da o‘sadi. Demak, berilgan funksiya da qat’iy monoton va unga teskari funksiya mavjud.

 desak,  bo‘ladi. Bu tenglikni ga nisbatan yechamiz:

, (chunki funksiya toq).

Bundan  yoki .

**3.3.3. Murakkab funksiya**

 to‘plamda qiymatlar sohasi  bo‘lgan funksiya aniqlangan bo‘lsin. Agar  to‘plamda  funksiya aniqlangan bo‘lsa, u holda  to‘plamda  *murakkab funksiya* (yoki va  funksiyalarning superpozitsiyasi) aniqlangan deyiladi.

o‘zgaruvchi *murakkab* *funksiyaning oraliq argumenti* deb ataladi. Murakkab funksiyaning oraliq argumentlari bir nechta bo‘lishi ham mumkin.

Masalan,  murakkab funksiya, chunki u  va  funksiyalarning superpozitsiysidan iborat.

**3.3.4. Elementar funksiyalar sinfi**

Quyida keltirilganfunksiyalarga*asosiy**elementar funksiyalar* deyiladi.

1. ***O‘zgarmas funksiya ***(******).

O‘zgarmas funksiya: dan,  dan iborat, chegaralangan, juft, davri ixtiyoriy  O‘zgarmas funksiyaning grafigi abssissalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

2. ***Darajali funksiya ***, bunda ******

Darajali funksiyaning hamma grafiklari  nuqtadan o‘tadi.

1) , butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi koordinatalar boshida abssissalar o‘qiga urunadi ( da);  juft son bo‘lganda ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik,  toq son bo‘lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (7-shakl). da *va * choraklar koordinata burchaklari bissektrisalarining grafigini ifodalaydi (7-shakl).



7-shakl



**.**



8-shakl



**.**



2) , butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi  juft son bo‘lganda ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik,  toq son bo‘lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (8-shakl). da teskari proporsional bog‘lanish grafigini ifodalaydi (8-shakl).



**.**



10-shakl



11-shakl



**.**



9-shakl



**.**

3) , va o‘zaro tub butun sonlar. Bunda  juft son bo‘lganda , toq son bo‘lganda . Funksiyaning grafigi  toq va  juft son bo‘lganda ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik (9-shakl),  va  toq sonlar bo‘lgnida koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (10-shakl). da grafik koordinatalar boshida ordinatalar o‘qiga urunadi(9,10-shakl), da grafik koordinatalar boshida abssissalar o‘qiga urunadi (11-shakl).

12-shakl



**.**



13-shakl

**.**



4) , va o‘zaro tub butun sonlar, . Bunda  juft son

bo‘lganda (12-shakl),  toq son bo‘lganda . Funksiyaning grafigi  toq va  juft son bo‘lganda ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik,  va toq sonlar bo‘lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (13-shakl).

3. ***Ko‘rsatkichli funksiya***  bunda 

Ko‘rsatkichli funksiya: dan, dan iborat; da monoton o‘suvchi, da monoton kamayuvchi.

Ko‘rsatkichli funksiyaning grafiklari  nuqtadan o‘tadi.

Ko‘rsatkichli funksiyaning uchun va uchun grafiklari

14-shaklda keltirilgan.

4. ***Logaifmik funksiya*** , bunda 

Logarifmik funksiya:  dan,  dan iborat; da monoton o‘suvchi, da monoton kamayuvchi; gateskari funksiya.

Logarifmik funksiyaning grafiklari  nuqtadan o‘tadi.

Logarifmik funksiyaning uchun va uchun grafiklari 15-shaklda keltirilgan.



14-shakl



15-shakl



5. ***Trigonometrik funksiyalar***:

  dan,  dan iborat, chegaralangan,

toq, davri (3.3-shakl);



16-shakl



17-shakl



 dan,  dan iborat, chegaralangan, juft, davri (3.3-shakl);

  dan,  dan iborat, toq, davri (17-shakl);

 dan, dan iborat, toq,

davri (17-shakl).

6. ***Teskari trigonometrik funksiyalar***:

19-shakl



18-shakl



 dan, dan iborat, chegaralangan, toq, monoton o‘suvchi (18-shakl);

  dan,  dan iborat, chegaralangan, monoton kamayuvchi(19-shakl);

 dan, dan iborat, toq, monoton o‘suvchi (20-shakl);

dan, oraliqdan iborat, monoton kamayuvchi(21-shakl).



21-shakl



20-shakl

Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish) va superpozitsiyalash yordamida hosil qilingan bitta formula bilan berilgan funksiyaga*elementar funksiya*deyiladi.

Masalan, ushbu   funksiyalar elementar funksiyalar bo‘ladi.

*Elementar bo‘lmagan funksiyalar*ga quyidagi funksiyalar misol bo‘ladi:

 

.

**3.3.5. Oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalar**

****funksiyaning oshkor ko‘rinishdagi berilishi hisoblanadi. Shuningdek, ayrim hollarda funksiyaning oshkormas ko‘rinishidan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Funksiya to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Agar har bir elementga mos qo‘yilgan yagona funksiya qandaydir  tenglamani qanoatlantirsa, *funksiya  tenglama bilan oshkormas berilgan* deb ataladi. Bunda funksiyaga oshkormas funksiya deyiladi. Oshkormas funksiyaning grafigi deb

koordinatalar tekisligining tenglamani qanoatlantiruvchi

barcha nuqtalari to‘plamiga aytiladi.

 to‘plamda ikkita  va funksiyalar berilgan bo‘lsin.

U holda  koordinatalar tekisligining koordinatalari  bo‘lgan barcha nuqtalari to‘plamiga parametrik ko‘rinishda berilgan chiziq(egri chiziq yoki to‘g‘ri chiziq)deyiladi. Bunda  parametr deb ataladi.

Agar parametrik ko‘rinishda berilgan chiziq ****funksiyaning grafigini ifodalasa, bu funksiyaga *parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya* deyiladi.

**3.4. FUNKSIYANING LIMITI**

**3.4.1. Funksiyaning limiti**

***Funksiya limitining ta’riflari***

Biror haqiqiy sonlar toplami berilgan bo‘lsin.

**1- ta’rif**.Agar ** nuqtaning ixtiyoriy  atrofida  toplamning cheksiz ko‘p elementlari yotsa, ** nuqtaga  toplamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Masalan, ,  to‘plam uchun  limit nuqta bo‘ladi.

 funksiya  toplamda aniqlangan bo‘lib, ** nuqta  toplamning limit nuqtasi bo‘lsin.

**2- ta’rif** (*funksiya limitining «ketma-ketlik tilidagi» yoki Geyne ta’rifi*). Agar  toplamning nuqtalaridan tuzilgan  nuqtaga yaqinlashuvchi har qanday  ketma - ketlik () olinganda ham, mos  ketma- ketlik hamma

vaqt yagona  limitga intilsa ,  soniga  funksiyaning * nuqtadagi* yoki

* dagi limiti* deyiladi va  deb yoziladi.

**3- ta’rif** (*funksiya limitining « tilidagi» yoki Koshi ta’rifi*). Agar  son uchun shunday  son topilsaki, ning  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  qiymatlarida  tengsizlik bajarilsa,  soniga  funksiyaning ****** *nuqtadagi* yoki * dagi limiti* deyiladi va  deb yoziladi.

Funksiya limiti uchun berilgan Geyne va Koshi ta’riflari o‘zaro ekvivalent ekanligi isbotlangan. Shu sababli funksiyaning nuqtadagi limitini topishda bu ta’riflarning biridan foydalanish mumkin.

 ga intiluvchi  ketma - ketlikni etarlicha ko‘p usul bilan tanlash mumkin bo‘lganligi uchun Geyni ta’rifidan funksiyaning limitini topishdan ko‘ra funksiyaning nuqtada limitga ega bo‘lmaslini ko‘rsatishda foydalanish qulaylikka ega bo‘ladi. Buning uchun  ga nuqtada limitga ega bo‘lmagan birorta  ketma- ketlikni topish yetarli yoki har xil limitlarga ega bo‘lgan  va

 ketma-ketliklarni ko‘rsatish kifoya.

Shunday qilib, funksiyaning limitini topish uchun ko‘p hollarda Koshi ta’rifi

qo‘llaniladi.

*Misollar*

1.  ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun  son olamiz. sonni shunday tanlaymizki da  bo‘lsin.

U holda .

Bundan  Agar  deb olsak, da  bo‘ladi.

Demak, .

Xususan, da ,  da . Shunday qilib,  son  songa

bog‘liq bo‘ladi. Shu sababli keyingi ta’riflarda deb olamiz.

2.  funksiya  nuqtada limitga ega bo‘lmasligini ko‘rsataniz.

Buning uchun ** nuqtaga intiluvchi ikkita  va  ketma-

ketliklarni qaraymiz. Mos  ketma-ketliklar har xil limitlarga intiladi:  ketma-ketlik nolga intiladi,  ketma-ketlik esa birga intiladi.

Demak,  funksiya  nuqtada limitga ega bo‘lmaydi.

*Izoh.* Funksiyaning  nuqtadagi limiti ta’rifida  nuqtaning o‘zi qaralmaydi. Shunday qilib, funksiyaning  nuqtadagi qiymati funksiyaning bu nuqtdagi limitiga ta’sir qilmaydi. Bundan tashqari funksiya  nuqtada aniqlanmagan bo‘lishi ham mumkin. Shu sababli  nuqtaning atrofida  bo‘lishi mumkin) teng bo‘lgan (har xil qiymatga ega bo‘lgan, ulardan bittasi yoki har ikkalasi aniqlanmagan) ikkita funksiya ** da bitta limitga ega bo‘lishi yoki ularning har ikkalasi limitga ega bo‘lmasligi mumkin. Bundan, xususan, kasrning  nuqtdagi limitini hisoblashda uning surat va maxrajini  da nolga

aylanuvchi har xil ifodalarga bo‘lishning qonuniyligi kelib chiqadi.

*Misol*

 funksiyaning limitni topamiz. Bunda  funksiya  dan tashqari barcha nuqtalarda  funksiya bilan ustma-ust

tushadi va  bo‘ladi. Shu sababli .

Funksiyaning nuqtadagi limiti ta’rifini *geometrik nuqtai-nazardan* shunday talqin qilish mumkin: agar soni  funksiyaning ****** nuqtadagi limiti bo‘lsa,  nuqtaning istalgan  atrofi uchun  nuqtaning shunday atrofi topiladiki, atrofdagi barcha  nuqtalarda  funksiyaning mos qiymatlari nuqtaning  atrofiga yotadi. Boshqacha aytganda  funksiyaning atrofdagi grafigi  va  to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan, kengligi ga teng bo‘lgan tasmada joylashadi (22-shakl).

22-shakl



**4-ta’rif**.Agar  son uchun shunday  son topilsaki,  ning  tehgsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  qiymatlarida  tehgsizlik bajarilsa,  soniga  funksiyaning  nuqtadagi *o‘ng* (*chap*) *limiti* deyiladi va  yoki   yoki  kabi belgilanadi.

 funksiyaning nuqtadagi o‘ng va chap limitlari *bir tomonlama limitlar* deb ataladi. Agar  funksiyaning  nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud va bir-biriga teng, ya’ni  bo‘lsa,  nuqtada  funksiyaning limiti mavjud va  bo‘ladi.

 funksiya intervalda aniqlangan bo‘lsin.

**5- ta’rif**.Agar  son uchun shunday  son topilsaki,  ning

tehgsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  qiymatlarida  tehgsizlik bajarilsa,  soniga  funksiyaning  dagi limiti deyiladi va  kabi belgilanadi.

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta’rifini *geometrik nuqtai-nazardan* bunday talqin qilish mumkin: agar  bo‘lsa,  son uchun shunday  son topiladiki,   larda

 funksiyaning qiymatlari nuqtaning atrofiga yotadi.



*Misol*

funksiyaning nuqtadagi bir tomonlama limitlarini topamiz:



***Limitlar haqidagi teoremalar***

Funksiya limitining «ketma-ketlik tilidagi»ta’rifi yaqinlashuvchi (limitga ega) ketma-ketliklarning xossalarini funksiyaning limiti uchun o‘tkazish imkonini beradi. Bu xossalarni ifodalovchi teoremalar bilan tanishamiz va ularning ayrimlarini isbotlaymiz.

**1-teorema**. Funksiya da yagona limitga ega bo‘ladi.



**2-teorema**.Ikkita funksiya algebraik yig‘indisining limiti bu funksiyalar limitlarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

.



*Isboti.* Ihtiyoriy kema-ketlik olamiz.



Bu ketma-ketlik uchun bo‘lsin.



U holda

.



Demak,

.



**3-teorema**. Ikkita funksiya ko‘paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

.



**1-natija**. O‘zgarmas funksiyaning limiti uning o‘ziga teng , ya’ni

.



**2-natija**.O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqarida chiqazish mumkin, ya’ni

,



**3-natija**. Funksiyaning natural ko‘rsatkichli darajasining limiti bu funksiya limitining shu tartibli darajasiga teng, ya’ni

,



**4-teorema**.Ikki funksiya bo‘linmasining limiti bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya’ni

, .



**5-teorema**. Agar nuqtaning biror atrofidagi barcha uchun tengsizlik bajarilsa va funksiyalar da limitga ega bo‘lsa, u holda bo‘ladi.



**6-teorema**. Agar nuqtaning biror atrofidagi barcha uchun tengsizlik bajarilsa va bo‘lsa, u holda bo‘ladi.



**7-teorema**. bo‘lsin. U holda:



1) agar () tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha uchun bo‘lsa, bo‘ladi;



2) agar () tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha uchun bo‘lsa, bo‘ladi.



**8-teorema**. Agar bo‘lsa, u holda nuqtaning yetarlicha kichik atrofidan olingan qiymatlarda funksiya chegaralangan bo‘ladi.



**9-teorema**. Agar: 1) va nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofdan olingan barcha lar uchun bo‘lsa, 2) nuqta to‘plamning limit nuqtasi va bo‘lsa, u holda da murakkab funksiya limitga ega va bo‘ladi.



Yuqorida keltirilgan teoremalar da ham o‘rinli bo‘ladi.



*Misollar*

1. ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun son olamiz. sonini shunday tanlaymizki da bo‘lsin. U holda



bo‘ladi.

Bundan Agar deb olsak, da bo‘ladi.



Demak,

.



2. limitni topamiz. da ko‘rinishdagi aniqmaslik hosil bo‘ladi. Kasrning surat va maxrajini yuqori darajasiga, ya’ni ga bo‘lib, topamiz:



23-shakl



***Ajoyib limitlar***

*Birinchi ajoyib limit* :.



*Isboti.* bo‘lsin.



Radiusi ga teng bo‘lgan aylananing radian o‘lchovi ga teng bo‘lgan markaziy burchagiga mos yoyini qaraymiz (23-shakl).



Shakldan quyidagilarga ega bo‘lamiz:



Bundan kelib chiqadi. Tengsizlikni ga bo‘lamiz:



yoki .



Endi bo‘lsin.



, ekanidan da ham .



, dan 6-teoremaga ko‘ra .



*Misol*

limitni topamiz. Bunda da ko‘rinishdagi aniqmaslik berilgan. Almashtirishlar bajaramiz:



da va ajoyib limitga ko‘ra Demak,



*Ikkinchi ajoyib limit* :



*Isboti.* Ma’lumki, .



bo‘lsin. deb olamiz. U holda , bu yerda



tengsizlikdan topamiz:



yoki .



da . U holda



.



Bundan 6-teoremaga ko‘ra kelib chiqadi.



Endi bo‘lsin. deb olamiz. U holda



Demak, .



*Misol*

limitni topamiz. Bunda da ko‘rinishdagi aniqmaslik berilgan.



Qavs ichidagi kasrning butun qismini ajratib, almashtirishlar bajaramiz:

.



da bo‘lgani sababli 2-ajoyib limitni qo‘llab, topamiz:



ekanidan .



**3.4.2. Cheksiz kichik funksiyalar**

***Ta’riflar va asosiy teoremalar***

**6-ta’rif**. Agar bo‘lsa, funksiyaga *da* *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.



Funksiyaning limiti ta’rifiga ko‘ratenglik quyidagicha talqin qilinadi: son uchun shunday son topiladiki, ning tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha , qiymatlarda tengsizlik bajariladi.



da cheksiz kichik funksiya shu kabi ta’riflanadi.



Cheksiz kichik funksiyalar ko‘pincha cheksiz kichik kattaliklar yoki cheksiz kichik deb ataladi va odatda grek alfavitining va boshqa harflari bilan belgilanadi.



Cheksiz kichk funksiyalarga da da da funksiyalar misol bo‘ladi.



**7-ta’rif**. Agar bo‘lsa, funksiyaga  *da cheksiz katta funksiya deyiladi.*



Bunda funksiya faqat musbat qiymatlar qabul qilsa deb yozilsa, faqat manfiy qiymatlar qabul qilsa deb yoziladi.



Masalan,  da cheksiz katta funksiya bo‘ladi.



Cheksiz kichik funksiyalar uchun o‘rinli bo‘ladigan teoremalar bilan tanishamiz.

**10-teorema**. bo‘lishi uchun da funksiya cheksiz kichik bo‘lishi zarur va etarli.



*Isboti. Zarurligi.* bo‘lsin. funksiyani olamiz. U holda



.



Demak, funksiya cheksiz kichik.



*Yetarliligi.* , bu yerda cheksiz kichik funksiya bo‘lsin.



Bundan. U holda



.



**11-teorema**. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig‘indisi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

**12-teorema**. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

**4-natija**. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

**5-natija**. Cheksiz kichik funksiyaning chekli o‘zgarmas songa ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiya boladi.

**13-teorema**. Cheksiz kichik funksiyaning nolga teng bo‘lmagan limitga ega funksiyaga bo‘linmasi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan teoremalar da ham o‘rinli bo‘ladi.



**14-teorema**. Agar da funksiya cheksiz kichik bo‘lsa, u holda da funksiya cheksiz katta bo‘ladi va aksincha agar da funksiya cheksiz katta bo‘lsa, u holda da funksiya cheksiz



kichik bo‘ladi.

*Misol*

funksiya da cheksiz kichik bo‘lishini ko‘rsatamiz. Bunda ekanidan funksiya cheksiz kichik.



funksiya chegaralangan, chunki .



funksiya cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasidan iborat.



Demak, 12-teoremaga ko‘ra cheksiz kichik funksiya.



***Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash***

Ma’lumki, cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiyalar bo‘ladi. Bu tasdiqni cheksiz kichik funksiyalarning bo‘linmasi uchun takidlab bo‘lmaydi, chunki bitta cheksiz kichik funksiyaning boshqa cheksiz kichik funksiyaga nisbati har xil natijaga olib kelishi, ya’ni chekli son bo‘lishi, cheksiz katta bo‘lishi, cheksiz kichik bo‘lishi yoki hech bir limitga intilmasligi mumkin.

Cheksiz kichik funksiyalar bir-biri bilan nisbati yordamida taqqoslanadi.

va funksiyaar da cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin.



1. Agar bo‘lsa, va *bir xil* *tartibli cheksiz kichik funksiyalar* deyiladi.



2. Agar bo‘lsa, funksiya funksiyaga nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deyiladi.



3. Agar bo‘lsa, funksiya funksiyaga nisbatan *quyi tartibli cheksiz kichik funksiya* deyiladi.



4. Agar mavjud bo‘lmasa, va funksiyalarga *taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar*  deyiladi.



Misollar keltiramiz:

1) da va funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik



funksiyalar, chunki ;



2) da funksiya funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki



3) da funksiya funksiyaga nisbatan quyi tartibli cheksiz kichik funksiyalar, chunki



4) va funksiyalar da taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar, chunki limit mavjud emas.



***Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar***

Bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar orasida ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar ahamiyatga ega.

va funksiyaar da cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin.



**8-ta’rif**. Agar bo‘lsa, u holda da va *ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar*deyiladi va kabi belgilanadi.



Masalan, da va funksiyalar ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar, chunki .



Cheksiz kichik funksiyalar uchun o‘rinli bo‘ladigan teoremalar bilan tanishamiz.

**15-teorema**. Agar ikkita cheksiz kichik funksiya nisbatida cheksiz kichik

funksiyalarning har ikkalasini yoki ulardan bittasini ekvivalent cheksiz

kichik funksiya bilan almashtirilsa, u holda bu nisbatning limiti o‘zgarmaydi.

*Isboti.*  da ~ va ~ bo‘lsin.



U holda

ya’ni



**16-teorema**. Ikkita ekvivalent cheksiz kichik funksiyaning ayirmasi ularning har biriga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

**17-teorema**. Chekli sondagi har xil tartibli cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisi quyi tartibli qo‘shiluvchiga ekvivalent bo‘ladi.

Cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisiga ekvivalent bo‘lgan cheksiz kichik funksiyaga *bu yig‘indining bosh qismi* deyiladi. Cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisini uning bosh qismi bilan almasahtirish *yuqori tartibli cheksiz kichik*

*funksiyalarni tashlab yuborish* deb yuritiladi.

*Misol*

limitni topamiz:



, chunki da ~va



17-teoremaga ko‘ra da ~.



ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarni almashtirish prinsipidan va ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarning xossalaridan foydalanish mumkin.



Limitlarni hisoblashda quyidagi ekvivalentliklar qo‘llaniladi:

1. da ~; 2. da ~;



3. da ~; 4. da ~;



5. da ~; 6. da ~;



7. da ~; 8. da ~;



9. da ~; 10. da ~



*Misollar*

1. limitni topamiz. Bunda da va ekvivalentlikdan foydalanamiz:



2. limitni topamiz. da , ekanidan



3. lmitni topamiz. Buning uchun belgilash kiritamiz. Bunda da U holda



**3.5. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI**

**3.5.1. Funksiya uzluksizligining ta’riflari**

funksiya nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.



**1-ta’rif**. Agar funksiya nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng, y’ani



(3.5.1)



bo‘lsa,  *funksiya nuqtada uzluksiz* deyiladi.



tenglik uchta shartning bajarilishini anglatadi:



1) funksiya nuqtada va uning atrofida aniqlangan;



2) funksiya da limitga ega;



3) funksiyaning nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng.



ekanidan (3.5.1) tenglikni



(3.5.2)



ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, uzluksiz funksiya uchun limitga o‘tish va funksiya belgilarining o‘rnini almashtirish mumkin.

Funksiya limitining ta’rifi asosida funksiya uzluksiligining ta’rifini « tilida» quyidagicha ifodalash mumkin.



**2- ta’rif**. Agar son uchun shunday son topilsaki, ning tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida tengsizlik bajarilsa,  *funksiya nuqtada uzluksiz* deyiladi.



24-shakl



funksiyaning nuqtadagi qiymati o‘zgarmas son hamda da bo‘lishini inobatga olib, (3.5.1) tenglikni



(3.5.3)



ko‘rinishda yozamiz.

ayirmaga  *argumentning nuqtadagi orttirmasi* deyiladi va bilan belgilanadi, ayirmaga esa  *funksiyaning nuqtadagi orttirmasi* deyiladi va deb belgilanadi.



Shunday qilib,

, .



Demak, funksiyaning nuqtadagi orttirmasi ning fiksirlangan qiymatida argument orttirmasining funksiyasi bo‘ladi (24-shakl).



(3.5.3) tenglik yangi belgilashlarda

(3.5.4)



ko‘rinishni oladi.

(3.5.4) tenglikni uzluksizlikning argument orttirmasi va funksiya orttirmasi tushunchalariga asoslangan ta’rifi sifatida quyidagicha ifodalash mumkin.

**3-ta’rif**. Agar argumentning nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning shunuqtadagi cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, *funksiya nuqtada uzluksiz* deyiladi.



Funksiyaning nuqtadagi uzlukizligini tekshirishda keltirilgan ta’riflarning

biridan foydalanish mumkin.

*Misol*

funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz. funksiya da aniqlangan. Istalgan nuqtani olamiz va bu nuqtada ni topamiz:



.



Bundan kelib chiqadi, chunki



chegaralangan funksiyaning cheksiz kichik funksiyaga ko‘paytmasi cheksiz kichik bol‘adi.



Demak, 3-ta’rifga ko‘ra funksiya nuqtada uzluksiz.



**4-ta’rif**. Agarbo‘lsa, *funksiya nuqtada o‘ngdan* (*chapdan*) *uzluksiz* deyiladi.



1-ta’rif va 4-ta’riflardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: funksiya nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun u shu nuqtada ham chapdan va ham



o‘ngdan uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.

**3.5.2. Uzluksiz funksiyalarning xossalari**

***Nuqtada uzluksiz funksiyalarning xossalari***

**1-teorema** (*uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar*). va funksiyalar nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda , va funksiyalar nuqtada uzluksiz bo‘ladi.



Bu teorema chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig‘indisi va ko‘paytmasi uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

**2-teorema** (*murakkab funksiyaning uzluksizligi*). funksiya nuqtada uzluksiz, funksiya esa nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda murakkab funksiya nuqtada uzluksiz bo‘ladi.



2-teorema yordamida (3.5.2) tenglikni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

Agar funksiya nuqtada limitga ega bo‘lib, funksiya nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda murakkab funksiya uchun



(3.5.5)



bo‘ladi.

Bu tenglik *uzluksiz funksiya belgisi ostida limitga o‘tish qoidasi*ni ifodalaydi

va funksiyaning limitini topishda foydalaniladi.

*Misol*

limitni topamiz:



funksiya va funksiyalarning murakkab funksiyasi. va funksiya nuqtada uzluksiz.



U holda (3.5.5) tenglikka ko‘ra



**3-teorema**. Asosiy elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda uzluksiz bo‘ladi.

**1-natija.** Elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasidagi barcha nuqtalarda uzluksiz bo‘ladi.

**5-teorema** (*uzluksiz funksiya ishorasining turg‘unligi*). Agar funksiya nuqtada uzluksiz va bo‘lsa, u holda shunday son topiladiki, uchun funksiya ishorasini saqlaydi, ya’ni funksiya bilan bir ishorali bo‘ladi.



Teoremaning isboti 4-teoremadan da kelib chiqadi.



***Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari***

Agar funksiya nitervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda u *intervalda uzluksiz* deyiladi.



Agar funksiya intervalda uzluksiz bo‘lib, nuqtada o‘ngdan uzluksiz va nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiyaga *kesmada uzluksiz*deyiladi.



Kesmada uzluksiz funksiyalar bir qancha muhim xossalarga ega. Bu xossalarni teoremalar orqali ifodalaymiz. Bunda teoremalarning isbotini keltirmasdan, faqat geometrik talqinini ko‘rsatish bilan kifoyalanamiz.



25-shakl



**.**



**6-teorema** (*Bolsano-Koshining birinchi teoremasi*). funksiya kesmada uzluksiz va kesmaning oxirlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilnsin. U holda shunday nuqta topiladiki, bu nuqtada bo‘ladi.



Teoremaning geometrik talqini: uzluksiz funksiyaning grafigi o‘qning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o‘tganida o‘qni kesadi (25-shakl).



**7-teorema** (*Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi*). funksiya kesmada uzluksiz va , bo‘lsin. U holda shunday nuqta topiladiki, bo‘ladi.



Teoremaning geometrik talqini: uzluksiz funksiya bir qiymatdan ikkinchi qiymatga o‘tganida barcha oraliq qiymatlarni qabul qiladi (26-shakl).

**8-teorema** (*Veyershtrassning birinchi teoremasi*). Agar funksiya kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda u bu kesmada chegaralangan bo‘ladi.



27-shaklda keltirilgan funksiya kesmada uzliuksiz. Bunda uchun .



*1-Izoh.* Teorema kesma interval bilan almashtirilganida o‘rinli bo‘lmasligi mumkin.

27-shakl



26-shakl



**.**



**9-teorema** (*Veyershtrassning ikkinchi teoremasi*). Agar funksiya kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda u shu kesmada o‘zining eng kichik va eng katta qiymatlariga erishadi.



27-shaklda keltirilgan funksiya kesmada uzliuksiz. Bunda u nuqtada o‘zining eng katta qiymatini va nuqtada o‘zining eng kichik qiymatini qabul qiladi.



*2-izoh.* Bu teorema interval uchun o‘rinli bo‘lmasligi mumkin. Masalan, funksiya intervalda uzluksiz, lekin o‘zining eng kichik va eng katta qiymatlariga erishmaydi.



**10-teorema** (*teskari funksiyaning uzluksizligi haqidagi teorema*). Agar funksiya kesmada uzluksiz va qat‘iy monoton bo‘lib, uning qiymatlar sohasi bo‘lsa, u holda kesmada teskari funksiya



uzluksiz va qat‘iy monoton bo‘ladi.

**3.5.3. Funksiyaning uzilish nuqtalari**

Agar funksiya uchun nuqtada funksiya uzluksizligi 1-ta’rifining



hech bo‘lmaganda bitta sharti bajarilmasa, *funksiya nuqtada uzilishga ega*



deyiladi. Bunda nuqta*funksiyaning uzulish nuqtasi* deb ataladi.



32-shaklda frafiklari bilan berilgan funksiylarni qaraymiz. Bu funksiyalarning har biri uchun - uzilish nuqtasi.



Birinchi holda (28,a-shakl) ta’rifning 1-sharti bajarilmaydi, chunki funksiya nuqtada aniqlanmagan.



Ikkinchi holda (28,b-shakl) ta’rifning 2-sharti buzulgan, chunki limit mavjud emas.



Uchinchi holda (28,c-shakl) ta’rifning 3-sharti bajarilmaydi, chunki



28-shakl



**.**

**.**



Funksiyaning barcha uzulish nuqtalari birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalariga bo‘linadi.

**5-ta’rif**. Agar nuqtada funksiya chekli limitlarga ega, ya’ni va bo‘lsa, nuqtaga funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deyiladi. Bunda:



a) bo‘lsa,  *bartaraf qilinadigan uzilish nuqtasi*deb ataladi;



b) bo‘lsa,  *sakrash nuqtasi*, kattalik *funksiyaning sakrasahi* deb ataladi.



Masalan: funksiya uchun sakrash nuqtasi, bunda funksiyaning sakrashi ga teng;



funksiya uchun bartaraf qilinadigan uzilish



nuqtasi, bunda o‘rniga deb olinsa uzilish bartaraf qilinadi, ya’ni uzluksiz funksiya hosil bo‘ladi.



**6-ta’rif**. Agar nuqtada funksiyaning bir tomonlama limitlaridan kamida bittasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksizlikka teng bo‘lsa, nuqtaga funksiyaning *ikkinchi tur uzilishi nuqtasi* deyiladi.



Masalan, funksiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi.



*Misollar*

1. funksiya uzilish nuqtalarining turini aniqlaymiz. Funksiya sonlar o‘qining nuqtasidan boshqa nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz.



Bunda

U holda



Demak, sakrash nuqtasi va funksiyaning sakrashi .



2. funksiyalarni uzluksizlikka tekshiramiz. Bu funksiya nuqtada aniqlanmagan, chunki o‘rniga qo‘yish bajarsak, aniqmaslik kelib chiqadi. Boshqa nuqtalarda kasrning surat va maxrajini ga bo‘lish mumkin, chunki bu nuqtalarda . Bunda funksiyaning nuqtadagi chap va o‘ng limitlari bir biriga teng bo‘ladi. Ularni topamiz:



Demak, nuqta funksiyaning bartaraf qilinadigan uzilish



nuqtasi. Agar da deb olinsa bu uzilish bartaraf qilinadi.



3. funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz. nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shu sababli uzilish nuqtasi bo‘ladi. funksiyaning bu nuqtadagi bir tomonlama limitlarini hisoblaymiz:



Demak, nuqta funksiyaning sakrash nuqtasi. Funksiyaning bu



nuqtadagi sakrashi ga teng.



4. funksiya nuqtada aniqlanmagan. nuqtalarda funksiya uzilishga ega bo‘lishi mumkin. Bu nuqtalarni alohida qaraymiz.



nuqtada:



Demak, nuqtada funksiya uzluksiz.



nuqtada:



Demak, nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi



**11-teorema** (*Kantor teoremasi*). Agar funksiya kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda u kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi.



**4.1. FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI**

**4.1.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar**

Hosilamаtеmаtikаning asosiy tushunchаlаridаn biri hisoblanadi. Hosila matematika, fizika va boshqa fanlarning bir qancha masalalarini yechishda,

xususan har xil jarayonlarning tezliklarini o‘rganishda keng qo‘llaniladi.

***Egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma***

Avval egri chiziqqa o‘tkazilgan urunmaning umumiy ta’rifini beramiz. Uzluksiz egri chiziqda va nuqtalarni olamiz (1-shakl).



2-shakl

1-shakl



va nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa *kesuvchi* deyiladi.



nuqta egri chiziq bo‘ylab siljib, nuqtaga cheksiz yaqinlashsin. U holda kesuvchi nuqta atrofida aylangan holda qandaydir limit holatiga intiladi.



*Berilgan*  *egri chiziqqa berilgan nuqtada o‘tkazilgan urinma* deb,  kesuvchining nuqta egri chiziq bo‘ylab siljib nuqtaga cheksiz yaqinlashgandagi limit holatiga aytiladi.



Endi nuqtada vertikal bo‘lmagan urinmaga ega bo‘lgan uzluksiz egri chiziq grafiini qaraymiz va uning burchak koeffitsiyentini topamiz, bu yerda urinmaning o‘q bilan tashkil qilgan burchagi. Buning uchun nuqta va grafikning abssissali nuqtasi orqali kesuvchi o‘tkazamiz (2-shakl). Kesuvchining o‘q bilan tashkil qilgan burchagini bilan belgilaymiz.



2-shakldan topamiz:



da funksiyaning uzluksizligiga asosan ham nolga intiladi. Shu sababli nuqta egri chiziq bo‘ylab siljib, nuqtaga cheksiz yaqinlashadi. Bunda kesuvchi nuqta atrofida aylangan holda urinmaga yaqinlashib boradi, ya’ni . Bundan yoki



Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsiyenti

(4.1.1)



***To‘g‘ri chiziqli harakat tezligi***

material nuqta (biror jism) qandaydir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tekis harakat qilayotgan bo‘lsin. Vaqtning har bir qiymatiga boshlang‘ich holatdan nuqtagacha bo‘lgan muayyan masofa mos keladi. Bu masofa vaqtga bog‘liq, ya’ni masofa vaqtning funksiyasi bo‘ladi:



funksiyaga *nuqtaning harakat qonuni* deyiladi.



Nuqtaning vaqtdagi harakat tezligini aniqlash masalasini qo‘yamiz.



Agar biror vaqtda nuqta holatda bo‘lsa, u holda (vaqtning orttirmasi) vaqtda nuqta holatga o‘tadi, bu yerda (masofaning orttirmasi) (3-shakl). Demak, nuqtaning vaqt oralig‘idagi ko‘chishi ga teng bo‘ladi.

3-shakl



nisbat *nuqtaning vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligini* ifodalaydi: . Bunda o‘rtacha tezlik qiymatga bog‘liq bo‘ladi: qancha kichik bo‘lsa, o‘rtacha tezlik nuqtaning berilgan vaqtdagi tezligini shuncha aniq ifodalaydi.



Harakat o‘rtacha tezligining vaqt oralig‘i nolga intilgandagi limitiga *nuqtaning berilgan vaqtdagi harakat tezligi* ( yoki *oniy tezligi*) deyiladi. Bu tezlikni bilan belgilaymiz. U holda



yoki (4.1.2)



Shunday qilib, nuqtaning berilgan vaqtdagi harakat tezligini aniqlash uchun (1.2) limitni hisoblash kerak bo‘ladi.



(1.1) va (1.2) ko‘rinishdagi limitlarni topishga tabiatning turli sohalariga

tegishli ko‘pchilik masalalar olib keladi. Bunday masalalardan ayrimlarini

keltiramiz:

1) agar o‘tkazgichning ko‘ndalang kesimi orqali vaqt ichida o‘tuvchi elektr toki bo‘lsa, u holda *elektr tokining vaqtdagi momenti*



(4.1.3)



2) agar vaqt ichida reaksiyaga kirishuvchi kimyoviy modda miqdori bo‘lsa, u holda *kimy*o*viy moddaning vaqtdagi reaksiyaga kirishish tezligi*



(4.1.4)



3) agar bir jinsli bo‘lmagan sterjenning va nuqtalar orasidagi massasi bo‘lsa, u holda *sterjenning nuqtadagi zichligi*



(4.1.5)



Ko‘rilgan masalalar fizik mazmuninig turliligiga qaramasdan, (4.1.1-4.1.5) limitlar bir xil ko‘rinishga ega: ularda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topish talab

qilinadi.

**4.1.2. Hosilaning ta’rifi, geometrik va mexanik ma’nolari**

***Hosilaning ta’riflari***

funksiya intervalda aniqlangan bo‘lsin. Ixtiyoriy nuqtani olamiz va bu nuqtada argumentga orttirma () beramiz. Bunda funksiya orttirma oladi.



**1-ta’rif**. Agar limit mavjud va chekli bo‘lsa, bu limitga *funksiyaning nuqtadagi hosilasi* deyiladi (yoki yoki) kabi belgilanadi.



Shunday qilib,

. (4.1.6)



Agar ning biror qiymatida bo‘lsa, u holda funksiya nuqtada musbat ishorali (manfiy ishorali) cheksiz hosilaga ega deyiladi. Shu sababli 1-ta’rif bilan aniqlanadigan hosila chekli hosila deb yuritiladi.



*Misollar*

1. funksiyaning nuqtadagi hosilasini topamiz. Buning uchun nuqtada argumentga orttirma beramiz va funksiyaning mos orttirmasini topamiz:



.



Orttirmalar nisbatini tuzamiz:

.



Bu nisbatning dagi limitini topamiz:



.



2. funksiyaning hosilasini hosila ta’rifini va tangenslar ayirmasi formulasini qo‘llab, topamiz:



**2-ta’rif**. *funksiyaning nuqtadagi o‘ng* (*chap*) *hosilasi* deb



limitga aytiladi.



*Misol*

funksiyaning nuqtadagi o‘ng va chap hosilalarini topamiz.Berilgan funksiyaning nuqtadagi orttirmasini topamiz:



U holda



Bu misolda Shu sababli funksiya uchun da nisbatning limiti mavjud emas va funksiya nuqtada hosilaga ega bo‘lmaydi.



Funksiya hosilasining yuqorida keltirilgan ta’riflaridan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi: agar funksiya nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, funksiya shu nuqtada bir-biriga teng bo‘lgan o‘ng va chap hosilalarga ega bo‘lib, bo‘ladi; agar funksiya nuqtada o‘ng va chap hosilalarga ega bo‘lib, bo‘lsa, funksiya shu nuqtada hosilaga ega va bo‘ladi.



Funksiyaning hosilasini topishga *funksiyani differensiallash* deyiladi.

Agar funksiya biror oraliqda aniqlangan bo‘lsa va hosila bu oraliqning har bir nuqtasida mavjud bo‘lsa, u holda



formula hosilani ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bundan keyin, agar



funksiyani differensiallashda nuqta ko‘rsatilmagan bo‘lsa, hosilani



ning mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarida topamiz va deb yozamiz.



***Hosilaning geometrik va mexanik ma’nolari***

Egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma haqidagi masalada urinmaning burchak koeffitsiyenti uchun ushbu

tenglik hosil qilingan edi.



Bu tenglikni ko‘inishda yozamiz, ya’ni hosila funksiya grafigiga nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng. Bu jumla hosilaning *geometrik ma’nosini* ifodalaydi.



To‘g‘ri chiziqli harakat haqidagi masalada ushbu limit hosil qilingan edi.



Bu limitni ko‘rinishda yozamiz, ya’ni material nuqta harakat qonunidan vaqt bo‘yicha olingan hosila material nuqtaning vaqtdagi to‘g‘ri chiziqli harakat tezligiga teng. Bu jumla *hosilaning mexanik ma’nosini* ifodalaydi.



Umulashtirgan holda, agar funksiya biror fizik jarayonni ifodalasa, u holda hosila bu jarayonnig ro‘y berish tezligini ifodalaydi deyish mumkin.



Bu jumla *hosilaning fizik ma’nosini* anglatadi.

***Egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalari***

funksiya bilan aniqlangan egri chiziqqa (bu yerda ) nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasini hosilaning geometrik ma’nosidan keltirib chiqaramiz.



Urinma nuqtadan o‘tadi. Shu sababli uning tenglamasini ko‘rinishda izlaymiz. Hosilaning geometrik ma’nosiga ko‘ra



.



Bundan (4.1.7) *urinma tenglamasi* kelib chiqadi.



*Egri chiziqqa o’tkazilgan normal* deb, urinish nuqtasida urinmaga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Egri chiziqqa nuqtada o‘tkazilgan normal shu nuqtada o‘tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo‘lgani sababli



. Bundan (4.1.8)



*normal tenglamasi* kelib chiqadi (agar bo‘lsa).



**4.1.3. Funksiyaning differensiallanuvchiligi**

**3-ta’rif**. Agar funksiyaning nuqtadagi orttirmaga mos orttirmasini



(4.1.9)



ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, *funksiya*  *nuqtada differensiallanuvchi* deyiladi, bu yerda ga bog‘liq bo‘lmagan son, da cheksiz cheksiz kichik funksiya, ya’ni .



Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi bilan shu nuqtadagi hosilasi orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz.

**1-teorema**. funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun



u shu nuqtada hosilaga ega bo‘lishi zarur va etarli.

*Isboti.* *Zarurligi*. nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin.



Ta’rifga ko‘ra yoki .



Bundan , ya’ni funksiya nuqtada hosilaga ega.



*Etarliligi.* funksiya nuqtada hosilaga ega bo‘lsin. U holda . belgilash kiritamiz, bunda funksiya da cheksiz kichik bo‘ladi.



Bundan

,



ya’ni funksiyaning nuqtada differentsiallanuvchi bo‘lishi kelib chiqadi.



**2-teorema**. Agar funksiya nuqtada differentsiallanuvchi bo‘lsa,



u holda u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

*Isboti.* funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Ta’rifga



ko‘ra . Bundan , ya’ni funksiya nuqtada uzluksiz.



Teoremaning teskarisi hamma vaqt ham o‘rinli bo‘lmaydi, ya’ni funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo‘lishidan uning shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi hamma vaqt ham kelib chiqmaydi. Masalan, funksiya nuqtada uzluksiz bo‘lsa ham u shu nuqtada hosilaga ega emas (2-misol), ya’ni differensiallanuvchi emas.



Agar funksiya intervalning ( kesmaning) har bir nuqtasida hosilaga ega bo‘lsa, u shu *intervalda* (*kesmada*) *differensiallanuvchi* deyiladi.



**4.1.4. Differensiallah qoidalri va formulalari**

***Yig‘indi, ayirma, ko‘paytma va bo‘linmani differensiallash***

Funksiyaning hosilasi ta’rifidan foydalanib ikki funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasini differensiallash qoidalarini keltirib chiqaramiz.

**3-teorema**. Agar va funksiyalar nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyalarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi (bo‘linmasi shart bajarilganda) ham nuqtada differensiallanuvchi va quyidagi formulalar o‘rinli bo‘ladi:



1. ; 2. 3. .



***Teskari funksiyani differensiallash***

funksiya teskari funksiya haqidagi teoremaning shartlarini qanoatlantirsin va teskari funksiyaga ega bo‘lsin.



**4-teorema**.Agar funksiya nuqtada hosilaga ega bo‘lsa,



u holda funksiya mos nuqtada differensiallanuvchi va



yoki bo‘ladi.



Shunday qilib, *teskari funksiyaning hosilasi berilgan funksiya hosilasining teskari qiymatiga teng*.

***Murakkab funksiyani differensiallash***

va bo‘lsin. U holda funksiya erkli argumenti



dan va oraliq argumenti dan iborat murakkab funksiya bo‘ladi.



**5-teorema**.Agar funksiya nuqtada hosilaga ega bo‘lsa va funksiya mos nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda murakkab funksiya nuqtada differensiallanuvchi va bo‘ladi.



Shunday qilib,, ya’ni *murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiyaning oraliq argument bo‘yicha hosilasi bilan oraliq argumentning erkli argument bo‘yicha hosilasining ko‘paytmasiga teng*.



Bu qoida oraliq argumentlar bir nechta bo‘lganda ham o‘z kuchida qoladi.

Masalan, bo‘lsa, bo‘ladi.



***Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari***

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini topishda 17-§ da keltirilgan ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan, teskari va murakkab funksiyalarni differensiallash formulalaridan hamda yig‘indi, ayirma, ko‘paytma va bo‘linmani differensiallash qoidalaridan foydalanamiz.

**1**. ***O‘zgarmas funksiya***:(). O‘garmas funksiya butun sonlar o‘qida o‘zgarmas qiymatini saqlagani uchun ixtiyoriy nuqtada uning orttirmasi nolga teng bo‘ladi. Shu sababli



**2**. ***Darajali funksiya***:, bunda. Bu funksiya uchun da



bo‘ladi. Bundan



da ~ ni hisobga olib, topamiz:



Demak, Xususan,



**3**. ***Ko***

Bundan da ~ ni hisobga olib, topamiz:



Demak, Xususan,



**4**. ***Logorifmik funksiya***: , bunda . funksiya funksiyaga teskari funksiya. Bunda .



U holda .Demak,



Xususan,



**5**. ***Trigonometrik funksiyalar***. funksiyaning orttirmasi



bo‘lib,



Bu tenglikdan da ~ ni hisobga olib, topamiz:



Demak,



funksiyaning hosilasini murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:



Demak,



funksiyaning hosilasini bo‘linmaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:



Demak,



funksiyaning hosilasini topishda murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:



Demak,



**6. *Teskari trigonometrik funksiyalar***. funksiya funksiyaga teskari. Bunda .



U holda .Demak,



funksiyaning hosilasini formuladan foydalanib topamiz:



Demak,



funksiyaning hosilasini teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:



Demak,



va funksiyalar bog‘lanishga ega.



Bundan



Demak,



*Misol*

Differensiallash qoidalari va funksiyaning hosilasidan foydalanib, giperbolik funksiyalarning hosilalarini topamiz:



ya’ni



ya’ni



ya’ni



***Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvali***

Keltirib chiqarilgan differensiallash qoidalarini va asosiy elementar funksiyalarning hosilalari formulalarini jadval ko‘rinishida yozamiz.

Amalda ko’pincha murakkab funksiyalarning hosilalarini topishga to‘g‘ri keladi. Shu sababli quyida keltiriladigan formulalarda argument oraliq



argumentga almashtiriladi.

***Differensiallash qoidalari***:

1. differensiallanuvchi funksiyalar;



2. xususan o‘zgarmas son;



3. xususan



4. , agar va ;



5. , agar va .



***Asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali***:

1.



2. xususan



3. xususan



4. xususan



5. 6.



7. 8.



9. 10.



11. 12.



13. 14.



15. 16.



Keltirilgan diferensiallash qoidalari va asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali bir o‘zgaruvchi funksiyasi differensial hisobining asosini tashkil qiladi, ya’ni ularni bilgan holda qiyinchilik darajasi qanday bo‘lishidan qat’iy nazar har qanday elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin. Bunda yana elementar funksiya hosil bo‘ladi. Shunday qilib, differensiallash jarayonida

elementar funksiyalar sinfidan tashqariga chiqilmaydi.

*Misol*

funksiyaning hosilasini topamiz:



Hosilani topishda differensiallashning 1,2 qoidalari va 3,4,9 formulalaridan

foydalanildi.

**4.1.5. Logarifmik differensiallash**

Ayrim hollarda funksiyaning hosilasini topish uchun avval berilgan funksiyani logarifmlash, so‘ngra differensiallash maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bu jarayonga *logarifmik differensiallash* deyiladi.

*Misol*

funksiyaning hosilasini topamiz. Bu hosilani differensiallash qoidalari va formulalari orqali topish mumkin. Ammo bu jaroyon katta qiyinchilikka ega. Logarifmik differensiallashni qo‘llaymiz.



Funksiyani logarifmlaymiz:



Bu tenglikni bo‘yicha differensiallaymiz:



ni topamiz:



,



ya’ni



Shunday funksiyalar borki, ularning hosilalari faqat logarifmik differensiallash orqali topiladi. Bunday funksiyalarning qatoriga *dararajali-ko*

Bu funksilaning hosilasini topamiz:

,



ya’ni yoki (4.1.9)



(4.1.9) formulani eslab qolish qoidasini ifodalaymiz: dararajali-ko’rsatkichli funksiyaning hosilasi shartidagi ko‘rsatkichli funksiya hosilasi bilan



shartidagi darajali funksiya hosilasining yig‘indisiga teng.



Misol

funksiyaning hosilasini (4.1.9) formula bilan topamiz:



Yoki



**4.1.6. Parametrik va oshkormas ko‘rinishda berilgan**

**funksiyalarni differensiyallash**

intervalda o’zgaruvchining va funksiyalari biror intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervalda , hosilalar va funksiyaga teskari funksiya mavjud bo‘lsin. Agar funksiya qat’iy monoton bo‘lsa, teskari funksiya bir qiymatli, uzluksiz va qat’iy monoton bo‘ladi. Shu sababli murakkab funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda funksiya va tenglamalar bilan *parametrik ko’rinishda* ( parametrli) berilgan deyiladi.



funksiya



parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. U holda teskari funksiya mavjud va uning hosilasi . Shuningdek murakkab funksiya hosilasi bo‘ladi.



Bundan yoki . (4.1.10)



*Misol*

funksiya uchun ni topamiz:



Agar funksiya ga nisbatan yechilmagan, ya’ni ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, funksiya *oshkormas ko’rinishda* berilgan deyiladi.



Oshkor berilgan har qanday funksiyani oshkormas ko‘rinishda kabi yozish mumkin, ammo teskarisini hamma vaqt bajarib bo‘lmaydi, tenglamani ga nisbatan yechish hamma vaqt ham oson emas, ayrim hollarda esa umuman mumkin emas.



Funksiyaoshkormas ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, funksiya ning murakkab funksiyasi deb qaraladi va tenglikning chap va o‘ng tomoni



bo‘yicha differensiyalanadi, so‘ngra hosil bo’lgan tenglamadan topiladi.



*Misol*

funksiya uchunni topamiz. Bunda tenglikning har ikkala tomonini bo’yicha differensiallaymiz:



.Bundan ,



Yoki



**4.1.7. Funksiyaning differensiali**

***Differensial tushunchasi***

funksiya intervalda aniqlangan bo‘lib, nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda bo‘ladi.



**3-ta’rif**. funksiya orttirmasining ga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi ga *funksiyaning nuqtadagi differensiali* deyiladi va (yoki ) bilan belgilanadi:



. (4.1.11)



Erkli o‘zgaruvchi ning, ya’ni funksiyaning differensialini topamiz.



bo‘lgani uchun (4.1.11) formuladan kelib chiqadi, ya’ni erkli o‘zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga teng: .



Shu sababli (4.1.11) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

4- shakl



. (4.1.12)



boshqacha aytganda, *funksiyaning differensiali funksiya hosilasini bilan erkli o‘zgaruvchi differensialining ko’paytmasiga teng.*

(4.1.12) tenglikdan bo



va differensiallanuvchi va murakkab funksiyani hosil qiluvchi funksiyalar bo‘lsin. Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko‘ra bo



Bu tenglikning har ikkala tomonini ga ko‘paytirib topamiz: *.*



va ekanini hisobga olib yozamiz:



va formulalarni solishtirish ko‘rsatadiki, funksiyaning birinchi differensiali argument erkli o‘zgaruvchi yoki biror argumentning funksiyasi bo‘lishidan qat’iy nazar bir xil formula bilan topiladi.



Differensialning bu xossasiga *birinchi differensialning invariantlik xossasi* deyiladi.

formula tashqi ko‘rinishidan formulaga o‘xshasada, aslini olganda ular orasida farq mavjud: birinchi formulada erkli o‘zgaruvchi va shu sababli , ikkinchi formulada esa funksiya ning funksiyasi va shuning



uchun .



***Differensialning geomettik ma’nosi***

Differensialning geometrik ma’nosini aniqlaymiz. Bunig uchun funksiya grafigiga nuqtada urinma o’tkazamiz va bu urinmaning nuqtadagi ordinatasini qaraymiz (4-shakl).



uchburchakdan kelib chiqadi.



Urinmaning geometrik ma’nosiga ko‘ra .



Bundan .



Demak, funksiyaning nuqtadagi differensiali funksiya grafigiga nuqtada o‘tkazilgan urinmaning orttirmasiga teng. Bu jumla



*differensialning geometrik ma’nosini* ifodalaydi.

***Differensialning taqribiy hisoblashlarga tatbiqi***

Ko‘pchilik masalalarni yechishda funksiyaning nuqtadagi orttirmasi funksiyaning shu nuqtadagi differensialiga taqriban almashtiriladi, ya’ni deb olinadi.



Bunday almashtirish yordamida biror miqdorning taqribiy qiymati quyidagi tartibda hisoblanadi:



ni nuqtada biror funksiya qiymatiga tenglashtiriladi: ;



nuqta ga yaqin va ni hisoblash qulay qilib tanlanadi;



hisoblanadi;



topilib, hisoblanadi;



qiymatlar formulaga



qo‘yiladi.



*Misol*  ning taqribiy qiymatini topamiz:



deymiz, u holda va



deb olamiz;



;



,



**4.1.8. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar**

***Yuqori tartibli hosilalar***

funksiya biror intervalda aniqlangan bo‘lib, shu intervalda differensiyallanuvchi bo‘lsin. U holda hosila ning funksiyasi bo‘ladi. Shu sababli bu funksiya uchun hosilaning mavjudligi va uni hisoblash masalalarsini qo‘yish mumkin.



ga *birinchi tartibli hosila* deyiladi. funksiyaning hosilasidan olingan hosilaga *ikkinchi tartibli hosila* deyiladi. Ikkinchi tartibli hosila mavjud bo‘lsa, bu hosiladan olingan hosila *uchinchi tartibli hosila* deyiladi va hokazo. Hosilalar ikkinchi tartiblidan boshlab *yuqori tartibli hosila* deyiladi va (yoki Yoki kabi belgilanadi.



*Misol*

bo‘lsa, ni topamiz:



Bundan



Funksiyaning yuqori tartibli hosilasini topish uchun uning barcha oldingi hosilalarini topish kerak bo‘ladi. Biroq, ayrim funksiyalarning -tartibli hosilalarini bir yo‘topish imkonini beruvchi formulalar mavjud. Masdalan, quyida keltiriladigan formulalar bunday formulalar qatoriga kiradi:



1. 2.



3. 4. 



5. 6.



7. 8.



Formulalardan ayrimlarining isbotini keltiramiz.

3. ning *isboti.*



...,



Shunday qilib,

.



***Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi***

material nuqta qonun bilan to‘g‘ri chiziqli harakat qilsin. U holda material nuqtaning vaqtdagi tezligini ifodalaydi:



Nuqtaning vaqtdagi tezligi , vaqtdagi tezligi bo‘lsin, ya’ni vaqt oralig‘ida nuqtaning tezligi ga o‘zgarsin.



nisbat *to‘g‘ri chiziqli harakatda nuqtaning vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezlanishini* ifodalaydi. Bu nisbatning dagi limiti nuqtaning berilgan vaqtdagi tezlanishi deyiladi va bilan belgilanadi: ya’ni Bunda Shu sababli , ya’ni



ya’ni material nuqta harakat qonunidan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosila to‘g‘ri chiziqli harakatda material nuqtaning vaqtdagi tezlanishiga teng. Bu jumla *ikkinch i tartibli* *hosilaning mexanik ma’nosini*



ifodalaydi.

**Parametrik va oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari**

funksiya parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. U holda . Bundan murkkb va teskari funksiyalarni differensiallash qoidalariga ko‘ra ya’ni . (4.1.12)



Shu kabi topamiz: , va boshqa hosilalar.



*Misol*

funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz:



Bundan (4.1.12) formulaga ko‘ra



hosilani (20.1) formula ustida almashtirishlar bajarib, quyidagicha yozish mumkin



. (4.1.13)



funksiya tenglama bilan oshkormas ko‘rinishda



berilgan bo‘lsin.

Bu tenglama bo‘yicha differensiallansa va ga nisbatan yechilsa birinchi



tartibli hosila topiladi. Topilgan birinchi tartibli hosila bo‘yicha differensiallansa ikkinchi tartibli hosila kelib chiqadi. Bu hosilaga lar kiradi. Ikkinchi tartibli



hosilaga topilgan ni qo‘yib, ni va orqali ifodasi aniqlanadsi.



***Yuqori tartibli differensiallar***

Biror intervalda differensiyallanuvchi funksiyaning differensiyali *birinchi tartibli differensial* deyiladi. U holda



differensialga *ikkinchi tartibli differensial* deyiladi va

(4.1.14)



kabi yoziladi, bu yerda bilan ni belgilanadi.



Ikkinchi tartibli differensialdan olingan differensial *uchinchi tartibli differensial* deyiladi va hokazo. -tartibli differensial deb -tartibli



differensialdan olingan differensialga aytiladi va kabi yoziladi.



*Misol*

funksiya uchun ni topamiz:



Bundan



Bundan ya’ni funksiyaning -tartibli hosilasi funksiya -tartibli differensialning argument differensialining -darajasiga nisbatiga teng bo‘lishi kelib chiqadi.



Yuqorida keltirilgan formulalar erkli o‘zgaruvchi bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi. Agar funksiyada *biror erkli o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘lsa,* yuqori tartibli differesiallar invariantlik xossasiga bo‘ysunmaydi.



Buni ikkinchi tartibli differensial uchun ko‘rsatamiz. Ko‘paytmaning differensiali formulasiga ko‘ra



ya’ni (4.1.15)



(20.3) va (20.4) formulalarni solishtiramiz: murakkab funksiya uchun ikkinchi tartibli differensial o‘zgaradi, ya’ni bunda ikkinchi qo‘shiluvchi hosil bo‘ladi.



Agar bunda erkli o‘zgaruvchi bo‘lsa, u holda



va (4.1.15) ifoda (4.1.14) formulaga o‘tadi.

*Misol*

va funksiya uchun ni topamiz. Bunda larni (4.1.15) formulaga qo‘yamiz:



Boshqa yechim: va .



Bundan



U holda



*Misollar*

Hosilaning tatbiqiga oid misollar keltirami.

1. ellipsga nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzamiz. Buning uchun hosilaning nuqtadagi qiymatini topamiz:



,



nuqtaning koordinatalari va ni urinma hamda normal



tenglamalariga qo‘yamiz:

yoki ; yoki .



Demak, izlanayotgan urinma tenglamasi ,normal tenglamasi



.



2. Massasi 27 kg bo‘lgan jism qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakat qilmoqda. Jismning harakat boshlangandan sekund o‘tgandan keyingi kinetik energiyasini topamiz: .



U holda

(J).



**4.2. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI**

**4.2.1. Ferma teoremasi**

Differensial hisobning nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan teoremalari bilan tanishamiz.

**1-teorema** (*Ferma teoremasi*). funksiya intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervalning biror nuqtasida o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar funksiya nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, u holda



bo‘ladi.

*Isboti.* Aytaylik, funksiyanuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishsin. U holda uchun ya’ni bo‘ladi.



funksiyanuqtada hosilaga ega. Shu sababli bu nuqtada



funksiyaning o‘ng va chap hosilalari mavjud va

(4.2.1)



, (4.2.2)



(4.2.3)



5-shakl



bo‘ladi.

(4.2.1), (4.2.2) va (4.2.3) munosabatlardan bo‘lishi kelib chiqadi.



Funksiya nuqtada eng kichik qiymatga ega bo‘lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.



Ferma teoremasining geometrik talqini quyidagicha bo‘ladi: funksiya nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa, funksiya grafigiga nuqtada o‘tkazilgan urinma o’qqa parallel bo‘ladi (5-shakl).



kesma uchun Ferma teoremasi hamma vaqt ham o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, funksiya kesmada o‘zining eng katta ( da) va eng kichik (da) qiymatiga erishadi. Bu nuqtalarda



hoisla .



**4.2.2. Roll teoremasi**

**2-teorema** (*Roll teoremasi*). funksiya kesmada aniqlangan, uzluksiz va bo‘lsin. Agar funksiya intervalda chekli hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday nuqta topiladiki,



bo‘ladi.

*Isboti.* Shartga ko‘ra funksiya kesmada aniqlangan va uzluksiz. U holda Veershtrassning 2-teoremasiga ko‘ra funksiya shu kesmada o‘zining eng katta qiymati ga va eng kichik qiymati ga erishadi. Bunda bo‘lsa, funksiya kesmada o‘zgarmas va shu sababli uchun bo‘ladi.



Agar bo‘lsa, funksiya va qiymatlardan biriga biror nuqtada erishadi. Bunda Ferma teoremasiga asosan bo‘ladi.



6-shakl



7-shakl



Roll teoremasi ushbu geometrik talqinga ega: kesmaning ichki nuqtalarida uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlar qabul qiluvchi funksiya grafigida chunday nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma o‘qiga parallel bo‘ladi (6-shakl).



*Misollar*

1. funksiya uchun kesmada Roll teoremasi o‘rinli bo‘lishini tekshiramiz. funksiya kesmada uzluksiz, differensiallanuvchi va uning chetki nuqtalarida bir xil qiymatga ega: . Shu sababli, bu funksiya uchun Roll teoremasi o‘rinli bo‘ladi.



ning bo‘lgan qiymatini topamiz: Bundan .



2. funksiya uchun kesmada Roll teoremasi o‘rinli bo‘lishini tekshiramiz. funksiya kesmada uzluksiz, , . Bu hosila nuqtada mavjud emas. Demak, bu funksiya uchun Roll teoremasi o‘rinli bo‘lmaydi



**4.2.3. Lagranj teoremasi**

**3-teorema** (*Lagranj teoremasi*). funksiya kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar funksiya intervalda chekli hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday nuqta topiladiki,



(4.2.4) bo‘ladi.



*Isboti.* Teoremani isbotlash uchun yordamchi



funksiyani foydalanamiz. Shartga ko‘ra funksiya kesmada aniqlangan,



uzluksiz va intervalda hosilaga ega bo‘lgani uchun funksiya ham kesmada aniqlangan, uzluksiz va intervalda hosilaga ega bo‘ladi. Bunda



(4.2.5) va .



Demak, funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.



U holda shunday nuqta topiladiki, yoki (4.2.5) tenglikka ko‘ra bo‘ladi. Bundan .



Teoremaning geometrik talqinini beramiz.

qiymat funksiya grafigining va nuqtalari orqali o‘tivchi kesuvchining burchak koeffitsiyentini aniqlaydi. Teoremaga ko‘ra shunday topiladiki, nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma kesuvchiga parallel bo‘ladi (7-shakl).



(4.2.4) tenglikdan (4.2.6)



kelib chiqadi. Bu formulaga *Lagranj formulasi* yoki *chekli ayirmalar formulasi* deyiladi.

Agar desak, bu formulani



(4.2.7) ko‘rinishda yozish mumkin.



bo‘lgani uchun deyish mumkin.



U holda (4.2.7) ko‘rinishni oladi.



Langranj teoremasi yordamida taqribiy tenglikning aniqligini baholash mumkin. Buning uchun funksiya ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin deb, topamiz:



bu yerda



Demak, bo‘lsin.



va tengsizliklarni hisobga olib, topamiz:



Lagranj teoremasidan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

*Misol*

parabolaning urinmasi va nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo‘lgan nuqtasini topamiz.



funksiya va nuqtalarning abssissalari chetki nuqtalar bo‘lgan kesmada uzluksiz, chekli hosilaga ega. Shu sababli, bu funksiya uchun Lagranj teoremasini qo‘llash mumkin. Teoremaga ko‘ra parabolada hech bo‘lmaganda bitta nuqta topiladiki, funksiya grafigiga bu nuqtada o‘tkazilgan urinma vatarga parallel bo‘ladi. Lagranj formulasidan topamiz:



yoki .



Bundan U holda .



Demak, nuqtada berilgan parabolaning urinmasi va



nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo‘ladi.



**1-natija**. Agar biror intervalda funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lsa, funksiya shu intervalda o‘zgarmas bo‘ladi.

**2-natija**. Agar biror intervalda ikkita funksiya teng hosilalarga ega bo‘lsa,

funksiyalar bir-biridan o‘zgarmas qo‘shiluvchiga farq qiladi.

*Misol*  ekanini ko‘rsatamiz. Bunda



deb olsak, da bo‘ladi



U holda natijaga ko‘ra , ya’ni bo‘ladi. ni



topish uchun ga biror qiymatni, masalan, ni qo‘yamiz:



yoki . Bundan



**4.2.4. Koshi teoremasi**

**4-eorema** (*Koshi teoremasi*). va funksiyalar kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar funksiyalar intervalda chekli hosilaga ega bo‘lib, uchun bo‘lsa, u holda shunday nuqta topiladiki,



(4.2.8)



bo‘ladi.

*Isboti.* Teoremaning shartiga ko‘ra (4.2.8) tenglik ma’noga ega



bo‘lishi uchun bo‘lishi kerak. va funksiyalardan ushbu



funksiyani tuzamiz. Bu funksiya kesmada aniqlangan, uzluksiz va intervalda hosilaga ega. uchun



va bo‘ladi.



Demak, funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va shunday nuqta topiladiki, yoki



bo‘ladi. Bundan kelib chiqadi.



**4.2.5. Lopital teoremasi**

**5-teorema**



nuqtaning biror atrofida va funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va bo‘lsin.Agar va bo‘lib,



(chekli yoki cheksiz) limit mavjud bo‘lsa, u holda



(4.2.9)



bo‘ladi.

*Isboti.* va funksiyalar uchun nuqtaning biror atrofida yotuvchi kesmada Koshi teoremasini qo‘llaymiz.



U holda , bu yerda nuqta va nuqtalar orasida yotadi.



ni hisobga olib topamiz:



(4.2.10)



da ham ga intiladi. (4.2.10) tenglikda limitga o‘tamiz:



.



ekanidan . Shu sababli .



*Izohlar:* *1.* 1- teorema va funksiyalkar da aniqlanmagan, ammo va bo‘lganda ham o‘rinli bo‘ladi. Bunda va deb olish etarli.



*2.* 1-teorema da ham o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan ham deb, topamiz:



*3*. va funksiyalar 1-teoremaning shartlarini qanoatlantirsa teorema takror qo‘llanishi mumkin:



va hokazo.



*Misol*

limitni topamiz.*.*



funksiyalar nuqta atrofida aniqlangan. , ya’ni ko‘rinishdagi aniqmaslik hosil bo‘ladi. mavjud va . U holda 1-teoremaga ko‘ra



.



Demak,

.



1-teorema ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish imkonini beradi. ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.



**6-teorema**



nuqtaning biror atrofida va funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va bo‘lsin. Agar bo‘lib,



limit mavjud bo‘lsa, u holda bo‘ladi.



*Misol*

limitni topamiz.



.



va ko‘rinishdagi aniqmasliklarga asosiy aniqmasliklar deyiladi.



yoki ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar yordamida asosiy aniqmasliklarga keltiriladi. yoki ko‘rinishdagi aniqmasliklardan formula yordamida asosiy aniqmasliklar



hosil qilinadi. Hosil qilingan asosiy aniqmasliklar yuqorida keltirilgan teoremalar

yordamida ochiladi.

*Misollar*

1. .



2.



3.



4.



1.



5.



**4.2.6. Teylor teoremasi**

**7-teorema** (*Teylor teoremasi*). funksiya nuqtaning biror atrofuda aniqlangan bo‘lib, bu atrofda tartibligacha hosilalarga ega va hosila nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda



(4.2.11)



bo‘ladi, bunda



(4.2.11) tenglikka *Teylor formulasi* deyiladi. Uni isbotlash uchun

,



belgilashlar kiritamiz. Bunda bo‘lishi ko‘rsatilsa, teorema isbot bo‘ladi.



nuqtaning atrofida ( bo‘lsin) nuqtani tanlaymiz va kesmada



yordamchi funksiyani tanlaymiz.

funksiya kesmada usluksiz va differensiallanuvchi bo‘lib,



(4.2.12)



da va da



Demak, funksiya kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda shunday nuqta topiladiki, bo‘ladi.



(4.2.12) tenglikka ko’ra



Bundan

.



ga



n-tartibli *Teylor ko‘phadi* , ga Teylor formulasining*Lagranj ko‘rinishdagi qoldiq hadi*deyiladi.



da Teylor formulasidan yoki tenglik, ya’ni Lagranj formulasi kelib chiqadi. Demak, Lagranj formulasi Teylor formulasining hususiy holi bo‘ladi.



*Misol*

ko‘phadni ikkihadning butun musbat darajalari bo‘yicha yoyamiz. Buning uchun funksiyaning hosilalarini topamiz:



( uchun, ).



Ko‘phad va uning hosilalarining dagi qiymatlarini topamiz:



U holda



da Teylor formulasining xususiy hollaridan yana biri



hosil bo‘ladi. Bu formulaga *Maklorei formulasi* deyiladi.

Ayrim funksiyalarning Makloren formulasiga yoyilmasini keltiramiz:

1. , ;



Xususan, da



.



Formulalardan ayrimlarining isbotini keltiramiz.

1. bo’lsin.



U holda



Makloren formulasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

.



2. bo‘lsin.



U holda



Bundan



4. bo‘lsin.



Bundan



U holda



Teylor formulasi funksiyalar qiymatlarini va limitlarni berilgan aniqlikda hisoblashda qo‘llaniladi. Masalan, funksiyaning nuqtadagi qiymatini xatoligi dan katta bo‘lmagan aniqlikda hisoblash uchun Teylor ko‘phadini shunday darajasigacha olinadiki, bunda son



tengsizlikni qanoatilaniradigan larning eng kichigi qilib tanlanadi.



*Misol.*

sonini aniqlikda hisoblaymiz. Shartga ko‘ra . Makloren formulasiga binoan



ning shartni qanoatlantiruvchi eng kichik qiymati , bunda .



Demak,



Misol

limitni topamiz:



**4.3. FUNKSIYAlLARNI HOSILALAR YORDAMIDA TEKSHIRISH**

Differensial hisobning tatbiqlaridan biri hosilaning funksiyalarni tekshirish va grafigini chizishga qo‘llanilishi hisoblanadi. Quyida bu tatbiqlarni ifodalovchi teoremalarni keltiramiz.

**4.3.1. Funksiyaning monotonlik shartlari**

**1-teorema** (*funksiya monoton bo‘lishining zaruriy sharti*). Agar intervalda differensiallanuvchi funksiya shu intervalda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, u holda da bo‘ladi.



*Isboti.* funksiya intervalda o‘suvchi bo‘lsin. , nuqtalarni olamiz. U holda .Bundan yoki Teorema shartiga ko‘ra funksiya intervalda differensiallanuvchi, ya‘ni hosila mavjud. Demak,



funksiya intervalda kamayuvchi bo‘lganda teorema shu kabi isbotlanadi.



Bu teorema ushbu geometrik talqinga ega: biror intervalda differensiallanuvchi bo‘lgan o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinmalar o‘qning musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir (o‘tmas) burchak tashkil qiladi yoki ayrim nuqtalarda o‘qiga parallel bo‘ladi (8-shakl) ((9-shakl)).



9-shakl



8-shakl



**.**

**.**

**.**



**.**

**.**

**.**



**2-teorema** (*funksiya monoton bo‘lishining etarli sharti*). Agar intervalda differensiallanuvchi funksiya uchun da bo‘lsa, funksiya intervalda o‘sadi (kamayadi).



*Isboti.* bo‘lsin. , nuqtalarni olamiz.



kesmada Lagranj teoremasining shratlari bajariladi. Shu sababli Lagranj formulasiga binoan da bo‘ladi.



Teorema shartiga ko‘ra da, shu jumladan da.



va shuning uchun . Bundan yoki . Shunday qilib, funksiya da o‘sadi.



bo‘lganda teorema shu kabi isbotlanadi.



Funksiya o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lgan intervallar funksiyaning *monotonlik*

*intervallari* deb ataladi.

*Misol*funksiyaning monotonlik intervallarini topamiz.



10-shakl



.



U holda:dan yoki dan yoki



Demak, funksiya intervalda o‘sadi, intervalda



kamayadi.

**4.3.2. Funksiyaning ekstremumlari**

**1- ta’rif**. Agar nuqtaning shundav atrofi topilsaki, bu atrofning barcha nuqtalarida tengsizlik bajarilsa, nuqtaga funksiyaning *maksimum* (*minimum*) nuqtasi deyiladi.



Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalariga *ekstremum*nuqtalar deyiladi. Funksiyaning ekstremum nuqtadagi qiymati *funksiyaning ekstremumi* deb ataladi

Ekstremum tushunchasi funksiya aniqlanish sohasining biror atrofi bilan bog‘liq. Shu sababli funksiya ekstremumga aniqlanish sohasining faqat ichki nuqtalarida erishadi. Shu bilan birga funksiya o‘zining aniqlanish sohasida bir nechta minimumga yoki maksimumga erishishi va bunda maksimumlardan ayrimlari qandaydir minimumdan kichik bo‘lishi mumkin (10-shakl).

**3-teorema** (*ekstremum mavjud bo‘lishining zaruriy sharti*). Agar funksiya nuqtada differensiallanuvchi bo’lib, shu nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda bo‘ladi.



*Isboti.*  nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsin. U holda



shunday interval topiladiki , bu intervalda funksiya o‘zining eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishadi. U holda Ferma teoremasiga ko‘ra bo‘ladi.



11-shakl



Bu teorema quyidagicha geometrik talqinga ega. Agar nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa (masalan, 10-shaklda nuqta), funksiya grafigiga shu nuqtada urinma o‘tkazish mumkin va bu urinma o‘qiga parallel bo‘ladi.



Bu teorema funksiya nuqtada uzluksiz bo‘lib, differensiallanuvchi bo‘lmasa ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, uzluksiz funksiya nuqtada hosilaga ega emas, ammo minimum nuqta (11-shakl).

12-shakl



hosila nolga teng bo‘lgan yoki mavjud bo‘lmagan nuqtaga *birinchi tur kritik*nuqta deyiladi. Hamma birinchi tur kritik nuqta ham ekstremum nuqta bo‘lmaydi. Masalan, funksiya uchun da. Demak, kritik nuqta, ammo u ekstremum nuqta emas (12-shakl). Shunday qilib, shart ekstremum mavjud bo‘lishligining zaruriy sharti boladi.



**4-teorema** (*ekstremum mavjud bo‘lishining etarli harti*). Agar funksiya birinchi tur kritik nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi bo‘lib,



nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tganida hosila: ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa nuqta maksimum nuqta bo‘ladi; manfiydan musbatga o‘zgartirsa nuqta minimum nuqta bo‘ladi; ishorasini o‘zgartirmasa nuqtada ekstremum mavjud bo‘lmaydi.



*Isboti.* birinchi turkritik nuqta va da , da bo‘lsin. U holda 1-teoremaga ko‘ra funksiya intervalda o‘sadi va intervalda kamayadi. Demak, funksiyaning nuqtadagi qiymati uning nuqtadagi qiymatidan katta bo‘ladi , ya’ni funksiya nuqtada maksimumga erishadi.



da va da bo‘lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.



Funksiyani ekstremumga tekshirish *-* bu funksiyaning barcha ekstremumlarini topish demakdir. Ekstremum mavjud bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlaridan quyidagi funksiyani ekstremumga tekshirish qoidasi kelib chiqadi:

funksiyaning birinchi tur kritik nuqtalari topiladi;



bu nuqtalardan funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lganlari tanlanadi;



tanlangan nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda hosilanig ishorasi tekshiriladi;



4- teoremaga asosan funksilaning ekstremum nuqtalari (agar ular bor



bo‘lsa) aniqlanadi va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

*Misol*

**.**

**.**



funksiyaning ekstremumlarini topamiz. , ya’ni Hosila nuqtada mavjud emas va nuqtada nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta intervallarga ajratadi. Hosilaning har bir kritik nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:



Demak, minimum nuqta, va maksimum nuqta, .



13-shakl



*Misol* Asosi ga va balandligi ga teng uchburchakka eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. Bu to‘rtburchakning yuzasini topamiz.



To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari va bo‘lsin.



Uchburchaklarning o‘xshashlik alomatidan topamiz (13-shakl): . U holda va dan



Bu qiymatda va to‘g‘ri to‘rtburchak eng katta yuzaga ega bo‘ladi.



da va eng katta to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasi



(yuza.b)



**4.3.3. Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari**

funksiya kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda funksiya bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlarni funksiya kesmaning yoki ichki nuqtasida yoki chegarasida ( yoki da nuqtalarda) erishadi. Agar bo‘lsa, bu nuqtani kritik nuqtalar orasidan izlashga to‘g‘ri keladi.



Shunday qilib, kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:



funksiyaning intervaldagi birinchi turkritik nuqtalari topiladi;



funksiyaning topilgan nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi;



funksiyaning kesmaning chegarasidagi, ya’ni va nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi;



hisoblangan qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigi tanlanadi.



*Izohlar:* *1.* Agar funksiya kesmada faqat bitta kritik nuqtaga ega bo‘lib, u maksimum (minimum) nuqta bo’lsa, bu nuqtada funksiya o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi, ya’ni () bo‘ladi.



*2.* Agar funksiya kesmada kritik nuqtaga ega bo‘lmasa, bu



funksiyaning kesmada monoton o‘sishi yoki monoton kamayishini bildiradi.

*Misol*  funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz:



dan ;



**.**



14-shakl



qavariq

botiq



**4.3.4. Funksiya grafigining botiqligi,qavariqligi va egilish nuqtalari**

funksiya intervalda differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda funksiya grafigining , nuqtada urinmasi mavjud bo‘ladi.



**2-ta’rif**. Agar intervalning istalgan nuqtasida funksiya grafigi unga o‘tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, funksiya grafigi intervalda *botiq* (*qavariq*) deyiladi.



Funksiya grafigining botiq qismini qavariq qismidan ajratuvchi nuqta funksiya grafigining *egilish nuqtasi* deb ataladi (14-shakl).



**5-teorema**.Agar funksiya intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega va da bo‘lsa, u holda funksiya grafigi intervalda qavariq (botiq) bo‘ladi.



15-shakl



**.**



*Isboti.* da bo‘lsin. Funksiya grafigida abssissali ixtiyoriy nuqta olamiz (15-shakl). Funksiyaning grafigi bu urinmadan pastda yotishini ko‘rsatamiz. Buning uchun nuqtada egri chiziqning ordinatasi bilan urinmaning ordinatasini solishtiramiz.



Urinma tenglamasini tuzamiz:

yoki



U holda



Lagranj teoremasiga ko‘ra bu yerda bilan ning orasida yotadi. Shu sababli



yoki .



ayirmaga Lagranj teoremasini takror qo‘llaymiz:



bu yerda bilan ning orasida yotadi.



Demak,



Bu tengsizlikni tekshiramiz:

1) agar bo‘lsa, u holda bo‘ladi va . Bundan yoki ;



2) agar bo‘lsa, u holda bo‘ladi va . Bundan yoki .



Demak, da urinmaning ordinatasi funksiya grafigining ordinatasidan katta bo‘ladi va intervalda funksiya grafigi qavariq.



da funksiya grafigi botiq bo‘lishi shu kabi isbotlanadi.



Funksiya grafigining egilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslanadi.

**6-teorema** (*egilish nuqta mavjud bo‘lishining zaruriy sharti*). Agar funksiya intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega va nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘lsa, u holda bo‘ladi.



Demak, shart egilish nuqta mavjud bo‘lishining zaruriy sharti bo‘ladi.



**7-teorema** (*egilish nuqta mavjud bo‘lishining etarli sharti*) funksiya nuqtaning biror atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsin. Agar atrofning nuqtadan chap va o‘ng tomonlarida hosila har xil ishoraga ega bo‘lsa, u holda nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.



Bu teorema funksiya nuqtaning biror atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lib, nuqtada mavjud bo‘lmasa ham o‘rinli bo‘ladi. Shu sababli egilish nuqtalarni ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo‘lgan



yoki uzilishga ega bo‘lgan nuqtalar, ya’ni ikkinchi tur kritik nuqtalar orasidan

izlash kerak.

*Misol* funksiya grafigini botiq va qavariqlikka tekshiramiz.



Ikkinchi tartibli hosila nuqtalarda nolga teng va mavjud emas.



hosilaning bu nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini tekshiramiz:



**.**

**.**

**.**



Demak, funksiyaning grafigi va intervallarda qavariq, va intervallarda botiq

16-shakl



**.**



bo‘ladi. nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.



**4.3.5. Funksiya grafigining asimptotalari**

*Egri chiziqning asimptotasi* deb shunday to‘g‘ri chiziqqa aytiladiki, egri chiziqda yotuvchi nuqta egri chiziq bo‘ylab harakat qilib koordinata boshidan chеksiz uzoqlashgani sari nuqtadan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa nolga intiladi.



Bunda nuqta asimptotaga juda yaqinlashib boradi, lеkin uni kеsib o‘tmaydi (16-shakl).



Uch turdagi, ya’ni vertikal, gorizontal va og‘ma asimptotalar mavjud.

Agar yoki limitlardan hech bo‘lmaganda bittasi cheksiz ( yoki) bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqqa funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deyiladi.



Masalan, funksiya grafigi uchun to‘g‘ri chiziqvertikal asimptota, chunki va .



Agar shunday va sonlari mavjud bo‘lib, da funksiya



ko‘rinishda ifodalansa to‘g‘ri chiziqqa funksiya grafigining *og‘ma asimptotasi* deyiladi.



**8-teorema**. funksiya grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi uchun



, bo‘lishi zarur va etarli.



Agar , limitlardan hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksiz bo‘lsa, funksiya grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lmaydi.



Agarr bo‘lsa, bo‘ladi. Bunda to‘g‘ri chiziqqa funksiya grafigining *gorizontal asimptotasi* deyiladi.



*Izoh.* funksiya grafigining asimptotalari da va da har xil bo‘lishi mumkin. Shu sababli , limitlarni



aniqlashda va hollarini alohida qarash lozim.



*Misol* funksiya grafigining asimptotalarini topamiz.



.



Demak, to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota.



,



,



Bundan . Demak, to‘g‘ri chiziqog‘ma asimptota.



**4.3.6. Funksiyani tekshirish va grafigini chizishning umumiy sxemasi**

Funksiyani tekshirish va grafigini chizish ma’lum tartibda (sxema asosida) bajariladi. Shunday sxemalardan birini keltiramiz.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.



Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishadigan nuqtalarini (agar ular mavjud bo‘lsa) aniqlash.



Funksiyaning ishorasi o‘zgarmaydigan oraliqlarni (yoki bo‘ladigan oraliqlarni) aniqlash.



Funksiyaning juft*-*toqligini tekshirish.



Funksiya grafigining asimptotalarini topish.



Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash va ekstremumlarini topish.



Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlash.



bandlardagi tekshirishlar asosida funksiyaning grafigi chiziladi.



Keltirilgan sxemaning hamma bandlari albatta bajarilishi shart emas. Soddaroq hollarda keltirilgan bandlardan ayrimlarini, masalan ni bajarish etarli bo‘ladi. Agar funksiya grafigi juda tushunarli bo‘lmasa bandlardan keyin funksiyaning davriyligini tekshirish, funksiyaning bir nechta qo‘shmcha nuqtalarini topish va funksiyaning boshqa xususiyatlarini aniqlash bo‘yicha



qo‘shmcha tekshirishlar o‘tkajish mumkin.

*Misollar* 1. funksiyani tekshiramiz va grafigini chizamiz.



Funksiyaning aniqlanish sohasi:



da bo‘ladi. Funksiya o‘qini nuqtada kesadi. bo‘lgani uchun funksiya o‘qini kesmaydi.



Funksiya va intervallarda musbat ishorali va interval-da manfiy ishorali.



Funksiya uchun bo’ladi. Demak, u juft.

17-shakl



Demak, va to‘g‘ri chiziqlar vertikal asimptotalar bo‘ladi.



(da ham da ham ),



Demak, to‘g‘ri chiziqda ham da ham gorizontal asimptota bo‘ladi.



Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.



.



Birinchi tartibli hosila va da mavjud emas va da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini to‘rtta



intervallarga ajratadi. Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:



**.**

**.**

**.**



Demak, funksiya intervalda o‘sadi va intervalda kamayadi. maksimum nuqta, .



Funksiyaning qavariqlik va botiq-lik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.



Ikkinchi tartibli hosila va nuqtalarda mavjud emas.



hosilaning intervallardagi va har bir ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini tekshiramiz:



**.**

**.**



Demak, funksiyaning grafigi intervalda qavariq, va intervallarda botiq bo‘ladi. Funksiya grafigining egilish nuqtasi yo‘q.



bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz (17-shakl).



2. funksiyani tekshiramiz va grafigini chizamiz.



Funksiyaning aniqlanish sohasi:



da bo‘ladi. Funksiya va o‘qlarini nuqtada kesadi.



Funksiya va intervallarda musbat ishorali.



Funksiya uchun va bo‘ladi. Demak,



u umumiy ko‘rinishdagi funksiya.

Funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘lgani uchun u vertikal asimptotaga ega emas.



.



Demak, da to‘g‘ri chiziq gorizontal assimptota.



Demak, da funksiya assimptotaga ega emas.



Funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.



Hosila va da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta intervallarga ajratadi.



**.**

**.**



Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tgandagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiya intervalda o‘sadi va va intervallarda kamayadi. minimum nuqta, va maksimum nuqta



18-shakl

**.**



Funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.



.



Ikkinchi tartibli hosila va nuqtalarda nolga teng.



Bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasini



Intervallarga ajratadi. hosilaning bu intervallardagi va ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tgandagi ishora- larini chizmada belgilaymiz:



Demak, funksiyaning grafigi intervalda qavariq, va intervallarda botiq bo‘ladi, va funksiya grafigining egilish nuqtalari.



bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz (18-shakl).



**.**

**.**



**6.1. ANIQMAS INTEGRAL**

**6.1.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral**

Berilgаn funksiyaning hоsilаsini tоpish differensiаl hisоbning аsоsiy masalalaridan biri hisoblanadi. Matematik analiz masalalarining turliligi, uning geometriya, mexanika, fizika va texnikadagi keng miqyosdagi tatbiqi teskari masalani yechishga, ya’ni beilgаn  funksiya uchun hоsilаsi shu funksiyaga teng bo‘lgan  funksiyani tоpishga olib keladi.

Funksiyaning berilgan hоsilаsiga ko‘ra uning o‘zini topish masalasi integrаl hisоbning аsоsiy masalalaridan biri hisoblanadi.

 funksiya  intervalda aniqlangan bo‘lsin.

**1-ta’rif**. Agar  intervalda differensiallanuvchi  funksiyanig hosilasi berilgan  funksiyaga teng, ya’ni  ( yoki 

bo‘lsa,  funksiyaga  intervalda  funksiyaning *bоshlаng‘ich funksiyasi* deyilаdi.

Masalan:  funksiya butun sоnlаr oqidа  funksiyaning bоshlаng‘ich funksiyasi bo‘lаdi, chunki da ;  funksiya intervaldа  funksiyaning bоshlаng‘ich funksiyasi bo‘lаdi, chunki da 

**Lemma**.Agar  va  funksiyalar  intervalda  funksiyaning

bоshlаng‘ich funksiya bo‘lsа, u hоldа  va  bir- biridan o‘zgаrmаs

sоnga farq qiladi..

Shunday qilib, funksiya intervalda birоr bоshlаng‘ich funksiyaga ega bo‘lsa, uning qоlgаn barcha bоshlаng‘ich funksiyalаri to‘plamni tashkil qiladi.



**2-ta’rif**. funksiyaning intervaldagi bоshlаng‘ich funksiyalari to‘plamiga funksiyaning *аniqmаs integrаli* deyilаdi vа kаbi belgilаnаdi.



Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra (6.1.1)



bu yerdа-*integrаl оstidаgi funksiya*, -*integrаl оstidаgi ifоdа*;



- *integrаllаsh o‘zgаruvchisi*, - *integrаllash belgisi* deb ataladi.



Аniqmаs integrаlni tоpish, ya’ni berilgаn funksiyaning bоshlаng‘ich funksiyalari to‘plamini aniqlash masalasi *funksiyani integrаllаsh* deyilаdi.

Demak, funksiyani integrallash amali funksiyani differensiallashga teskari amal bo‘ladi.

Berilgan funksiya qachon boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘ladi degan savolga quyidagi teorema javob beradi (teoremani isbotsiz keltiramiz).



**2-teorema**.Agar funksiya kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda u bu kesmada uzluksiz bo‘lgan boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘ladi.



Ko‘p hollarda funksiya funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladigan interval ko‘rsatilmaydi. Bunday holda interval sifatida funksiyaning aniqlanish sohasi tushuniladi. Shu sababli bundan keyin integrаl оstidаgi funksiyalar uzluksiz va (6.1.1) formula ma’noga ega deb hisoblaymiz. Masalan, funksiya va intervalda uzluksiz.

1-shakl



Shuning sababli uning aniqmas integrali deb



funksiya tushuniladi.

Bоshlаng‘ich funksiyaning grаfigi *integrаl egri chiziq* deb ataladi.

Aniqmаs integrаl *geоmetrik jihаtdаn* iхtiyoriy o‘zgаrmаsgа bоg‘liq bo‘lgаn barcha integral egri chiziqlаr to‘plаmini ifоdаlаydi. Agar funksiyaning grafigi integral egri chiziq bo‘lsa, boshqa integral egri chiziqlar uni o‘qi bo‘yicha parallel ko‘chirish yordamida hosil qilinadi (1-shakl).



**6.1.2. Aniqmas intеgralning xossalari**

Aniqmas intеgral quyidagi xossalarga ega.

Aniqmas integralning hosilasi (differensiali) integral ostidagi funksiyaga (ifodaga) teng:



;



*Isboti*. funksiya funksiyaningbоshlаng‘ich funksiyasi, ya’ni bo‘lsin. U holda



.



Bu xossa *integrallashning to‘g‘riligini differensiallash orqali tekshirish* imkonini beradi.

Masalan, to‘g‘ri, chunki



Funksiya differentsialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas sonning yig‘indisiga teng:



.



*Isboti*. bo‘lsin. U holda



Ozgarmas ko‘paytuvchini aniqmas integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:



*Isboti*. bo‘lsin. Bundan



( deb olindi).



Chekli sоndаgi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig‘indisiga teng:



.



*Isboti*. bo‘lsin. U holda



Аgаr bo‘lsа, u hоldа *х* ning istalgan differensiаllаnuvchi funksiyasi uchun bo‘lаdi.



*Isboti*. erkli o‘zgaruvchi, uzluksiz funksiya, funksiya funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. U holda bo‘ladi.



bo‘lsin, bu yerda - uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan funksiya.



Birinchi differensialning invariantlik xossasiga ko‘ra



bo‘ladi.

Bundan



Bu xossa integrallash formulasining invariantligi xossasi deyiladi. Demak, aniqmas integral integrallash o‘zgaruvchisi erkli o‘zgaruvchi yoki erkli o‘zgaruvchining uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan uixtiyoriy funksiyasi bo‘lishidan

qat’iy nazar bir xil formula bilan topiladi.

**6.1.3. Asosiy integrallar jadvali**

Integrallash differensiallash amaliga teskari amal bo‘lgani uchun asosiy integrallar jadvalini differensial hisobning mos formulalarini (differensiallar jadvalini) qo‘llash va aniqmas integralning xossalaridan foydalanish orqali hosil qilish mumkin.

Masalan, ekanidan



Quyida keltiriladigan integrallar *asosiy integrallar jadvali* deyiladi.

Asosiy integrallar jadvalida integrallash o‘zgaruvchisi erkli o‘zgaruvchi yoki erkli o‘zgaruvchining funksiyasi ( xossaga ko‘ra) bo‘lishi mumkin.



Jadvalda keltirilgan formulalarning to‘g‘riligiga uning o‘ng tomonini differensiallash va bu differensialning formula chap tomonidagi integral ostidafi ifodaga teng bo‘lishini tekshirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

Bu integrallardan birining, masalan 13- formulaning to‘g‘riligini ko‘rsatamiz:



***Asosiy integrallar jadvali***

Quyidagi integrallarga odatda jadval integrallari deyiladi.

1. ; 2.



3. 4.



5. 6.



7. 8.



9. 10.



11. 12.



13. 14.



15. 16.



17. 18.



19. 20.



**6.1.4. Integrallash usullari**

***Bevosita integrallash usuli***

Integral ostidafi funksiyada (yoki ifodada) almashtirishlar bajarish va aniqmas intеgralning xossalarini qo‘llash orqali berilgan integralni bir yoki bir nechta

jadval integraliga kelnitib integrallash usuliga *bevosita integrallash usuli*deyiladi.

*Misollar*

1.



;



2.



3.



4.



Berilgan integralni jadval integrallariga keltirishda differensialning quyidagi almashtirishlari («differensial amali ostiga kiritish» jarayoni) qo‘llaniladi:

son;



Umuman olganda, . Bu formuladan integrallarni topishda



ko‘p foydalaniladi.

*Misollar*

1.



2.



***O‘rniga qo‘yish (o‘zgaruvchini almashtirish) usuli***

Ko‘pchilik hollarda integrаlda o‘zgаruvchini аlmаshtirish uni bevosita integrallashga olib keladi. Integrallashning bu usuli *o‘rniga qo‘yish* (*o‘zgaruvchini almashtirish*) *usuli* deb yuritiladi. Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

**2-teorema**. Biror *T* оrаliqda aniqlangan va differensiallanuvchi funksiyaning qiymatlar sohasi dan iborat bo‘lib, da funksiya aniqlangan bo‘lsin, y’ani оrаliqda murakkab funksiya aniqlangan bo’lsin. Agar funksiyaоrаliqdafunksiyaning bоshlаng‘ich funksiyasi bo‘lsа, u holda



(6.1.2) bo‘ladi.



*Isboti.*оrаliqda va funksiyalaraniqlangan.



Shu sababli va murakkab funksiyalar оrаliqda aniqlangan, differensiallanuvchi hamda



bo‘ladi. Bundan



hisobga olinsa,



(6.1.2) formula *aniqmas integralda o’zgaruvchini almashtirish*formulasi deb

yuritiladi.

Ayrim hollarda o‘rniga qo‘yish bajarishga to‘g‘ri keladi.



U holda bo‘ladi. Demak, (6.1.2) formula o‘ngdan



chapga qo‘llanishi ham mumkin.

*Misollar*

1. integralni topamiz. Bunibg uchun o‘rniga qo‘yish bajaramiz. U holda



Shu sababli



2. integralni topamiz. bo’lsin.



Bundan



(6.1.2) formulaga ko‘ra



*Izoh.* Ayrim hollarda integrallashning o‘zgaruvchini almashtirish usuli takroran qo‘llaniladi, ja’ni bunda bajarilgan o‘rniga qo‘yishdan so‘ng shunday integral hosil bo‘ladiki, bu integralni boshqa o‘rniga qo‘yish orqali soddalashtirish

yoki jadval integraliga keltirish mumkiin bo‘ladi.

***Bo‘laklab intеgrallash usuli***

Bo‘laklab integrallash usuli ikki funktsiya ko‘paytmasining differentsiali formulasiga asoslanadi.

**3-teorema**.va funksiyalar qandaydirоrаliqda aniqlangan va differentsiallanuvchi bo‘lib, funksiya bu оrаliqda bоshlаng‘ich funksiyaga ega, y’ani integral mavjud bo‘lsin. U holda оrаliqda funksiya bоshlаng‘ich funksiyaga ega va



(6.1.3)



bo‘ladi.

*Isboti*. tenglikdan



.



va funksiyalar intervalda boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lgani uchun ham intervalda boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘ladi. Oxirgi tenglikning chap va o‘ng tomonini integrallasak, (6.1.3) formula kelib chiqadi.



(6.1.3) formulaga *aniqmas integralni bo‘laklab integrallash* formulasideyiladi.

Ma’lumki, . Bundan (6.1.3) formula



(6.1.4)



ko‘rinishga keltiriladi.

Bo‘laklab integrallash usulining mohiyati berilgan integralda integral ostidagi ifodani ko‘paytma shaklida tasvirlash va (6.1.4) formulani qo‘llagan holda berilgan integralni oson integrallanadigan integral bilan almashtirib topishdan iborat.



Bo‘laklab integrallash orqali topiladigan integrallarni asosan uch guruhga ajratish mumkin:

1) , ,



(bu yerda - ko‘phad) ko‘rinishdagi 1-guruh integrallar.



Bunda , qolgan ko‘paytuvchilar bilan belgilanadi;



2) , ko‘rinishdagi 2-guruh integrallar. Bunday bo‘laklashda , qolgan ko‘paytuvchilar deb olinadi;



3) ko‘rinishdagi 3-guruh integrallar bo‘laklab



integrallash formulasini takroran qo‘llash orqali topiladi.

*Misollar*

1.



2.



3.



Bundan



Ko‘rsatilgan uch guruh bo‘laklab integrallanadigan barcha integrallarni o‘z ichiga olmaydi.

Masalan,

2.



3.



**6.2. RATSIONAL FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH**

**6.2.1. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga yoyish**

Ikkita va ko‘phаdning nisbаtiga



*ratsional kаsr funksiya* (*rаtsiоnаl kаsr*) deyiladi.

bo‘lganda rаtsiоnаl kаsr *to‘g‘ri kаsr*, bo‘lganda *nоto‘g‘ri kаsr* deyilаdi.



kаsr nоto‘g‘ri kasrda urniig surаtini mахrаjigа оdаtdаgidek bo‘lish yo‘li bilаn kasrdan butun qismi аjrаtiladi, ya’ni



tenglik hosil qilinadi, bu yerda - butun qism deb аtаluvchi ko‘phаd,



- to‘g‘ri kаsr, chunki qоldiqning dаrаjаsi ning dаrаjаsidаn kichik.



Quyidаgi to‘g‘ri kаsrlаrga *sоddа* (*elementar*) *kаsrlаr* deyilаdi:

;



,



, ();



, ,



bu yerdа - hаqiqiy sonlar.



Ma’lumki, (23-§, 6-teorema) har qanday haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad



(6.2.1)



ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga ajratiladi. Bunda - ko‘phaddagi oldidagi koeffitsiyent, - ko‘phadning mos ravishda karrali ildizlari, kvadrat uchhadlar uchun diskreminant , ; - natural sonlar.



**1-teоremа**. Maxraji (6.2.1) ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga ajratilgan hаr qаndаy to‘g‘ri kаsrni sodda kаsrlаr yig‘indisiga yagona tarzda yoyish mumkin.



Bundа:

1) (6.2.1) ifodaning ko‘rinishdаgi ko‘pаytuvchisigа I turdаgi kаsr mоs kelаdi;



2) (6.2.1) ifodaning ko‘rinshidаgi ko‘pаytuvchisigа I vа II turdаgi tа kasrlar yig‘indisi mоs kelаdi;



3) (6.2.1) ifodaning korinishdаgi ko‘pаytuvchisigа III turdаgi kаsr mоs kelаdi;



4) (6.2.1) ifodaning ko‘rinishdаgi ko‘pаytuvchisigа III vа IV turdаgi tа kаsrlar yig‘indisi mоs kelаdi.



Shunday qilib, teoremaga ko‘ra



(6.2.2)



bu yerda noma’lum kоeffitsiyentlаr.



(6.2.2) tenglik noma’lum koeffitsientlarini topishning turli usullаri mаvjud. Masalan, noma’lum koeffitsientlarni topishda *koeffitsiyentlarni tenglashtirish* usulini qo‘llash mumkin.

Bu usul quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1. (6.2.2) yoyilmaning o‘ng tomoni umumiy maxraj ga keltiriladi; natijada ayniyat hosil bo‘ladi, bu yerda - koeffitsiyentlari no’malum bo‘lgan ko‘phad.



2. Hosil bo‘lgan ayniyatda maxrajlar teng bo‘lgani uchun, suratlar ham aynan teng bo‘ladi, ya’ni



3. tenglikda ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlar tenglashtiriladi ( ko‘phadlarning aynan tengligi haqidagi teoremaga ko‘ra);



natijada tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi va bu sistemadan izlanayotgan

kоeffitsiyentlаr topiladi.



*Misol*

to‘g‘ri kаsrni oddiy kasrlar yig‘indisiga yoyamiz. Buning uchun ning mахrаjini ko‘pаytuvchilаrgа аjrаtаmiz:



ni 1-teoremaga asosan sodda kasrlar yifg‘indisiga yoyamiz:



Noma’lum koeffitsientlarini koeffitsiyentlarni tenglashtirish usuli bilan topamiz. Buning uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz, hosil bo’lgan tenglikning har ikkala tomonida maxrajlarni tashlab yuboramiz va quyidagi tenglikni hosil qilamiz:



ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtiramiz:



Sistemani yechamiz:



Demak,



**6.2.2. Sodda ratsional kasrlarni integrallash**

I vа II turdаgi sodda kаsrlаr jаdvаl integrаllаrigа orqali topiladi:

(6.2.3)



(6.2.4)



III turdаgi sodda kasrni qaraymiz. integrаlining surаtidа kаsrning mахrаjidаn оlingаn hоsilа ni ajratamiz va natijani integrallaymiz:



Integrаllаrdаn birinchisi .



Ikkinchi integrаl mахrаjidа to‘liq kvаdrаt аjrаtаmiz va uni integrallaymiz:



bunda , chunki



Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

(6.2.5)



*Misol*

integrаlni topamiz.



integrаlni topamiz:



Bundan



IV turdаgi sodda kasrning integrаlni topamiz:

(6.2.6)



Bunda birinchi integrаl jadvaldagi integralga keltirib, topilаdi:



Ikkinchi integrаlgа (uni bilan belgilaymiz) belgilash kiritamiz va almashtirish bajaramiz. U holda



.



Bunda birinchi integral ga o‘xshash bo‘lib, unda maxrajning darajasi bir



birlikka kichik. Shu sababli uni bilan belgilaymiz. Ikkinchi integralni bo‘laklab



integrallaymiz:



Demak, integrаlni hisoblash uchun darajani pasaytirish formulasini hosil qilamiz:



yoki

. (6.2.7)



Shunday qilib, (6.2.7) formula bo‘yicha integralni topamiz, dagi barcha ni bilan almashtiramiz va birinchi va ikkinchi integralni (6.2.6) tenglikka qo‘yib IV turdаgi sodda kasr integrаlini topish uchun ifoda hosil qilamiz.



(6.2.7) fоrmulа bo‘yicha integralni topish indeksi bittaga kichik bolgan integralni topishga, integralni topish esa o‘z navbatida integralni topishga keltiriladi va bu jarayon quyidagi jadval integralni topishgacha davom ettiriladi:



Demak, (6.2.7) formula orqali dan ga , so‘ngra qaytiladi va hokazo. Shu sababli bunday formulalar*keltirish* yoki *rekurrent* (*qаytuvchаn*) fоrmulаlar



deyilаdi.

*Misol*

integrаlni topamiz.



bu yerda



Bundan



Demak,



**6.2.3. Ratsional kasr funktsiyalarni integrallash**

Yuqorida aytilganlardan kelib chiqadiki, rаtsiоnаl kаsr funksiyani integrаllаsh quyidagi tartibda amalga oshiriladi:



1. berilgan ratsional kasrning to‘g‘ri yoki nоto‘g‘ri kаsr ekаnini tekshirish; agar kasr nоto‘g‘ri bo‘lsa, kasrdan butun qismini аjrаtish;
2. to‘g‘ri kasrning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratish;
3. to‘g‘ri kаsrni sodda kаsrlаr yig‘indisigа yoyish va yoyilmаning kоeffitsiyentlаrni topish;
4. hosil bo‘lgan ko‘phad va sodda kasrlar yig‘indisini integrаllаsh.

*Misol*

integrаlni topamiz.



nо to‘g‘ri kasr, chunki



Suratni maxrajga bo‘lish orqali kasrdan butun qismini ajratamiz:



Bundan



To‘g‘ri kasrning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:



To‘g‘ri kasrni sodda kasrlar ga yoyamiz:



Yoyilmaning koeffitsiyentlarini topamiz:



Bundan



yoki Shunday qilib,



Ko‘phad va sodda kasrlar yig‘indisini integrаllаymiz:



**6.3. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH**

Trigonometrik funksiyalarni integrallas usullaridan ayrimlari bilan tanishamiz. Fаqаt trigоnоmetrik o‘zgaruvchlar ustida ratsional amallar (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish) bajarilgan ifoda berilgаn bo‘lsin. Bunday ifodani barcha trigonometrik funksiyalarni vа funksiyalar orqali ratsional ravishda



ifodalash va ko‘rinishga keltirish mumkin.



**6.3.1. ko‘rinishidagi integrallar**



ko‘rinishidagi integrаlni o‘rnigа qo‘yish orgali hamma vaqt o‘zgаruvchili ratsional funksiyaning integrаligа аlmаshtirish, ya’ni *ratsionallаshtirish* mumkin.



Hаqiqаtаn ham ifodadan



, ,



o‘rniga qo‘yishlar yordamida o‘zgaruvchili



ratsional funksiya kelib chiqadi.

o‘rnigа qo‘yish orgali ko‘rinishidagi har qanday integralni topish mumkin. Shu sababli bu o‘rniga qo‘yish *universаl trigоnоmetrik*



*o‘rniga qo‘yish* deb ataladi.

*Misol*

integralni topamiz. Bunda o‘rniga qo‘yish bajaramiz. U holda



No’malum koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:



Demak,



Universаl trigоnоmetrik o‘rniga qo‘yish ko‘rinishidagi har qanday funksiyani ratsionallashtirish imkonini beradi, ammo аmаldа ko‘pinchа аnchа murаkkаb ratsional funksiyalar hosil bo‘lishi mumkin. Shu sababli bа’zаn yuqorida keltirilgan integralni topishda quyidagi sоddа o‘rnigа qo‘yishlаrdаn fоydаlаnilаdi:



a) agаr ifoda ga nisbatan toq, ya’ni



bo‘lsа, u hоldа o‘rnigа qo‘yish bu funksiyani ratsionallаshtirаdi;



b) agаr ifoda ga nisbatan toq, ya’ni



bo‘lsа, u hоldа o‘rnigа qo‘yish orqali bu funksiya ratsionallаshtirilаdi;



c) agаr ifoda va larga nisbatan juft, ya’ni bo‘lsа, u hоldа o‘rnigа qo‘yish bu funksiyani rаtsiоnаllаshtirаdi.



Bunda quyidagi almashtirishlardan foydalaniladi:

, , .



*Misollar*

1. integralni topami. Integral ostidagi funksiya ga nisbatan toq funksiya. Shu sababli deb olamiz.



U holda



2. integralni topamiz. Integral ostidagi funksiya ga nisbatan



juft funksiya, shu sababli o‘rnigа qo‘yishdan foydalanamiz:



**6.3.2. ko‘rinishidagi integrallar**



ko’rinishidagi integrallar vа butun sоnlаrga bоg‘liq hоldа quyidagicha topiladi:



a) vа tоq bo‘lganida o‘rnigа qo‘yish integrаlni ratsionallаshtirаdi;



a) vа tоq bo‘lganida o‘rnigа qo‘yish orqali integrаl ratsionallаshtirilаdi;



c) ikkаlа vа daraja ko‘rsаtkichlаr juft vа nоmаnfiy bo‘lganida



,



fоrmulаlаridаn fоydаlаnib, dаrаjаlar pаsаytiriladi;

d) va juft bo‘lganida yoki o’rnigа qo‘yishdan foydalaniladi. Bunda va bo‘lsa, u holda suratda , almashtirishdan iborat sun’iy usul qo‘llаb, ratsional funksiyalаrni integrаllаshgа keltiriladi;



e) va ulardan biri tоq bo‘lganida va lardan qaysi birining darajasi toqligiga qarab, surat va maxrajni shu funksiyaga qo‘shimcha



ko‘paytirishdan foydalaniladi.

*Misollar*

1.



2.



**6.3.3. va ko‘rinishidagi integrallar**



va (bu yerda butun son) ko‘rinishidagi integrallar mos rasvishda va o‘rniga qo‘yish orqali topiladi.



Bunday integrallarni orniga qo‘yishllardan foydalanmasdan, bevosita



formulalar yordamida hisoblash ham mumkin.

*Misol*

integralni ikki usul bilan topamiz.



1-usul.



2-usul.



**6.3.4.**



**ko‘rinishidagi integrallar**

Bu ko‘rinishdagi integrallar

,



,



trigonometrik formulalar yordamida topiladi.

*Misol*



**6.3.5. Giperbolik funksiyalarni integrallash**

Giberbolik funksiyalarni integrallash trigonometrik funksiyalarni integrallash kabi amalga oshiriladi. Bunda giperbolik funksiyalar uchun o‘rinli bo‘ladigan quyidagi formulalardan foydalaniladi:



*Misollar*

1.



2.



3.



4. integralni hisoblashda belgilash kiritamiz. , o‘rniga o‘yishlar yordamida topamiz:



Giberbolik funksiyalarni o‘z ichiga olgan integrallarni ratsional funksiyaning integraliga keltirib topish mumkin. Bunda ko‘rinishdagi integrallar



o‘rniga qo‘yish yordamida ratsionallashtiriladi.



*Misollar*

1.



2.



Ratsional kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:



Yoyilmaning koeffitsiyentlarini topamiz:



Bundan



yoki



Shunday qilib,



**6.4. IRRATSIONAL IFODALARNI INTEGRALLASH**

Irratsional ifodalarni o‘z ichga olgan ayrim integrallashni ko‘rib chiqamiz.

**6.4.1. ko‘rinishidagi integrallar**



(-ratsional funksiya, - butun sonlar) ko‘rinishdagi integrallar o‘rniga qo‘ish yordamida ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi, bunda .



Xususan, integrallar o‘rniga qo‘yish yordamida, integrallar esa o‘rniga qo‘yish yordamida ozgaruvchili ratsional funksiyaga keltiriladi.



*Misollar*

1. integrаlni topamiz. Bunda .



deymiz. U holda



Demak,



**6.4.2. ko‘rinishidagi integrallar**



ko‘rinishidagi integrallar *Eylerning uchta o‘rniga qo‘yichi* orqali ratsional funksiyalardan olingan integrallarga keltiriladi:



a) bo‘lganida almashtirish orqali integral ostidagi funksiya ratsionallashtiriladi (*Eylerning birinchi o‘rniga qo‘yishi*);



b) bo‘lganida almashtirish yordamida integral ostidagi funksiya ratsionallashtiriladi (*Eylerning ikkinchi o‘rniga qo‘yishi)*;



c) kvadrat uchhad ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga



ajralganida integral ostidagi funksiya almashtirish bilan ratsionallashtiriladi (*Eylerning uchinchi o‘rniga qo‘yishi*).



*Misollar*

1. integrаlni topamiz. Bunda . Shu sababli o‘rniga qo‘yish bajaramiz.



U holda



Bundan



Topilganlarni berilgan integralga qo‘yamiz:



Integral ostidagi to‘g‘ri kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:



Koeffitsiyentlarni tenglashtirish usulini qo‘llaymiz: Bundan



.



o‘zgaruvchiga qaytamiz:



2. integralda . Shu sababli deymiz.



U holda

va



Bundan



Topilganlarni berilgan integralga qo‘yamiz:



Bundan



3. integrаlni topamiz. Bunda bo‘lgani uchun o‘rniga qo‘yish bajaramiz.



U holda



Bundan



Topilganlarni berilgan integralga qo‘yamiz:

.



Eski o‘zgaruvchiga qaytami:



Eyler o‘rniga qo‘yishlari ko‘p integrallarda murakkab hisoblashlarga olib kelishi mumkin. Bunday hollarda integrallashning quyidagi usullaridan foydalaniladi.

ko‘rinishidagi integrallarni hisoblashning boshqa bir usuli *kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat ajratish* usulidir. Bu usulda ko‘rinishidagi integrallar kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat



ajratish yo‘li bilan ushbu integrallardan biriga keltiriladi:

а) аgаr vа bo‘lsа, u hоldа bu yerda



, ;



b) аgаr vа bo‘lsа, u hоldа bu yerda , ;



c) аgаr vа bo‘lsа, u hоldа bu yerda



Mos ravishda , o‘rniga qo‘yishlar orqali



oxirgi integrallar ko‘rinishga keltiriladi.



*Misol*

integrаlni topamiz. Buning uchun kvadrat uchhaddan to‘la kvadrat ajratamiz, yangi o‘zgaruvchi kiritamiz va trigonometrik o‘rniga qo‘yishdan foydalanib, topamiz:



Bundan tashqari ko’rinishidagi integrallarni



hisoblashda quyidagi usullarni qo‘llash mumkin:

a) ko‘rinishidagi integrallar, bu yerda - darajali



ko‘phad:

1) da bo‘ladi; bu integrallar bo‘lganda jadvaldagi - integralga, bo‘lganda jadvaldagi - integralga keltiriladi;



2) da bo‘ladi; bu integrallar suratda kvadrat uchhadning



hosilasini ajratish natijasida ikkita, biri jadvaldagi - integralga va ikkinchisi



1) banddagi integralga keltiriladi;

3) bo‘lganda berilgan integraldan keltirish formulalari yordamida



quyidagi ko‘rinishdagi ifoda hosil qilinadi:



bu yerda - koeffitsiyentlari noma’lum bo‘lgan - darajali ko‘phad,



- qandaydir o‘zgarmas son. Bunda ko‘phadning noma’lum koeffitsientlari va soni oxirgi tenglikni differensiallash hamda ning chap va o‘ng tomondagi bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish orqali topiladi.



b) ko‘rinishidagi integral almashtirish



yordamida 1) banddagi integralga keltiriladi;

c) ko’rinishidagi integrallar



o‘rniga qo‘yish orqali 3) banddagi integralga keltiriladi.

*Misol*

integralni topamiz. Bunda deymiz. U holda



, .



Bundan



b) banddagi integral hosil qilindi. bo‘lgani uchun



Tenglikning har ikkala tomonini differensiallaymiz:



yoki

.



ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab, topamiz:



U holda

.



Eski o‘zgaruvchiga qaytamiz:

=



**6.4.3. binominal differensial integrali**



ko‘rinishidagi integral *binominal differensial integrali* deyiladi. Bunda Integral ostidagi ifoda ga *binominal differensial* deyiladi, bu yerda ratsional sonlar



Binominal differensial integrali uchta holdagina ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi:

a) butun son bo‘lganida integral (bu yerda ) o‘rniga qo‘yish orqali ratsionallashtiriladi;



b) butun son bo‘lganida integral (bu yerda sonning maxraji) o‘rniga qo‘yish yordamida ratsionallashtiriladi;



c) butun son bo‘lganida integralda (bu yerda sonning maxraji) almashtirish bajariladi.



Agar yuqorida keltirilgan shartlar bajarilmasa binominal differensial elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi, ya’ni integrallanmaydi.

Masalan, integralning integral osti funksiyasi binominal differensial: . Bunda sonlaqrdan birortasi butun son emas. Shu sababli bu integral elementar



funksiyalar orqali ifodalanmaydi.

*Misol*

integralni topamiz.Shartga ko‘ra



U holda



Demak,



**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI**

**Asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar**

1.Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. - Москва: Айрис Пресс, 2009 г.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа . Москва 1985 г.

3.Шипачев В.С. Основы высшей математики. Москва. 1999 г.

4.Soatov Yo.U. Oliy matematika. T.O’qituvchi,1995.1-4 qismlar.

5.N.M.Jabborov “Oliy matematika”.1-2 qism.Qarshi 2010.

6. Jo‘raev T., A. Vorisov va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1,2-jild, Toshkent, O‘zbekiston.1998 yil.

7. Rajabov G‘, Masharipova S. Oliy matematika, “O‘qituvchi”, Toshkent. 2007 yil.

8. Shneyder V.E. va boshqalar Oliy matematika qisqa kursi I,II-jild, Toshkent 1987y

9. A. Sa’dullaev., A. Vorisov va boshqalar Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami, Toshkent 2002 yil.

**Qo’shimcha adabiyotlar:**

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчис­ление для ВТУЗов. 2 частях -Москва: Наука, 2001г.
2. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под общей редакцей. А.П.Рябушко. в 3 ч.–Минск. «Высшая школа». 2007.
3. П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. “Физматлит”. 2010 г.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Учебник для Вузов, ч.1,2,3 -М:, Дрофа, 2006, 2007, 2005.
5. Xurramov Sh.R.Oliy matematika.Misol va masalalar, nazorat topshiriqlari.1,2,3-qismlar.-Toshkent.Fan va texnologiyalar,2015.