Б. А. Ҳобилов

Қ У Р И Л И Ш
М Е Х А Н И К А С И

Тошкент – 2015

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Б. А. Ҳобилов

Қ У Р И Л И Ш
М Е Х А Н И К А С И

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан Олий ўқув юртларининг архитектура ва қурилиш таълим йўналиши талабалари учун дарслик сифатида тавсия этилган.

(Тўлдирилган ва қайта ишланган
иккинчи нашр)

Тошкент – 2015

Қурилиш механикаси: Олий ўқув юртларининг архитектура ва қурилиш таълим йўналиши талабалари учун дарслик (Б. А. Ҳобилов). Тўлдирилган ва қайта ишланган нашр.

Аннатация

Ушбу дарслик иккинчи нашр саналади (биринчи нашри 1999 йилда чоп этилган). Мазкур нашрда аввалгига нисбатан ўзгартириш ва қўшимчалар киритилган.

Статик аниқ ва статик ноаниқ системаларни ҳисоблаш усуллари баён этилган. Айрим бобларда зўриқиш ва кўчишларни аниқлаш тенгламаларида матрица усулидан фойдаланилган, иншоотларни устуворликка ва динамик кучлар таъсирига ҳисоблаш асослари берилган, ҳисоблашга доир мисоллар келтирилган.

Олий ўқув юртларининг қурилиш йўналиши бўйича таҳсил олаётган талабаларига мўлжалланган. Муҳандислик конструкцияларини лойиҳалаш ва ҳисоблаш ишлари билан шуғулланувчи мутахассисларга ҳам фойдаси тайин.

Аннатация

Настоящий учебник является 2 – м изданием (первое издание вышла в 1999 г.). По сравнению с предыдущим изданием в него внесены изменения и дополнения.

Изложены методы расчета статически определимых и неопределимых систем. В отдельных главах использована матричная форма решения уравнения для определения усилий и перемещений, даны основы расчета сооружений на устойчивость и на динамические нагрузки, приведены примеры расчета.

Предназначается для студентов строительных специальностей вузов. Может быть полезен специалистам, работающим в области проектирования и расчета инженерных конструкций.

Annotation

This text book is 2nd edition(the first was published in 1999). Comparing with prevous edition in this manual are made changes and addition methods of calculations of determinable and interminable are given. In separate charpters is used matrix forms of solution equations for to determinate efforts and movement, also is given bases of calculation of building stability and dynamicalloads and is given calculations.

The book is consigned for students of building specialties. May be it useful for specialties who work in franch of design and calculation of engineering calculation.

Масъул муҳаррир: т.ф.д., проф. Абдурашидов Қ. С.

Тақризчилар: 1. Проф. Мирсаидов М. М.
2. Проф. Абдурашидов Қ.С.

Компютерда саҳифаловчи: Ахунжонов Д. Ғ.

СЎЗ БОШИ

Умуммуҳандислик фанлари орасида назарий механика, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси сингари фанлар салмоқли ўрин тутади. Қурилиш муҳандисларининг савиясини белгилашда бу фанларнинг аҳамияти бенихоя каттадир. Ҳар қандай фанни талаба ўз она тилида осон ўзлаштира олишини яхши тушунган аллома олим академик М.Т.Ўрозбоев 1954 йилда назарий механика, 1960 йилда материаллар қаршилиги фанларидан биринчи бўлиб ўзбек тилида дарслик яратди. Орадан чорак аср ўтгач, 1985 йилда Э.А. Одилхўжаев, Т.Г.Ғуломов ва Т.К.Абдукомиловлар устоз М.Т. Ўрозбоев бошлаб берган хайрли ишни давом эттириб, ўзбек тилида илк бор қурилиш механикаси фанидан дарслик яратиб, талабаларга тортиқ этдилар.

Ушбу яхши анана кейинги йилларда самарали давом эттирилди. Ўзбек тилига давлат мақоми берилгандан кейин техника соҳасида дарслик ва ўқув қўлланмалар нашр этиш ишлари янада кенгайди. 1999 йилда мазкур дарслик муаллифининг “Қурилиш механикаси” дарслиги, 2002 йилда Ҳ.Ш. Тўраев, М.Ҳ. Исматов, Ф.Ҳ. Юлдашев, Б.К. Жавлиевларнинг “Қурилиш механикаси” ўқув қўлланмаси чоп этилди.

Қурилиш механикаси фани қурилиш мутахасислиги бўйича ўқийдиган бакалавр ва магистрлар учун асосий фанлардан биридир.

Мазкур дарслик олий техника ўқув юртларининг қурилиш мутахасисликлари йўналишлари: 5580100 – Архитектура; 5580200 – Бинолар ва саноат иншоотлари қурилиши; 5580400 – Инженерлик тармоқлари қурилиши; 5580500 – Қурилиш ишлаб чиқариш технологияси; 5580600 – Шаҳар қурилиши ва хўжалиги бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан тасдиқланган намунавий дастур асосида ёзилди.

Китобнинг мазкур нашрида биринчи нашрда йўл қўйилган хато ва камчиликлар бартараф этилди. Айрим боблар янги масалалар билан тўлдирилди. Матрицалар назарияси ва чекли элементлар усулига доир боблар Давлат таълим стандартлари талаблари асосида қайта ёзилди. Интернетдан

олинган маълумотлар эътиборга олинди. “Иншоотларни юк кўтариш қобилияти бўйича ҳисоблаш” деб номланувчи янги боб қўшилди.

Дарслик қўлёзмасини кўриб чиқиб, билдирган фойдали маслаҳатлари учун муаллиф техника фанлари докторлари проф. Абдурашидов Қ.С. ва проф. Мирсаидов М.М. га ўзининг самимий миннатдорчилигини изҳор этади.

Китоб бўйича билдирилган танқидий фикр–мулоҳазалар муаллиф томонидан мамнуният билан қабул қилинади.

Мазкур дарслик илк бор лотин имлосида чоп этилмоқда.

Муаллиф

1- Б О Б

К И Р И Ш

1.l. Қурилиш механикаси фани ва унинг вазифалари

Қурилиш механикаси иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги ҳақидаги фандир.

Иншоотларнинг **мустаҳкамлиги** деганда уларнинг юк кўтариш қобилияти тушунилади, чунки мустаҳкам иншоот ўзига кўйилган, юкларни бемалол кўтариб тура олиши лозим, акс ҳолда, унинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлмайди. Курсимиз давомида иншоотларнинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлиши учун нималар қилиш кераклиги ҳақида батафсил тўхталиб ўтамиз.

Иншоотларнинг **устуворлиги** (устойчивость) деганда юклар таъсирида иншоот ўзининг дастлабки мувозанат ҳолатини сақлаб тура олиш-олмаслиги тушунилади.

Эксплуатация жараёнида иншоотда меъёридан ортиқча кўчиш, солқилик ва оғишлар рўй бермаслиги учун уларнинг **бикирлиги** ҳисоблаш йўли билан текширилади.

Маълумки, мустаккамлик, устуворлик ва бикирлик масалалари билан материаллар қаршилиги фани ҳам шуғулланади. Қурилиш механикаси билан материаллар қаршилиги фани ўртасидаги фарқ шундаки, материаллар қаршилиги фани иншоотни ташкил этувчи алоҳида элементлар (балка, стержень ва х.к.)нинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлигини ўрганади. Қурилиш механикасида эса алоҳида элементлар мажмуасидан ташкил топган бутун иншоотнинг мустаҳкамлнги, устуворлиги ва бикирлиги қуриб ўтилади. Аниқроқ қилиб айтганда, яхлит иншоотлар мустаҳкамлигини, устуворлигини ва бикирлигини таъминлайдиган қонун-қоидалар ва усуллар билан танишиб ўтилади. Кўриниб турибдики, қурилиш механикаси фани материаллар қаршилиги фани билан ўзвий боғланган фандир. Бундан ташқари, қурилиш механикаси фани назарий механика, физика ва математика фанларига ҳам

боғлиқдир. Бу ҳисобий фанлар занжирининг бир томони; занжирнинг иккинчи томонида ҳисобни якунига етказувчи фанлар — қурилиш конструкциялари фанлари (темирбетон ва ғишт-тош конструкциялари, металл, ёғоч ва пластмасса конструкциялари) туради. Ўз олдига қурилиш конструкциялари ҳисобини пухта ўзлаштиришни мақсад қилиб қўйган талаба, ана шу ҳисобий фанлар занжирини ўзвий равишда, бир-бирига боғлик ҳолда чуқур ўзлаштириши лозим.

Эластиклик назарияси, пластиклик назарияси ва тоб ташлаш (ползучесть) назариялари юқорида кўриб ўтилган масалаларни кучли математик аппарат ёрдамида янада жиддийроқ ва янада изчилроқ ҳал этиш усуллари билан шуғулланади. Қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида қўлланилган айрим чекланишлар ва фаразлар бу фанларда қўлланилмайди. Шунинг учун ҳам ҳисоб натижалари ҳақиқатга анча яқин туради. Бироқ ҳисоблаш жараёнининг ўта мураккаблиги туфайли лойиха амалиётларида улардан фойдаланиш доираси анча тор.

Ҳозирги замон бинолари ҳамда иншоотлари олдиндан тайёрланган лойиҳалар асосида бунёд этилиши ҳеч кимга сир эмас. Лойихада бино ва иншоотларнинг умумий ўлчамлари билан бир қаторда ҳар бир алоҳида элементнинг ўлчамлари ҳам тўлиқ кўрсатилади.

Конструкция элементларининг узунликлари ҳамда кўндаланг кесим ўлчамлари элементларга таъсир этувчи кучлар ва элементнинг материалига боғлик ҳолда ҳисоблаш йўли билан аниқланади. Ҳисоблаш усуллари эса қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида баён этилади.

Қурилиш механикаси фанининг асосий вазифаларидан бири ташқи кучлар (юклар) таъсирида конструкция элементларида ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишларни) аниқлашдан иборатдир. Зўриқиш нималигини тўлиқроқ тасаввур этиш учун оддий бир мисол келтирамиз. Икки қўлингизда сув тўлдирилган икки челакни кўтариб турибсиз, дейлик. Дастлабки дақиқаларда қўлингиз толиқиш ёки оғриқни хис этмайди. Бироқ вақт ўтган сайин қўлингизда оғриққа ўхшаш енгил толиқиш пайдо бўлади ва у борган сари кўчайиб боради. Ана шу оғриққа ўхшаш толиқиш механика тилида зўриқиш

ёки ички куч деб аталади. Конструкция элементларига қўйилган ташқи кучларнинг (масалан, челакдаги сув) миқдори маълум бўлса, элементларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш қийин эмас. Конструкция элементларининг кўндаланг кесим ўлчамлари аниқланган зўриқишларнинг миқдорига қараб белгиланади.

Ташқи кучлар таъсирида иншоот ва унинг элементларида ҳосил бўладиган солқилик, кўчиш ва тебраниш амплитудаларини аниқлаш каби масалалар ҳам қурилиш механикаси фани доирасидаги масалалардан ҳисобланади.

Дарсликда зилзилалар содир бўлиб турадиган ҳудудлар учун муҳим аҳамиятга эга бўлган иншоотлар динамикаси масалаларига ҳам кенг ўрин ажратилган.

Назарий жиҳатдан баён этилган усулларнинг амалий тадбиқи мисол ва масалаларда ўз аксини топган.

Қурилиш механикасида яратилган ҳар қандай назарий усуллар тажрибада синаб кўрилади ва ўз навбатида, мавжуд конструкциялар устида олиб борилган тадқиқий тажрибалар асосида янги ҳисоблаш усуллари яратилади. Шунга кўра қурилиш механикаси фани тажрибавий-назарий фан саналади.

Ҳозирги кунда қурилиш механикаси фани бинокорлик ва муҳандислик амалиётида ҳар тарафлама синовдан ўтган кўплаб ҳисоблаш усулларига эга. Бу усуллар содда ва мукаммал бўлиб, шу билан бирга ишончлидир. Бироқ бундан қурилиш механикаси ўз вазифаларини тўлиқ бажариб бўлди, деган маъно чиқмайди, албатта. Қурилиш механикаси ҳам бошқа фанлар сингари ўсиб бораётган қурилиш саноатининг талабларига мос равишда муттасил ривожланиб, такомиллашиб бормокда.

1.2. Қурилиш механикасининг ривожланишига оид маълумотлар

Қурилиш механикаси ривожланиш жараёнининг дастлабки босқичларида мустақил фан бўлмай, умумий механиканинг таркибий қисмларидан бири бўлган. Бинобарин умумий механиканинг ибтидоий даврлардан бошлаб

ҳозирги давргача бўлган тарихи қурилиш механикасига ҳам бевосита алоқадордир.

10 — 12 минг йил давом этган неолит (янги тош асри) даврининг охирига келиб Нил, Дажла ва Ғрот дарёлари соҳилларида дастлабки шаҳарлар пайдо бўла бошлайди. Эрамиздан аввалги V — III асрларда дастлабки машина-сув тегирмони ихтиро қилинади. Эрадан аввалги VI аср бошларига келиб, қадимги аждодларимиз ҳозирги замон атамаси билан айтганда гидравлика, қурилиш механикаси, статика, динамика ва коинот механикасига оид бошланғич элементар билимлардан хабардор бўлганлар. Масалан, каналлар ўтказиш, экинларни суғориш, сувни тепаликларга олиб чиқиш каби ишларни бажарганлар. Хозирги Покистон ҳудудида жойлашган Мохенжодаро шаҳрида эрадан аввалги III асрда сув қувурлари (водопровод) ва ёмғир сувларини четга чиқарадиган канализация тармоғи бўлган. Водопровод тармоғи бундан 2500 йил муқаддам Республикамиз худудида жойлашган Афросиёб (қадимги Самарканд) аҳлини зилол сув билан таъминлаб турган. Қадимда Ўрта Осиёда сув кўтариш учун шодуф-чиғирдан (қудуқдан сув чиқарадиган қурилма) фойдаланилган. Ўша вақтларда қалъалар, масжид ва мақбаралар, турар жой биноларининг бунёд этилиши қурилиш механикасига оид билимларни чуқур билишни, қўлланилаётган конструкция ва материалга танқидий муносабат билдириш, улар ичидан.энг мақбулларини танлай билишни тақозо этарди. Кўп асрлик тажриба асосида тош, хом ғишт ва пишик ғишт мустаҳкамликлари орасидаги тафовут тўла ўрганилди. Баланд биноларнинг мақбул шакллари топилди.

Механиканинг назарий асослари дастлаб қадимги Юнонистон ва Мисрда пайдо бўлган.

Механикага доир илк ёзма асар Юнонистоннинг машҳур файласуфи, эрамиздан 384 — 322 йиллар муқаддам яшаб ижод этган буюк олим Аристотель (Арасту) нинг қаламига мансуб. *«Механика» сўзини илмий атама сифатида фанга биринчи бор олиб кирган олим ҳам ана шу буюк инсондир.* Механиканинг хилма-хил масала ва муаммоларини ҳал этишда қадимги замон олимлари

Архимед, Герон, Платон, Аполлоний, Гиппарх, Птолемей, Никомед, Архит ва бошқаларнинг хизматлари бенихоя каттадир.

Шарқ мамлакатларида механика фани IX — XII асрларда тараққий эта бошлади. Бу даврга келиб шаркнинг машҳур олимлари ака-ука Бану Мусолар, Собит ибн Қурра, Абу Райҳон Беруний, Абу Абдулло ал-Хоразмий, Абу Али ибн Сино, Умар Хайём, ал-Хазиний, ал-Форобий, Ахмад ал–Фарғоний, Исмоил ал-Жазарий, Мухаммад ал-Хуросон сингари улкан сиймолар табиий фанлар, хусусан, механика соҳасида баракали ижод этдилар. Дастлабки кезларда улар илм-фан, давр ва ижтимоий ҳаёт тақозоси билан Аристотель, Герон, Архимед, Филопон ва бошқаларнинг асарларини таржима қилиш ва уларни шарҳлаш билан шуғулланганлар. Шарҳлар кўпинча мустақил асарлар даражасига кўтарилган. Ватандошимиз Абу Али ибн Сино антик олим Филопоннинг механика соҳасидаги ғояларини давом эттириб, ҳаракатдаги жисмга таъсир эттирилган куч йўқолмайди; агарда жисм ҳаракати қаршиликка учрамаса, у абадий давом этади, деган ғояни илгари сурди. Ибн Сино ўзининг «Донишнома» асарида юкларни кўтаради-ган ва қўзғатадиган ускуналар хақида фикр юритади. Ал-Хоразмий «Фанлар калити» номли китобида механика билимларига алоҳида боб ажратди.

VII – VIII асрлардан бошлаб Ислом дини кенг ёйилган мамлакатларда. масжид, мадраса, мақбара сингари Маҳобатли бинолар қурилиши авж олади. Шарқ мамлакатлари, жумладан, Ўрта Осиёда бунёд этилган қадимий меъморчилик ёдгорликларида гумбаз, минора, айланма зина, пештоқ, равоқ, муқарнас каби мураккаб қурилмалар қўлланилган. Табиийки, бундай биноларни қуриш учун муҳандис, меъмор ва усталардан катта билим ва маҳорат талаб этилган. Қадимий биноларнинг шакл ва ўлчамлари асрлар мобайнида такомиллашиб борди. Бухорода Минораи Калон номи билан аталувчи дунёга донғи кетган улкан минора бор. Минора асосининг диаметри 9 м, баландлиги 50 м, курсиси (цоколи) қиррадор бўлиб, миноранинг диаме-три юқорига қараб кичрайиб боради. Минора 1127 йилда ўз замонасининг моҳир муҳандиси ва меъмори уста Бақо* томонидан бунёд этилган.

Минора шаклининг қурилиш механикаси нуқтаи назаридан мақбул томони шундан иборатки, унинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал кучлар (зилзила ва шамол) таъсирига бардошлиги юқори даражададир. Бундан ташқари унинг шакли сиқилишга тенг қаршилик кўрсатувчи жисм шаклига яқин келади. Хулоса қилиб айтганда, қадимий меъморчилик обидаларини асрлар оша бизнинг давримизгача етиб келиши бобокалон меъморлар ва уста бинокорларнинг амалий қурилиш механикасидан чуқур ҳабардор эканликларидан далолат беради. Шарқ олимларининг дунё фани олдидаги буюк хизматлари яна шундан иборатки, улар қадимги юнон олимларининг илмий меросини сақлаш ва уни ижодий ўрганиш билан бир қаторда уни ўз асарлари билан янада бойитганлар. Ана шу бой мерос кейинчалик турли йўллар билан Ғарбий Европага кириб борди.

Механиканинг эндиги ривожи Уйғониш даврида Европага кўчди. Бу давр механикаси буюк олимлар Леонардо да Винчи, Стевин, Коперник, Кеплер, Галилей ва Ньютонларнинг оламшумул асарлари ва ихтиролари билан бойиди, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикасига доир биринчи китоб ўша даврда яратилди. Китобнинг номи «Икки янги фан хақида сухбатлар ва математик исботлар» деб аталиб, муаллифи флоренциялик олим Галилео Галилей эди (1564 — 1642). 1678 йилда йирик инглиз олими Роберт Гук (1635 — 1703) ўзининг машхур қонунини кашф этди, яъни чўзилиш қанақа бўлса, куч ҳам шунақа бўлади, деб таърифлайди муаллиф. Ҳозирги иборалар билан айтганда, деформация кучга тўғри пропорционалдир. Ҳозирги замон қурилиш механикасининг деярли барча назария ва усуллари ана шу оддий қонунга асосланади.

XVIII асрда саноатнинг кенг ривожланиши илм-фан олдига янги-янги вазифалар қўйди.

---

* Уста Бақо ҳам меъмор, ҳам муҳандис, ҳам наққош бўлиб, бинокорликка доир назарий ва амалий билимларни мукаммал билган.



1127 йилда Бухорода бунёд этилган Минораи Калон обидаси

XIX асрда темир йўлларнинг пайдо бўлиши, кўприклар ва йирик саноат биноларининг қад кўтариши қурилиш механикасини янада ривожланишига туртки бўлди. Бу ва бундан кейинги даврларда қурилиш механикасининг ривожланишига чет эллик олимлардан Даламбер, Лагранж, Кулон, Ламс, СенВенан, Эйлер, Максвелл, Мор, Мюллер-Бреслау ва бошқалар, рус ва совет олимларидан Д. И. Журавский, Ф. С. Ясинский, Н. А. Белелюбский, В. Г., Шухов, В. Л. Кирпичев, Л. Р. Проскуряков, А. Н. Крилов, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, кейинчалик И.М. Рабинович, В. 3. Власов, К. С. Завриев, А. Ф. Смирнов, Н. И. Безухов, В. В. Болотин, А. В. Дарков ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар. Қурилиш механикасининг ривожланишида ўзбек олимлари ҳам баракали ижод қилмоқдалар.

Назарий механика ва материаллар қаршилиги курсларидан ўзбек тилида биринчи дарслик яратган олим академик М. Т. Ўрозбоев ўзбек механиқларининг отаси ҳисобланади. Устознинг сафдоши академик Х. А. Рахматуллин умрининг охиригача Москва Давлат Университетида талабаларга сабоқ берди. Ўзбекистонда кибернетиканинг тараққиёти академик В. К. Қобуловнинг номи билан чамбарчас боғлиқдир. Зилзилалар тез-тез содир бўлиб турадиган бизнинг республикамизда зилзилабардош конструкциялар устида олиб борилаётган ишларнинг аҳамияти нақадар катта эканлиги сир эмас. Бу соханинг ўткир билимдони академик Т. Р. Рашидовнинг ер ости иншоотлари сейсмик мустаҳкамлиги назариясига қўшган хиссаси бехаддир. Ўзбекистон Фанлар академиясининг академиги Т. Ш. Ширинқуловнинг замин ва пойдеворлар сохасида олиб борган илмий тадқиқотлари собиқ иттифоқ миқёсида тан олинган ва уларга юксак баҳо берилган эди.

Ҳозирги даврда йирик ўлчамларга эга бўлган мураккаб қурилиш конструкцияларининг янги-янги турлари кўпайиб бормоқда. Булар орасида енгил вазнли фазовой конструкциялар салмоқли ўрин тутади. Мураккаб конструкцияларнинг ҳисоби ҳам мураккаб бўлади.

Оддий конструкциялар ҳисобини қўлда бажариш мумкин бўлса, мураккаб конструкцияларнинг ҳисобини электрон ҳисоблаш машиналарисиз (ЭХМ)

тасаввур этиб бўлмайди. Шу боисдан эндиликда қурилиш механикасида компьютерлардан фойдаланиш имконини берадиган аналитик усулларнинг роли ортиб бормокда.

Ҳисоблаш техникасидан кенг фойдаланиш имконини берадиган усуллардан бири матрица усулидир. Матрица ҳисобининг тили сонли ҳисоблаш машиналарига жуда қўл келади. Матрица усулининг афзалликларидан бири шундан иборатки, бунда бир хил матрица амалидан фойдаланиб, турли хил тизимларни ҳисобласа бўлади.

Истиқболли усуллардан яна бири *чекли элементлар* усулидир (ЧЭУ). Бу усулга кўра яхлит жисм алоҳида чекли элементларга бўлиб чиқилади; бу элементларнинг ўзаро боғланиши алоҳида нуқталардаги зўриқишларнинг ўзаро таъсири орқали уч ва тўрт бурчакларга, фазовой масалаларда эса — параллелепипед ёки тетраэдрларга тақсимлаб чиқилади.

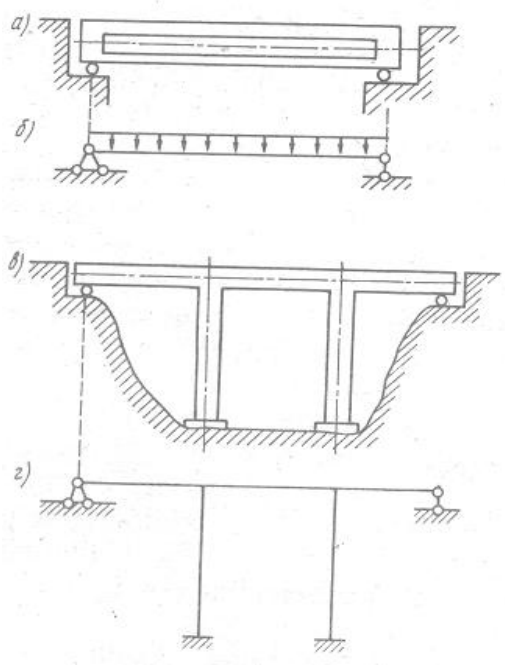
1.3. Иншоотлар ва уларнинг ҳисоблаш схемалари

Муҳандислик иншоотлари одатда стержень, балка, пластина, қобиқ ва хажмий жисмлар сингари турли конструктив элементларни тегишли равишда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинади. Демак, яхлит иншоот алоҳида элементлардан ташкил топган мураккаб система ҳисобланади.

Иншоотларни ҳисоблаганда, айрим элементларнинг ўлчам ва шаклларини, улар орасидаги боғланишни аниқ ҳисобга олиш назарий жиҳатдан ё имкони йўк, ё ўта мураккаб ишдир. Шунинг учун қурилиш механикасида бошқа фанлардаги сингари илмий абстракция усулидан фойдаланиб, мавжуд иншоот ҳисоблаш схема билан алмаштирилади.

Ҳ и с о б л а ш с х е м а с и — иншоотнинг соддалаштирилган тасвири бўлиб, унда юк таъсиридаги иншоотнинг асосий кўрсаткичлари мужассамлашган бўлади. Ҳисоблаш схемаларида стерженлар — ўклар билан, пластиналар — ўрта сиртлар билан, кўндаланг кесимлар — юза ва инерция моментларининг сон қийматлари билан, реал таянчлар идеал таянчлар билан

алмаштирилади; юклар ўқларга қўйилган деб фараз этилади ва ҳ.к. Иншоотлар ҳисоби ана шундай ҳисоблаш схемалари орқали амалга оширилади.



1.1. расм

1.1.- расмда бир оралиқли кўприк (а) ҳамда балка деб аталувчи унинг ҳисоблаш схема (б) тасвирланган. 1.1- расм, в-да уч оралиқли кўприк ҳамда рама деб аталувчи унинг ҳисоблаш схемаси (г) берилган. Йўл қопламасининг вазни ҳамда кўприкнннг ҳусусий оғирлиги балкага текис ёйиқ куч сифатида таъсир этади. Балкада ташқи кучлар ва ҳарорат таъсирида бўйлама кучлар ҳосил бўлмаслиги учун унинг таянчларидан бири қўзғалувчан, иккинчиси қўзғалмас қилиб ишланади.

Иншоотнинг ҳисоблаш схемасини танлаш мураккаб, айни пайтда, муҳим масалалардан биридир. Ҳисобнинг сифати, яъни унинг аниқлиги кўп жиҳатдан, ҳисоблаш схемасининг қандай танланишига боғлиқ.

Агар ҳисоб нотўғри танланган ҳисоблаш схемаси бўйича бажарилган бўлса, у ўта аниқ усуллар билан ҳисобланган такдирда ҳам тўғри натижа бермайди.

Маълумки, стержень ва пластиналар иншоотнинг асосий элементлари ҳисобланади. Кўндаланг кесим ўлчамлари узунликка нисбатан анча кичик бўлган элемент *стержень* деб аталади. Бир ўлчами (қалинлиги) қолган икки ўлчами (узунлиги ва эни)га нисбатан анча кичик бўлса, *пластина* деб аталади. Эгри ўқли пластина *қобиқ* (оболочка) деб аталади. Бўлардан ташқари ҳисоблаш схемалари ичида *хажмий жисмлар* деб аталувчи катта массага эга бўлган элементлар ҳам учрайди. Бундай элементларнинг уч ўлчами бир-бирига яқин бўлади. Бунга пойдевор блоклари, тиргак деворлар мисол бўла олади.

Алоҳида элементларнинг жойлашув тартибига қараб иншоотлар ясси ва фазовий системаларга бўлинади. Барча стерженлар бир текисликда жойлашган

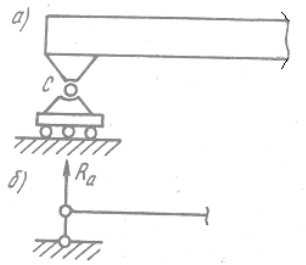
бўлса, бундай иншоот *ясси система* деб аталади. Акс ҳолда система фазовий бўлади. Ясси иншоотлар мустақил кўринишда ҳамдан-кам учрайди. Кўпинча улар ҳисобни соддалаштириш мақсадида фазовий системалардан ажратиб олинади. Ясси системани фазовий системадан ажратиб олиниши ҳисоб аниқлигини пасайтиради. Бироқ муҳандислик амалиётида баъзан шундай қилишга тўғри келади.

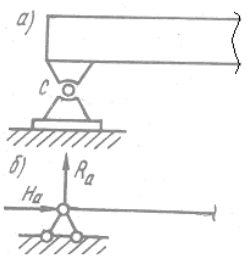
1.4. Таянчлар ва юклар

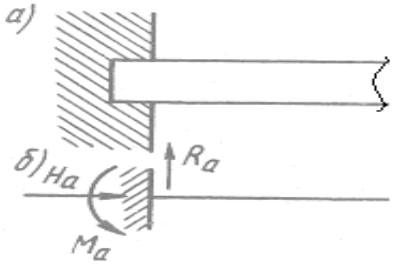
Иншоотнинг пойдевор ёки замин билан бириккан қисми т а я н ч деб аталади. Таянчлар уч хил бўлади: шарнирли қўзғалувчи таянч, шарнирли қўзғалмас таянч, шарнирсиз қўзғалмас таянч.

1.2- расмда шарнирли қўзғалувчи таянчнинг конструкцияси (а) ва унинг содда тасвири (б) берилган, бунда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, горизонтал йўналишда қўзғала олади; биргина вертикал реакция вужудга келади.

1.3- расмда шарнирли қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган; бу ерда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, бироқ горизонтал йўналишда қўзғалмасдир. Бундай таянчда ҳам горизонтал, ҳам вертикал реакциялар вужудга келади.







а) б)

1.2- расм l.3- расм 1.4- расм

1.4- расмда шарнирсиз қўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган бўлиб, бунда стержень учи таянчга мустаҳкам бириктирилган; стержень горизонтал йўналишда қўзғалиш ёки таянч кесими

атрофида айланиш имконига эга эмас. Бундай таянчда учта реакция (R_a, H_a, M_a) вужудга келади.

Иншоотга таъсир этадиган ташқи кучлар ю к л а р деб аталади. Юклар таъсир этиш муддати, таъсир этиш усули, вазифаси ва бошқа белгиларга қараб бир неча турга бўлинади.

Юклар иншоотга қўйилиш вақти (муддати)га қараб статик ва динамик юкларга бўлинади. С т а т и к юклар иншоотга зарбсиз аста-секин қўйилади; юкнинг қиймати нолдан бошлаб охирги қийматига қадар бир текисда ортиб боради. Д и н а м и к юклар иншоотга бирданига қўйилади ёки вақт ўтиши билан қиймат ва йўналишини ўзгартириб туради.

Қўйилиш усулига кўра ёйиқ ва йиғик (тўпланган) юклар бўлади.

Ёйиқ юк иншоот сирти ёки узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Узунлик бўйлаб ёйилган юк интенсивлик билан ўлчанади. Интенсивлик деганда узунлик бирлигига тўғри келадиган юк миқдори тушунилади ва у кН/м билан ўлчанади. Агар юк сирт бўйлаб ёйилган бўлса, кН/м^2 билан ўлчанади.

Йиғиқ юк деганда бир нуқтага тўпланган куч тушунилади. Аслида бундай юклар реал ҳолда камдан-кам учрайди. Ҳисоб ишларини соддалаштириш учун кўпинча ёйиқ юклар йиғиқ куч ҳолига келтириб олинади, яъни маълум бир нуқтага тўпланади. Хозирда амалда бўлган ҳалқаро ўлчам бирликлари тизими (СИ) бўйича кучнинг ўлчам бирлиги ньютон (Н) дир. Эслатиб ўтамиз: 1 кгк≈9,81 Н.

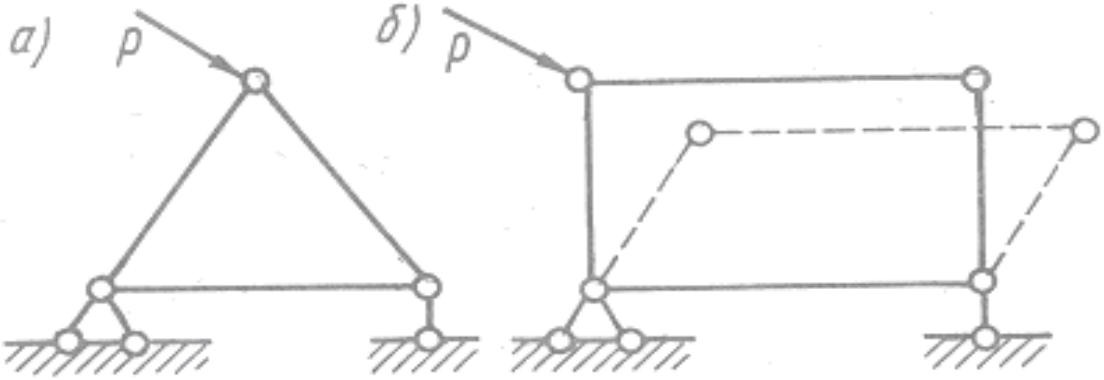
Вазифасига кўра юклар доимий, муваққат ва қўзғалувчан бўлади. Иншоотга доим таъсир этиб турувчи юк (масалан, ҳусусий оғирлик) доимий юк ҳисобланади. Муваққат юк иншоотга маълум даврларда таъсир этади (масалан, шамол ва қор таъсири, турли ускуна ва жиҳозлар ва ҳ. к.). Қўзғалувчан юкларга транспорт воситалари мисол бўла олади.

1.5. Стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартлари

Қурилиш конструкцияларининг аксарияти ҳисоблаш чизмаларида стерженлардан ташкил топади (балка, ферма, рама ва х. к.). Алоҳида

стерженларнинг тугунларда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинган қурилмалар *стерженли системалар* деб аталади.

Ҳар қандай иншоот, яъни стерженли система геометрик ўзгармас бўлиши лозим. Бунинг маъноси шуки, ҳар қандай бино ва иншоот бунёд этилгандан кейин ўзининг дастлабки геометрик шаклини ҳеч оғишмай сақлаб туриши керак. Бинокорликда геометрик ўзгарувчан системалар қўлланилмайди, чунки бундай системалар деформацияланмаган ҳолда ўз шаклини кескин ўзгартиради. Геометрик ўзгармас системалар эса ўз шаклини стерженларнинг деформацияланиши эвазига ўзгартиради.



1.5- расм

1.5- расмда учбурчакли (а) ва тўртбурчакли (б) иккита стерженли система тасвирланган бўлиб, улардан бири геометрик ўзгармас, иккинчиси ўзгарувчандир.

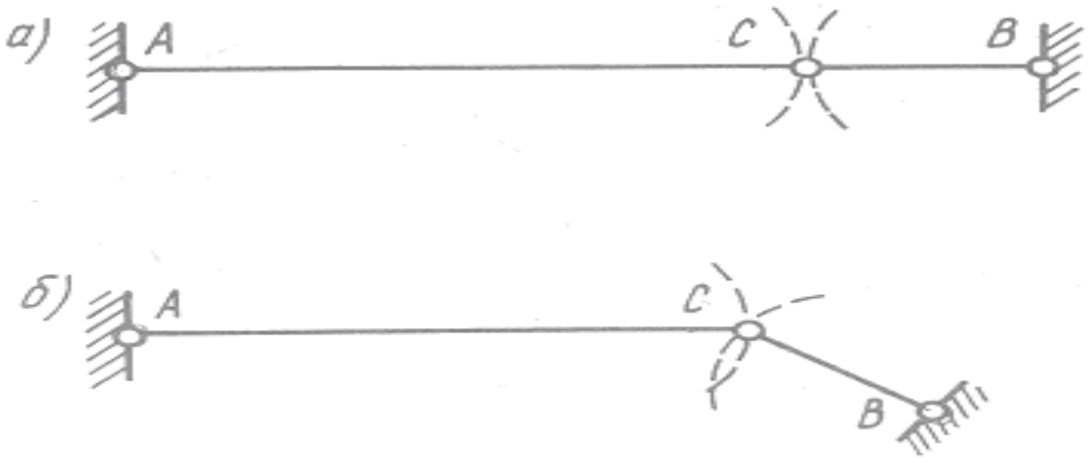
Учбурчакли системанинг шакли стерженлар деформация бергандагина ўзгаради, акс ҳолда ўзгаришсиз тураверади. Шунинг учун у геометрик ўзгармас система саналади. Тўртбурчакли система эса ўз шаклини осонгина ўзгартиради, бунда стерженлар дастлабки узунлигини сақлаб қолади, яъни деформацияланмайди. Демак, бу геометрнк ўзгарувчан системадир.

Хулоса қилиб айтганда, ўзининг геометрик шаклини алоҳида стерженларнинг деформацияланиши ҳисобига ўзгартирадиган системалар г е о м е т р и к ў з г а р м а с системалар деб аталади.

Учбурчакли система энг оддий геометрик ўзгармас система ҳисобланади. Хўш, мураккаб шаклга эга бўлган, геометрик ўзгармас системалар қандай ҳосил қилинади? деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришга уриниб кўрамиз.

Бунинг учун аввал о н и й ў з г а р у в ч а н система билан танишиб чиқамиз.

Бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган система билан танишиб чиқайлик (1.6- расм, а).



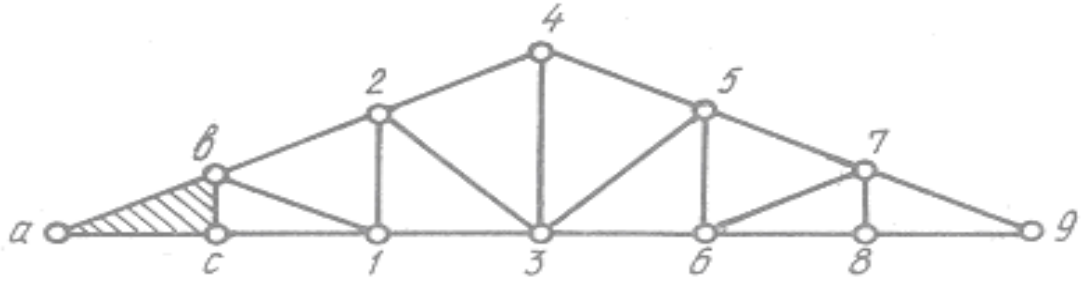
1.6- расм

Агар икки стерженни бир-бирига уловчи шарнир С ни йўқ деб фараз қилсак, АС ва ВС стерженлари шаклда кўрсатилган ёйлар бўйича қўзғалиши мумкин. Бунда ҳар иккала ёй С нуқтасида умумий ўринмага эга бўлади. Бинобарин, стерженлардан бирига тегишли бўлган С нуқтаси АВ нуқтаси тик йўналишида жуда қисқа масофага кўчса, иккинчи стержень бунга қаршилик кўрсата олмайди. Демак, бу система геометрик ўзгарувчан экан, чунки системанинг шакл ўзгариши стерженларнинг деформациясисиз амалга ошаяпти. Бироқ бу системанинг геометрик ўзгарувчанлиги бир онликдир, чунки С нуқтаси жуда қисқа масофага кўча олади. С нуқтасининг кўчишини катталаштириш учун, яъни икки стерженли системанинг шакл ўзгартиришини янада давом эттириш учун стерженларни деформацияланишга мажбур этиш лозим бўлади. Ўз шаклини бу йўсинда ўзгартирадиган система геометрик ўзгармас бўлади. Шунинг учун ҳам бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган системалар оний ўзгарувчан системалар деб аталади.

Агар икки стержень ва уч шарнир бир ўқ устида ётмаса, у ҳолда ёйлар умумий уринмага эга бўлмайди (1.6- расм,б). С нуқтаси бу системада кичик бир масофага кўчиши учун стерженлар деформацияланиши лозим бўлади. Бундай системанинг геометрик ўзгармас бўлишини юқорида кўриб ўтдик.

Демак, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун янги қўшиладиган тугун ва уни дастлабки система билан боғловчи икки стержень бир ўқ устида ётмаслиги лозим экан. Геометрик ўзгармас система ҳосил қилишнинг асосий қоидаси ана шундан ибарат.

Шу қоида асосида геометрик ўзгармас стерженли система - ферма ҳосил қилиш тартибини кўриб чиқайлик (1.7- расм).



1.7- расм

Дастлабки геометрик ўзгармас система - асос сифатида энг оддий система *abc* учбурчагини қабул қиламиз. Бу учбурчакка бирин-кетин икки стержень орқали янги тугунларни кўшиб борамиз. Тугунларни кўшиш тартиби чизмада рақамлар билан кўрсатилган. Эътибор беринг: ҳар бир янги тугун ва икки стержень бир ўқ устида ётмайди. Шу тартибда ҳосил қилинган ферма ўзгармас бўлади.

Текшириш учун тугунларни ва уларга туташган икки стерженни тескари тартибда бирин-кетин ташлаб юборамиз. Агар ташлашлар охирида учбурчакли система қолса, у ҳолда берилган система геометрик ўзгармас бўлади. Бизнинг мисолда айнан шундай: тугунларни 9- тугундан бошлаб бирин-кетин ташлаб юборсак, охирида *abc* учбурчаги қолади. Демак яхлит ферма геометрик ўзгармас система экан.

Энди стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартларини формула орқали ифода этишга уриниб кўрамиз.

Геометрик ўзгармас оддий ферма стерженлари сонини S, тугунлари сонини К деб белгиласак, стерженлар сони билан тугунлар сони орасидаги боғланишни қуйидаги тартибда ифодаласа бўлади: асосий учбурчак учта тугун ва учта стерженга эга: бунга келиб қўшилувчи ҳар бир янги тугун сон жиҳатдан (К—3)га тенг бўлиб, ҳар бир тугунга иккитадан стержень туташган бўлади. Натижада ферма стерженларининг умумий сони қуйидагича бўлади:

$$S=3+2\ (К — 3)$$

ёки

$$\boxed{S=2К — 3.} \qquad 1.1$$

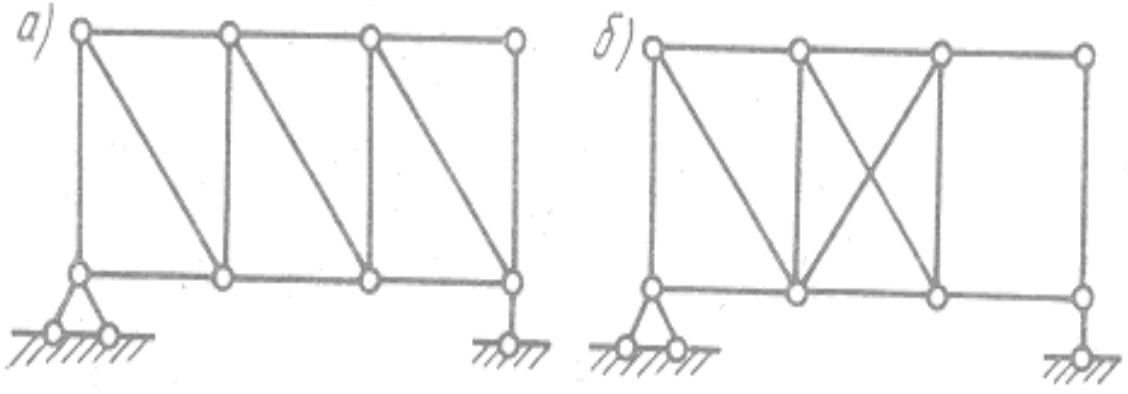
Бу ерда қуйидаги уч ҳол учраши мумкин:

1) S<2К—3, бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади; чунки стерженлар сони талаб этилган сондан кам;

2) S=2К—3, бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади; системадаги стерженлар сони талаб даражасида, ортиқ ҳам эмас, кам ҳам эмас;

3) S>2К—3, бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ бўлади; чунки стерженлар сони керагидан ортиқча.

Кўриб ўтилган уч ҳолдан биринчиси бинокорлик учун ярамайди, ҳолган икки ҳол қурилиш конструкцияларини каноатлантиради. Чунки иншоотлар статик аниқ ёки ноаниқлигидан қатъи назар геометрик ўзгармас бўлиши даркор.



1.8- расм

Бироқ стерженли системанинг формулани қаноатлантириши масаланинг бир томони ҳолос. Масаланинг иккинчи томони ҳам бор: системанинг геометрик ўзгармаслигини таъминлашда унинг тузилиши ҳам катта роль ўйнайди. Масалан, 1.8-расмда стерженлари сони формулани қаноатлантирадиган иккита ферма тасвирланган. Формулага кўра ҳар иккалови ҳам геометрик ўзгармас система, бироқ ферманинг тузилишига кўра улардан бири (а) геометрик ўзгармас, иккинчиси (б) геометрик ўзгарувчандир. Иккинчи ферманинг оҳирги панели геометрик ўзгарувчан тўртбурчакли системадан ташкил топганлиги сабабли у геометрик ўзгарувчандир.

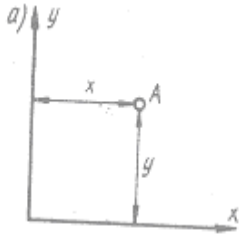
1.6. Стерженли системаларнинг эркинлик даражалари

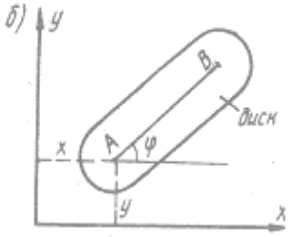
Нуқта ёки системанинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрлар сони *эркинлик даражаси* деб аталади.

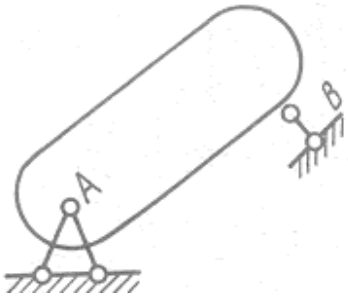
А нуқтасининг ҳолатини х ва у параметрлари белгилайди (1.9- расм, а). Демак нуқтанинг эркинлик даражаси иккига тенг.

Ясси диск (масалан, фанер парчаси)нинг эркинлик даражасини кўриб чиқамиз (1.9-расм, б) Дискнинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрларни белгилаш учун диск сиртида АВ кесмасини ўтказамиз. Бу кесманинг ҳолатини х, у, φ параметрлари орқали билишимиз мумкин.

Демак, АВ кесмасининг эркинлик даражаси учга тенг. АВ кесмасининг ҳолатини белгиловчи параметрлар (х, у, φ) дискнинг ҳолатини ҳам белгилайди, чунки кесма диск cиртида ётибди. Бундан дискнинг эркинлик даражаси ҳам учга тенг бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Бунинг маъноси шуки, диск уч йўналишда эркин ҳаракат қилади: вертикал ва горизонтал йўналишларда кўчиши ҳамда бирор нуқтага, масалан, А нуқтасига нисбатан айланиши мумкин.







1.9- расм

l.10- расм

Диск ёки стерженнинг эркинлик даражасига чек қўядиган ҳар қандай курилма боғлагич деб аталади. Шарнирлар ва таянч стерженлари боғлагич ҳисобланади. Ҳар бир шарнир иккита, ҳар бир таянч стержени эса битта эркинлик даражасига чек қўяди.

Яхлит бир диск олайлик. Агар унга ҳеч қандай боғлагич қўймасак, унинг эркинлик даражаси учга тенг бўлишини юқорида кўриб ўтдик. Энди дискка А шарнирини қўямиз (1.10- расм) (стол устида ётган фанера парчасига бир дона мих қоқамиз, дегандай гап). Бу билан дискнинг иккита эркинлик даражасига чек қўйилади (фанера икки йўналишда ҳаракат қилиш имкониятидан маҳрум бўлади, дегандай гап). Бироқ диск А шарнири атрофида айлана олади. Агар дискка яна бир боғлагич – таянч стержени В ни қўйсак, диск, айланиш имкониятидан ҳам маҳрум бўлади.

Мана шу мулоҳазалар асосида стерженли системаларнинг эркинлик даражасини аниқлашга доир формулани ёза оламиз. Агар системанинг эркинлик даражасини W, дисклар сонини Д, шарнирлар сонини Ш ва таянч стерженлари сонини С, деб олсак, стерженли системанинг эркинлик даражасини аниқлайдиган формула қуйидагича ифодаланади:

$$\boxed{W=3D-2Ш-C} \qquad (1.2)$$

Бу формуланинг замирида юқоридаги мулоҳаза ётибди, яъни ҳар бир диск учта эркинлик даражасига эга, ҳар бир шарнир иккита эркинлик даражасига ва ҳар бир таянч стержени битта эркинлик даражасига чек қўяди.

Шарнирлар сонини ҳисоблашда, улар иккига — оддий ва мураккаб шарнирларга ажратилади. Икки дискни бирлаштирувчи шарнир оддий, иккидан ортиқ дискни бирлаштирувчи, шарнир эса — м у р а к к а б шарнир деб аталади. Шарнирлар сони дисклар сонидан битта кам бўлади, яъни

$$Ш=Д — 1$$

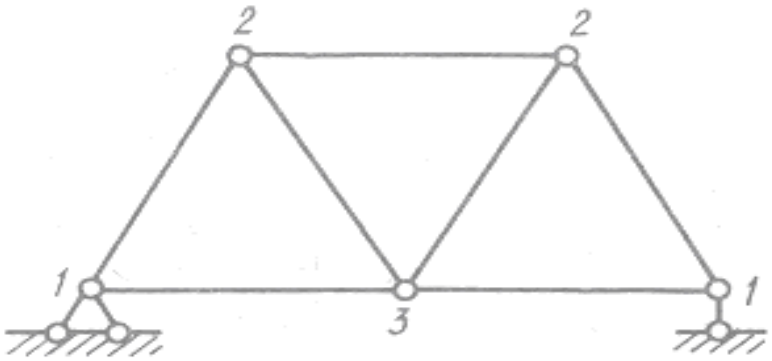
Стерженли системаларнинг эркинлик даражаларини аниқлашда ҳам қуйидаги учта ҳол учрайди:

1) W=0; бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади.

2) W>0; бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади;

3) W<0; бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ, ортиқча боғланишларга эга бўлади.

1- мисол: Ясси ферманинг эркинлик даражасини аниқлаш керак (1.11-расм).



1.11. расм

Дисклар, яъни стерженлар сони Д=7;

Шарнирлар сони, Ш=9 (шаклда шарнирлар сони рақамлар билан кўрсатилган);

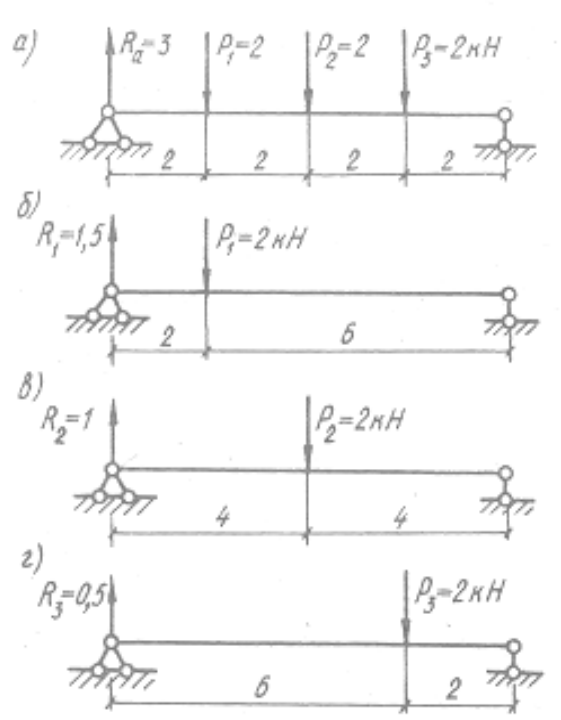
Таянч стерженлари сони $С_Т$=3; эркинлик даражаси W=3 7 — 2 9 — 3=0;

Демак, ферма геометрик ўзгармас, статик аниқ экан.

1.7. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидаси ва умумлашма эпюралар

Қурилиш механикасида катта аҳамиятга эга бўлган бу қоида қуйидагича таърифланади:

Агар иншоотга бир неча кучлар қўйилган бўлса, уларнинг биргаликдаги таъсиридан ҳосил бўлган натижа, ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан ҳосил бўлган натижалар йиғиндисига тенг бўлади.



1.12-расм

Бу қоиданинг моҳиятини ойдинлаштириш учун оддий бир мисол келтирайлик. Балканинг чап таянч реакциясини (1.12- расм, а) икки хил йўл билан аниқлаймиз. Биринчи усул бўйича R_a, таянч реакцияси учала куч (P_1, P_2, Рз) таъсирида бир йўла аниқланади: R_a=ЗкН чиқади. Иккинчи усулга кўра кучлар навбатма-навбат қўйилади ва ҳар бир кучга мос равишда реакциялар аниқланади. Топилган реакцияларнинг қиймати чизмаларда берилган (1.12-расм, б, в, г).

Реакциянинг тўлиқ қиймати алоҳида топилган реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади: $R_a= R_1+ R_2 +R_3 = 1,5 + 1 + 0,5 = 3$ кН.

Шундай қилиб, балкага кучлар бир йўла қўйилгандаги реакциянинг қиймати кучлар алоҳида-алоҳида қўйилган ҳолдаги, реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг чиқди. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидаси деган иборанинг маъноси ана шундан иборат.

Кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидаси эластиклик чегарасида қўлланилади. Реакция ва ички кучларни аниқлашда иншоот деформацияланмаган деб фараз этилади. Қўлланиладиган тенгламалар чизиқсиз бўлса, мазкур усулдан фойдаланиб бўлмайди.

Умумлашма эпюралар. Маълумки, қурилиш конструкцияларига турли хил юклар таъсир этади. Ҳар бир юкнинг ўзига яраша эпюралари бўлади. Шундай ҳоллар бўладики, маълум бир кесимда энг катта момент бир хил юкдан ҳосил бўлса, бошқа кесимда бошқа юкдан ҳосил бўлади. Муҳандисни эса максимал зўриқишлар қизиқтиради. Максимал ёки минимал зўриқишларни аниқлаш мақсадида умумлаштирилган эпюралар қурилади.

Кўпинча иншоотга доимий ва муваққат юклар таъсир этади. Доимий юклар иншоотга муттасил равишда таъсир этиб, муваққат юкларнинг таъсир этиш вақти, қиймати ва ўрни ўзгариб туради. Бу эса ўз навбатида иншоот кесимларидаги зўриқишларнинг ўзгаришига олиб келади. Бундай ҳолларда зўриқишларнинг максимал ёки минимал қийматларини аниқлаш учун доимий ҳамда муваққат юкларнинг турли вариантлари учун алоҳида эпюралар қурилади. Доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш билан муваққат юкдан ҳосил бўлган мусбат зўриқишларнинг йиғиндиси S_{max} ни, яъни тўлиқ максимал зўриқишни, манфий зўриқишлар йиғиндиси эса S_{min} ни, яъни тўлиқ минимал зўриқишни беради;

$$S_{\max} = S_{доим} + \sum (+S_{мув})$$
$$S_{\min} = S_{доим} + \sum (-S_{мув}) \qquad (1.3)$$

Бу ерда $S_{доим}$ — доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш; $\sum(+S_{мув}), \sum(-S_{мув})$ — муваққат юклардан ҳосил бўлган мусбат ва манфий зўриқишлар.

Зўриқишларнинг аниқланган қийматларини ягона масштабда бир ўқ устига жойлаштирилади ва туташ чизиқ билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график *умумлашма эпюра*[1] деб аталади. Мазкур эпюрага доир мисол статик ноаниқ узлуксиз балкалар ҳисобида берилган.

---

[1] Русчада бу атама «огибающая» ёки «объемлюшая» деб юритилади. Бу сўзларнинг ўзбек тилига айнан таржимаси атама маъносига унча тўғри келмаганлиги сабабли асли маъносига яқинроқ термин қабул қилдик.

Қурилиш конструкцияларини ҳисоблашда (масалан, арматуранинг кесимини танлашда) эпюрадан мутлақ қиймати катта бўлган момент танлаб олинади; конструкциянинг мустаҳкамлиги ана шу момент бўйича текширилади.

2- БОБ
ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ

2.1. Таъсир чизиқлари ҳақида тушунча

Замонавий иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлаш катта аҳамиятга эгадир.

Маълумки, кўприк, эстакада, кран ости балкалари сингари қатор муҳандислик иншоотларини ҳисоблашда биз кўзғалувчан юкларга дуч келамиз.

Иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлашда, асосан, қуйидаги икки масала ҳал этилади:

1. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иишоот қисмларида ҳосил бўладиган зўриқишлар, иншоотнинг таянч реакциялари, эгувчи моментлари, кўндаланг ва бўйлама кучлари, ферма стерженларидаги зўриқишлар ва ҳ. к. аниқланади.

2. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган энг катта зўриқишлар аниқланади, яъни ҳаракатланувчи юклар системасининг иншоотда энг нобоб жойлашуви масаласи ҳал этилади.

Иншоот бўйлаб бирлик куч (P=1) ҳаракатланганда, иншоот қисмларидаги куч омилларининг ўзгаришини ифодаловчи график **таьсир чизиқлари** деб аталади. Куч омиллари деганда ҳосил бўладиган ички кучлар (M, Q, N) ва таянч реакциялари тушунилади.

Иншоот бўйлаб ҳаракатланувчи бирлик кучнинг ҳолатини белгиловчи абциссани x билан, иншоотдаги зўриқишни S билан белгиласак, у ҳолда зўриқишнинг таъсир чизиқ тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$S = f($$

Таъсир чизиқларини чизишнинг с т а т и к ва к и н е м а т и к усуллари мавжуд.

Статик усул ҳаракатланувчи бирлик куч (P=1) нинг ихтиёрий ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузиб, улардан изланаётган зўриқишнинг аналитик ифодасини тузишга асосланган.

Бу аналитик ифода ёрдамида зўриқиш S нинг ўзгариш графиги чизилади.

Кинематик усул ёрдамида таъсир чизиқларини қуриш мумкин бўлган кўчишлар қоидасига асосланади.

2.2. Оддий балкаларда зўриқишларнинг таъсир чизиқлари

Агар иншоотга қўзғалувчи кучлар тизими қўйилган бўлса, уларни аввало ҳаракатланувчи бирлик куч (P=1) таъсирига ҳисобланади.

Оддий балкаларга куч омилининг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик кучни балканинг тегишли нуқталарига жойлаштириб, бизни қизиқтираётган миқдорнинг ўзгариш қонунини ифодаловчи тенглама тузилади ва унинг графиги чизилади.

Оддий балкаларда таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари

Бирлик куч балка бўйлаб ҳаракатланганда, таянч реакцияларининг қай тарзда ўзгаришини кўриб чиқамиз. Бирлик кучни шаклда кўрсатилганидек жойлаштирамиз (2.1- расм).

R_a таянч реакциясини аниқлаш учун В таянчига нисбатан статиканинг мувозанат тенгламасини тузамиз

$$R_a \cdot l - P(l - x) = 0; \quad \textit{бундан} \qquad R_a = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}. \tag{2.1}$$

Демак, бирлик куч (P=1) балка бўйлаб ҳаракатланса, R_a таянч реакциясининг ўзгариши тўғри чизиқ бўйлаб содир бўлади. Шаклга кўра x нолдан l гача ўзгаради. Тўғри чизиқни ўтказиш учун x га қийматлар берамиз:

$x = 0$ бўлса $R_a = 1$;

$x = l$ бўлса $R_a = 0$ бўлади.

Шу икки нукта координаталари ёрдамида R_a таянч реакциясининг таъсир чизиғи қурилади (2,1- расм, б).

А таянчига нисбатан тузилган статиканинг мувозанат тенгламасидан R_b реакцияси топилади:

$$\sum M_A = 0, \quad P \cdot x - R_b \cdot l = 0,$$

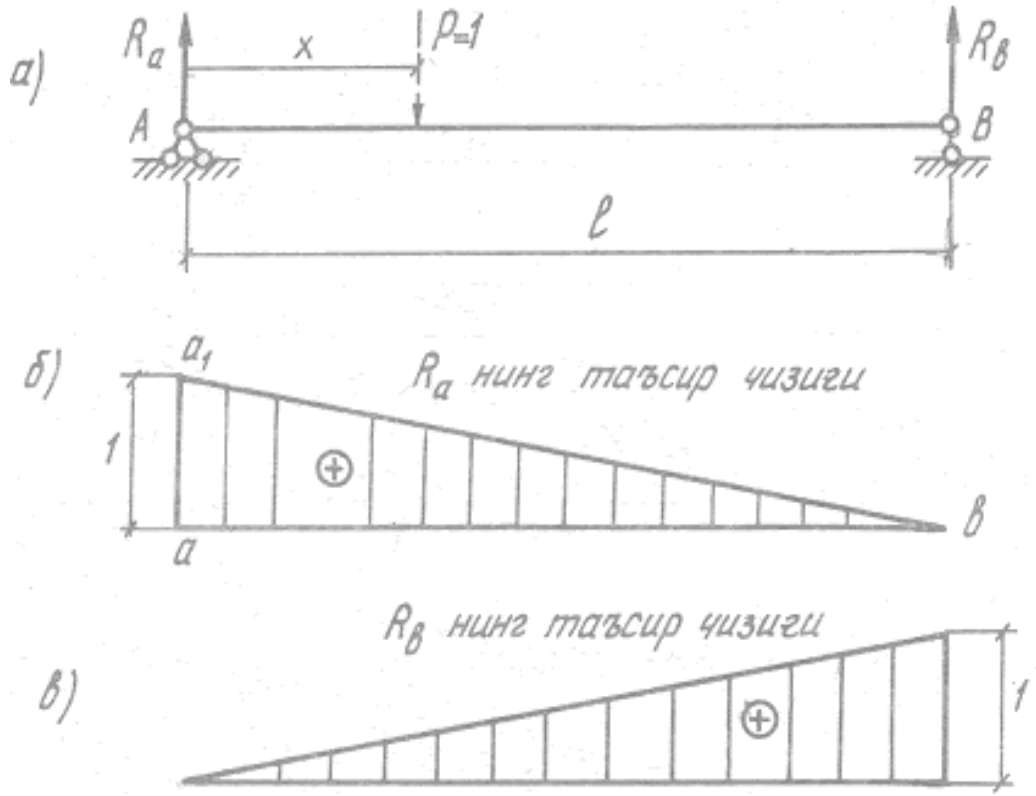
$$R_b = \frac{P \cdot x}{l} = \frac{x}{l}. \qquad (2.2)$$

Бу ерда $0 \le x \le 1$ эканлигини ҳисобга олсак,

$x = 0$, $R_b = 0$;

$x = l$, $R_b = 1$ бўлади.

Демак R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам тўғри чизиқ тенгламаси орқали қурилар экан (2.1- расм, в).



2.1 – расм

R_a ва R_b таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари мусбат ишорали бўлиб, ординаталари ўлчамсиз миқдордан иборатдир.

Икки консолли балка учун таянч реакциясининг таъсир чизиқлари

Икки консолли балка учун (2.2- расм) таянч реакцияларининг таъсир чизиқларини қуриш оддий балка учун амалга оширилган усуллар ёрдамида бажарилади.

Масалан, балканинг чап таянч реакцияси R_a нинг таъсир чизиғини қуриш учун мувозанат тенгламасидан фойдаланиб $R_a = \frac{l-x}{l}$ ни топамиз.

Бу ерда x масофа қуйидаги тарзда ўзгаради:

$$-a \le x \le l+b$$

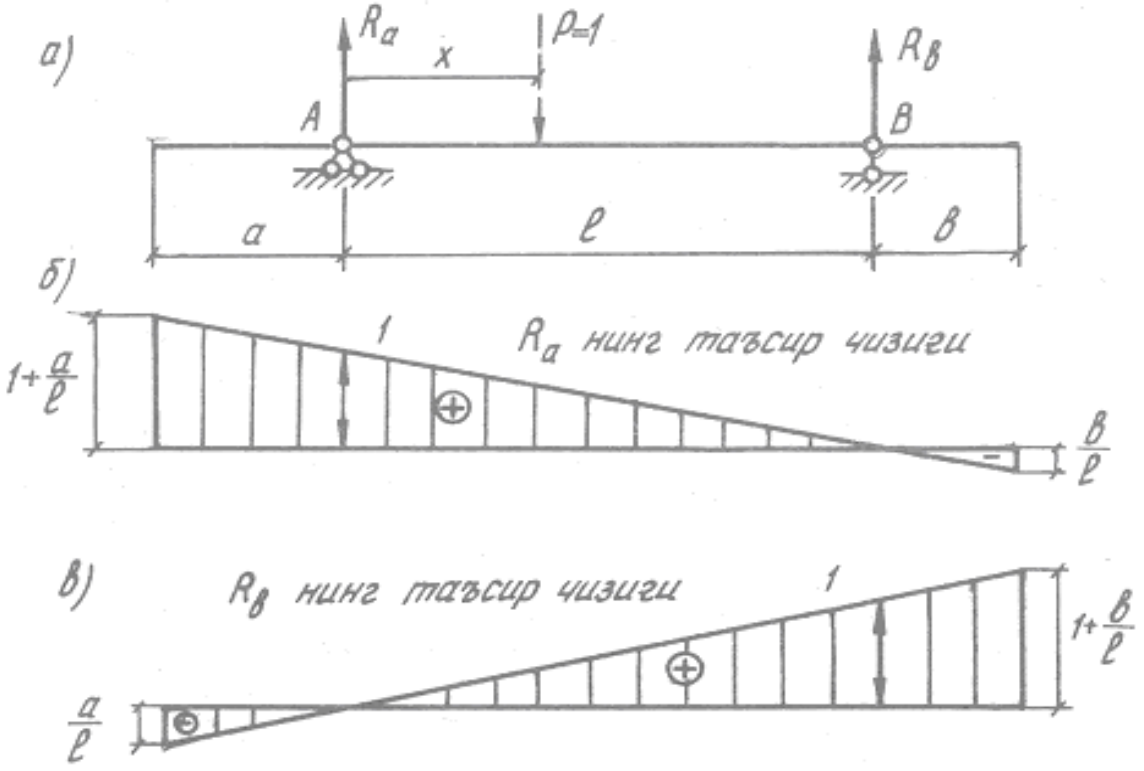
х га қийматлар берамиз:

$$x=-a,\ R_a = 1+\frac{a}{l};$$

$$x=a,\ R_a = 1;$$

$$x=l,\ R_a = 0;$$

$$x=l+b,\ R_a = -\frac{b}{l};$$



2.2 – расм

Бу ординаталар ёрдамида қурилган R_a нинг таъсир чизиғи 2.2- расм, б, да ифодаланган. R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам шу тарзда чизилади (2.2, в- расм).

Демак, консолли балка таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари оддий балка таянч реакцияларининг таъсир чизиғига асосланган бўлиб, асосий тўғри чизиқ консол учигача давом эттирилар экан.

Оддий ва консол балкаларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиқлари

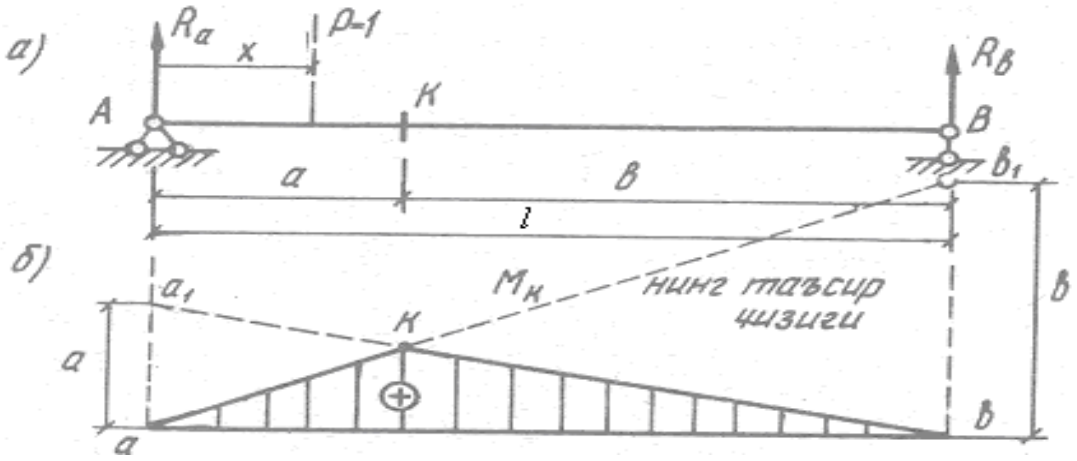
Аввало эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизиқлари оддий балка учун қуриб олинади, кейин консолга давом эттирилади. Одатда, М ва Q нинг таъсир чизиғи бирор кесим учун қурилади. К кесимдаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини қурайлик. Кесимгача бўлган масофалар, 2.3, а- расмда ифодаланган.

Таъсир чизиғини қуришда мусбат ишорали ординаталар ўқдан юқорига, манфий ординаталар эса ўқдан пастга жойлаштирилади.

Бирлик куч К кесимидан ўнгда ҳаракатланса, чап қисм учун мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_k = R_a \cdot a = \frac{l - x}{l} \cdot a, \qquad (2.3)$$

Демак, эгувчи моментнинг таъсир чизиғи R_a реакциясига боғлик экан, яъни R_a нинг ординаталарини a га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиғи келиб чиқар экан.



2.3 – расм

Таъсир чизиғини қуриш учун А таянч йўналиши бўйича абсцисса ўқига перпендикуляр ҳолатда a масофаси жойлаштирилади, топилган нуқта ўнг таянч остидаги нуқта билан туташтирилади ва шу тўғри чизиққа К кесим проекцияланади. Бу ерда kb масофа эгувчи момент таъсир чизиғининг ў н г ч и з и ғ и дейилади (2.3, в – расм).

Агар бирлик куч К кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда кесимнинг ўнг қисми учун мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$M_k = R_b \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b \qquad (2.4)$$

Бу ерда ҳам эгувчи моментнинг таъсир чизиғи таянч реакцияси R_b га боғлиқдир, яъни R_b нинг ординаталарини «b» га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиғи келиб чиқади.

Ҳосил бўлган қийматлар бўйича M_k нинг таъсир чизиғини қурамиз (2.3-расм). Бунинг учун R_b таянч реакцияси йўналиши бўйича абсцисса ўқига перпендикуляр «b» масофа ўлчаб қўйилади, ҳосил бўлган нуқта b чап таянч билан туташтирилади ва шу туғри чизиққа К кесим проекцияланади. Ҳосил бўлган ak узунлик, эгувчи момент таъсир чизиғининг ч а п ч и з и ғ и дейилади.

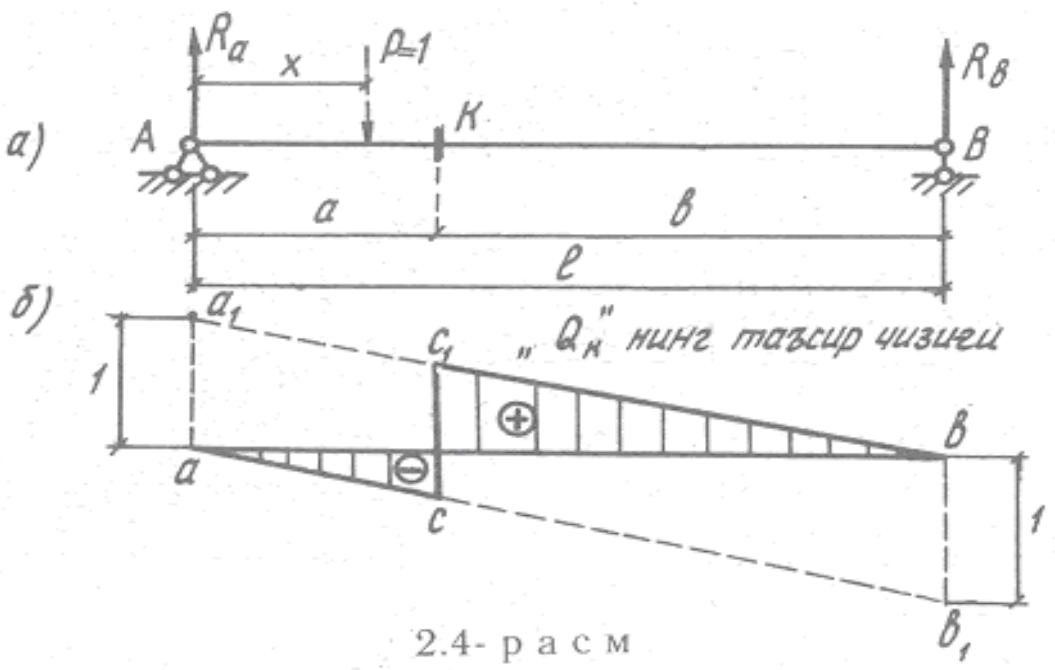
Ҳар икки ўнг ва чап тўғри чизиқлар К кесим остида кесишади, чунки x = a бўлганда, $M_k^{чап} = M_k^{ўнг}$ бўлади.

Шундай қилиб, akb синиқ чизиғи, К кесимидаги эгувчи моментнинг таъсир чизиғи бўлади.

Эгувчи момент таъсир чизиғининг ординаталари узунлик ўлчамида, яъни м (см) да ўлчанади. Эгувчи момент таъсир чизиғининг ташқи кўриниши эгувчи момент эпюраси билан маълум ўхшашликка эга, лекин шунга қарамай булар орасида кескин фарқ бор. Эгувчи момент эпюрасидан фойдаланиб, ташқи кучлар таъсирида истаган кесимда ҳосил бўлган эгувчи моментни топа оламиз. Эгувчи моментнинг таъсир чизиғи орқали эса маълум бир кесимдаги эгувчи моментнинг қийматини топа оламиз, ҳолос.

Энди кўндаланг кучларнинг таъсир чизиғини қуришга ўтамиз.

Балканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик куч (Р= 1) нинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз (2.4. а – расм).



2.4- р а с м

Биринчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг чап қисмида ҳаракатланади, деб фараз этайлик, у ҳолда ўнг қисм мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum Y = 0, \quad Q_k^{chap} = -R_b = -\frac{x}{l}. \tag{2.5}$$

Иккинчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланмокда, деб қабул қилинади, у ҳолда чап қисм учун тузилган мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q_k^{o'ng} = R_a = \frac{l - x}{l}, \tag{2.6}$$

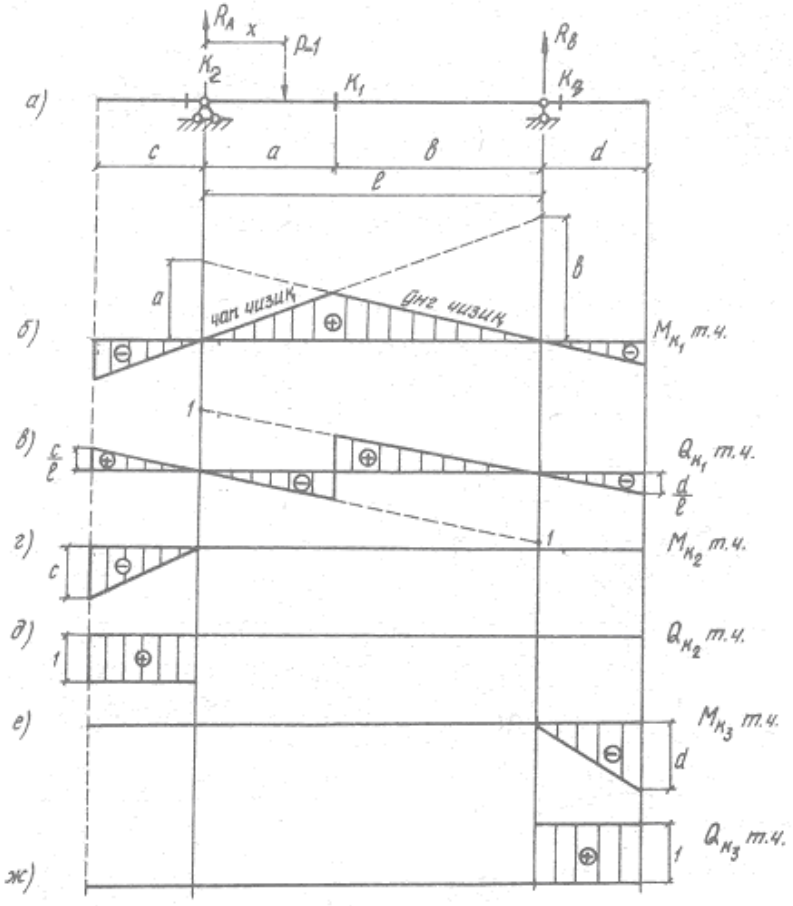
Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун чап таянч остига бирор масштабда мусбат бирлик ординатани жойлаштириб, уни ўнг таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз, сўнгра ўнг таянч остига манфий бирлик ординатани жойлаштириб, уни чап таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз.

Шу тарзда бир-бирига параллел бўлган чап ва ўнг тўғри чизиқларга эга бўлдик. Чап тўғри чизиқ чап таянчдан К кесимгача, ўнг тўғри чизиқ эса К кесимидан ўнг таянчгача бўлган оралиқларда Q_k нинг ўзгаришини ифодалайди (2.4- расм, б).

Штрихланган юза Q_k нинг *таъсири чизиғи* деб аталади.

Кўндаланг кучнинг таъсир чизиқлари таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари каби ўлчамсиз бўлади.

Консол балканинг *К* кесими учун ички кучлар (M_k *ва* Q_k *нинг*) таъсир чизиқлари қурилиши талаб қилинса, у ҳолда иш оддий балкадагига ўхшаш амалга оширилади. Бунинг учун балканинг таянч оралиғига M_k *ва* Q_k нинг таъсир чизиғи қурилади, сўнгра чап тўғри чизиқ чап консол учигача, ўнг тўғри чизиқ эса ўнг консол учигача давом эттирилади (2.5- расм, а, б).



2.5-расм

Агар кесим балканинг консол қисмида берилса, у ҳолда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиқлари қуйидаги тартибда қурилади:

K_2 кесими балканинг чап консолида жойлашган бўлсин (2.5- расм, а). $M_{к2}$ нинг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик юкнинг икки ҳолатини қараб чиқамиз.

1. Бирлик куч (P=l) кесимнинг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда

$$M_{k_2}^{chap} = -P(c - x_1) = -(c - x_1),$$
$$x_1 = 0, \; M_{k_2}^{chap} = -c,$$
$$x_1 = c, \quad M_{k_2}^{chap} = 0 \text{ бўлади.}$$

Чап тўғри чизиқни ўтказиш учун $x_1=0$ нуқтасига c ординатасини маълум масштабда жойлаштирамиз, сўнгра уни $x_1 = c$ кесимидаги ноль нуқта билан бирлаштирамиз (2.5- расм, г).

Бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, $М_{К_2}^{ўнг} = 0$ бўлади. Демак, ўнг тўғри чизиқ нолга тенг бўлиб, балка ўқининг устида ётади. M_{K2} нинг чап ва ўнг тўғри чизиқлари K_2 кесими остида кесишади.

Q_{k_2} нинг таъсир чизиғини қуриш учун ҳам бирлик юкнинг икки ҳолатини текширамиз. Бирлик куч K_2 кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда консол қисмнинг мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$Q_{k_2}^{chap} = -P = -1,$$

Q_{k_2} нинг чап тўғри чизиғи консол учидан балканинг абсцисса ўқига параллел бўлади (2.5- расм, д).

Қўзғалувчан бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, у ҳолда чап қисмининг мувозанат тенгламаси $Q_{K_2}^{ўнг} = 0$ бўлади.

Демак, ўнг тўғри чизиқ нолга тенг бўлиб, балканинг ўқи устида ётади (2.5- расм, д). Балканинг ўнг консол қисмида жойлашган $K_з$ кесими учун $M_{к3}$ ва $Q_{k_з}$ ларнинг таъсир чизиқлари юқорида баён этилган тартибда амалга оширилади (2.5- расм, ж).

2.3. Зўриқишлар қийматини таъсир чизиқлари ёрдамида аниқлаш

Шу бобнинг бошланғич қисмида таъсир чизиқларини қуриш тартиби билан танишиб ўтдик. Энди шу таъсир чизиқлари ёрдамида зўриқишларнинг (яъни эгувчи момент, кўндаланг куч ва таянч реакцияларининг) қийматини аниқлаш масаласига тўхталамиз.

Қўзғалмас юкларнинг иншоотга йиғиқ, ёйиқ ва жуфт куч тариқасида қўйилиши бизга маълум. Кучларнинг ҳар қайси турини алоҳида равишда кўриб чиқамиз.

Иншоотга йиғиқ кучлар тизими қўйилган ҳол

Балкага P_1 кучи таъсир этади, дейлик. Бу ҳолда исталган зўриқиш S нинг қиймати мазкур куч билан шу куч йўналишида таъсир чизиғидан олинган ординатанинг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни зўриқишнинг қиймати $P_1 \cdot y_1$ бўлади.

Агар иншоотга кучлар тизими қўйилган бўлса (2.6- расм, а) кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидасига кўра тўлиқ зўриқишнинг қиймати қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

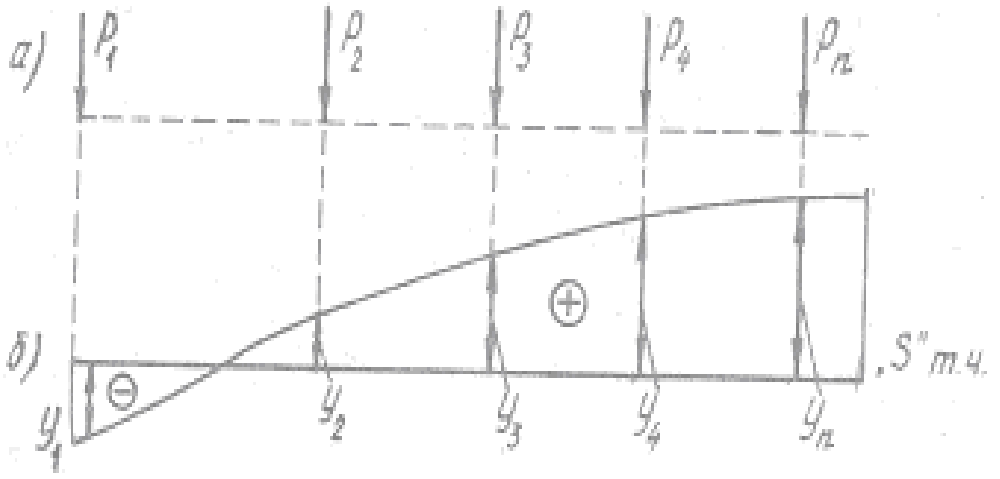
$$S = -P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4 + \cdots + P_n \cdot y_n ,$$

$$\text{ёки } S = \sum_{n=1}^{n} P_i \cdot y_i \qquad (2.7)$$

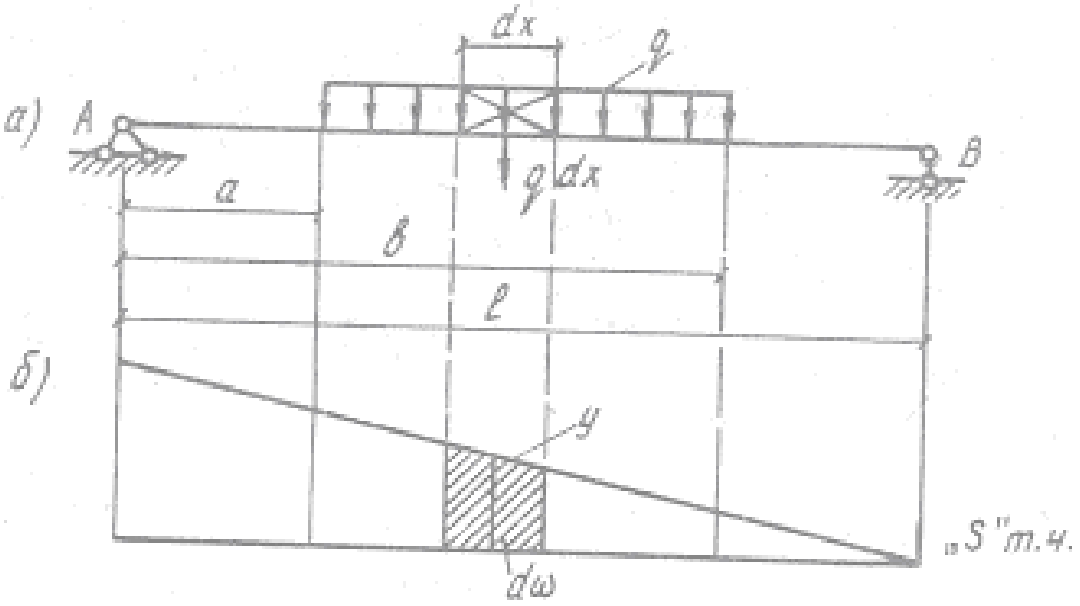
Бу ерда y_i — таъсир чизиғида P_i куч йўналишидаги ордината.

Иншоотга ёйиқ юк қўйилган ҳол

Иншоотга қўйилган ёйиқ юкдан узунлиги dx бўлган кичкина бўлакча ажратамиз ва бунга мос келган ёйиқ юкни элементар йиғиқ куч $q(x)dx$ орқали ифодалаймиз (2.7- расм).



2.6 - расм



2.7 - расм

Элементар кучдан ҳосил бўлган элементар зўриқиш (2.7) формулага асосан қуйидагича аниқланади:

$$dS = q \cdot dx \cdot y \qquad \text{(а)}$$

Зўриқишнинг тўлиқ қийматини аниқлаш учун (а) тенгликни интеграллаймиз

$$S = \int_a^b q \cdot dx \cdot y = q \cdot \omega \qquad \text{(б)}$$

Бу ерда q ёйиқ юк интенсивлиги;

ω — таъсир чизиғида ёйиқ юк қўйилган оралиққа мос келувчи юза.

Иншоотга жуфт кучлар қўйилган ҳол

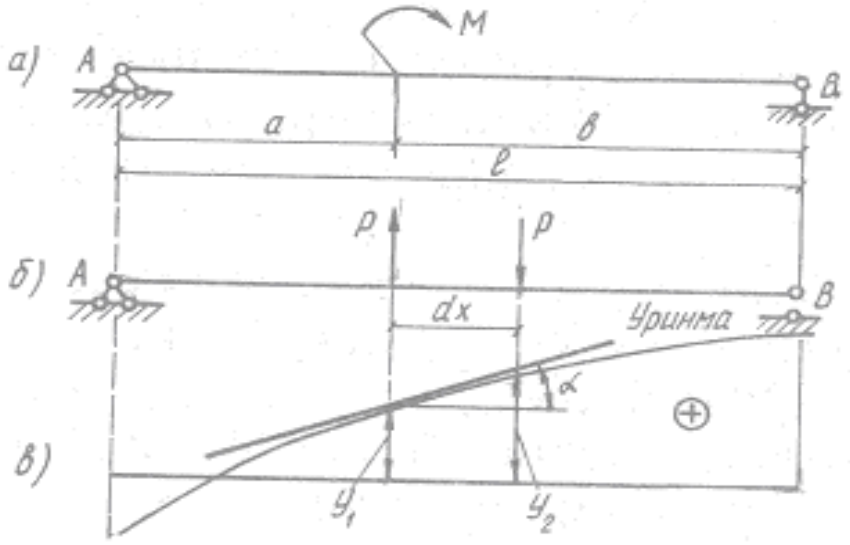
Моментдан ҳосил бўлган зўриқишни аниқлаш учун момент икки жуфт йиғиқ кучларга ажратилади (2.8- расм):

$$M = P \cdot dx .$$

Йиғиқ кучлар таъсирида вужудга келадиган зўриқиш (2.7) формулага асосан аниқланади:

$$S = P \cdot y_2 - P \cdot y_1 = P(y_2 - y_1) = P \cdot d\,x\,tg\,\alpha = M \cdot tq\alpha ,$$
$$S = M \cdot tq\alpha .$$

Бу ерда α — момент қўйилган нуқтада таъсир чизиғига ўтказилган уринма билан абсцисса ўқи орасидаги бурчак.



2.8- расм

Агар иншоотга бир йўла йиғиқ куч, ёйиқ куч ва жуфт кучлар қўйилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган зўриқишлар миқдори таъсир чизиғи ёрдамида умумий ҳолда қуйидагича аниқланади:

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot tq\alpha_i \qquad (2.8).$$

Бу формуладан фойдаланишда қуйидаги ишора қоидасига амал қилинади:

1. Юклар юқоридан пастга йўналган бўлса, улар мусбат деб қабул қилинади.

2. Момент соат стрелкаси бўйича йўналса, мусбат олинади.

3. Таъсир чизиғидан олинган ордината y_i ва юза ω_i ўз ишораси бўйича олинади.

4. Агар α бурчак соат стрелкасига тескари йўналишда ортиб борса, мусбат бўлади.

2.4. Юк тугунлар орқали узатилганда таъсир чизиқларини қуриш

Бинокорликда шундай иншоотлар учрайдики, ташқи юклар асосий балкага бевосита қўйилмай, балки бошқа ёрдамчи балкалар орқали таъсир этади (2.9-расм).

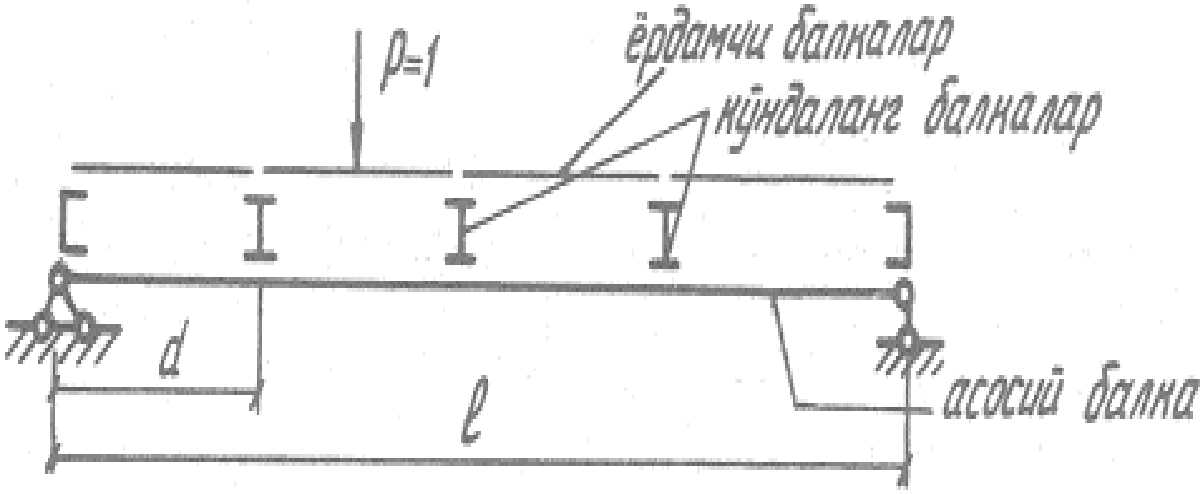
Шаклдан кўриниб турибдики, ташқи юклар ёрдамчи бўйлама балкачалар бўйлаб ҳаракатланмоқда. Бундай системаларда ташқи юклар асосий балкага тугунлар орқали узатилади.

Кўндаланг балканинг асосий балкага таянган жойи тугун, икки қўшни тугун оралиғи панел узунлиги деб аталади ва d ҳарфи билан белгиланади (2.9-расм).

Энди ташқи юк ёрдамчи балка бўйлаб ҳаракатланиб, асосий балкага тугунлар орқали таъсир этишини кўриб ўтамиз (2.10- расм).

Ҳаракатланувчи бирлик куч 2 — ва 3 — тугунлар орасида жойлашган дейлик: агар куч 2 — таянчдан x масофада ва 3 — таянчдан $d - x$ масофада жойлашган бўлса, у ҳолда унинг иккинчи ва учинчи тугунлардаги ташкил этувчи қийматлари қуйидаги формула билан ифодаланади (2.10- расм):

$$P_2 = 1 \cdot \frac{d-x}{d} \quad \textit{ва} \quad P_3 = 1 \cdot \frac{x}{d}.$$



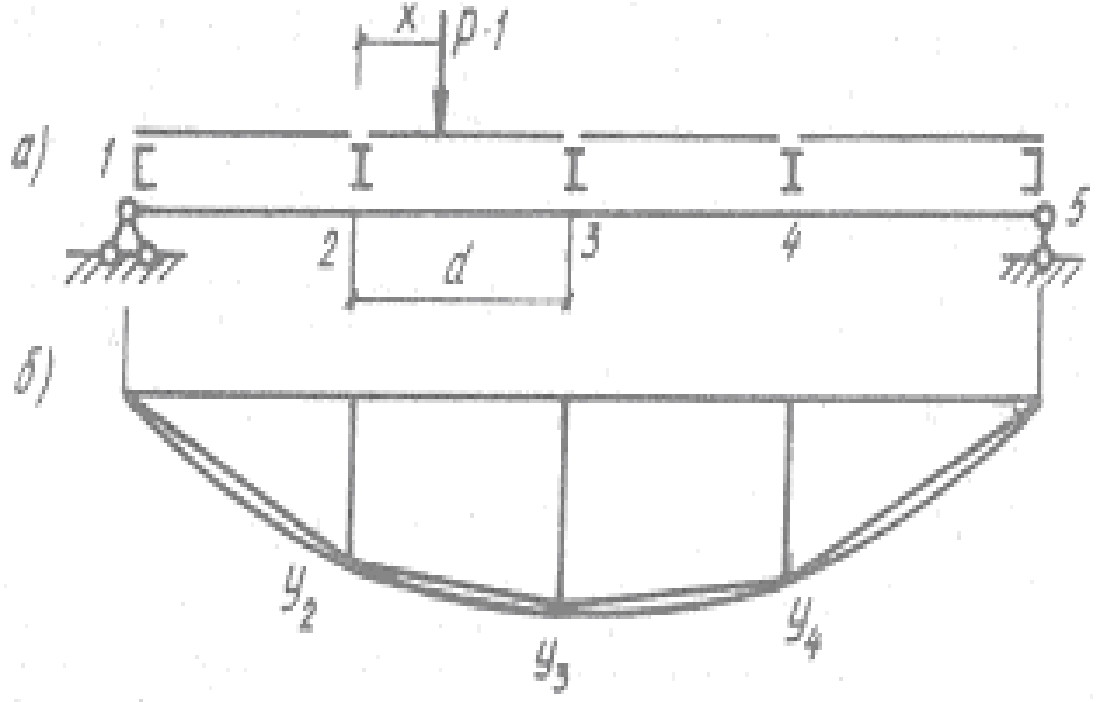
2.9 - расм

2.10- расм, б да ифодаланган эгрилик бирлик кучнинг асосий балка бўйлаб ҳаракатланишидан ҳосил бўлган таъсир чизиғи десак, у ҳолда

$$S = P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 = \frac{d-x}{d} \cdot y_2 + \frac{x}{d} \cdot y_3 \qquad (2.9)$$

бўлади.

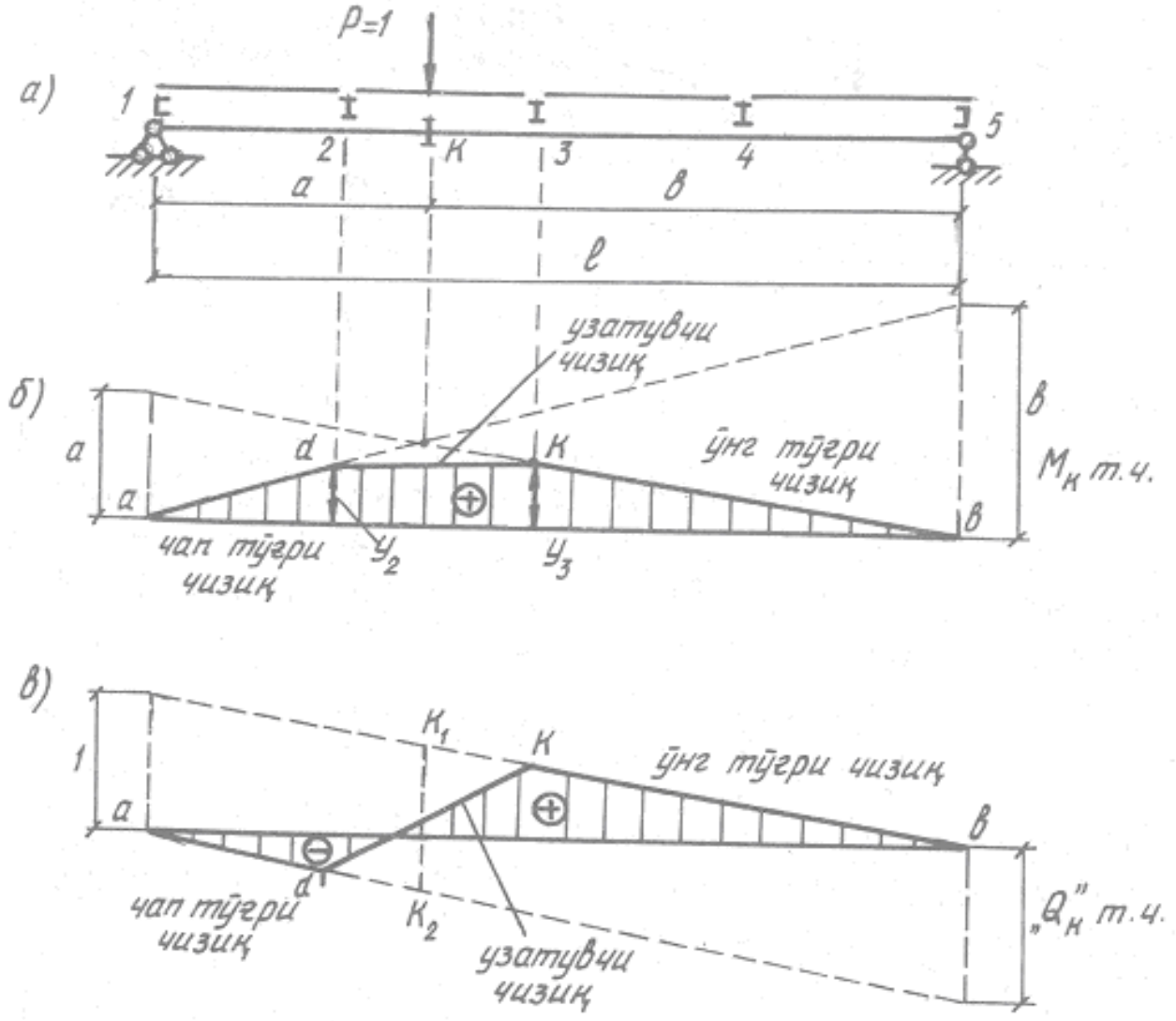
Зўриқиш S нинг қийматини аниқлаш учун тузилган бу тенглик тўғри чизиқ тенгламасини ифодалайди, шу сабабли y_2 билан y_3 ўзаро тўғри чизиқ ёрдамида туташтирилади (2.10- расм, б).



2.10 – расм

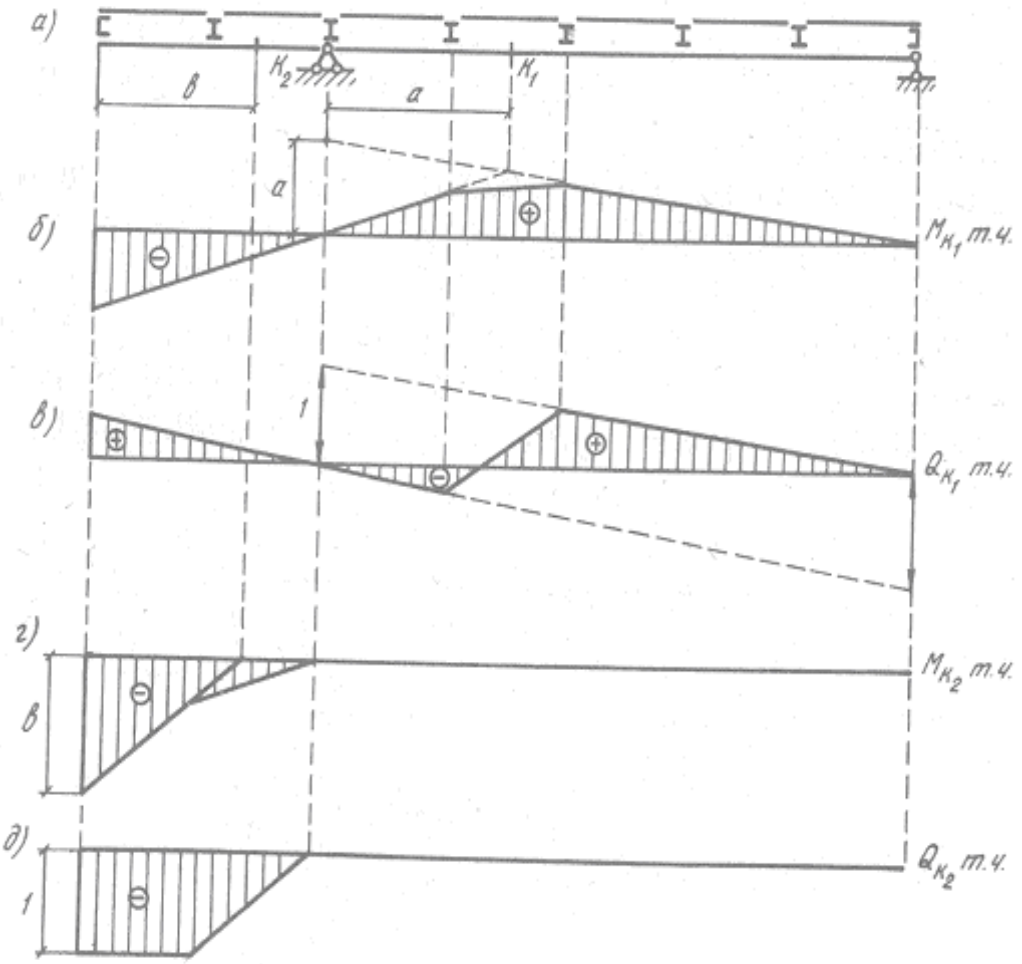
Демак, юк асосий балкага тугунлар: орқали таъсир этганда, бирор кесимнинг таъсир чизиғини қуриш учун, аввало, ёрдамчи балкаларни эътиборга олмасдан, балки оддий балканинг шу кесими учун тегишли таъсир чизиқлари қурилади. Кейин чап ва ўнг тугунлар тегишли тўғри чизиқларга проекцияланади. Топилган нуқталар тўғри чизиқ ёрдамида туташтирилади (2.11- расм, а, б, в).

Бу расмда *akb* асосий балканинг К кесими учун қурилган эгувчи момент таъсир чизиғи; *adkb* юк тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун эгувчи момент таъсир чизиғи (2.11- расм, б); ak_2k_1b — оддий балканинг К кесими учун қурилган қирқувчи кучнинг таъсир чизиғи (2.11- расм, в); *adkb* — юк асосий балкага тугунлар орқали таъсир этганда ҳосил бўлган қирқувчи кучнинг таъсир чизиғи (2.11- расм, в).



2.11 - расм

2.12- расмда консолли балкага ташқи юк тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун *M* ва *Q* нинг таъсир чизиқлари тасвирланган. 2.12- расм, *а* да берилган балка акс этган; *б* ва *в* да $К_1$ кесим учун, *г* ва *д* да эса $К_2$ кесим учун *M* ва *Q* пинг таъсир чизиқлари чизилган.



2.12 - расм

Шундай қилиб, юк асосий балкага тугунлар орқали узатилганда, зўриқишларнинг таъсир чизиқлари қуйидаги тартибда қурилади:

1. Зўриқишларнинг таъсир чизиғи, аввало, юк тугунлар орқали узатилишини эътиборга олмаган ҳолда асосий балка учун қурилади.

2. Кесимнинг чап ва ўнг қисмида жойлашган қўшни тугунлар тегишли чизиқларга проекцияланади ва нуқталар ўзаро туташтирилади.

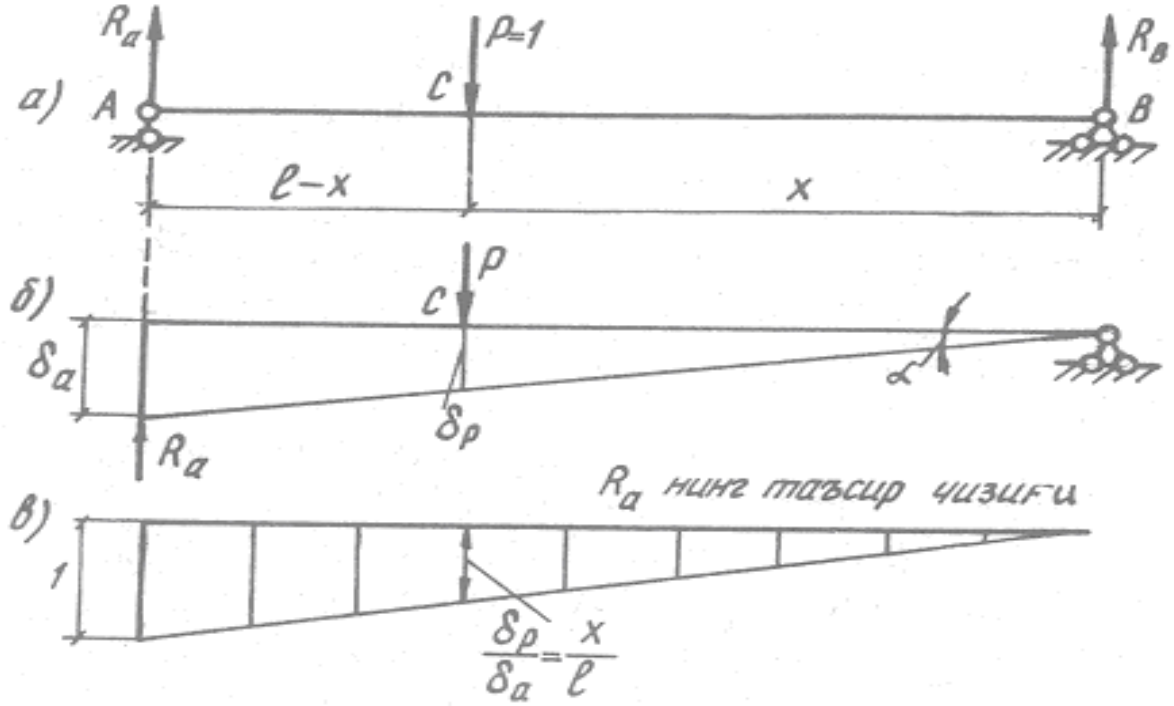
Ҳосил бўлган график юклар асосий балкага тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун қурилган таъсир чизиғи бўлади.

2.5. Таъсир чизиқлари қуришнинг кинематик усули

Таъсир чизиқларини кинематик усулда қуришда кўчишлар эпюрасидан фойдаланилади. Бунинг учун асосий системада зўриқиши изланаётган боғланиш ташлаб юборилади ҳамда мумкин бўлган (жоиз) кўчишлар қоидасидан фойдаланилади. Бу қоидага кўра, агар система мувозанат ҳолатда бўлса, ҳар қандай кичик жоиз кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарадиган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Мисол тариқасида оддий балканинг R_a реакцияси учун кинематик усулда таъсир чизиғи қурамиз (2.13- расм, а). А таянчини ташлаб юбориб, ўрнига R_a реакция кучини қўямиз. *AB* балка чексиз кичик бурчак α га кўчди дейлик. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли балка ўқи кўчишларини вертикал деб қабул қилса бўлади. Р кучи қўйилган нуқтанинг кўчишини δ_P, R_a кучи қўйилган нуқтанинг кўчишини δ_a деб белгилаймиз. Жоиз кўчишлар қоидасига мувофиқ балкага таъсир этувчи кучлар бажарган иш қуйидагича бўлади: (куч йўналиши билан кўчиш йўналиши қарама-қарши бўлганлиги сабабли R_a кучи бажарган ишнинг ишораси манфий олинган):

$$P \cdot \delta_p - R_a \cdot \delta_a = 0.$$



2.13. расм

P=1 эканлигини эътиборга олсак, (а) дан

$$R_a = 1 \cdot \frac{\delta_p}{\delta_a} \qquad (б)$$

келиб чиқади. Бирлик куч қўзғалувчан бўлганлиги учун δ_P кўчиш ҳам ўзгарувчан бўлади. δ_a эса ўзгармас миқдордир.

Бинобарин, R_a реакциясининг таъсир чизиғи δ_p кўчишнинг эпюраси тариқасида ҳосил қилиниши мумкин. Бунда таъсир чизиғининг ординаталари кўчиш ординаталаридан δ_a маротаба кичик бўлади (2.13- расм, в).

Кинематик усулда қурилган таъсир чизиғининг статик усулдаги шакли билан бир хил эканлиги қуйидаги ифодадан куриниб турибди (2.13- расм. б):

$$\delta_p = x \cdot tq\alpha;\ \delta_a = l \cdot tq\alpha.$$

Буларни (б)га қўйсак, $R_a = \frac{x}{l}$ — келиб чиқади.

Навбатдаги мисолда (2.14- расм, а) балканинг *K* кесимидаги эгувчи момент таъсир чизиғини кинематик усулда қурамиз. Балканинг *K* кесимига шарнир киритамиз, натижада балканинг битта боғланиши йўқолади. Йўқолган боғланишни момент M_k билан алмаштирамиз (2.14- расм, б).

K шарнири чексиз кичик масофа δ_k га кўчди дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида M_k ва *P* кучлари қуйидаги ишни бажаради:

$$P \cdot \delta_p - M_k \alpha - M_k \cdot \beta = 0 \qquad (в)$$

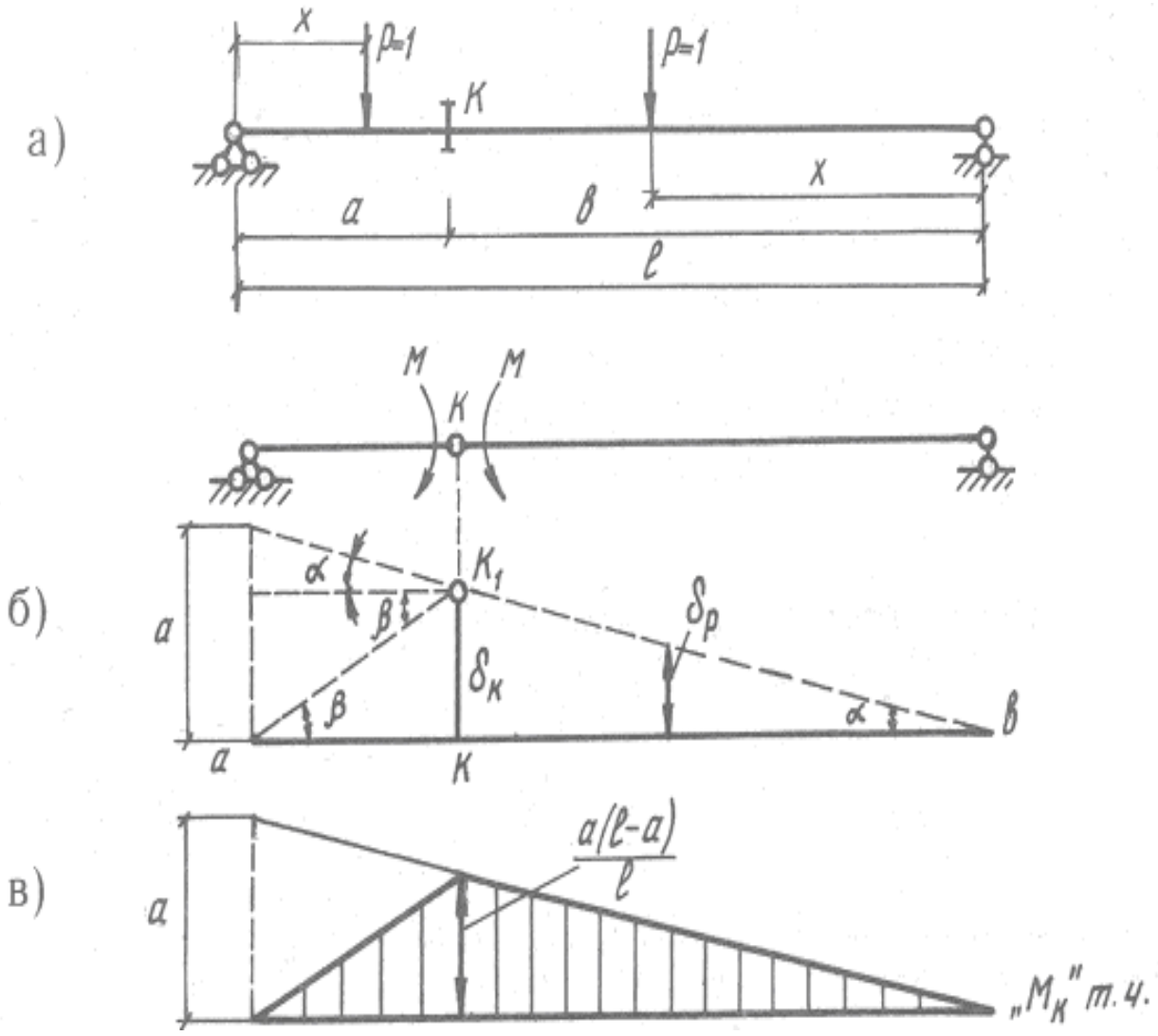
M_K нинг йўналиши бурилиш бурчаклари α ва β нинг йўналишига қарама-қарши бўлганлиги сабабли ишораси манфий олинди. (в) ифодасидан

$$M_k = \frac{P \cdot \delta_p}{\alpha + \beta} = \frac{1 \cdot \delta_p}{\delta_{xx}} \qquad (г)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\delta_p = \frac{\delta_k}{l-a} \cdot x$$

$$\delta_{xx} = \frac{\delta_k}{l-a} + \frac{\delta_k}{a} \qquad (д)$$



2.14- расм

(г) ифодасидан кўринадики, $M_к$ нинг таъсир чизиғи ҳам вертикал кўчишлар δ_p эпюраси каби бўлиб, қийматига кўра $\delta_{x\,x}$ маротаба кам бўлар экан (2.14- расм, в).

(д) ифодани (г) га қўйсак,

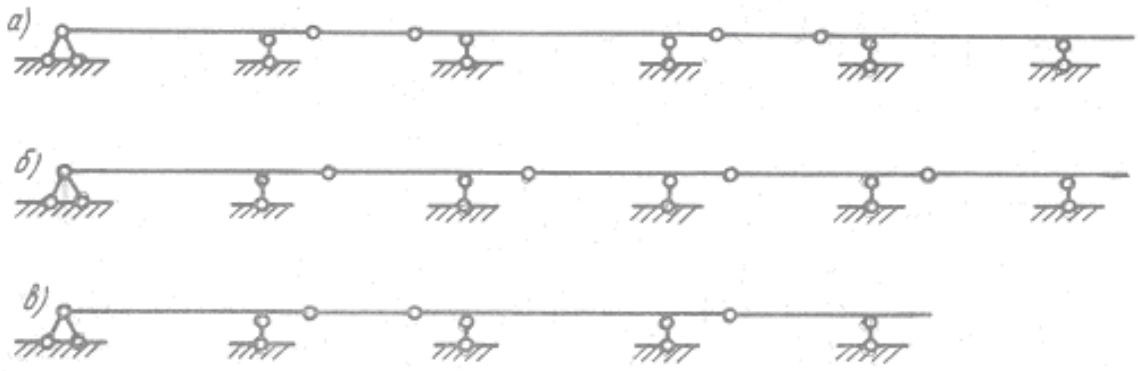
$$M_k = \frac{ax}{l}$$

келиб чиқади. Бу эса статик усулдаги ўнг тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

3- БОБ
КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР

3.1. Умумий маълумотлар

Кўп оралиқли статик аниқ балкалар бир оралиқли консолли балкаларни шарнирлар воситасида бириктириш йўли билан ҳосил қилинади (3.1- расм). Кўп оралиқли шарнирли балкалар ёндош оралиқларни ёпишда қўлланилади. Бундай оралиқларни ёпишда кетма-кет жойлашган бир оралиқли балкалардан фойдаланса бўлмайдими, деган савол туғилиши табиий. Тўғри, назарий ва амалий жиҳатдан фойдаланса бўлади. Аммо иқтисодий жиҳатдан мақсадга мувофиқ эмас. Чунки бир хил юк таъсирида бир оралиқли балкаларда кўп оралиқли балкаларга нисбатан кўпрок зўриқиш ҳосил бўлади, демак кўпроқ материал сарф бўлади, конструкция вазминлашади. Кўп оралиқли шарнирли балкалар статик аниқ бўлганликлари сабабли ҳароратнинг ўзгариши ёки таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлмайди. Бу эса унинг афзаллик томонлари ҳисобланади.



3.1 – расм

Кўп оралиқли балкаларда шарнирлар бўлмаса, система статик ноаниқ узлуксиз балкаларга айланиб қолади. Уларни бир-биридан фарқлаб турадиган элемент шарнирдир. Узлуксиз балкалар ҳақида дарсликнинг 8- бобида муфассал маълумотлар берамиз. Бу бобда эса кўп оралиқли шарнирли балкалар билан танишиб чиқамиз. Шарнирли балкани узлуксиз балкага қиёслаб, уни

узлукли балка деб атаса ҳам бўлади. Сабаби шуки, узлуксиз балкалар бутун яхлит конструкциядан иборат, шарнирли балкалар шарнир қўйилган ерда узилади. Шарнирнинг схематик тасвири 3.2 - расмда берилган.



3.2- расм

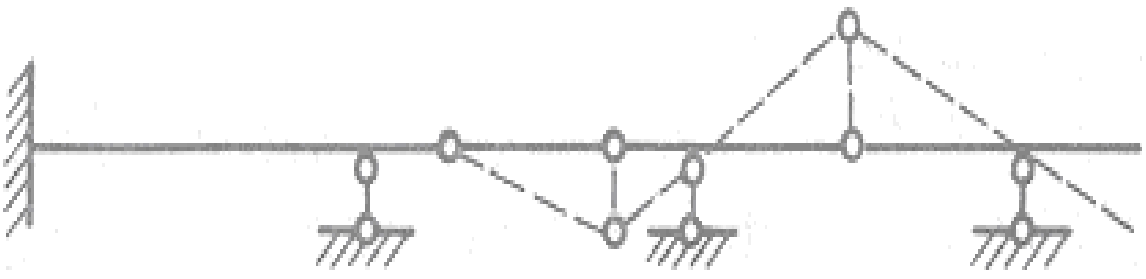
Кўп оралиқли балкани статик аниқ системага айлантириб берадиган элемент ҳам шарнирдир. Демак, шарнирлар сонини шундай аниқлаш керакки, ҳосил бўлган система статик аниқ, геометрик ўзгармас бўлсин. Қуйидаги формула ёрдамида аниқланган шарнирлар сони юқоридаги талабларни қондиради:

$$\boxed{Ш = C_T - 3} \qquad (3.1)$$

Бу ерда Ст — таянч стерженлари сони;

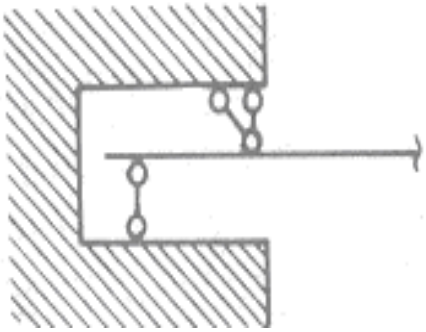
З — статика тенгламалари сони.

Шарнирлар сонини ушбу формула билан аниқланиши зарурий, аммо етарли шарт эмас. Статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун шарнирларни балка бўйлаб тўғри жойлаштириш талаб этилади. 3.3 – расмда тасвирланган система шарнирларнинг нотўғри жойлаштирилишига мисолдир.



3.3- расм

Бу балкадаги шарнирлар сони талаб даражасидадир, яъни система геометрик ўзгармас бўлиши учун Ш = 6 — 3 = 3 дона шарнир қўйилиши талаб этилади. Бироқ ана шу учта шарнир балкада нотўғри жойлаштирилган. Шунинг учун у геометрик ўзгарувчан система бўлиб қолган. Агар иккинчи ораликдаги икки шарнирдан бири биринчи ораликка кўчирилса, система геометрик ўзгармас ҳолга келади. Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, стерженлар сонини аниқлашда шарнирсиз қўзғалмас таянчнинг стерженлари сони $С_Т = 3$ деб қабул қилинган (3.4- расм).



3.4- расм

Битта оралиққа учта шарнир жойлаштириш ҳам нотўғридир, чунки бунда оний ўзгарувчан система ҳосил бўлади. Шарнирларни тўғри жойлаштиришнинг уч хил усули бор:

а) шарнирларни иккинчи ораликдан бошлаб жуфт жойлаштириш (3.1- расм, а);

б) шарнирларни (иккинчи ораликдан бошлаб) якка тартибда жойлаштириш (3.1-расм, б);

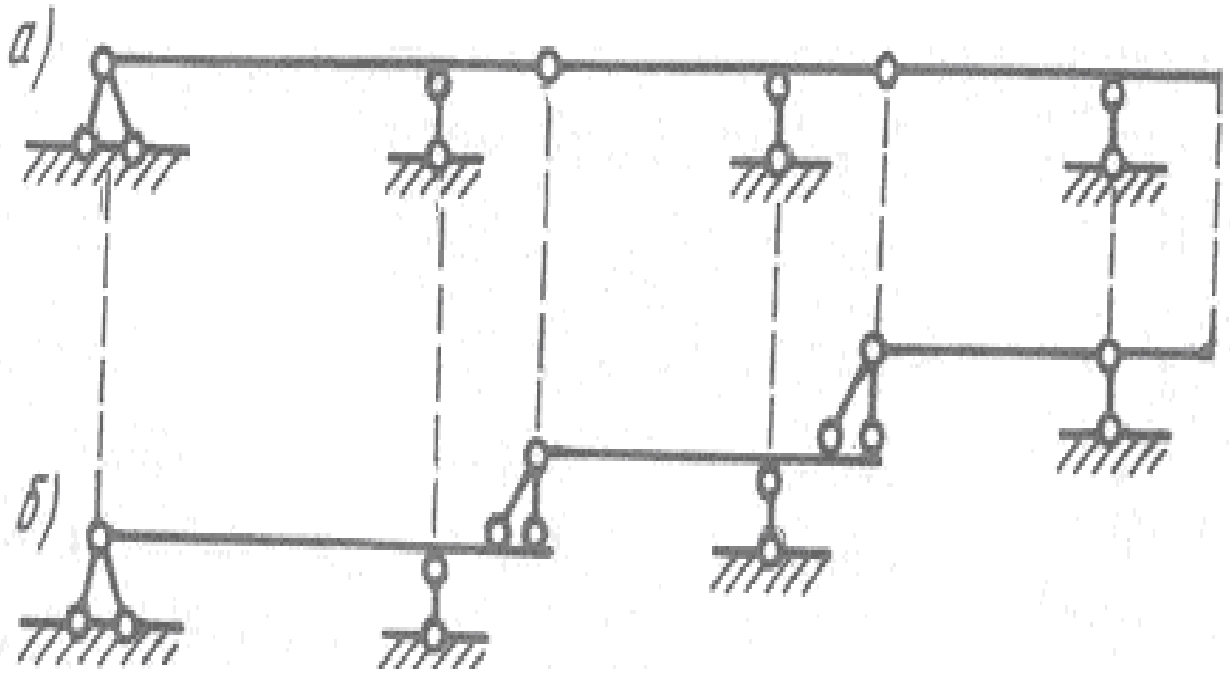
в) юқоридаги икки усулга асосланган аралаш усул (3.1- расм, в), яъни шарнирларни жуфт ва якка тартибда жойлаштириш.

Жуфт шарнирлар иккинчи ораликдан бошлаб оралиқ оша қўйилади. Якка шарнирлар бирорта ораликдан бошқа ҳар бир оралиққа биттадан қўйиб чиқилади. Жуфт шарнирнинг икки ёни шарнирсиз оралиқ бўлиши лозим, акс ҳолда система геометрик ўзгарувчан бўлиб қолади.

Кўп оралиқли балканинг геометрик ўзгармаслиги тўғрисида тўлароқ тасаввурга эга бўлиш мақсадида қаватлар схемаси қурилади. Қаватлар схемаси балканинг алоҳида элементлари орасидаги боғланишни ўзида акс эттиради.

3.5 - расмда тасвирланган балканинг геометрик ўзгармаслигини унинг қаватлар схемаси (3.5- расм, б) орқали таҳлил этайлик. Қаватлар схемасида шарнирлар балкаларни туташтирувчи шарнирли қўзғалмас таянчлар билан алмаштирилади. Кўп оралиқли балка учта бир оралиқли консолли балкаларнинг

йиғиндисидан ташкил топганлиги қаватлар схемасидан кўриниб турибди. Ҳар қайси оддий балка — геометрик ўзгармасдир.



3.5- расм

Геометрик ўзгармас оддий балкалар бир-бири билан шарнирлар ёрдамида уланган. Шарнирлар балкаларнинг горизонтал йўналишда қўзғалишига йўл бермайди. Балкаларнинг вертикал йўналишдаги қўзғалмаслиги таянч стерженлари орқали таъминланади. Шуларга асосланиб, берилган кўп оралиқли балка геометрик ўзгармас система экан, деган хулосага келамиз.

Қаватлар схемаси икки хил балкалардан ташкил топади: асосий ва иккинчи даражали балкалар.

Асосий балкалар ўзига қўйилган юклардан ташқари иккинчи даражали балкаларга қўйилган юкларни ҳам (тўлалигича ёки қисман) қабул қилади. Асосий балкаларга таяниб турувчи балкалар иккинчи даражали (осма) балкалар дейилади. Иккинчи даражали балка синса, асосий балканинг ишига путур етмайди. Асосий балка синса, осма балка ҳам қулаб тушади.

Қаватлар схемасида асосий балка биринчи қаватда жойлашади (3.5- расм, *б* да чапдан биринчи балка). Осма балкалар асосий балканинг устига жойлашади (3.5- расм, *б* да чапдан иккинчи ва учинчи балкалар). Бу ерда шуни таъкидлаб

ўтиш лозимки, ўртадаги балка чапдаги балкага нисбатан иккинчи даражали, ўнгдаги балкага нисбатан асосий балка ҳисобланади.

3.2. Кўп оралиқли статик аниқ шарнирли балкаларни аналитик усулда ҳисоблаш

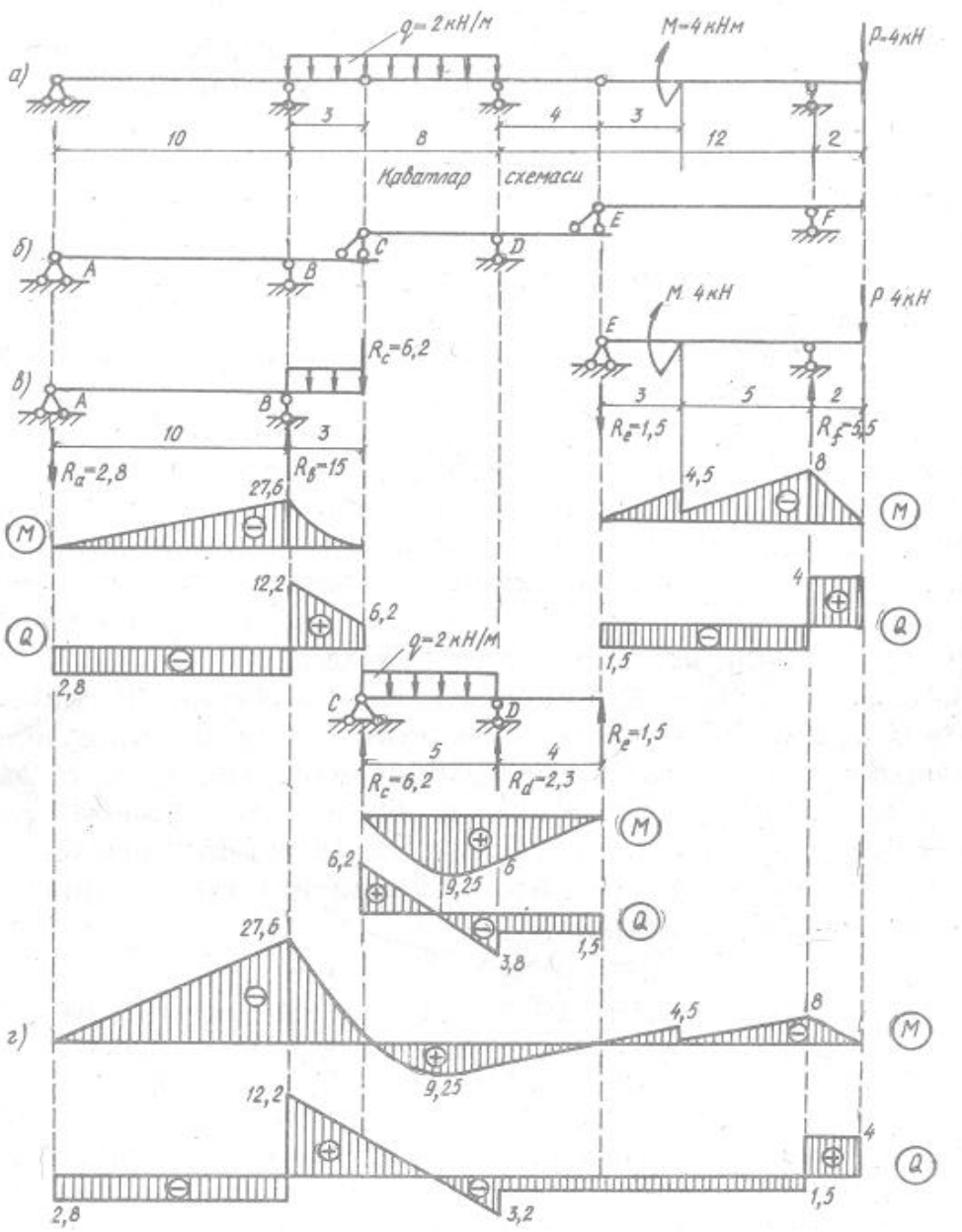
Кўп оралиқли шарнирли балкаларнинг ҳисоби уларнинг эгувчи моментлар ва кўндаланг кучлар эпюраларини қуришдан иборатдир.

Бизга материаллар қаршилиги курсидан эпюраларни қуришдан мақсад балканинг кўндаланг кесим ўлчамларини аниқлашдан иборат эканлиги маълум. Эпюраларни қуриш ҳам материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида бажарилади.

Кўп оралиқли балкаларнинг ҳисоби қаватлар схемасини қуришдан бошланади. Мустақил равишда аввал иккинчи даражали (осма) балкалар, кейин асосий балка ҳисобланади. Осма балкалар бир нечта бўлса, ҳисоб энг устки қаватдаги балкадан бошланади. Бунинг сабаби шуки, устки қаватдаги юкнинг таъсири пастки қаватдаги, балкаларга ҳам таъсир этади. Буни ҳисобга олиш учун устки балканинг таянч реакциясини пастки балкага тескари йўналишда қўйилади ва пастки балкани ҳисоблашда уни ташқи кучлардан бири деб қаралади.

Ҳисоб охирида алоҳида қурилган эпюралар бир ўк устида жойлаштирилади.

Мисол. Кўп оралиқли статик аниқ балканинг M ва Q эпюраси қурилсин (3.6- расм, а).



3.6- расм

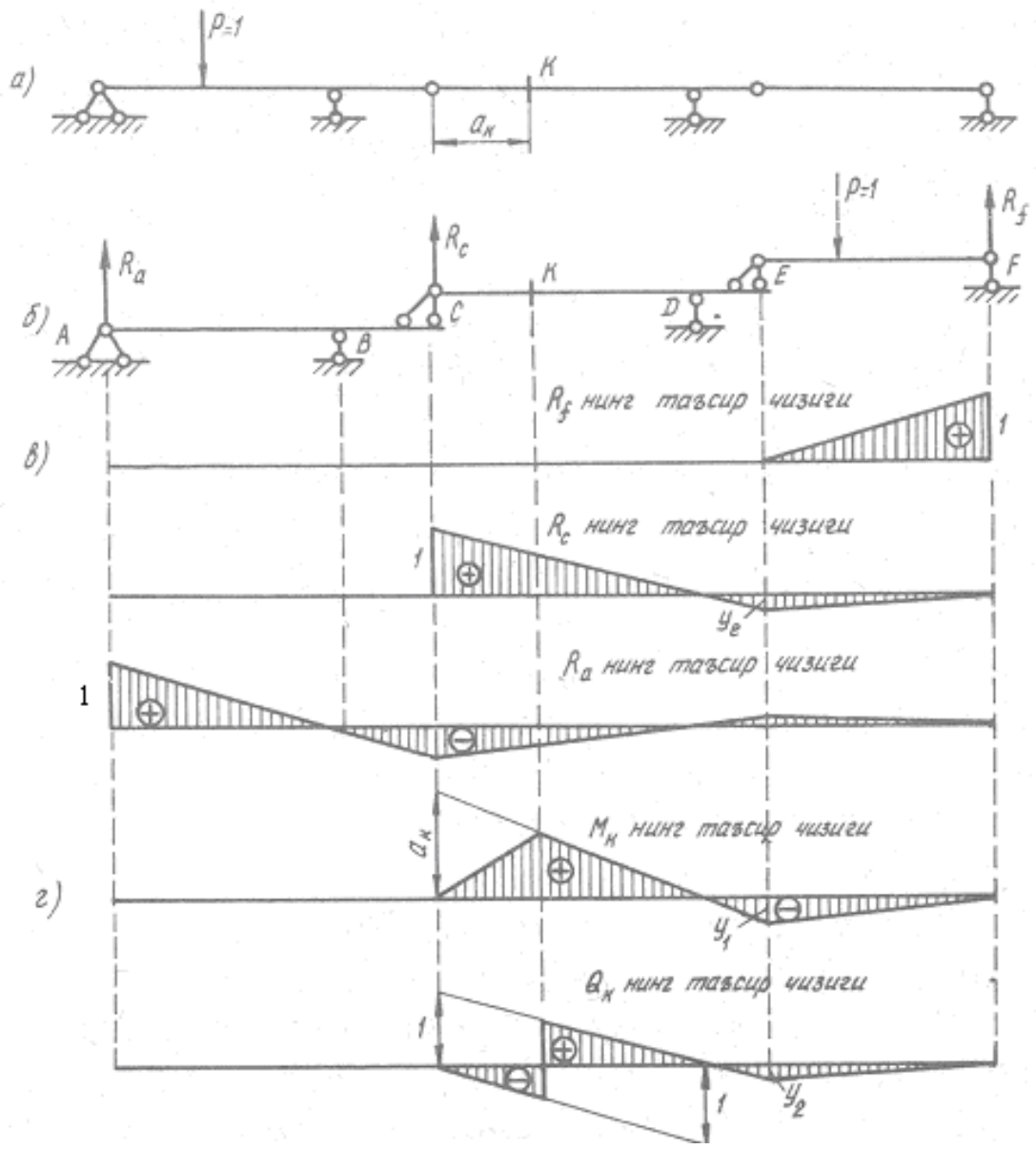
Ечиш. Берилган балканинг қаватлар схемасини қурамиз (3.6- расм, б) ва ҳисоблаш тартибини белгилаймиз.

Ҳисоб ишлари EF балкасидан бошланади. Уни асосий балкадан ажратиб олиб, *M* ва Q эпюралари қурилади. Шундан сўнг СД балкаси ҳисобланади. EF балкасига қўйилган юкларнинг СД балкасига бўлган таъсири R_e реакцияси орқали ҳисобга олинади. Ўз навбатида СД ва EF балкаларига қўйилган юкларнинг АВ балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади (3.6- расм, в). Иккинчи даражали балкалар ҳисоби тугагач, асосий

балка AB ҳисобланади. Ҳисоб охирида алоҳида ҳисобланган эпюралар умумий ўқ устига жойлаштирилади (3.6- расм, г).

3.3. Кўп оралиқли статик аниқ балкаларда таъсир чизиқлари

Кўп оралиқли балкаларнинг таъсир чизиқларини чизиш балканинг қаватлар схемасини қуришдан бошланади (3.7- расм, а, б). Таъсир чизиқларини чизишда балкага фақат ҳаракатланувчи бирлик куч P=1 таъсир этади, деб фараз этилади. Графикни чизиш жараёнида доимий юклар таъсири эътиборга олинмаслигини эслатиб ўтамиз.



3.7- расм

Таъсир чизиқлари чизиб бўлингандан кейин зўриқишларнинг қийматини аниқлаш жараёнида балкага қўйилган доимий юклардан фойдаланилади.

Осма (иккинчи даражали) балкаларда зўриқиш уларга куч қўйилган тақдирдагина пайдо бўлади. Асосий балкаларга қўйилган куч осма балкаларда зўриқиш уйғотмайди.

Асосий балкаларда шароит бутунлай бошқача: осма балкаларга қўйилган кучлар асосий балкада ҳам зўриқиш уйғотади. Шу қоидадан келиб чиқиб, кўп оралиқли балканинг таъсир чизиқларини қурамиз.

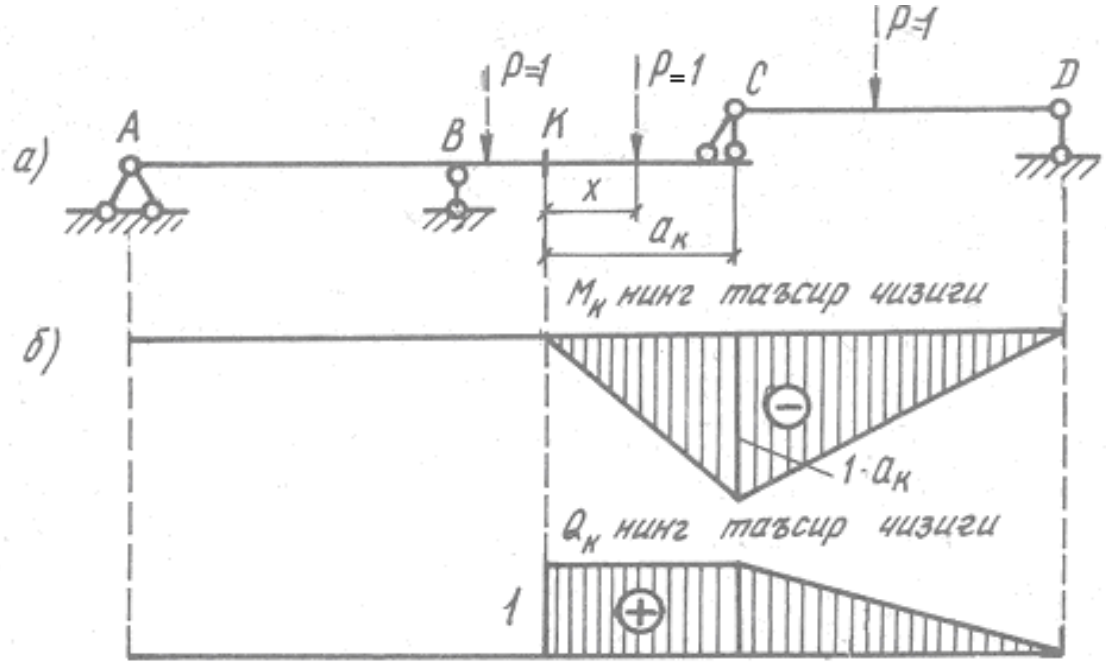
Осма балкага тегишли R_f таянч реакциясининг таъсир чизиғи оддий балкаларникидан фарқ қилмайди (3.7- расм, в).

R_c реакциясининг таъсир чизиғини қуришда СД консолли балкасининг ўзи берилган (унга туташган АВ ва EF балкалари йўқ) деб фараз қиламиз ва шу балканинг ўзи учун таъсир чизиғи қурамиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч P=1 С нуқтага келганда, R_c реакциянинг қиймати бирга тенг бўлади (R_c = 1). Куч Е нуқтасига келганда, $R_c = y_e$ бўлади. Энди бирлик куч АВ ва EF балкалари бўйлаб ҳаракат қилганда, R_c реакциясининг қай тариқа ўзгари-шини кўриб ўтамиз. Куч АВ балкасида юрганида R_c га таъсир этмайди, яъни R_c = 0 бўлади. Куч EF балкасида юрганида, R_c га таъсир этади. Куч Е нуқтасида бўлганида, R_cнинг қиймати y_e га тенг эканлигини биламиз. Бирлик куч F таянчга яқинлашган сари унинг R_c га бўлган таъсири камая боради. P=1 кучи F нуқтасига келганда, R_c = 0 бўлади, чунки кучнинг таъсирини F таянчи тўлиқ ўзига қабул қилиб олади. Шунинг учун, y_e ординатаси F таянчи остидаги ноль нуқта билан туташтирилади (3.7- расм, в).

R_a реакциясининг таъсир чизиғи АВ балкасидан бошланади. Таъсир чизиғининг дастлабки қисмини оддий балкага чизгандек қурамиз. Осма балкалар остидаги қисми эса юқоридаги каби мулоҳаза юритиш йўли билан қурилади (3.7 - расм, в).

Энди эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизиқларини қурамиз. Балканинг «*К*» кесими учун M_k ва Q_k нинг таъсир чизиқларини қуриш талаб этилади, дейлик (3.7- расм, а). «*К*» кесими СД балкасига қарашли СД балкаси

АВга нисбатан иккинчи даражали, EF га нисбатан эса асосий балка ҳисобланади. Бу шуни англатадики, P=1 кучи AB балкаси бўйлаб ҳаракатланганда



3.8- расм

«К» кесимида М ҳам, Q ҳам ҳосил бўлмайди. Консолли СД балкаси учун таъсир чизиқлари оддий балкадаги сингари қурилади. Куч EF балкасида Ҳаракатланганида, СД балкасининг «К» кесимидаги ички кучларга таъсир этади. Куч Е нуқтасида турганида $Q_k = y_2$; $M_k = y_1$ бўлади. Куч F нуқтасига етганида, $M_k=0$; $Q_k=0$ бўлади. Шунга кўра y_1 ҳам, y_2 ҳам ноль билан туташтирилди. Ҳосил бўлган график M_k ва Q_k нинг таъсир чизиқлари деб аталади (3.7- расм, г).

Баъзан «К» кесими балканинг консол қисмида берилиши мумкин (3.8- расм, а). У ҳолда M_k ва Q_k нинг таъсир чизиғи кесимнинг консолда ётганлигини ҳисобга олган ҳолда қурилади. Бирлик куч кесимдан чапда ҳаракатланса , «К» кесимида ҳеч қандай зўриқиш ҳосил бўлмайди. Куч КС оралиғида бўлса, $M_k = — I \cdot x$ ва $Q_k=1$ бўлади. Куч СД балкаси устида ҳаракатланса , M_k ва Q_k учбурчак қонун бўйича ўзгаради (3.8- расм, б).

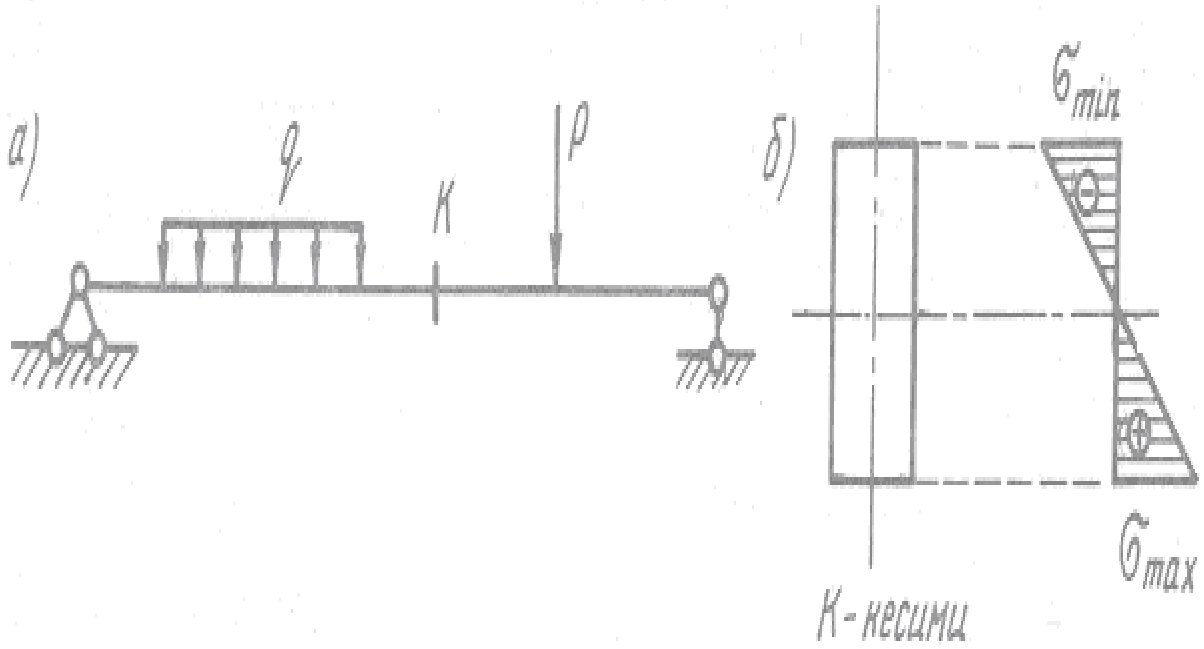
4- БОБ
СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР

4.1. Фермалар тўғрисида тушунча ва уларнинг турлари

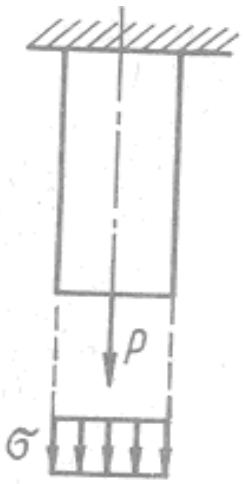
Бикир тугунларни шарнирлар билан алмаштирганда, ўзининг геометрик ўзгармаслигини сақлаб қолувчи стерженли системалар *ферма* деб аталади (4.1-расм).

Фермалар балкаларнинг такомиллашган бир кўриниши бўлиб, балкалар ўтайдиган вазифани бажаради: балкалар кичик оралиқларни ёпишда қўлланса , фермалар катта оралиқларни ёпишда қўлланилади .

Балкадан фермага ўтиш ғояси унинг ишлаш шароитини таҳлил қилиш оқибатида пайдо бўлган. Маълумки, балка эгилишга ишлайди (4.1- расм, а). Балканинг иҳтиёрий кесими учун қурилган нормал кучланишлар эпюрасидан кўриниб турибдики, балканинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилмайди. Нормал кучланиш нейтрал ўқда ноль, ўқдан узоқлашган сари унинг қиймати ортиб боради. Энг кўп ишни ўқдан узоқда жойлашган толалар бажаради, нейтрал катлам ва унинг атрофи деярли ишламайди. Ҳаттоки прокат профиллар (қўштавр, швеллер ва бурчакликлар)да ҳам ашёларнинг атиги 60 — 70 фоизидан фойдаланилади, ҳолос.



4.1- расм



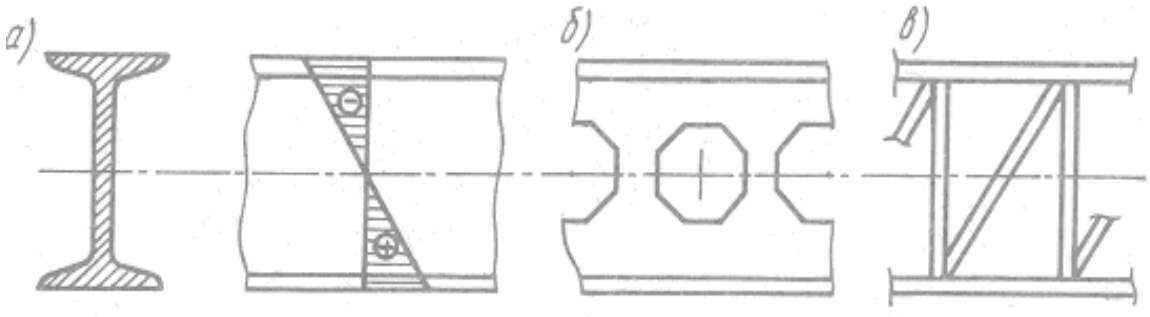
4.2- расм

Агар элемент сиқилиш ёки чўзилишга ишласа, у ҳолда унинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилади (4.2- расм). Нормал кучланишлар эпюрасидан кўринадики, элементнинт ҳар бир нуқтаси ишлайди.

Ҳар иккала эпюрани солиштиришдан қуйидаги мулоҳаза пайдо бўлади. Шундай конструкция яратиш керакки, унда қўлланилган ашёдан тўлиқ фойдаланилсин, агар имкон бўлса, элемент фақат сиқилиш ва чўзилишга ишласин.

Бу вазифа босқичма-босқич амалга оширилди. Дастлаб тўғри тўртбурчакли яхлит кесим ўрнига қўштавр пайдо бўлди (4.3- расм, а), кейинчалик қўштавр деворлари ўйиқлар ҳисобига енгиллаштирилади (4.3- расм, б) ва ниҳоят, бу изланишларнинг мантиқий давоми сифатида ферма конструкцияси яратилди (4.3- расм, в). Оддий статик аниқ ферманинг ҳисоблаш схемаси 4.4-расмда тасвирланган.

Одатда ташқи кучлар ферма тугунларига қўйилади. Ферма стерженлари ташқи кучлар таъсирида асосан сиқилиш ва чўзилишга ишлайди. Бу ҳол ферма материалидан самарали фойдаланиш имконини беради, чунки ҳар бир стержень кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар эпюраси тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлади.

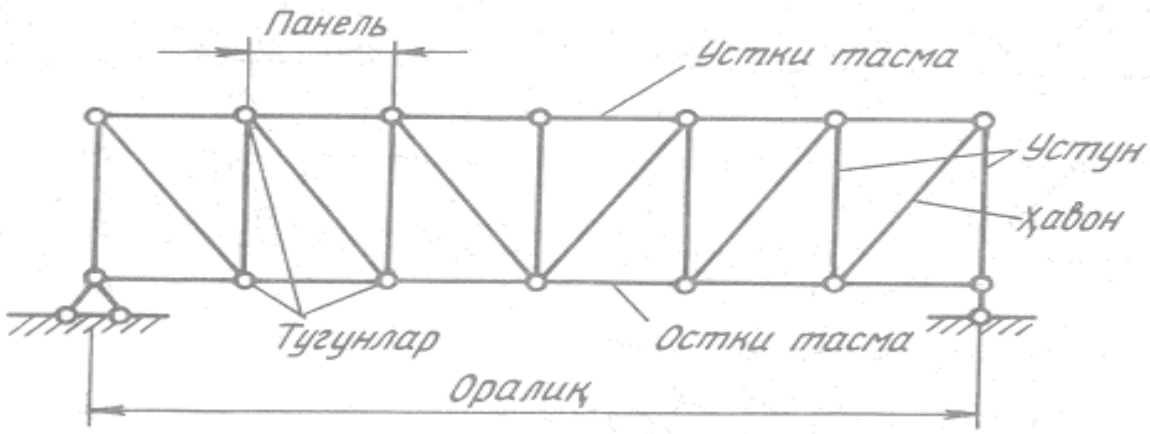


4.3- расм

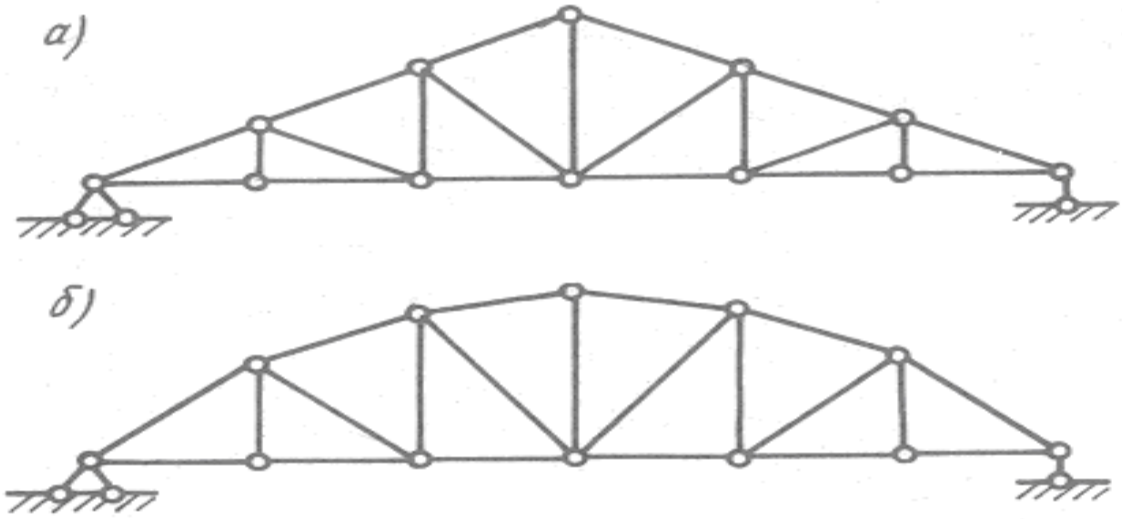
Ферманинг барча стерженлари ёки уларнинг ўқлари бир текисликда жойлашса, текис ёки ясси фермалар деб, бир текисликда жойлашмаса фазовий

фермалар деб аталади. Фазовий фермалар кўпинча алоҳида ясси фермаларга ажратилган ҳолда ҳисобланади.

Икки таянч орасидаги масофа оралиқ (пролёт) деб аталади; ферманинг ташқи чегарасида жойлашган стерженлар *тасмалар* деб аталиб, улар орасида жойлашган стерженлар ферма панжараларини ташкил этади. Панжаранинг тик элементлари устун, оғма элементлари – ҳавон деб юритилади. Ферма тугунлари орасидаги горизонтал масофа панел дейилади.



4.4- расм



4.5- расм

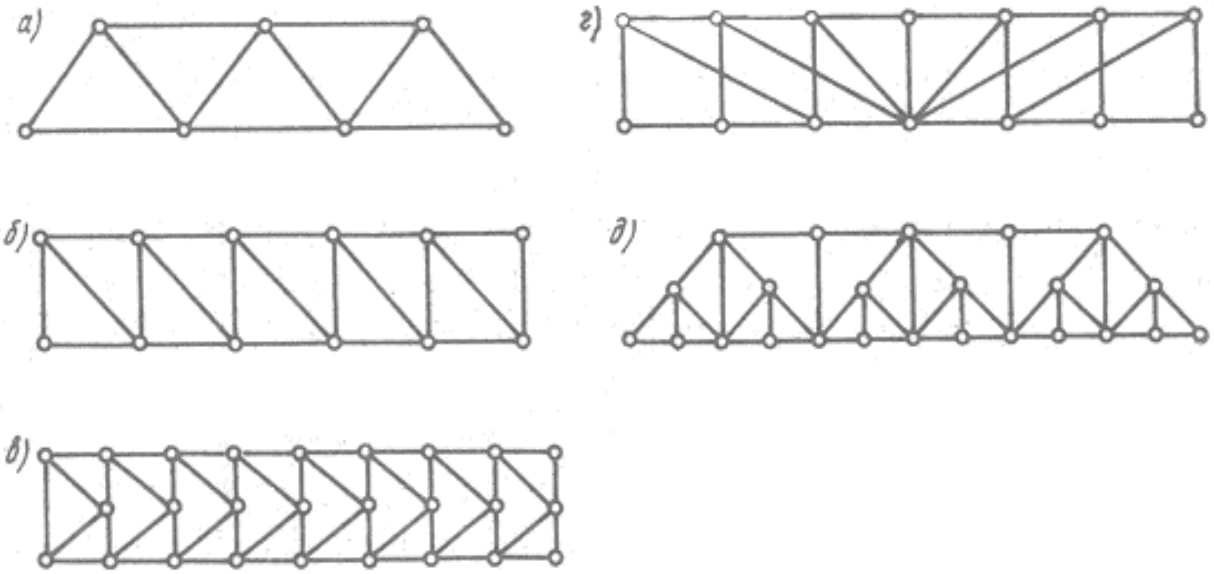
Фермалар ташқи кўриниши, панжара шакли, таянч хиллари ва ўтайдиган вазифасига қараб бир неча турга бўлинади:

а) ферма ташқи контўрининг шаклига кўра параллел тасмали фермалар (4.4- расм), учбурчак шаклли фермалар (4.5- расм, а), полигонал тасмали фермалар (4.5- расм, б);

б) панжарасининг тузилишига кўра учбурчак панжарали фермалар (4.6- расм, а), ҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, б), ярим ҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, в), қўшҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, г), қўш панжарали (шпренгелли) фермалар (4.6- расм, д);

в) таянч хилларига қараб балкасимон ёки консол фермалар;

г) ўтайдиган вазифасига кўра том, кўприк ва кран фермалари;



4.6-расм

д) кўприк фермаларида юкнинг ҳаракатланиш сатҳига қараб юк устки ёки пастки тасмадан юрадиган фермалар бўлади.

4.2. Фермаларни аналитик усулда ҳисоблаш

Статик аниқ ясси фермаларни ҳисоблаш деганда ҳар бир стержендаги зўриқишларни аниқлаш тушунилади.

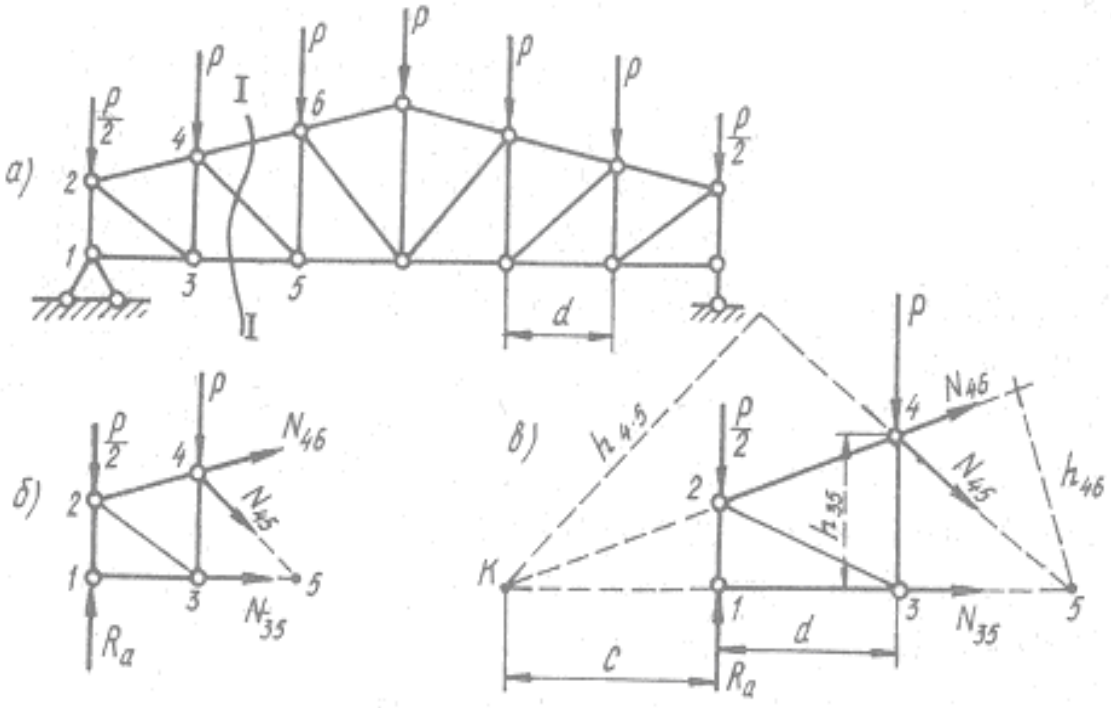
Зўриқишларни аниқлашнинг аналитик, график ва таъсир чизиқлари усули мавжуд. Мазкур параграфда аналитик усул билан танишиб чиқамиз.

Аналитик усулнинг ўзи бир-бирини тўлдирувчи учта усулга бўлинади: момент нуқтаси ёки Риттер усули, проекциялаш усули ҳамда тугунларни кесиб олиш усули.

Усулларнинг ичида энг қулайи Риттер усулидир, бироқ ундан ҳамма вақт ҳам фойдалана олмаймиз. Момент нуқтаси усулидан фойдаланиш имкони бўлмаган ҳолларда проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулларидан фойдаланилади. Ҳар учала усул билан бирма-бир танишиб ўтамиз.

Момент нуқтаси усули. Ферманинг ҳисоби таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади (бошқа усулларда ҳам ҳудди шундай қилинади). Ферма реакциялари оддий балка реакциялари сингари аниқланади, яхлит ферма учун статиканинг мувозанат тенгламалари тузилади ва шу тенгламалардан таянч реакциялари аниқланади ҳамда текширилади.

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлаш учун ферма ҳаёлан қирқилади (4.7- расм, а), ҳисоблаш учун қирқилган ферманинг бир қисми ажратиб олинади (4.7- расм, б) ва ажратилган бўлак учун мувозанат тенгламаси тузилади. Мувозанат тенгламаси таркибига ташқи кучлар ва таянч реакцияларидан ташқари номаълум зўриқишлар киради.



4.7-расм

Момент нуқтаси усулида кесим шундай ўтказиладики, бунда кесимга кирган стерженларнинг сони, учтадан ортмаслиги ва учала стержень бир нуқтада кесишмаслиги керак. Кесимга кирган стерженлар жуфт-жуфт бўлиб, бир нуқтада кесишади (4.7- расм, б). Ҳар бир стержень ўзининг момент нуқтасига эга. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стерженнинг кесишув нуқтаси *момент нуқтаси* деб аталади. Мувозанат тенгламалари ана шу момент нуқталарига нисбатан тузилади. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, тузиладиган тенгламалар ҳар сафар бир номаълумли бўлади. Бир номаълумли оддий тенгламадан изланаётган зўриқишиинг қиймати аниқланади.

Тенглама тузаётганда, номаълум зўриқишларнинг йўналишини ферманинг кесилган томонига йўналтирилади, яъни стержень чўзилувчан деб қаралади. Ҳисоб натижасида зўриқиш мусбат ишорада чиқса, стерженнинг чўзилишга ишлаши тасдикланади. Манфий чиқса стержень сиқилувчан бўлади.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар аслида ички кучлар бўлганлиги сабабли уларни N ҳарфи билан белгилаймиз ва қайси тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билиш мақсадида остига икки рақамдан иборат белги қўямиз. Масалан, N_{46} — тўртинчи ва олтинчи тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билдиради.

Энди бевосита зўриқишларни аниқлашга киришамиз. N_{35}, N_{45} ва $У_{46}$ зўриқишларни аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесими бўйича қирқамиз (4.7-расм, а). Ферманинг бир қисмини (масалан, кучлар кўп бўлганлиги учун ўнг қисмини) ташлаб юборамиз, ҳисоблаш учун эса чап қисмини олиб қоламиз (4.7- расм, в).

Ферманинг чап қисми ташқи кучлар (R_a; 0,5 P; P) ҳамда ички кучлар (N_{35}, N_{45} ва $У_{46}$) таъсирида мувозанат ҳолатида бўлиши лозим. Номаълум ички кучлар ферманинг ташлаб юборилган ўнг қисмининг таъсирини ўзида акс эттиради.

4- тугун 3 — 5 стержени учун момент нуқтаси ҳисобланади. Номаълум зўриқиш N_{35} ни аниқлаш учун шу нуқтага нисбатан барча кучларнинг моментлари йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_4 = R_a \cdot d - \frac{P}{2} \cdot d - N_{35} \cdot h_{35} = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = \frac{R_a \cdot d - 0{,}5P \cdot d}{h_{35}} = \frac{M_4^0}{h_{35}}.$$

Бу ерда d ва h — елкалар; M_4^0 — тўртинчи тугунга нисбатан ферманинг чап бўлагида ётган кучларнинг моментлари йиғиндиси.

Бу момент миқдор жиҳатидан оддий балканинг, ферма момент нуқтасига мос кесимидаги моментга тенг бўлади.

Зўриқишнинг мусбат ишораси 3 — 5 стерженнинг чўзилувчан эканлигини англатади.

Энди 4 — 6- тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши N_{46} ни аниқлаймиз. Кесимга кирган икки стерженнинг кесишув нуқтаси (5) N_{46} учун момент нуқтаси бўлади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_5 = R_a \cdot 2d - \frac{P}{2} \cdot 2d - P \cdot d + N_{46} \cdot h_{46} = 0;$$

бу ердан

$$N_{46} = -\frac{2d \left(P - R_a \right)}{h_{46}} = -\frac{M_5^0}{h_{46}}.$$

Зўриқиш ишорасининг манфий чиқишини 4 — 6 стерженининг сиқилувчан эканлигини билдиради. Умуман фермага қўйилган ташқи кучлар пастга йўналган бўлса, ферманинг устки тасмаси сиқилишга, остки тасмаси чўзилишга ишлайди.

Эндиги навбат, N_{45} га. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стержень «К» нуқтасида кесишади. Ана шу нуқта N_{45} учун момент нуқтаси ҳисобланади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum M_k = -R_a \cdot c + \frac{P}{2} \cdot c + P \left(c + d \right) + N_{45} \cdot h_{45} = 0;$$

бу ердан

$$N_{45} = \frac{R_a \cdot c - 0{,}5R \cdot c - P(c+d)}{h_{45}} = \frac{M_k^0}{h_{45}}.$$

Шундай қилиб, момент нуқтаси усулида исталган стержендаги зўриқиш қуйидаги формула асосида топилар экан:

$$N = \frac{M}{h}.$$

Бу ерда М — кесилган ферманинг бир қисмида ётган кучларнинг момент нуқтасига нисбатан олинган моментлари йиғиндиси;

h — изланаётган зўриқишнинг шу нуқтага нисбатан елкаси.

Проекциялаш усули. Баъзан шундай фермалар учрайдики, уларда момент нуқтаси усулини қўллаб бўлмайди.

Бундай ҳолларда бошқа усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Параллель тасмали ферма бунга мисол бўла олади (4.8- расм, а). Ферманинг ҳавон ва устунлари момент нуқтасига эга эмас, чунки тасмалар параллел бўлганлиги сабабли ўзаро кесишмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усули жуда қўл келади.

5 — 6 тугунлар орасидаги устуннинг зўриқишини аниқламоқчимиз, дейлик. Бунинг учун энг аввал 1 — 1 кесим билан фермани икки қисмга ажратамиз; кучлар кўп бўлгани учун ўнг томонини ташлаб юборамиз (4.8- расм, б). Кесимга кирган уч стерженнинг иккитаси ўзаро параллел, демак N_{56} нинг момент нуқтаси йўқ. Шунинг учун мувозанат тенгламасини тузишда кучлар проекцияларининг йиғиндисидан фойдаланамиз:

$$\sum Y = R_a - \frac{P}{2} - P + N_{56} = 0;$$

бу ердан

$$N_{56} = -(R_A - 1{,}5P) = -Q.$$

Бу ерда N_{56} — оддий балкадаги кўндаланг куч.

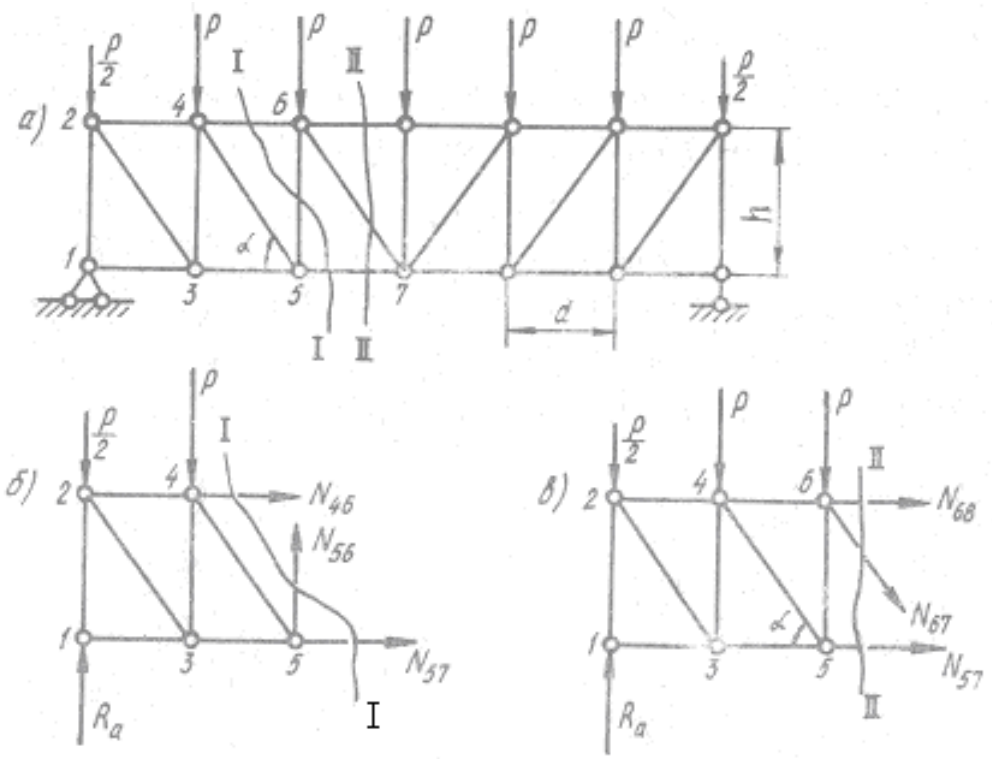
N_{67} зўриқишни аниқлаш учун фермани II — II кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун қуйидаги проекциялар тенгламасини ёзамиз (4.8- расм, в):

$$\sum Y = R_a - \frac{P}{2} - P - P - N_{67} \cdot \sin\alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{67} = \frac{R_A - 2{,}5P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha}.$$

Бу ерда ҳам Q оддий балканинг қирқувчи кучи.



4.8-расм

Тугунларни кесиб олиш усули. Бу усулни проекциялаш усулининг ҳусусий ҳоли деса ҳам бўлади. Чунки бунда ҳам проекция тенгламаларидан фойдаланилади. Фарқи шуки, аввалги усулда яхлит фермани қирқиб, унинг бир қисми ажратиб олинган бўлса, бу сафар битта тугун кесиб олинади ва шу тугун учун мувозанат тенгламалари тузилади(4.9- расм,а,б).

Ҳисоб ишлари икки стерженли тугундан бошланади.

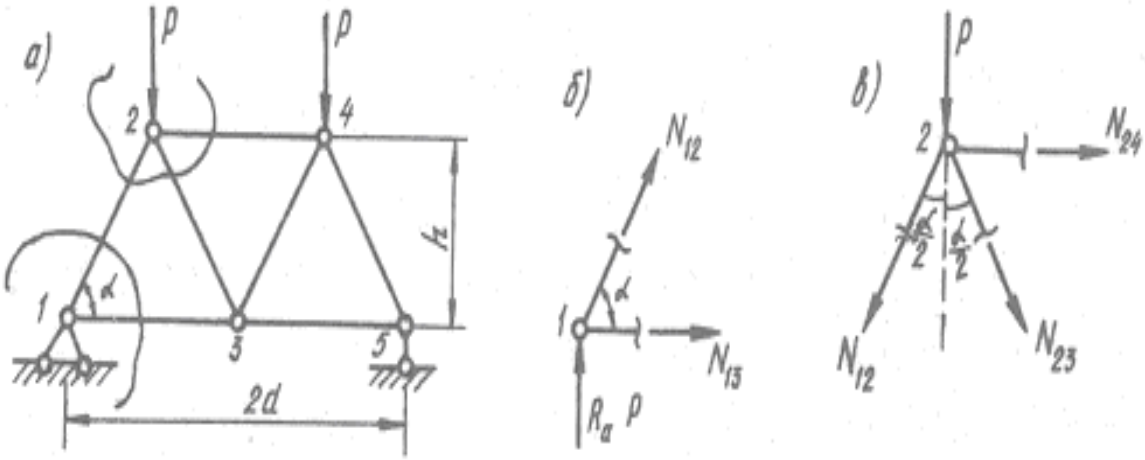
Нега деганда тугун мувозанатини текшириш учун ихтиёримизда фақат иккита тенглама бор: $\sum X = 0;\ \sum Y = 0.$

Шунга мувофиқ яхлит фермадан 1 тугунни кесиб оламиз ва ундаги N_{12} ҳамда N_{13} номаълум зўриқишларни аниқлаймиз. Кучларнинг Y ўқига бўлган проекциялари йиғиндисини ёзамиз:

$$\sum Y = R_a + N_{12} \cdot \sin\alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{12} = -\frac{R_a}{\sin\alpha} = -\frac{P}{\sin\alpha};$$



4.9-расм

N_{13} ни аниқлаш учун кучларни X ўқига проекциялаймиз:

$$\sum X = N_{13} + N_{12} \cdot \cos\alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos\alpha = \frac{P}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = P \cdot ctg\,\alpha.$$

Энди 2- тугунга ўтилади; бу ердаги учта зўриқишдан биттаси маълум (N_{12}), ҳолган иккитаси номаълум. N_{23} ни аниқлаш учун кучларни У ўқига проекциялаймиз (4.9- расм, в).

$$\sum Y = -P - N_{12}\cos\frac{\alpha}{2} - N_{23} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{23} = -P(1 - \frac{1}{\sin\alpha})\cos\frac{\alpha}{2}.$$

N_{24} ни аниқлаш учун кучларни X ўқига проекциялаймиз (4,9- расм, в)

$$\sum X = N_{24} - N_{12}\sin\frac{\alpha}{2} + N_{23}\frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{24} = P(1+\cos\frac{\alpha}{2})tg\frac{\alpha}{2} - P\sin\frac{\alpha}{2}/\sin\alpha\,.$$

Юқоридагилардан кўриниб турибдики, тугунларни кесиб олиш усулида навбатдаги стержень зўриқиши ўзидан олдинги стерженлар зўриқишларига боғлиқ ҳолда топилади. Олдинги зўриқишни аниқлашда йўл қўйилган хато табиийки кейинги зўриқишларда ҳам такрорланади.

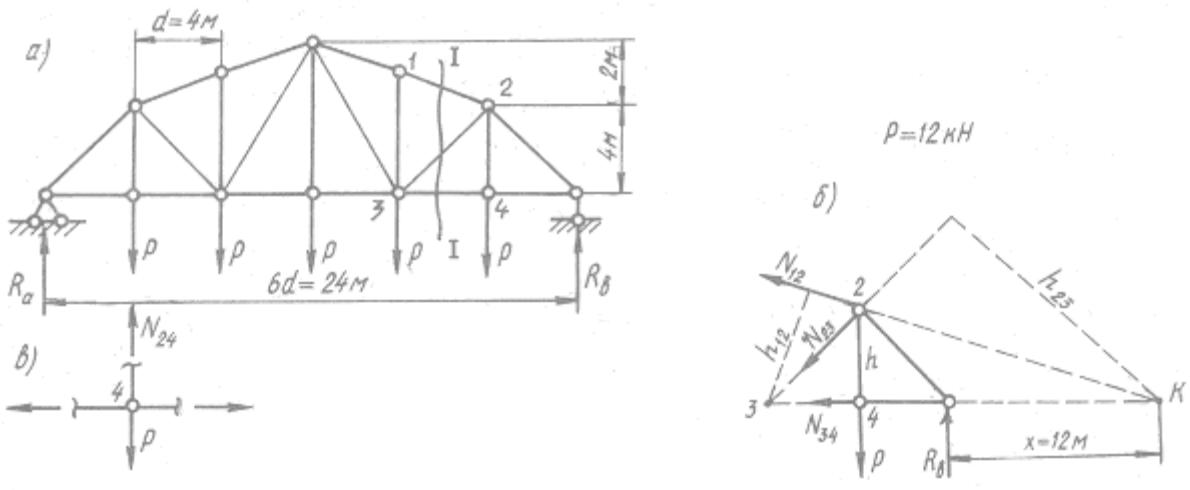
Бу мазкур усулнинг камчиликларидан ҳисобланади. Усулнинг яна бир камчилиги шундан иборатки, унинг тенгламаларида кўплаб тригонометрик функциялар учрайди, бу эса ҳисобни мураккаблаштиради.

Ана шуларни ҳисобга олиб, фермаларни ҳисоблаганда кўриб ўтилган усуллардан қайси бири қўл келса, ўша усулдан фойдаланилади. Масалан, ферманинг баъзи зўриқишлари момент нуқтаси усулида, баъзилари проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулида аниқланиши мумкин.

4.1 - мисол. 4.10- расм, а-да тасвирланган ферманинг бешинчи панели стерженларидаги зўриқишлар аналитик усулда аниқлансин.

Ечиш. Ҳисоб таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади:

$$R_a = R_b = \frac{5P}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30\,kN$$



4.10- расм

Ферманинг 5- панелини 1 — 1 кесим билан кесиб, чап қисмини ташлаб юборамиз ва ўнг томони учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини тузишда кесилган стерженлар чўзилишга ишлайди деб фараз этилади ва зўриқишлар тугундан ташқи томонга йўналтирилади.

N_{12} зўриқишини аниқлашда 2 — 3 ва 3 — 4 стерженларнинг кесишув нуқтаси (3) момент нуқтаси деб қабул қилинади. Шу нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади.

$$\sum M_3 = -R_b \cdot 2d + P \cdot d - N_{12} \cdot h_{12} = 0.$$

Тригонометрик йўллар билан x=12 м ва h_{12}=4,9 м ни аниқлаймиз. У ҳолда N_{12}= - 39,6 кН бўлади.

N_{34} зўриқишнинг момент нуқтаси 2- тугунга тўғри келади. Моментлар тенгламасини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

$$\sum M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0;$$

бундан N_{34}=30 *kN*.

N_{23} зўриқишини ҳам аввалги зўриқишлар сингари момент нуқтаси усулида аниқлаймиз. Бироқ бу зўриқишнинг момент нуқтаси, яъни 1 — 2 ва 3 — 4 стерженлардан ўтган ўқнинг кесишув нуқтаси (К) фермадан ташқарида ётади. Мувозанат тенгламаси ана шу нуқтага нисбатан тузилади:

$$\sum M_k = R_b \cdot x - P(d + x) - N_{23} \cdot h_{23} = 0.$$

Тригонометриядан h_{23} = 14,14 м. Тенгламадан N_{23} = 11,9 кН.

N_{24} зўриқиши тугунларни кесиб олиш усулида аниқланади. Бунинг учун 4-тугунни кесиб олиб (4.10- расм, в), мувозанат тенгламаси тузилади:

$$\sum Y = N_{24} - P = 0;$$

бундан N_{24}=12 *kN*.

4.3. Ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизиқлари

Баъзан фермаларга доимий юклардан ташқари қўзғалувчан юклар кам таъсир этади. Қўзғалувчан юклар таъсирида ферма етерженларидаги зўриқишларнинг қиймати ўзгариб боради. Зўриқишларнинг қандай ўзгаришини билиш учун таъсир чизиқлари деб аталган график чизилади.

Таъсир чизиқларининг тенгламалари аналитик усулдаги сингари момент нуқтаси, проекциялаш ва тугунларни кесиб олиш усулларида тузилади. 4.11-расм, а да тасвир-ланган ферма стерженларидаги айрим зўриқишларнинг таъсир чизиқларини қурамиз.

Ферманинг иккинчи панелидаги N_{35}, N_{46}, N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиқлари момент нуқтаси усулида, учинчи панелдаги N_{67} зўриқиш проекциялаш усулида ҳамда N_{87} зўриқишнинг таъсир чизиғи тугунни кесиб олиш усулида қурилади.

Ишни N_{35} зўриқишининг таъсир чизиғини қуришдан бошлаймиз. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесим билан хаёлан қирқамиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч кесимнинг ўнг томонида деб фараз этамиз ва шу томонни ташлаб юборамиз. Қирқимга тушган учта стержендаги зўриқишларнинг йўналиши ташлаб юборилган томонга қаратилади.

Кесимнинг чап томони учун момент нуқтаси усулини қўллаб, мувозанат тенгламасини тузамиз. 3 — 5 стержени учун 4 нуқта момент нуқтаси ҳисобланади. Шу нуқтага нисбатан моментлар йиғиндисинн ёзамиз:

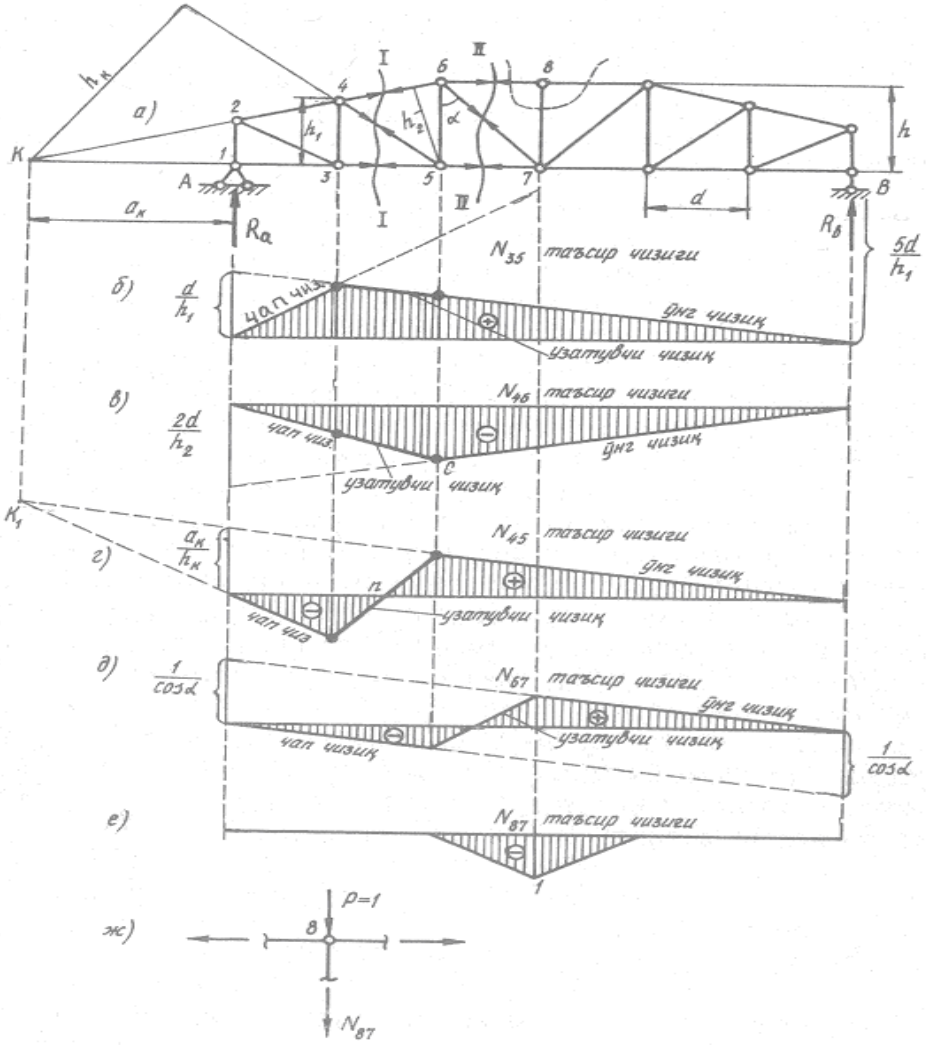
$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d\text{-}N_{35} \cdot h_1 = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_a \cdot \frac{d}{h_1}.$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиғи бирлик куч кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, R_a таянч реакциясининг таъсир чизиғи сингари бўлиб,

ординаталари d/h_1 миқдорга фарқ қилади. Шунга кўра А таянч остида ўқдан юқорига d/h_1 масофани ўлчаб қўямиз ҳамда В таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз.



4.11- расм

Ўтказилган чизиқ ўнг чизиқ деб аталади (4.11- расм, б).

*Чап чизиқ*ни ўтказиш мақсадида кесимнинг ўнг томони учун моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = N_{35} \cdot h_1 - R_b \cdot 5\,d = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_b \cdot \frac{5d}{h_1}$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиғи бирлик куч кесимдан чапда бўлганда, тузилиши жиҳатидан ҳудди R_b, реакциясининг таъсир чизиғига ўхшаш бўлиб, миқдор жиҳатдан ундан $5d/h_1$ маротаба кўп бўлади. Бунга асосан

В таянч остида $5d/h_1$ масофани ўқдан юқорига ўлчаб қўямиз ва уни А таянч остидаги ноль нуқта билан туташтирамиз. Бу чизиқ ч а п ч и з и қ деб аталади. Чап ва ўнг чизиқлар момент нуқтаси (4) остида кесишади (4.11- расм, б). Штрихланган учбурчак N_{35} зўриқишининг таъсир чизиғи ҳисобланади. Мусбат ишора 3 — 5 стержени чўзилишга ишлашини билдиради. 3- ва 5- тугунларни ўнг чизиққа туширилган проекцияларини туташтирувчи чизиқ — *узатувчи чизиқ* деб аталади.

N_{35} га тааллуқли узатувчи чизиқ бизнинг ҳолда ўнг чизиқ билан устма-уст тушган. Баъзи ҳолларда узатувчи чизиқ чап ёки ўнг чизиқ билан устма-уст тушмайди.

Ўнг ва чап чизиқларнинг момент нуқтаси остида кесишувини эътиборга олиб, таъсир чизиқларини чизишни бир мунча енгиллаштириш мумкин. Бунинг учун биргина ўнг ёки чап чизиқ чизилса кифоя. Иккинчиси момент нуқтасининг проекцияси орқали ўтказилади.

Шу йўл билан N_{46} ва N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиғини қурамиз.

1 — 1 кесим ўз -кучини сақлайди. 5- нуқта N_{46} нинг момент нуқтаси бўлади. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнг томонда ҳаракатланади, деб чап томон учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\sum M_5 = R_a \cdot 5d + N_{46} \cdot h_2 = 0,$$

бундан

$$N_{46} = -R_a \frac{2d}{h_2}$$

N_{46} нинг таъсир чизиғини чизиш учун А таянчи йўналишида ўқдан пастга (манфий бўлганлиги учун) $2d/h_2$ масофани ўлчаб қўямиз ва В таянчи йўналишидаги ноль билан бирлаштирамиз (4.11- расм, в). Бу ўнг чизиқ бўлади. Чап чизиқни ўтказиш учун момент нуқтаси 5 ни ўнг чизиққа проекциялаймиз. Топилган нуқта С ни А таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Бу чизиқ чап чизиқ бўлади. Штрихланган юза N_{46} зўриқишининг таъсир чизиғи ҳисобланади. Манфий ишора 4 — 6 стерженининг сиқилишга ишлашини билдиради.

Энди ҳавондаги зўриқиш N_{45} нинг таъсир чизиғини чизамиз. 1 — 1 кесим бу стерженни ҳам кесиб ўтган. Кесимнинг ўнг томонини ташлаб юборамиз. Бирлик куч $P= 1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз. Ферманинг кесимдан чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз. Бунинг учун аввал момент нуқтасини белгилаб оламиз; N_{45} зўриқишининг момент нуқтаси 3 — 5 ва 4 — 6 стерженларидан ўтган ўқнинг кесишув нуқтаси К да ётади. Моментлар йиғиндисини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

$$\sum M_k = -R_a \cdot a_k + N_{45} \cdot h_k = 0,$$

бундан

$$N_{45} = R_a \frac{a_k}{h_k}$$

Демак, куч (Р= l) кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, N_{45} зўриқишнинг қиймати R_a реакциясидан a_k/h_k маротаба катта бўлар экан. Бунга асосланиб, ўқдан юқорига a_k/h_k масофани ўлчаб қўямиз; уни В таянчи йўналишидаги ноль билан туташтирамиз (4.11- расм, г), ҳосил бўлган чизиқ ўнг чизиқ бўлади. Чап чизиқни ўтказиш учун ўнг чизиқни чапга давом эттирамиз. Момент нуқтаси — К ни унинг давомига проекциялаймиз. Улар $К_1$ нуқтасида кесишади. Кі нуқтаси билан А таянчи остидаги ноль нуқтани бирлаштирамиз ва ўнгга давом эттирамиз. Бу чап чизиқ бўлади. Узатувчи чизиқни ўтказиш учун 4- тугунни чап, 5- тугунни ўнг чизиққа проекциялаймиз. Топилган нуқталарни бирлаштирувчи чизиқ узатувчи чизиқ ҳисобланади. Штрихланган юза эса N_{45} нинг таъсир чизиғидир. Бу ерда юза икки хил ишорага эга. *n* нуқтада ордината нолга тенг. Бунинг маъноси шуки, бирлик куч *n* нуқтасидан чапда ҳаракатланса, 4 — 5 стержень сиқилишга, ўнгда ҳаракатланса чўзилишга ишлайди.

Энди ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизиқларини қуришда проекциялаш усулини қўллаб кўрамиз.

4.11- расм, а да тасвирланган ферманинг учинчи ва тўртинчи панелидаги устки ва остки тасмалар ўзаро параллел. Шу боисдан мазкур панеллардаги ҳавонларга момент нуқтаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усулига мурожаат этилади.

Учинчи панел ҳавонидаги зўриқиш N_{67} нинг таъсир чизиғини қурайлик. Бунинг учун II — II кесими бўйлаб фермани қирқамиз. Ўнг томонини ташлаб, чап томони учун тенглама тузамиз; бунда бирлик куч Р= 1 кесимдан ўнгда деб фараз этамиз:

$$\sum Y = R_a - N_{67} \cdot \cos\alpha = 0$$

бундан

$$N_{67} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot R_a.$$

Бирлик куч кесимдан чапда деб фараз этиб, ўнг томон учун проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\sum Y = R_b + N_{67} \cdot \cos\alpha = 0,$$

бундан

$$N_{67} = -R_b \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

N_{67} зўриқишнинг таъсир чизиғи ҳам таянч реакциялари R_a ва $R_б$ нинг таъсир чизиғи каби бўлар, миқдори эса 1/cos α га фарқ қилар экан:, Шунга кўра реакциялар йўналишида ўқдан юқорига ва пастга 1/cos α ни ўлчаб қўямиз, топилган нуқталарни таянчлар остидаги ноль нуқталар билан бирлаштирамиз. Юқорида ўнг, пастда чап чизиқ ҳосил бўлади (4.11- расм, д). 6- тугунни чап, 7- тугунни ўнг чизиққа проекциялаймиз ва топилган нуқталарни туташтирсак, узатувчи чизиқ ҳосил бўлади.

Штрихланган юза 6 — 7 ҳавондаги зўриқишнинг таъсир чизиғи бўлади.

Тугунларни кесиб олиш усулини N_{87} зўриқиши мисолида кўриб ўтамиз.

7 — 8- устуннинг зўриқишини аниқлашда ферма қирқимига учдан ортиқ (бизнинг ҳолда 4 та) стержень тўғри келади. Шунинг учун 8- тугунни шаклда кўрсатилгандек кесиб, ажратиб оламиз (4.11- расм, а ва ж).

Бирлик куч 8- тугундан бошқа тугунлар бўйлаб ҳаракатланса, устундаги зўриқиш ноль бўлади: $\sum Y = N_{81} = 0.$

Бирлик куч 8- тугунда бўлса,

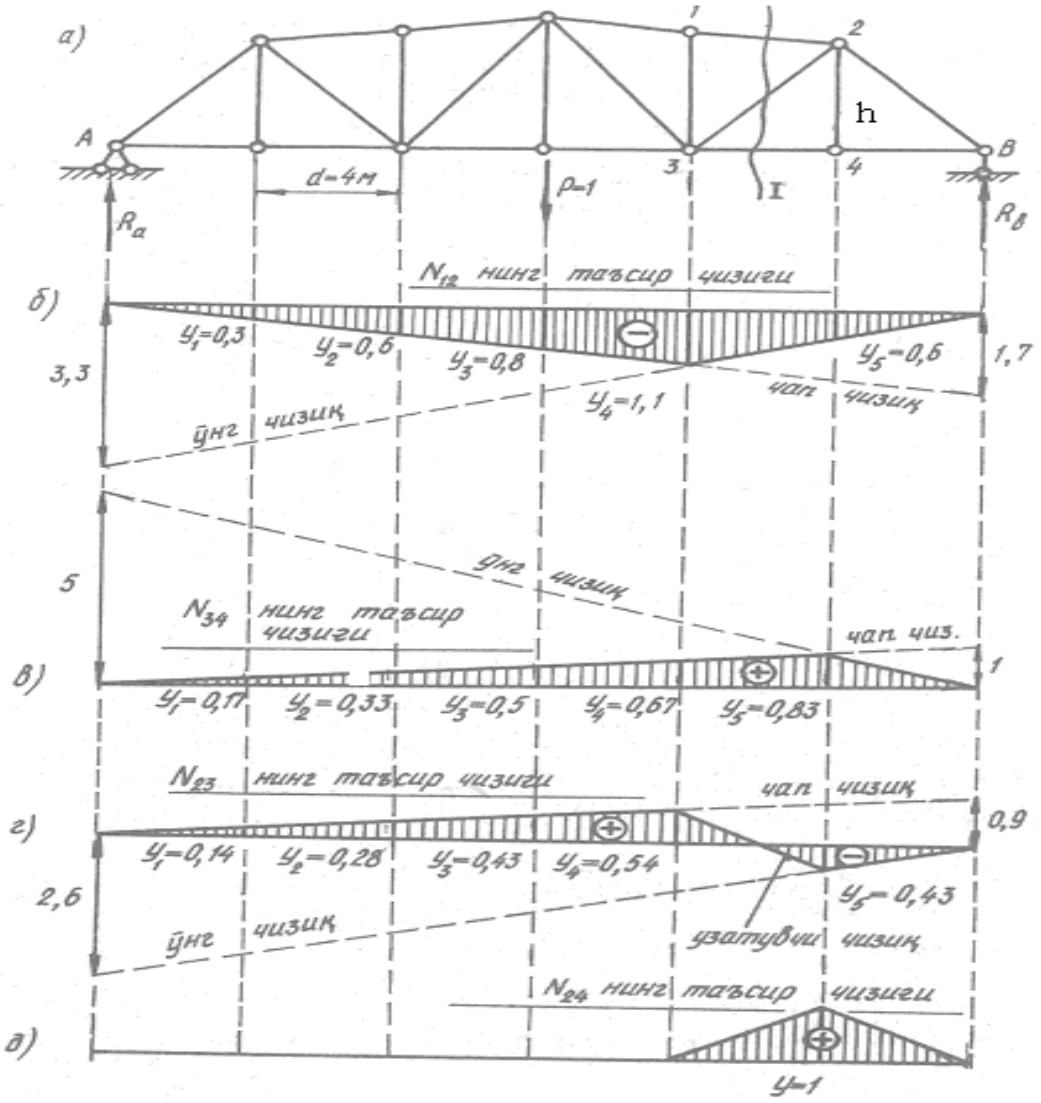
$$\sum Y = -N_{87} - P = 0$$

бундан

$$N_{87} = -P = -1.$$

Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.11- расм, *е* да тасвирланган.

Мисол. 4.12-.расм, а да тасвирланган ферманинг бешинчи панелидаги зўриқишлар учун таъсир чизиқлари чизилсин ҳамда чизилган таъсир чизиқларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қиймати аниқлансин.



4.12- расм

Ечиш. Момент нуқтаси усулидан фойдаланиб N_{12} зўриқишининг таъсир чизиғини чизамиз. Бунинг учун фермани 1 — 1 кесим билан қирқамиз. Навбатма-навбат ферманинг чап ва ўнг қисмлари учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. Ферманинг чап қисми учун тенглама тузганда, бирлик куч P=1 ферманинг ўнг томонида ҳаракатланади деб фараз этамиз ва аксинча.

3- тугун N_{12} учун момент нуқтаси бўлади. Шу нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (4.10- расм, б).

а) ферманинг ўнг томони тенгламаси

$$\sum M_3 = -R_b \cdot 2d - N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан $$N_{12} = -\frac{2 \cdot 4}{4{,}9} \cdot R_6 = -1{,}7\, R_b .$$

Бу ифодага кўра А таянчи остига ноль, В таянчи остига — 1,7 га тенг бўлган ординаталарни ўлчаб қўямиз ва уларни бирлаштириб, чап тўғри чизиқни ҳосил қиламиз (4.12- расм, б);

б) бу ишларни ферманинг чап томони учун такрорлаймиз

$$\sum M_3 = R_a \cdot 4d + N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан $$N_{12} = -3{,}3 R_a .$$

Бу ифодага кўра ўнг тўғри чизиқ ўтказилади. Штрихланган юза N_{12} зўриқишнинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, б).

N_{34} зўриқишининг момент нуқтаси 2- тугун билан устма-уст ётади. Ферманинг чап ва ўнг қисмлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз ва уларнинг N_{34} га тегишли ординаталарини аниқлаймиз (4.10- расм, б):

а) ферманинг чап қисми учун

$$\sum M_2 = R_a \cdot 5d - N_{34} \cdot h = 0,$$

бундан $$N_{34} = 5 R_a .$$

б) ферманинг ўнг қисми учун

$$\sum M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0, \quad N_{34} = R_b .$$

Штрихланган юза N_{34} нинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, в).

N_{23} зўриқишнинг момент нуқтаси (К) фермадан ташқарида ётади (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини шу нуқтага нисбатан тузамиз:

а) ферманинг чап қисми учун $\sum M_k = R_a(6d + x) + N_{23} h_{23} = 0$ бундан N_{23} = — 2,6 R_a ,

бунга кўра ўнг (тўғри) чизиқ ўтказилади;

б) ферманинг ўнг қисми тенгламаси $\sum M_k = R_b \cdot x - N_{23} \cdot h_{23} = 0, \quad N_{23} = 0{,}9 R_b$

Бунга асосан чап (тўғри) чизиқ ўтказилади.

Чап ва ўнг чизиқлар узатувчи чизиқ ёрдамида туташтирилади. Бунинг учун 3- тугун чап ва 2- тугун ўнг чизиққа проекцияланади ҳамда топилган нуқталар бирлаштирилади. Штрихланган юза N_{23} нинг таъсир чизиғидир (4.12- расм, *г*).

N_{24} зўриқишнинг таъсир чизиғи тугунларни кесиб олиш усулида қурилади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб оламиз ва унинг икки ҳолатини текширамиз (4.10- расм, в).

Биринчи ҳолатда бирлик куч 3 — 4 ва 4 — В панеллардан ташқарида ҳаракатланади, деб фараз этамиз.

Бу ҳолда мувозанат тенгламаси $\sum Y = 0$ дан $N_{24} = 0$ келиб чиқади.

Иккинчи ҳолатда бирлик куч 4- тугунга қўйилган деб фараз этамиз. Бу ҳол учун мувозанат тенгламаси $\sum Y = N_{24} - P = 0$ бўлади, бундан N_{24}=1 келиб чиқади.

Бирлик куч бошқа тугунларда бўлганда, N_{24} зўриқиш нолга тенг бўлади. Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.12- расм, д да тасвирланган.

Энди масаланинг иккинчи қисмини ҳал этишга киришамиз, яъни тайёр таъсир чизиқларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қийматини аниқлаймиз. Фермага фақат йиғиқ кучлар қўйилган бўлганлиги учун зўриқишлар қуйидаги формула билан аниқланади:

$$N = P\sum_{i=1}^{n} Y_i .$$

Бу формуладан фойдаланишда йиғиқ кучлар пастга йўналганлиги учун (4.10- расм, а) мусбат ишорада, Y_i ординатасининг ишоралари эса таъсир чизиқлари ишораси бўйича олинади.

N_{12} зўриқишининг қийматини аниқлайлик. Ферма тугунларига қўйилган кўзғалмас кучларнинг қиймати P=12 кН. Номаълум ординаталар (Y) нинг қиймати N_{12} зўриқишининг таъсир чизиқларидан топилади. Бунинг учун учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилади.

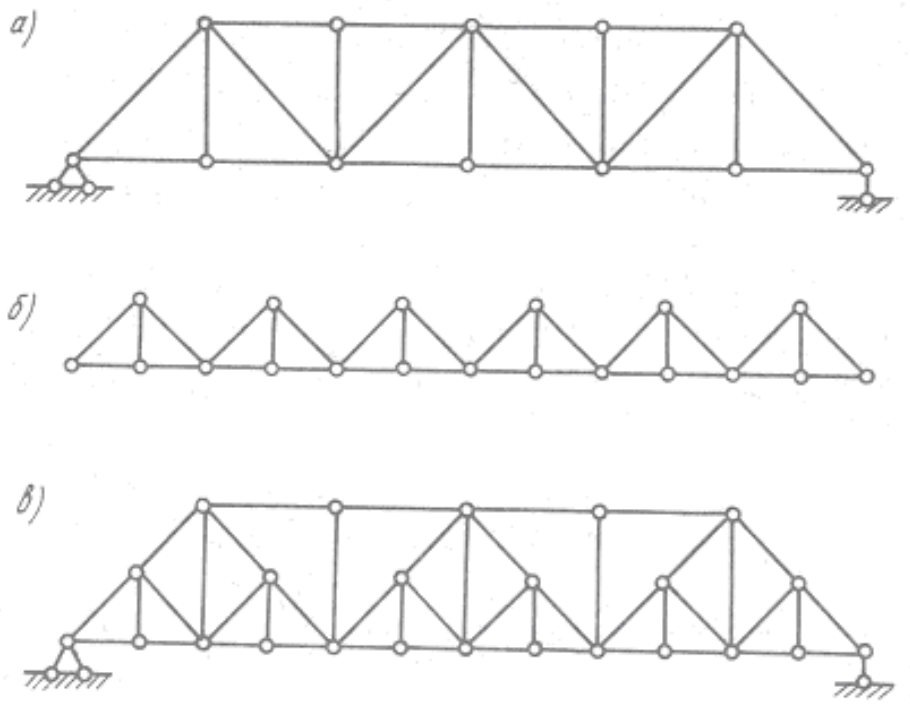
Топилган ординаталарнинг қиймати шаклда кўрсатилган (4.12- расм, б). Изланаётган зўриқишнинг қиймати

$$N_{12} = P(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) =$$
$$= -12\,(0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}8 + 1{,}1 + 0{,}6) = -39{,}6\,kN$$

Бу қиймат аналитик усулда топилган қиймат билан бир ҳилдир. Қолган зўриқишларнинг қийматлари ҳам шу йўсинда аниқланади.

4.4. Шпренгелли фермалар

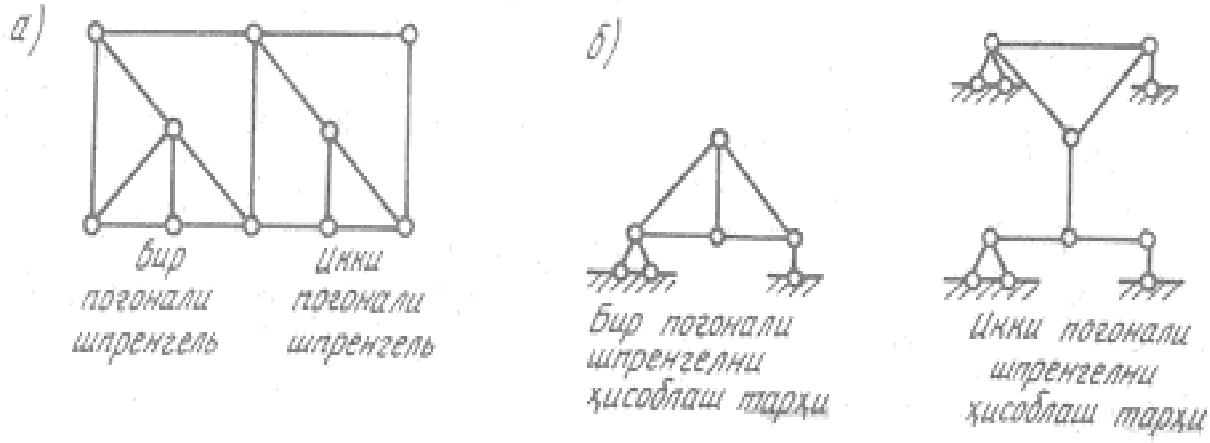
Катта узунликка эга бўлган ферманинг тугунлари орасидаги масофа (панел) ҳам катта бўлади. Бунинг оқибатида тугунларга таянувчи кўндаланг балкалар устига қўйиладиган бўйлама балкаларнинг вазни ортиб кетади. Бу ҳол иктисодий жиҳатдан самарасиздир; Панел узунлигини сақлаган ҳолда бўйлама балканинг узунлигини қисқартириш учун асосий фермага (4.13- расм, а) қўшимча элементлар — шпренгеллар киритилади (4.13-расм, б). Натижада ҳосил бўлган ферма ш п р е н г е л л и ф е р м а деб аталади (4.13- расм, в).



4.13- расм

Асосий ферма барча юкни ўзига қабул қилади, шпренгеллар эса фақат ўзига қўйилган юкни қабул қилади.

Шпренгеллар бир ва икки поғонали бўлиши мумкин (4.14- расм, а). Бир ва икки поғонали шпренгелларнинг ҳисоблаш схемалари 4.14- расм, б- да тасвирланган.



4.14- расм

Шпренгелли фермаларнинг элементлари тўрт тоифага бўлинади:

1) фақат асосий фермага тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар асосий ферма ҳисобидан топилади; ферма таркибига шпренгелларнинг қўшилиши мазкур элементлардаги зўриқишларга таъсир этмайди;

2) фақат шпренгелларга, яъни қўшимча фермачаларга тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар шпренгелларнинг алоҳида ҳисобидан топилади;

3) бир вақтнинг ўзида ҳам асосий фермага, ҳам шпренгелга тегишли бўлган элементлар. Бундай элементдаги зўриқиш икки хил зўриқишнинг йиғиндиси сифатида аниқланади; булардан бири асосий ферма элементининг зўриқиши; иккинчиси эса шпренгел элементининг зўриқишидир;

4) асосий ферманинг шундай элементларидирки, қўзғалувчан юкнинг ҳаракат сатҳига кўра, яъни юкнинг остки ёки устки тасмадан ҳаракатланишига қараб элементдаги зўриқишнинг таъсир чизиқлари турлича бўлади.

1- мисол. 3 — 4, 3 — 4' ва 5 — 4' стерженлардаги зўриқишларнинг таъсир чизиқлари қурилсин (4.15- расм).

Ишни 3 — 4 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизиғини чизишдан бошлайлик. Аввалам бор бу стержень биринчи тоифага кирадиган, яъни фақат асосий фермага оид бўлган стержендир. Шунинг учун бу масалани ҳал этишда шпренгелларни олиб ташлаб, асосий ферманинг ўзини қолдирамиз (4.15- расм, б) ва ундан 3- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз, натижада 4.15- расм, в да тасвирланган таъсир нуқтаси эга бўламиз.

3 — 4' стержень иккинчи тоифага оид стержень эканлигини эътиборга олиб, шпренгелни асосий фермадан ажратиб оламиз ҳамда унга мустақил ферма сифатида ёндашамиз (4.15- расм, г). Ҳаракатланувчи бирлик куч P=1 3' — тугунга қўйилган деб фараз этиб, 3- тугун учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

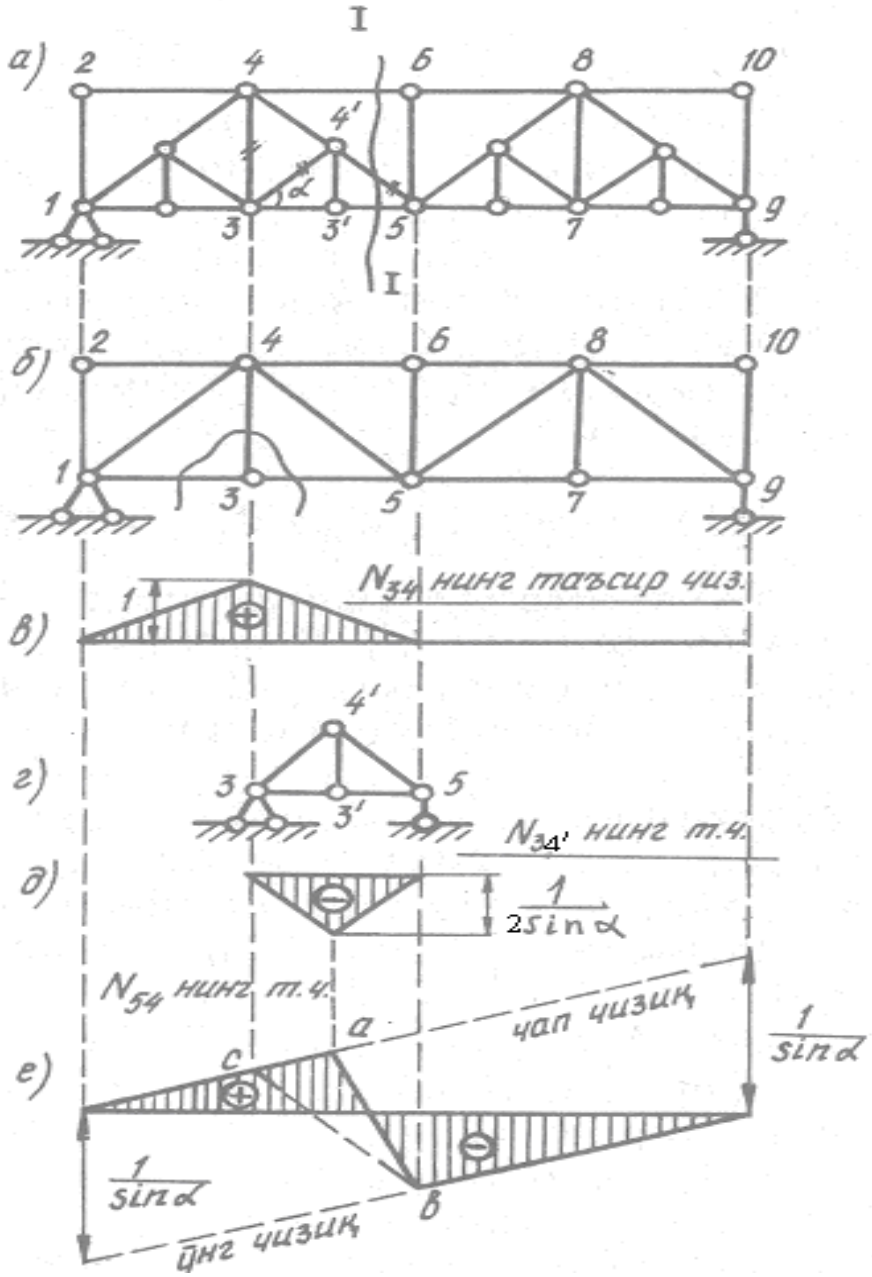
$$\sum Y = \frac{1}{2} + N_{34'} \sin\alpha = 0;$$

бундан $$N_{34'} = -\frac{1}{2\sin\alpha}.$$

Бирлик куч таянчларга қўйилса, 3 — 4' стерженидаги зўриқиш нолга тенг бўлади. Буларга асосан 3 — 4' стерженидаги зўриқиш учун 4.15- расм, д да тасвирланган таъсир чизиғига эга бўламиз.

Учинчи тоифага оид бўлган 5 — 4' стерженидаги зўриқишни аниқлаш учун фермани 1— 1 кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

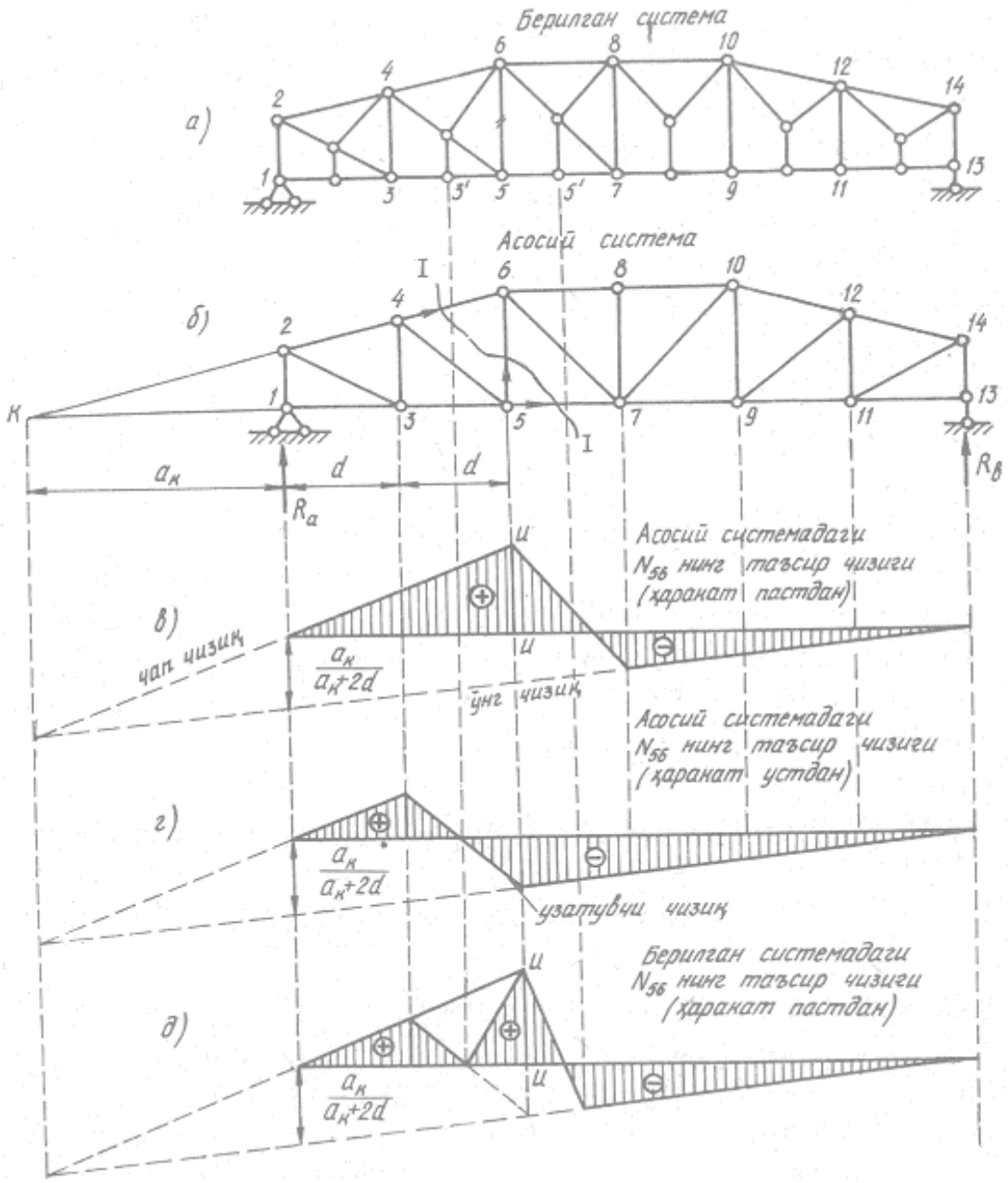
$$\sum Y = R_a + N_{54} \sin\alpha = 0; \text{ бундан } N_{54} = -\frac{R_a}{\sin\alpha}$$



4.15- расм

Бу қийматдан фойдаланиб, ўнг тўғри чизиқни ўтказамиз (4.15- расм, е). N_{34} нинг момент нуқтаси чексизликда бўлганлиги сабабли чап тўғри чизиқни ўнг тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказамиз. Узатувчи чизиқ *ab* ни ўтказиш учун 5 ва 4' — тугунларини ўнг ва чап чизиқларга проекциялаймиз. Агар шпренгел бўлмаганида, узатувчи чизиқ ВС бўйича ўтар эди. Бу ерда *abc* учбурчак шпренгелнинг асосий элементга таъсирини ифодалайди.

2-мисол. Таркибида икки поғонали шпренгеллар мавжуд бўлган ферманинг 5 — 6 устуни учун таъсир чизиқлари қурилсин (4.16- расм, а).



4.16-расм

Ферманинг бу устуни стерженларнинг тўртинчи тоифасига киради, яъни устун асосий фермага тегишли элемент бўлиб, унинг таъсир чизиқлари бирлик куч қайси тасмадан ҳаракатланишига қараб турлича бўлади.

Берилган системадаги шпренгелларни ташлаб юбориш йўли билан асосий системани ҳосил қиламиз (4.16- расм, б). Асосий системанинг 5 — 6 стержени учун таъсир чизиқларини чизамиз. Бунда юкнинг устки ва остки тасмалар бўйича ҳаракати кўриб чиқилади.

Фермани 1 — 1 кесим бўйлаб қирқамиз, бирлик куч кесимдан ўнг томонда ҳаракат қилади, деб фараз этиб, чап қисм учун К нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_k = -R_a a_k - N_{56} \cdot (a_k + 2d) = 0 ,$$

бундан

$$N_{56} = -\frac{R_a \cdot a_k}{a_k + 2d} .$$

Бу қийматга асосан ўнг тўғри чизиқни ўтказамиз. Момент нуқтасидан фойдаланиб, чап тўғри чизиқ ўтказилади. Бирлик куч пастки тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизиқни ўтказиш учун чап ва ўнг тўғри чизиқларга 5 ва 7 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, в). Юк юқори тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизиқни ўтказиш учун 4 ва 6 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, *г*).

Ҳар иккала таъсир чизиғидан кўриниб турибдики, юк учинчи тугундан чапда ва еттинчи тугундан ўнгда ҳаракатланса, зўриқишнинг қиймати ҳаракат сатҳига боғлиқ бўлмайди.

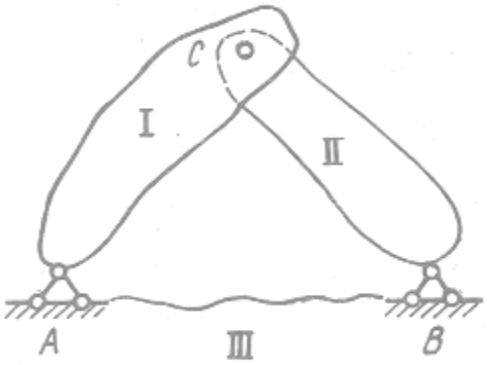
Юк 3' ва 5' тугунларга қўйилса (4.16- расм, а), унинг таъсири икки поғонали шпренгеллар орқали юқори тугунларга узатилади; гўёки ҳаракат устки тасма бўйлаб содир бўлгандек туюлади. Шу сабабга кўра, бундай ҳолда N_{56} нинг ординаталари 4.15- расм, г дан олинади. Унинг изланаётган таъсир чизиғини қуриш учун аниқланган ординаталар етарли. Мазкур таъсир чизиғи 4.16- расм, *д* да ўз аксини топган.

5- БОБ.
УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР

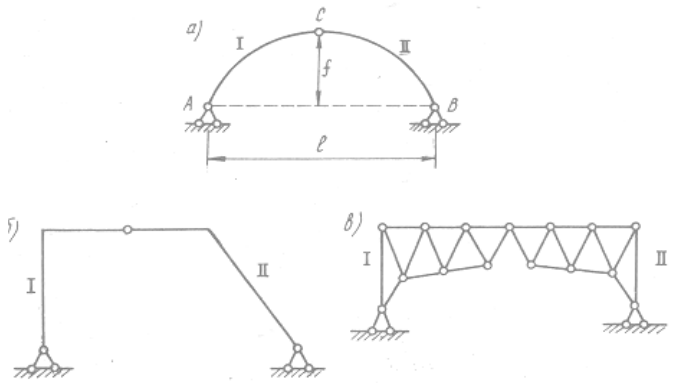
5.1. Уч шарнирли системалар

Уч дискни уч шарнир ёрдамида бириктириш туфайли ҳосил бўлган система уч шарнирли система деб аталади (5.1- расм). Бунда учинчи диск сифатида ер қабул қилинади. Уч диск бир ўқ устида ётмаган уч шарнир (А, В, С) ёрдамида бирикса геометрик ўзгармас система ҳосил бўлиши бизга аввалдан маълум.

Агар I ва II дисклар эгри чизиқли стерженлардан иборат бўлса, бундай система уч шарнирли арка деб аталади (5.2- расм, а), агар I ва II диск синиқ тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган бўлса, *уч шарнирли рама* деб аталади (5.2- расм, б); агар I ва II диск ферма бўлса, у ҳолда система *уч шарнирли аркасимон* ферма деб аталади (5.2- расм, в).



5.1- расм



5.2- расм

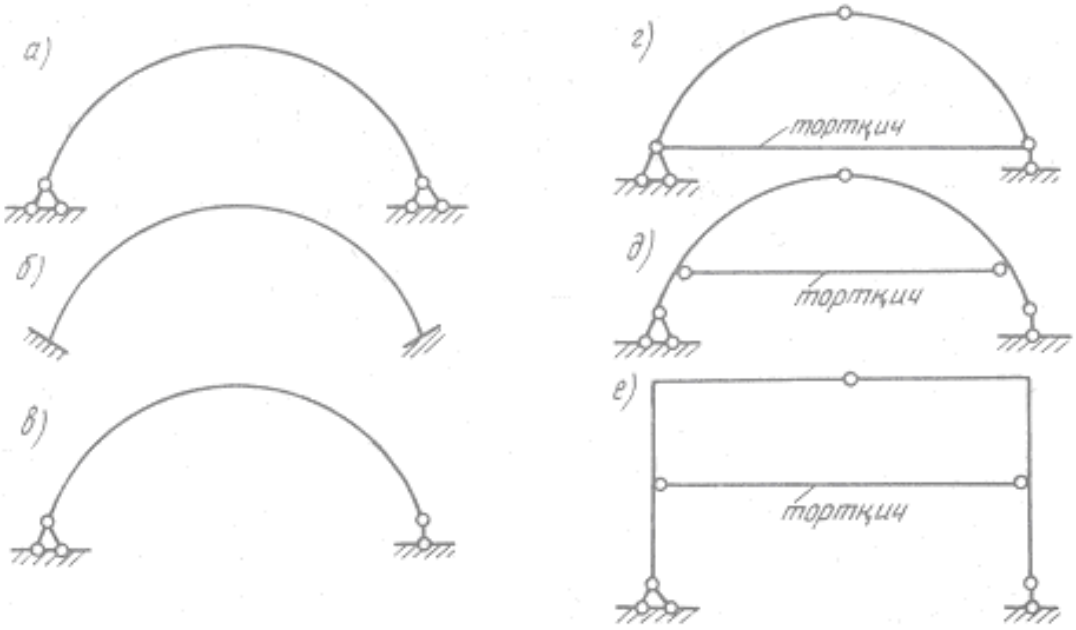
Уч шарнирли системалар вертикал ўққа нисбатан симметрик ёки носимметрик бўлиши мумкин. Симметрик системада С шарнири симметрия ўқи устида жойлашади, А ва В таянч шарнирлари бир сатхда ётади. Носимметрик системаларда таянчлар турли сатхда жойлашиши мумкин.

Уч шарнирли система таянчларида вужуда келадиган горизонтал босим ва унга қарши реакция керки (распор) номи билан юритилади; системанинг ўзи эса *керкили система* деб аталади. Аркалар керки кучининг мавжудлиги билан балкалардан фарқ қилади.

Арканинг гумбаздан фарқи шундаки, арканинг кўндаланг кесими анча кичик бўлади, шунинг учун ҳам у стерженли системалар гуруҳига киради. Гумбаз эса қобиқлар гуруҳига қўшилади. Қурилишда уч шарнирли, икки шарнирли (5.3- расм, а) ва шарнирсиз (5.3- расм, б) аркалар қўлланилади. Аркаларда керки кучининг мавжудлиги сабабли уларнинг таянчлари шарнирли ёки шарнирсиз қўзғалмас таянч кўринишида ишланади.

Таянчлардан бири шарнирли қўзғалувчан бўлса, у арка эмас, *эгри ўқли балка* деб аталади (5.3- расм, в). Бинокорликда баъзан уч шарнирли аркаларнинг, бошқача хили—тортқичли аркалар ҳам учраб туради (5.3-расм, *г*).

Тортқичлар шароитга қараб таянчлардан юқорироқ ўрнатилиши ҳам мумкин (5.3- расм, *д*). Қурилишда тортқичли рамалар ҳам кенг тарқалган (5.3- расм, е). Амалда аркаларнинг қайси туридан фойдаланиш иншоотнинг конкрет иш шароитига қараб ҳал этилади.



5.3- расм

Уч шарнирли ҳамда тортқичли аркалар ва рамалар статик аниқ, икки шарнирли ва шарнирсиз аркалар статик ноаниқ системаларга киради. Бу бобда статик аниқ аркалар ва рамалар кўриб ўтилади. Статик ноаниқ аркалар билан 8-бобда танишамиз.

Аркаларнинг асосий белгилари уларнинг оралиқ узунлиги *l* ва арка баландлиги *f* дир. Ўртадаги С шарнири қулф деб аталади.

Шарнирсиз аркалар Ўрта Осиё бинокорлигида қадим замонлардан буён қўлланилиб келинади. Масжид, мадрасалар, хашаматли сарой ва макбаралар, ҳаммом, сардоба ва кўприкларда равоқ ва гумбаз кўринишида арка элементларини кўплаб учратамиз. 1502 йили Шайбонийхон томонидан Зарафшон дарёсига қурилган сув айирғич кўпригининг айрим равоқлари ҳозирга қадар сақланиб қолган.

5.2. Уч шарнирли аркаларнинг таянч реакцияларини аниқлаш

Иҳтиёрий кучлар қўйилган уч шарнирли арканинг (5.4- расм) таянч реакцияларини аниқлаш талаб этилади.

Маълумки, уч шарнирли аркалар статик аниқ бўлади. Шу боисдан уларнинг таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя этади. Уч шарнирли аркаларда ташқи кучлар таъсирида иккита горизонтал (H_a, $H_в$) ва иккита вертикал (V_a, $V_в$) реакция кучлари вужудга келади. Бу номаълум таянч реакциялари қуйидаги тенгламалардан аниқланиши мумкин:

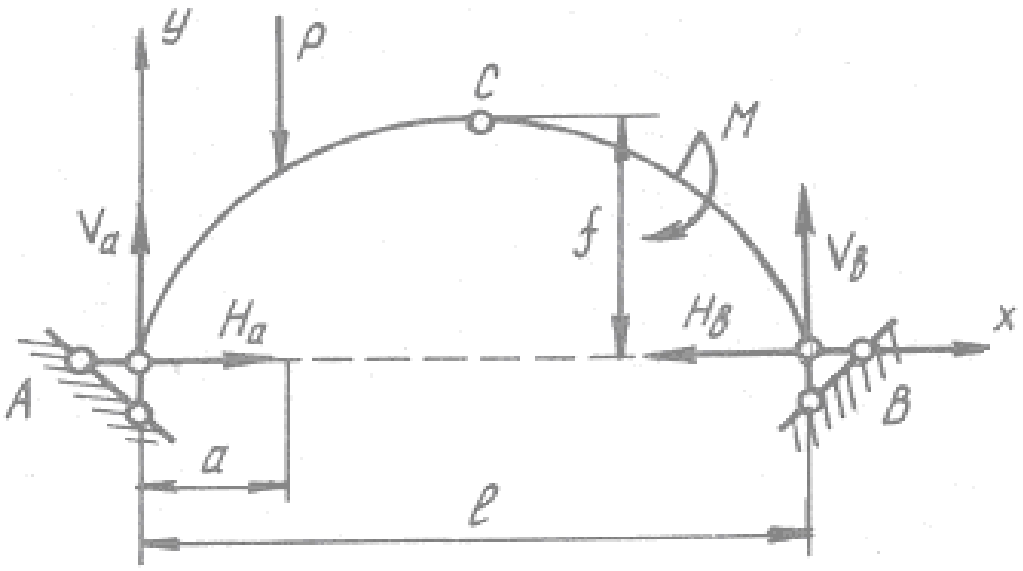
$$\sum M_a = 0;\ \sum M_b = 0;\ \sum M_c^{(чап)} = 0;\ \sum X = 0.$$

В таянчидаги вертикал реакция кучи V_b ни аниқлаш учун А шарнирига нисбатан моментлар йиғиндисини тузамиз.

$$\sum M_a = P \cdot a + M - V_b l = 0.$$

Бундан

$$V_b = \frac{P\,a + M}{l}.$$



5.4-расм

Мазкур формуланинг сурати А нуқтасига нисбатан барча ташқи кучлар моментлари йиғиндиси $\sum M_A^{таш}$ ни ифодалайди. Шунга кўра юқоридаги формулани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$V_b = \frac{\sum M_a^{таш}}{l}$$

А таянчидаги реакциянинг вертикал ташкил этувчисини ҳам шу йўсинда топа оламиз:

$$V_a = \frac{\sum M_b^{таш}}{l}$$

Горизонтал реакция кучи *Нь* ни аниқлаш учун С шарнирига нисбатан ўнг томонда ётган кучлардан момент оламиз:

$$\sum M_c^{o'ng} = M - V_b \frac{l}{2} + H_b f = 0,$$

бундан

$$H_b = \frac{V_b \frac{l}{2} - M}{f} \quad \text{ёки} \quad H_b = \frac{\sum M_c^{0(o'ng)}}{f}.$$

Бу ерда ноль индекси узунлиги ва юкланиши арка билан бир хил бўлган оддий балкадаги момент эканлигини билдиради.

А таянчидаги горизонтал реакция куч H_a икки тенгламанинг биридан, яъни $\sum M_c^{chap} = 0$ ёки $\sum X = 0$ тенгламаларидан аниқланиши мумкин. Проекция тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum X = H_a - H_b = 0; \text{ бундан } H_a = H_b = H.$$

Оҳирги ифода шуни кўрсатадики, агар аркага вертикал кучлар қўйилган бўлса, горизонтал реакциялар ўзаро тенг бўлар экан. Уч шарнирли аркалар учун

баён этилган қоидалар тўлалигича уч шарнирли рамалар учун ҳам тааллуқлидир.

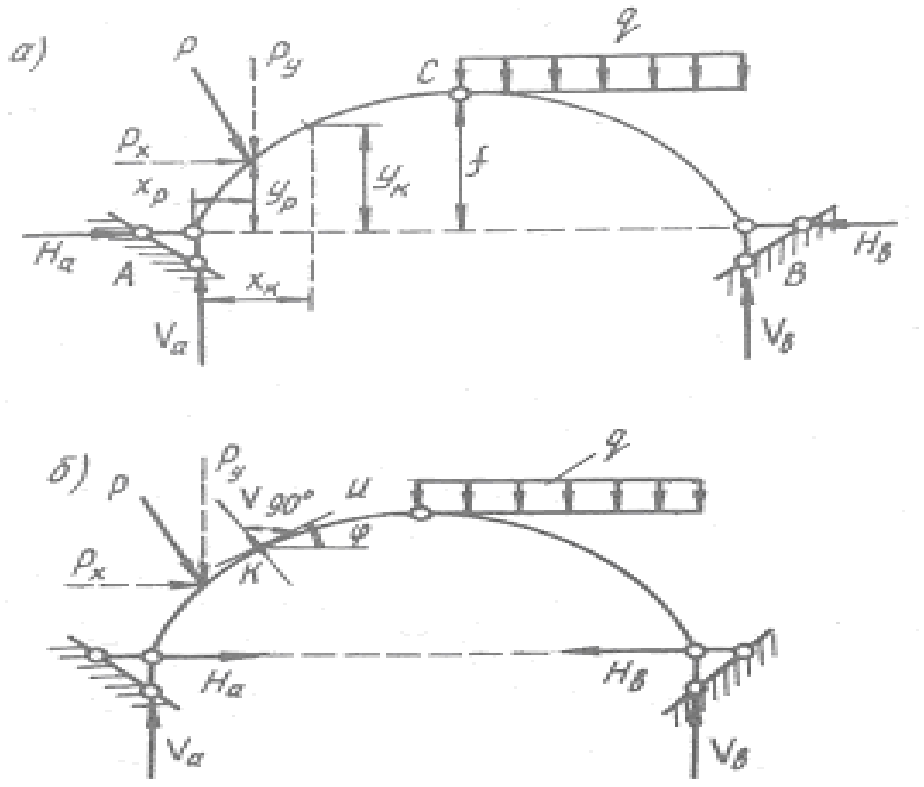
5.3. Уч шарнирли аркаларни аналитик усулда ҳисоблаш

Ҳисоблашдан мақсад бу ерда ҳам бошқа конструкциялардаги сингари ички кучларни аниқлашдан иборатдир. Ички кучлар деганда, арканинг кўндаланг кесимларида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўладиган эгувчи момент M, кўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

Ички кучларни аниқлашда ишора қоидаси балкадаги қоидага ўхшашдир, яъни куч арканинг эгрилигини оширса — ишора манфий, эгрилигини камайтирса — мусбат, кесимга нисбатан куч соат стрелкаси бўйича айланса — мусбат, тескари йўналишда — манфий олинади.

Бўйлама кучлар ишораси бошқача: куч стерженни сиқса — мусбат, чўзса — манфий олинади.

Уч шарнирли арканинг иҳтиёрий *K* кесимида вужудга келадиган эгувчи момент M_k ни аниқлаймиз (5.5- расм, *а*). Бунинг учун аркани шу кесим бўйича ҳаёлан қирқамиз ва кесимнинг чап ёки ўнг томони учун моментлар йиғиндисини ёзамиз:



5.5- расм

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - P_y (x_k - x_p) - Px(y_k - y_p). \quad (5.1)$$

Бу ерда x_k ва y_k — арканинг K кесими координаталари;

P_x ва P_y— ташқи куч P нинг горизонтал ва вертикал проекциялари;

x_p ва y_p — куч қўйилган нуқтанинг координаталари.

Агар аркага қўйилган куч оғма эмас, тик бўлса, у ҳолда P кучининг горизонтал проекцияси ноль, P_y=P ва $H_a = H_b = H$ бўлади.

(5.1)- ифода эса қуйидаги кўринишни олади:

$$M_k = V_a x_k - P(x_k - x_p) - H y_k \quad (5.2)$$

Бу формуладаги $V_a x_k - P(x_k - x_p)$ ифода, узунлиги ва юкланиши жиҳатидан шу арка билан бир хил бўлган оддий балканинг эгувчи моменти, M_k^0 ни англатади. Буни эътиборга олсак, (5.2) формула қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\boxed{M_k = M_k^0 - Hy_k.} \quad (5.3)$$

Кўндаланг ва бўйлама кучларни аниқлаш учун арканинг К кесимига ўринма *(u)* ва шу ўринмага тик бўлган чизиқ *(v)* ўтказамиз (5.5- расм, б). Кўндаланг кучларни аниқлаш учун υ ўқига, бўйлама кучларни аниқлаш учун *и* ўқига нисбатан кучлар проекцияларининг йиғиндисини оламиз:

$$Q_k = V_a \cos\varphi - H_a \sin\varphi - P_y \cos\varphi - P_x \sin\varphi;$$

$$N_k = V_a \sin\varphi + H_a \cos\varphi - P_y \sin\varphi + P_x \cos\varphi. \quad (5.4)$$

Бу ерда φ — ўринма билан горизонтал чизиқ орасидаги бурчак. Агар аркага қўйилган кучлар тик бўлса, у ҳолда (5.4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$Q_k = (V_a - P)\cos\varphi - H \sin\varphi;$$

$$N_k = (V_a - P)\sin\varphi + H \cos\varphi. \quad (5.5)$$

Бу ерда $|V_a - P|$ аркага тенг кучли бўлган оддий балкадаги кўндаланг куч Q_k^0 дир. Буни эътиборга олсак, (5.5) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_k &= Q_k^0 \cos\varphi - H \sin\varphi; \\ N_k &= Q_k^0 \sin\varphi + H \cos\varphi. \end{aligned}} \qquad (5.6)$$

(5.3) ва (5.6) формулалардан фойдаланиб, арканинг бир қанча кесимлари учун эгувчи момент, кўндаланг ва бўйлама кучлар аниқланади ҳамда M, Q ва N эпюралар қурилади.

Арка моменти балка моментларидан кичик бўлиши (5.3) формуладан яққол кўриниб турибди.

5.4. Уч шарнирли арканинг мақбул ўқи

Агар аркага вертикал йўналишда ёйиқ куч қўйилган бўлса, арканинг ўқини шундай олиш мумкинки, бунда арканинг барча кесимларида эгувчи момент нолга тенг бўлади. Эгувчи моментлари нолга тенг бўлган арка ў қ и м а қ б у л (рационал) ў қ деб аталади. Арканинг ўзи эса м а қ б у л ў қ л и арка деб юритилади (5.6- расм).

Арканинг мақбул ўқи тенгламасини тузиш учун (5.3) формуладан фойдаланамиз. Ушбу формуладаги арка моментини нолга тенглаймиз:

$$M_x^0 - H\,y = 0. \qquad (a)$$

Шаклдан

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x).$$

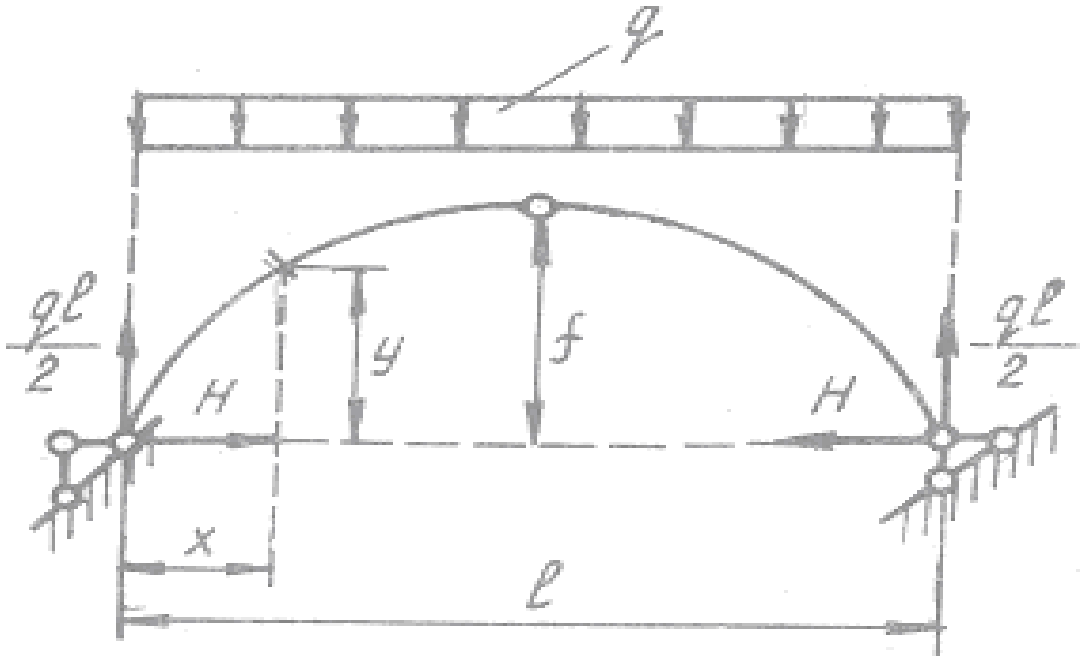
$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{ql}{2}(l - \frac{l}{2}) \cdot \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}. \qquad (б)$$

Ифода (*а*) дан

$$y = M_x^0 / H \qquad (в)$$

келиб чиқади. (б) да аниқланган қийматларни (*в*) га қўямиз:

$$y = \frac{(qx/2)(l - x) \cdot 8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} \cdot (l - x)\,x.$$



5.6- расм

Шу тенглама ёрдамида чизилган парабола арканинг мақбул ўқи бўлади, мақбул ўқли аркада эгувчи момент нолга тенгдир.

5.5. Уч шарнирли аркаларни қўзғалувчи юк таъсирига ҳисоблаш

Балка ва фермалар ҳисобида кўриб ўтганимиздек, иншоотларни қўзғалувчи юклар таъсирига ҳисоблаш учун таъсир чизиқлари деб аталувчи график чизиб олинади. Таъсир чизиқлари ҳар бир таянч реакцияси ва ҳар бир ички куч *(M, Q, N)* учун алоҳида равишда қурилади.

Таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари

Чап ва ўнг таянч шарнирларига нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (5.7-расм,а):

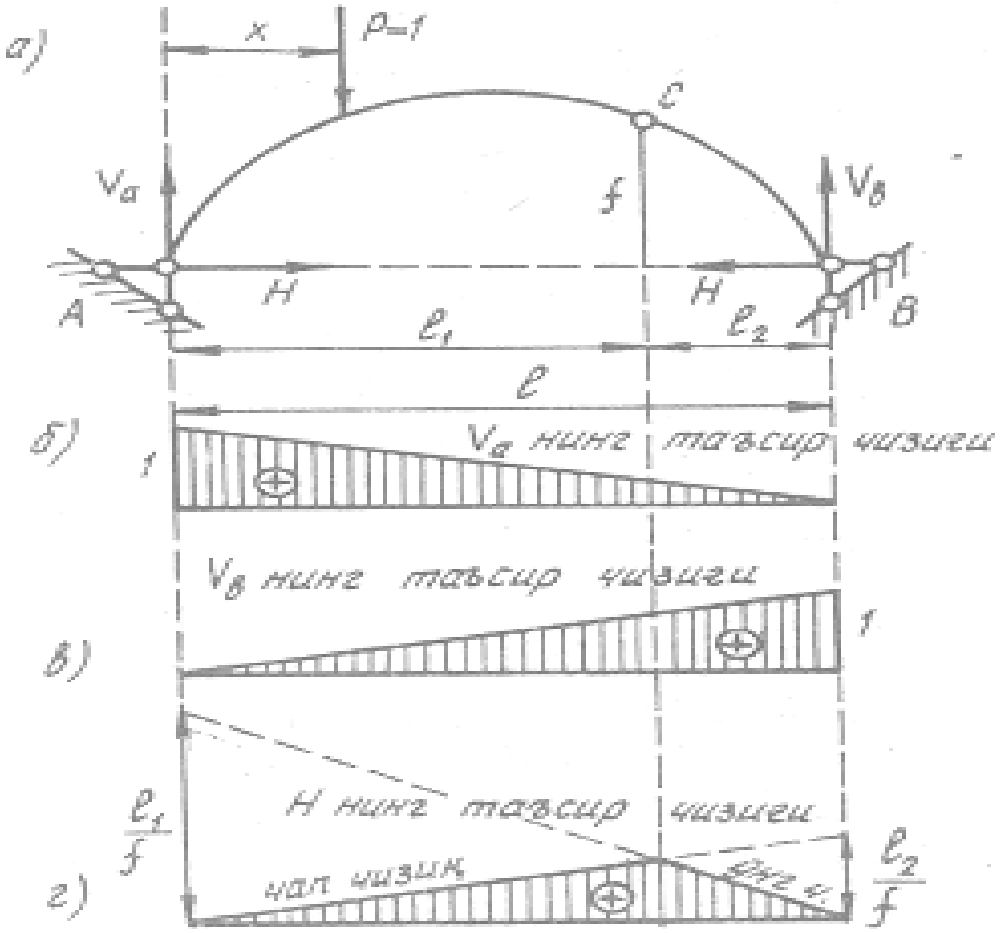
$$\sum M_b = V_a \cdot l - P(l - x) = 0;$$

$$\sum M_a = -V_b\, l + P \cdot x = 0.$$

Бу тенгламалардан V_a ва V_b топилади.

Тузилган ифодалар балка таянч реакцияларининг тенгламасидан фарқ қилмайди. Демак, арка реакцияларининг таъсир чизиқлари ҳам балканинг таъсир чизиқларидан фарқ қилмаслиги керак (5.7- расм, б, *в*).

Маълумки, керки кучи $H = M_c^0 / f$ тенгламаси ёрдамида аниқланади. Бундан Н нинг таъсир чизиғи балка моменти M_c^0 нинг таъсир чизиғидан *1/f* маротаба кичик эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун Н нинг таъсир чизиғини қуришда А таянчи остига l_1 нинг ўрнига l_1/f ни ўлчаб қўямиз. Бу миқдорни В таянч остидаги ноль билан туташтирсак, ўнг тўғри чизиқ келиб чиқади. Чап тўғри чизиқни ўтказиш учун С шарнирни ўнг тўғри чизиққа проекциялаймиз, топилган нуқтани А таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Штрихланган юза керки кучи — горизонтал реакция Н нинг, таъсир чизиғидир (5.7- расм, *г*). Агар $l_1 = l_2 = l/2$ бўлса, С шарнири остидаги ордината $l/4f$ бўлади.



5.7- расм

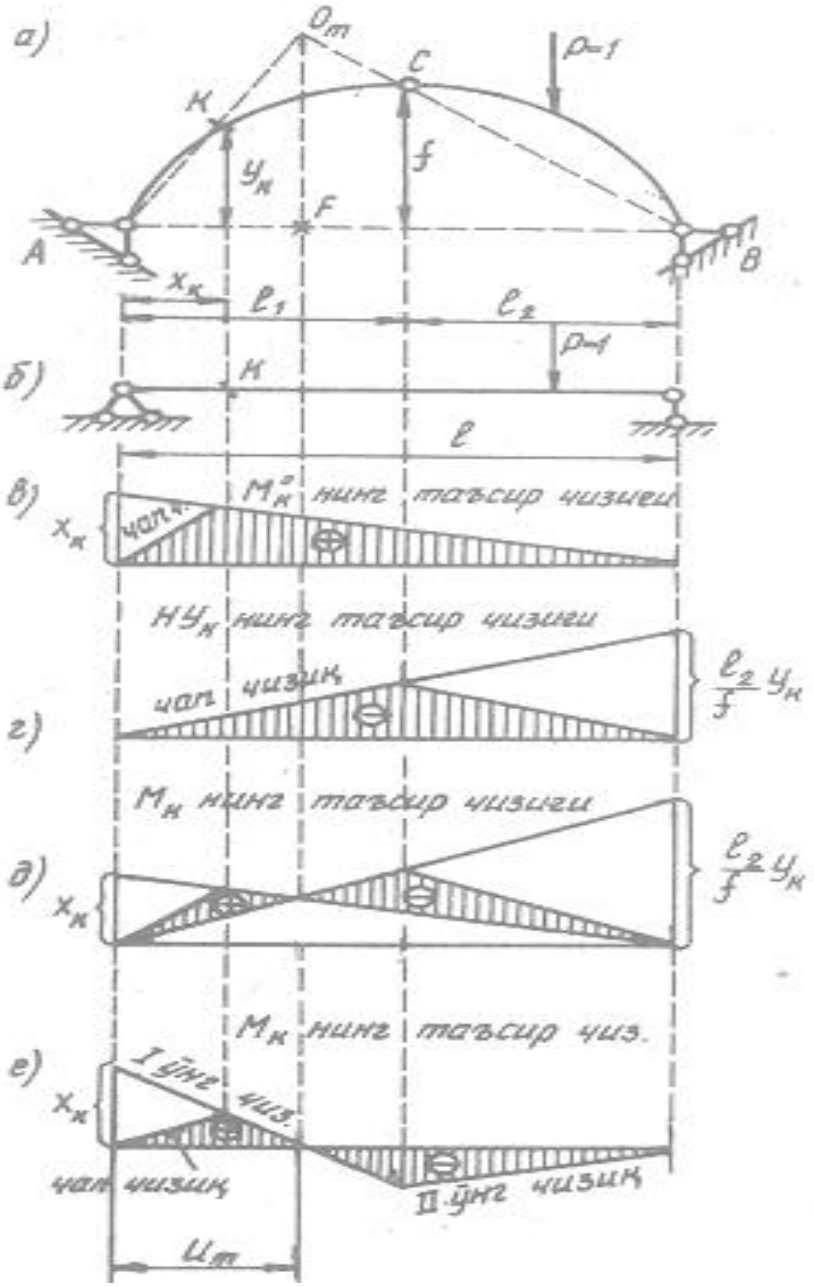
Эгувчи момент М нинг таъсир чизиғи

Арканинг исталган кесимидаги эгувчи момент $M_k = M_k^0 - H y_k$ формуласи ёрдамида аниқланишини юқорида кўриб ўтдик. Арканинг иҳтиёрий К кесимидаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини қуришда ҳам шу формуладан фойдаланамиз (5.8- расм, *а*).

Формулага қараганда, арканинг таъсир чизиғи оддий балканинг (5.8- расм, б) К кесимидаги эгувчи момент M_k^0 нинг таъсир чизиғи билан y_k марта катталаштирилган керки кучи Н нинг таъсир чизиқлари орасидаги фарққа тенг бўлади. M_k^0 ва Hy_k нинг таъсир чизиқлари 5.8- расм, *в.г* — да тасвирланган. Ҳар иккала шаклни устма-уст жойлаштириш йўли билан изланаётган таъсир чизиғини ҳосил қиламиз (5.8- расм, *д*). Ҳосил бўлган таъсир чизиғини тўғри ўққа жойлаштирса ҳам бўлади (5.8-, расм, е).

5.8- расм, *д* — да тасвирланган M_k нинг таъсир чизиғида M_k нинг ўнг чизиғи билан H_{Yk} нинг чап чизиғи ноль нуқтасида кесишади. Ушбу нуқтанинг ҳолатини график усулда аниқласа бўлади. Бунинг учун ВС ва АК чизиқларининг кесишув нуқтаси 0 ни аниқлаймиз (5.8- расм, *а*). Таъсир чизиғининг 0 нуқтаси ана шу нуқта остида ётади.

M_k нинг таъсир чизиғини бевосита ноль нуқтаси орқали қурса ҳам бўлади. Бунинг учун иҳтиёрий ўққа X_k масофаси ўлчаб қўйилади (5.8- расм, е). O_m нуқтасини ўққа проекциялаб, ноль (О) нуқтаси аниқланади. X_k нинг учи 0 билан бирлаштирилади ва С шарнирининг проекцияси билан учрашгунча давом эттирилади. Ўтказилган чизиқ I ўнг чизиқ деб аталади. II ўнг чизиқ шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизиқ одатдагидек ўтказилади, яъни К кесимининг проекцияси билан А таянчи остидаги ноль нуқта бирлаштирилади. Штрихланган юза M_k нинг таъсир чизиғи бўлади.



5.8- расм

Ноль нуқтасининг абсциссаси u_m AFO_m *ва* BFO_m учбурчакларидан топилади:

$$FO_m = \frac{y_k}{x_k} u_m = \frac{f}{l_2}(l-u);$$

бундан $u_m = \frac{f\, l\, x_k}{y_k l_2 + f x_k}$ келиб чиқади.

Кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғи

Уч шарнирли арканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини қуришда қуйидаги формуладан фойдаланамиз (5.9- расм, *а*):

$$Q_k = Q_k^0 \cos\varphi_k - H \sin\varphi_k ;$$

бу ерда Q_k^0 оддий балканинг К кесимидаги кўндаланг куч (5.9- расм, б); φ_k— *К* кесимига ўтказилган уринма билан горизонтал ўқ орасидаги бурчак.

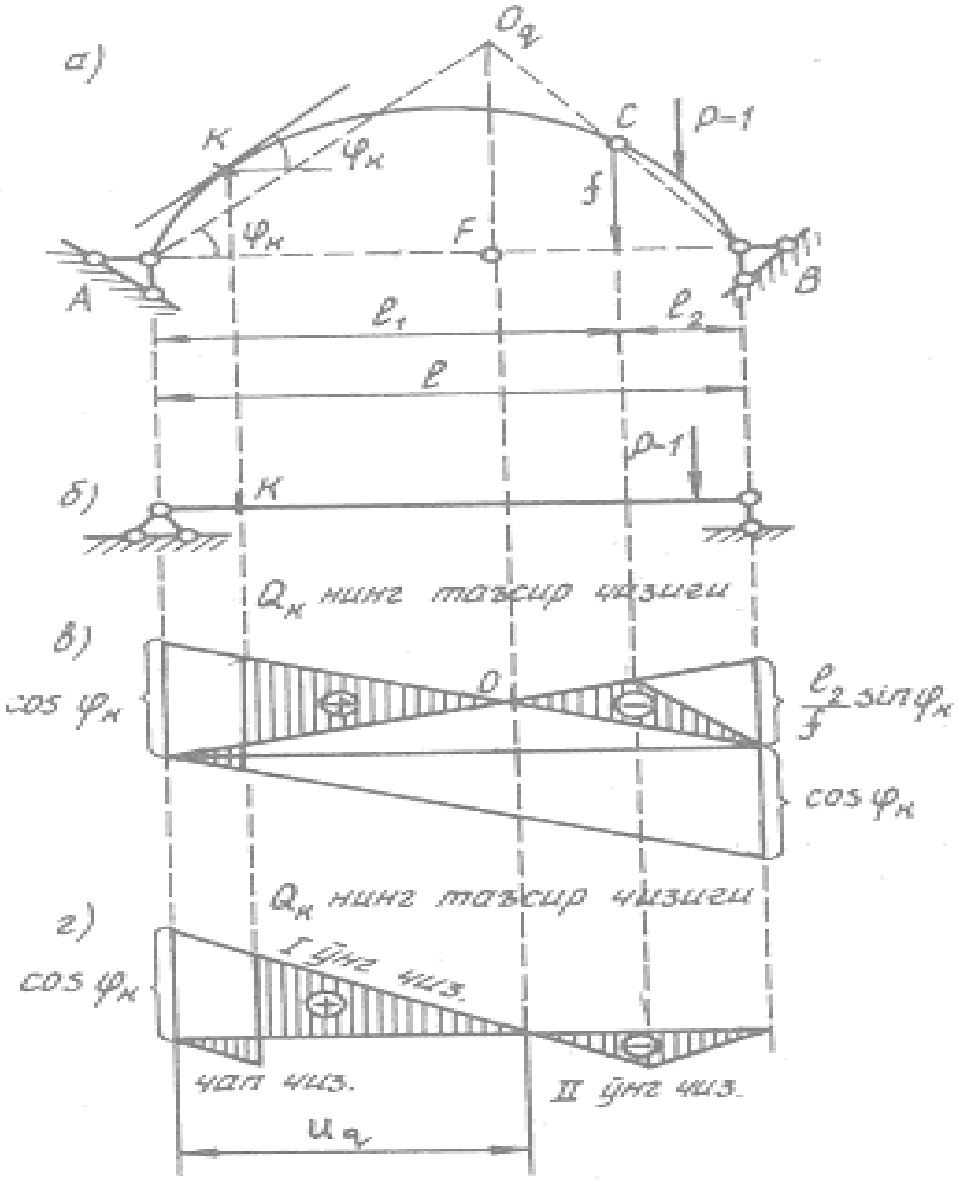
Арка бўйлаб бирлик куч ҳаракат қилганда, Q_k^0 билан *Н* ўзгариб боради, $\cos\varphi_k$ билан $\sin\varphi_k$ эса ўзгаришсиз қолади. Бунга кўра Q_k нинг таъсир чизиғи $Q_k^0 \cos\varphi_k$ билан $H\sin\varphi_k$ нинг таъсир чизиқлари алгебраик йиғиндиси сифатида қурса бўлади. Ана шу йиғинди 5.9- расм, *в*-да тасвирланган, яъни икки хил таъсир чизиғи устма-уст жойлаштирилган. Миқдорлари тенг, ишораси қарама-қарши бўлган ординаталар қисқариб кетган, қолганлари штрихланган. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиғидир.

Агар ҳосил бўлган шаклни горизонтал ўқ устига жойлаштирсак, Q_k нинг таьсир чизиғи 5.9- расм, *г* да тасвирланган кўринишни олади.

Мазкур таъсир чизиғини ноль нуқтаси усулида, яъни график усулда қурса ҳам бўлади. Бунинг учун аввал ноль нуқтанинг ҳолати аниқлаб олинади, изланаётган нуқта (O_q) икки чизиқнинг кесишув нуқтаси тариқасида топилади. Улардан бири ВС чизиғи, иккинчиси К кесимидан ўтган уринмага А шарниридан ўтказилган параллел чизиқдир (59- расм, а). Шу нуқтанинг горизонтал ўққа проекцияси (0) ноль нуқта ҳисобланади.

Иҳтиёрий горизонтал ўққа $\cos\varphi_k$ масофани ўлчаб қўямиз (5.9- расм, *г*). Масофанинг учини ноль нуқта билан туташтирамиз ва уни С шарнири проекцияси билан учрашгунча давом эттирамиз. Ўтказилган кесма I ўнг чизиқ бўлади. II ўнг чизиқ шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизиқ ўнг I чизиққа параллел равишда ўтказилиб, К кесимининг проекциясига қадар давом этади. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиғи ҳисобланади.

Ноль нуқтанинг абсциссаси AFO_q ва BFO_q учбурчаклари орқали $U_q = \dfrac{f\,l}{f + l_2 tg\varphi_k}$ формуладан топилади.



5.9- расм

Бўйлама куч N нинг таъсир чизиғи

Уч шарнирли арканинг К кесимидаги бўйлама куч N_kнинг таъсир чизиғини қуришда $N_k = Q_k sin\varphi_k + H cos\varphi_k$ формуласидан фойдаланамиз (5.10 - расм, *а*).

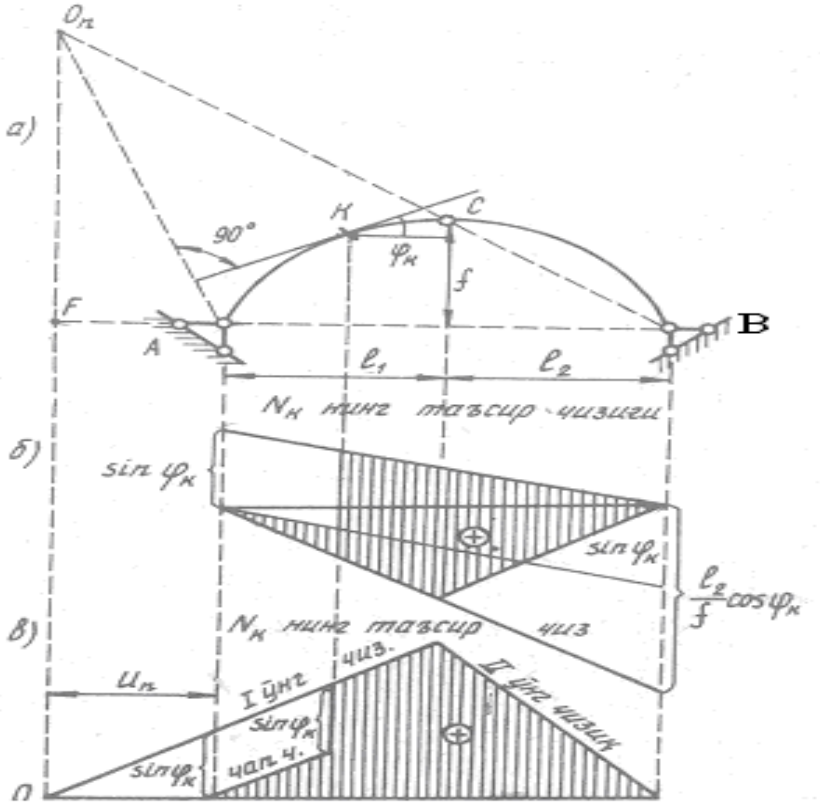
Формулага қараганда N_k нинг таъсир чизиғини $Q_k^o \sin\varphi_k$ билан $H\cos\varphi_k$ таъсир чизиқларининг йиғиндиси сифатида қурса бўлади. Бу ишни амалга ошириш учун аввал $Q_k^0 \sin\varphi_k$ нинг таъсир чизиғини қурамиз. Сўнгра бунинг

устига $H\cos\varphi_k$ нинг таъсир чизиғини тескари равишда жойлаймиз (5.10- расм, б). Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиғи бўлади.

Илгари кўриб ўтганимиздек, N_k нинг таъсир чизиғини ҳам ноль нуқтаси усулида қуриш мумкин. Бунинг учун аввал O_n нуқтаси топиб олинади (5.10- расм, *а*). Бу нуқта ҳам иккита чизиқнинг кесишув нуқтасида ётади: чизиқлардан бири ВС кесмаси, иккинчиси эса К кесимидан ўтказилган уринмага тик бўлган AO_n чизиғидир. Топилган O_n нуқтасини горизонтал ўққа проекциялаб, ноль (0) нуқтасини аниқлаймиз (5.10- расм, *в*). А таянч остига $sin\varphi_k$ кесмасини ўлчаб қўямиз. Кесманинг юқори учини ноль нуқта билан бирлаштириб, С шарнирининг проекциясигача давом эттирамиз. Бу I ўнг чизиқ бўлади. Чап тўғри чизиқ I ўнг чизиққа параллел равишда ўтказилади. Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиғиднр.

Ноль нуқтасининг абсциссаси AFO_n ва BFO_n учбурчаклари орқали қуйидаги формуладан топилади:

$$u_n = \frac{f\,l}{l_2 ctg\varphi_k - f}.$$

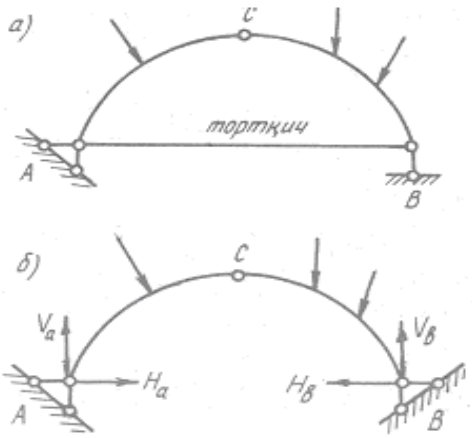


5.10- расм

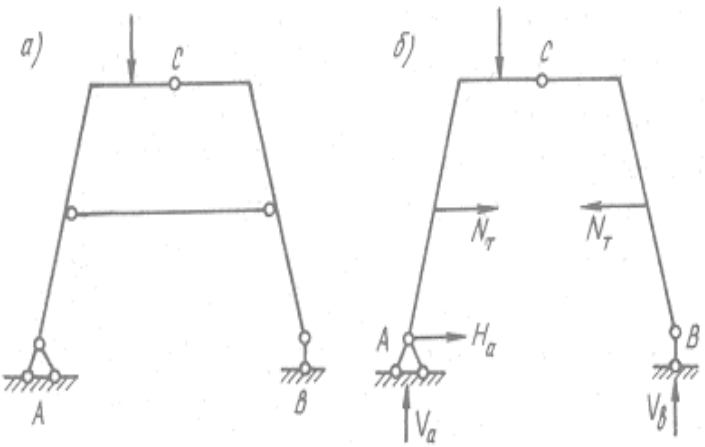
5.6. Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларни ҳисоблаш. Ядро моментлари

Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларнинг ҳисоби тортқичсиз системалар ҳисобидан бироз фарқ қилади. Бу тафовутни 5.11- расм, *а* — да тасвирланган арка мисолида кўриб ўтамиз.

Арканинг В таянчи шарнирли қўзғалувчидир. Ўртадаги С шарнирнинг мавжудлигини инобатга олсак, бу системага тортқичнинг зарурийлиги ўз-ўзидан аён бўлади. Чунки бу системанинг геометрик ўзгармаслигини айнан шу тортқич таъминлайди. Бошқача қилиб айтганда, *В* таянчи горизонтал йўналишда тортқич туфайли қўзғалмасдир. Демак, тортқични *В* таянчининг горизонтал стержени сифатида талқин этса ҳам бўлади. Бу эса хисоб жараёнида тортқичсиз арка (5.11- расм, *б*) учун берилган формулалардан бемалол фойдаланиш имконини беради. Тортқичдаги зўриқиш горизонтал таянч реакцияси H_b га тенг бўлганлиги сабабли тортқичли арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишлар тортқичсиз арка кўндаланг кесимларидаги зўриқишларга тенг бўлади. Шунингдек, тортқичли ва тортқичсиз аркаларнинг таъсир чизиқларида ҳам ҳеч қандай тафовут бўлмайди.



5.11- расм



5.12- расм

Баъзан уч шарнирли арка ва рамаларда тортқич таянчдан юқорироққа ўрнатилади (5.12- расм, *а*). Тортқични ташлаб юбориб, ўрнига қарама-қарши йўналган кучлар N_T қўямиз (5.12- расм, *б*). Кучларнинг қиймати тортқичдаги

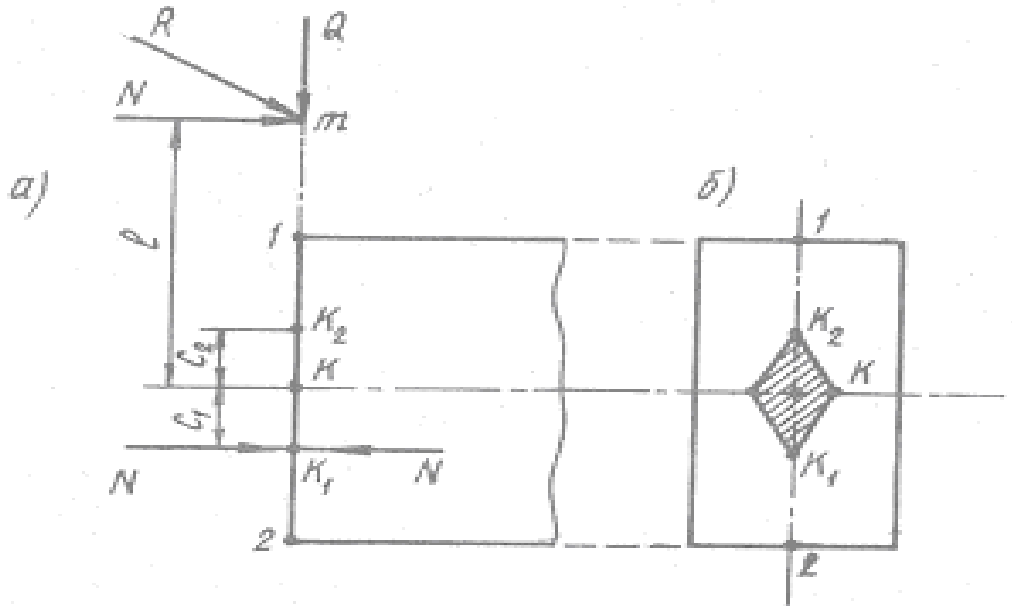
зўриқишга тенг бўлади. Бу ерда асосий масала ана шу зўриқишни аниқлашдан иборатдир. Раманинг таянч реакциялари статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилади.

N_T нинг қиймати С шарнирига нисбатан чап ёки ўнг томонда жойлашган кучларнинг моментлари йиғиндисини ифодаловчи тенгламалар $\sum_{chap} M_c = 0$ ёки $\sum_{o'ng} M_c = 0$ дан топилади.

N_T аниқлангач, арка ёки раманинг исталган кесимидаги ички кучлар тортқичсиз система учун берилган формулалардан фойдаланиб топилади.

Ядро моментлари ва нормал кучланишлар. Материаллар қаршилиги фанидан маълумки, номарказий сиқилишда кесимнинг четки нуқталарида ҳосил бўладиган энг катта ва энг кичик нормал кучланишлар қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$



5.13 –расм

Бу ерда F — элементнинг кўндаланг кесим юзаси; W — кўндаланг кесимнинг қаршилик моменти; N ва M — кесимга таъсир этувчи бўйлама куч ва эгувчи момент.

Арка кесимининг четки нуқталаридаги номаълум кучланишларни аниқлашда ядро моментларидан фойдалансак, масала анча осонлашади.

Арка кесимининг энг четки нуқталари 1 ва 2 да ҳосил бўладиган нормал кучланишларни аниқлайлик (5.13- расм, *а*). Арканинг чап қисмини ўнг қисмига бўлган таъсирини *m* нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи R орқали белгилайлик. Тенг таъсир этувчи куч R ни бўйлама N ва кўндаланг Q ташкил этувчиларга ажратамиз.

1- нуқтадаги нормал кучланишни кесим ядроси орқали аниқлаймиз (5.13-расм, *б*). Маълумки, бўйлама сиқувчи куч — ядронинг ҳошиясига қўйилса, кесим қирғоқларида нормал кучланиш нолга тенг бўлади. Бинобарин, бўйлама куч кесим ядросининг K_1 нуқтасига қўйилса, 1- нуқтадаги нормал кучланиш ноль бўлади.

Кесим ядросининг K_1 нуқтасига ўзаро тенг, аммо қарама-қарши йўналган N кучини қўямиз. Бу кучлардан бири *m* нуқтасига қўйилган N кучи билан жуфт куч, яъни момент ҳосил қилади:

$$M_{k1} = N(l + C_1)$$

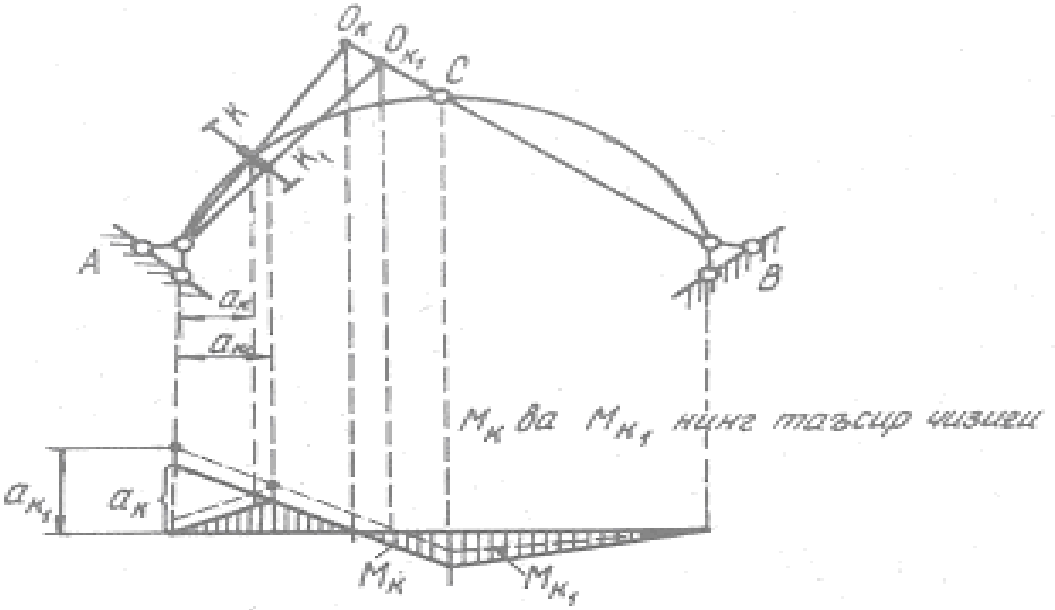
иккинчиси эса 1 — нуқтада нолга тенг бўлган кучланиш ҳосил қилади. Натижада 1- нуқтадаги кучланиш: σ фақат эгувчи момент M_{k1} орқали ифодаланади: $\sigma_1 = \frac{M_{k1}}{W}$; бу ердаги M_{k1} — я д р о м о м е н т и деб аталади.

2- нуқтадаги кучланишни ҳам ядро моменти орқали топса бўлади:

$$\sigma_2 = \frac{M_{k2}}{W} \quad \text{бу ерда} \quad M_{k2} = N(l + C_2).$$

5.14- расмда *К* кесимидаги эгувчи моменти M_k ва ядро моменти M_{k1} нинг таъсир чизиқлари берилган. Ҳар иккала таъсир чизиғи ноль нуқтаси усулида қурилган. Графикни ясаш тартиби ҳар иккала момент учун бир хил. Асосий фарқ O_{k1} нуқтасини аниқлашда намоён бўлади. Агар O_k нуқтасини топишда АК нуқталари бирлаштирилса, O_{k1} нуқтасини топишда AK_1 нуқталари туташтирилади. Шунинг эвазига ноль нуқталар орасида озгина фарқ бўлади. Бу

фарқ ўз навбатида таъсир чизиқлари ординаталари орасидаги тафовутга олиб келади.



5.14- расм

5.7. Уч шарнирли аркасимон фермаларни ҳисоблаш

Аркасимон фермалар тузилиш жиҳатидан фермаларни, ишлаш жараёни жиҳатидан аркаларни эслатади. Шунинг учун ҳам уларни ҳисоблашда баъзан аркага, баъзан фермага хос бўлган қоидалардан фойдаланилади. Муҳими шундаки, уч шарнирли аркасимон фермалар керкили (распорли) системаларга киради, яъни буларда ҳам вертикал кучлар таъсирида горизонтал реакция кучлари пайдо бўлади (5.15- расм, *а*). Керки кучларини шарнирли қўзғалмас таянчлар қабул қилади. Аркасимон ферманинг икки диски қулф шарнири С воситасида бириктирилади. Расмдан кўриниб турибдики, дисклар яхлит эмас панжародор қилиб ферма шаклида ишланган.

5.15- расм, *а* — да берилган уч шарнирли аркасимон ферманинг ҳисоби билан танишиб чиқамиз.

Берилган системанинг вертикал ва горизонтал реакциялари яхлит арканинг реакциялари каби аниқланади. Масалан, чап таянчдан *x* масофада бирлик куч *P= 1* қўйилган бўлса, V_a ва V_b реакциялари қуйидагича топилади:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

Керки кучи H қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$H = \frac{M_c^0}{f};$$

бу ерда M_c^0 — аркага тенг узунликка эга бўлган оддий балканинг C кесимидаги момент.

V_a, V_b ва H нинг таъсир чизиқлари 5.15- расм, *б, в, г* - да тасвирланган.

Уч шарнирли аркасимон ферманинг 1 — 2 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизиғини қурамиз (5.15- расм, *а*). Фермани 1 — 1 кесими бўйлаб қирқамиз. Зўриқиши изланаётган стержень (1 — 2) учун K нуқта момент нуқтаси ҳисобланади. $N_{1,2}$ ни аниқлаш учун K нуқтага нисбатан чап томонда ётган кучлардан моментлар йиғиндисини ёзамиз (бунда бирлик куч кесимдан ўнгда деб фараз этамиз):

$$\sum M_k = V_a a_k - Hy_k - N_{12}h = 0;$$

бу ердан

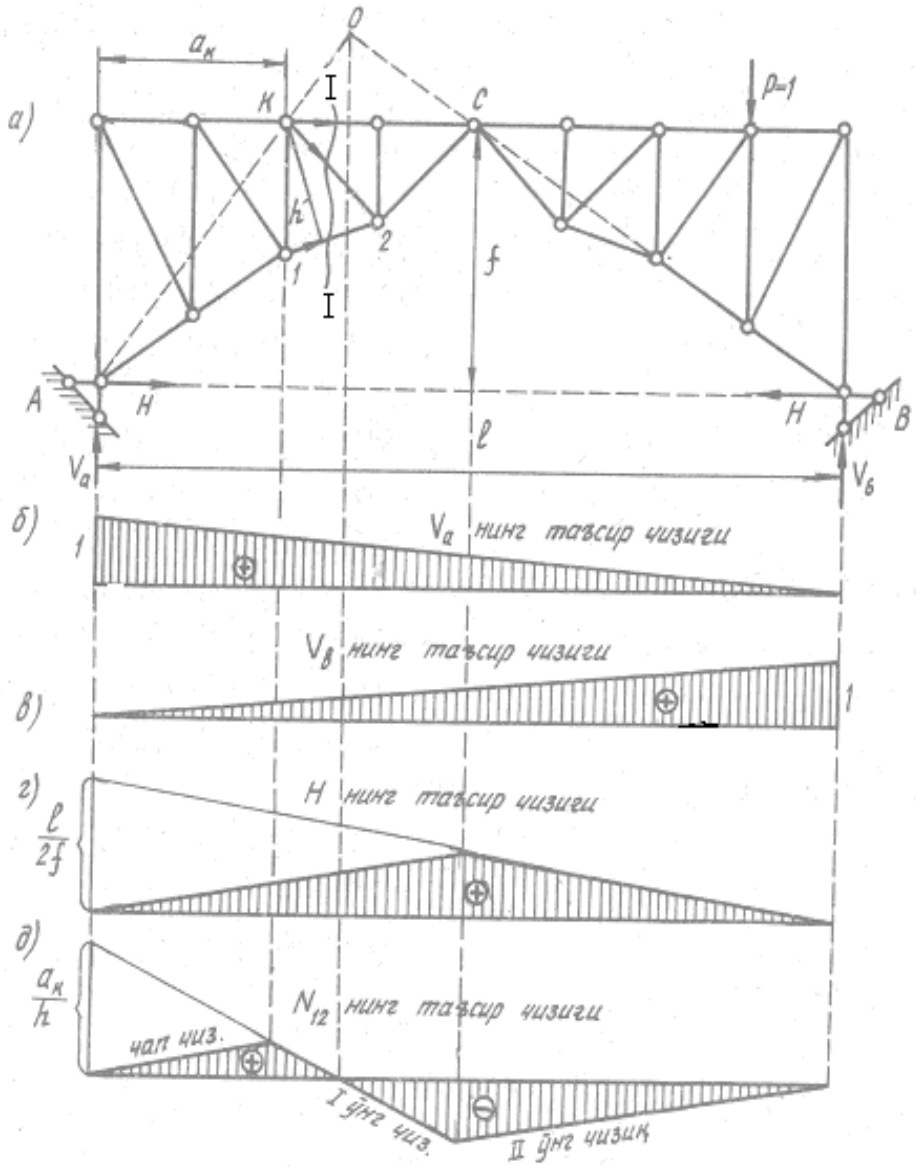
$$N_{12} = \frac{V_a a_k - Hy_k}{h}.$$

Агар момент нуқтаси K ни арканинг K кесими деб фараз этсак ҳамда a_k ва y_k ларни шу кесимнинг координаталари деб олсак, касрнинг сурати аркавий момент M_k^{ar} бўлади. У ҳолда зўриқиш

$$N_{12} = \frac{M_k^{ar}}{h}$$

ифодаси билан аниқланади.

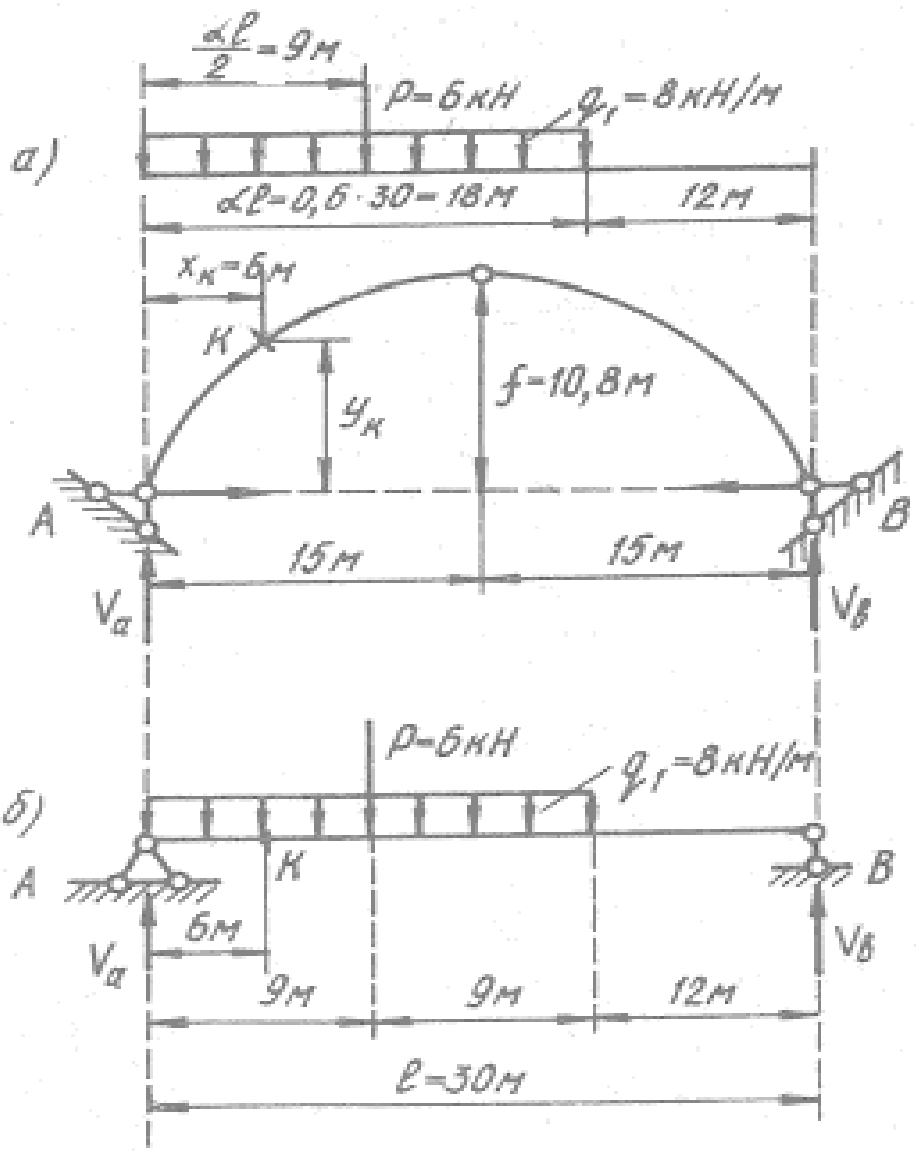
Демак, ферма стерженидаги зўриқиш N_{12} нинг таъсир чизиғини аркавий момент M_k^{ar} орқали қурса бўлади. Бунинг учун арка моменти таъсир чизиқларини h га қисқартирилса кифоя.



5.15- расм

Арканинг *К* кесими учун моментнинг таъсир чизиғини қуришда *А* таянчи остига a_k масофани ўлчаб қўйилар эди. Бу сафар шу масофани *h* маротаба кичрайтириб қўямиз (5.15- расм, *д*). Қолган ишлар уч шарнирли аркадаги ишлар билан айнан бир ҳилдир.

Мисол. Уч шарнирли арканинг *К* кесимидаги эгувчи момент, кўндаланг ва бўйлама кучлар аналитик усулда ҳисоблансин. Айни шу миқдорлар таъсир чизиқлари орқали ҳам аниқлансин. Арка ўқи парабола бўлиб, куч ва ўлчамлар шаклда берилган (5.16- расм, *а*).



5.16- расм

Ечиш. Ҳисобни таянч реакцияларини аниқлашдан бошлаймиз:

$$\sum M_A = -V_B \cdot 30 + q_1 \cdot 18 \cdot 9 + P \cdot 9 = 0;$$

бундан $V_B = 45\,kN$;

$$\sum M_B = V_A \cdot 30 - P \cdot 21 - q_1 \cdot 18 \cdot 21 = 0;$$

бундан $V_A = 105\,kN$;

$$\sum M_c^{chap} = V_A \cdot 15 - P \cdot 6 - q_1 \cdot 15 \cdot 7{,}5 - H_A f = 0$$

бундан $H_A = 59{,}167\,kN$.

Кучлар вертикал бўлганлиги учун $H_A = H_B = H = 59{,}167\,kN$.

Текшириш. $\sum Y = V_A - P - q_1 \cdot 18 + V_B = 105 - 6 - 8 \cdot 18 + 45 = 0.$

Аналитик усулда K кесимидаги ички кучлар (M_k, Q_k, N_k) ни аниқлаймиз. Эгувчи момент қуйидаги формуладан (5.3) топилади:

$$M_k = M_k^0 - Hy_k.$$

Арканинг ўқи парабола бўлганлиги учун y_k ординатаси қуйидаги тенгламадан топилади:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x_k (l - x_k) = \frac{4 \cdot 10{,}8}{30^2} \cdot 6 (30 - 6) = 6{,}912\, m.$$

Оддий балканинг (5.16- расм, *б*) K кесимидаги момент

$$M_k^0 = V_A \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 = 105 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 486\ k\,N\,m.$$

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги момент

$$M_k = 486 - 59{,}167 \cdot 6{,}912 = 77{,}04\, k\,N\,m$$

Кўндаланг кучни аниқлаш формуласи (5.6):

$$Q_k = Q_k^0 \cos\varphi_k - H \sin\varphi_k.$$

Арка ўқининг тенгламасидан фойдаланиб, φ_k бурчакни аниқлаймиз (5.16-расм, а):

$$tg\varphi_k = \frac{dy_k}{dx_k} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 10 \cdot 8}{30^2}(30 - 2 \cdot 6) = 0{,}864,$$

бундан $\varphi_k = 40^0 50'$; $\sin\varphi_k = 0{,}6538$; $\cos\varphi_k = 0{,}7566$.

Оддий балканинг (5.16- расм, *б*) K кесимидаги кўндаланг куч

$$Q_k^0 = V_A - q_1 \cdot 6 = 105 - 8 \cdot 6 = 57\, kN$$

Арканинг K кесимидаги кўндаланг куч:

$$Q_k = 57 \cdot 0{,}7566 — 59{,}167 \cdot 0{,}6538 = 4{,}443 \text{ kN}.$$

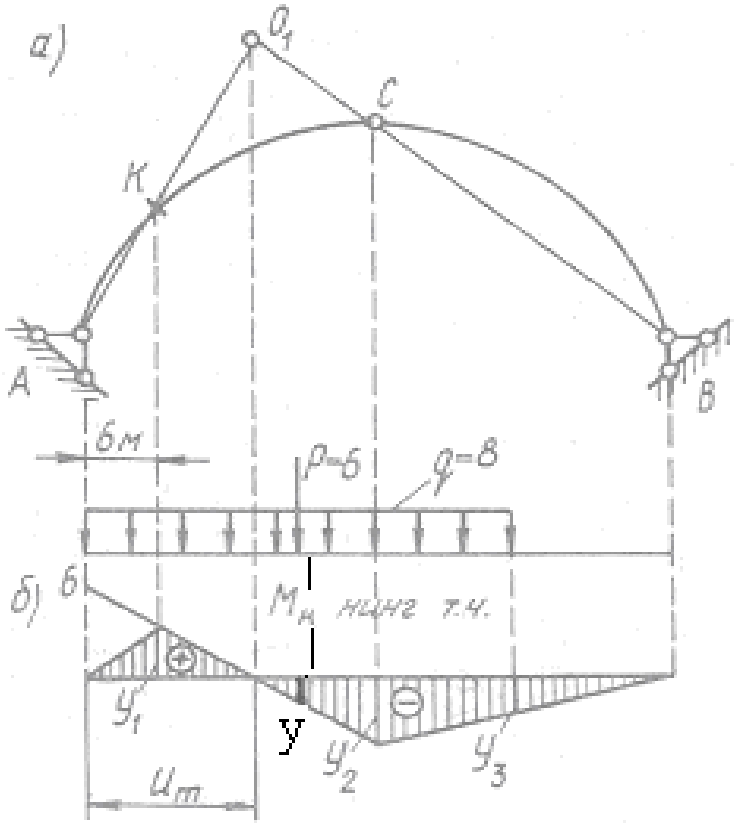
Арканинг K кесимидаги бўйлама кучни аниқлаймиз (5.6):

$$N_k = Q_k^0 \sin\varphi_k + H \cdot \cos\varphi_k = 57 \cdot 0{,}6538 + 59{,}167 \cdot 0{,}7566 = 82{,}033\, kH.$$

Шундай қилиб, уч шарнирли арканинг K кесимидаги ички кучларни аналитик усулда аниқладик. Энди шу миқдорларни таъсир чизиқлари ёрдамида аниқлаймиз.

M_k нинг таъсир чизиқларини қуриш

Таъсир чизиғини ноль нуқтаси усулида қурамиз. Бунинг учун A таянч билан K кесим тўғри чизиқ ёрдамида туташтирилади. B таянч C шарнир билан туташтирилади. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси (0_1) эгувчи моментнинг ноль нуқтаси бўлади, чунки $P=1$ куч шу нуқтада бўлганда K кесимдаги эгувчи момент нолга тенг бўлади (5.17- расм, *а*).



5.17- расм

Координата ўқининг A таянч остидаги нуқтасидан K кесимигача бўлган масофа (6м) ни ўқдан юқорига масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани координата ўқидаги O_1 нуқтанинг проекцияси билан туташтириб, C шарнир проекциясигача давом эттирамиз. Бу тўғри чизиққа K кесимининг проекциясини туширамиз ва уни A таянч остидаги координата ўқининг ноль нуқтаси билан туташтирамиз. C шарнир остидаги ординатани B таянч остидаги координата ўқининг ноль нуқтаси билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график M_k нинг таъсир чизиғи деб аталади (5.17- расм, *б*). A таянчдан 0_1 нуқтагача бўлган масофани u_M билан белгилаб, уни қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$u_M = \frac{2fl}{l \cdot \frac{y_e}{x_k} + 2f} = \frac{2 \cdot 10{,}8 \cdot 30}{30 \cdot \frac{6 \cdot 912}{6} + 2 \cdot 10{,}8} = \frac{648}{56{,}16} = 11{,}538 \text{ м}$$

Таъсир чизиқлари ёрдамида зўриқишларнинг қиймати қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$M = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i .$$

Бизнинг мисол учун формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_k = q(\omega - \omega_1 - \omega_2) - P \cdot y.$$

Бу ерда P, q — аркага қўйилган қўзғалмас юклар;

y — таъсир чизиғида Р кучи остидаги ордината;

ω — шу таъсир чизиғида ёйилган куч остидаги қисмнинг юзаси.

Ташқи кучлар остидаги ординаталар, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади. Масалан,

$$\frac{6}{11{,}538} = \frac{y_1}{5{,}538}; \frac{6}{11{,}538} = \frac{y}{2{,}538}; \frac{6}{11{,}538} = \frac{y_2}{3{,}462}; \frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12};$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 11{,}538}{2} = 16{,}615;\ \omega_1 = \frac{y_2 \cdot 3{,}462}{2} = 3{,}116;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 4{,}860.$$

Шундай қилиб, К кесимдаги эгувчи момент:

$$M_k = 8 \cdot (6{,}615 - 3{,}116 - 4{,}860) - 6 \cdot 1{,}320 = 69{,}12 - 7{,}92 = 77{,}04\,kNm$$

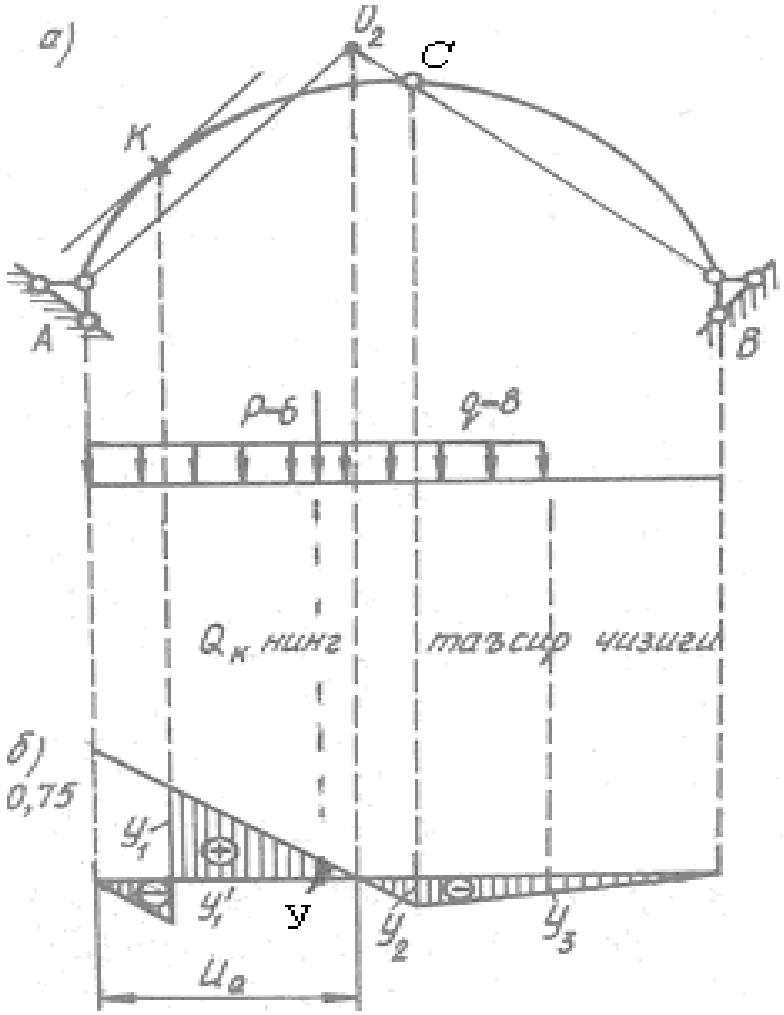
(Аввалгиси билан таққосланг).

Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш (5.18- расм, а)

Кўндаланг куч учун ноль нуқтаси ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун *K* кесимга уринма ўтказамиз. Бу уринмага параллел қилиб *A* таянчдан тўғри чизиқ ўтказамиз ва бу тўғри чизиқни *B* таянч билан *C* шарнирни туташтирувчи чизиққача давом эттирамиз. Кесишиш нуқтаси 0_2 кўндаланг кучнинг ноль нуқтаси бўлади, чунки *P=1* бирлик куч шу нуқтада турганда *K* кесимдаги кўндаланг куч нолга айланади.

Кўндаланг куч таъсир чизиғини қуриш учун ихтиёрий масофада координата ўқи олинади ва бу ўққа *A, B* таянчлари, *C* шарнири ва 0_2 нуқтасининг проекциялари туширилади. А таянчи остига $\cos\varphi_k = 0{,}7566$ ни масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани ноль нуқта билан тўғри чизиқ ёрдамида туташтирамиз. Координата ўқининг *A* таянчи остида бу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва уни *K* кесимгача давом эттирамиз. Сўнгра бу икки параллел тўғри чизиққа *K* кесимининг проекцияси туширилади. *C* шарнир остидаги ордината *B* таянчининг ноль ординатаси билан туташтирилади. Кейин шаклда кўрсатилгандек штрихланади, ҳосил бўлган график Q_k нинг таъсир чизиғи бўлади (5.18- расм, *б*). Кўндаланг кучнинг ноль нуқтасигача бўлган масофа u_Q қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$u_Q = \frac{2fl}{2f + l \cdot tg\varphi_k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 30}{2 \cdot 10{,}8 + 30 \cdot 0{,}864} = \frac{648}{47{,}52} = 13{,}636\,m.$$



5.18- расм

Кўндаланг кучнинг қийматини қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$Q_k = +q(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + P \cdot y.$$

Зарур ординаталарни учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{0{,}7566}{13{,}636} = \frac{y_1}{7{,}636};\ \ y_1 = 0{,}424;\ \ y_1' = 0{,}7566 - y_1 = 0{,}3326;$$

$$\frac{0{,}7566}{13{,}636} = \frac{y}{4{,}636};\ \ y = 0{,}257;\ \ \frac{0{,}7566}{13{,}636} = \frac{y_2}{1{,}364};\ \ y_2 = 0{,}076;$$

$$\frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12};\ \ y_3 = 0{,}8 \cdot y_2 = 0{,}061$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 7{,}636}{2} = 1{,}619\,;\ \omega_1 = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0{,}938\,;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 \cdot 1{,}364}{2} = 0{,}052\,;\ \omega_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 0{,}206$$

Кўндаланг куч қиймати

$$Q_k = 8\,(1{,}619 - 0{,}998 - 0{,}052 - 0{,}206) + 6 \cdot 0{,}257 = 4{,}446\,kH\,.$$

N_k нинг таъсир чизиғини қуриш (5.19- расм, а).

Бўйлама кучнинг ноль нуқтасини аниқлаш учун *A* таянчидан *K* кесимига ўтказилган уринмага тик чизиқ ўтказамиз ва уни *B* таянчи билан *C* шарнирни туташтирувчи тўғри чизиқ билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишув нуқтаси бўйлама кучнинг ноль нуқтаси (O_3) бўлади.

Ихтиёрий масофада координата ўқи олиниб, унга *A*, *B* таянчлари, *C* шарнири ва O_3 нуқтасининг проекциялари (*a*, *b*, *c* ва *d*) туширилади. *«a»* нуқтадан $sin\varphi_k = 0{,}6538$ масофа (aa_1) ўлчанади ва бу масофа *«d»* нуқтаси билан туташтирилади. *«a_1d»* чизиғини *«c_1»* нуқтасигача давом эттириб, бу ординатани *«b»* нуқтаси билан бирлаштирилади. *«a»* нуқтасидан *«dc_1»* чизиғига параллел чизиқ ўтқазиб, *«ak»* тўғри чизиғини ҳосил қиламиз. *K* кесим остида бўйлама куч $sin\varphi_k$ = 0,6538 га тенг миқдорда сакрайди. Штрихланган шакл N_k нинг таъсир чизиғи бўлади (5.19- расм, *б*).

Бўйлама кучнинг ноль нуқтасигача бўлган масофа

$$u_N = \frac{l}{\frac{l}{2f} \cdot ctg\varphi_k - 1} = \frac{30}{\frac{30}{2 \cdot 10{,}8} \cdot \frac{0{,}7566}{0{,}6538} - 1} = \frac{30}{0{,}6072} = 49{,}407\,m$$

га тенг бўлади.

Таъсир чизиғи ёрдамида бўйлама кучнинг қийматини аниқлаймиз.

$$N_k = q_1(\omega + \omega_1 + \omega_2) + P \cdot y$$

Керакли ординаталарни аниқлаймиз. Учбурчаклар ўхшашлигидан:

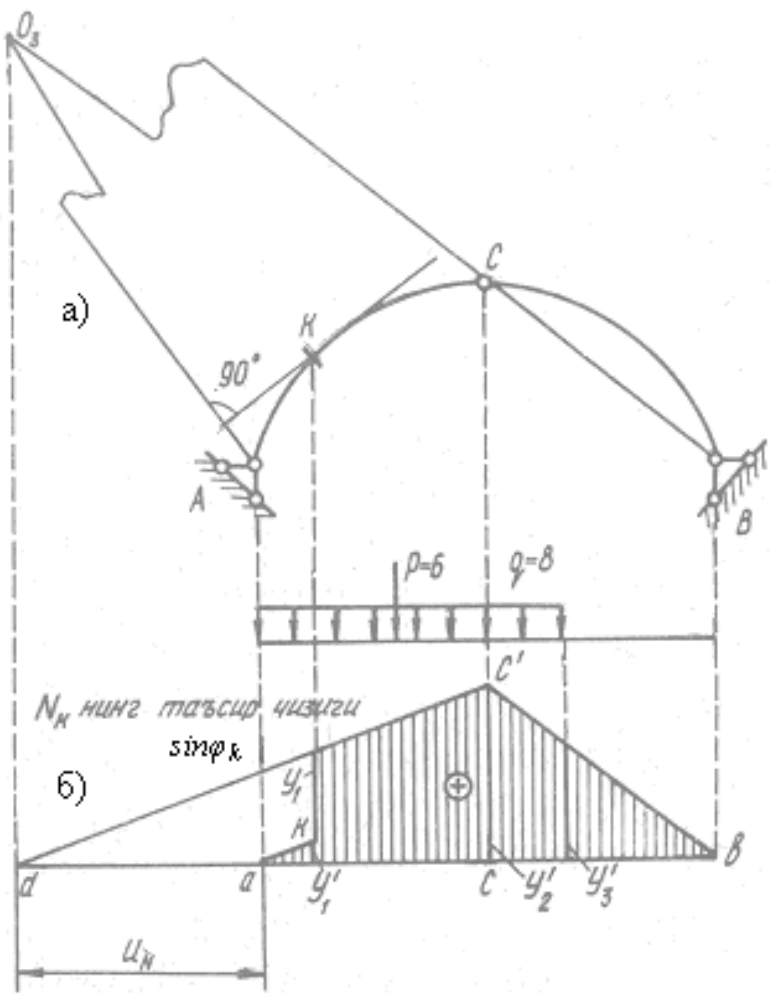
$$\frac{0,6538}{49,407}=\frac{y_2}{64,407};\ \frac{0,6538}{49,407}=\frac{y_1}{55,407};\frac{0,6538}{49,407}=\frac{y}{58,407};$$

$$y_2=0,852;\ y_1=0,733;\ y=0,773;$$

$$y_1^{/}=y_1-0,6538=0,0792;\ y_3=0,8\cdot y_2=0,682.$$

Юзалар:

$$\omega=\frac{y_1\cdot 6}{2}=0,238;\ \omega_1=\frac{y_1+y_2}{2}\cdot 9=7,133;\ \omega_2=\frac{y_2+y_3}{2}\cdot 3=2,301.$$



5.19- расм

Бўйлама кучнинг қиймати

$$N_k = 8\ (0,238 - 7,133 - 2,301) + 6\cdot 0,773 = 77,376 - 4,638 = 82,104\ kN\ .$$

Шундай қилиб, таъсир чизиқлари ёрдамида ички кучларнинг қуйидаги қийматларини аниқладик:

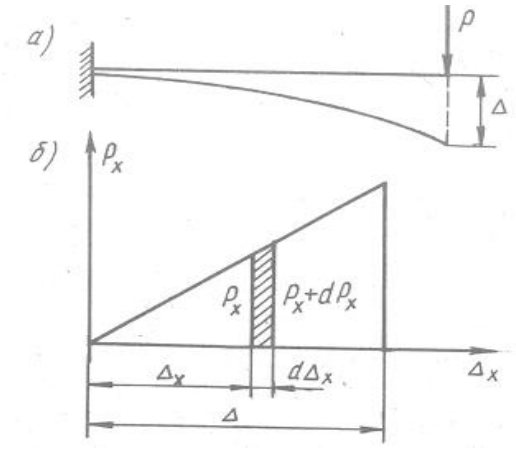
$$M_k = 77{,}740\ kN\,m;\ Q_k = 4{,}446\,kN;\ N_k = 82{,}014\,kN.$$

Ички кучларнинг бу қийматлари аналитик усулда аниқланган қийматлар билан бир хилдир.

6- БОБ
КЎЧИШЛАР НАЗАРИЯСИ

6.1. Кўчишлар ва ишлар ҳақида тушунча

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашда мувозанат тенгламаларидан ташқари кўчишлар тенгламаларини тузишга ва ечишга тўғри келади. Бундай тенгламаларни тузиш учун аввало иншоотларнинг деформацияларини аниқлашни билиш зарур. Кўчишларни аниқлаш масаласи фақат статик ноаниқ системаларгагина тааллуқли бўлиб қолмай, балки статик аниқ системаларга ҳам алоқадордир. Статик аниқ системалардан ташкил топган қурилиш конструкцияларининг деформацияси меъёридан ортиб кетмаслиги зарур. Бу масала ҳам кўчишлар орқали ҳал этилади. Шундай қилиб, кўчишларни аниқлаш масаласи қурилиш механикасининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.



6.1- расм

Бирор нуқтанинг *кўчиши* деганда, иншоотнинг деформацияси жараёнида унинг (нуқтанинг) координаталарининг ўзгариши тушунилади. Кўчишларни биз Гук қонуни чегарасида аниқлаймиз, яъни кўчиши аниқланаётган кесимнинг кучланишлари пропорционаллик чегарасида ётади, деб фараз этамиз.

Кўчишларни аниқлашда кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидаси амал қилади. Бу қоидага кўра бир неча кучларнинг бир йўла қўйилгандаги натижаси ҳар бир кучни алоҳида қўйилгандаги натижалар йиғиндисига тенг бўлади.

Ташқи кучлар иши. Кўчишларни аниқлашнинг умумий усули ташқи кучлар иши назариясига асосланади, яъни ишлар орқали кўчишларни аниқласа бўлади.

Эластик системага аста-секин (статик равишда) қўйилган ташқи куч P нинг бажарган ишини аниқлаймиз (6.1- расм, *а*). Деформациянинг кичик миқдорларида эластик системага кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидасини қўллаш мумкин, бинобарин, алоҳида нуқталарнинг кўчишлари уларни вужудга келтирувчи кучларга тўғри пропорционал бўлади. Гук қонунига кўра бу боғланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta = \alpha P.$$

Бу ерда Δ — таъсир этувчи куч P йўналишидаги кўчиш;

α — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, иншоотнинг материали, схемаси ва ўлчамларига боғлиқ миқдордир.

P кучининг оралиқ қийматини P_x , унга мос бўлган кўчишни Δ_x деб белгилаймиз, (6.1- расм, *б*).

P кучини чексиз кичик миқдор dP_x га орттирамиз. Натижада кўчиш ҳам $d\Delta_x$ масофага ортади. Бунда ташқи куч қуйидаги элементар ишни бажаради:

$$dA = (P_x + dP_x)\,d\Delta_x = P_x\,d\Delta_x.$$

Ташқи куч бажарган тўлиқ иш бу ифодани интеграллаш йўли билан аниқланади.

$$A = \int_0^P P_x\,d\Delta_x.$$

Гук қонунига биноан $d\Delta_x = \alpha\,dP_x$ эканлигнни ҳисобга олсак,

$$A = \int_0^P \alpha P_x\,dP_x = \frac{\alpha P^2}{2} = \frac{1}{2}P\Delta$$

келиб чиқади.

Демак, ташқи кучлар *(P)* бажарган ҳақиқий иш куч билан шу куч вужудга келтирган кўчишнинг кўпайтмасини ярмига тенг экан. Бу *Клапейрон теоремаси* деб аталади. Агар иншоотга бир неча кучлар P_1, P_2 … P қўйилган бўлса, ташқи кучлар бажарган тўлиқ иш қуйидагича бўлади:

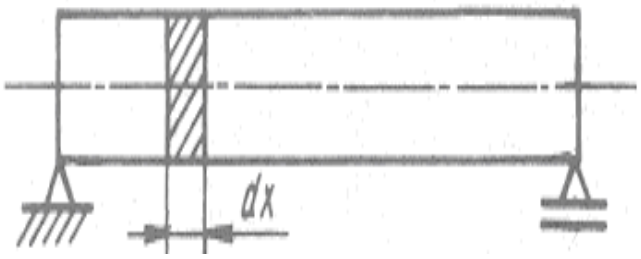
$$A = \frac{1}{2}\sum P_i \Delta_i .$$

Ташқи кучларнинг бу иши иншоотда потенциал энергия тарзида тўпланади.

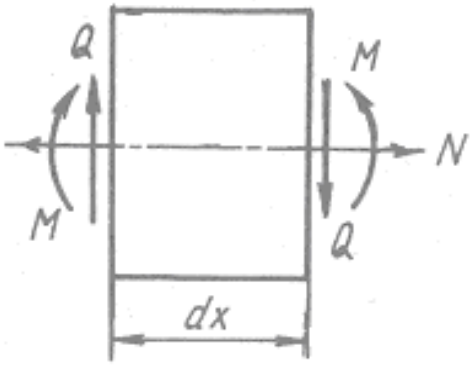
Гарчи Клапейрон теоремаси биргина куч мисолида берилган бўлса-да, аслида унинг қўлланиш чегараси жуда кенг. Ташқи куч деганда биргина йиғиқ куч эмас, балки турли кучлар системаси тушунилади. Кўчишлар ҳам фақат чизиқли эмас, балки бурчакли бўлиши ҳам мумкин. Хулоса қилиб айтганда, куч деганда эластик системага таъсир этувчи ҳар қандай кучлар мажмуаси тушунилади ва *«умумлашган куч»* деб аталади. Бу куч таъсирида вужудга келган кўчиш *«умумлашган кўчиш»* деб юритилади.

Ички кучлар иши. Кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этса ҳам бўлади. Ички кучлар деганда конструкция элементларида вужудга келадиган эгувчи момент *M*, кўндаланг куч *Q* ва бўйлама куч *N* тушунилади.

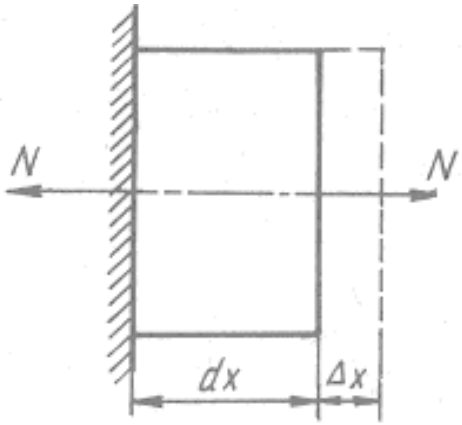
Балкадан (6.2- расм) чексиз кичик *dx* элементини ажратиб оламиз (6.3-расм). Ажратилган элементга *M, Q* ва *N* кучлари таъсир этади. Бу кучлар бутун стерженга нисбатан ички куч, ажратилган элеменга нисбатан эса ташқи куч деб қаралади. Буларнинг ҳар бирини dx элементига бўлган таъсирини алоҳида равишда кўриб ўтамиз.



6.2- расм



6.3- расм



6.4- расм

Энг аввал ажратилган элементга бўйлама куч N нинг таъсири билан танишамиз (6.4- расм). Элементнинг чап томондаги кесими қўзғалмас деб фараз этсак, бўйлама куч таъсирида элементнинг ўнг томондаги кесими

$$\Delta x = N\,d\,x\,EF$$

масофага кўчади. Ушбу

кўчишни вужудга келишида бўй-лама куч қуйидаги ишни бажаради.

$$dA_N = \frac{1}{2} N\Delta_x = N\frac{Ndx}{2EF}$$

Бу ерда EF — стержень кўндаланг кесимининг сиқилиш ёки чўзилиш-даги бикирлигидир.

Δ_φ бурчакли кўчишнинг ву-жудга келишида аста ортиб борувчи эгувчи момент қуйидаги миқдорда иш бажаради (6.5- расм):

$$d\,A_M = \frac{1}{2} M\Delta_\varphi = M\frac{M\,d_x}{2\,E\,J};$$

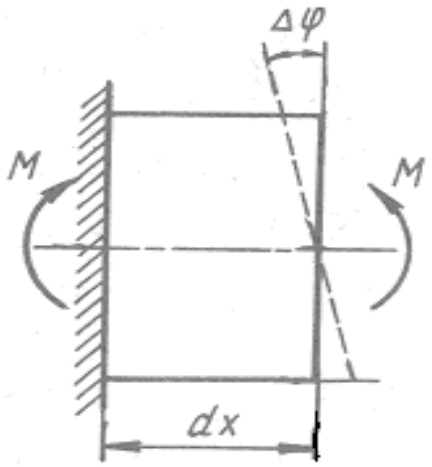
$$\Delta_\varphi = \frac{Mdx}{EJ}.$$

Ниҳоят ажратилган эле-ментга кўндаланг куч Q нинг таъсирини кўриб ўтамиз (6.6- расм). Агар элементнинг чап кесимини махкам-ланган деб қарасак, кўндаланг куч таъсирида унинг ўнг томондаги кесими

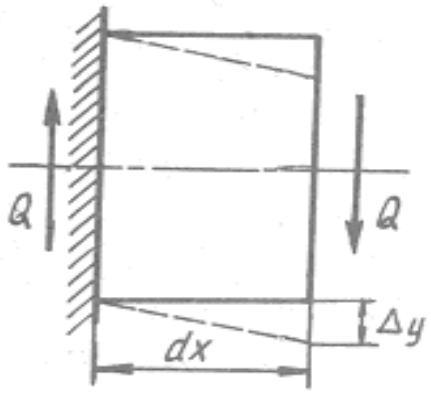
$$\Delta_y = \eta Q\,d\,x/GF$$

масофага силжийди. Бу ерда GF — кесимнинг силжишдаги бикирлиги. Δ_y силжишнинг вужудга келишида аста ортиб борувчи кўндаланг куч қуйидаги миқдорда иш бажаради

$$d\,A_Q = \frac{1}{2} Q \Delta_y = Q \frac{Qdx}{2GF} \eta \,.$$



6.5- расм



6.6- расм

Бу ерда η — стерженнинг кўндаланг кесими шаклига боғлиқ коэффициент бўлиб, қуйидаги формуладан топилади:

$$\eta = \frac{F}{J^2} \int \frac{S^2}{b^2} d\,F \,.$$

Тўғри тўртбурчакли кесим учун η = 1,2. Айлана учун η = 10/9.

Ажратилган dx элементга учала куч (N, M, Q) бир вақтнинг ўзида таъсир этса, тўлиқ иш қуйидагича топилади:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2}\left(N \frac{Ndx}{EF} + M \frac{Mdx}{EJ} + Q \frac{Qdx}{GF} \eta \right).$$

Стерженларнинг барча участкалари бўйича бажарилган тўлиқ ишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$A = \frac{1}{2}\left(\sum \int_0^l M \frac{Mdx}{EJ} + \sum \int_0^l N \frac{Ndx}{EF} + \sum \int_0^l Q \frac{Qdx}{QF} \eta \right) \qquad (6.1)$$

ёки

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta \qquad (6.2)$$

Шундай қилиб, кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этдик.

Эластик системаларда ташқи кучлар бажарган иш деформациянинг потенциал энергияси сифатида тўпланади. Ҳар қандай эластик жисм ташқи кучлар вужудга келтирган энергияни ўзида жамлаш ҳусусиятига эга. Жисмни юкдан бўшатиш жараёнида потенциал энергия иш бажаради, Мана шу ишни жисмдаги ички кучлар (*M, Q, N*) бажаради. Энергиянинг сакланиш қонунига биноан ташқи кучлар бажарган иш система деформациясининг потенциал энергиясига (демак, ички кучлар бажарган ишга) тенг бўлади.

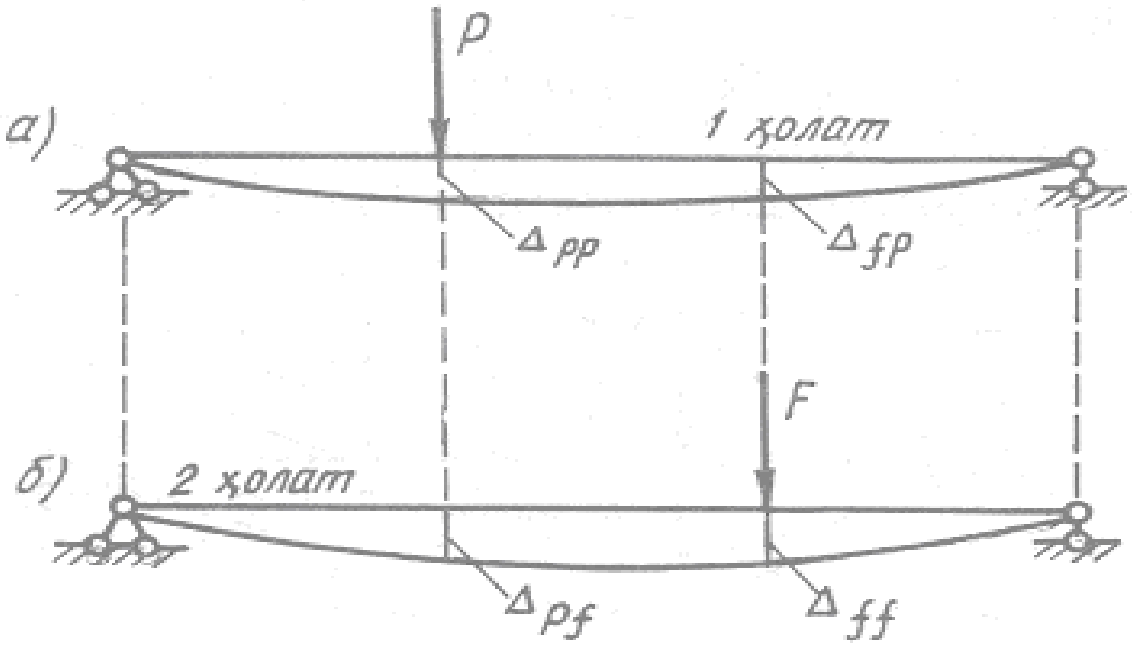
6.2. Ишлар ва кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теоремалар

Икки хил куч таъсирида мувозанатда бўлган эластик системанинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз. Биринчи ҳолатда системага *P* кучи, иккинчи ҳолатда *F* кучи таъсир этади дейлик (6.7- расм).

Системанинг кўчишларини Δ_{pf} тарзида белгилаймиз. Бунда биринчи индекс кўчаётган нуқта ва унинг йўналишини, иккинчи индекс эса кўчишни вужудга келтираётган сабабни англатади. Ўқилиши бундай: *P* кучи қўйилган нуқтанинг шу куч (яъни *P* кучи) йўналишида *F* кучи таъсирида вужудга келган кўчиш.

Δ_{pp} — *P* кучи йўналишида шу куч таъсирида вужудга келган кучиш дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида *P* кучи бажарган иш A_{pp} бўлсин. Ҳудди шунингдек, Δ_{ff} кўчишнинг вужудга келишида *F* кучи бажарган ишни A_{ff} деб белгилайлик. Агар ҳар иккала куч балкага статик таъсир этса, бу кучлар бажарган ишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$A_{pp} = \frac{1}{2} P\Delta_{pp} \quad ва \quad A_{ff} = \frac{1}{2} F\Delta_{ff}$$



6.7- расм

Ҳар иккала ишни ички кучлар орқали ифодаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A_{p\,p} = \sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_p^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_p^2 dx}{2GF} \eta;$$

$$A_{f\,f} = \sum \int_0^l \frac{M_f^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_f^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_f^2 dx}{2GF} \eta\,.$$

Энди ўша (6.7- расм) системага P ва F кучларининг олдинма-кейин қўйилиш жараёнини кўриб ўтайлик.

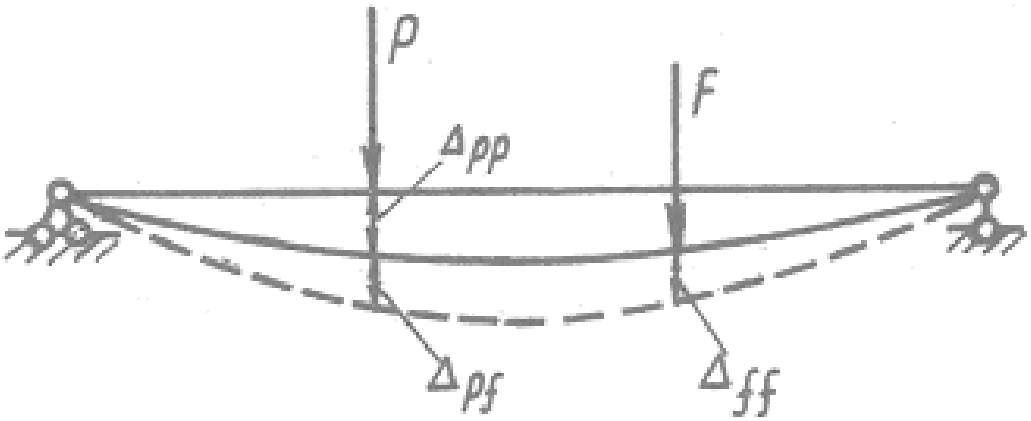
Аввал системага статик ортиб борувчи P кучи қўйилади, дейлик (6.8-расм). P кучи ўзининг тугал қийматига эришганда, системада 6.7- расм, *а* — да кўрсатилгандек вазият вужудга келади, яъни P кучи остида $\Delta_{p\,p}$ кўчиш ҳосил бўлади. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи $A_{p\,p} = P\Delta_{p\,p}/2$ га тенг бўлган иш бажаради. Шундан сўнг солқи системага F кучи қўйилади. Бу куч таъсирида система эгилишда давом этиб, 6.7- расм, *б.* — да кўрсатилган вазият вужудга келади. Бунда P кучи остида $\Delta_{p\,f}$ га тенг бўлган қўшимча солқилик ҳосил бўлади. F кучининг қиймати нолдан ўзининг тугал қийматига қадар ортиб

борганда, P кучининг қиймати ўзгармасдан, $A_{pf} = P\Delta_{pf}$ га тенг бўлган қўшимча иш бажаради. F кучиннг ўзи эса $A_{ff} = F\Delta_{ff}/2$ миқдорида иш бажаради. Шундай қилиб, системага кетма-кет равишда P ва F кучлари қўйилса, уларнинг бажарган тўлиқ иши

$$A = A_{pp} + A_{pf} + A_{ff} = \frac{1}{2}P\Delta_{pp} + P\Delta_{pf} + \frac{1}{2}F\Delta_{ff} \qquad (a)$$

га тенг бўлади.

Агар кучларнинг қўйилиш тартибини ўзгартирсак, яъни аввал F ва сўнгра P кучларини қўйсак, у ҳолда тўлиқ иш қуйидаги кўринишда ифодаланади:



6.8- расм

$$A = \frac{1}{2}F\Delta_{ff} + F\Delta_{fp} + \frac{1}{2}P\Delta_{pp}. \qquad (б)$$

Бироқ кучларнинг қўйилиш тартиби ўзгариши билан бажарилган тўлиқ ишнинг миқдори ўзгармайди. Шунга кўра (а) ва (б) ифодаларни тенглаштириб, қуйидаги ҳулосага эга бўламиз:

$$\boxed{P\Delta_{pf} = F\Delta_{fp}.}$$

Бу ерда $P\Delta_{pf}$ биринчи ҳолатдаги P кучининг шу йўналишда, иккинчи ҳолатдаги F кучидан ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир. $F\Delta_{fp}$ эса иккинчи ҳолатдаги F кучининг шу куч йўналишида, биринчи

ҳолатдаги *P* кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир (6.7- расм).

Шундай қилиб, биринчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида иккинчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган иши иккинчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида биринчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган ишига тенгдир.

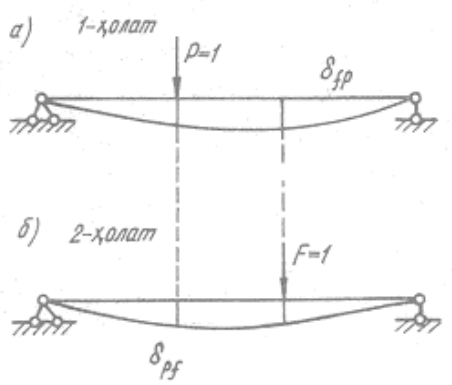
Бу хулоса ишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки унинг муаллифи Италия олими Энрико Бетти (1823 — 1892) теоремаси номи билан машҳурдир.

Энди кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема билан танишиб чиқамиз.

Бунинг учун яна балканинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз. Биринчи ҳолатда балкага *P=1* кучи, иккинчи ҳолатда эса *F=1* кучи қўйилган (6.9-расм).

Балкага қўйилган кучларнинг қиймати бирга тенг бўлганлиги сабабли балканинг ҳолатини б и р л и к х о л а т деб айтамиз.

Бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар δ билан, бирдан фарқли кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар эса Δ ҳарфи билан белгиланади. Шунга биноан биринчи ҳолатдаги кўчишни δ_{fp}, иккинчи ҳолатдаги кўчишни эса δ_{pf} тарзида белгиладик. Ҳар иккаласи ҳам бирлик кучлардан ҳосил бўлган *бирлик кучишлардир*.



6.9-расм

Бу икки ҳолат учун Бетти теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$P\delta_{pf} = F\delta_{fp}$$

Агар P=F=1 эканлигини эътиборга олсак,

$\delta_{fp} = \delta_{pf}$ келиб чиқади. (6.5)

Бу тенглик кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки Максвелл теоремаси деб аталади.

Мазкур, тенглик $P = F \neq 1$, бўлганда ҳам ўз кучини сақлайди ва қуйидагича ифодаланади:

$$\boxed{\Delta_{fp} = \Delta_{pf}} \qquad (6.6)$$

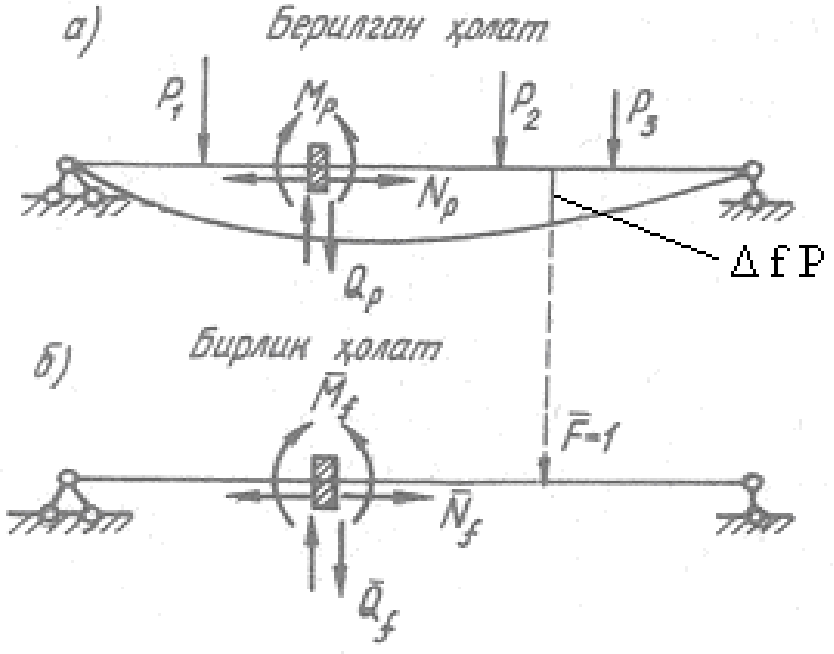
6.3. Кўчишларни аниқлаш учун Мор формуласи ва Верешчагин усули

Кўчишларни аниқлайдиган формулани келтириб чиқаришда бевосита ишлар учун чиқарилган формулалардан фойдаланамиз.

Бирор эластик системанинг, масалан, балканинг икки ҳолатини кўриб чиқамиз. Биринчи, яъни берилган ҳолатда балкага исталганча кучлар қўйилиши мумкин (6.10- расм, а). Иккинчи ҳолатда балкага бирлик куч $\bar{F} = 1$ қўйилади (6.10- расм, *б*).

Берилган кучлар таъсирида ҳосил бўлган Δ_{pf} кўчишнинг вужудга келишида иккинчи ҳолатдаги $\bar{F} = 1$ кучи қуйидаги ишни бажаради:

$$A_{fp} = \bar{F}\,\Delta_{fp} = 1\Delta_{fp} = \Delta_{fp}.$$



6.10- расм

A_{fp} ни ички кучлар орқали ифода этсак,

$$\Delta_{fp} = A_{fp} = \sum \int_0^l \bar{M}_f \frac{M_p dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_f \frac{N_p dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_f \frac{Q_p dx}{GF} \eta \qquad (6.7)$$

кўринишдаги кўчишларни аниқлаш формуласига, яъни *Мор формуласига* эга бўламиз.

Бу ерда M_p, N_P ва Q_p — берилган кучлардан ҳосил бўлган, $\bar{M}_f$, $\bar{N}_f$ *ва* $\bar{Q}_f$ бирлик кучдан ҳосил бўлган ички кучлардир.

Бирлик куч одатда кўчиши аниқланаётган нуқтага қўйилади. Агар чизиқли кўчиш (масалан, бирор нуқтанинг солқилиги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ куч қабул қилинади, агар бурчакли кўчиш (масалан, бирор кесимнинг оғиш бурчаги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ момент қабул қилинади. Ҳар иккала ҳолда ҳам бирлик куч кўчиши изланаётган нуқтага қўйилади.

Балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама ва кўндаланг кучлар таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади:

$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx. \qquad (6.8)$$

Оддий аркаларнинг кўчишларини аниқлашда эгувчи момент билан бўйлама кучнинг таъсири эътиборга олинса кифоя

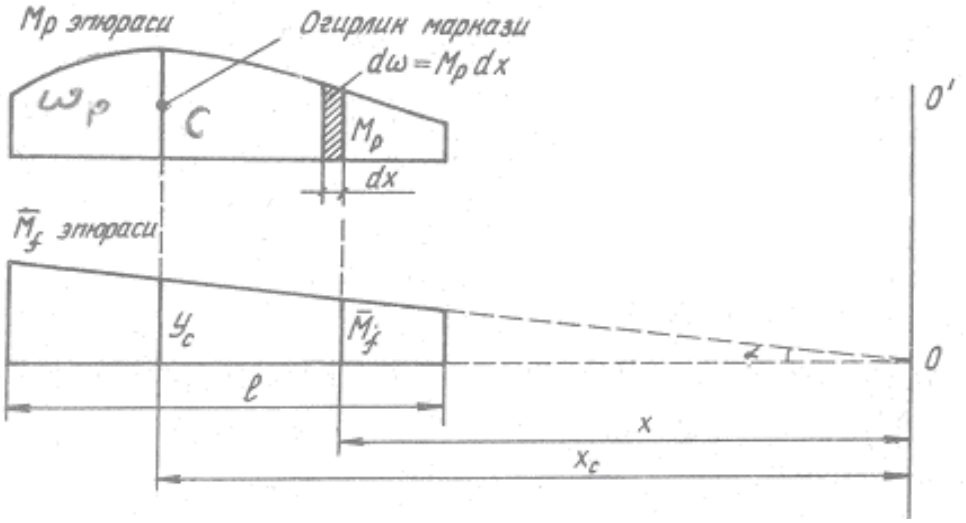
$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{N} \cdot N_p}{EF} dx. \qquad (6.9)$$

Фермаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама кучларнинг таъсири эътиборга олинади, ҳолос

$$\Delta_{fp} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_f N_p}{EF} dx. \qquad (6.10)$$

Верешчагин усули. Маълумки, балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда Мор формуласининг биринчи хадидан фойдаланилади (6.8):

$$\Delta_{fp} = \int_0^l \frac{\bar{M}_f M_p}{EJ} dx. \qquad (a)$$



6.11- расм

Интеграл чегарасида кесим ўзгармас бўлса, эгилишдаги бикирликни интегралдан ташқарига чиқариш мумкин

$$\Delta_{fp} = \frac{1}{EJ}\int_0^l \bar{M}_f\, M_p\, dx. \qquad (б)$$

Бу ерда M_p ва $\bar{M}_f$ — берилган ва бирлик кучлардан ҳосил бўлган эгувчи моментлар (6.11- расм). Кўпинча икки эпюранинг бири тўғри чизиқли бўлади. Бундай ҳолларда $\int_0^l \bar{M}_f\, M_p\, dx$ интеграли осонгина ечилади; аниқроғи мазкур интегрални интегралсиз ифода билан алмаштириш имкони туғилади.

Шаклдан (6.11- расм):

$$\bar{M}_f = x\,tg\alpha \quad ва \quad d\omega = M_p\,dx$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l \bar{M}_f\, M_p\, dx = tg\alpha \int_0^l x M_p\, dx = tg\alpha \int_0^l x\, d\omega$$

келиб чиқади.

Бу ерда $\int_0^l x\,d\omega$ интеграли M_p эпюрасининг юзаси ω_p дан 0—0′ ўкига нисбатан олинган статик моментдир, яъни

$$\int_0^l x d\omega = \omega_p \cdot x_c .$$

Ўрнига қўямиз

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx = x_c tg\alpha \cdot \omega_p$$

Бирок $x_c tg\alpha = y_c$ эканлигини назарда тутсак,

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p d_x = \omega_p y_c \qquad (в)$$

келиб чиқади, натижада интеграл функция интегралсиз ифода билан алмашади.

(в) ифодасини (б) га қўйсак, қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\boxed{\Delta_{fp} = \frac{1}{EJ}\sum \omega_p y_c} \qquad (г)$$

Бу ерда ар ω_p — эгувчи моментлар эпюрасининг юзаси;

y_c,— биринчи эпюранинг оғирлик марказига мос келган иккинчи эпюрадаги ордината.

Кўчишларни аниқлашнинг бу усулини 1925 йилда Москва темирйўллар транспорти муҳандислари институтининг толиби А. Н. Верешчагин таклиф этган.

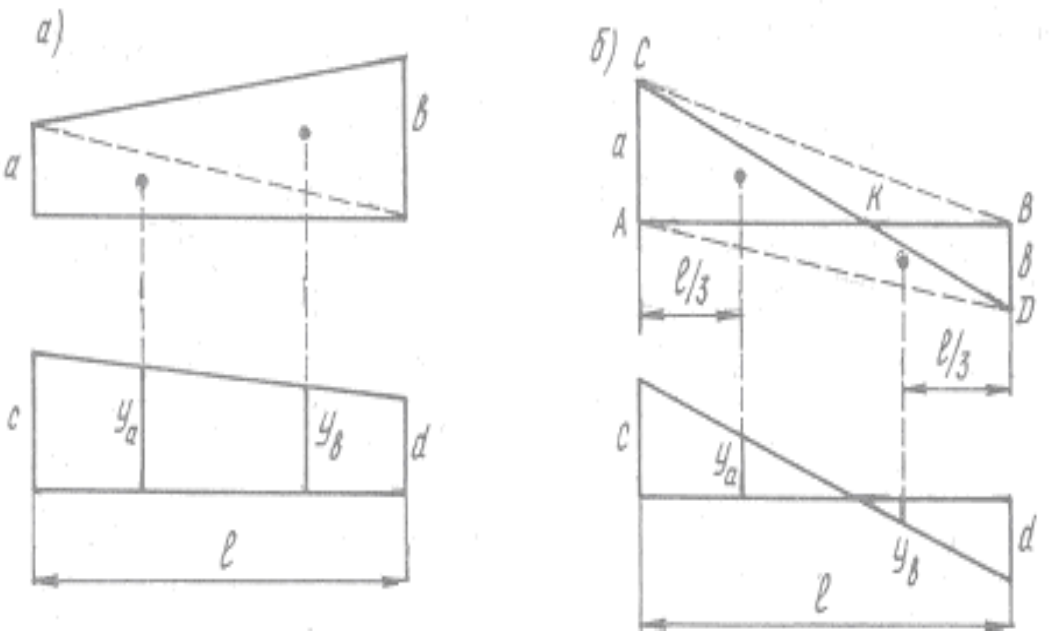
(г) дан кўринадики, ҳар иккала эпюра ўқнинг бир томонида жойлашса, кўчишнинг ишораси мусбат, ўқнинг турли томонларида жойлашса, ишора манфий бўлади. Шуни ҳам қайд этиш лозимки, y_c ординатаси албатта тўғри чизиқли эпюрадан олиниши зарур. Агар ҳар иккала эпюра тўғри чизиқли бўлса, у ҳолда ординатани қайси эпюрадан олинишининг фарқи йўқ.

Трапеция шаклли икки эпюра кўпайтириладиган бўлса, улардан бирининг оғирлик марказини топиш ўрнига трапециялардан бирини иккита учбурчакка ажратган қулай. Бунда ажратилган учбурчаклардан юза олиниб, трапециядан шу учбурчакларнинг оғирлик марказларига мос бўлган ординаталар олинади (6.12- расм, а). Бу ҳол учун тайёр формула бор:

$$\frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b = \frac{l}{6}(2ax + 2bd + ad + bc).$$

Формуланинг чап томонида юза ва ординаталар кўпаймаси, ўнг томонида эса шу кўпайтманинг жавоби берилган.

Қавс ичида қуйидаги миқдорларнинг йиғиндиси берилган: эпюралар чап ординаталари кўпайтмасининг иккилангани, ўнг ординаталар кўпайтмасининг иккилангани, биринчи эпюра чап ординатасини иккинчи эпюра ўнг ординатасига кўпайтмаси, шунингдек биринчи эпюра ўнг ординатасини иккинчи эпюра чап ординатасига кўпайтмаси.



6.12- расм

Кўпайтириладиган эпюралардан бири ёки ҳар иккаласи турли ишорали учбурчаклардан ташкил топса, яна юқоридаги усулдан фойдаланилса бўлади (6.12- расм, б). Бунинг учун эпюралардан бирини АВС ва АВД учбурчакларига тўлдирамиз. Ҳосил бўлган СВК ва АКД учбурчакларининг ординаталари тенг ва ишоралари қарама-қарши бўлганлиги учун ҳисоб натижаларига таъсир этмайди.

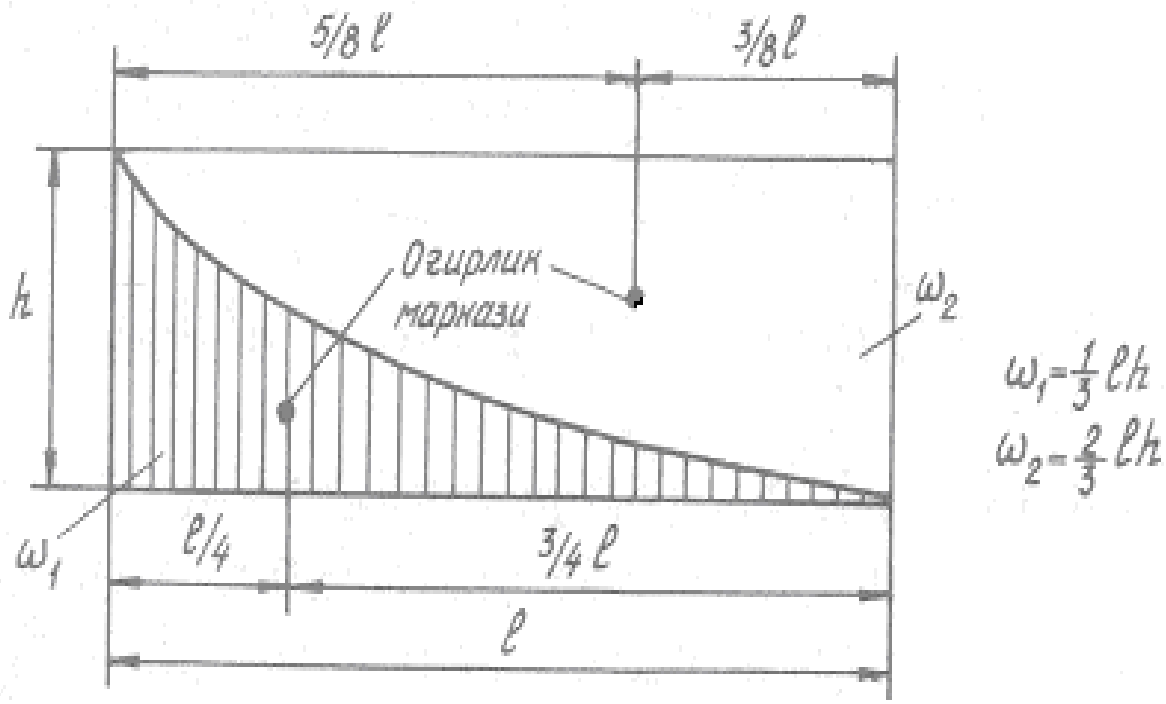
Эпюралар кўпайтмаси (6.12- расм, *б*) қуйидаги формуладан топилади:

$$\frac{al}{2}y_a+\left(-\frac{bl}{2}\right)\left(-y_b\right)=\frac{al}{2}y_a+\frac{bl}{2}y_b.$$

Кўчишларни Верешчагин усулида аниқлаганда, турли шаклларнинг юзалари ва оғирлик марказларини топишга тўғри келади.

Оддий геометрик шаклларнинг юза ва оғирлик марказларини аниқлаш ўқувчига ўрта мактабдан маълум.

6.13- расмда параболик эпюранинг юзаси ва оғирлик марказлари берилган.



6.13- расм

Верешчагин усулини бикирлиги ўзгармас бўлган балка ва рамаларда қўллаш мақсадга мувофикдир. Агар бикирлик элементнинг узунлиги бўйлаб ўзгарувчан бўлса, у ҳолда El ни интегралдан ташқарига чиқариб бўлмайди, шу сабабли Верешчагин формуласидан фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда кўчишлар Мор интегралини бевосита ечиш йўли билан аниқланади.

6.4. Ҳароратнинг ўзгаришидан ва таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар

Статик аниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши стерженда кўчишлар пайдо бўлишига олиб келади. Масалан, ҳарорат таъсирида стержень ўзайиши, қисқариши ва қийшайиши мумкин. Ҳароратнинг ўзгариши статик аниқ системаларда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди.

Юқорида кўриб ўтилган Мор формуласини (6.7) ҳарорат таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни аниқлаш масаласига татбик этамиз.

Ҳарорат таъсирида бўлган иншоотдан бирор *dx* бўлакчани ажратиб олайлик. Бўлакчанинг устки толаларининг ҳарорати t_1 пастки толаларининг ҳарорати эса t_2 бўлсин. Ҳарорат бўлакчанинг кўндаланг кесимида бир текисда тўғри чизиқ қонуни бўйича тарқалган дейлик (6.14- расм, а).

Ҳарорат таъсиридаги чизиқли кенгайиш коэффициенти α бўлса, бўлакчанинг устки толаси $\alpha t_1\, dx$ га, пастки толаси эса at_2dx масофага узаяди (6.14- расм, б).

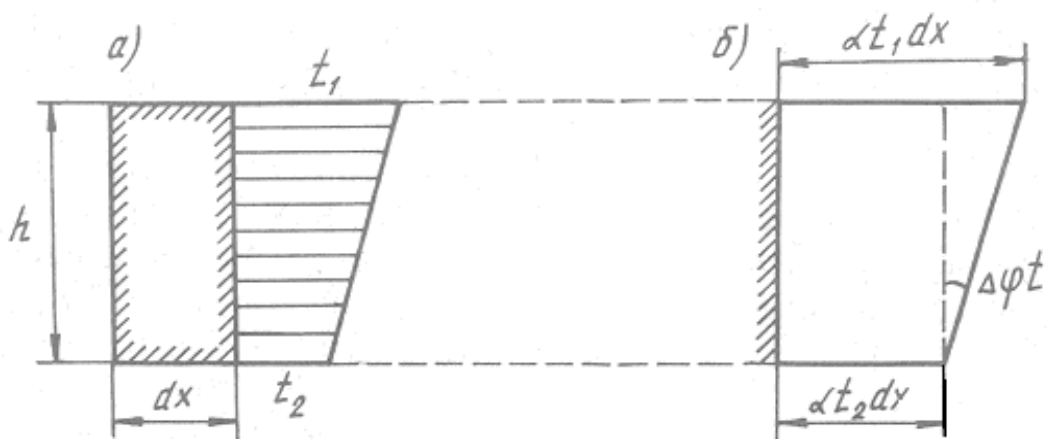
Агар кесим горизонтал ўққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бўлакчанинг ҳарорат таъсирида ўртача ўзайиши

$$\Delta_{xt} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{2} dx$$ бўлади.

Бўлакчанинг кўндаланг кесимлари бир-бирига нисбатан

$$\Delta_{\varphi t} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{h} dx$$

бурчакка оғади.



6.14- расм

Ҳарорат таъсирида силжиш деформацияси рўй бермайди.

Буларни эътиборга олсак, Мор формуласи (6.7) қуйидаги кўринишга келади:

$$\Delta_{pt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_p \, dx + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_p \, dx \qquad (6.11)$$

Агар стерженларнинг кўндаланг кесимлари ўзгармас бўлса, интегралар бирлик эпюраларининг юзалари сифатида ҳисоблаб топилиши мумкин, у ҳолда ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишларни аниқлаш формуласи куиидаги содда кўринишни олади:

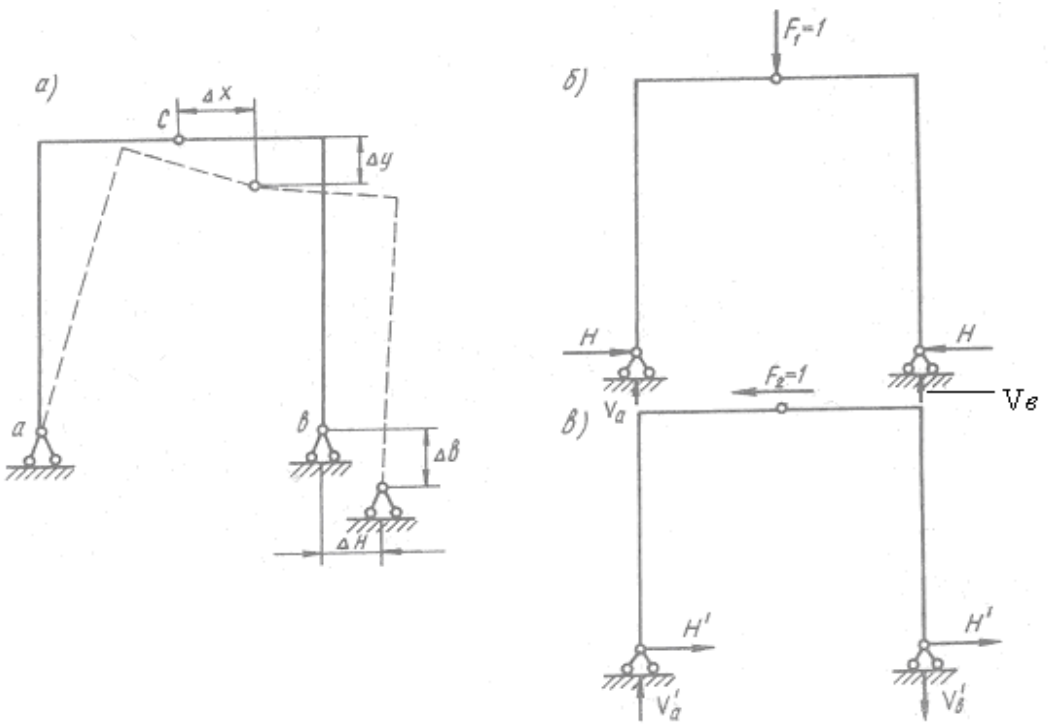
$$\Delta_{pt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{\bar{N}} \qquad (6.12)$$

Бу ерда $\omega_{\bar{M}}$ ва $\omega_{\bar{N}}$ — бирлик эпюралар $\bar{M}$ ва $\bar{N}$ нинг юзалари.

(6.12) формула таркибидаги ҳадларнинг ишораси деформациянинг йўналишига боғлиқ: агар ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишнинг йўналиши бирлик куч таъсирида вужудга келган кўчиш йўналиши билан бир хил бўлса, ишора мусбат, акс ҳолда манфий олинади.

Таянчлариииг чўкишидан ҳосил бўладигаи кўчишлар. Статик аниқ системаларда таянчларнинг чўкиши иншоотда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди. Таянчларнинг кўчиши эса тупроқнинг ўтириши, сув босиши ёки силжиши сингари турли сабаблар таъсирида рўй бериши мумкин.

Мисол тариқасида 6.15- расмда тасвирланган уч шарнирли рамани кўриб ўтамиз. Раманинг *B* таянчи чўқди деб фараз этайлик. Чўқишнинг вертикал Δ_b ва горизонтал Δ_n ташкил этувчилари маълум деб қарайлик. Ўртадаги *C* шарнирининг ҳолатини аниқлаш талаб этилади (6.15- расм, а). Шарнирнинг вертикал кўчишини Мор формуласи бўйича аниқлаш учун *C* нуқтасига вертикал йўналишда бирлик куч F_1=1 ни қўямиз (6.15- расм, б).



6.15- расм

Бирлик ҳолат кучларининг ҳақиқий ҳолат кўчишларини вужудга келишида бажариши мумкин бўлган ишлари йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

$$1\Delta_y - V_b\Delta_b - H\Delta_H = 0.$$

Бу тенгламадан изланаётган кўчиш аниқланади

$$\Delta_y = V_b\Delta_b + H\Delta_{H_1}$$

Демак, мазкур кўчиш таянчларнинг чўкишига бевосита боғлиқ экан.

Горизонтал кўчиш Δ_x ни аниқлаш учун C шарнирига F_2=1 кучини қўямиз (6.15- расм, в). Мор теоремаси асосида қуйидаги ишлар тенгламасини тузамиз:

$$1\Delta_x + V_b^{/}\cdot\Delta_b + H^{/}\Delta_H = 0 \ ,$$

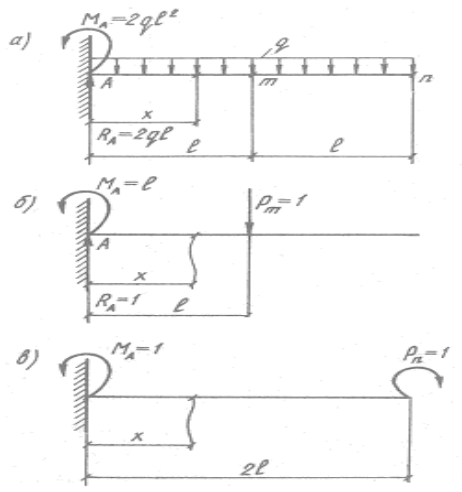
бу ердан

$$\Delta_x = -V_b^{/}\Delta_b - H^{/}\Delta_H$$

келиб чиқади.

Қуйида кўчишларни аниқлашга доир мисоллар кўриб ўтамиз.

1- мисол. 6.16 – расм, *а* да берилган балканинг *B* кесими учун бурилиш бурчаги (угол поворота) φ_B аниқлансин. Балканинг бикрлиги E J ўзгармас.



6.16- расм

Ечиш. Балканинг 1-ҳолати (ҳақиқий ҳолат) 6.16- расм, *а* да тасвирланган. Иккинчи ҳолатда балкани берилган кучларсиз тасвирлаймиз (6.16- расм, *б*) ва бурилиш бурчагини аниқлаш талаб этилган кесимга M = 1 моментини қўямиз (агар кўчишни аниқлаш талаб этилганида шу нуқтага бирлик куч қўйган бўлар эдик). 6.16- расм, *в* да бурилиш бурчаги φ_B кўрсатилган.

Маълумки, эгилган ўққа ўтказилган уринма билан балканинг горизонтал ўқи орасидаги бурчак бурилиш бурчаги, деб аталади. Шу уринмага тик бўлган чизиқ билан вертикал ўқ орасидаги бурчак ҳам бурилиш бурчаги бўлади.

Балканинг 1–ҳолатидаги ихтиёрий кесимда ҳосил бўлган эгувчи момент

$$M_1 = -qx \cdot \frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Иккинчи ҳолатда

$$\overline{M}_2 = -M = -1$$

Буларни Мор формуласининг биринчи ҳадига қўйиб, бурилиш бурчагини аниқлаймиз:

$$\Delta_{21} = \varphi_B = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_1\overline{M}_2 dx = \frac{1}{EJ}\int_0^l (-1)\cdot(-\frac{qx^2}{2})dx = \frac{q}{2EJ}\int_0^l x^2 dx =$$

$$= \frac{q}{2EI}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{ql^3}{6EI} = \frac{20\cdot 5^3}{6EI} = \frac{417}{EI}.$$

2-мисол. 6.17- расм, *а* да берилган балканинг *B* учи солқилиги аниқлансин.

Ечиш. Балканинг 1 – ҳолатида ташқи кучлар, 2 – ҳолатида эса солқилиги (прогиб) аниқланаётган нуқтага бирлик куч (*P=1*) қўйилган.

Ҳақиқий ҳолатда балка иккита участкага эга. CB участкаси учун M_1= - Px, AC участкаси учун $M_1 = -Px = P(x-b) = -2Px + Pb.$

Иккинчи ҳолатда ҳар иккала участка учун $\overline{M}_2 = -1 \cdot x = -x.$

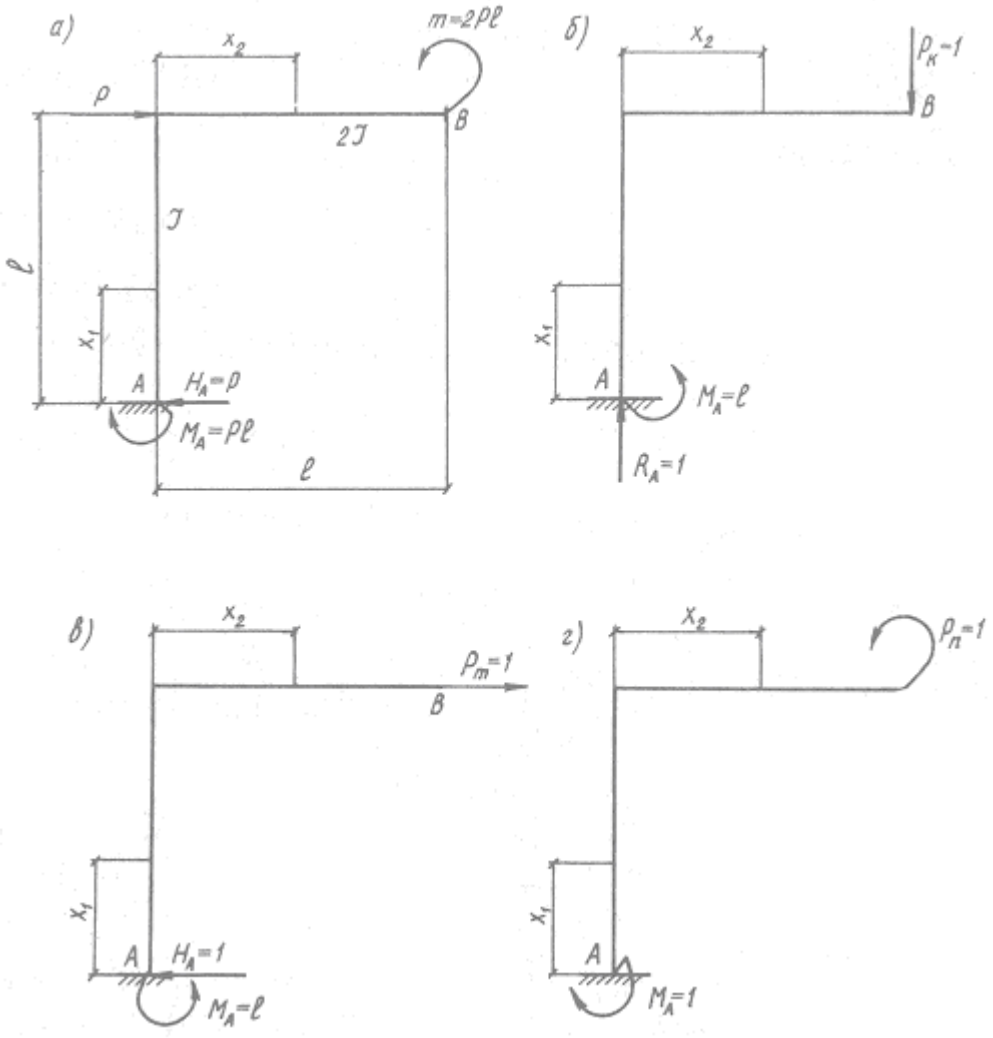
Изланаётган кўчиш (солқилик)

$$\Delta_{21} = y_B = f = \frac{1}{EI}\left[b\int_0^l -x(-Px)dx + \int_0^l -x(-2Px+Pb)dx \right] = \frac{1}{EI}$$

$$\left(P\int_0^b x^2 \cdot dx + 2P\int_0^l x^2 \cdot dx - Pb\int_0^b x\,dx \right) = \frac{1}{EI}\left(P\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^b + 2P\left|\frac{x^3}{3}\right|_b^l - Pb\right.$$

$$\left.\left|\frac{x^2}{2}\right|_b^l\right) = \frac{P}{6EI}(2b^3 + 4l^3 - 4b^3 - 3bl^2 + 3b^3) = \frac{P}{6EI}(b^3 + 4l^3 - 3bl^2) =$$

$$= \frac{20}{6EI}(2^3 + 4\cdot 5^3 - 3\cdot 2\cdot 5^2) = \frac{1193{,}3}{EI}.$$



6.17- расм

3- мисол. 6.18- расм, *а* да берилган ферманинг *«К»* тугунидаги вертикал ва горизонтал кўчишлар аниқлансин. Стерженлар бикирлиги ўзаро тенг деб қабул қилинсин.

Ечиш. Мор формуласи

$$\Delta_{ip} = \sum \frac{N_i^0 \cdot \bar{N}_i^k l_i}{E J}$$

га кўра қуйидаги амалларни бажаришимиз зарур:

1. Ташқи кучдан ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлаймиз. Таянч реакциялари $R_A = P$; $R_B = P$; *ва* $H_A = 3P$ қийматларига эга. Ҳисоблаш учун зарур бўладиган ферманинг геометрик параметрлари:

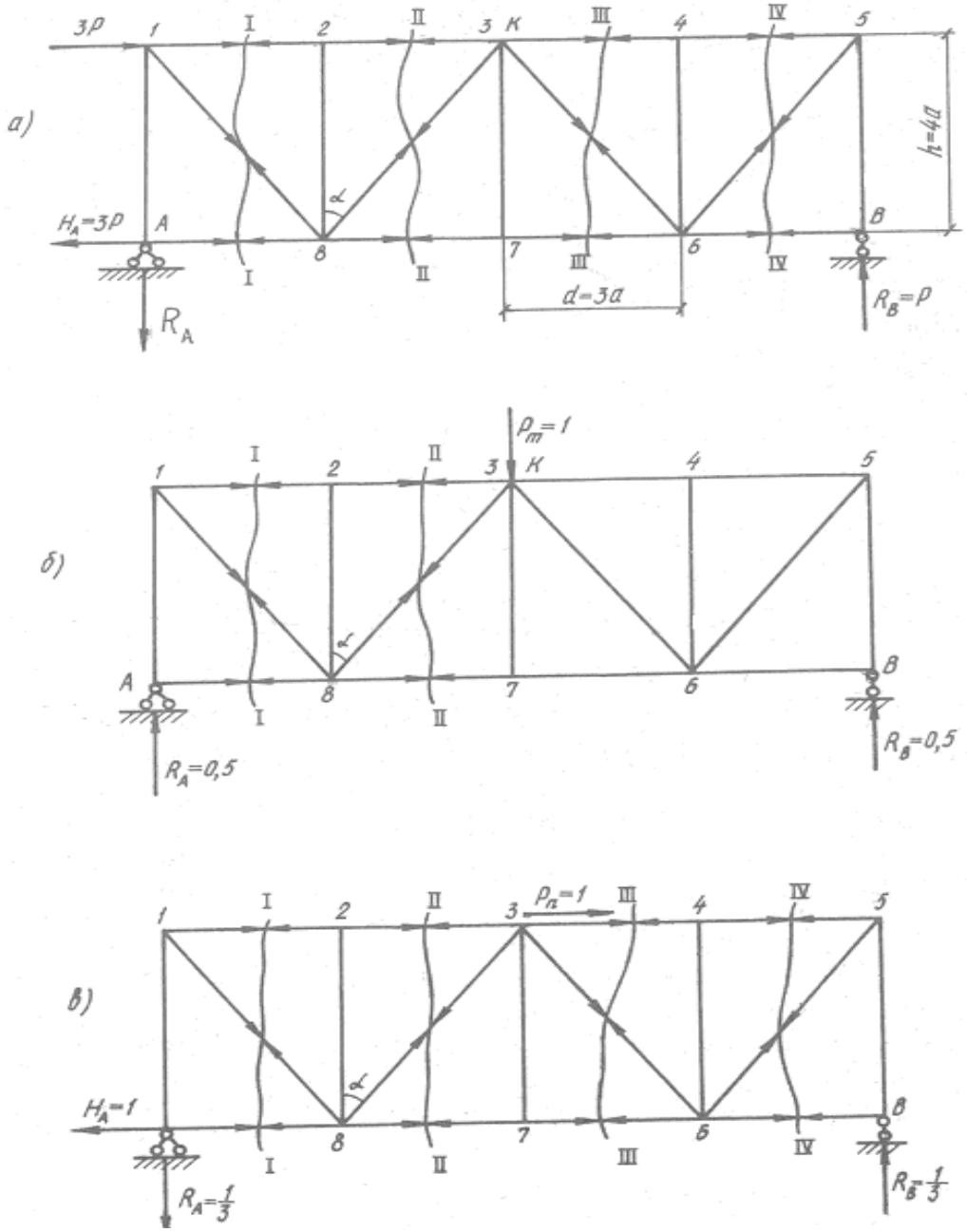
$$l_{18} = l_{38} = l_{36} = l_{56} = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a;$$

$$\cos\alpha = \frac{l_{28}}{l_{38}} = \frac{4a}{5a} = 0{,}8.$$

А, 2, 7, 4 ва В тугунларнинг мувозанат шартларидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар топилади:

$$N_{1A}=P;\ \ N_{8A}=3P;\ \ \ N_{5B}=-P;\ \ \ N_{28}=0;\ \ \ N_{37}=0;$$

$$N_{46}=0;\ \ N_{6B}=0;\ \ \ N_{12}=N_{23};\ \ \ N_{78}=N_{6\text{-}7};\ \ \ N_{34}=N_{45}.$$



6.18- расм

I – I кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum Y = 0;\ N_{18}\cdot\cos\alpha + P = 0;\quad N_{18} = -\frac{P}{\cos\alpha} = -\frac{P}{0{,}8} = -1{,}25P;$$

$$\sum m_8 = 0;\quad -N_{12}\cdot h - R_b\cdot 3d = 0;\quad N_{12} = \frac{-R_b\cdot 3d}{h} = -\frac{3\cdot 3a}{4a}P = 2{,}25P;$$

$$N_{23} = -2{,}25P.$$

II – II кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{38} \cdot \cos\alpha - P = 0;\quad N_{38} = -\frac{P}{\cos\alpha} = 1{,}25P;$$
$$\sum m_3 = 0;\ N_{78} \cdot h - P \cdot 2d = 0;\quad N_{78} = \frac{2Pd}{h} = \frac{2P \cdot 3a}{4a} = 1{,}5P;$$
$$N_{78} = 1{,}5P;\quad N_{67} = 1{,}5P.$$

III – III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0\ ;\ N_{36} \cdot \cos\alpha + P = 0;\ N_{36} = -\frac{P}{\cos\alpha} = -1{,}25\,P;$$
$$\sum m_6 = 0;\ N_{34}h + P \cdot d = 0;\ N_{34} = -\frac{Pd}{h} = -\frac{P \cdot 3a}{4a} = -0{,}75\,P;$$
$$N_{45} = -0{,}75\,P.$$

IV – IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{56} \cdot \cos\alpha - P = 0;\ N_{56} = \frac{P}{\cos\alpha} = 1{,}25\,P.$$

2. Ферманинг K тугунига вертикал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18-расм, б).

Таянч реакциялари $R_A = R_B = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ H_A = 0$ бўлади. Бу ерда ферма ва юкнинг симметриклиги эътиборга олинади. А, 2, 7, 4 тугунлар мувозанатидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар аниқланади:

$$N_{1A} = N_{5B} = -0{,}5;\ N_{8A} = N_{6B} = 0;\ N_{28} = 0;\ N_{37} = 0;\ N_{46} = 0;$$
$$N_{12} = N_{23} = N_{34} = N_{45};\ N_{78} = N_{67};\ N_{18} = N_{56};\ N_{38} = N_{36}.$$

I – I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{18} \cdot \cos\alpha - 0{,}5 = 0;\ N_{18} = \frac{0{,}5}{\cos\alpha} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$$

$$\sum m_8 = 0;\ N_{12} \cdot h + 0{,}5 \cdot d = 0;\ N_{12} = \frac{0{,}5d}{h} = -\frac{0{,}53a}{4a} = -0{,}375;$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{12} = -0{,}375.$$

II – II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{38} \cdot \cos\alpha + 0{,}5 = 0;\ N_{38} = -\frac{0{,}5}{\cos\alpha} = -0{,}625;\ N_{38} = -0{,}625;$$

$$\sum m_3 = 0;\ N_{7-8} \cdot h - 0{,}5 \cdot 2d = 0;\ N_{78}\frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 3a}{4a} = 0{,}75;\ N_{76} = 0{,}75.$$

3. Ферманинг K тугунига горизонтал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18, в).

Таянч реакциялари:

$$\sum x = 0;\ H_A - 1 = 0;\ H_A = 1,$$

$$\sum m_A = 0;\ R_B \cdot 4d - P_1 \cdot h = 0;\ R_b = \frac{P_n h}{4d} = \frac{P_n 4a}{4 \cdot 3a} = \frac{P_n}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\sum y = 0;\ R_A - R_B = 0;\ R_A = R_B = \frac{1}{3}.$$

A, 2, 7, 4, B тугунлар мувозанатидан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$N_{1-A} = R_A = \frac{1}{3};\ N_{5-B} = -R_B = -\frac{1}{3};\ N_{8-A} = H_A = 1;\ N_{6-B} = 0.$$

$$N_{28} = 0;\ N_{3-7} = 0;\ N_{46} = 0;\ N_{12} = N_{23};\ N_{34} = N_{45};\ N_{7-8} = N_{6-7}.$$

I – I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{18}\cdot\cos\alpha + \frac{1}{3} = 0;\ N_{18} = -\frac{1}{3\cos\alpha} = -\frac{1}{3\cdot 0{,}8} = \frac{-1{,}25}{3} = -\frac{1{,}25}{3} = -0{,}417;$$

$$\sum m_8 = 0;\ N_{12}\cdot h - \frac{1}{3}d = 0;\ N_{12} = \frac{d}{3h} = \frac{3a}{3\cdot 4a} = 0{,}25;\ N_{23} = 0{,}25.$$

II – II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{38}\cdot\cos\alpha - \frac{1}{3} = 0;\ N_{38} = \frac{1}{3\cos\alpha} = \frac{1}{3\cdot 08} = \frac{1{,}25}{3} = 0{,}417.$$

III – III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{36}\cdot\cos\alpha + \frac{1}{3} = 0;\ N_{36} = -\frac{1}{3\cos\alpha} = -\frac{1}{3\cdot 0{,}8} = -0{,}417;$$

$$\sum m_6 = 0;\ N_{34}\cdot h + \frac{1}{3}d = 0;\ N_{34} = -\frac{d}{3h} = -\frac{3a}{3\cdot 4a} = -0{,}25;\ N_{45} = -0{,}25;$$

$$\sum m_3 = 0;\ N_{67}\cdot h - \frac{1}{3}2d = 0;\ N_{67} = \frac{2d}{3h} = \frac{2\cdot 3a}{3\cdot 4a} = 0{,}5;\ N_{78} = 0{,}5.$$

IV – IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\sum y = 0;\ N_{56}\cdot\cos\alpha - \frac{1}{3} = 0;\ N_{56} = \frac{1}{3\cos\alpha} = \frac{1}{3\cdot 0{,}8} = 0{,}417;$$

4. Ҳисобнинг давоми 6.1 – жадвалда келтирилган:

6.1 – жадвал

	N_{Pi}	l_i	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_n$	$N_{ip}N_{im}l_i$	$N_{ip}N_{in}l_i$
N_{12}	- 2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53 Pa	-1,69 Pa
N_{23}	- 2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53 Па	-1,69 Pa
N_{34}	- 0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84 Pa	0,56 Pa
N_{45}	- 0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84 Pa	0,56 Pa
N_{8A}	3P	3a	0	1	0	9 Pa
N_{78}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375 Pa	2,25 Pa
N_{67}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375 Pa	2,25 Pa
N_{6B}	O	3a	0	0	0	0
N_{1A}	P	4a	-0,5	1/3	-2 Pa	1,33 Pa
N_{28}	O	4a	0	0	0	0
N_{37}	O	4a	0	0	0	0
N_{46}	O	4a	0	0	0	0
N_{5B}	-P	4a	0,5	-1/3	2 Pa	1,33 Pa
N_{18}	-1,25P	5a	0,625	-0,417	-3,9 Pa	2,6 Pa
N_{38}	-1,25P	5a	-0,625	0,417	-3,9 Pa	2,6 Pa
N_{36}	-1,25P	5a	-0,625	-0,417	3,9 Pa	1,6 Pa
N_{56}	1,25P	5a	0,625	0,417	3,9 Pa	2,6 Pa
					13,49 Pa	24,3 Pa

Ферма “К” тугунининг вертикал кўчиши

$$\Delta_{mp} = \sum \frac{N_{Pi} N_{mi} l_i}{EF} = \frac{13{,}49Pa}{EF}$$

горизонтал кўчиши

$$\Delta_{np} = \sum \frac{N_{pi} N_{ni} b_i}{EF} = \frac{24{,}3P_a}{EF}$$

бўлади.

4- мисол. Берилган юклар таъсирида балканинг *n* кесимини вертикал кўчиши ва К кесимини бурчакли кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин. Балканинг бикирлиги унинг бутун узунлиги бўйича ўзгармас (6.19- расм, а).

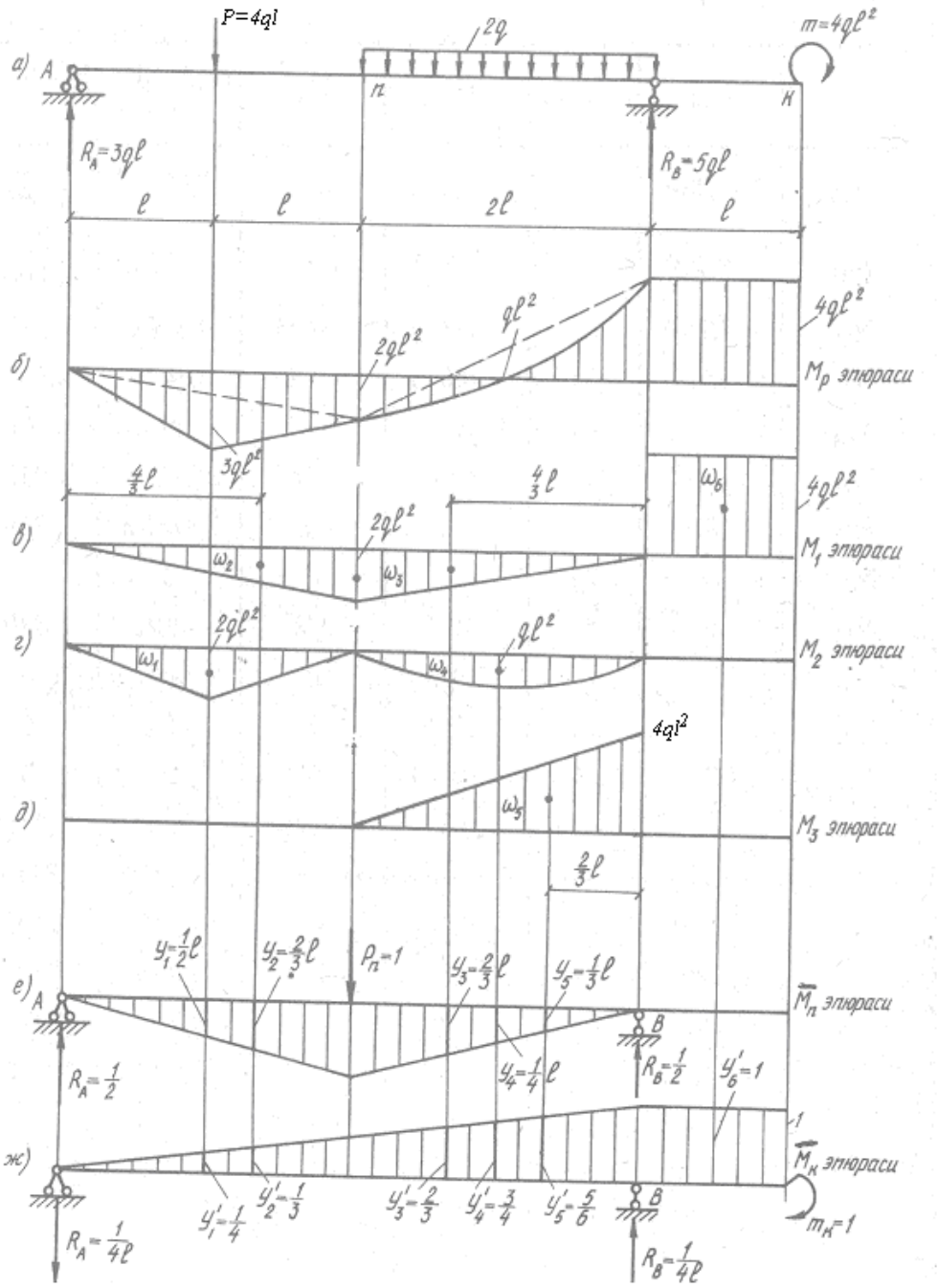
Ечиш. 1. Берилган юклар таъсирида балканинг эгувчи моментлар эпюрасини, оғирлик маркази аниқ ва юзаларини ҳисоблаш осон бўлган, оддий эпюралар (M_1, M_2, M_3) га ажратамиз (6.19- расм, в, г, д).

2. Юкланмаган балкаларнинг бирига вертикал йўналишда бирлик куч ($P_n = 1$), иккинчисига бирлик момент ($m_k = 1$) қўямиз ҳамда $\bar{M}_n$ *ва* $\bar{M}_k$ эпюраларини қурамиз. $\bar{M}_n$ ва $\bar{M}_k$ эпюраларидан, юқоридаги оддий юзаларнинг оғирлик марказларига мос келадиган ($y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ *ва* $y_1', y_2', y_3', y_4', y_5', y_6'$) ординаталарни аниқлаймиз (6.19- расм е, ж).

3. Верешчагин қоидасига (6.11) амал қилиб, кўчишларни топамиз. Балканинг *n* кесимидаги вертикал кўчиш

$$\Delta_{np} = \sum \int \frac{M_p \cdot \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l \right) + \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{q}{3} l +$$

$$+ \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} ql^2 2l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{ql^4}{EJ} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{3ql^4}{EJ};$$



6.19- расм

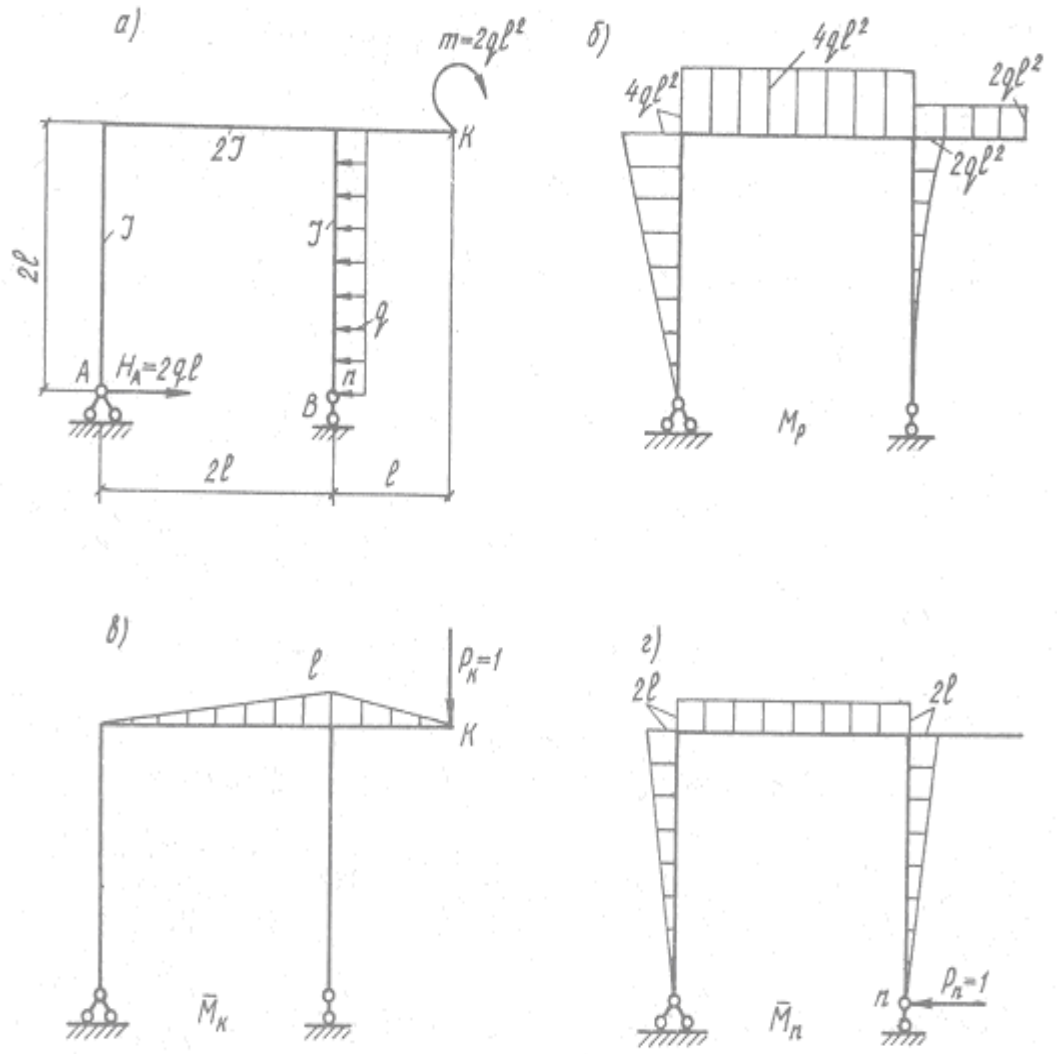
Балканинг K кесимидаги бурчакли кўчиш

$$\Delta_{kp}=\sum\int\frac{M_p\cdot\bar{M}_k}{EJ}dx=\frac{1}{EJ}\sum\omega_{\omega_i y_i}=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{1}{2}2ql^2\cdot 2l\frac{1}{4}-\frac{1}{2}2ql^2-2l\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}2ql^2\cdot 2l\frac{2}{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}ql^2\cdot 2l\frac{3}{4}+\frac{1}{2}4ql^2\cdot 2l\frac{5}{6}+4ql^2\cdot l\cdot 1\right)=\frac{ql^3}{EJ}\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-1+\frac{10}{3}+4\right)=\frac{23}{6}\frac{ql^3}{EJ}.$$

5- мисол. Раманинг K нуқтасининг вертикал кўчиши ва n нуқтасининг горизонтал кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин (6.20- расм, а).

Ечиш. Берилган юклардан эгувчи моментлар эпюраси M_P ни қурамиз (6.20- расм, б). Изланаётган йўналишда бирлик кучлар (P_k, P_n) қўйиб, бирлик эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ ни қурамиз (6.20- расм, в, г).



6.20- расм

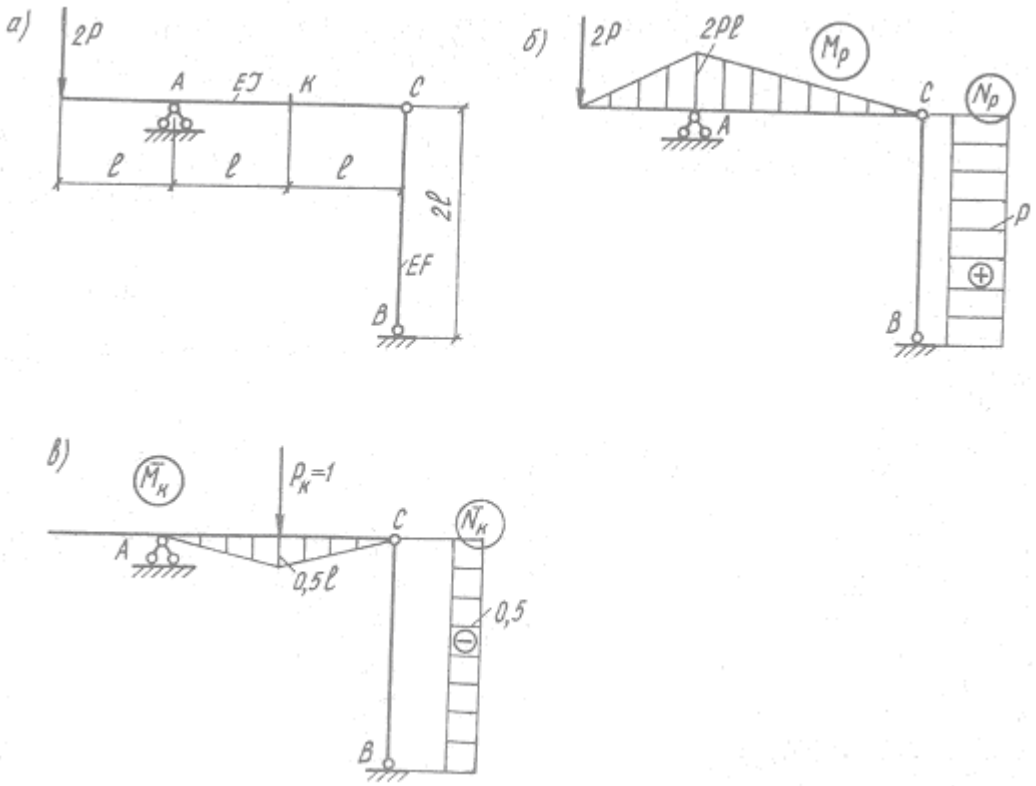
M_P эпюрасини алоҳида равишда $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ эпюраларига кўпайтириб, изланаётган кўчишларни аниқлаймиз. Вертикал кўчиш:

$$\Delta_{pk} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2EJ} 2ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = \frac{2ql^4}{EJ} + \frac{ql^4}{2EJ} = \frac{5}{2} \frac{ql^4}{EJ}$$

Горизонтал кўчиш:

$$\Delta_{np} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_i = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 21 \frac{2}{3} 21 +$$

$$\frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 21 \cdot 21 + \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 21 \frac{3}{4} 21 = \frac{16}{3} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{8ql^4}{EJ} + \frac{4ql^4}{EJ} = \frac{52}{3} \frac{ql^4}{EJ}$$



6.21- расм

6- мисол. *«К»* нуқтасининг вертикал кўчиши аниқлансин. Балка А нуқтада шарнирли қўзғалмас таянч ва С нуқтада ВС стержень (тортқич) ёрдамида маҳкамланган. Балканинг бикирлиги EI, стерженнинг бикирлиги EF (6.21- расм, а).

Ечиш. Балка эгилишга, стержень эса чўзилишга ишлайди. Кўчишни аниқлашда Мор формуласининг икки ҳадидан фойдаланамиз:

$$\Delta_{kp} = \int_0^{21} \frac{M_p \overline{M}_k dx}{EJ} + \int_0^{l} \frac{N_P \overline{N}_k d_x}{EF}$$

Берилган кучдан эгувчи момент (*Mp*) ва бўйлама кучлар (N_p) эпюраларини кўрамиз (6.21- расм, б, *в*).

Изланаётган кўчиш йўналишида балкага бирлик куч (P_k= *1*) қўйиб бирлик эгувчи моментлар ($\overline{M}_k$) ва бирлик бўйлама кучлар ($\overline{N}_k$) эпюраларини қурамиз: (6.21- расм, *в*).

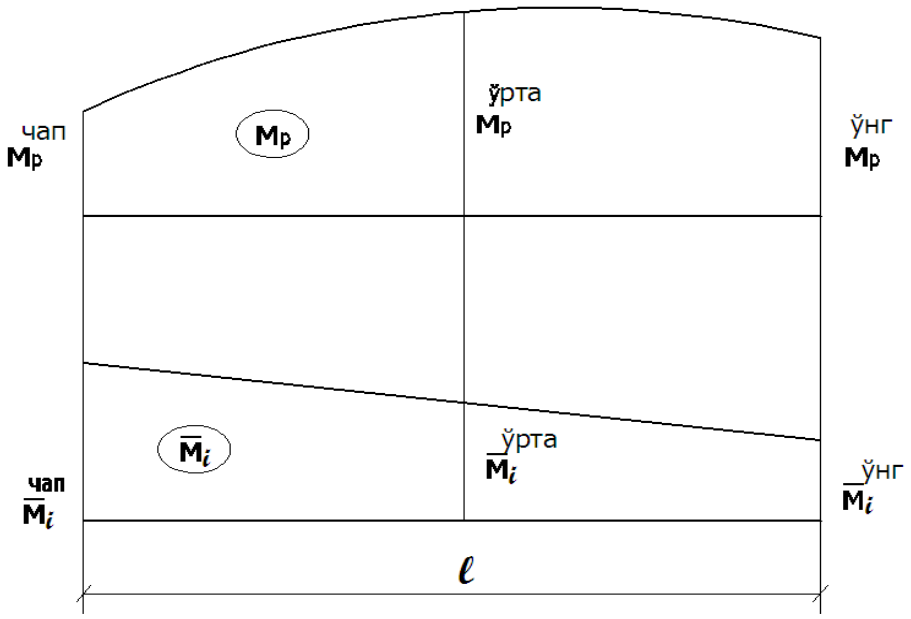
Кўчишни Верешчагин қоидаси ёрдамида аниқлаймиз:

$$\Delta_{kp} = \frac{-1}{EJ}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot 21\frac{1}{2}2Pl - \frac{1}{EF}P\cdot l\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\frac{Pl^3}{EJ} - \frac{1}{2}\frac{Pl}{EF} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl}{EF}\right)$$

Демак, *K* кесимининг кўчиши икки хил деформациянинг йиғиндисидан ташкил топар экан. Буларнинг биринчиси ригелнинг эгилиши (қавсдаги биринчи хад), иккинчиси эса устуннинг чўзилиши (қавсдаги иккинчи ҳад).

6.5. Кўчишларни Симпсон усулида аниқлаш

Кўчишларни аниқлашнинг ушбу усули ҳам, Верешчагин усулига ўхшаб, икки хил эпюрани ўзаро кўпайтиришга асосланган. Эпюраларнинг бири-ташқи кучлардан қурилган M_p эпюраси, иккинчиси-бирлик кучдан қурилган $\overline{M}_i$ эпюраси. Аммо Симпсон усулини ўзига хос қулайликлари бор. Масалан, эпюраларни кўпайтириш жараёнида, Верешчагин усулида талаб этилганидек, юзаларни ва оғирлик марказларини албатта эгри чизиқли эпюрадан олиш шарт эмас. Эпюранинг эгри ёки тўғри чизиқлилиги, шунингдек, уларнинг шакли, ҳеч қандай роль ўйнамайди. Изланаётган кўчишнинг қиймати эпюраларнинг чап ва ўнг чеккаларидаги ҳамда ўрта кесимдаги моментлар қийматига боғлиқ (6.22-расм).



6.22-расм

Кўчишларни аниқлаш учун Симпсон формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$\Delta_{ip} = \frac{\ell}{6EJ}\left(M_p^{чап} \cdot \overline{M}_i^{чап} + 4M_p^{ўрта} \cdot \overline{M}_i^{ўрта} + M_p^{ўнг} \cdot \overline{M}_i^{ўнг}\right). \qquad (6.13)$$

Бу ерда ℓ - кўрилаётган оралиқ узунлиги;

$M_p^{чап}$ - M_p – эпюрасида чап кесимдаги эгувчи момент;

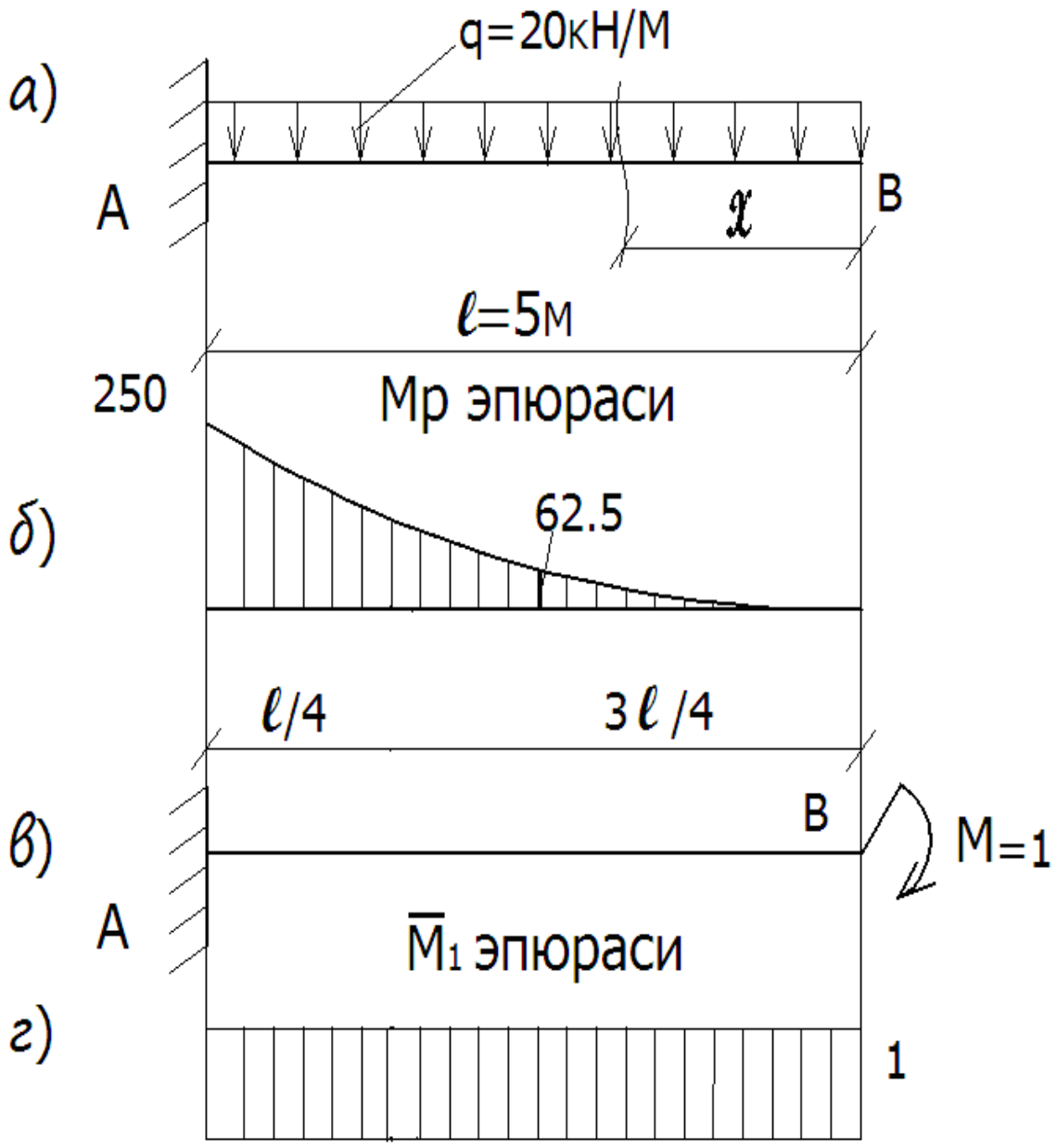
$M_p^{ўнг}$ - M_p - эпюрасида ўнг кесимдаги эгувчи момент;

$M_p^{ўрта}$ - M_p - эпюрасида ўрта кесимдаги эгувчи момент;

$\overline{M}_i^{чап}$, $\overline{M}_i^{ўнг}$, $\overline{M}_i^{ўрта}$ - бирлик эпюранинг чап, ўнг ва ўрта кесимларидаги эгувчи моментлар.

7-мисол. 6.23 – расмда берилган балканинг *B* учидаги бурилиш бурчаги φ_B аниқлансин. Балканинг бикрлиги ўзгармас.

Ечиш. Ташқи кучдан қурилган M_p ва бирлик кучдан қурилган $\overline{M}_1$ эпюралари 6.23-расм, *б* ва *г* да берилган.

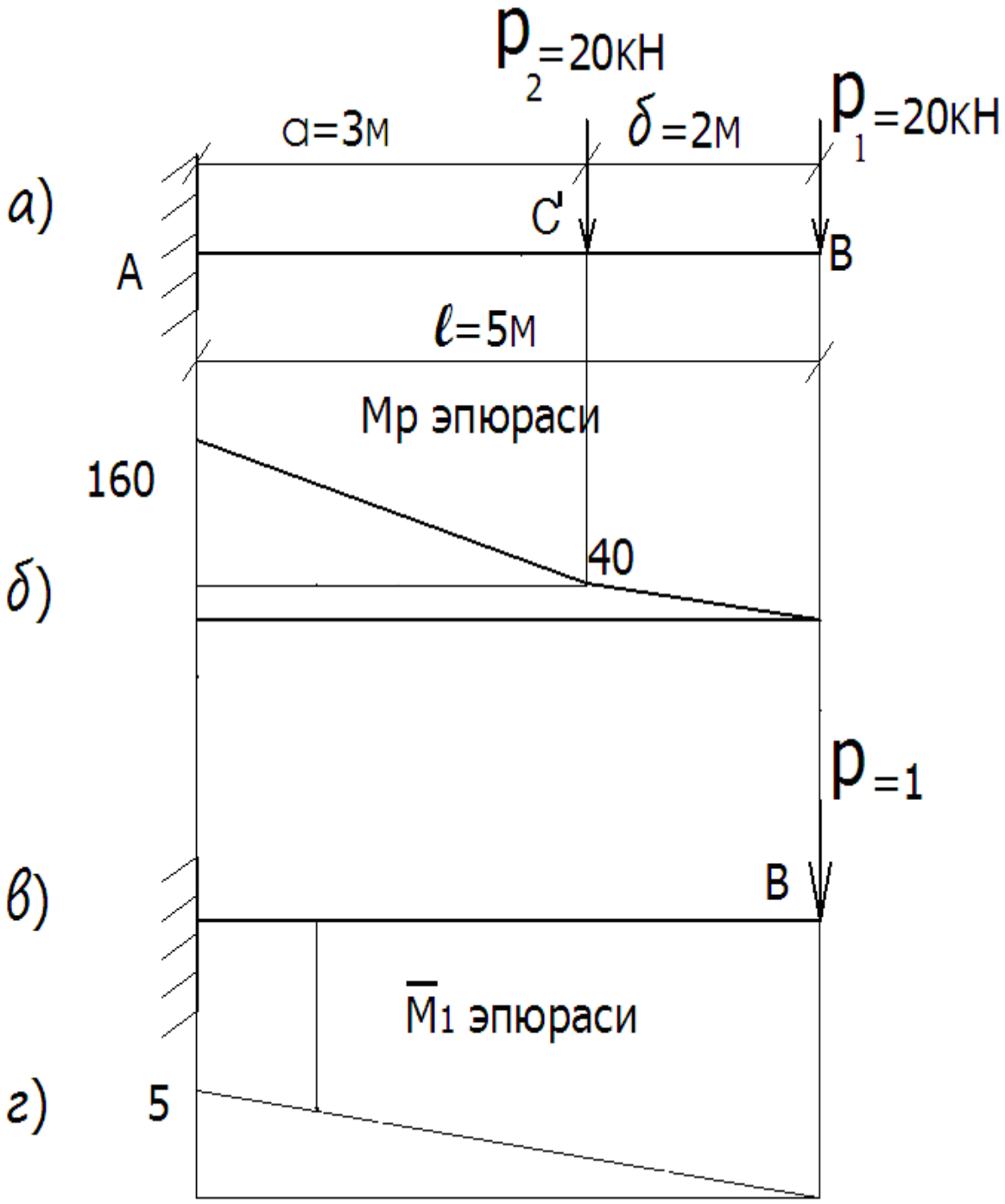


6.23- расм

(6.13) формуладан фойдаланиб, изланаётган бурчакли кўчишни аниқлаймиз:

$$\Delta_{ip} = \varphi_B = \frac{5}{6EJ}\left(50 \cdot 1 + 4 \cdot 62{,}5 \cdot 1 + 0 \cdot 1\right) = \frac{416{,}67}{EJ}.$$

8-мисол. 6.24-расм, *а* да берилган балканинг эркин учи солқилиги аниқлансин. Балканинг бикирлиги ўзгармас.



6.24 – расм

Ечиш. Балканинг M_p ва $\overline{M}_1$ эпюралари 6.24-расм б ва г да тасвирланган. Берилган балка икки участкадан иборат. Симпсон формуласини ҳар бир участкага алоҳида равишда қўллаймиз. M_p ва $\overline{M}_1$эпюраларидаги чекка моментлар маълум. Бироқ ўрта кесимлардаги моментлар номаълум. Шуларни топамиз: M_p – эпюраси бўйича

I – участка учун: $M_p^{ўрта}$ = - P_1· 1 = - 20 кНм;

II - участка учун: $M_p^{ўрта}$ = - P_1· 3,5 – P_2 · 1,5 = - 100 кНм;

$\overline{M}_1$ эпюраси бўйича

I – участка учун: $\overline{M}_i^{ўрта}$ = - P · 1 = - 1м;

II - участка учун: $\overline{M}_i^{ўрта}$ = - P · 3,5 = - 3,5 м;

(6.13) формуладан фойдаланиб, изланаётган кўчишни аниқлаймиз:

$$\Delta_{IP} = \frac{2}{6EJ}\left(0 \cdot 2 + 4 \cdot 20 \cdot 1 + 0 \cdot 0\right) + \frac{3}{6EJ}\left(60 \cdot 5 + 4 \cdot 100 \cdot 3{,}5 + 40 \cdot 2\right) = \frac{53{,}33}{EJ} + \frac{1140}{EJ} = \frac{1193}{EJ}.$$

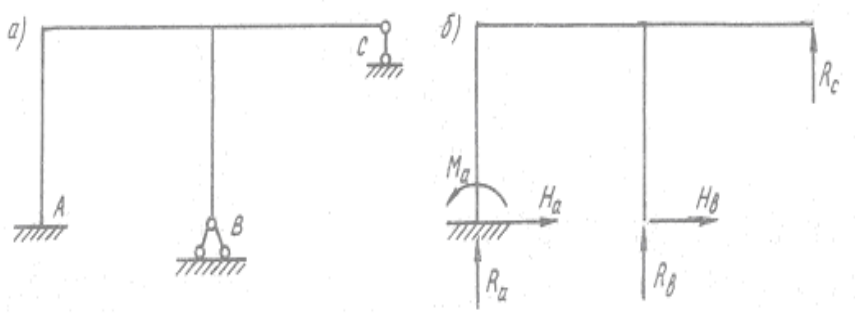
7- БОБ
СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

7.1. Статик ноаниқ системалар ҳақида тушунча

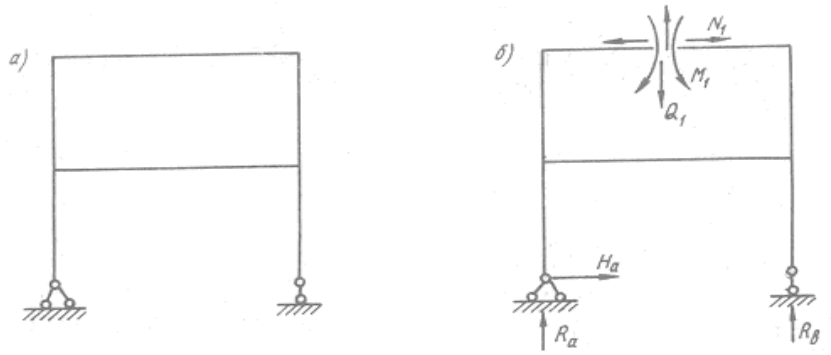
Бинокорликда шундай конструкциялар учрайдики, уларни ҳисоблаш учун, яъни ички кучларини аниқлаш учун статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя қилмайди. Чунки уларда ортиқча боғланишлар мавжуд бўлиб, ҳар бир боғланишда номаълум реакциялар вужудга келади. Номаълумлар, сонини тенгламалар сонига, тенглаштириш учун қўшимча тенгламалар тузиш талаб этилади. Ана шундай системалар *статик ноаниқ системалар* деб аталади.

Боғланиш деганда нуқталар ва кесимларнинг ўзаро қўзғалишига қаршилик кўрсатувчи ҳар қандай тўсиқ тушунилади. «Ортиқча» боғланиш атамаси боғланишнинг «кераксизлигини» эмас, балки «керагидан ортиқча» эканлигини англатади. Агар статик ноаниқ системадаги ортиқча боғланишлар ташлаб юборилса, у ҳолда статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлади. Демак, ортиқча боғланишлар сони системанинг *статик ноаниқлик даражасини* белгилар экан.

Системалар шартли равишда ташқи ва ички статик ноаниқ системаларга ажратилади. 7.1- расмда ташқи, 7.2- расмда ички статик ноаниқ рама тасвирланган. Буларнинг фарқига етиш учун ҳар иккала раманинг номаълум реакцияларини таҳлил этамиз. 7.1- расм, б-да олтита номаълум таянч реакциялари кўрсатилган. Шулардан учтаси статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилса, ҳолган учтаси статика учун «ортиқча» бўлиб қолади. Раманинг *B* ва *C* таянчларини ортиқча боғланиш деб қабул қилиб, уларни ташлаб юборилиши раманинг геометрик ўзгармаслигига путур етказмайди, айни пайтда статик аниқ система ҳосил бўлади. Ортиқча боғланишлар ўрнига реакция кучлари (H_b, R_b, R_c) ни қўямиз. Бу номаълум реакция кучларини аниқлаш учун қўшимча тенгламалар тузиш тақозо этилади. Хуллас бу раманинг статик ноаниқлиги ташқаридан кўзга ташланиб турибди.



7.1- расм



7.2- расм

7.2- расмдаги раманинг статик ноаниқлиги кўзга яққол ташланмайди. Бир қарашда статик аниқ рамадай туюлади. Аслида бу рама ҳам статик ноаниқдир.

Геометрик ўзгармас, статик аниқ система ҳосил қилиш учун берилган раманинг бирор еридан қирқамиз (яъни ортиқча боғланишларни ташлаб юборамиз). Қирқимга тушган кесимнинг қўзғалмаслнгнни таъминлаш учун шу кесимда Ҳосил бўладиган ички кучларни ташқи реакция кучлари кўринишида тасвирлаймиз (7.2- расм, б). Бу учала куч (M_1, Q_1, N_1) ҳам номаълум. Номаълум таянч реакциялари (H_a, R_a, R_a) статика тенгламаларидан топилса, номаълум ички кучлар қўшимча тенгламалардан топилади. Демак, шарнирларга эга бўлмаган ҳар бир ёпик контур уч марта статик ноаниқ бўлар экан.

Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$C_Н = 3\,К — Ш$$

бунда К — ёпик контурлар сони;

Ш — оддий шарнирлар сони.

Оддий шарнирлар сони дисклар, яъни стерженлар сонидан битта кам бўлади. Қуйида рамаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашга доир бир неча мисол кўриб ўтамиз.

1- мисол. 7.1- расм, а-да берилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Контурлар сонини белгилашда А, В, С таянчлари ҳаёлан туташтирилади. У ҳолда К=2 бўлади.

Шарнирлар сонини белгилашда шарнирли қўзғалмас таянчда Ш=1 деб, қўзғалувчи таянчда эса, Ш=2 деб олинади:

$$C_Н=3 \cdot 2 — 3=3.$$

Демак, мазкур рама уч марта статик ноаниқ экан.

2- мисол. 7.2- расм, *а*-да тасвирланган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони К=2; оддий шарнирлар сони $Ш= 2+1 =3$; $C_Н=3\cdot 2-3=3$.

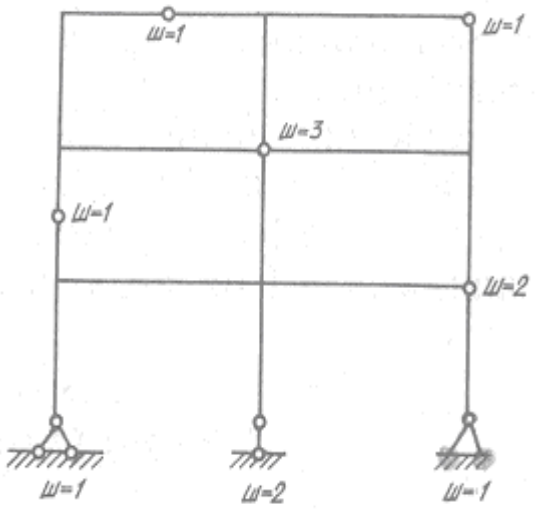
Демак, бу рама ҳам уч марта статик ноаниқ экан.

3- мисол. 7.3- расмда кўрсатилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони К= 6, оддий шарнирлар сони (шаклда кўрсатилган) Ш=12;

$$C_H = 3 \cdot 6 - 12 = 6.$$

Демак, рама олти марта статик ноаниқ экан.



7.3- расм

Статик ноаниқ системалар қуйидаги хоссаларга эгадир:

1. Статик ноаниқ системалар таркибида ортиқча боғланишларнинг мавжудлиги туфайли ўзига мос статик аниқ системага нисбатан бикирлиги юқорироқ бўлади.

2. Статик ноаниқ системалар ўзига мос статик аниқ системаларга нисбатан тежамлироқ бўлади.

3. Статик ноаниқ системаларда бирор ортиқча боғланишнинг шикастланиши иншоотнинг бутунлай ишдан чиқишига олиб келмайди. Статик аниқ системаларда бирорта боғланиш бу-зилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади.

4. Статик ноаниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши ва таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлади. Система элементларининг узунлигидаги фарқлари, элементларни йиғишда йўл қўйилган баъзи ноаниқликлар ҳам системада қўшимча зўриқишлар уйғотади.

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашни кучлар усулидан бошлаймиз. Бу усул қадимий ва пухта ишланган усуллардан бири бўлиб, қамровининг кенглиги, ўзлашувининг осонлиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради.

7. 2. Кучл ар усулининг асосий системасини танлаш

Ҳар қандай статик ноаниқ системанинг ҳисоби унинг ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади. Шундан сўнг асосий система танланади. Берилган системанинг асосий системалари бир нечта бўлиши мумкин.

Ҳисоблаш учун шуларнинг ичидан энг қулайи танлаб олинади. Кейинги ҳисоблар ана шу танланган система устида олиб борилади.

Хўш, асосий системанинг ўзи нима ва у қандай ҳосил қилинади?

Асосий система статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлиб, у берилган системадаги ортиқча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинади.

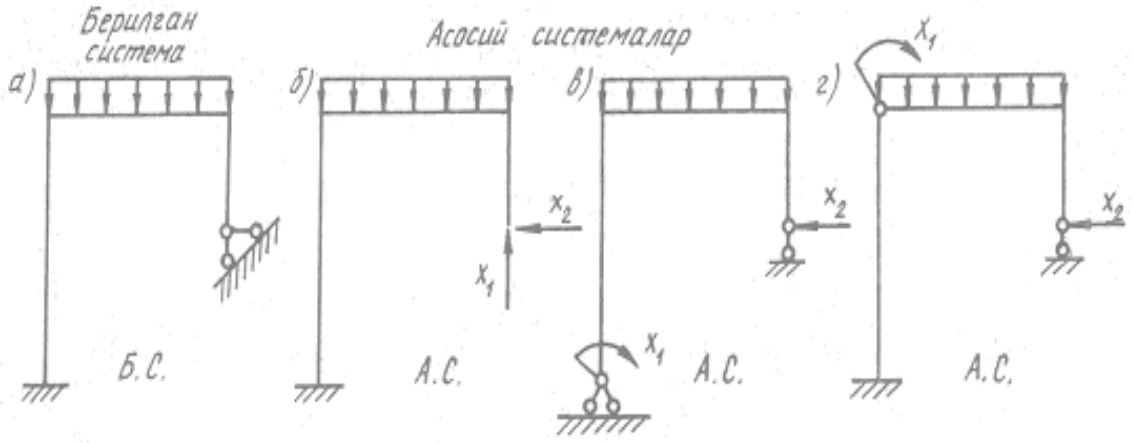
Асосий система ҳосил қилишнинг уч хил йўли бор:

а) ортиқча деб қабул қилинган таянчлар.ёки таянч стерженлари ташлаб юборилади;

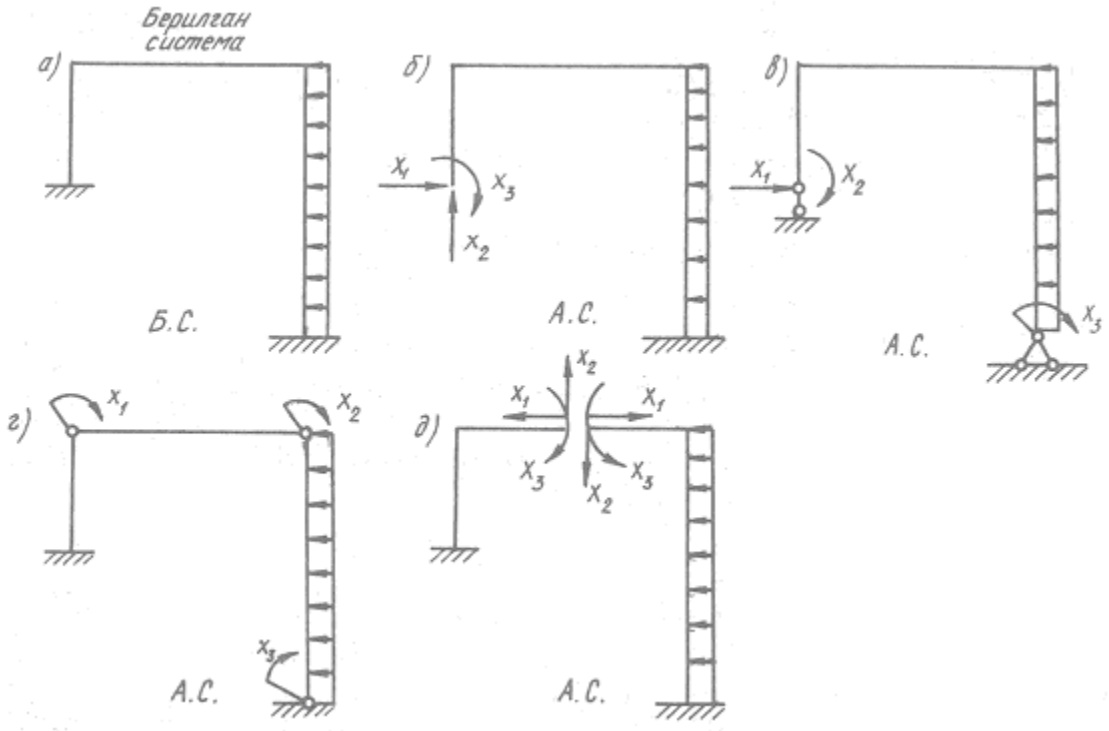
б) берилган системага шарнирлар киритилади;

в) берилган системанинг бирор кесими қирқилади.

Ҳар учала ҳолда ҳам амалда ортиқча боғланишлар ташлаб юборилган деб ҳисобланади. Шундан сўнг, берилган системанинг дастлабки мувозанат ҳолатини тиклаш мақсадида йўқотилган боғланишлар ўрнига уларнинг. вазифасини бажарувчи номаълум кучлар (X_1, X_2, X_3 ва х.к.) қўйилади. 7.4-расмда икки номаълумли, 7.5-расмда уч номаълумли. раманинг турли, асосий системалари акс эттирилган.



7.4-расм



7.5-расм

Расмларга изоҳ берамиз. 7.4- расм, б, в, г-да 7.4- расм, а-да берилган раманинг уч хил асосий системаси тасвирланган. Расм *б* - да шарнирли қўзғалмас таянч ташлаб юборилиб, унинг ўрнига таянч реакциялари X_1 ва X_2 қўйилган. Расм в-да чапдаги шарнирсиз таянч шарнирли қўзғалмас таянч билан, ўнгдагиси эса шарнирли қўзғалувчи таянч билан алмаштирилган. Инкор этилган боғланишлар ўрнига реакция кучлари тасвирланган. Расм г-да раманинг чапки бикир тугунига шарнир киритилган ва шарнир туфайли йўқотилган боғланиш ўрнига момент X_1 қўйилган. Раманинг ўнг таянчидаги горизонтал стержень ташлаб юборилиб, ўрнига реакция кучи X_2 қўйилган.

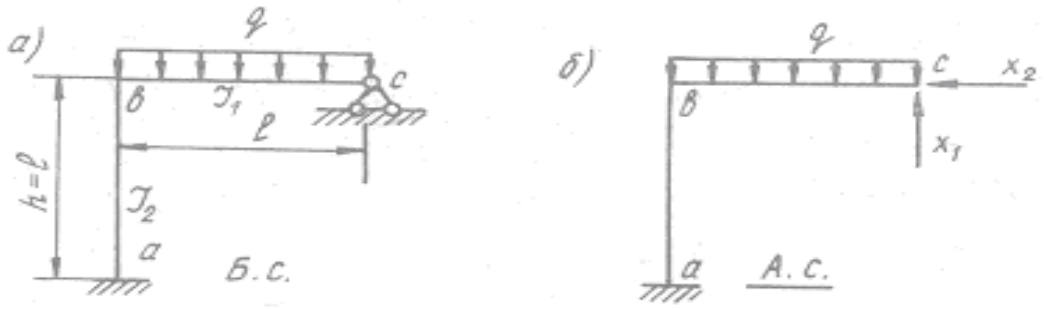
Учала асосий система ҳам геометрик ўзгармас, статик аниқдир. Ҳисоб ишлари учун улар ичидан исталган системани танлаб олиш мумкин. Учала ҳолда ҳам ҳисоб натижалари бир хил чиқаверади. Бироқ, 7.4- расм, *б* - да тасвирланган асосий система бўлар ичида энг мақбулидир. Чунки бундай системанинг M эпюраларини қуриш ва кўчишларини аниқлаш бошқаларига нисбатан бирмунча қулай.

7.5- расмда уч номаълумли раманинг тўрт хил асосий системаси тасвирланган. Буларнинг дастлабки учтаси (7.5- расм, *б, в, г*) аввалги раманикига ўхшаш. Оҳиргиси (7.5- расм, *д*) қирқиш усулида ҳосил қилинган. Қирқилган кесимга ташқи кучлар таъсирида шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучлар — бўйлама куч X_1, кўндаланг куч X_2 ва эгувчи момент X_3 лар қўйилган. Бу тўрт асосий системанинг биринчиси ва - оҳиргиси ҳисоблаш учун қулайдир.

7.3. Кучлар усулининг каноник тенгламалари

Асосий системаларда ортиқча боғланишлар номаълум кучлар билан алмаштирилишини олдинги параграфда кўриб ўтдик. Эндиги вазифа ана шу номаълум кучларни аниқлашдан иборат. Бунинг учун статика тенгламаларига қўшимча равишда *каноник*[1] деб аталувчи тенгламалар тузамиз. Каноник тенгламаларни тузиш тартибини икки номаълумли рама мисолида кўриб ўтамиз. Берилган раманинг (7.6- расм, *а*) асосий системасини синиқ консол кўринишида (7.6- расм, *б*) танлаймиз.

Ташлаб юборилган таянч ўрнига номаълум кучлар қўямиз, сўнгра куч усулининг каноник тенгламаларини тузамиз.



7.6-расм

Берилган рамада шарнирли қўзғалмас таянчнинг маркази С вертикал ва горизонтал йўналишларда қўзғалмасдир, яъни унинг шу йўналишлардаги кўчишлари нолга тенгдир.

[1] *Канон* — қонун, қоида, каноник тенглама — маълум қонуният асосида тузилган тенглама.

Бундай шарт асосий системада, ҳам сақланиб қолиши лозим, яъни С нуқтасининг вертикал ва горизонтал кўчишлари нолга тенг бўлиши зарур. Бу шартни қисқа кўринишда қуйидагича ифодалаш, мумкин:

$$\Delta_{x_1} = 0;\ \Delta_{x_2} = 0; \tag{7.1}$$

бу ерда Δ_{x_1} -стержень учи *C* нинг X_1 куч йўналишидаги кўчиши;

Δ_{x_2} -шу нуқтанинг X_2 кучи йўналишидаги кўчиши.

Ҳар иккала кўчиш x_1 ва x_2 кучлари ҳамда ташқи юклар таъсирида вужудга келади. Кучлар таъсирининг мустақиллиги қоидасидан фойдаланиб, (7.1)ни алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида ифодалаймиз.

$$\begin{aligned} &\Delta_{x_1 x_1} + \Delta_{x_1 x_2} + \Delta_{x_1 P} = 0; \\ &\Delta_{x_2 x_1} + \Delta_{x_2 x_2} + \Delta_{x_2 P} = 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Бу ерда кўчишларга қўйилган биринчи индекслар кўчишнинг йўналишини, иккинчи индекслар эса шу кўчишни юзага келтирувчи сабабни билдиради.

Энди x_1 ва x_2 кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни Гук қонунига асосан бирлик кўчишлар орқали ифода этамиз.

$$\Delta_{x_1 x_1} = x_1\delta_{11};\ \Delta_{x_1 x_2} = x_2\delta_{12};\ \Delta_{x_2 x_1} = x_1\delta_{21};\ \Delta_{x_2 x_2} = x_2\delta_{22}$$

Буларни (7.2) тенгламага қўйсак, икки номаълумли система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари келиб чиқади;

$$\begin{aligned} &x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \\ &x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} + \Delta_{2P} = 0; \end{aligned} \tag{7.3}$$

Бу ерда $\delta_{11} - x_1$ кучи қўйилган нуқтанинг шу куч йўналишида x_1=1 кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

$\delta_{12} - x_1$ кучи қўйилган нуқтанинг шу куч йўналишида x_1=1 кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

$\Delta_{1P} - x_1$ кучи йўналишида, $\Delta_{2P} - x_2$ кучи йўналишида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Агар (7.3) да ифодаланган каноник тенгламаларнинг тузилишига жиддий эътибор берсак, унинг ёзилишида маълум қонуният борлигини пайқаш қийин эмас. Шу қонуниятдан фойдаланиб системанинг статик ноаниқлик даражасига қараб, каноник тенгламаларни керагича туза оламиз. Бинобарин, система (масалан, рама) неча номаълумли бўлса, тенгламалар сони ўшанча бўлади. Масалан, уч номаълумли рама учун каноник тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0$$
$$X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+\Delta_{2P}=0$$
$$X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0 \quad \textit{ва ҳ.к.} \qquad (7.4)$$

(7.3) ва (7.4) да ифодаланган каноник тенгламаларда номаълум сифатида кучлар (X_1, X_2, X_3...) турибди. Мазкур усулнинг «кучлар» усули деб аталишининг сабаби ҳам айнан ана шунда. Ушбу тенгламалардаги бирлик кўчишлар (δ_{ik}) — коэффициент, ташқи кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар (Δ_{ip}) эса озод хад вазифасини ўтайди. Кўчишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги Максвел теоремасига биноан $\delta_{ik}=\delta_{ki}$ бўлади.

Бир хил индексли бирлик кўчишлар (δ_{11},δ_{22}) ннинг ишоралари ҳамиша мусбат бўлади. Шу сабабли улар ҳеч қачон нолга айланмайди ва ҳамма вақт тенглама таркибида иштирок этади. Шу сабабли улар *бош кўчишлар* деб аталади.

Турли индексли кўчишлар (δ_{12},$\delta_{13...}$) эса мусбат ва манфий ишораларга эга бўлиши ва демак, ноль бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун булар *иккинчи даражали* кўчишлар деб аталади.

7.4. Каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш

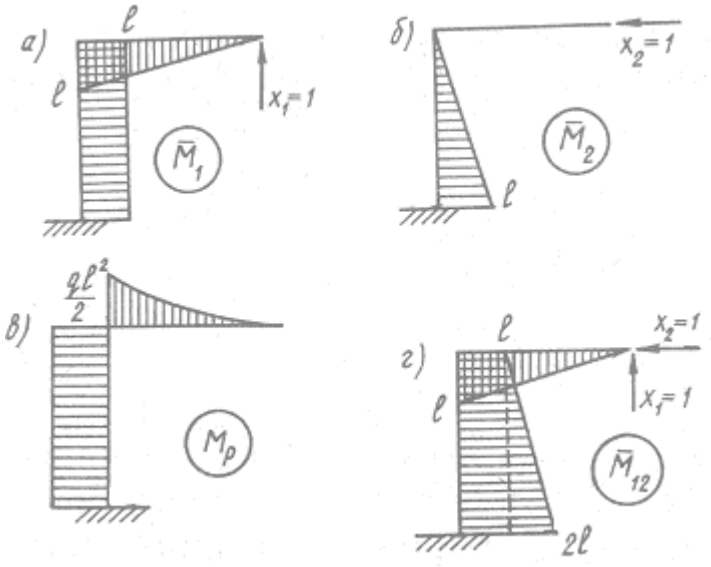
Кучлар усулининг каноник тенгламаларини ечиш учун, яъни улардаги номаълум кучлар ва моментларни аниқлаш учун аввал тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод хадлари топилади.

Маълумки, каноник тенгламаларнинг коэффициент ва озод хадлари кўчишлардир. Шунинг учун уларни аниқлашда 6-бобда баён этилган кўчишлар назариясидан фойдаланамиз.

7.6- расмдаги раманинг кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун бирлик кучлар таъсирида эгувчи моментларнинг бирлик эпюраларини (7.7- расм, *а, б*) қуриб оламиз. Ташқи кучлар таъсиридаги M_p эпюраси 7.7- расм, *в*-да акс эттирилган.

Бирлик кўчишлар қуйидагн формулалардан топилади:

$$\delta_{11}=\sum_n\int_0^l\frac{\overline{M}_1^{\,2}}{EJ}dx;\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\sum_n\int_0^l\frac{\overline{M}_1\,\overline{M}_2}{EJ}dx;$$
$$\delta_{22}=\sum_n\int_0^l\frac{\overline{M}_2}{EJ}dx. \tag{7.5}$$



7.7- расм

Бу ерда $\overline{M}_1$ — асосий системанинг исталган кесимда бирлик куч x_1= 1 дан ҳосил бўлган момент; $\overline{M}_2$ — ўша кесимда x_2 = 1 кучидан ҳосил бўлган момент; n — рама стерженлари сони.

Ташқи юклардан ҳосил бўлган кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\Delta_{1P} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} dx; \qquad \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 M_P}{EJ} dx; \tag{7.6}$$

Верешчагин формуласидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюраларидан (7.7-расм, *а, б*) қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5ql^4}{8EJ}; \quad \Delta_{2P} = -\frac{ql^4}{4EJ}.$$

Бу ерда J_1=J_2= J деб олинган.

Тўғри ечимга эга бўлиш учун кўчишлар тўғри топилган бўлиши керак. Буларнинг тўғри ёки нотўғри топилганлигини текшириб кўрса бўлади. Икки хил текшириш бор: қаторма-қатор текшириш ва ялпн текшириш.

Текшириш учун бирлик эпюраларни қўшиб, йиғинди эпюра ($\overline{M}_{12}$) қурилади (7.7- расм, г). *Қаторма-қатор текшириш* қуйидаги формула асосида амалга оширилади:

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_{12}}{EJ} dx; \tag{7.7}$$

яъни каноник тенгламанинг биринчи қатордаги коэффициентлар йиғиндиси $\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг чиқса, у ҳолда бу кўчишлар тўғри топилган бўлади.

Ҳудди шунингдек, тенгламанинг иккинчи қатори қуйидагича текширилади:

$$(\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_{12}}{EJ} \tag{7.8}$$

яъни кўчишлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $\overline{M}_2$ ва $\overline{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Ялпи текширишда барча коэффициентлар йиғиндиси, $\overline{M}_{12} \bullet \overline{M}_{12}$ кўпайтмасига тенг бўлиши зарур, яъни

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) + (\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_{12}^2}{EJ} dx \qquad (7.9)$$

Топилган коэффициентларни тўлиқ текширамиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_{12}^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{l^2}{2}\frac{2}{3}l + l^3\frac{3}{2}l + \frac{l^2}{2}\frac{5}{3}l\right) = \frac{8l^3}{3EJ}.$$

Бирлик кўчишлар йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{4}{3}l^3 + \frac{1}{3}l^3 + l^3\right) = \frac{8l^3}{3EJ}.$$

Кўпайтма йиғиндига тенг чиқди. Демак, кўчишлар тўғри топилган.

Энди биринчи қатор коэффициентларини текширамиз:

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{11l^3}{6EJ}$$

$\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_{12}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + \frac{3l^2}{2}l\right) = \frac{11l^3}{6EJ}.$$

Бу ерда ҳам йиғинди кўпайтмага тенг чикди. Шундай бўлиши ҳам керак эди.

Ниҳоят озод хадларни текширамиз:

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{M_P \overline{M}_{12}}{EJ} dx; \qquad (7.10)$$

яъни озод хадлар йиғиндиси $\overline{M}_{12}$ эпюраси билан M_p эпюрасининг кўпайтмаснга тенг бўлиши керак. Бу шартнинг бажарилиши озод хадларнинг тўғри топилганлигини англатади.

Кўчишлар, яъни коэффициент ва озод хадлар тўғри топилганига ишонч ҳосил килингач, уларни каноник тенгламаларга қўямиз. Тенгламаларни биргаликда ечиб, номаълум кучларни аниқлаймиз:

$$X_1 \cdot \frac{4l^3}{3} + X_2 \frac{l^3}{2} - \frac{5ql^4}{8} = 0;$$
$$X_1 \cdot \frac{l^3}{2} + X_2 \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{4} = 0.$$

Бу ердан

$$X_1 = \frac{3ql}{7} \text{ ва } X_2 = \frac{3ql}{28}$$

келиб чиқади.

7.5. Статик ноаниқ рамаларнинг *M*, *Q* ва *N* эпюраларини қуриш

Каноник тенгламалардан ортиқча номаълумлар (X_1,X_2...) аниқлангач, раманинг. натижавий, яъни тугал M эпюраси қурилади. Исталган кесимдаги моментнинг қиймати қўшиш усулида аниқланади:

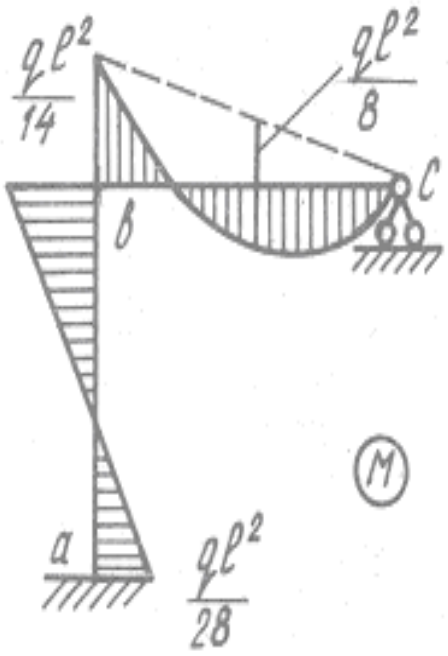
$$M = M_P + X_1\overline{M}_1 + X_2\overline{M}_2 + ... + X_n\overline{M}_n \qquad (7.11)$$

Бу ерда M_P — статик аниқ асосий системада ташқи юклардан ҳосил бўлган момент; $\overline{M}_1$ — асосий системада $X_1 = 1$ кучидан ҳосил бўлган момент.

X_1 кучининг ҳақиққий қиймати таъсирида ҳосил бўлган моментни топиш учун $\overline{M}_1$ моментини X_1 га кўпайтирамиз, яъни X_1 таъсиридаги ҳақиқий момент $X_1\overline{M}_1$ бўлади. Бу қоида бошқа номаълумлар (X_2, X_3, ... X_n) га ҳам тегишлидир,

7.6- расмда берилган икки номаълумли раманинг мазкур усулда қурилган *M* эпюраси 7.8- расмда акс этган. Расмда ригелнинг ўртасидаги момент ҳам кўрсатилган. Раманинг эгувчи моментлар эпюраси ҳамма вақт стерженнинг толалари чўзилган томонга чизилишини эслатиб ўтамиз.

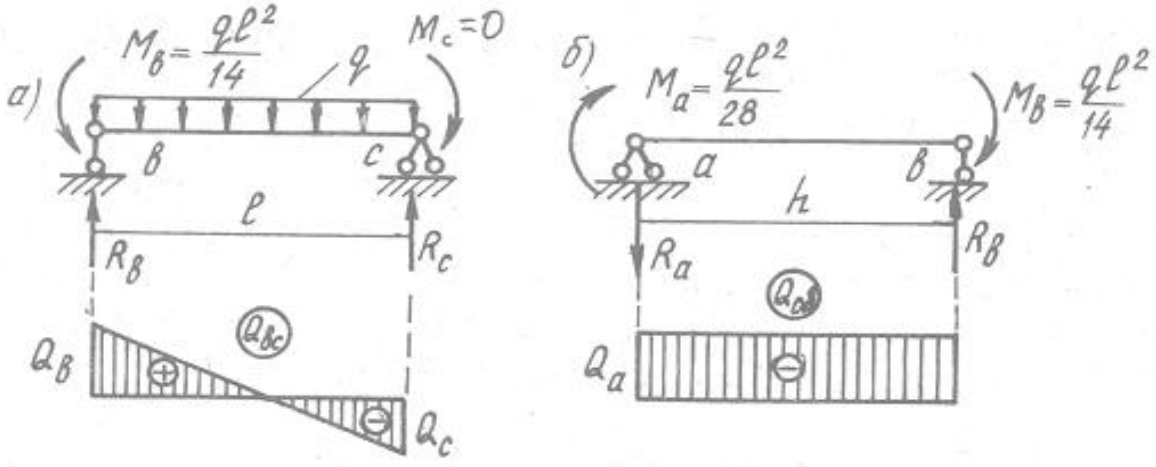
Статик ноаниқ раманинг якунловчи *M* эпюрасини қуриб бўлдик. Бу билан ҳисобнинг энг муҳим ва мураккаб қисми тугади. Энди кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраларини қуришга киришсак бўлади.



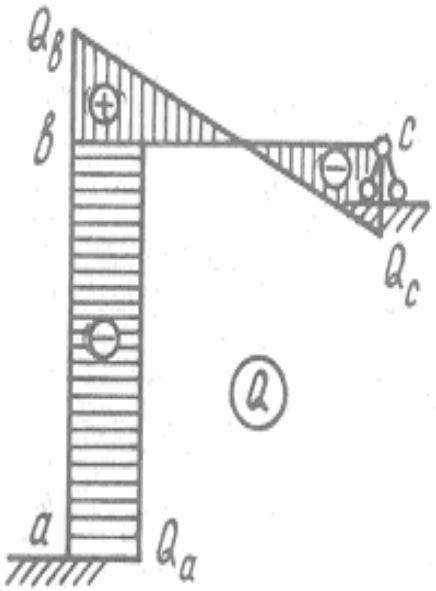
7.8-расм

Нега деганда *M* эпюраси асосида *Q* эпюраси, *Q* эпюраси асосида *N* эпюраси қурилади.

Q эпюрасини қуриш учун раманинг стерженларини алоҳида бўлакларга ажратамиз ва уларни бир оралиқли статик аниқ балкалар сифатида ҳисоблаймиз. Бунда балкаларга ташқи кучлардан ташқари раманинг *M* эпюрасидан олинган тугун моментлари ҳам қўйилади. 7.9- расмда 7.6- расм, *а*-да берилган раманинг алоҳида балкаларга ажратилиши ва тегишли эпюралари тасвирланган. 7.9- расм, *а*-да *bc* ригели, 7.9- расм, *б*-да *ab* устуни балка кўринишида акс эттирилган ҳамда ташқи куч ва тугун моментлари кўрсатилган.



7.9-расм



7.10- расм

Оддий балканинг *Q* эпюраси материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида қурилади. Ишнинг охирида алоҳида балкалар учун қурилган *Q* эпюраси рама ўқига тўпланади (7.10- расм).

Энди *Q* эпюраси асосида *N* эпюрасини қурамиз. Бунда ригелга қўйилган кўндаланг кучлар устун учун бўйлама куч, устунга қўйилган кўндаланг кучлар эса ригел учун бўйлама куч бўлади деган қоидага асосланамиз.

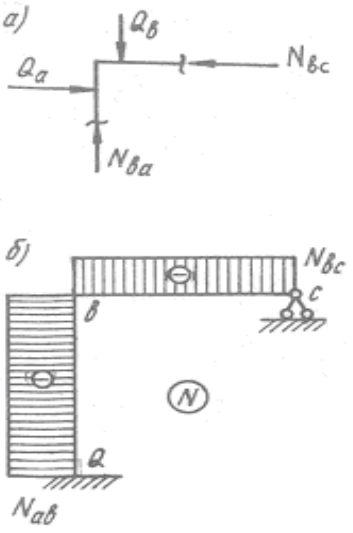
Бўйлама куч стерженни чўзса — мусбат, сиқса — манфий ишора олинади.

Биз текшираётган раманинг (7.6- расм) бўйлама кучлар эпюрасини қуриш учун унинг *Q* эпюрасидан *b* тугунни қирқиб оламиз (7.11- расм, *а*) ва мувозанат шартларини ёзамиз:

$$\sum X = Q_a - N_{bc} = 0;\ \textit{бу ердан}\ N_{bc} = Q_a;$$
$$\sum Y = N_{ba} - Q_b = 0;\ \textit{бу ердан}\ N_{ba} = Q_b.$$

Аниқланган қийматлар бўйича раманинг N эпюраси қурилади (7.11- расм, 6)

Текшириш. Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси ортган сари ҳисоблаш ишлари мураккаблашиб бораверади. Бундай ҳолларда ҳисоб натижаларини текшириш муҳим аҳамият касб этади. Олдинги параграфда каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини текширишни ўрганган эдик. Бу сафар тугал *M, Q* ва *N* эпюраларини текширишни ўрганамиз. *M, Q, N* эпюраларини текширишнинг икки усули бор: статик текшириш ва деформацион текшириш.



7.11-расм

Эпюраларни *статик* текширганда, яхлит рама ёки унинг айрим қисмлари ва тугунлари учун мувозанат шартлари тузилади. Бунда раманинг барча таянч реакцияларини вертикал ўққа бўлган проекциялари йиғиндиси ташқи юкларнинг вертикал проекциялари билан мувозанатда бўлиши лозим.

Бирор нуқтага нисбатан таянч реакцияларидан олинган моментлар йиғиндиси шу нуқтага нисбатан ташқи кучлардан олинган моментлар йигнндисига тенг бўлиши зарур.

Раманинг ҳар бир тугуни эгувчи моментлар таъсирида мувозанатда ётиши керак, бунинг учун бир тугунга туташган ригель ва устундаги ординаталар ўзаро тенг, бўлиши лозим. Тугунлардаги кўндаланг ва бўйлама кучлар алоҳида қаралганда, мувозанатда бўлмайди, бироқ биргаликда қаралганда тугун мувозанатда ётиши зарур. *M, Q* ва *N* эпюраларини статик текшириш уларнинг тўғри қурилганига кафолат бўлаолмайди, чунки статик мувозанат шартлари номаълумлар хато топилган такдирда ҳам бажарилаверади. Бунинг сабаби шундаки, раманинг тугал *M* эпюраси статик аниқ асосий система учун қурилган. Агар ташқи юк ва аниқланган номаълумлар таъсирида эпюра тўғри курилса, у ҳолда номаълумларнинг исталган қийматида рама статик мувозанат ҳолатида бўлаверади. Натижада номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хато очилмай қолаверади.

Деформацион текшириш ортиқча номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хатоларни пайқаш имконини беради. Ҳисоб натижаларини деформацион текширишда асосий системаларга қурилган бирлик эпюралар ($\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$) раманинг тугал *M* эпюраси билан навбатма-навбат кўпайтирилади. Агар ортиқча номаълумлар тўғри аниқланиб, эпюралар тўғри қурилган бўлса, бундай.кўпайтма нолга тенг чиқади.

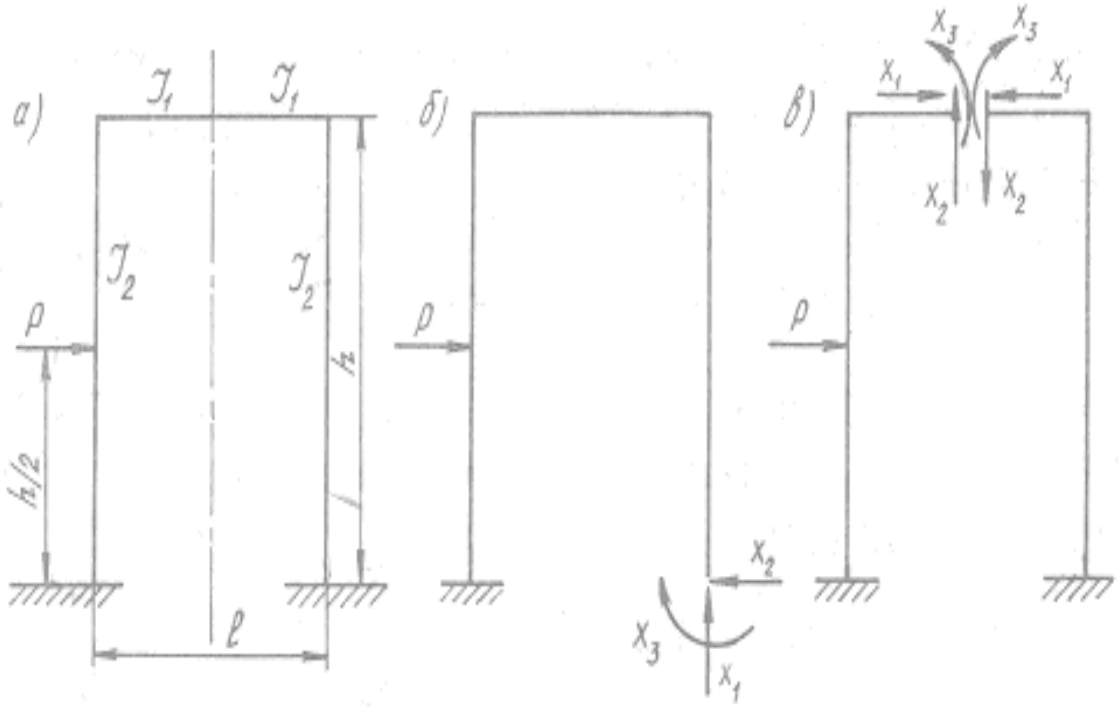
7.6. Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда соддалаштириш усуллари

Каноник тенгламалар сони системадаги ортиқча номаълумлар сонига тенг бўлишини илгари айтиб ўтган эдик. Демак, системанинг статик ноаниқлик

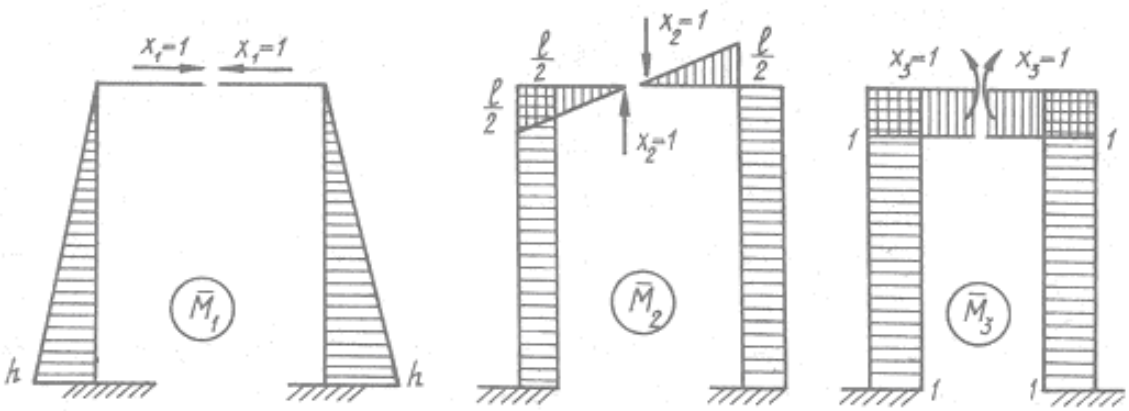
даражаси ортгани сари каноник тенгламалар ҳам ортиб боради, уларни биргаликда ечиш учун тобора кўпрок вақт ва меҳнат талаб этилади. Аниқ усулларда берилган системадаги номаьлумлар сонини камайтириб бўлмайди, бироқ ҳисоблаш ишларини бирмунча осонлаштириш имконини берадиган соддалаштириш усуллари мавжуддир. Қуйида ана шу усулларнинг баъзилари билан танишиб чиқамиз.

Системаларнинг симметриклигидан фойдаланиш

Симметрик рамалар фақат геометрик шаклига кўра эмас, балки таянчлари ва бикирликлари бўйича ҳам симметрик бўлиши лозим. Шунда уларнинг симметриклигидан фойдаланиб баъзи соддалаштиришларга эришиш мумкин. 7.12- расм, *а*-да симметрик статик ноаниқ рама тасвирланган. Рама битта вертикал симметрия ўқига эга. Раманинг чап ва ўнг таянчлари бир хил. Раманинг ҳар иккала устуни, шунингдек ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бир хил инерция моментига эга, бу ҳар иккала устун бир хил бикирликка эга, ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бикирликлари ўзаро тенг демакдир.



7.12-расм



7.13-расм

Агар раманинг асосий системасини 7.12- расм, *б*-да кўрсатилгандек олсак, ҳисоб жараёнида ҳеч қандай соддалашувга эришмаймиз, уч номаълумли учта каноник тенгламалар системаси ўзгаришсиз қолаверади:

$$X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$
$$X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+\Delta_{2P}=0;$$
$$X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0. \qquad (7.12)$$

Агар раманинг асосий системасини 7.12- расм, в-даги кўринишда олсак, каноник тенгламалар системаси анча ихчамлашади. Раманинг асосий системасини ҳосил қилишда уни симметрия ўқи ўтган кесимдан қирқдик. Бу асосий системанинг бирлик эпюраларини қурсак, симметрик ($\bar{M}_1, \bar{M}_3$) ва тескари симметрик ($\bar{M}_2$), эпюралар ҳосил бўлади (7.13-расм).

Тўғри ва тескари симметрик эпюраларнинг кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Бу қоида каноник тенглама коэффициентларини аниқлашда жуда қўл келади. Чунончи, δ_{12} коэффициентини аниқлашда $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралар Верешчагин формуласи бўйича ўзаро кўпайтирилиши керак. Бироқ эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлгани учун кўпайтма ноль чиқишинини олдиндан биламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{12}= \delta_{21}=0.$$

$\overline{M}_2$ ва $\overline{M}_3$ эпюраларининг кўпайтмасидан $\delta_{23}= \delta_{32}=0$ келиб чиқади. Бунинг оқибатида каноник тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга келади:

$$X_1\delta_{11}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$

$$X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0;$$

$$X_1\delta_{31}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0;$$

яъни яхлит тенгламалар системаси (7.12) иккита мустақил тенгламалар системасига ажралиб кетди:

булардан бири

$$X_1\delta_{11}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1P}=0;$$

$$X_1\delta_{31}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3P}=0; \qquad (7.13)$$

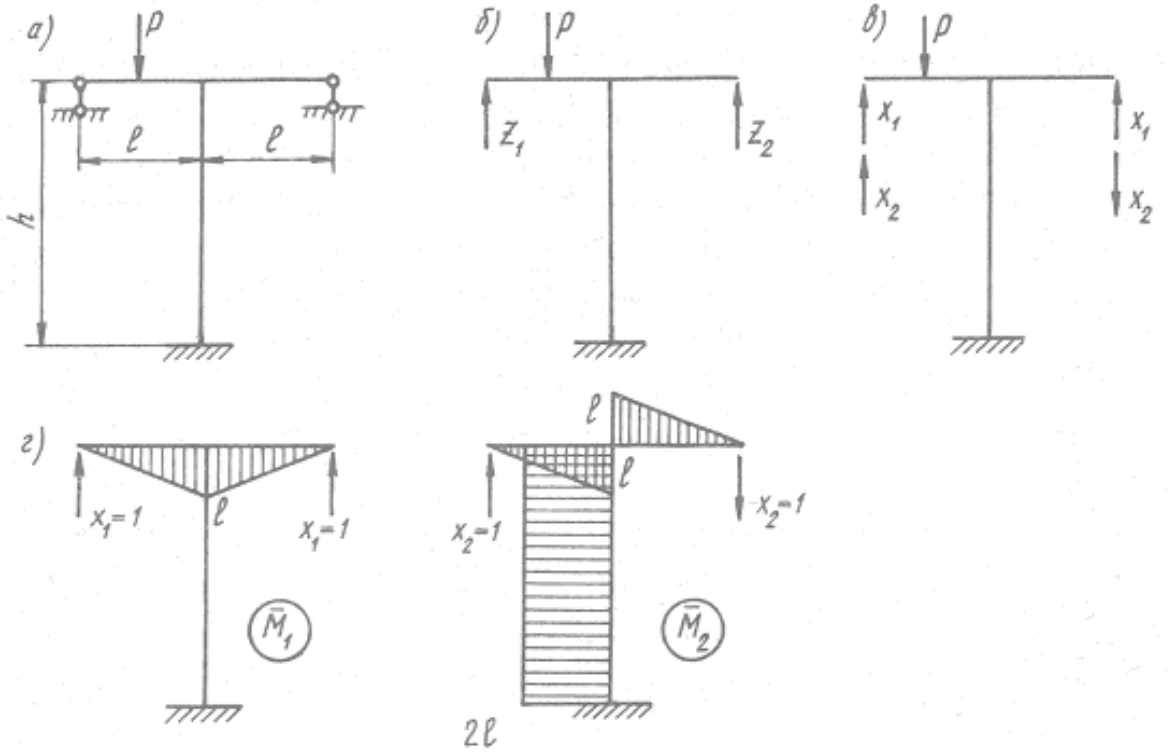
иккинчиси

$$X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0\ . \qquad (7.14)$$

Шундай қилиб, асосий система танлаш жараёнида раманинг симметриклик ҳусусиятларидан фойдаланиб, уч номаълумли яхлит тенгламалар системасини иккита мустақил тенгламалар системасига ажратдик, буларнинг бири икки номаълумли иккита тенглама, иккинчиси бир номаълумли битта тенглама. Натижада ҳисоб ишларини анча қисқартириш имкониятига эга бўлдик.

Номаълумларни гуруҳлаш

Кўп оралиқли симметрик рамаларни ҳисоблашда тўғри ва тескари симметрик бўлган эпюралар ҳосил қилиш учун номаълумлар сифатида алоҳида кучлар эмас, балки кучлар гурухи қабул қилинади. Икки номаълумли рама мисолида усулнинг моҳиятини баён этамиз (7.14- расм, а).



7.14- расм

Берилган рама икки оралиқли бўлиб, шарнирли қўзғалувчан таянчлар устунга нисбатан симметрик жойлашган. Раманинг асосий системасини таянчларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қиламиз. Йўқотилган боғланишлар ўрнига номаълум реакция кучларини қўямиз (7.14- расм, б). Бироқ асосий системани бундай олиниши ҳисоб ишларини соддалаштиришга олиб келмайди, каноник тенгламалар системаси яхлитлигича қолаверади:

$$Z_1\delta_{11}+Z_2\delta_{12}+\Delta_{1P}=0;$$
$$Z_1\delta_{21}+Z_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0;$$

Ҳисоб жараёнида маълум даражада соддалашувга эришиш мақсадида Z_1 реакциясини X_1 ва X_2 номаълумларининг йиғиндиси билан, Z_2 реакция кучини эса X_1 ва X_2 номаълумларининг айирмаси билан алмаштирамиз (7.14- расм, в). Натижада якка кучлар кучлар гуруҳи билан алмашади. Бунинг оқибатида тўғри $\overline{M}_1$ ва тескари $\overline{M}_2$ симметрик эпюраларга эга бўламиз (7.14- расм,г). Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси нолга тенг бўлади, Шунга кўра δ_{12}=0. Каноник

тенгламалар системаси эса алоҳида иккита мустақил тенгламаларга ажралиб кетади:

$$X_1\delta_{11}+\Delta_{1P}=0; \quad X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0.$$

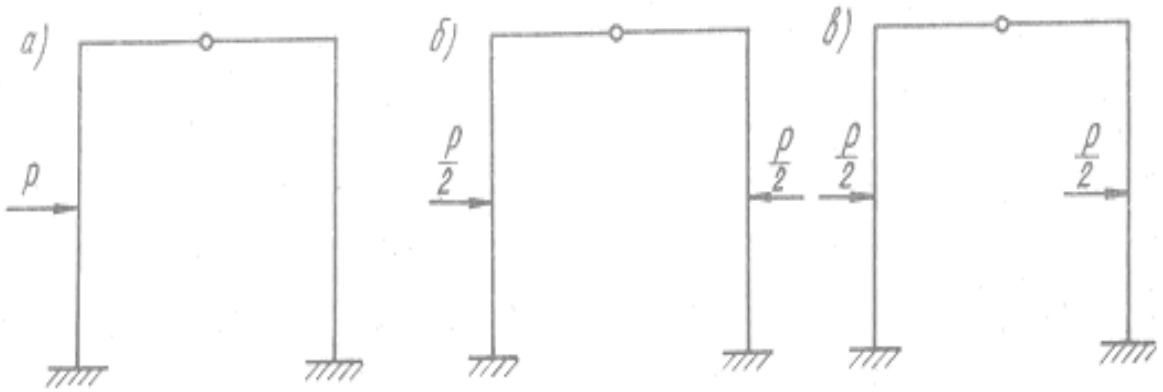
Мазкур тенгламалардан X_1 ва X_2 номаълумлари аниқланади, сўнгра якунловчи M эпюраси қурилади.

$$M = M_P + X_1\overline{M}_1 + X_2\overline{M}_2 .$$

Носимметрик юкларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш

Агар статик ноаниқ симметрик рамаларга қўйилган юклар носимметрик бўлса, уларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли билан ҳисоб ишларини бир мунча соддалаштирса бўлади.

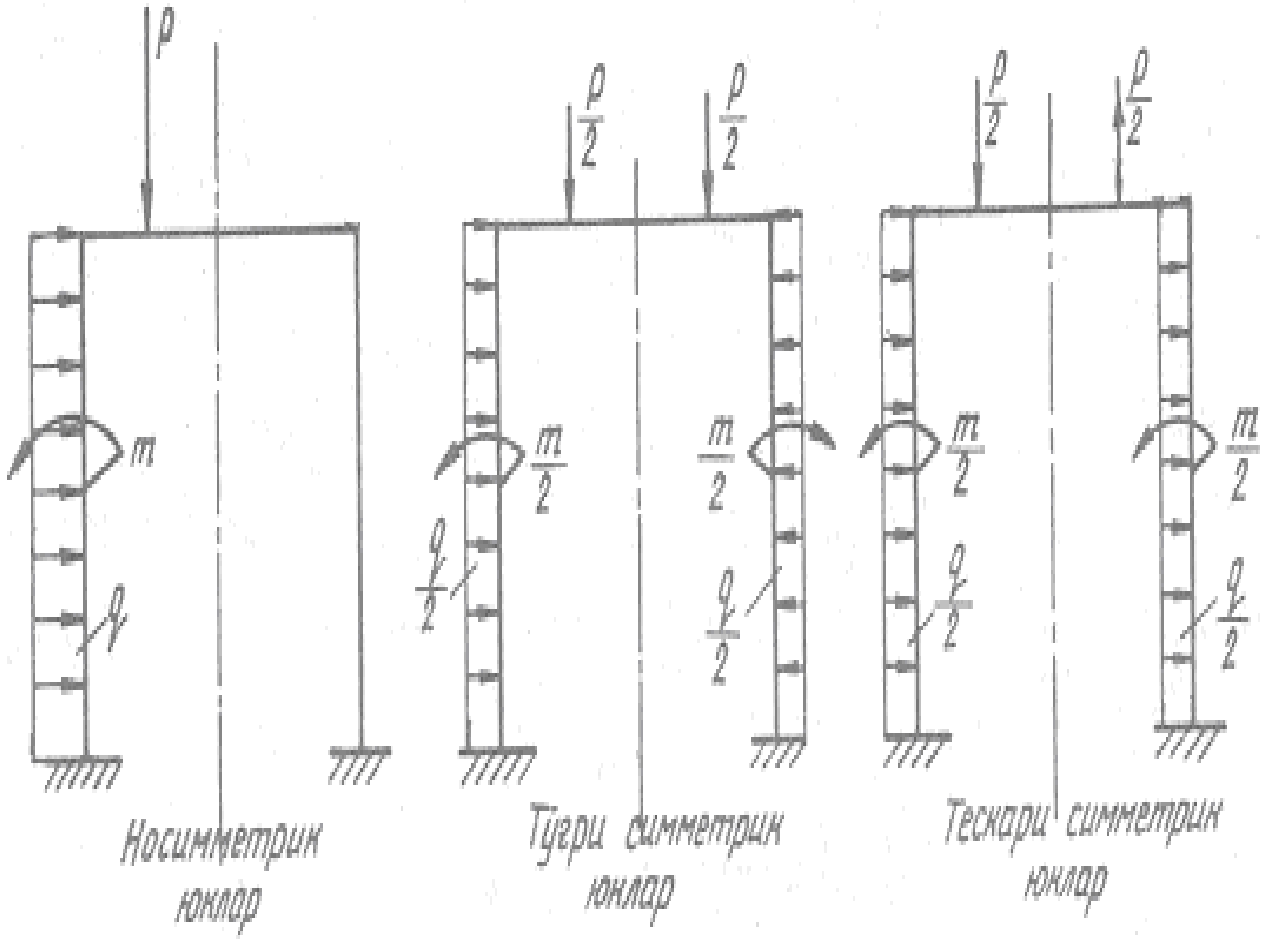
Симметрик рамага носимметрик P кучи қўйилган бўлсин (7.15- расм, *а*). Шу кучни иккига бўлиб, тўғри ва тескари симметрик кучларга ажратамиз (7.15- расм, *б, в*). Кучлар шундай ажратилиши керакки, уларни қайтадан қўшганда, дастлабки куч ҳолати келиб чиксин. Масалан, раманинг чап устунига (расм, *б, в*) бир йўналишда миқдори $P/2$ бўлган иккита куч қўйилган, буларнинг йиғиндиси P га тенг бўлади. Раманинг ўнг устунига эса ўша кучлар қарама-қарши йўналишда қўйилган, бу кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади, натижада дастлабки куч ҳолати келиб чиқади.



7.15- расм

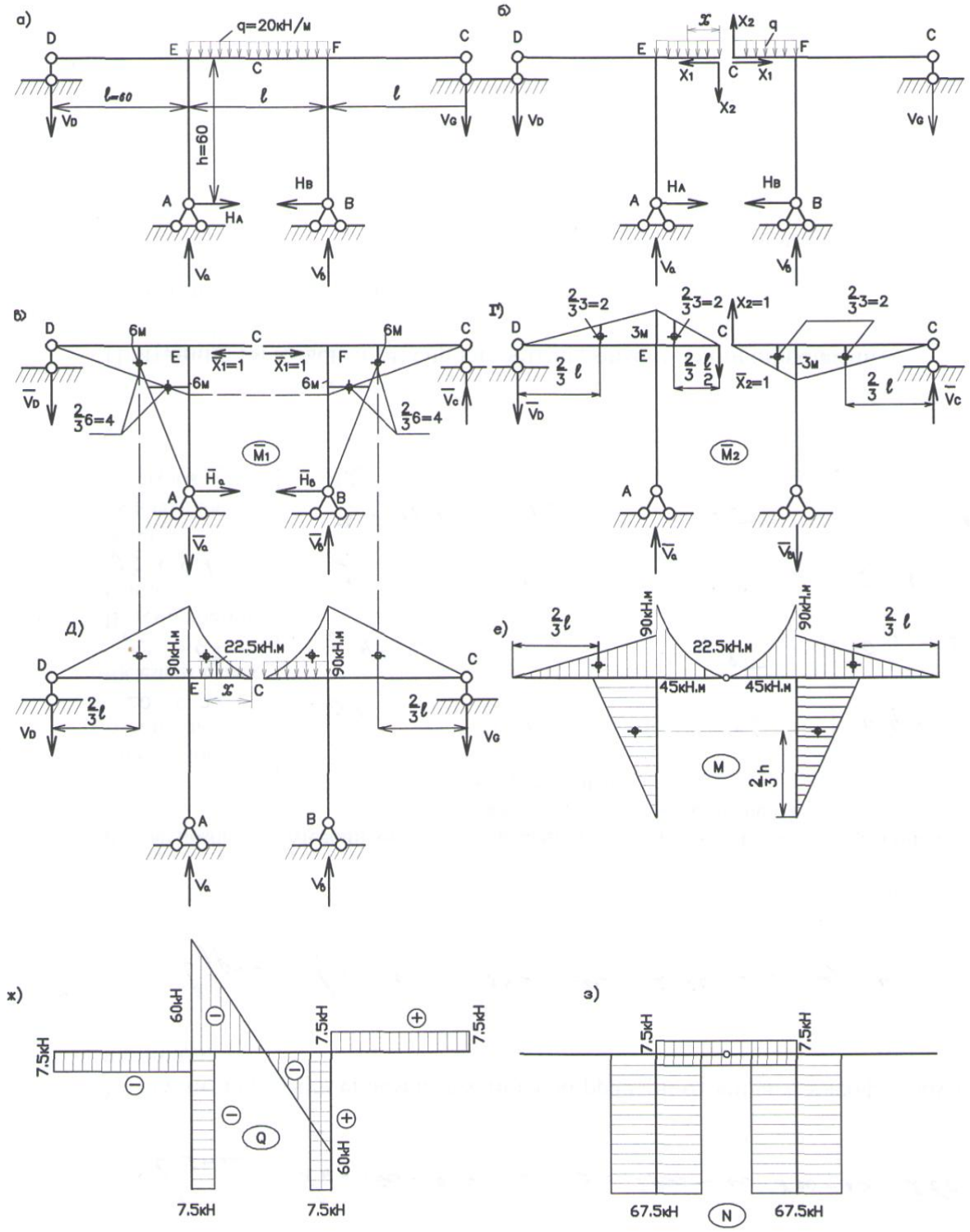
Шундай қилиб, тўғри ва тескари симметрик кучлар қўйилган иккита рамага эга бўлдик (7.15- расм, *б, в*). Энди бу рамалар алоҳида равишда ҳисобланади, тўғри симметрик кучлардан $M_{тўғ}$ эпюраси, тескари симметрик кучлардан $M_{тес}$ эпюраси қурилади. Раманинг берилган кучдан ҳосил бўладиган ҳақиққий *M* эпюраси тўғри ва тескари симметрик эпюралар йиғиндисидан иборат бўлади.

Носимметрик равишда жойлашган турли хил ташқи кучларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли 7.16- расмда кўрсатилган.



7.16- расм

7.1 - мисол. 7.17 -расм, *а* да берилган рама учун *M, Q*, ва *N* эпюралари қурилсин. Якуний эгувчи моментлар эпюрасининг тўғрилиги текширилсин. Раманинг барча элементлари бикирлиги ўзгармас.



7.17- расм

Ечиш.

Раманинг статик ноаниқлик даражасини аниқлаймиз.

$$C_n = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 7 = 2 ,$$

демак, рама икки марта статик ноаниқ.

Раманинг асосий системасини ҳосил қилиш учун ўртадаги C шарнирини олиб ташлаймиз ва ўрнига номаълум ички кучлар X_1 ва X_2 ни қўямиз (7.17-расм, *б*). Асосий системани мана шундай танлаш йўли билан ҳисобда айрим енгилликларга эришамиз. Масалан, δ_{12}, δ_{21} ва Δ_{2p} кўчишлар нолга айланади.

Шарнир олиб ташлангач, ёндош кесимларда вертикал ва горизантал йўналишларда ўзаро кўчиш имконияти пайдо бўлади. Аслида берилган системада шарнир туфайли ҳеч қандай кўчиш вужудга келмайди. Ана шу ҳолатни таъминлаш учун кесим учларига қарама-қарши йўналишларда иккитадан номаълум кучлар (X_1 ва X_2) қўямиз. Бу кучлар ёндош кесимларнинг ўзаро силжишига чек қўяди.

X_1 ва X_2 номаълум кучлар каноник тенгламалардан топилади:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

$\bar{M}_1$ эпюрасини қуриш учун асосий системадаги барча кучлар олиб ташланиб, иккита қара-қарши йўналган горизантал куч $\bar{X}_1 = 1$ қўйилади (7.17-расм, *в*), кейин чап томондаги кесимлар учун эгувчи моментлар аниқланади. Аввал таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$\sum M_A = \bar{V}_d \ell - \bar{X}_1 h = 0$, бундан $\bar{V}_d = \frac{\bar{X}_1 h}{\ell} = \frac{1 \cdot 6}{6} = 1$;

$\sum Y = \bar{V}_d - \bar{V}_a = 0$, бундан $\bar{V}_a = \bar{V}_d = 1$;

$\sum X = \bar{H}_a - \bar{X}_1 = 0$, бундан $\bar{H}_a = \bar{X}_1 = 1$.

ДС элементининг характерли кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_D = 0\,; \quad \bar{M}_E^{\text{чап}} = \bar{V}_d\,\ell = 1\cdot 6 = 6\text{ м}\,;$$

$$\bar{M}_E^{\text{ўнг}} = \bar{M}_E^{\text{чап}} - \bar{H}_a h = 6 - 1\cdot 6 = 0\,; \quad \bar{M}_C = 0.$$

АЕ элементи кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_A = 0\,; \qquad \bar{M}_E = -\bar{H}_a h = -1\cdot 6 = -6\text{ м}\,.$$

$\bar{M}_2$ эпюрасини қуриш учун асосий системага фақат иккита вертикал куч $\bar{X}_2 = 1$ қўямиз (7.17- расм, *г*) ва керакли кесимлардаги эгувчи моментларни ҳисоблаймиз. Таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$$\sum M_A = -\bar{V}_d\,\ell + \bar{X}_2\frac{\ell}{2} = 0\,, \qquad \text{бундан} \qquad \bar{V}_d = \frac{\bar{X}_2}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\;;$$

$$\sum Y = -\bar{V}_d + \bar{V}_a - \bar{X}_2 = 0\,, \ \text{бундан} \quad \bar{V}_a = \bar{V}_d + \bar{X}_2 = 0{,}5 + 1 = 1{,}5.$$

Горизантал кучлар бўлмаганлиги сабабли $\bar{H}_a = 0$.

ДС элементининг характерли кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$\bar{M}_D = 0\;;$$

$$\bar{M}_E^{\text{чап}} = \bar{M}_E^{\text{ўнг}} = -\bar{V}_d\,\ell = -0{,}5\cdot 6 = -3\text{ м};$$

$$\left(\text{ёки} \quad -\bar{X}_2\cdot\frac{\ell}{2} = -1\cdot\frac{6}{2} = -3\text{ м}\right); \qquad \bar{M}_C = 0.$$

АЕ элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар нолга тенг, чунки бу элементга таъсир этувчи ягона куч $\bar{V}_a$ элементнинг оғирлик марказидан ўтиб, момент ҳосил қилмайди.

Энди рама асосий системасининг чап ярмига фақат берилган кучлар таъсирини кўриб ўтамиз (7.17- расм, *д*). Таянч реакцияларини аниқлаймиз.

$$\sum M_A = -V_d\,\ell + q\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{4} = 0\,, \ \text{бундан} \ V_d = \frac{q\ell}{8} = \frac{20\cdot 6}{8} = 15\text{ кН}\,;$$

$$\sum Y = -V_d + V_a - q\frac{\ell}{2} = 0,$$

бундан $V_a = V_d + q\frac{\ell}{2} = 15 + \frac{20\cdot 6}{2} = 75$ кН;

горизантал реакция $H_a = 0$.

ДС элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар:

$$M_D = 0; \quad M_E^{\text{чап}} = M_E^{\text{ўнг}} = -V_d\,\ell = -15\cdot 6 = -90 \text{ кНм};$$

$$M_{x=1,5\text{ м}} = -q\frac{x^2}{2} = -20\cdot\frac{1{,}5^2}{2} = -22{,}5 \text{ кНм}; \qquad M_C = 0.$$

АЕ элементининг кесимларидаги эгувчи моментлар нолга тенг.

Топилган қийматлар асосида асосий системанинг чап қисми учун $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ ва M_p эпюраларини қурамиз (7.17- расм, *в, г, д*).

Асосий системанинг ўнг ва чап қисмлари, шунингдек $\bar{X}_1 = 1$ кучлари, вертикал ўққа нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли, $\bar{M}_1$ эпюрасининг ўнг қисми ҳам чап қисмига симметрик бўлади (7.17- расм, *в*). Шунга ўхшаб, *Мр* эпюраси ҳам вертикал ўққа нисбатан симметрик. Симметрик асосий системага қўйилган $\bar{X}_2 = 1$ кучлари тескари кўринишга эга, шу боисдан $\bar{M}_2$ эпюраси тескари симметрик эпюра бўлади. Ушбу мулоҳазалар асосида $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ *ва* M_p эпюраларини тўлдирамиз, яъни асосий системанинг ўнг қисмини (ҳисобсиз равишда) чизиб қўямиз.

Юқорида берилган каноник тенгламалар тартибига кирувчи кўчишларни аниқлашга ўтамиз.

δ_{11} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ эпюрасини $\bar{M}_1$ эпюрага кўпайтирамиз, яъни юза ω ни ҳам, ордината y ни ҳам шу эпюранинг ўзидан оламиз:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}\left(\frac{6\cdot 6}{2}4 + \frac{6\cdot 6}{2}4\right) = \frac{288}{EI}.$$

δ_{12} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ эпюрани $\bar{M}_2$ эпюрага кўпайтирилади. Уларнинг биринчиси вертикал ўққа нисбатан симметрик, иккинчиси ригелнинг *ДС* қисмида тескари симметрик, *АЕ* ва *BF* элементларида эпюра умуман йўқ. Бироқ кўпайтирилаётган эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлса, изланаётган кўчиш нолга тенг бўлади, чунки эпюраларнинг чап қисмини кўпайтирганда маълум миқдорли бир сон чиқади, ўнг қисмини кўпайтирганда ўша сон тескари ишора билан чиқади. Натижада, $\delta_{12} = 0$ бўлади.

Δ_{1p} кўчишни аниқлашда Мр эпюраси $\bar{M}_1$ эпюрага кўпайтирилади:

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{6\cdot 90}{2}4 + \frac{6\cdot 90}{2}4\right) = -\frac{2}{EI}\left(\frac{6\cdot 90}{2}4\right) = -\frac{2160}{EI}.$$

Максвел теоремасига кўра $\delta_{12} = \delta_{21}$. Бироқ $\delta_{12} = 0$ бўлганлиги сабабли $\delta_{21} = 0$.

δ_{22} кўчишни аниқлаш учун $\bar{M}_2$ эпюрани ўзини ўзига кўпайтирамиз:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(\frac{6\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 3}{2}2 + \frac{3\cdot 3}{2}2 + \frac{6\cdot 3}{2}2\right) = \frac{2}{EI}\left(\frac{6\cdot 3}{2}2 + \frac{3\cdot 3}{2}2\right) = \frac{54}{EI}.$$

Δ_{2p} ни аниқлаш учун $\bar{M}_2$ ва Мр эпюралари кўпайтирилади. Бироқ булардан бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлганлиги сабабли, изланаётган кўчиш $\Delta_{2p} = 0$ бўлади. Шундай қилиб асосий системанинг симметриклиги δ_{12}, δ_{12} ва Δ_{2p} кўчишларни нолга тенглаштириш имконини берди.

Кўчишларнинг аниқланган қийматларини каноник тенгламаларга қўямиз:

$$288X_1 + 0\cdot X_2 - 2160 = 0;$$

$$0\cdot X_1 + 54X_2 + 0 = 0.$$

Бир бирига боғлиқ бўлмаган икки тенгламага эга бўлдик.

Уларнинг биридан X_1 ни топамиз:

$$X_1 = \frac{2160}{288} = 7{,}5 \text{ кН}.$$

Иккинчи тенгламадан $X_2 = 0$ эканлиги маълум бўлади.

Демак, симметрик системаларга симметрик юклар қўйилган бўлса, тескари симметрик ноъмалумлар нолга тенг бўлар экан.

Эндиги навбатда характерли кесимлардаги якуний (йиғинди) эгувчи моментларнинг қийматдарини аниқлаймиз. Бунинг учун Мр эпюраси ординаталари билан $\bar{M}_1$ эпюраси ординаталарнинг $X_1 = 7{,}5$кН га кўпайтирилган ординаталари алгебраик йиғиндисини оламиз. Қўшилаётган эпюралар симметрик бўлганлиги сабабли, йиғинди эпюра ҳам симметрик бўлади. Шу боисдан раманинг фақат чап қисмини ҳисоблаймиз:

АЕ элементи

$$M_A = 0; \quad M_E = 0 - 6 \cdot 7{,}5 = -45 \text{ кНм}.$$

ДС элементи

$$M_D = 0; \quad M_E^{\text{чап}} = -90 + 6 \cdot 7{,}5 = -45 \text{ кНм}; \quad M_C = 0;$$

$$M_E^{\text{ўнг}} = -90 + 0 = -90 \text{ кНм}; \quad M_{x=1{,}5\text{ м}} = -22{,}5 + 0 = -22{,}5 \text{ кНм}.$$

Топилган қийматлар бўйича эгувчи моментлар эпюрасининг чап қисмини қурамиз, кейин шунга симметрик равишда ўнг қисмини чизамиз. (7.17- расм, *е*).

М эпюраси тўғри қурилганлигини текшириш учун *С* шарнири қўйилган нуқтанинг горизантал ва вертикал кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун *М* эпюрасини навбатма навбат $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралари билан кўпайтирамиз. Агар кўпайтма натижалари ноль чиқса, *М* эпюраси тўғри қурилган бўлади.

М ва $\bar{M}_1$ эпюраларини кўпайтирамиз:

$$\Delta_{\text{гор}} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{6 \cdot 45}{2}4 + \frac{6 \cdot 45}{2}4 - \frac{6 \cdot 45}{2}4 + \frac{6 \cdot 45}{2}4\right) = 0.$$

Симметрик ва тескари симметрик эпюралар кўпайтмаси ҳамма вақт ноль бўлишини биламиз. Бизнинг ҳолда M симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюра, шу сабабга кўра $\Delta_{верт} = 0$.

Раманинг Q ва N эпюраларини қуриш учун унинг таянч реакцияларини аниқлаймиз.

Асосий системанинг чап қисмидаги таянч реакцияларини аниқлаймиз (7.17- расм, *б*):

$$\sum M_A = -V_d \ell + q\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{4} - X_1 h = 0,$$

бундан $V_d = \dfrac{\frac{q\ell^2}{8} - X_1 h}{\ell} = \dfrac{\frac{20\cdot 6^2}{8} - 7{,}5\cdot 6}{6} = 7{,}5$ кН;

$$\sum Y = -V_d + V_a - q\frac{\ell}{2} = 0,$$

бундан $V_a = V_d + q\frac{\ell}{2} = 7{,}5 + 20\cdot\frac{6}{2} = 67{,}5$ кН;

$$\sum X = H_a - X_1 = 0, \quad \text{бундан} \quad H_a = X_1 = 7{,}5\ \text{кН}.$$

$X_2 = 0$ бўлганлиги сабабли юқоридаги тенгламалар таркибига киритилмади.

Асосий системанинг чап ва ўнг қисмлари юклар билан бирга симметрик бўлганлиги сабабли, ўнг қисм таянч реакциялари қуйидагича бўлади:

$$V_g = V_d = 7{,}5\ \text{кН};\ V_b = V_a = 67{,}5\ \text{кН};\ H_b = H_a = 7{,}5\ \text{кН}.$$

Асосий система учун топилган реакциялар берилган система учун ҳам реакция ҳисобланади. Бу реакцияларни берилган системага кўчириб, характерли кесимлар учун кўндаланг кучларни ҳисоблаймиз:

DG элементи

$$Q_D = -V_d = -7{,}5\ \text{кН}; \qquad Q_E^{\text{чап}} = Q_d = -7{,}5\ \text{кН};$$

$$Q_E^{\text{ўнг}} = Q_E^{\text{чап}} + V_a = -7{,}5 + 67{,}5 = 60\ \text{кН};$$

$$Q_F^{\text{чап}} = Q_E^{\text{ўнг}} - q\ell = 60 - 20 \cdot 6 = -60\ \text{кН};$$

$$Q_G = Q_F^{\text{ўнг}} = 7{,}5\ \text{кН}.$$

AE элементи

$$Q_A = -H_a = -7{,}5\ \text{кН}; \qquad Q_E = Q_A = -7{,}5\ \text{кН}.$$

BF элементи

$$Q_B = H_a = 7{,}5\ \text{кН}; \qquad Q_F = Q_B = 7{,}5\ \text{кН}.$$

Q эпюраси 7.17- расм, *ж* да келтирилган.

Бўйлама кучларни ҳисоблаймиз ва *N* эпюрасини қурамиз (7.17- расм, *з*):

$$N_{DE} = 0; \quad N_{EF} = -H_a\ (\text{ёки}\ -H_b) = -7{,}5\ \text{кН}; \quad N_{FG} = 0;$$

$$N_{AE} = -V_a = -67{,}5\ \text{кН}; \qquad N_{BF} = -V_b = -67{,}5.$$

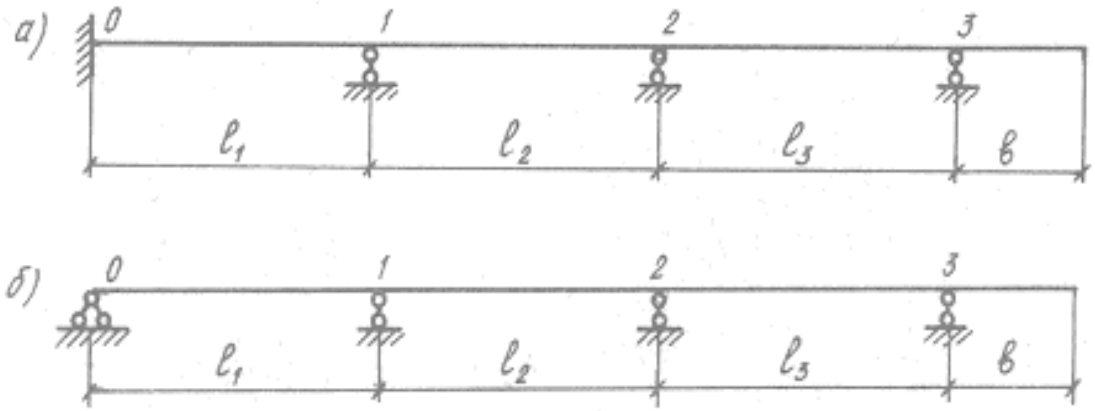
8- БОБ
КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИҚ БАЛКА, ФЕРМА ВА АРКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш

Бир неча оралиқлардан ташкил топган ва чекка таянчлардан бири шарнирли қўзғалмас ёки бикир бўлган балка — *узлуксиз балка* деб аталади (8.1- расм.)

Мазкур параграфда узлуксиз балкалар ҳисобига кучлар усулининг тадбиқини кўриб ўтамиз. Иш узлуксиз балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади:

$$n=2Ш+C_T-3D$$



8.1-расм

Бу ерда Ш — дискларни туташтирувчи оддий шарнирлар сони;

C_T — таянч стерженлари сони.

Узлуксиз балка яхлит балкадан ташкил топганлиги сабабли Д=1; Ш=0 бўлади. У ҳолда юқоридаги формула қуйидаги кўринишга келади

$$\boxed{n=C_T-3} \qquad (8.1)$$

8.1- расмда кўрсатилган балкалар статик аниқмасдир, чунки уларнинг ҳар бири учун номаълум таянч реакцияларининг сони статиканинг мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ.

Расмдаги балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини (8.1) формула ёрдамида аниқлаймиз:

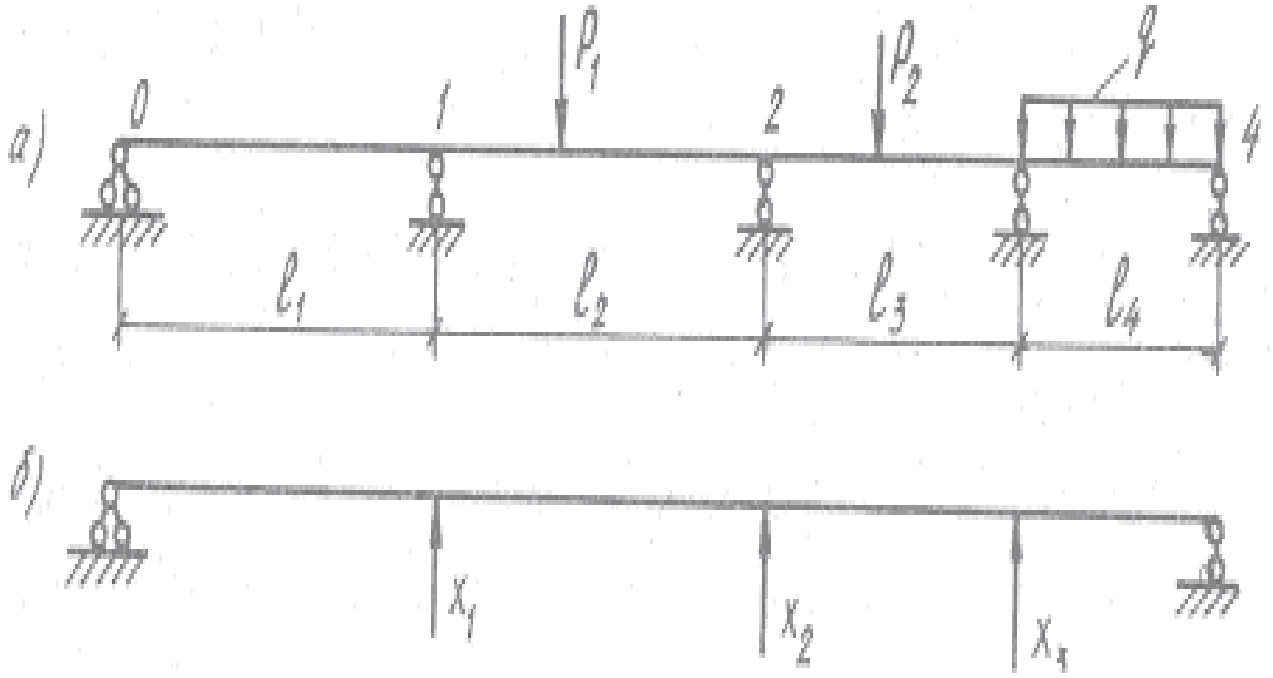
$$n = 6 - 3 = 3, \quad n = 5 - 3 = 2$$

Демак, *а*- расмдаги балка уч марта, *б*- расмдагиси эса икки марта статик ноаниқ экан.

Узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражаси аниқланганидан сўнг унинг асосий системаси танланади.

8.2- расм, *б*-да тавсия этилган асосий система ташқи таянчларига кўра, 8.2-расм, *в*-да тавсия этилган асосий система эса ички боғланишларга кўра ҳосил қилинган.

Ҳар иккала асосий система талабга тўлиқ жавоб беради, чунки ҳар иккаласи ҳам геометрик ўзгармас ва статик аниқдир.



8.2- расм

Узлуксиз балкаларни ҳар иккала асосий система бўйича ҳисобласа бўлади.

Умуман асосий системани шундай танлаш керакки, каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга айлансин ва танланган асосий система ҳар томонлама қулай бўлсин. Чунки асосий система ҳар томонлама қулай танланса, кейинги ҳисоб ишлари анча соддалашади. Шу нуқтаи назардан юқоридаги икки асосий системани таҳлил қилиб кўрайлик.

Биринчи вариантда ифодаланган асосий системада номаълумларнинг йўналиши бўйича мавжуд бўладиган чизиқли кўчишлар нолга тенг бўлмайди,

шу сабабли каноник тенгламанинг коэффициент ва озод хадлари ҳам нолга айланмайди.

Иккинчи вариант асосида танланган асосий система мустақил оддий статик аниқ балкалардан иборат бўлиб, айрим бурчакли кўчишлар нолга тенг бўлиши туфайли каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга тенг бўлишига олиб келади.

Таҳлиллар узлуксиз балкаларни ҳисоблашда иккинчи вариант мақсадга мувофик эканлигини кўрсатади.

Уч моментлар тенгламаси

Узлуксиз балканинг асосий системасини оддий бир оралиқли балкаларнинг йиғиндиси сифатида қабул қиламиз (8.3- расм, а).

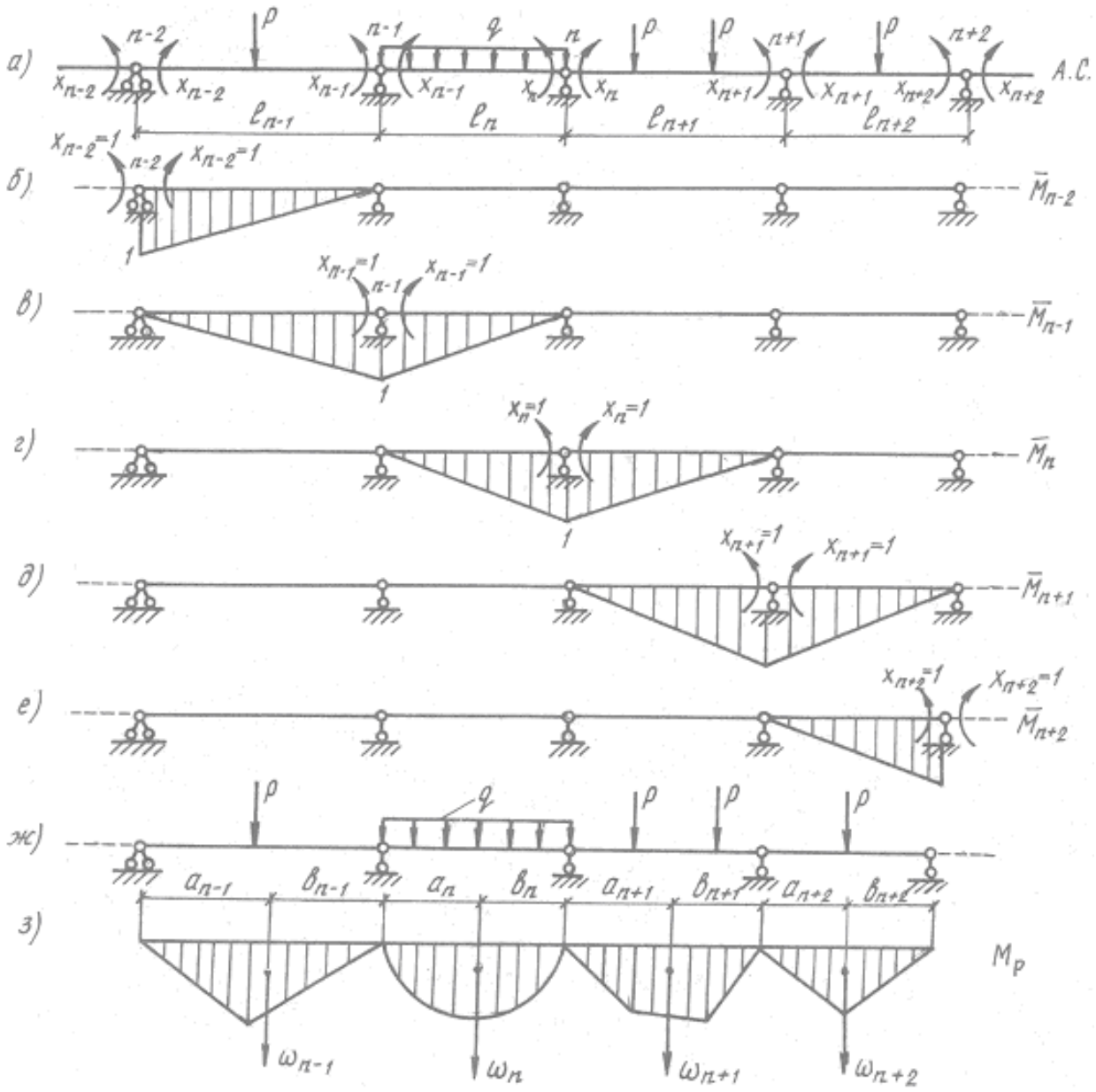
Бу асосий системада номаълумлар сифатида таянч кесимларида вужудга келадиган эгувчи моментлар (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2},) қабул қилинади. Номаълумларнинг йўналишини олдиндан айтиш қийин. Шу сабабли уларни пастки толачаларни чўзади деб шартли равишда қабул қиламиз. Номаълумларнинг ҳақиққий йўналиши тенгламанинг ечими натижасида ҳал этилади.

Каноник тенглама системасидан бирор қаторини ёзамиз:

$$\ldots + \delta_{n,n-2} \cdot X_{n-2} + \delta_{n,n-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \delta_{mn+2} X_{n+2} + \ldots + \Delta_{np} = O.$$

Бу ерда $\delta_{n,n}X_n$ — таянч кесимининг бурчакли кўчиши.

Каноник тенгламанинг коэффициент ва озод хадларини аниқлаш учун асосий системани бирлик ва ташқи кучлар билан юклаймиз. Бирлик ва ташқи кучлар таъсирида эгувчи момент эюпралари қурилади (8.3- расм, б, *в, г, д, е, ж, з*).



8.3- расм

Эпюралардан фойдаланиб, каноник тенгламанинг айрим коэффициентлари (масалан, $\delta_{n,\,n-2}$, $\delta_{n,\,n+2}$) нолга тенг эканлигини билиб оламиз.

У ҳолда n — таянч учун каноник тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \Delta_{np} = O.$$

Каноник тентламанинг коэффициенти ва озод хадларини Мор интеграли, Верешчагин ёки Симпсон усулида аниқлаймиз.

$$\delta_{n,n-1} = \sum \int \frac{\overline{M}_n \overline{M}_{n-1}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{1}{3}\right] = \frac{l_n}{6EJ}$$

$$\delta_{n,n} = \sum \int \frac{\overline{M}_n \overline{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} l_{n+1} \frac{2}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{2l_n}{6} + \frac{2l_{n+1}}{6}\right] = \frac{2}{6EJ}\left(l_n + l_{n+1}\right);$$

$$\delta_{n,n+1} = \sum \int \frac{\overline{M}_n \overline{M}_{n+1}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{l_{n+1}}{6EJ};$$

$$\Delta_{np} = \sum \int \frac{\overline{M}_p \overline{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ}\left(\omega_n \cdot y_c + \omega_{n+1} \cdot y_c\right) = \frac{1}{EJ}$$

$$\left[\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}}\right].$$

Топилган озод ҳад ва коэффициентларни тенгламага қўйиб ихчамлаштирсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$X_{n-1} \cdot l_n + 2X_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + X_{n+1} = -6\left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right).$$

Агар $X_{n-1}=M_{n-1}$, $X_n=M_n$, $X_{n+1}=M_{n+1}$ билан алмаштирилса, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + M_{n+1} l_{n+1} = -6\left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right). \qquad (8.2)$$

(8.2) ифода *уч моментлар тенгламаси* деб аталиб, ҳар бир оралиқ таянчи учун алоҳида равишда тузилади. Тузиладиган тенгламалар сони узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + M_{n+1} l_{n+1} = -6R_n^{\Phi} \qquad (8.3)$$

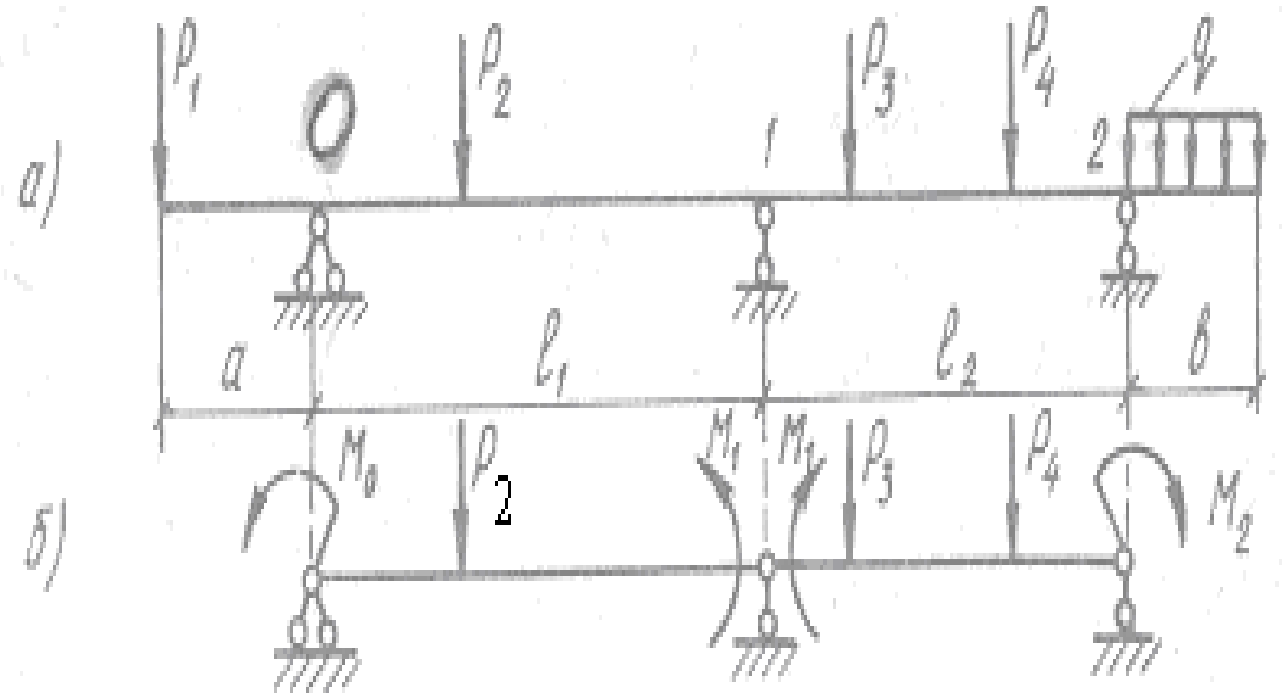
Бу ерда $R_n^{\Phi} = A_n^{\Phi} + B_n^{\Phi}$,

$$A_n^{\Phi} = \frac{\omega_n a_n}{l_n}, \quad B_n^{\Phi} = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}};$$

деб олинган.

Хусусий ҳоллар

1. Агар берилган узлуксиз балканинг консол қисми бўлса, у ҳолда консол таянч моментлари билан алмаштирилади.



8.4- расм

Масалан, 8.4- расм, *а*- да берилган бир номаълумли узлуксиз балка учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_o \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6R_1\Phi.$$

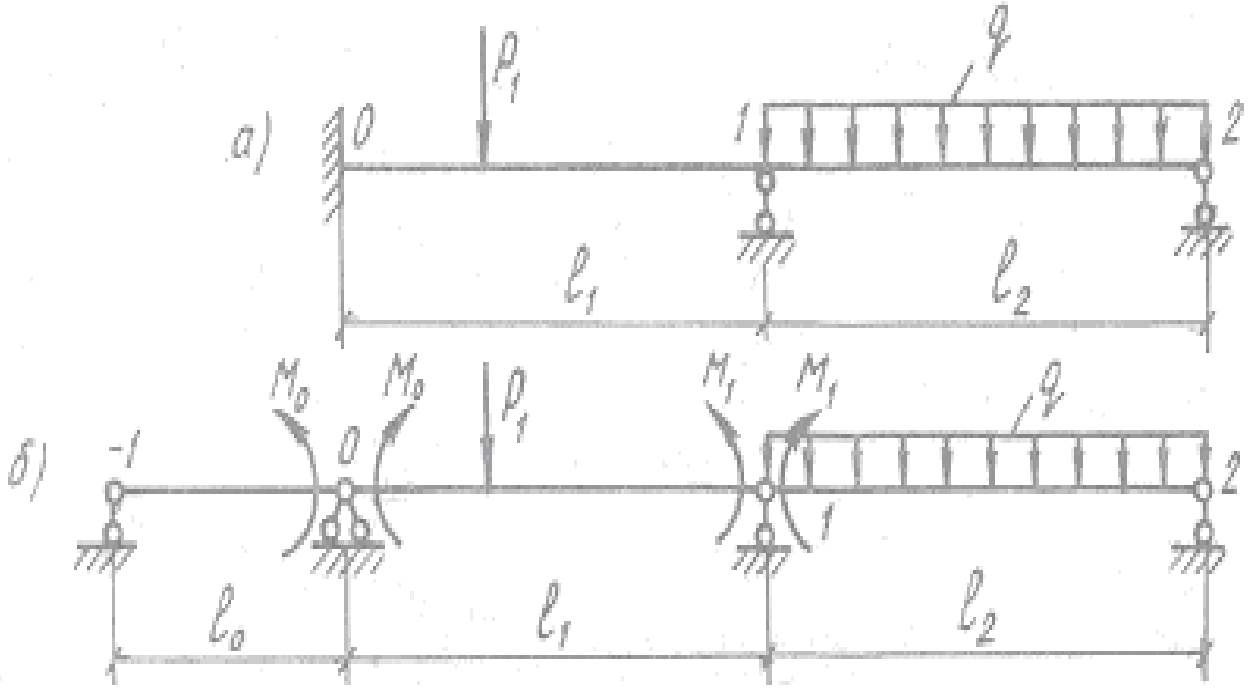
Шаклдан: $M_o = -P_1 \cdot a$;

$$M_2 = -\frac{qb^2}{2}$$

эканлиги кўриниб турибди.

Узлуксиз балканинг асосий системаси 8.4- расм, *б*-да тасвирланган.

2. Агар берилган балканинг чекка таянчларидан бири шарнирсиз бикир бўлса, (8.5- расм, *а*), у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча сохта оралиқ қўшилади. Бу оралиқнинг узунлиги нолга тент ва бикирлиги чексиз деб қабул қилинади (8.5- расм, б).



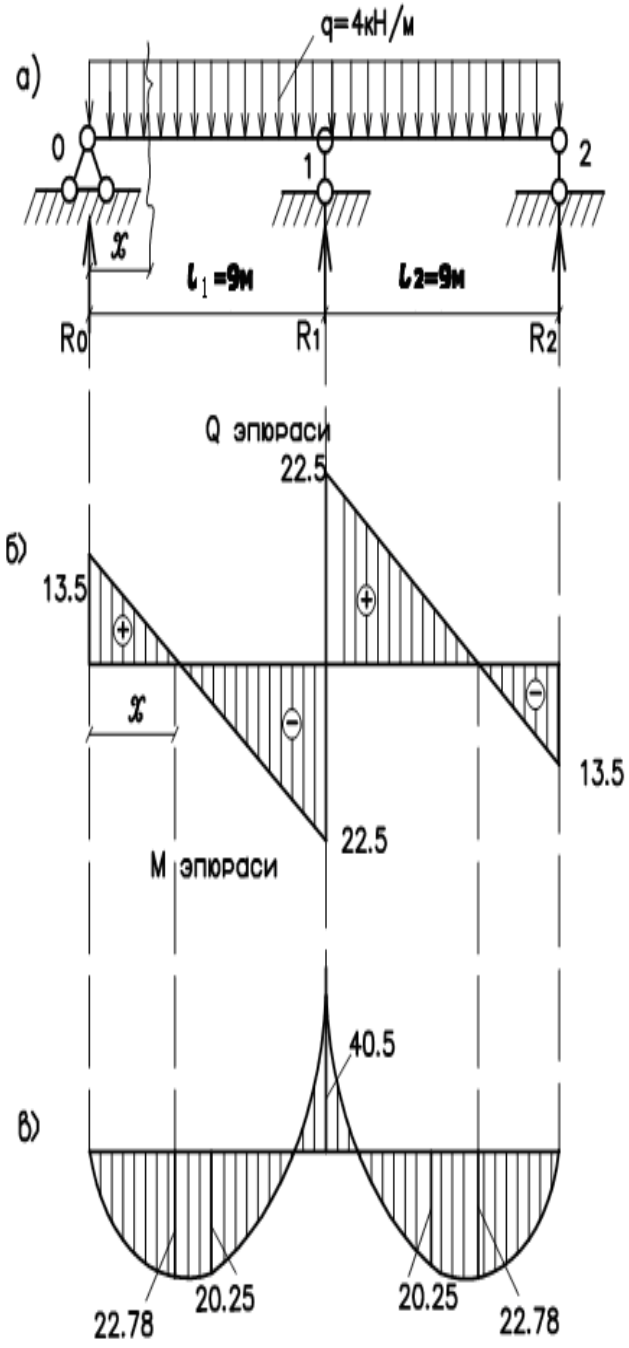
8.5- расм

Уч моментлар тенгламасидан номаълум таянч моментлари аниқлангандан сўнг берилган балканинг эгувчи момент ва қирқувчи куч эпюралари қурилади.

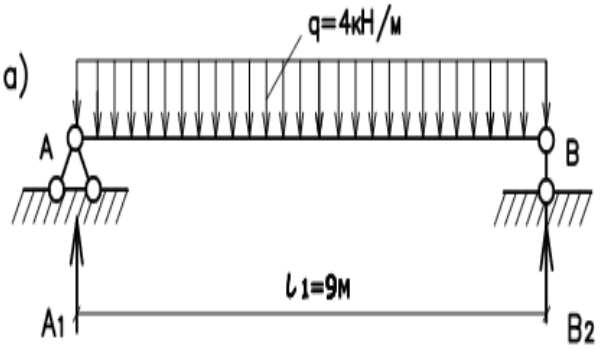
Эпюраларни қуриш учун асосий системадан ҳар бир оддий балка ажратиб олинади, ажратилган балкалар ташқи куч ва аниқланган таянч моментлари билан юкланади, сўнгра эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари қурилади.

Алоҳида қурилган эпюралар ягона ўқ устига жойлаштирилади. Натижада узлуксиз балканинг эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари ҳосил бўлади.

8.1 – мисол. 8.6 – расм, а да берилган узлуксиз балканинг Q ва M эпюралари қурилсин.



8.6 - расм



8.7 - расм

Ечиш.

1.Статик ноаниклик даражасини аниклаймиз:

$$n = C_т - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Балка бир марта статик ноаниқ, шу боисдан уч моментлар тенгламаси фақат битта тузилади.

2. Балканинг ҳар бир оралиғини мустақил балка сифатида ажратиб олиб, ҳар бири учун ҳақиқий (A^0 ва B^0) ҳамда фаразий ($A^ф$ ва $B^ф$) таянч реакцияларини аниқлаймиз.

1-оралиқ (8.7 – расм)

$$A_1^0 = B_1^0 = \frac{q\ell_1}{2} = \frac{4 \cdot 9}{2} = 18\ кН$$

Фаразий таянч реакциялари

$$A_1^ф = B_1^ф = \frac{q\ell_1^3}{24} = \frac{4 \cdot 9^3}{24} = 121{,}5\ кН.м^2$$

2 – оралиқ

Ушбу оралиқ биринчи оралиқ билан бир хил бўлганлиги сабабли, тегишли таянч реакциялари ҳам бир хил бўлади, яъни:

$$A_2^0 = B_2^0 = 18кН; \qquad A_2^ф = B_2^ф = 121{,}5\ кН.м^2.$$

3. Ўртадаги таянч учун уч моментлар тенгламасини тузамиз:

$$M_0\ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2\ell_2 = -6(B_1^ф + A_2^ф)$$

Шаклга кўра $M_0 = 0$ ва $M_2 = 0$ бўлгани учун тенглама қуйидаги тусни олади:

$$2M_1(\ell_1 + \ell_2) = -6(B_1^ф + A_2^ф).$$

2 га қисқартириб, маълум қийматларни ўз ўрнига қўямиз:

$$M_1(9+9) = -3(121{,}5+121{,}5);$$

$$18M_1 = -729\ ,$$

бундан

$$M_1 = -\frac{729}{18} = -40{,}5кН.м$$

4. Бизга маълум формуладан фойдаланиб узлуксиз балканинг таянч реакцияларини аниқлаймиз:

$$R_0 = A_1^0 - \frac{M_0 - M_1}{\ell_1} = 18 - \frac{0 - (-40{,}5)}{9} = 13{,}5\ кН;$$

$$R_1 = B_1^0 + A_2^0 - \frac{M_1 - M_0}{\ell_1} - \frac{M_1 - M_2}{\ell_2} = 18 + 18 — 40{,}5 - 09 - \frac{-40{,}5 - 0}{9} =$$
$$= 45\text{кН};$$

$$R_2 = B_2^0 - \frac{M_2 - M_1}{\ell_2} = 18 - \frac{0 - (-40{,}5)}{9} = 13{,}5\ \text{кН}.$$

Текшириш:

$$\sum У = R_0 - q(\ell_1 + \ell_2) + R_1 + R_2 = 13{,}5 - 4(9+9) + 45 + 13{,}5 = 0.$$

5. Характерли кесимлардаги кўндаланг кучларни аниқлаймиз ва Q эпюрасини қурамиз (8.6 – расм, б):

$$Q_0 = R_0 = 13{,}5\text{кН};\quad Q^{\text{чап}}{}_1 = Q_0 - q\,\ell_1 = 13{,}5 - 4 \cdot 9 = 22{,}5\ \text{кН};$$

$$Q^{\text{ўнг}}{}_1 = Q^{\text{чап}}{}_1 + R_1 = -22{,}5 + 45 = 22{,}5\ \text{кН};$$

$$Q_2 = Q^{\text{ўнг}}{}_1 - q\ell_2 = 22{,}5 - 4 \cdot 9 = -13{,}5\ \text{кН};$$

6. Эгувчи моментларни ҳисоблаймиз.

0 – таянчдан x масофада ётган кесим учун эгувчи момент ифодаси:

$$M_x = R_0 x - \frac{qx^2}{2} = 13{,}5x - \frac{04x^2}{2} = 13{,}5x - 2x^2.$$

Бу ерда $x = 0 \div \ell_1$ оралиғида ўзгаради:

$x = 0$ бўлганда $M_0 = 0$;

$x = \frac{\ell_1}{2} = 4{,}5$м бўлганда $M_x = 13{,}5 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 4{,}5^2 = 20{,}25$ кН · м;

$x = \ell_1 = 9$ м бўлганда $M_1 = 13{,}5 \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 = -40{,}5$ кН · м.

Кўндаланг кучнинг қиймати ноль бўлган абцисса x_0 ни топамиз:

$$Q_x = R_0 - q \cdot x_0 = 0\text{ , бундан } x_0 = \frac{R_0}{q} = \frac{13{,}5}{4} = 3{,}375\ \text{м}.$$

Ушбу кесимда эчувчи момент максимал қийматга эга бўлади:

$$M_{max} = 13{,}5 \cdot 3{,}375 - 2 \cdot 3{,}375^2 = 22{,}78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

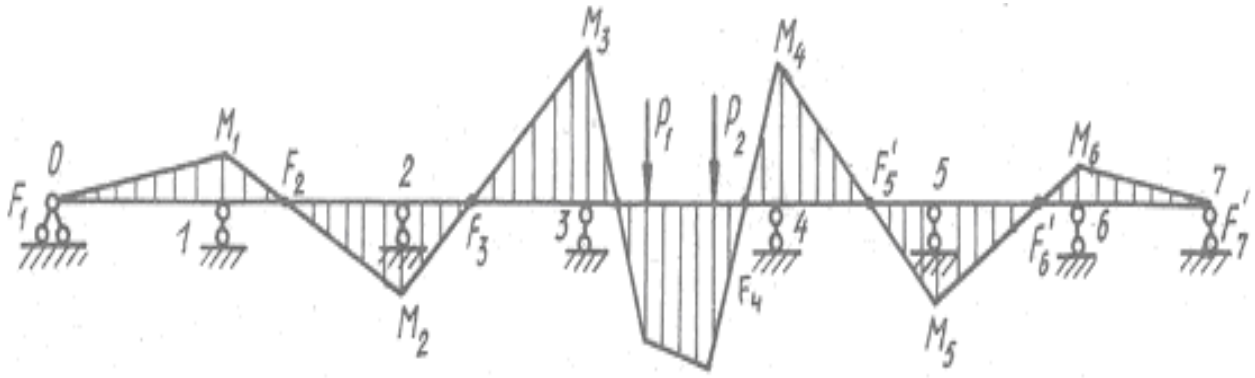
Эгувчи моментларнинг аниқланган қийматлари асосида биринчи оралиқ учун М эпюрасини кўрамиз (8.6 – расм, в).

Балка ва унга қўйилган юк симметрик бўлганлиги сабабли М эпюраси ҳам симметрик бўлади. Шу боисдан иккинчи оралиқ учун эгувчи моментларни ҳисоблашнинг ҳожати йўқ.

8.2. Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш

Оралиқлари сони уч ва ундан ортиқ бўлиб, айрим оралиқлари ташқи кучлар билан юкланган бўлса, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш анча қулай бўлади.

Бу усулнинг моҳиятини англаш учун уч моментлар тенгламасидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюрасини кўрамиз (8.8- расм).



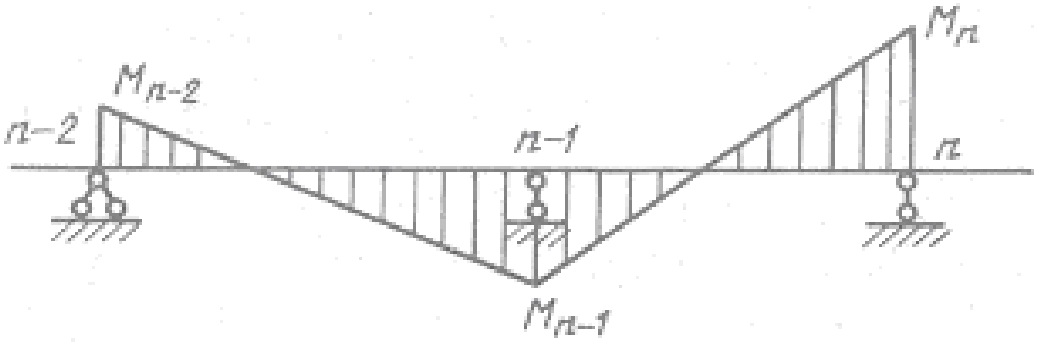
8.8- расм

Бу эпюра таҳлили асосида қуйидаги хулосага келиш мумкин: юк қўйилмаган оралиқларда эгувчи момент оғма чизиқлардан иборат бўлиб, балканинг ўқини кесиб ўтади ва ноль нуқталар ҳосил қилади. Бу нуқталар *момент фокуслари* деб аталади.

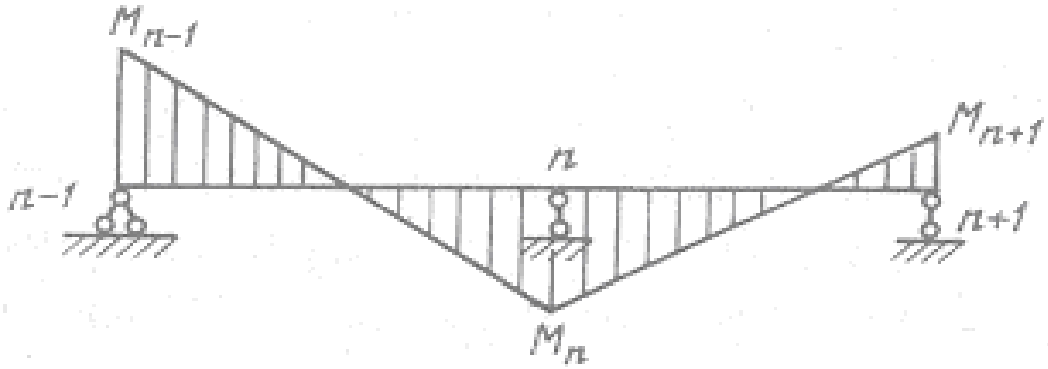
Агар ноль нуқталар юк қўйилган оралиққа нисбатан чап томонда жойлашган бўлса — *чап момент фокуси* деб аталади ва $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ деб белгиланади.

Агар ноль нуқталар юк қўйилган оралиқнинг ўнг томонида жойлашган бўлса — *ўнг момент фокуси* деб аталади ва $F_1^1, F_2^1, F_3^1 ... F_n^1$ билан белгиланади.

Узлуксиз балканинг юкланмаган оралиғидаги таянч моментларининг абсолют қийматлари нисбати — *фокуслар нисбати* деб аталади.



8.9- расм



8.10- расм

Юк қўйилган оралиқларда фокусларнинг ҳолати фокуслар нисбатлари орқали аниқланади. Фокус нисбатлари ўз навбатида чап ва ўнг нисбатларга бўлинади.

Масалан, 8.8- расмда тасвирланган эгувчи момент эпюрасидан чап ва ўнг фокус нисбатлари қуйидагича аниқланади:

Чап фокус нисбатлари,

$$\frac{M_1}{M_0} = -K_1, \quad \frac{M_2}{M_1} = -K_2, \quad \frac{M_3}{M_2} = -K_3$$ бўлади.

Ўнг фокус нисбатлари:

$$\frac{M_4}{M_5} = -K_5^1, \quad \frac{M_5}{M_6} = -K_6^1, \quad \frac{M_6}{M_7} = -K_7^1$$ бўлади.

Таянч моментлари ҳар хил ишорали бўлгани учун фокус нисбатлари манфий ишорага эга.

Шунга ўхшаш узлуксиз балканинг юкланмаган *n* - оралиғи учун *чап фокус нисбати* қуйидагича аниқланади (8.9- расм):

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = -K_n \tag{8.4}$$

Агар узлуксиз балканинг юкланмаган «*n*» оралиғи юк қўйилган оралиққа нисбатан ўнг томонда бўлса, у ҳолда шу оралиқ учун *ўнг фокус нисбати* қуйидагича ифодаланади (8.10- расм):

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -K_n^1 \tag{8.5}$$

Агар юкланмаган оралиқ юк қўйилган *n* — оралиқнинг чап томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи чап фокусдан ўтади: юкланмаган оралиқнинг таянч моментлари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$M_{n-1} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}}. \tag{8.6}$$

Агар юкланмаган оралиқ юк қўйилган оралиқнинг ўнг томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи ўнг фокусдан ўтади ва номаълум таянч моментлари қуйидаги ифодадан аниқланади:

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}}. \tag{8.7}$$

Демак, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш учун биринчи навбатда, фокус нисбатлари ва юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари аниқланган бўлиши керак.

Чап фокус нисбатларини аниқлаш учун юк қўйилган оралиқдан чап томонда жойлашган оралиқлар учун уч моментлар тенгламасини тузамиз.

Узлуксиз балканинг биринчи таянчи учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_o l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0$$

Шаклдан $M_0=0$ ва тенгламанинг ўнг қисми ноль эканлиги кўриниб турибди. У ҳолда:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)$$

(8.4) формулага асосан $\frac{M_2}{M_1} = -K_2$ деб белгиласак,

$$K_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \qquad (8.8) \text{ келиб чиқади.}$$

Энди иккинчи таянч учун (n=2) уч моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0$$

Тенгламанинг барча хадларини M_2 га бўлсак,

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0$$

келиб чиқади.

Бу тенгламадаги таянч моменти нисбатларини (8.6) формулага асосан чап фокус нисбатлари орқали ифодалаймиз:

$$-\frac{1}{K_1} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) - K_2 l_3 = 0$$

Бу тенгламадан иккинчи оралиқ учун чап фокус нисбати аниқланади:

$$K_2 = 2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 - \frac{1}{K_1}\right) \tag{8.9}$$

Буларни умумлаштириб, *n* — нчи оралиқ учун чап фокуслар нисбати K_n ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$K_n = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{K_{n-1}}\right) \tag{8.10}$$

Шу тартибда ўнг фокуслар нисбатлари аниқланади:

$$K_n^1 = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1}\right) \tag{8.11}$$

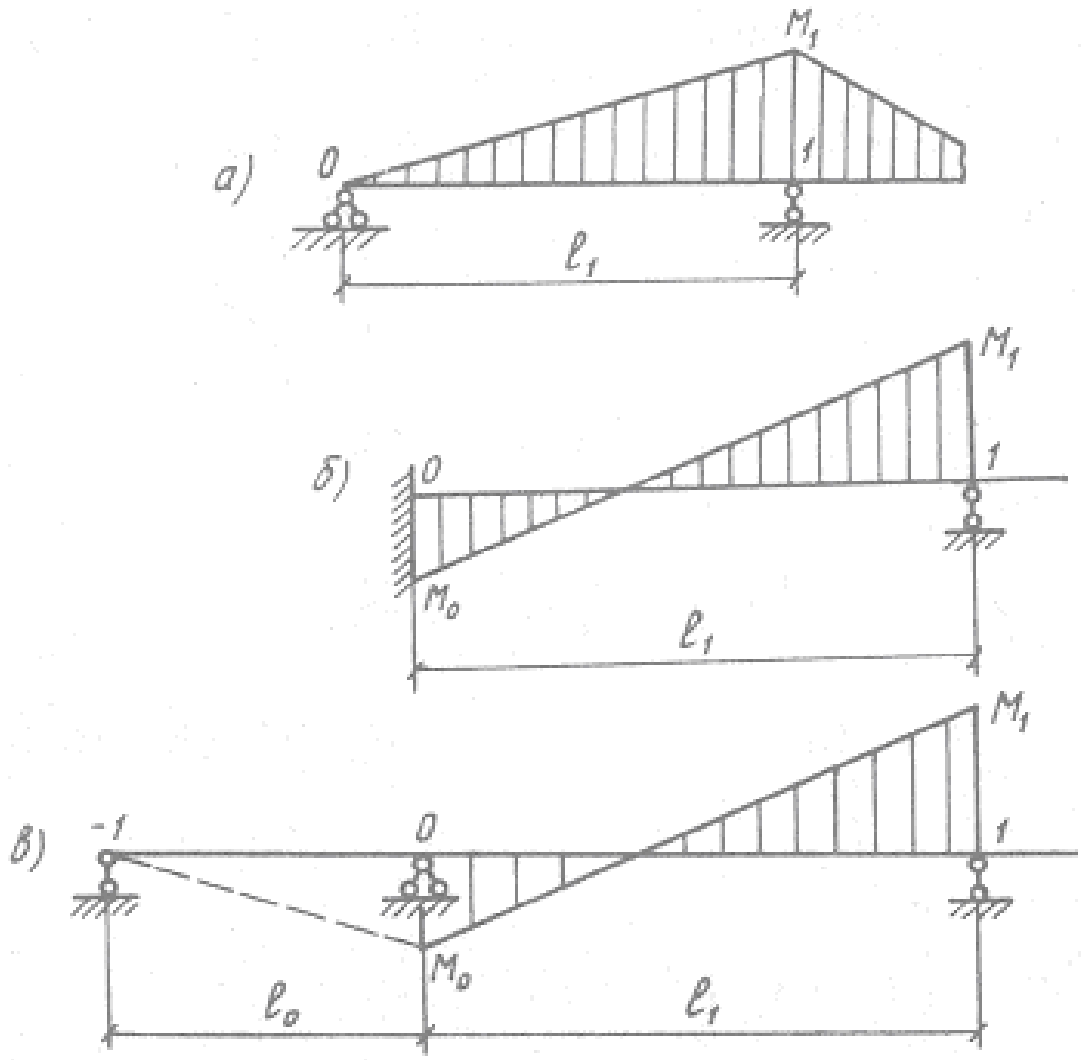
Чап фокус нисбатларини аниқлаш узлуксиз балканинг биринчи оралиғидан, ўнг фокус нисбатларини ҳисоблаш эса оҳирги оралиғидан бошланади.

Биринчи ва сўнгги оралиқларнинг фокус нисбатлари танячлар хилига боғлиқ ҳолда аниқланади.

Агар балканинг биринчи таянчи шарнирли бўлса, у ҳолда биринчи оралиқ учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишга эга бўлади (8.11- расм, а):

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

Шаклдан $M_0=0$ эканлиги кўриниб турибди.



8.11- расм

Агар берилган балканинг биринчи таянчи шарнирсиз бикир бўлса, (8.11-расм, *б*) у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча соҳта оралиқ қўшилади (8.11- расм, *в*) ва шу оралиқ учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$K_0 = -\frac{M_0}{M_1} = -\frac{M_0}{0} = \infty$$

(8.10) формулага кўра биринчи оралиқ учун фокуслар нисбати $K_1 = 2 + l_0 / l_1 \left(2 - \frac{1}{K_0} \right)$ бўлгани учун $K_1 = 2$ бўлади. Бу ерда $l_o = 0$ ва $K_0 = \infty$.

Демак, балканинг биринчи таянчи шарнирли қўзғалмас бўлса, биринчи оралиқ учун чап фокуслар нисбати $K_1 = \infty$, шарнирсиз бикир бўлса, $K_1 = 2$ га тенг бўлади.

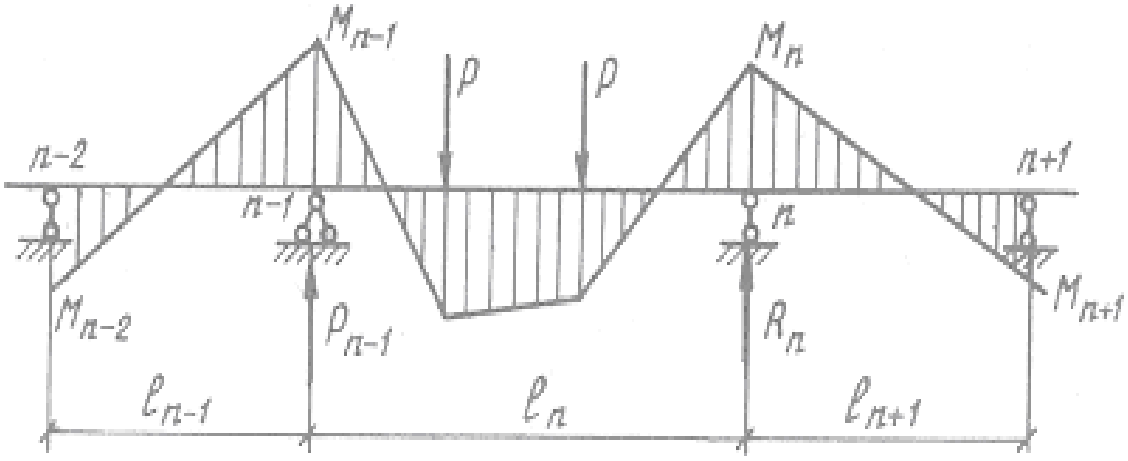
Узлуксиз балканинг чап ва ўнг фокус нисбатлари аниқлангандан сўнг *юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари аниқланади*.

Узлуксиз балканинг «*n*» оралиғига ташқи кучлар қўйилган деб фараз қиламиз (8.12- расм).

Юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари M_{n-1}, M_n ларни аниқлаш учун балканинг *n - 1* ва *n* — нчи таянчларига тегишли уч моментлар тенгламасини ёзамиз (8.12- расм):

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6R_{n-1};$$

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n. \qquad (8\ 12).$$



8.12- расм

Тузилган тенгламалар қаторида тўртта таянч моментлари M_{n-2}, M_{n-1}, M_n, M_{n+1} мавжуддир. Булардан иккитаси (M_{n-1}, M_n) изланаётган моментлар, қолган иккитаси (M_{n-2}, M_{n+1}) фокуслар нисбати орқали аниқланадиган таянч моментларидир.

(8.6) формулага асосан $M_{n-2} = -\dfrac{M_{n-1}}{K_{n-1}}$;

(8.7) формулага асосан $M_{n+1} = -\dfrac{M_n}{K_{n+1}^1}$.

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмидаги соҳта таянч реакциялари қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$R_{n-1}^f = A_n^f,\ R_n^f = B_n^f$$

Чунки бу ерда 8.12- расмга асосан $B_{n-1}^f = 0,\ A_{n+1}^f = 0$ тенгдир. M_{n-2}, M_{n+1} ва R_{n-1}, R_n ларнинг қийматларини (8.12) тенгламага қўямиз:

$$-\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} \cdot l_{l-1} + 2M_{n-1}\left(l_{n-1} + l_n\right) + M_n l_n = -6A_n^f .$$

$$M_{n-1} l_n + 2M_n\left(l_n + l_{n+1}\right) - \frac{M_n}{K_{n+1}^1} \cdot l_n = -6B_n^f .$$

Бу тенгламаларнинг барча ҳадларини l_n га бўлиб юборсак,

$$M_{n-1}\left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{K_{n-1}}\right)\right] + M_n = -\frac{6A_n^f}{l_n};$$

$$M_{n-1} + M_n\left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n}\left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^1}\right)\right] + M_n = -\frac{6B_n^f}{l_n};$$

келиб чиқади.

(8.10) ва (8.11) формулаларга асосан тенгламалар қуйидаги кўринишга келади:

$$M_{n-1}.K_n + M_n = -\frac{6A_n^f}{l_n};$$

$$M_n + M_{n+1}K_n^1 = -\frac{6B_n^f}{l_n}.$$

Бу тенгламалардан, юк қўйилган оралиқдаги таянч моментларини аниқлайдиган формула келиб чиқади:

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{\left(A_n^f \cdot K_n^l - B_n^f\right)}{\left(K_n K_n^1 - 1\right)};$$

$$M_n = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{\left(B_n^f \cdot K_n - A_n^f\right)}{\left(K_n K_n^1 - 1\right)}. \qquad (8.13)$$

Шундай қилиб, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Ҳар бир оралиқ учун чап ва ўнг фокус нисбатлари (8.10) ва (8.11) формулаларга асосан топилади.

2. Юк қўйилган оралиқдаги таянч моментлари (8.13) формула бўйича аниқланади.

3. Юк қўйилмаган оралиқлардаги таянч моментлари (8.6) ва (8.7) формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар узлуксиз балканинг бир неча оралиғи ташқи юклар таъсирида бўлса, у ҳолда ҳар бир юк қўйилган оралиқ учун балка алоҳида равишда ҳисобланади, сўнгра таянч моментларининг алгебраик йиғиндилари бўйича умумий эпюра қурилади.

8.2- мисол. 8.13– расмда тасвирланган беш оралиқли узлуксиз балка учун M эпюраси момент фокуслари усулида қурилсан. Берилган: *J*=const; $\ell_1 = \ell_2 = 5$м; $\ell_3 = \ell_4 = \ell_5 = 4$м; q=15кН/м.

Ечиш. Фокус нисбатларини аниқлаймиз.

Чап фокус нисбатлари:

$$K_1 = 2\ ; \quad K_2 = 2 + \frac{\ell_1}{\ell_2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3{,}5\ ; \quad K_3 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_3}\left(2 - \frac{1}{3{,}5}\right) = 4{,}14\ ;$$

$$K_4 = 2 + \frac{\ell_3}{\ell_4}\left(2 + \frac{1}{4{,}14}\right) = 3{,}76\ ; \quad K_5 = 2 + \frac{\ell_4}{\ell_5}\left(2 - \frac{1}{3{,}76}\right) = 3{,}73.$$

Ўнг фокус нисбатлари:

$$K'_5 = \infty; \quad K'_4 = 2 + \frac{\ell_5}{\ell_4}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 4\ ; \quad K'_3 = 2 + \frac{\ell_4}{\ell_3}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = 3{,}75\ ;$$

$$K'_2 = 2 + \frac{\ell_3}{\ell_2}\left(2 - \frac{1}{3{,}75}\right) = 3{,}39; \quad K'_1 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_1}\left(2 - \frac{1}{3{,}39}\right) = 3{,}70.$$

Куч қўйилган ораликдаги таянч моментларини (8.15) формуладан аниқлаймиз:

$$M_2 = -\frac{K_2^B K'_3 - K_2^A}{K_3 K'_3 - 1} = \frac{60 \cdot 3{,}75 - 60}{4{,}14 \cdot 3{,}75 - 1} = -\frac{165}{14{,}525} = -11{,}4 \text{ кН.м};$$

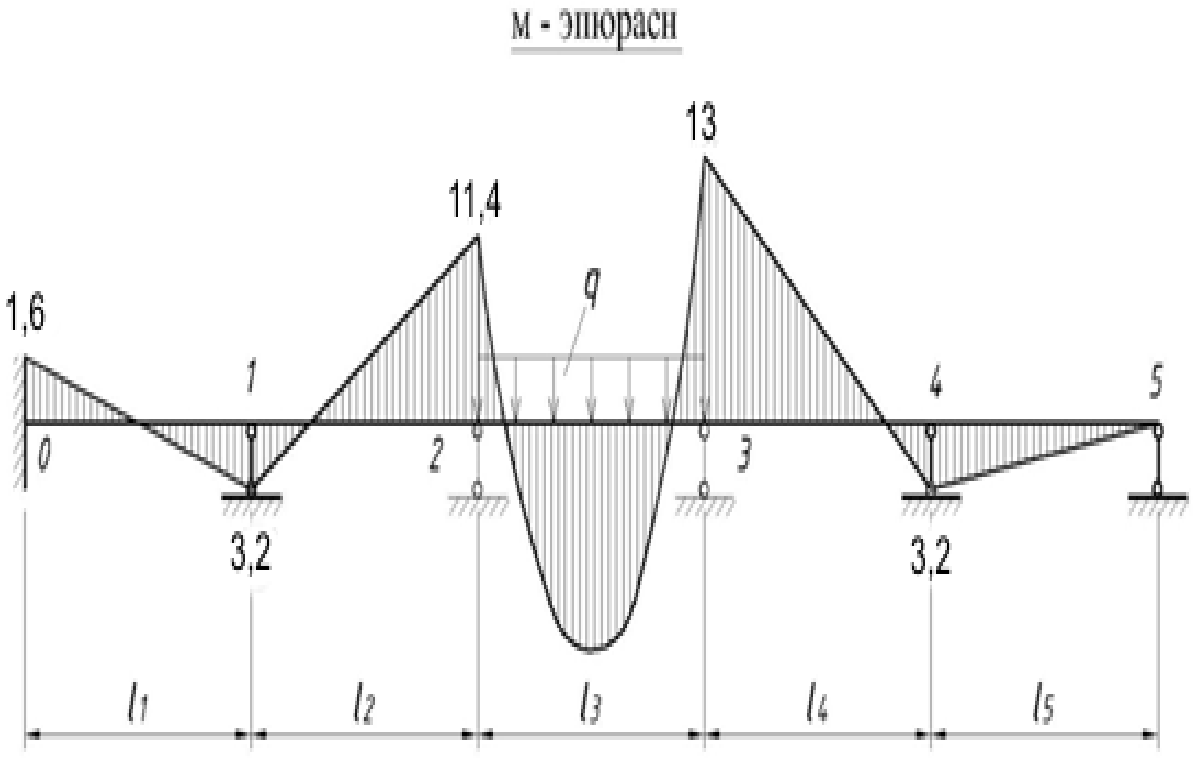
бу ерда $K^B{}_3 = \frac{60 \cdot 4}{4} = 60$; $K^A{}_3 = \frac{60 \cdot 4}{4} = 60.$

$$M_3 = -\frac{K_3^A K_3 - K_3^B}{K_3 K'_3 - 1} = -\frac{60 \cdot 4{,}14 - 60}{4{,}14 \cdot 3{,}75 - 1} = -\frac{18{,}84}{14{,}525} = -13{,}0 \text{ кН.м};$$

Куч қўйилмаган оралиқлардаги таянч моментлари:

$$M_1 = -\frac{M_2}{3{,}5} = 3{,}2 \text{ кН.м}; \quad M_0 = -\frac{M_1}{2} = -1{,}6 \text{ кН.м}; \quad M_4 = -\frac{M_3}{4} = 3{,}25 \text{кН.м}.$$

Аниқланган қийматлар бўйича қурилган М эпюраси 8.13– расмда тасвирланган.



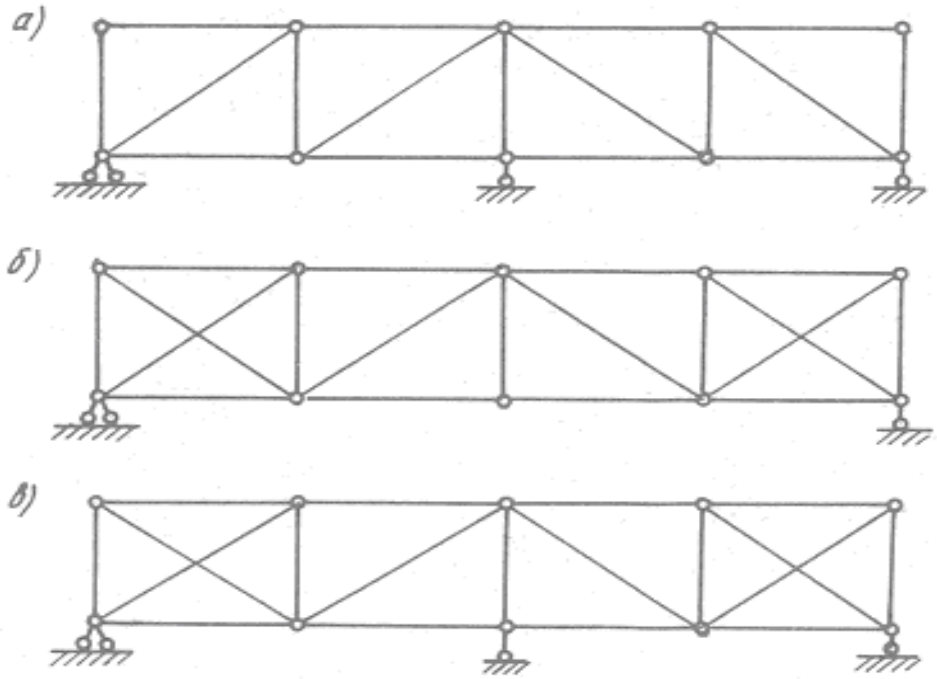
8.13 – расм

Агар $\frac{6A_n^{\phi}}{\ell_n}$ = K^B_n ва $\frac{6B_n^{\phi}}{\ell_n}$ = K^A_n деб олсак, (8.13) формула янада ихчамлашади:

$$M_{n-1} = -\frac{K_n^B K_n' - K_n^A}{K_n K_n' - 1}; \qquad M_n = -\frac{K_n^A K_n - K_n^B}{K_n K_n' - 1}. \qquad (8.14)$$

8.3. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш

Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблашда ҳам статик аниқ фермаларни ҳисоблашда қабул қилинган айрим чекланишлардан фойдаланилади. Масалан, қўзғалмас юклар ферма тугунларига қўйилган, стерженлар фақат сиқилиш ёки чўзилишга ишлайди, деб қаралади.



8.14- расм

Статик ноаниқ фермаларни асосан уч гурухга ажратиш мумкин:

1. Таянч реакциялари сонига кўра статик ноаниқ фермалар (8.14- расм, а).

2. Ферма стерженларидаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.14-расм,6).

3. Таянч реакциялари сони ва стерженлардаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.14- расм, в).

Фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$\boxed{n=C+C_0-2Y.} \qquad (8.16)$$

Бу ерда n — ферманинг статик ноаниқлик даражаси;

C — фермани ташкил этувчи стерженлар сони;

C_0 — таянч стерженлари сони;

Y — тугунлар сони.

Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш тартиби статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашдан кам фарқ қилади. Бу ерда ҳам биринчи навбатда, (8.14- расм) фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси аниқланади ва ундан сўнг асосий система қабул қилинади. Бунинг учун ортиқча боғланишлар ташлаб

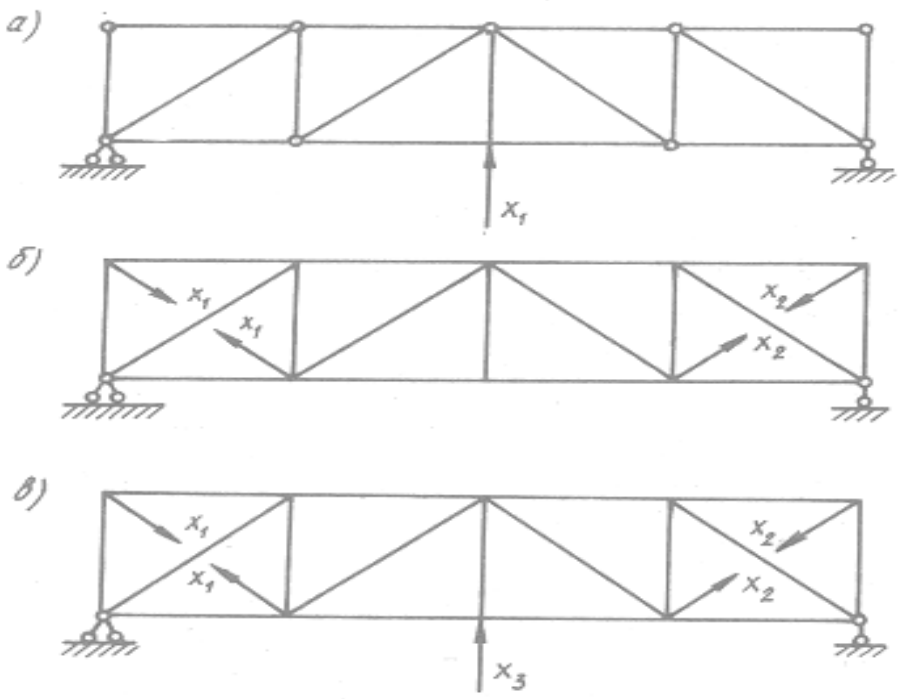
юборилади. Ташлаб юборилган ортиқча боғланишлар номаълум зўриқишлар билан алмаштирилади (8.15- расм, *а, б, в*). Сўнгра каноник тенгламалар тузилади. Каноник тенгламалар сони берилган ферманинг статик ноаниқлик даражаси сонига тенг бўлади. 8.15- расм, а-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

8.15- расм, *б*-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари иккита тузилади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$



8.15- расм

8.15- расм, *в*-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Тенгламаларнинг ҳар бири ўз навбатида, асосий системада ташқи юк ва номаълум зўриқишлар таъсирида ҳосил бўладиган кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлишини ифодалайди.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\delta_{ki} = \sum \frac{\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{k}} \overline{N}_i}{EF} \cdot S = \frac{1}{E} \sum \frac{\overline{N}_k \overline{N}_i}{F} S;$$

$$\delta_{kk} = \sum \frac{\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{k}}^2}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{\overline{N}_k^2}{F} \cdot S; \qquad (8.17)$$

$$\delta_{kp} = \sum \frac{\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{k}} N_p}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{\overline{N}_k N_p}{F} S.$$

Бу ерда:

$\overline{N}_i$ — ферма стерженларида $X_i=1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар:

$\overline{N}_k$ — ферма стерженларида $X_k=1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар:

N_p — ташқи кучлар таъсирида асосий системада ҳосил бўладиган зўриқишлар;

S — ферма стерженининг узунлиги;

E — ферма материалининг эластиклик модули;

F — ферма стерженининг кўндаланг кесим юзаси.

Зўриқишлар $N_p, \overline{N}_k$ ва $\overline{N}_i$ ларнинг қийматлари аналитик ёки график усуллар орқали аниқланади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадларини жадвал ёрдамида аниқлаш тавсия этилади.

Номаълумлар (X_1, X_2, X_3) топилгандан кейин ферма стерженларидаги зўриқишларнинг якунловчи қийматлари, осонлик билан топилади:

$$N = N_p + \overline{N}_i \cdot X_1 + \overline{N}_2 \cdot X_2 + ... + \overline{N}_n \cdot X_n$$

Бу ерда N_p — ташқи кучлар таъсирида ферма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқиш:

$\overline{N}_1$, $\overline{N}_2 ... \overline{N}_n$ — бирлик кучларнинг таъсирида ($X_1=1$; $X_2=1$; ... $X_n=1$) шу элементларда мавжуд бўладиган зўриқишлар.

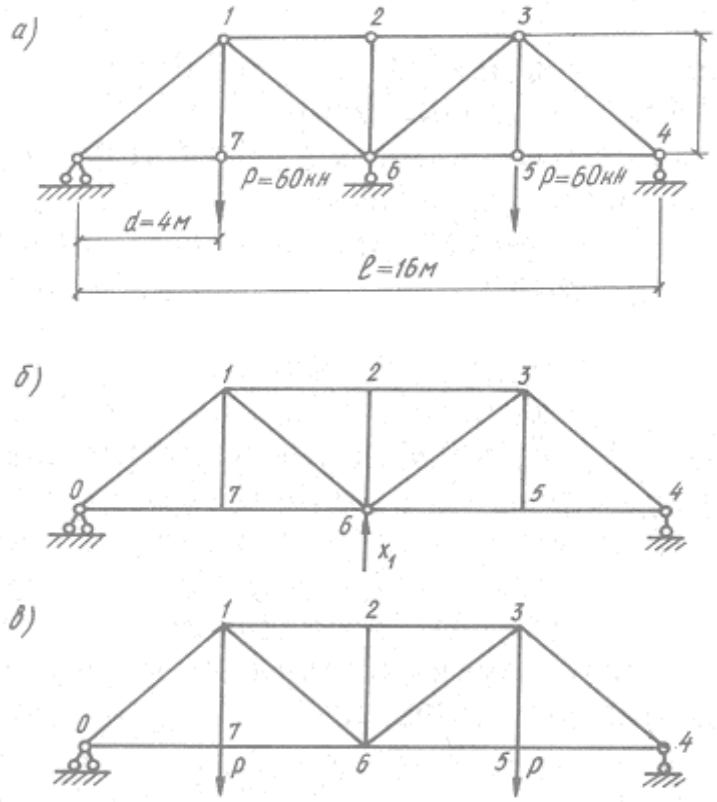
8.3-мисол. 8.16- расмда берилган статик ноаниқ ферманинг стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин. Ферма стерженларининг бикирлиги *EF* ўзгармас.

Ечиш. Ферманинг статик ноаниқлик даражасини (8.17) формулага асосан белгилаб оламиз. У бир марта статик ноаниқ бўлиб, битта ортиқча таянч боғланишига эга.

Ферманинг ўртадаги таянчини ташлаб юбориб, асосий системани танлаймиз (8.16- расм, б). Номаълум таянч реакциясини аниқлаш учун кучлар усулининг каноник тенгламасини тузамиз.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Бу тенгламадаги δ_{11} ва Δ_{1p} кўчишлар (8.17) формула ёрдамида аниқланади. Ферма стерженларида бирлик куч $X_1=1$ ва ташқи юклар таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар 4- бобда баён этилган усуллардан фойдаланиб аниқланади (8.16- расм, в).



8.16- расм

Ферма ва унга қўйилган юклар симметрик бўлганлиги сабабли ферманинг ярмини ҳисоблаш кифоя, чунки, 0 — 7 стержендаги зўриқиш 5 — 4 стержендаги зўриқишга тенг ($N_{70}=N_{45}$), шунга ўхшаш, $N_{12}=N_{23}$, $N_{10}=N_{34}$, $N_{76}=N_{65}$, $N_{16}=N_{63}$ бўлади. Фермани ҳисоблаш натижалари 8.1- жадвалда келтирилган.

8. 1- жадвал

Старженлар	Стержень узунлиги 1_K *(см)*	Зўриқиш	$\frac{\bar{N}_1^2 1}{EF}$	N_P *кн*	$\frac{\bar{N}_1 N_P 1}{EF}$	N *кн*	$\frac{\bar{N}_1 N 1}{EF}$ текшириш
1	2	3	4	5	6	7	8
01	500	0,825	1,74	-100	-208	-39,8	-82,3
1 – 2	400	1,333	3,56	-80	-213	16,2	43
0 – 7	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
7 – 6	400	-0,667	0,89	80	-107	31,8	-42,5
1 – 6	500	-0,825	1,74	0	0	-60,1	124
1 – 7	300	0,00	0	60	60	60	0
		$\delta_{11}=8{,}82$		$\Delta_{1P}=-635$		167 – 167,3 = 0	

Топилган кўчишларни каноник тенгламаларга қўйиб, номаълум реакция кучи X_1 ни аниқлаймиз:

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{635}{8{,}82}=72{,}2\ kN$$

Ташқи юк ва аниқланган таянч реакцияси X_1 таъсирида статик ноаниқ ферманинг стерженларида ҳосил бўлган зўриқишлар (8.4) формула ёрдамида ҳисобланади.

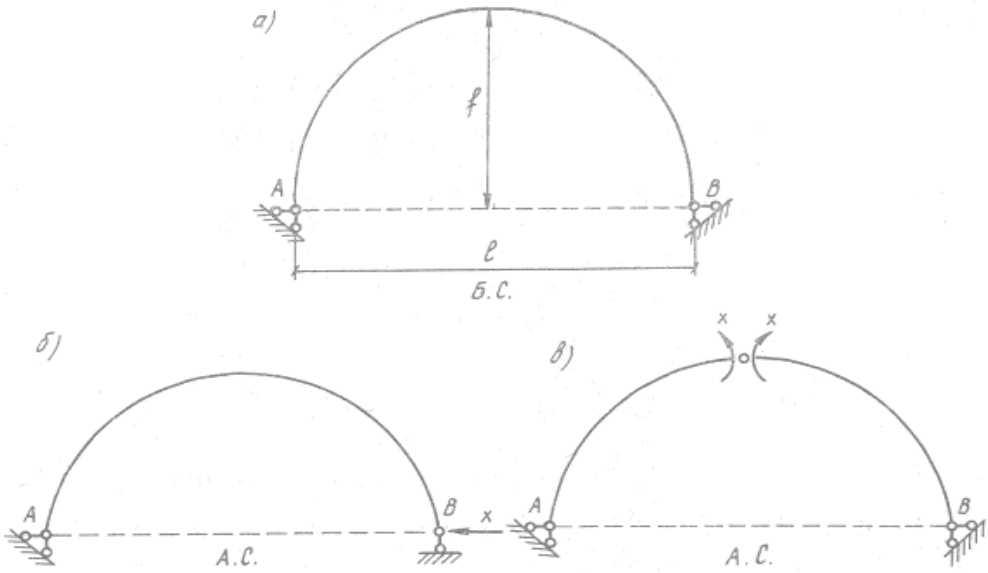
$$N_{01}=N_P+\bar{N}_{01}\cdot X_1=-100+0{,}825\cdot 72{,}2=-40{,}44\ \ kN;$$

$$N_{12}=N_P+\bar{N}_{12}\cdot X_1=-80+1{,}33\cdot 72{,}2=16{,}24\ \ kN.$$

8.4. Икки шарнирли аркаларни ҳисоблаш

Икки шарнирли аркалар асосан кўприк конструкцияларида ва иморатлар томини ёпишда ишлатилади.

Икки шарнирли арка (8.17- расм, а) бир марта статик ноаниқдир. Асосий система танлашда унинг битта ортиқча боғланиши ташлаб юборилади. 8.17-расм, б, в-да асосий система икки хил нусхада тавсия этилган. Асосий системанинг бирида В таянчининг горизонтал стержени номаълум реакция кучи Х билан алмаштирилган. Иккинчи асосий система эса қўшимча шарнир киритиш йўли билан ҳосил қилинган.



8.17- расм

Номаълум X_1 ни аниқлаш учун куч усулининг каноник тенгламасини тузамиз

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0;\ X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

Бу ерда δ_{11} — бирлик куч йўналиши бўйича ва шу бирлик куч (Р= 1) таъсиридан ҳосил бўлган бирлик кўчиш;

Δ_{1P} — асосий системага қўйилган ташқи юклардан ҳосил бўладиган горизонтал кўчиш.

Кўчишлар қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P}{GF} ds;$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1^2}{GF} ds.$$

Қиёсий ҳисоблар қуйидаги хулосага келиш имконини беради: а) агар $f < \frac{1}{3} l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг кучни, Δ_{1P} ни аниқлашда эса бўйлама ва кўндаланг кучларни инобатга олмаса бўлади, яъни

$$\Delta_{1P} = \int \frac{\overline{M}_1 M_P}{EJ} ds;$$

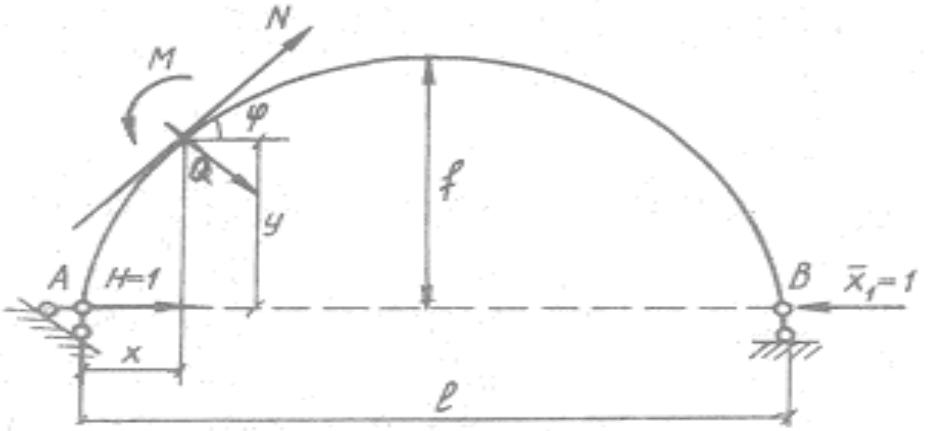
$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds + \int \frac{\overline{N}_1^2}{EF} ds.$$

8.18- расмдан

$$\overline{M} = -Y, \ \overline{N}_1 = -\cos\varphi.$$

Буларни кўчишлар формуласига қўямиз:

$$\Delta_{1P} = -\int_A^B \frac{Y M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ_0} \int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds.$$



8.18- расм

Бу ерда J_0 — кўндаланг кесимнинг энг кичик инерция моменти:

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{y^2 ds}{EJ} + \int_A^B \frac{\cos^2\varphi}{EJ} ds = \frac{1}{EJ_0}$$

$$\left[\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2\varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds \right];$$

$$X_1 = \frac{\int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2\varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds};$$

б) агар $\frac{1}{3}l > f > \frac{1}{5}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг ва бўйлама кучлар инобатга олинмайди:

$$X_1 = \frac{\int_A^B Y \cdot M_P \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds}.$$

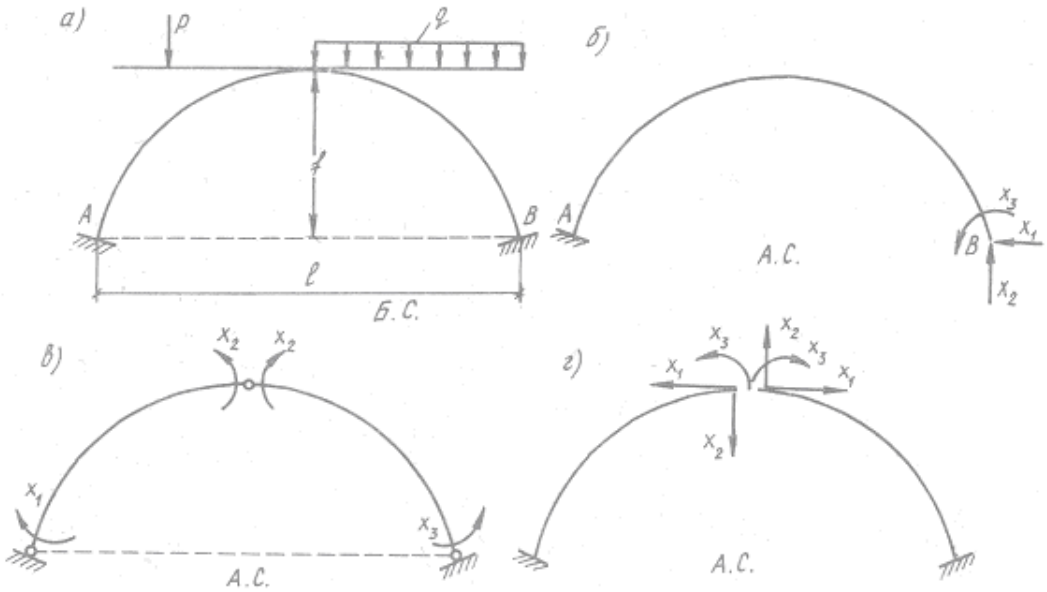
Горизонтал реакция кучи X_1 аниқлангандан сўнг арканинг иҳтиёрий К кесимидаги зўриқишлар қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K;$$
$$Q_K = Q_K^0 \cos\varphi - H \cdot \sin\varphi;$$
$$N_K = Q_K^0 \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi.$$

Бу формулаларда Н — керки кучи бўлиб, унинг қиймати горизонтал реакция кучи X_1 га тенгдир.

8.5. Шарнирсиз аркаларни ҳисоблаш

Шарнирсиз аркалар асосан кўприк конструкциялари ҳамда бинокорликда катта оралиқларни ёпишда ишлатилади. Шарнирсиз аркалар (8.19-расм) уч марта статик ноаниқ бўлади. Асосий система ҳосил қилиш учун аркадан учта ортиқча боғланиш олиб ташланади. Асосий системанинг бир неча нусхаси

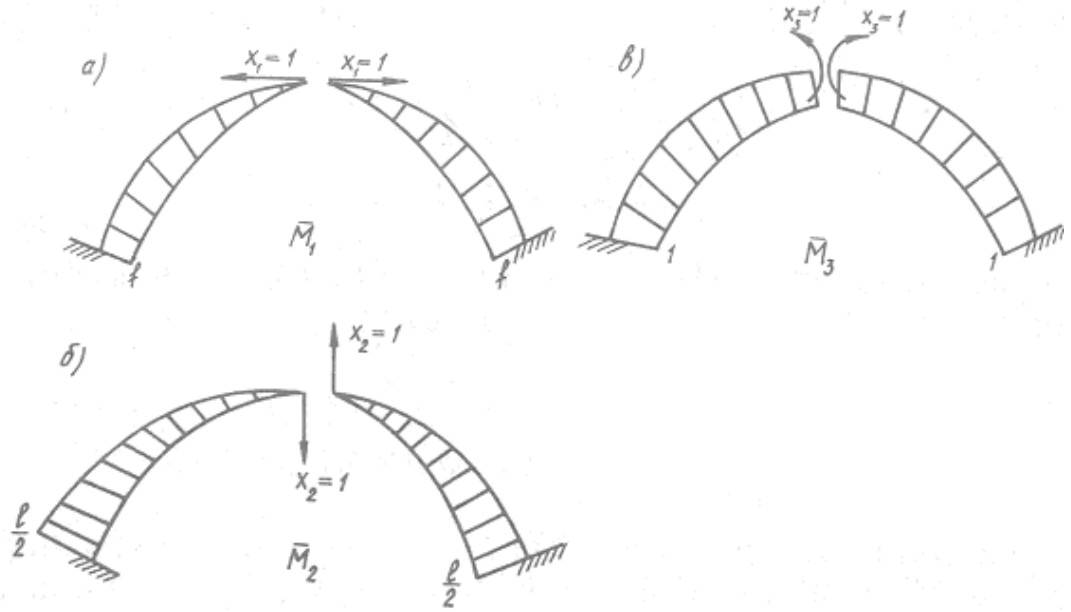


8.19- расм

8.19- расм, *б, в, г* - да тасвирланган. Аркани ҳисоблаш учун тавсия этилган нусҳалардан бири танлаб олинади. Маълумки, асосий система қулай танланса, каноник тенгламанинг баъзи ёрдамчи коэффициентлари нолга айланади. 8.19-расм, *г* - да тавсия этилган асосий система бу талабга тўлиқ жавоб беради, чунки бу асосий система айрим коэффициентларнинг нолга тенг бўлишини таъминлайди.

Асосий системадаги номаълум ички кучлар (X_1, X_2, X_3) куч усулининг каноник тенгламаларидан топилади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$
$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$



8.20- расм

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадларини аниқлаш учун бирлик кучлардан эгувчи момент эпюралари қурилади (8.20- расм).

Бу ерда $\bar{M}_1$, $\bar{M}_3$ симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюрадир (8.20-расм, *а, б, в*), Шунинг учун $\delta_{12}=\delta_{21}=0$ ва $\delta_{23}=\delta_{32}=0$ бўлади. У ҳолда кучлар усулининг каноник тенгламалари икки мустақил тизимга ажралиб, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{13}\cdot X_3+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{31}\cdot X_1+\delta_{33}\cdot X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}$$
$$\delta_{22}\cdot X_2+\Delta_{2P}=0.$$

Каноник тенгламаларнинг биринчи гуруҳида симметрик номаълумлар (X_1, X_3), иккинчи гуруҳида эса тескари симметрик номаълум (X_2) иштирок этади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари Мор формуласи ёрдамида аниқланади:

$$\delta_{kn}=\sum\int\frac{M_K M_n}{EJ}ds+\sum\int\frac{N_K N_n}{EF}ds+\sum\int\frac{Q_K Q_n}{GF}ds.$$

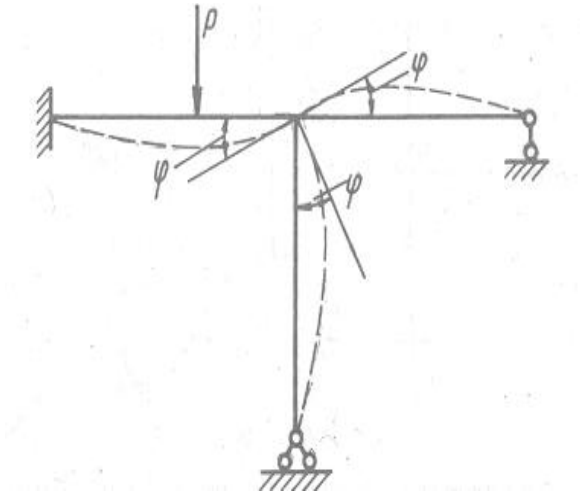
Коэффициент ва озод ҳадлар топилгач, каноник тенгламалар ечилади ва номаълум ички кучлар (X_1, X_2, X_3) аниқланади.

9- БОБ
СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. Усулнинг моҳияти

Маълумки, статик ноаниқ рамаларни кучлар усулида ҳисоблаганда, номаълумлар сифатида ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари қабул қилинган эди.

Ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари аниқлангандан сўнг ички кучларнинг қийматлари (M, Q, N) ва кўчишлар осонлик билан аниқланади.



9.1- расм

Статик ноаниқ рамаларни куч усулида ҳисоблашда аввал зўриқиш кучлари аниқланади, ундан сўнг кўчишлар аниқланади.

Бу масалани бошқа йўл билан ҳам ечиш мумкин. Бунда аввал статик ноаниқ рамалардаги кўчишлар топилади, ундан сўнг иҳтиёрий кесимдаги ички кучлар аниқланади.

Статик ноаниқ рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда, айнан шундай қилинади.

Бу усулга кўра номаълумлар сифатида рама тугунларидаги чизиқли ва бурчакли эластик кўчишлар қабул қилинади.

Кўчиш усули қуйидаги фаразларга асосланади:

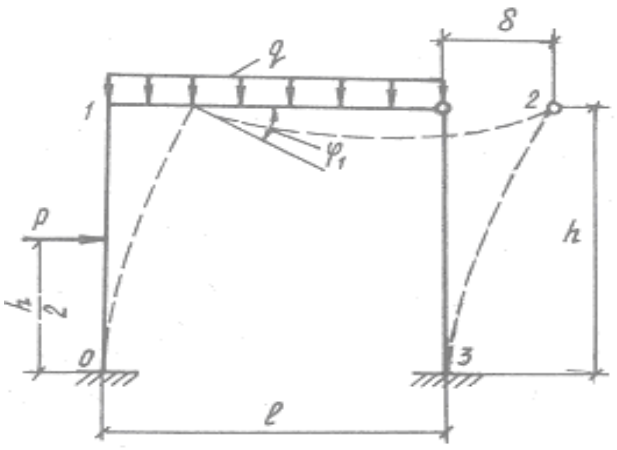
1. Икки ва ундан ортиқ стерженлар келиб туташган раманинг бикир тугуни бир хил бурчакка бурилади (9.1- расм).

2. Рама деформацияларини ҳисоблашда Q ва N нинг таъсири ҳисобга олинмайди.

3. Деформация натижасида тугунлар орасидаги масофа ўзгаришсиз қолади.

4. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли унинг тангенсини бурчакнинг ўзига тенг деб оламиз, яъни

$$tg\varphi = \varphi.$$



9.2- расм

9.2- расмда тасвирланган рама ташқи кучлар таъсирида деформацияланиб, унинг тугун лари бурчакли ва чизиқли кўчишлар олади.

Раманинг 1 тугуни φ бурчакка бурилади ва горизонтал йўналишда δ масофага кўчади.

Кўчишлар усулида номаълум сифатида рама тугунларининг чизиқли (δ) ва бурчакли (φ_1) эластик кўчишлари қабул қилинади.

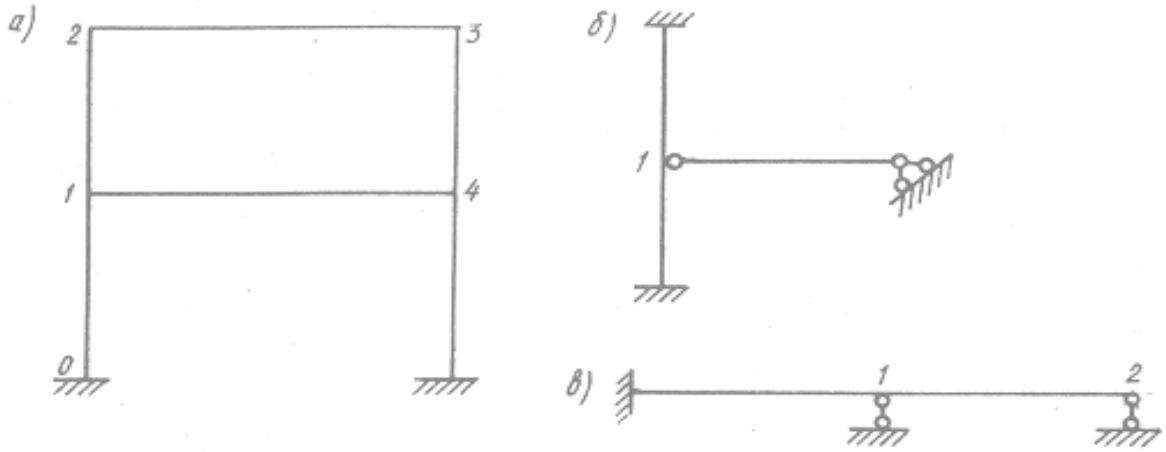
Кўчишлар усулида рамаларнинг кинематик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан топилади:

$$\boxed{n = n_b + n_{ch}}$$

Бу ерда:

n_b — бикир тугунлар сони ёки бикир тугунларнинг бурчакли кўчишлари сони;

n_{ch} — рама тугунларининг чизиқли кўчишлари сони.



9.3- расм

Номаълум деб қабул қилинган бурчакли кўчишлар сони «n_b», раманинг таркибидаги бикир тугунлар сонига тенг деб қабул қилинади. Икки ва ундан ортиқ стерженларнинг мустаҳкам туташган жойи *бикир тугун* деб аталади.

Мисол: 9.3- расм, а — да 1, 2, 3, 4 — тугунлар, 9.3- расм, б — да 1- тугун, 9.3- расм, в — да 1— тугунлар бикир тугунлар саналади.

Чизиқли кўчишлар сонини аниқлаш учун берилган раманинг бикир тугунларига ва таянчларига шарнирлар киритиб, геометрик ўзгарувчан система ҳосил қилинади. Бу ҳосил бўлган шарнирли системанинг эркинлик даражаси — раманинг чизиқли кўчишлари сонига тенг бўлади.

Шарнирли системани геометрик ўзгармас системага айланиши учун керакли бўлган кинематик боғланишлар сони раманинг чизиқли кўчишлар сонини ифодалайди.

Чизиқли кўчишлар сони қуйидаги формулалар ёрдамида ҳам аниқланади:

$$n_{ch} = 2Ш - C - C_T;$$

ёки

$$n_{ch} = 2T - C.$$

Бу ерда:

Ш — шарнирлар сони;

С — рама стерженлари сони:

C_T — таянч стерженлари сони;

T — тугунлар сони.

Мисол. 9.4- расм, *а* — да ифодаланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ечиш. Раманинг бурчакли кўчишлар сони $n_b=2$. Рама тугунларининг чизиқли кўчишлари сонини аниқлаш учун унинг бикир тугунларига шарнир киритиб, геометрик ўзгарувчан шарнирли системага келтирилади (9.4- расм, б) ва шу схеманинг эркинлик даражаси аниқланади. Бу схеманинг эркинлик даражаси $n_{сн}=1$, чунки унинг геометрик ўзгармас бўлиши учун унга битта қўшимча стержень — боғловчи киритилса кифоя (9.4- расм, *в*).

Берилган раманинг жами номаълумлари сони

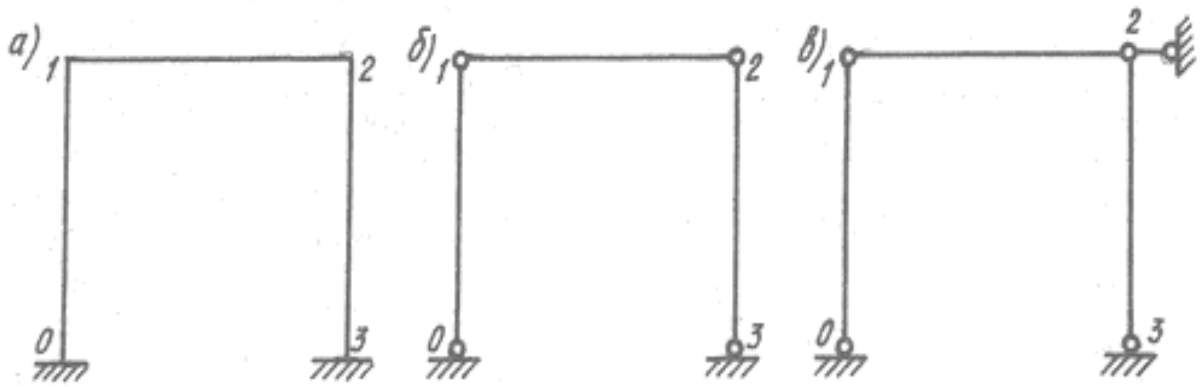
$$n = n_b + n_{ch} = 2+ 1 = 3.$$

Демак, раманинг кинематик ноаниқлик даражаси учга тенг экан.

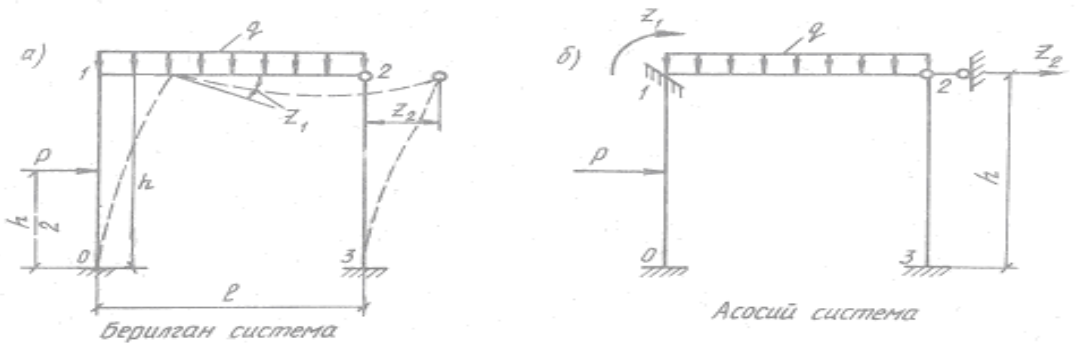
9.2. Кўчишлар усулининг асосий системаси ва каноник тенгламалари

Куч усулининг асосий системаси берилган системадаги ортиқча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинар эди. Асосий система — статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўларди.

Кўчишлар усулида асосий система, аксинча, рамага қўшимча боғланишлар киритиш йўли билан ҳосил қилинади. Қўшимча боғланишлар икки хил (бурчакли ва чизиқли) бўлади.



9. 4 - расм



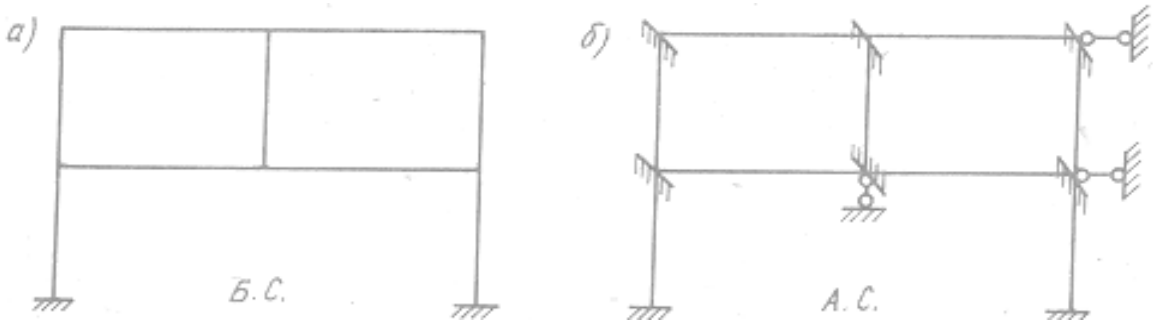
9.5 - расм

Рама тугунларининг бурчакли кўчишларига қаршилик кўрсатувчи боғланишлар — *бурчакли* боғланишлар деб аталади. Рама тугунларини чизиқли кўчишларига қаршилик кўрсатувчи боғланишлар — *чизиқли* боғланишлар деб аталади.

Рамага қўшимча боғланишлар киритилиши натижасида рама алоҳида бир оралиқли статик ноаниқ балкаларнинг йиғиндисига айланиб қолади.

9.5- расм, *а* — да тасвирланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси 2 га тенг. У битта бурчакли (Z_1), битта чизиқли (Z_2) кўчишга эга. Бу кўчишларга чек қўйиш учун рамага битта бурчакли боғланиш (биринчи тугун) ҳамда битта чизиқли боғланиш (иккинчи тугун) киритилади. Бу раманинг асосий системаси 9.5- расм, *б* — да берилган. 9 марта кинематик ноаниқ раманинг (9.6- расм, а) асосий системаси 9.6- расм, б да тасвирланган. Раманинг бурчакли кўчишлари сони олтига тенг (n_b=6), чизиқли кўчишлари сони эса учга тенг (n_{ch}=3).

Кўчишлар усулиннг каноник тенгламалари. Каноник тенгламалар тизимини тузиш қоидаси берилган система билан асосий система орасидаги фарқни йўқотишга асосланган.



9.6- расм

Асосий системалар берилган системадан қўшимча боғланишлари борлиги билан фарқ қилади. Маълумки, бурчакли боғланишларда реактив момент, чизиқли боғланишларда эса реактив кучлар ҳосил бўлади.

Реактив момент ва кучларни нолга тенглаш мумкин. Бунинг учун қўшимча боғланишларга берилган системада вужудга келадиган миқдорда чизиқли ва бурчакли кўчишлар берамиз.

Бурчакли ва чизиқли боғланишлардаги реактив момент ва кучларни инкор этиш кўчиш усули каноник тенгламасининг асосини ташкил этади.

Умумий кўринишда кўчиш усулининг каноник тенгламалари қуйидагича ёзилади (9.7- расм);

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0$$

Бу ерда R_1 ва R_2 — қўшимча боғланишларда ташқи кучлар ҳамда боғланишларнинг бурчакли ва чизиқли кўчишлари натижасида ҳосил бўладиган реактив момент ва реактив кучларнинг алгебраик йиғиндисидир.

Тузиладиган тенгламалар сони берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Каноник тенгламалар системасини тузиш тартибини 9.7- расмда тасвирлангаи рама мисолида кўриб ўтамиз.

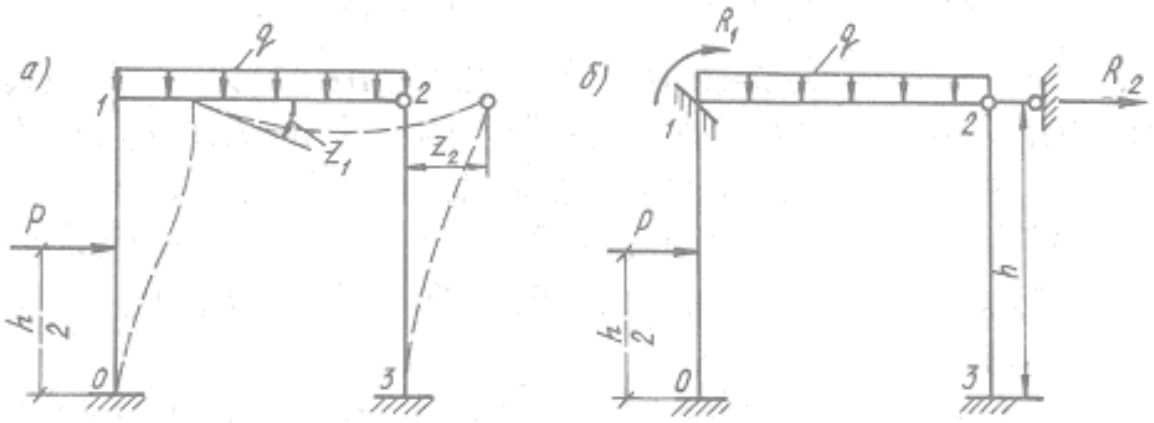
Биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда вужудга келадиган тўлиқ момент R_1 қуйидаги хадлардан ташкил топади:

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}.$$

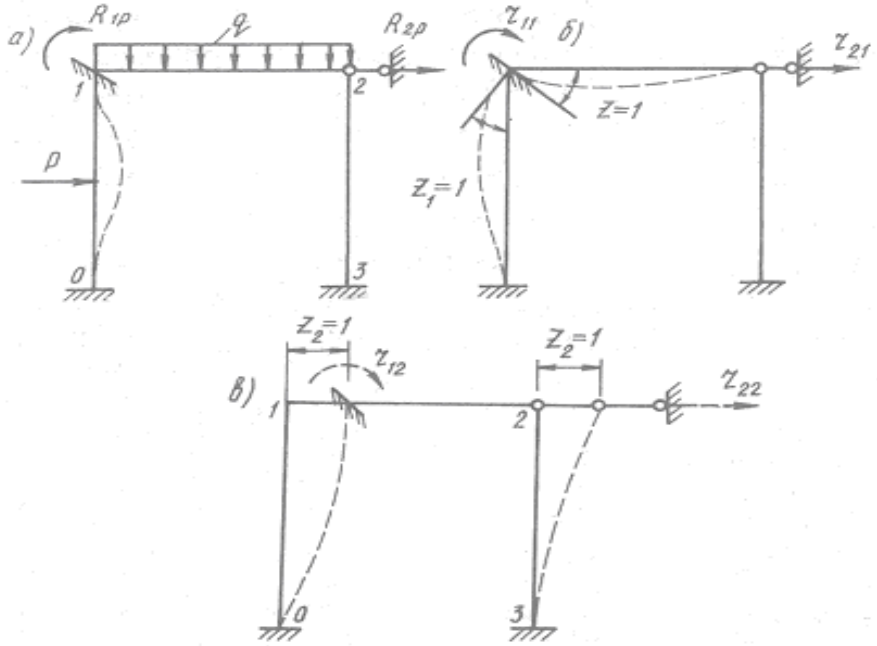
Бу ерда R_{1p} — қўшимча боғланишда ташқи юклар таъсирида вужудга келадиган реактив момент (9.8- расм, *а*);

R_{11} — биринчи боғланишни Z_1 бурчакка бурилиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент;

R_{12} — раманинг 1,2 — тугунларини Z_2 масофага кўчиши натижасида биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент.



9.7- расм



9.8- расм

R_{11} ва R_{12} реактив моментларни бирлик кўчиш натижасида вужудга келадиган реактив моментлар орқали ифодалаймиз:

$$R_{11} = r_{11} \cdot Z_1 \quad ва \quad R_{12} = r_{12} \cdot Z_2.$$

Бу ерда: r_{11} — биринчи боғланишни бир бирликка ($Z_1 = 1$) бурганимизда шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, б); r_{12} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага силжитганимизда биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8- расм, в);

У ҳолда дастлабки тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_l + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0. \qquad (9.4)$$

Шу тарзда иккинчи тенгламани ҳам тузса бўлади:

$$r_{21} \cdot Z_l + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \qquad (9.4)$$

Бу ерда r_{21} — биринчи боғланишни Z_1= 1 бурчакка бирилиши натижасида иккинчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8- расм, б);

r_{22} — иккинчи боғланишни Z_2= 1 масофага кўчиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8= расм, в);

R_{2p} — ташқи кучлар таъсирида иккинчи боғланишда вужудга келадиган реактив куч (9.8- расм, *а*).

Шундай қилиб, биринчи тенглама биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда реактив моментнинг нолга тенглигини, иккинчи тенглама эса иккинчи боғланишдаги реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Ҳар икки тенглама кўчиш усулининг *каноник тенгламаси* деб аталади.

Агар система тўрт маротаба кинематик ноаниқ бўлса, у ҳолда юқорида баён этилган тартиб асосида тўртта каноник тенглама тузилади ва у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{14} \cdot Z_4 + R_{1p} = 0;$$
$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2p} = 0;$$
$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{34} \cdot Z_4 + R_{3p} = 0;$$
$$r_{41} \cdot Z_1 + r_{42} \cdot Z_2 + r_{43} \cdot Z_3 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4p} = 0.$$

Бош диагонал бўйича жойлашган коэффициентлар (r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44}) бош коэффициентлар, қолганлари ёрдамчи коэффициентлар деб аталади; озод ҳадлар R_{1p}, R_{2p}, R_{3p}, R_{4p} — юк реакциялари деб аталади.

Бу тенгламаларда ҳам куч усулидаги сингари бош диагоналга нисбатан симметрик равишда жойлашган коэффициентлар ўзаро тенг бўлади, яъни $r_{12} = r_{21}$, $= r_{13} = r_{31}$.

Бош коэффициентлар ҳамма вақт нолдан катта бўлади $r_{nn} > 0$.

Ёрдамчи коэффициентлар эса $r_{k\,i} \geq 0$ бўлиши мумкин.

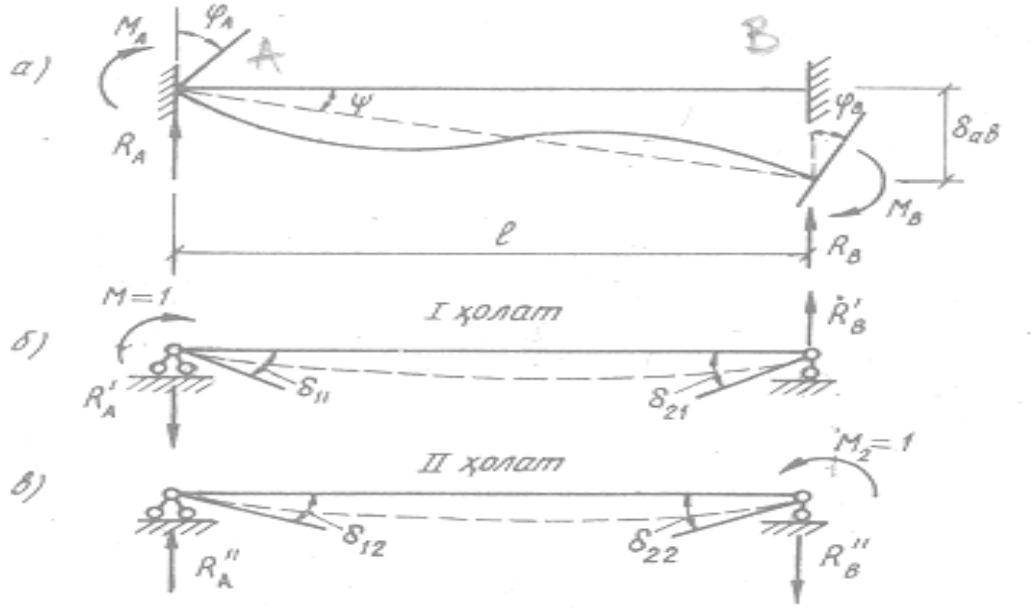
Куч усулининг каноник тенгламалари кўчишларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Кўчиш усулининг каноник тенгламалари эса рама тугунларига киритилган қўшимча боғланишлардаги реактив момент ва реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди.

9.3. Реакциялар ва кўчишлар орасидаги боғланиш ҳақида теорема

Тўғри стерженлардан ташкил топган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблашда киритилган қўшимча боғланишлардаги реакциялар бир оралиқли статик ноаниқ балкалар учун берилган формулалардан фойдаланиб аниқланади.

Бир оралиқли бикир таянчли статик ноаниқ балкани мисол тариқасида кўриб чиқамиз (9.9- расм).

Фараз қиламиз, чекка кесимлар φ_A ва φ_B бурчакларга бурилган бўлсин. АВ тўғри чизиқ ψ бурчакка бурилган дейлик.



9.9- расм

9.9- расм, а — да кўрсатилган M_A, M_B, φ_A, φ_B, R_A, R_B ларнинг йўналишлари мусбат ишорага мос келади деб қабул килайлик. M_A ва M_B таянч моментларини аниқлаш учун куч усули бўйича асосий системалар қурилади (9.9- расм, б, в), сўнгра ишлар ҳақидаги Бетти теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} M_A \cdot \delta_{11} - X_2\delta_{21} &= 1\cdot\varphi_A - \frac{1}{l}\delta_{ab} \\ M_B \cdot \delta_{12} - X_2\delta_{22} &= -1\cdot\varphi_B + \frac{1}{l}\delta_{ab} \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

Берилган система ва ҳар икки бирлик ҳолат бўйича аниқланган кўчиш ва зўриқишларнинг қийматлари 9.1- жадвалда ифодаланган.

9.1- жадвал

Ҳолат	Моментлар	Кучлар	Кўчишлар	
			Бурилиш бурчаклари	Оғиш бурчаги
Берилган	$M_A,\ M_B$	$R_A,\ R_B$	$\varphi_A,\ \varphi_B$	0; δ
I ҳолат	$M_1 = 1,\ M_2 = 0$	$R_A^1 = \frac{1}{\ell},\ R_B^1 = \frac{1}{\ell}$	$\delta_{11},\ -\delta_{21}$	0; 0
II ҳолат	$M_1 = 0,\ M_2 = 1$	$R_A^1 = \frac{1}{\ell},\ R_B^1 = \frac{1}{\ell}$	$\delta_{12},\ -\delta_{22}$	0; 0

Бирлик кўчишларни аниқлаймиз

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{M_1 \cdot l}{6EJ} = \frac{l}{6EJ}; \qquad (9.5.)$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{M_2 \cdot l}{3EJ} = \frac{l}{3EJ}; \qquad (9.6.)$$

Бу қийматларни (9.4) га қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} M_A \cdot \frac{l}{3EJ} - M_1 \cdot \frac{l}{6EJ} &= \varphi_A - \psi; \\ M_A \cdot \frac{l}{6EJ} - \frac{l}{3EJ} &= -\varphi_B + \psi. \end{aligned}\right. \qquad (9.7.)$$

Бундан

$$M_A = 2 \cdot \frac{EJ}{l}\left(\varphi_A + \varphi_B - 3\psi\right);$$
$$M_B = 2 \cdot \frac{EJ}{l}\left(\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi\right). \qquad (9.8)$$

Агар $\frac{EJ}{l} = i$ деб белгиласак, у ҳолда

$$M_A = 2i(2\varphi_A + \varphi_V - 3\psi);$$
$$M_B = 2i(\varphi_A + 2\varphi_V - 3\psi). \qquad (9.10)$$

бўлади. Бу ерда i — стерженнинг нисбий бирлиги.

Ҳусусий ҳоллар:

Агар $\varphi_A + \varphi_B = 0$ бўлса, (9.10) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_B = M_A = -6i\psi \qquad (9.11)$$

Агар $\varphi_A = \psi = 0$ бўлса,

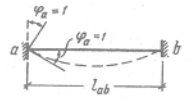
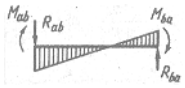
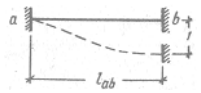
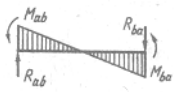
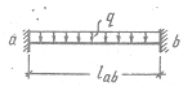
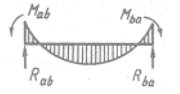
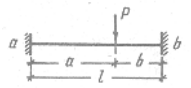
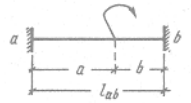
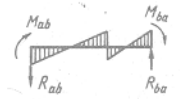
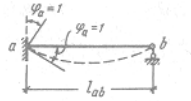
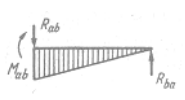
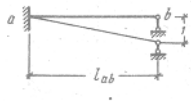
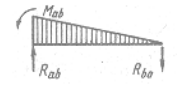
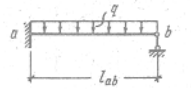
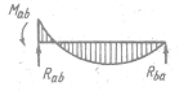
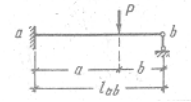
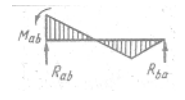
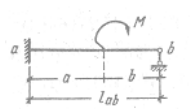
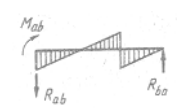
$$M_A = 2i\varphi_A;$$
$$M_B = 4i \cdot \varphi_B \quad \text{бўлади.} \qquad (9.12)$$

Агар $\varphi_B = \psi = 0$ бўлса, у ҳолда формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_A = 4i\varphi_A, \qquad M_B = 2i\varphi_B. \qquad (9.13)$$

Турли хил таъсирлар остида бўлган стерженларнинг чекка кесимларидаги таянч моментлари ва реакцияларини аниқлаш формулалари 9.2- жадвалда берилган.

9.2-жадвал

Балка ва унга таъсир қилувчи омил	Эгувчи момент эпюраси	Таянч реактив моментлари	Таянч реакциялари
		$M_{ab} = 4i_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ba}$	$R_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $R_{ab} = -R_{ba}$
		$M_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l}$ $M_{ba} = -\frac{6i_{ba}}{l}$	$R_{ab} = \frac{12i_{ab}}{l}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{ba} = \frac{ql^2}{12}$	$R_{ab} = \frac{ql}{2}$ $R_{ba} = \frac{ql}{2}$
		$M_{ab} = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_{ba} = \frac{Pa^2b}{l^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb^2}{l^2}\left(1+\frac{2a}{l}\right)$ $R_{ba} = \frac{Pa^2}{l^2}\left(1+\frac{2b}{l}\right)$
		$M_{ab} = \frac{M_b}{l^2}(2l-3b)$ $M_{ba} = \frac{M_a}{l^2}(2l-3a)$	$R_{ab} = -\frac{6ab}{l^3} \cdot M$ $R_{ba} = \frac{6ab}{l^3} \cdot M$
		$M_{ab} = 3i_{ab}$	$R_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$ $R_{ba} = \frac{3i_{ab}}{l_{ab}}$
		$M_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l}$	$R_{ab} = -R_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l^2}$
		$M_{ab} = -\frac{ql^2}{8}$	$R_{ab} = \frac{5}{8}ql$ $R_{ba} = \frac{3}{8}ql$
		$M_{ab} = -\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
		$M_{ab} = \frac{M(l^2-3b^2)}{2l^2}$	$R_{ab} = -\frac{3M(l^2-b^2)}{2l^3}$ $R_{ba} = \frac{3M(l^2-b^2)}{2l^3}$

9.4. Каноник тенглама коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш. Статик усул

Каноник тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системада бирлик кўчишлар ва ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган момент эпюралари қурилади.

Эгувчи момент эпюраларини қуриш ва каноник тенгламаларнинг коэффициентларини аниқлаш тартибини 9.10- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтамиз.

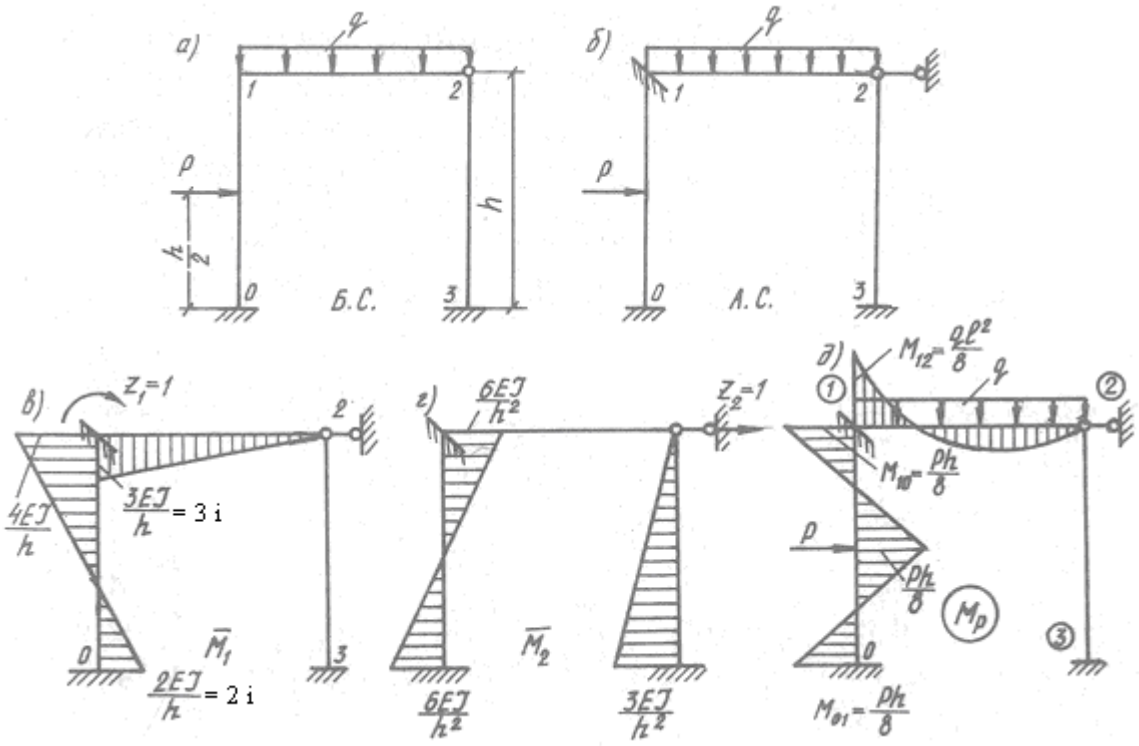
Берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси n=2 бўлгани учун иккита каноник тенглама тузилади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0;$$
$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0 \qquad (9.14)$$

Каноник тенгламани ечиш учун аввал унинг коэффициентлари ва озод ҳадларини топиб олишимиз керак.

$\overline{M}_1$ эпюрасини ҳосил қилиш учун биринчи тугунга киритилган боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурамиз (9.10- расм, в). Шаклда келтирилган моментларнинг қиймати 9.2-жадвалдан олинади.

$\overline{M}_2$ эпюраси иккинчи боғланишни $Z_2=1$ масофага кўчишидан ҳосил бўлган (9.10- расм, г). Бу ерда ҳам стержень учларидаги моментларнинг қиймати 9.2-жадвалдан олинган.



9.10- расм

M_p эпюраси ташқи кучлардан қурилган (9.10- расм, д). Табиийки, бу эпюрада ҳам моментларнинг қийматлари ўша жадвалдан олинган.

Эгувчи момент эпюралари қурилгандан сўнг каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлашга ўтилади.

Каноник тенгламаларнинг коэффициент ва озод ҳадлари иккита гуруҳга бўлинади:

1) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив моментлар;

2) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив кучлар.

Аниқланаётган коэффициент ёки озод ҳад реактив момент бўлса, у ҳолда асосий системадан тегишли қўшимча боғланиш кесиб олинади ҳамда мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\Sigma M = 0.$$

Агар аниқланаётган коэффициент ва озод ҳадлар реактив куч бўлса, у ҳолда асосий системанинг устунлари ва иккинчи боғланиш орқали кесим ўтказилади. Шундан сўнг проэкциялар тенгламаси тузилади:

$$\Sigma T = O.$$

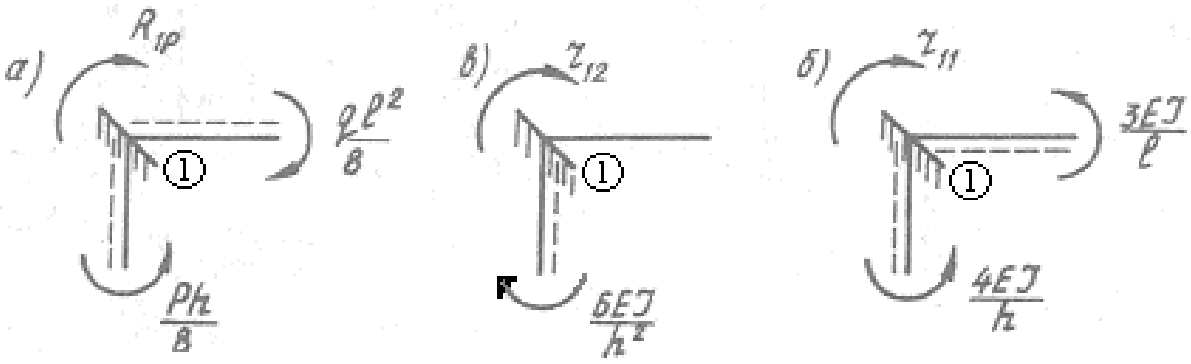
T — ўқнинг йўналиши тенгламалар тузишга қулай ҳолатда ўтказилади.

Каноник тенгламанинг биринчи қатордаги озод ҳад ва коэффициентларни аниқлайлик.

R_{1p} нинг қийматини аниқлаш учун «M_p» эпюрасидан биринчи тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламасини ёзамиз (9.11- расм, а):

$$\sum M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{ph}{8} = 0.$$

Бундан $R_{1p} = \frac{ph}{8} - \frac{ql^2}{8}$.



9.11-расм

r_{11}, r_{12} ларни аниқлаш учун $\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_2$ бирлик эгувчи момент эпюраларидан 1- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаси ёзилади (9.11- расм, в, б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0; \quad \sum M_1 = r_{12} - \frac{6EJ}{l} - \frac{4EJ}{h^2} = 0;$$

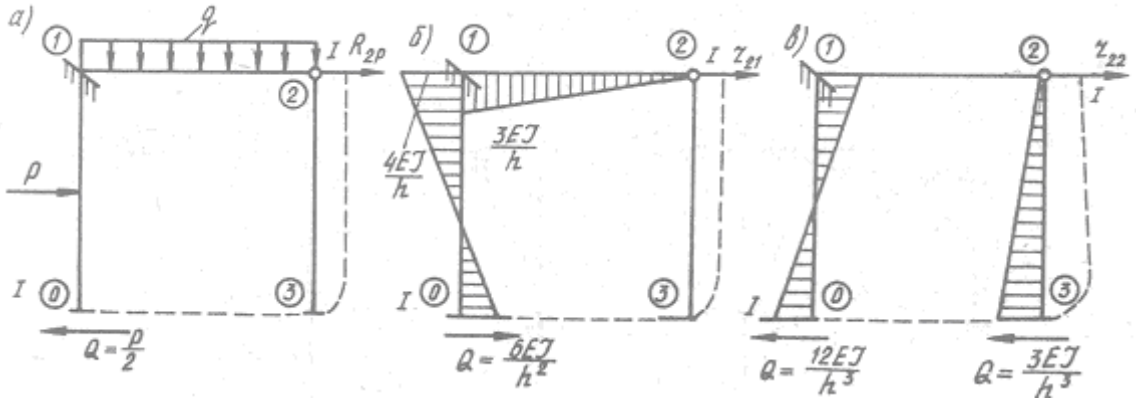
$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}; \quad r_{12} = \frac{6EJ}{h^2}.$$

Каноник тенгламанинг иккинчи қатордаги r_{21}, r_{22}, R_{2p} лар реактив кучлардан иборатдир.

Иккинчи боғланишдаги реактив куч. R_{2p} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланиш ажратиб олинади (9.12- расм, *а*). Бу ажратилган бўлак учун статиканинг мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$\sum X = P + P_{2p} - \frac{P}{2} = 0,$$

бундан $$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$



9.12-расм

r_{21} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригелни ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текширамиз (9.12- расм, б):

$$\sum X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0\ ;$$

бундан $$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}$$

r_{22} ни аниқлаш учун ҳам асосий системанинг устунларини 1 — 1 кесим бўйича кесиб, ригел ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текширамиз (9.12- расм, в);

$$\sum X = r_{22} - \frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} = 0;$$

бундан $$r_{22} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

Эпюраларни кўпайтириш усули

Агар берилган раманинг устунлари ўзаро параллел бўлмаса, у ҳолда статик усул анча мураккаб тус олади. Чунки оғма устунли раманинг асосий системаси учун мувозанат тенгламаси тузилганда, унинг горизонтал ўқига кўндаланг кучлар билан биргаликда бўйлама кучлар ҳам проекцияланади.

Бу усул билан коэффициентлар ва озод ҳадларни ҳисоблаш мураккаблашади. Бундай ҳолларда эпюраларни кўпайтириш усулидан фойдаланилади. Бу усул ташқи ва ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган ишлар ҳақидаги Бетти теоремасига асосланади:

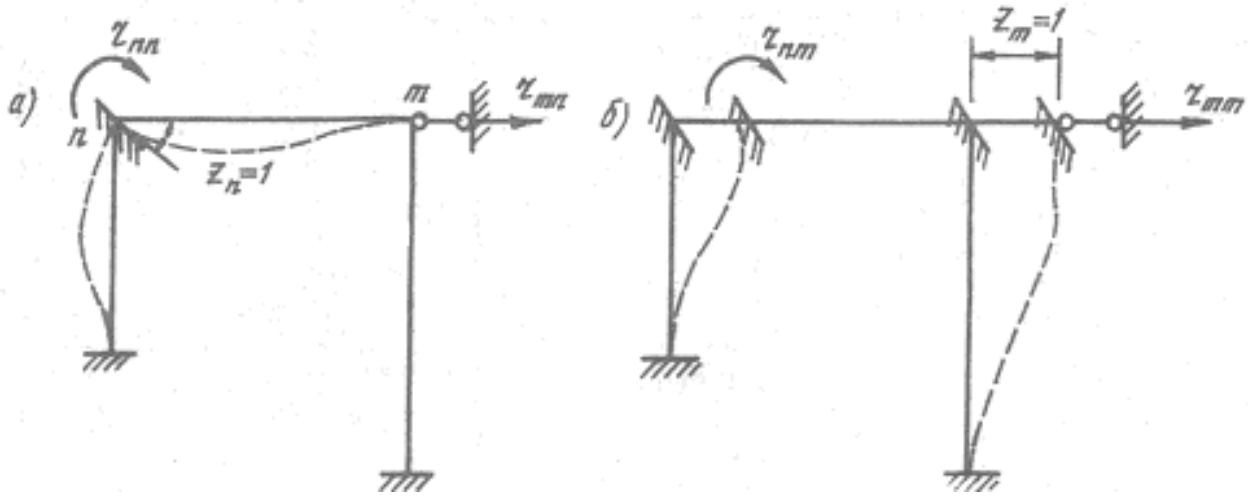
$$T_{nm} = U_{mm}. \qquad (а)$$

T_{nm}, «*m*» ҳолатдаги ташқи кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши;

U_{nm} «*n*» ҳолатдаги ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши.

Статик ноаниқ рамани икки ҳолатда тасвирлаймиз: биринчи ҳолатда «*n*» тугунни $Z_n=1$ бурчакка бурамиз (9.13- расм, а) иккинчи ҳолатда «*m*» тугунни $z_m=1$ масофага кўчирамиз (9.13- расм, б). Шакллардан фойдаланиб, ташқи кучлар бажариши мумкин бўлган иш ифодасини ёзамиз:

$$T_{nm} = r_{mn} \cdot 1. \qquad (б)$$



9.13- расм

Маълумки, ички кучлар бажариши мумкин бўлган иш қуйидаги формуладан аниқланади:

$$r_{mn} = \sum \frac{\overline{M}_m \overline{M}_n}{EJ} dx, \qquad (в)$$

(а) ифодага кўра

$$r_{mn} = \sum \int \frac{\overline{M}_m \overline{M}_n}{EJ} dx. \qquad (г)$$

Демак, кўчиш усули каноник тенгламаларининг коэффициентларини аниқлаш учун куч усулидаги сингари иккита бирлик эпюрани бир-бирига кўпайтирилса кифоя экан.

Кўчиш усули каноник тенгламаларининг озод ҳадларини ҳам эпюраларни кўпайтириш усулида топса бўлади. Бунинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$R_{np} = -\sum \int \frac{\overline{M}_n M_p^{/}}{EJ} dx .$$

Бу ерда $\overline{M}_n$ — бирлик эгувчи момент эпюраси;

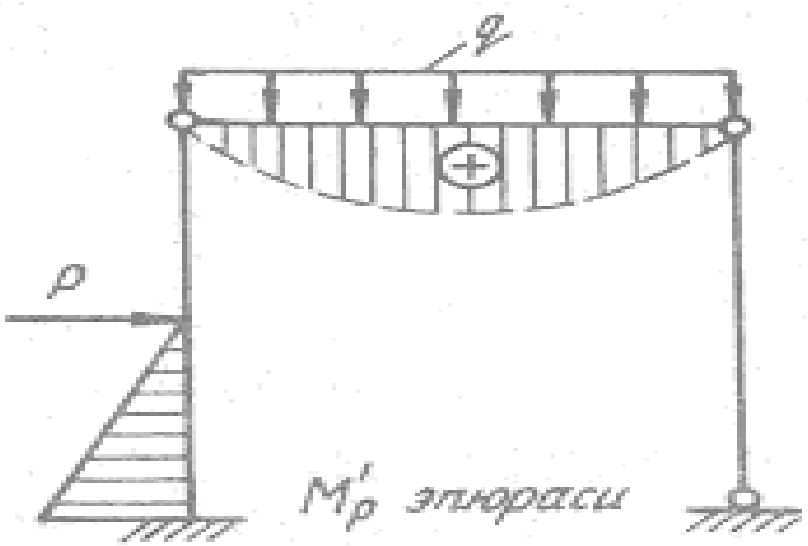
$M_p^{/}$ — статик аниқ системада ташқи кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси.

Масалан, 9.10- расм, *а*—да берилган статик ноаниқ рама учун $M_p^{/}$ эпюраси 9.14- расмда кўрсатилгандек бўлади. $\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_2$ бирлик эпюралари ўзгаришсиз қолади (9.10- расм, в, г). R_{1p} ни аниқлаш учун $M_p^{/}$ билан $\overline{M}_1$ эпюраси, R_{2p} ни аниқлаш учун эса $M_p^{/}$билан $\overline{M}_2$ эпюралари кўпайтирилади. Кўпайтириш ишлари Верешчагин қоидаси бўйича амалга оширилади.

Кўчиш усули каноник тенгламалари системасининг коэффициентлари ва озод хадлари куч усулидаги каби текширилади.

Бунинг учун аввал $\overline{M}_S$ йиғинди эпюраси чизиб олинади:

$$\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + ... + \overline{M}_{n,}$$



9.14- расм

Бу эпюра билан истаган бирлик эпюранинг кўпайтмаси, куч усулидаги сингари, тегишли қатор коэффициентларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$r_{1s} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_S}{EJ} dx = \sum \int \frac{\overline{M}_1 (\overline{M}_1 + \overline{M}_z + ... + \overline{M}_n) dx}{EJ} =$$

$$\sum \frac{\overline{M}_1^2 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 dx}{EJ} + ... + \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_n dx}{EJ} = r_{11} + r_{12} + ... + r_{1n}.$$

Каноник тенгламанинг озод хадлари қуйидагича текширилади:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_S M_P}{EJ} dx = -\sum \int \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_z + ... + \overline{M}_n) M_P}{EJ} dx =$$

$$\left(\sum \int \frac{\overline{M}_1 M_p^{/} dx}{EJ} + \sum \int \frac{\overline{M}_2 M_p^{/}}{EJ} dx + ... + \sum \int \frac{\overline{M}_n M_p^{/} dx}{EJ} \right) = R_{1P} + R_{2P} + ... + R_{np.}$$

Демак, озод ҳадлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси икки эпюранинг ($\overline{M}_S$ *ва* M_P^1 эпюраларининг) кўпайтмасига тенг бўлади.

9.5. Раманинг M, Q ва N эпюраларини қуриш

Каноник тенглама коэффициентлари тўғри топилганиға ишонч ҳосил килганимиздан сўнг коэффициентларни тенгламага қўйиб, ундаги номаълумлар (z_1, z_2, z_3,... z_n) ни аниқлаймиз ва ундан сўнг «*M*» эпюрасини қуришга ўтамиз. Эпюра қуйидаги қоида асосида қурилади:

$$M = M_p + \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + ... + \overline{M}_n \cdot Z_n \ ,$$

бу ерда M — статик ноаниқ раманинг исталган кесимидаги эгувчи момент;

M_p — асосий системада ташқи кучдан қурилган M эпюрасининг ординатаси;

$\overline{M}_1, \overline{M}_2$ — бирлик эпюраларнинг ординаталари;

Z_1, Z_2 — каноник тенгламалардан топилган бурчакли ёки чизиқли кўчишлар.

Якунловчи M эпюраси қурилгандан сўнг шу эпюра асосида *«Q»* ва *«N»* эпюралари қурилади.

9.6. Кўчишлар усулида соддалаштиришлар

Симметрик рамаларнн кўчиш усулида ҳисоблаганда ҳам куч усулидаги сингари номаълумларни гурухлаш йўлидан фойдаланса бўлади.

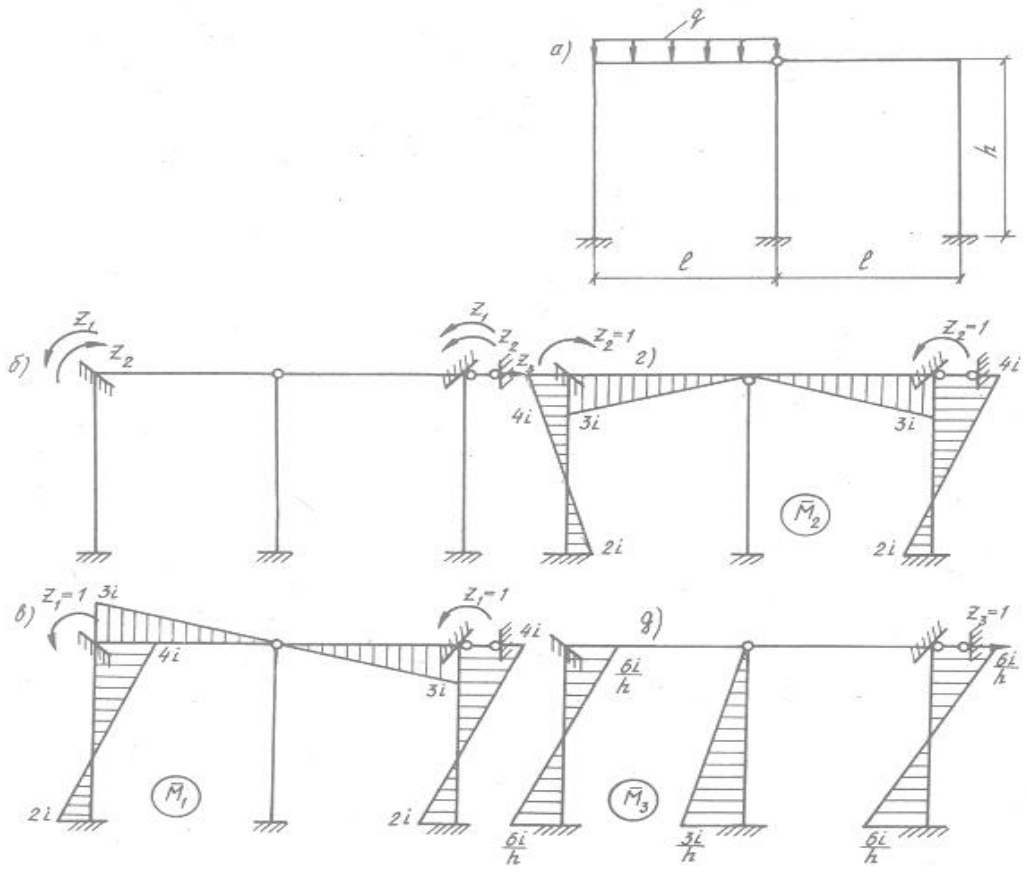
Мисол тариқасида 9.15- расм, *а* — да таевирланган рамани кўриб ўтамиз. Рама иккита бурчакли ва битта чизиқли кўчишга эга, яъни унинг кинематик ноаниқлик даражаси $n=3$. Раманинг тўлиқ каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0;$$

Берилган рама симметрия ўқига эга бўлганлиги сабабли номаълумларни гуруҳлаш йўли билан каноник тенгламанинг айрим коэффициентларини нолга тенглаштириш мумкин.



9.15- расм

Номаълумларни гурухлаш натижасида икки хил: тўғри симметрик ва тескари симметрик эпюралар ҳосил бўлади. Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси 0 га тенг бўлади. Натижада каноник тенглама иккита системага ажралиб кетади. Бу эса ҳисоблаш ишларини анча енгиллаштиради.

Номаълумларни гурухлаш 9.15- расм, б — да кўрсатилган шаклда амалга оширилади. Бирлик *M* эпюралари 9.15- расм, *в, г, д* — да тасвирланган. Бу ерда $\overline{M}_1$ тескари, $\overline{M}_2$ эса тўғри симметрик эпюра бўлиб, буларнинг кўпайтмасидан топиладиган $r_{12}=r_{21}=0$ бўлади, Шунингдек $r_{23}=r_{32}$ ҳам нолга тенгдир. У ҳолда юқоридаги каноник тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left.\begin{aligned} r_{11}\cdot Z_1 + r_{13} + Z_3 + R_{1q} \\ r_{31}\cdot Z_1 + r_{33} + Z_3 + R_{3q} \end{aligned}\right\} \textit{тескари симметрик тенглама}$$

$$r_{22}\cdot Z_2 + R_{2q} = 0 \quad \textit{симметрик тенглама}$$

9.7. Статик ноаниқ рамаларни аралаш ва комбинация усулларида ҳисоблаш

Бинокорликда шундай рамалар учрайдики, уларни ҳар қанча соддалаштирганда ҳам умумий ечими мураккаблигича қолаверади. Бундай рамаларнинг ечилишини соддалаштириш мақсадида куч ва кўчиш усулларидан бир йўла фойдаланиш тавсия этилади. Бунда раманинг бир қисми кучлар усулида, иккинчи қисми эса кўчишлар усулида ҳисобланади. Бундай ҳисоблаш усули *аралаш усул* деб аталади. Аралаш усулга доир мисол кўриб ўтамиз (9.16-расм);

Қаватлар	Статик ноаниқлик даражаси	Кинематик ноаниқлик даражаси
Биринчи	9	2
Иккинчи	2	12
Жами	11	14

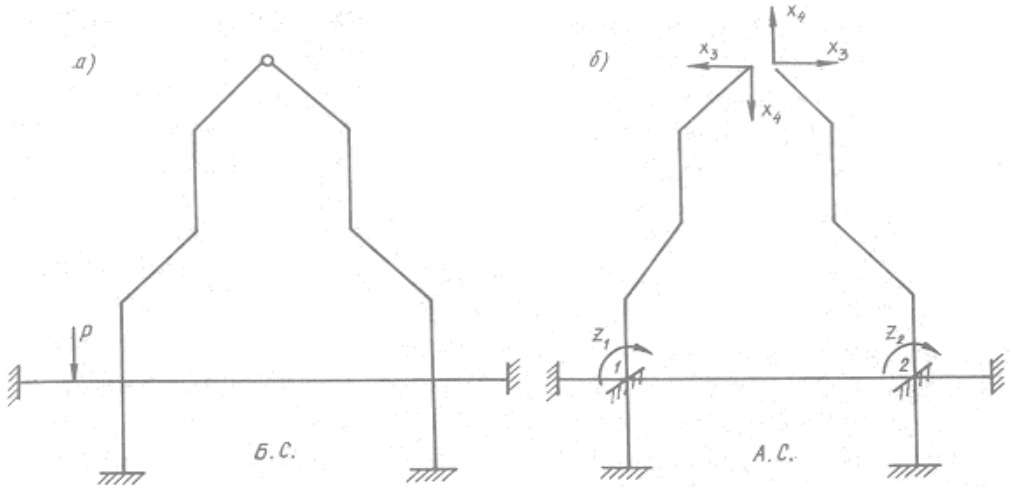
Берилган раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражалари қуйидаги жадвалда берилган:

Жадвалдан кўринадики, агар рамани куч усулида ишласак, у 11 номаълумли, кўчиш усулида эса 14 номаълумли бўлади. 11 ёки

14 номаълумли тенглама-ларни ечиш осон масала эмаслиги ҳаммага аён.

Агар раманинг биринчи қаватини кўчиш, иккинчи қаватини кучлар усулида ечилса, ҳисоб анча енгиллашади. Демак, рамани аралаш усулда ҳисоблаш мақсадга мувофикдир. Бу усулга кўра номаълумлар сони 4 га тенг бўлади.

Аралаш усулнинг асосий системаси 9.16- расм, б — да тасвирланган.



9.16- расм

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot X_3 + r_{14} \cdot X_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot X_3 + r_{24} \cdot X_4 + R_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot Z_1 + \delta_{32} \cdot Z_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41} \cdot Z_1 + \delta_{42} \cdot Z_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Каноник тенгламалар системасининг 1—2 қаторлари асосий систе-манинг биринчи ва иккинчи қўшимча боғланишларида ташқи юк ва номаълумлардан ҳосил бўлган реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди. 3 — 4 тенгламалар эса асосий системада ташқи юк ва номаълумлардан X_3 ва X_4 йўналишлари бўйича кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди.

Шундай қилиб, аралаш усул каноник тенгламаларининг бир қисми кўчишлар усулига, иккинчи қисми эса кучлар усулига тегишли шартларни ифодалайди.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари системасидаги коэффициентлар тўрт гуруҳга бўлинади:

1. Асосий системада бирлик кўчишлар ($Z_1=1$, $Z_2=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар $r_{11} \cdot r_{12}$, $r_{21} \cdot r_{22}$.

2. Асосий системанинг қўшимча боғланишларида бирлик кучлар ($X_3=1$, $X_4=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}.

3. Асосий системада номаълум зўриқишлар йўналишида бирлик кўчишлардан ҳосил бўлган кўчишларни ифодаловчи коэффициентлар δ_{31}, δ_{32}, δ_{33}, δ_{34}.

4. Асосий системада номаълум куч (X_3 ва X_4) лар йўналишларида бирлик кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар: δ_{41}, δ_{42}, δ_{43}, δ_{44}.

Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод хадлари куч ва кўчиш усулларида баён этилган қоидалар асосида топилади.

Аралаш усулда ҳам қуйидаги теоремалар амал қилади:

$$r_{mn} = r_{nm}$$

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}$$

$$r_{mp} = -\delta_{np}$$

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари биргаликда ечилади ва z_1, z_2, x_3 ва x_4 номаълумлар аниқланади. Эгувчи моментлар эпюрасини қуриш учун қуйидаги формулалардан фойдаланамиз:

$$M = M_P + \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3 + \overline{M}_4 \cdot X_4$$

Статик ноаниқ рамаларни *комбинация* усулида ҳисоблаш ҳам симметрик рамалар ҳисобини осонлаштириш мақсадини кўзда тутади. Бу усулга кўра рамага қўйилган юклар тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратилади.

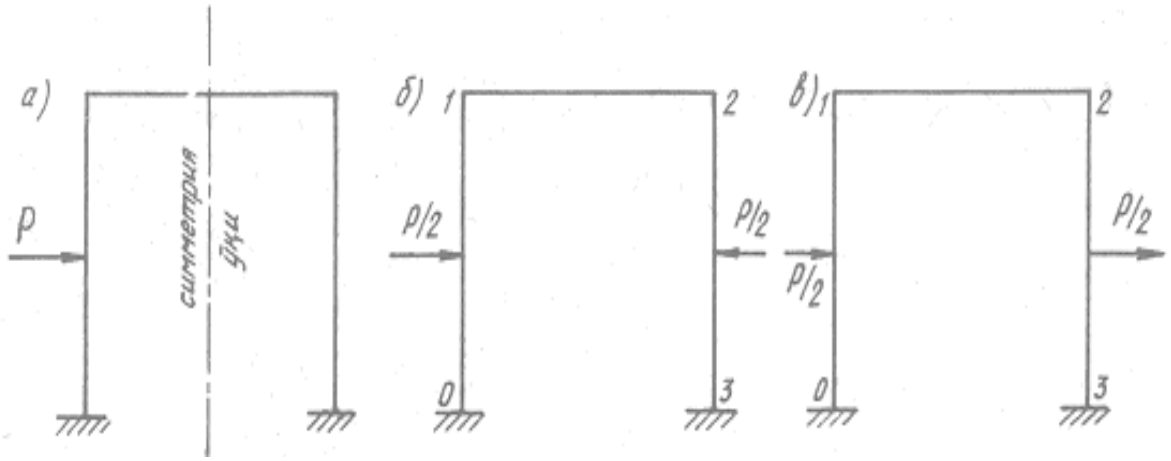
Симметрик юкланган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки бунда симметрик тугунларнинг бурилиш бурчаклари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескари бўлади, уларнинг чизиқли кўчишлари эса нолга тенг бўлади.

Тескари симметрик юкланган рамаларни куч усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки куч усулининг асосий системасида симметрик номаълумлар нолга тенг бўлади.Симметрик рамаларни ҳисоблашда уларга қўйилган ташқи юкларни симметрик ва тескари симметрик юкларга ажратилади (9.17- расм, б,

в). 9.18- расмда симметрик юкланган раманинг кўчиш (а) ва куч (б) усули бўйича танланган асосий системалари тасвирланган. 9.19- расмда ҳудди шунинг ўзи тескари симметрик юкланган рама учун бажарилган.

Ҳар иккала ҳол учун раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражаси, яъни номаълумлар сони аниқланиб, у 9.2 *а* — жадвалда акс эттирилган. Шу жадвалнинг оҳирги устунида қабул қилинган усул кўрсатилган.

Жадвалга кўра симметрик юкланган рама — кўчиш, тескари симметрик юкланган рама — куч усулида ишланиши мақсадга мувофик экан.



9.17- расм

9.2 *а — жадвал*

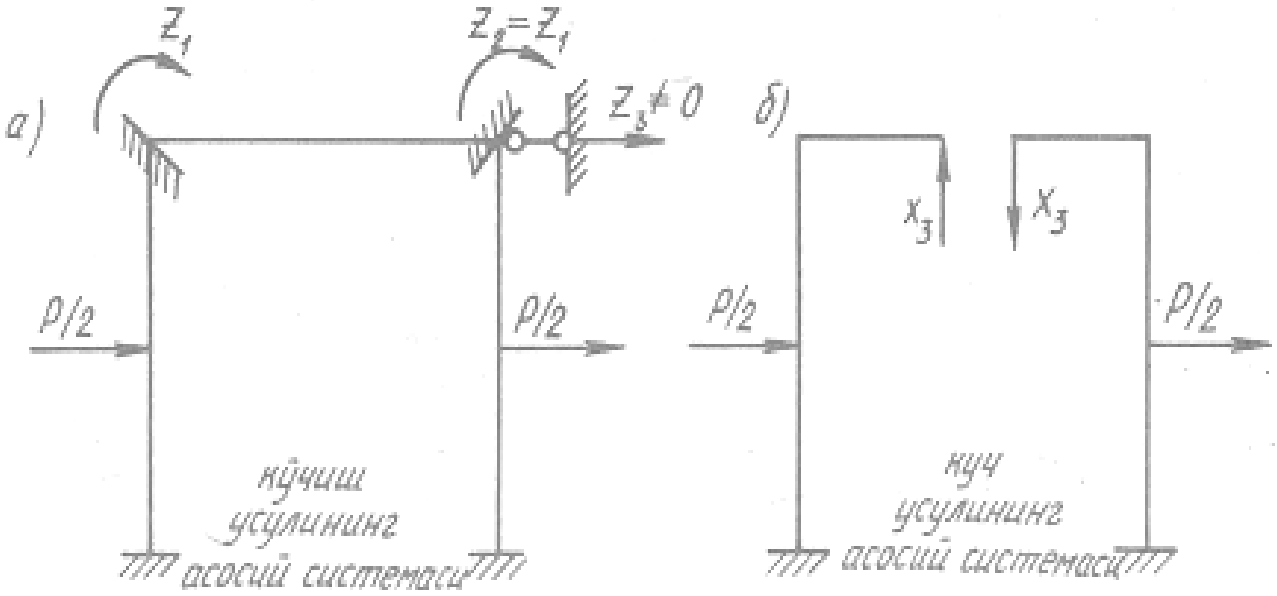
Юкланиш тартиби	Номаълумлар сони		Қабул қилинадиган усул
	Куч усули	Кўчиш усули	
Симметрик	2	1	Кўчиш усули
Носимметрик	1	2	Куч усули

Рамаларни ҳисоблашнинг бу йўли *комбинация усули* деб ном олган.

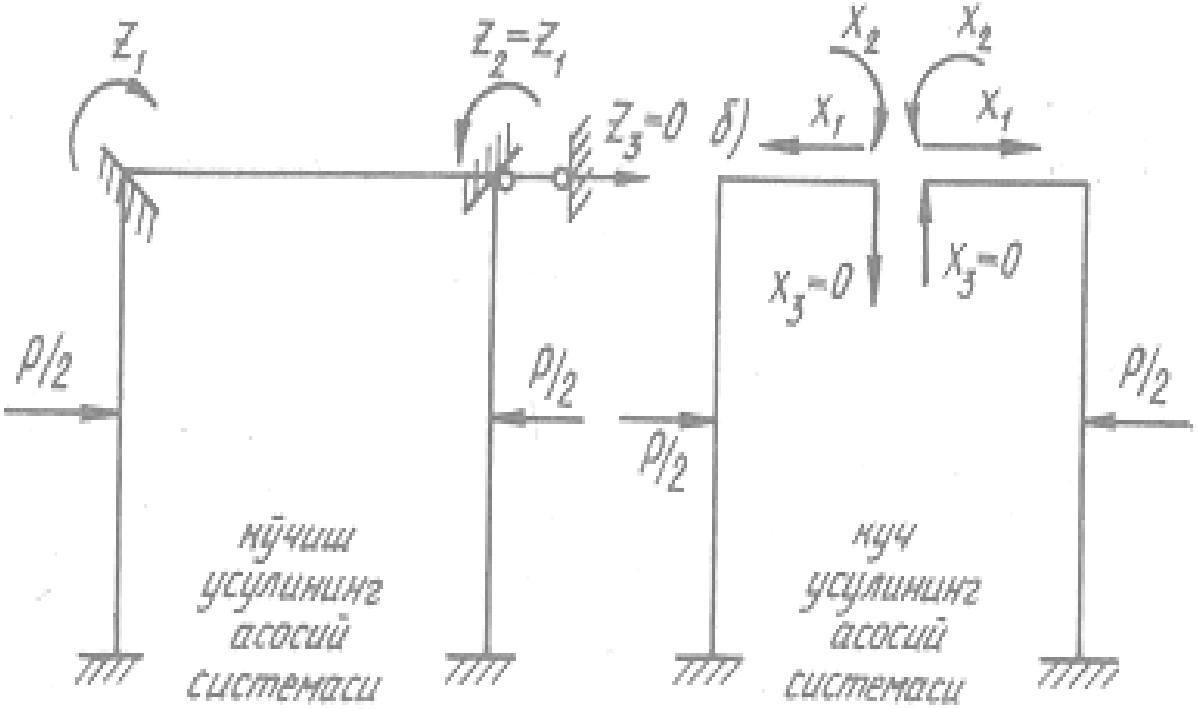
Мисол.

Энди статик ноаниқ рамани кўчиш усулида ҳисоблашга доир бир мисол ечамиз. Раманинг юкланиши ва ўлчамлари 9.20- расм, *а* — да кўрсатилган.

Рама қуйидаги тартибда ҳисобланади:



9.18- расм



9.19- расм

1. Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқланади:

$$n=n_б+n_ч;$$

$n_б$ — рама тугунларининг бурчакли кўчишлари сони;

$n_ч$ — рама тугунларининг чизиқли кўчишлари сони; (бу сон бикир тугунларни шарнир билан алмаштирилганда раманинг эркинлик даражасига тенг бўлади);

$$n_ч = 1$$

Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси

$$n = 1 + 1 = 2,$$

2. Асосий система тузилади (9.20- расм, б) ва рама элементларининг нисбий бикирликлари аниқланади:

$$i_{13} = \frac{EJ}{2l} = 0{,}5\frac{EJ}{l} = 0{,}5i;\ \frac{EJ}{l} = i\ ;$$

$$i_{34} = \frac{EJ}{l} = i;$$

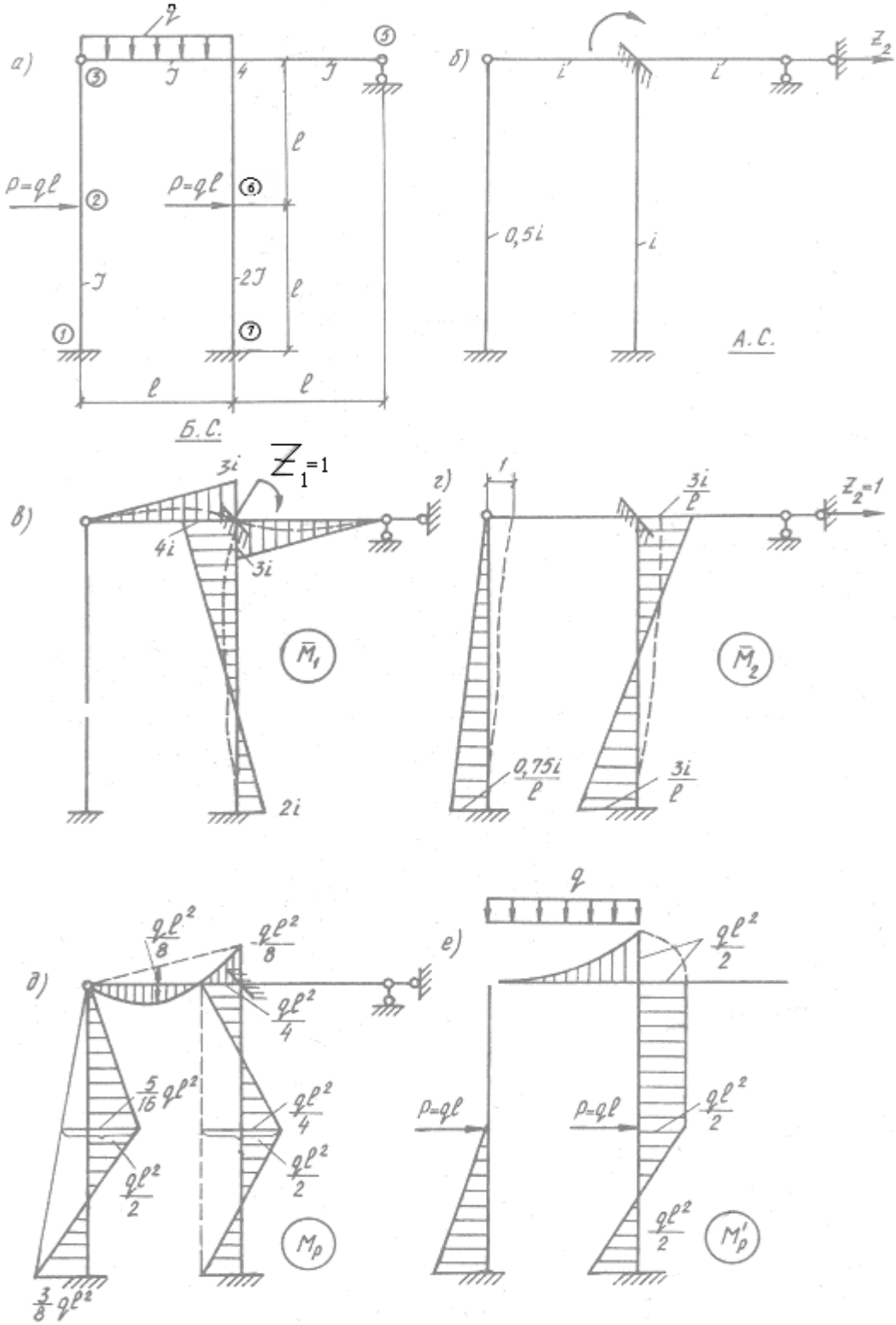
$$i_{47} = \frac{2EJ}{2l} = i.$$

3. Каноник тенгламалар системаси тузилади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0.$$

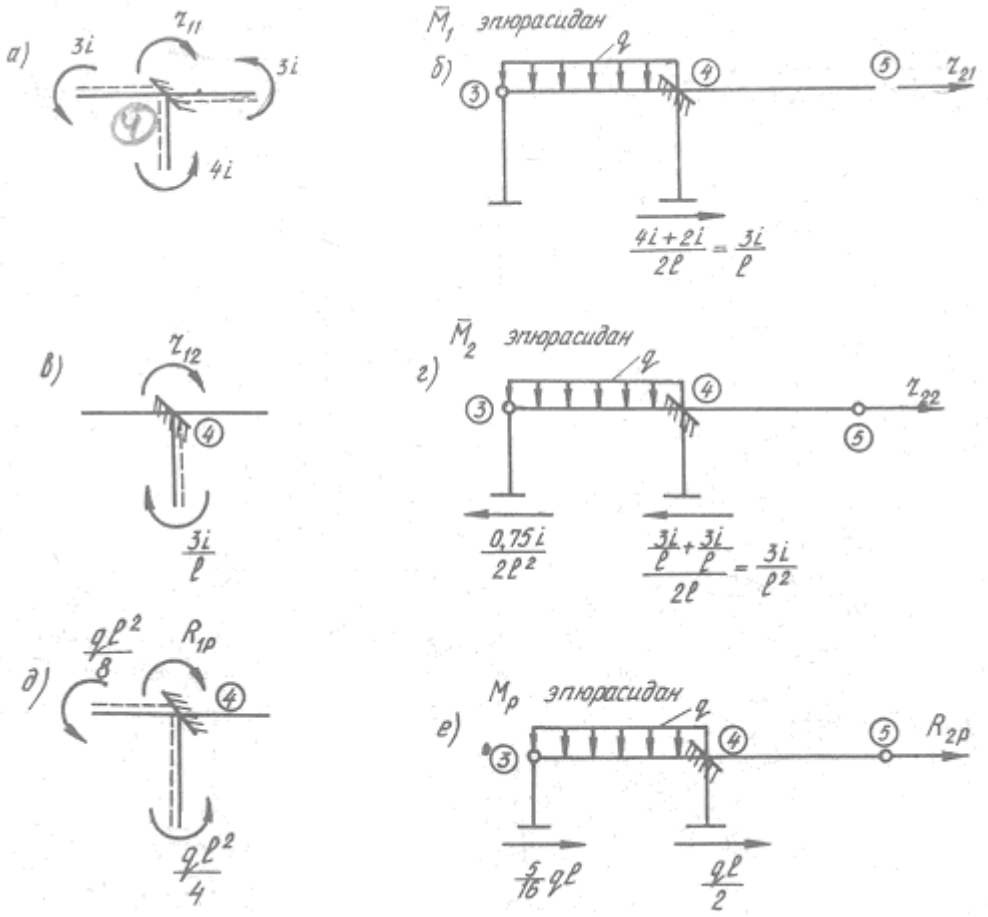
4. Асосий системада ташқи кучлардан ва бирлик кўчишлардан алоҳида-алоҳида эгувчи моментлар эпюралари қурилади (9.20- расм, *в, г, д*).



9.20- расм

Эпюраларни қуришда махсус жадвалдан фойдаланилади (9.2- жадвал).

5. Каноник тенгламалар тизими коэффициентлари ва озод хадлари аниқланади.



9.21- расм

Статик усул

а) 4 — тугун мувозанатидан қуйидагилар топилади: (9.21- расм).

$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21- расм, а): $r_{11} — 2(3i) — 4i=O;\quad r_{11}=10i.\ r_{11}=10i.$

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21- расм, в): $r_{12}+\frac{3i}{l}=0;\ r=-\frac{3i}{l}$;

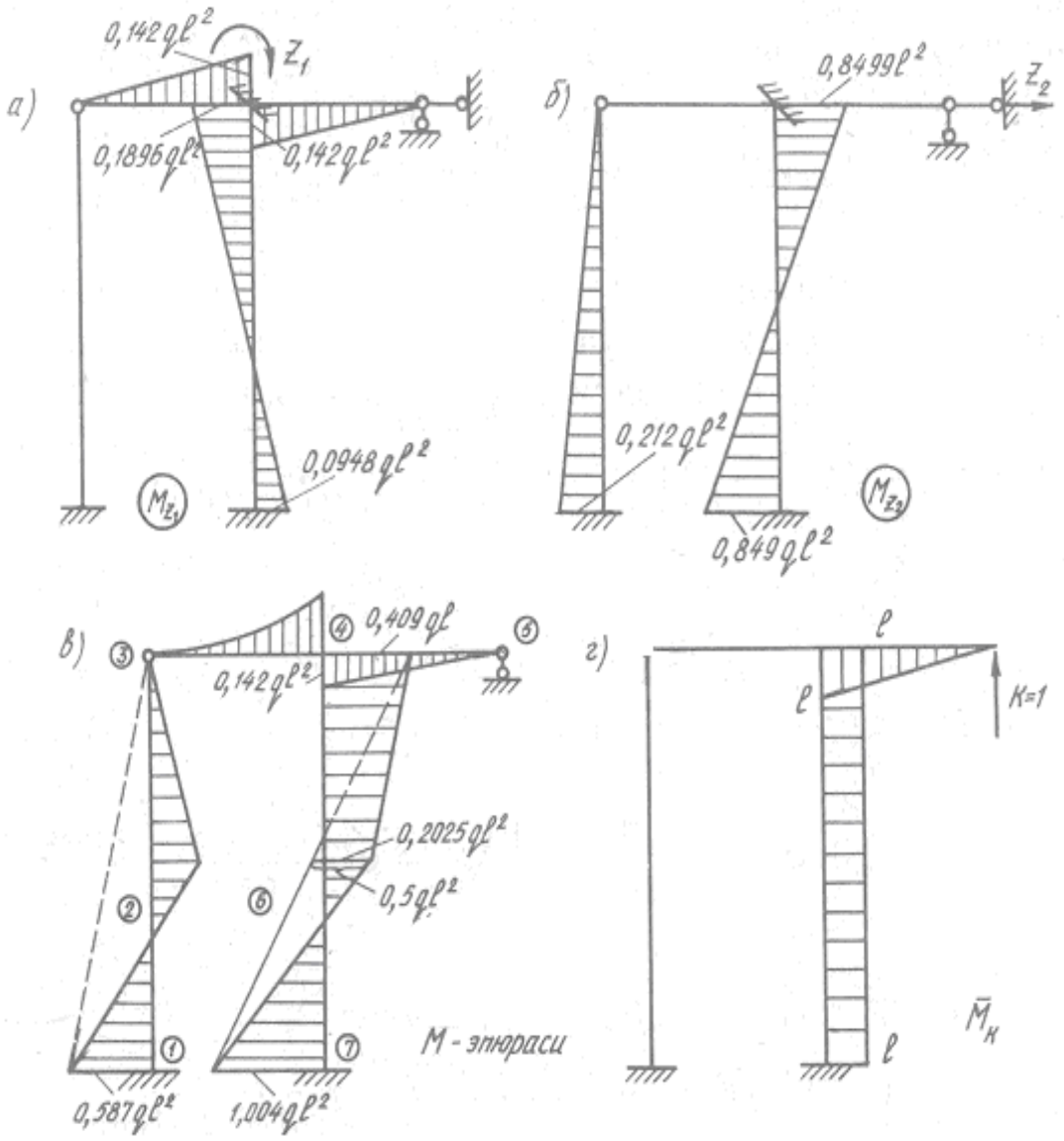
M_p эпюрасидан (9.21- расм, д): $R_{1p}-\frac{ql^2}{4}-\frac{ql^2}{8}=0$; $R_{1p}=0{,}375\,ql^2$.

б) раманинг юқори қисми мувозанатидан қуйидагилар топилади:

$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21- расм, б) $r_{21}+\frac{3i}{l}=0;\ r_{21}=-\frac{3i}{l}$;

$\overline{M}_2$ эпюрасидан (9.21- расм, г) $r_{22}-\frac{0{,}75i}{2l^2}-\frac{3i}{l^2}=0$; $r_{22}=\frac{3{,}375i}{l^2}$;

M_p эпюрасидан (9.21- расм, е) $R_{2p}+\frac{5}{16}ql+\frac{ql}{2}=0$; $R_{2p}=-\frac{13ql}{16}=-0{,}81ql$.



9.22- расм

Эпюраларии кўпайтириш усули

Статик усулда топилган коэффициент ва озод хадларни эпюраларни кўпайтириш усулида топса ҳам бўлади. Кўпайтириш амаллари Верешчагин усулида (9.22- расм) амалга оширилади:

$$r_{11} = (\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}3i \cdot l \cdot \frac{2}{3}3i \cdot 2 + \frac{1}{2EJ}\frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l\left(\frac{2}{3} \cdot 4i \cdot \frac{1}{3}2i\right) + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l\left(\frac{2}{3} \cdot 2i - \frac{1}{3} \cdot 4i\right) =$$

$$= \frac{l \cdot l^2}{EJ}(6 + 2 + 2) = 10i;$$

$$r_{22} = (\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}75i}{l} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0{,}75i}{l} + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3i}{l} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 = \frac{i^2}{EJ \cdot l}(0{,}375 + 3) =$$

$$= \frac{3{,}375i^2}{i \cdot EJ} = \frac{3{,}375i\frac{EJ}{l}}{l \cdot EJ} = \frac{3{,}375i}{l^2};$$

$$r_{21} = r_{12} = \overline{M}_1\overline{M}_2 = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3i}{l} - \frac{1}{2EJ}\frac{1}{2}2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3}\frac{3i}{l} = -\frac{3i^2}{EJ} = -\frac{3i \cdot EJ}{EJ \cdot l} = -\frac{3i}{l};$$

Озод ҳадларни аниқлаш учун берилган системадан статик аниқ система ҳосил қилинади ва ташқи кучлардан эгувчи моментлар эпюраси қурилади (9.20-расм, е):

$$R_{ip} = -(\overline{M}_p^{/}\overline{M}_1) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot 3i + \frac{1}{2EJ}\frac{1}{2}4i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} + \frac{1}{2EJ}\frac{1}{2}2i \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2}\frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2}(i - 2i) = \frac{ql^2}{EJ} \cdot I\left[-0{,}375 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0{,}25\right] = 0{,}375 \cdot \frac{ql^3}{EJ} \cdot i = 0{,}375ql^2.$$

$$R_{2p} = -(\overline{M}_p^{/} \cdot \overline{M}_2) = -\frac{1}{EJ}\frac{1}{2}ql^2 \cdot l \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{0{,}75}{l}i - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2}\frac{ql^2}{2} \cdot l\frac{2}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2}\frac{ql^2}{2} \cdot 2l \cdot 0 = -\frac{ql^2}{EJ} \cdot i\left[\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\right] = -\frac{13}{16}ql = -0{,}8125ql.$$

Ҳар иккала усулда топилган коэффициент ва озод хадлар мос равишда бир-бирига тенг чиқди.

6. Номаълумлар аниқланади. Бунинг учун топилган коэффициент ва озод хадлар каноник тенгламага қўйилади:

$$10i \cdot Z_1 - \frac{3i}{l} \cdot Z_2 + 0{,}375ql^2 = 0$$

$$-\frac{3i}{l} \cdot Z_1 + \frac{3{,}375i}{l^2} \cdot Z_2 - 0{,}8125ql = 0$$

Тенгламалар биргаликда ечилиб, номаълум бурчакли ва чизиқли кўчишлар аниқланади:

$$Z_1 = 0{,}0474\frac{ql^2}{i};\ \ Z_2 = 0{,}283 \cdot \frac{ql^3}{i};$$

7. Қуйидаги формула асосида тузатилган эпюралар қурилади (9.22- расм, а, б):

$$M_{z_1} = \overline{M}_1 \cdot Z_1;\ M_{z_2} = \overline{M}_2 \cdot Z_2$$

8. Натижавий эгувчи моментлар эпюраси қуйидаги формула асосида қурилади (9.22- расм, в):

$$M = M_p + M_{z_1} + M_{z_2}$$

9. Натижавий *M* эпюраси текширилади. Бунинг учун статик аниқ системага бирлик кучдан $\overline{M}_k$ эпюраси қурилади (9.22- расм, г) ва шу эпюра натижавий *M* эпюраси билан кўпайтирилади:

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}142ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} 0{,}409ql^2 \cdot 21 \cdot l +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5ql^2 \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}004ql^2 \cdot 2l \cdot l =$$

$$= \frac{ql^4}{EJ}(0{,}0473 + 0{,}2045 + 0{,}25 - 0{,}502) = \frac{ql^4}{EJ}(0{,}5018 - 0{,}502) = -\frac{0{,}0002}{EJ} ql^4$$

Хатоси $\delta\% = \dfrac{0{,}0002 \cdot 100}{0{,}502} = 0{,}04\ \% < 1\ \%$

Рухсат этилган чегарада.

10. *Кўндаланг кучлар эпюраси Q қурилади.* Бунинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{o'ng} - M_{chap}}{l};$$

$$Q_{12} = \frac{0{,}2065ql^2 - (-0{,}582ql^2)}{l} = 0{,}7935ql;$$

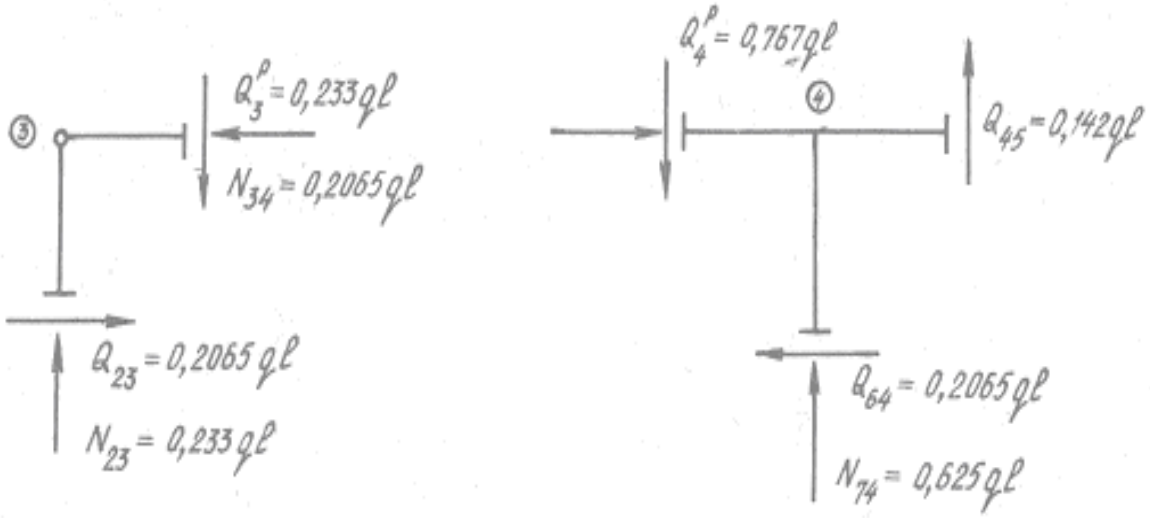
$$Q_3 = \frac{ql}{2} + \frac{-0{,}267ql^2 - 0}{l} = 0{,}233ql\ ;$$

$$Q_4 = -\frac{ql}{2} + \frac{-0{,}267ql^2 - 0}{l} = -0{,}767ql\ ;$$

$$Q_{45} = \frac{0 - 0{,}142ql^2}{l} = -0{,}142ql;$$

$$Q_{64} = \frac{0{,}409ql^2 - 0{,}2025ql^2}{l} = 0{,}2065ql;$$

$$Q_{76} = \frac{0{,}2025ql^2 - (-1{,}004ql^2)}{l} = 1{,}2065ql.$$



9.23 - расм

11. Бўйлама кучлар эпюраси N қурилади. Бунинг учун раманинг 3 ва 4 тугунлари мувозанати кўриб чиқилади (9.23- расм). 3 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma_x=0; \quad N_{34} - Q_{23} = 0; \quad N_{13} = Q_{23} = 0,2065$$

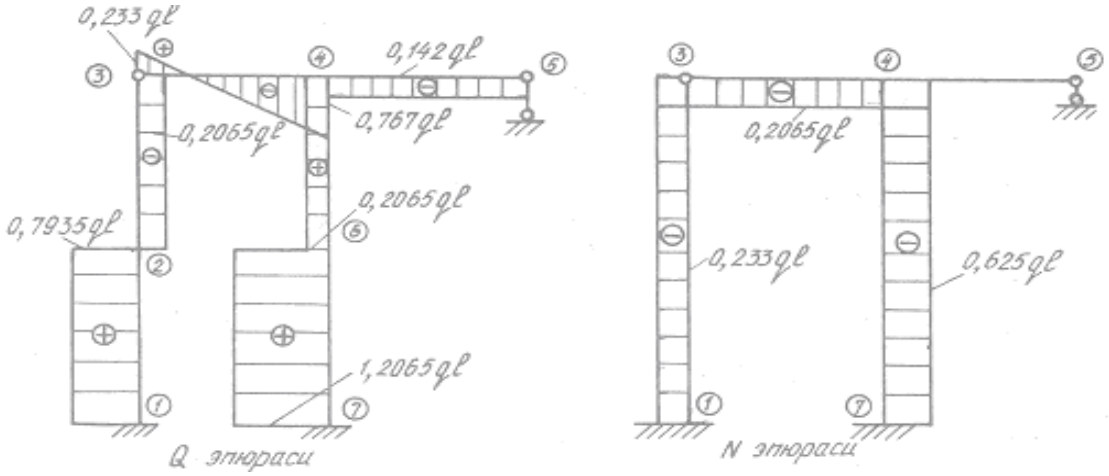
$$\Sigma_y = 0; \quad N_{13} - Q_{31}^p = 0; \; N_{13} = Q_3^p = 0,233ql.$$

4 тугун мувозанатидан:

$$\Sigma_y = 0; \quad N_{74} - Q_4^p + Q_{45} = 0;$$

$$N_{74} = Q_4^p - Q_{45} = 0,767ql - 0,142ql = 0,625ql.$$

Топилган ординаталар бўйича кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраси қурилади (9.24- расм).



9.24- расм

10-БОБ
СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. Тақрибий усуллар ҳақида тушунча

Ҳисоблаш усулларини аниқ ва тақрибий усулларга бўлишнинг ўзи шартлидир. Негаки, «аниқ» усулларда ҳам айрим фаразларга. йўл қўйилади. Масалан, материални идеал эластик ва бир жинсли деб қаралади, бунда раманинг фазовой иши ҳамда таянчларининг қайишқоқлиги эътиборга олинмайди ва х.к. Тақрибий усулларда эса ҳисобни енгиллаштирадиган фараз ва соддалаштиришга кўпрок ўрин берилади.

Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда тақрибий усуллар кенг қўлланилади. Маълумки, қурилиш конструкцияларининг ҳисоби уларнинг кўндаланг кесимини дастлабки танловдан бошланади. Бу ишларни тез ва соз амалга оширишда муҳандисга тақрибий усуллар жуда қўл келади.

Тақрибий усулларнинг қўшимча фаразлари иншоотнинг ҳисоблаш схемасини янада соддалаштиришга, ички кучлар тақсимотига, берилган юкларни соддароқ юклар билан алмаштиришга ва шунинг сингари қатор амалларга асосланади.

Бу борада ҳисоблаш схемасини янада соддалаштириш асосий йўллардан бири ҳисобланади. Агар ҳисоблаш схемаси кўпол фаразларга асосланса, у ҳолда ҳисоб натижалари биринчи яқинлашув учун туғри деб қабул қилинади, танланган кесим эса дастлабки нусха сифатида қаралади, зарурат туғилса, кейинчалик аниқрок схема бўйича қайта ҳисобланади.

Масалан, рама ригелининг кўндаланг кесими ўлчамларини дастлабки танлашда уни оддий балка кўринишида олиш мумкин: бунда ригель моменти балка моменти M_o нинг 0,6—0,7 улушини ташкил этади:

$$M = (0,6 — 0,7)\, M_o$$

Рама устунларининг кесимини танлашда ригеллар устунга шарнирли бириккан деб фараз этилади ва шу асосда устунга таъсир этувчи бўйлама

кучлар аниқланади. Буни ҳисобга олиб, ҳисобий қаршиликлар 20 — 50 фоизга камайтирилади.

Аниқроқ ҳисоблаш схемалари бўйича бажарилган ҳисоб дастлабки танланган кесимни ойдинлаштириш имконини беради. Баъзан қайта аниқланган кесим кейинги аниқ ҳисобларга асос қилиб олинади.

Амалий ишларда тақрибий усулларнинг аҳамияти бенихоя каттадир.

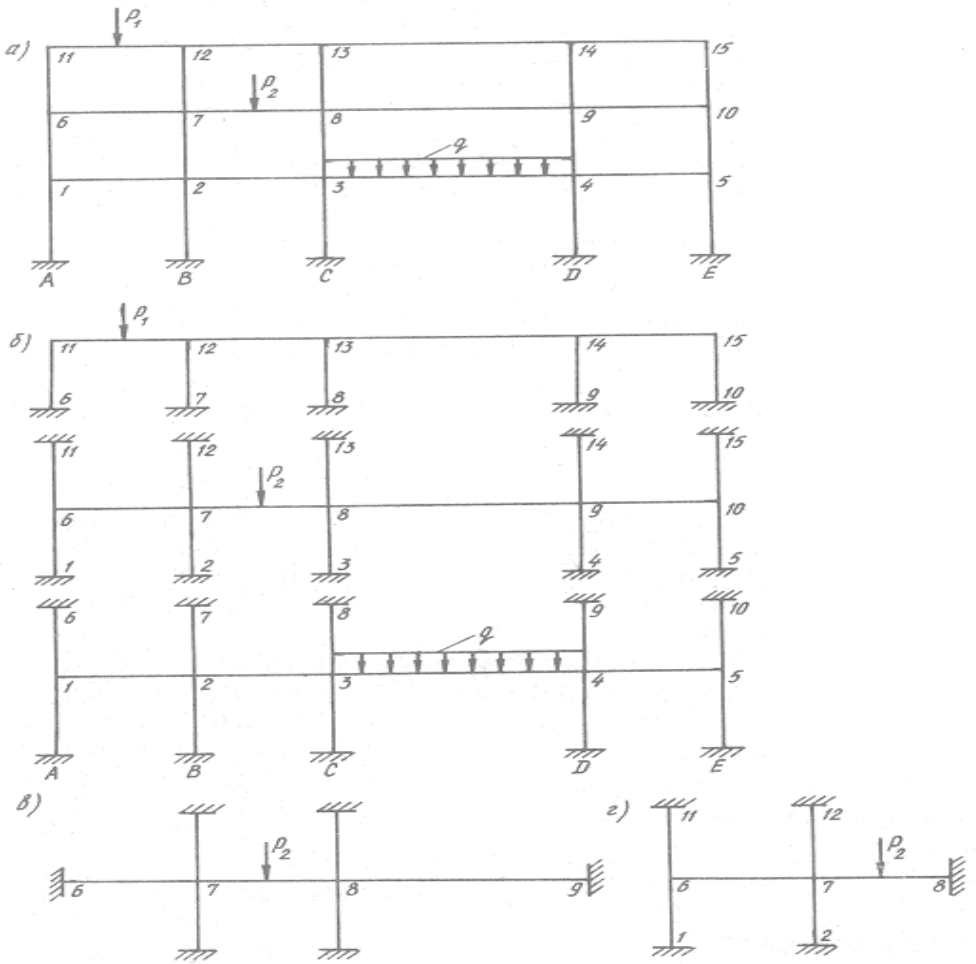
10.2. Рамаларни вертикал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш

Аниқ ҳисобларнинг далолат беришича, бирор қаватнинг ригелига қўйилган юк бошқа қават ригелларида вужудга келадиган эгувчи моментларга айтарли таъсир этмайди. Бу ҳол 10.1- расм, *а* — да берилган рамани 10.1- расм, *б* — да кўрсатилган тарзда алоҳида рамаларга ажратиш имконини беради. Раманинг ҳар бир қисми мустақил рама сифатида кўрилади. Алоҳида эпюралар раманинг дастлабки схемасига устма-уст жойлаштирилади, сўнгра кўндаланг ва бўйлама кучлар ҳисобланади. Ҳисоб тақрибий бўлганлиги сабабли рама тугунлари тўлиқ мувозанатга эга бўлмайди.

Ҳисобни бундан ҳам соддалаштирса бўлади. Бунинг учун раманинг уч ригелдан иборат бўлган бўлаги ажратиб олинади (10.1- расм, в) ва мустақил равишда ҳисобланади. Раманинг чекка қисми 10.1- расм, *г* — да кўрсатилган тарзда ажратилади.

Бинокорликда оралиқлари тенг ҳамда бир хил юкланган кўп қаватли рамалар кўп учрайди. Бундай рамаларни вертикал юклар таъсирига ҳисоблаганда янада соддароқ схемалар танлаш мумкин. Масалан, 10.2- расм, *а* — да тасвирланган кўп қаватли кўп оралиқли рамалар ҳисоби, 10.2- расм, *б* — да кўрсатилганидек учта уч оралиқли рамалар ҳисобига келтирилиши мумкин, яъни берилган раманинг ички кучлари ҳақида тақрибий маълумотга эга булиш учун юқори, ўрта ва биринчи қават рамалари ҳисобланса кифоя. Рама устунчасининг баландлиги қават баландлигининг ярмига тенг бўлиб, учлари шарнирли деб қабул қилинади. Бунга сабаб шуки, горизонтал кўчишлар йўқ деб

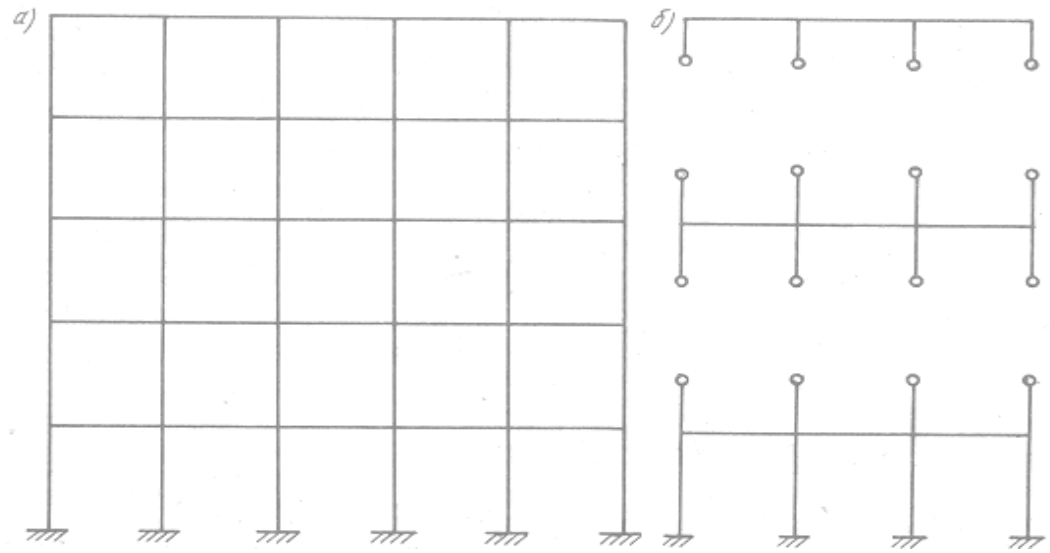
фараз этилса, бир ўқ устида жойлашган тугунлар деярли бир хил бурчакка бурилади. Бинобарин, устунларнинг тугундаги моментлари ҳам ўзаро тенг бўлади, натижада ноль нуқталар устуннинг ўрталарида ҳосил бўлади.



10.1- расм

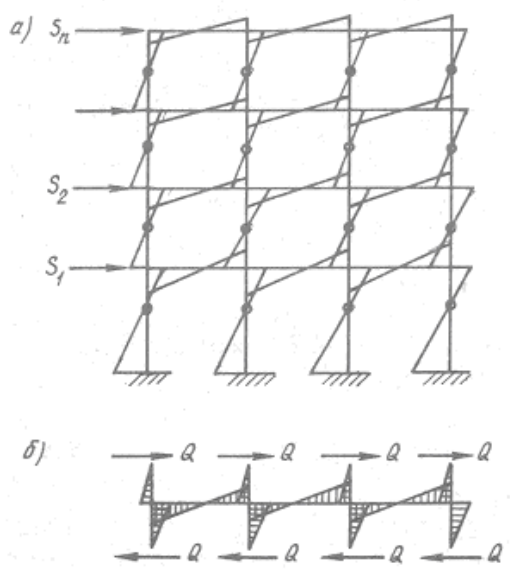
10.3. Рамаларни горизонтал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш

Рамаларни горизонтал юклар (шамол ва сейсмик кучлар) таъсирига тақрибий ҳисоблаганда, юклар йиғиқ куч сифатида тугунларга қўйилган деб қаралади. Аниқ ҳисобларнинг кўрсатишича, юклар тугунларга қўйилса, эгувчи моментларнинг ноль қийматлари устуннинг ўрта қисмида, биринчи қаватда эса устун баландлигининг тахминан учдан икки қисмида жойлашади (10.3- расм, а). Шунга кўра, ноль нуқталарга шарнирлар киритиш воситасида раманинг статик ноаниқлик даражасини пасайтирса бўлади.



10.2- расм

Қават учун аниқланган умумий кўндаланг куч Q рама устунларига маълум тартибда тақсимланади. Ҳар бир устунга таъсир этувчи кўндаланг куч топилгач, эгувчи моментларни аниқлаш ва M эпюрасини қуриш учун рамадан бир бўлаги ажратиб олинади (10.3- расм, б). Устун учларига Q кучларини қўйиб, устун учун M эпюраси қурилади. Тугундаги мувозанатлашмаган момент ригелдаги момент билан мувозанатлаштирилади. M эпюраси асосида Q ва N эпюралари қурилади.



10.3- расм

Қаватлар кўндаланг кучлари қуйидаги тартибда аниқланади: биринчи қават учун

$$Q_1 = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$$

иккинчи қават учун

$$Q_2 = S_2 + S_3 + \ldots + S_n \qquad (10.1)$$

Маълум қават чегарасида устунларнинг кўндаланг кесимлари бир хил бўлса, у ҳолда кўндаланг куч устунларга қуйидаги тартибда тақсимланади:

қаватнинг ўртадаги устунлари учун

$$Q_{o'r} = \frac{Q}{m - 2 \left(1 - \beta\right)}; \qquad (10.2)$$

қаватнинг четки устунлари учун

$$Q_{chet} = \beta Q_{o'r} \qquad (10.3)$$

бу ерда m — битта қаватдаги устунлар сони;

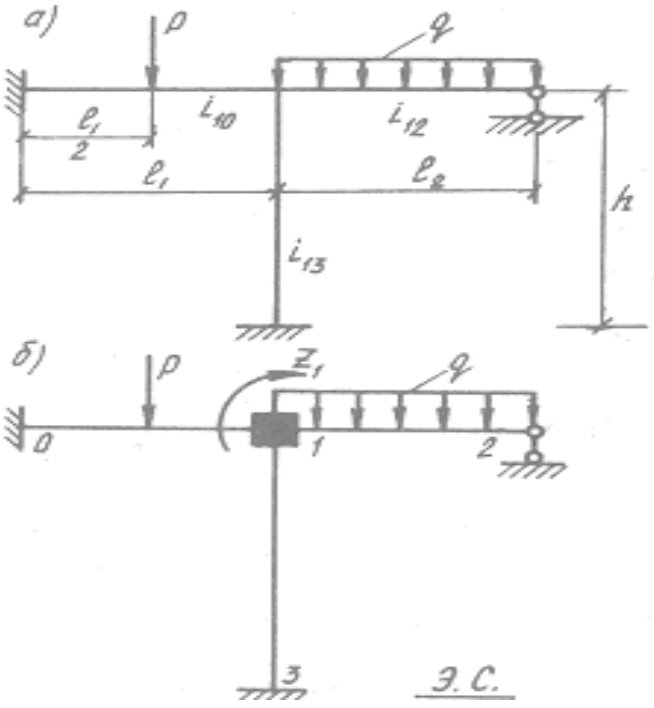
β — четки устунлар бикирлигини камайтириш коэффициенти; биринчи қават учун β =0,9; қолган қаватлар учун β = 0,54...0,79.

10.4. Тугунларни мувозанатлаш усули

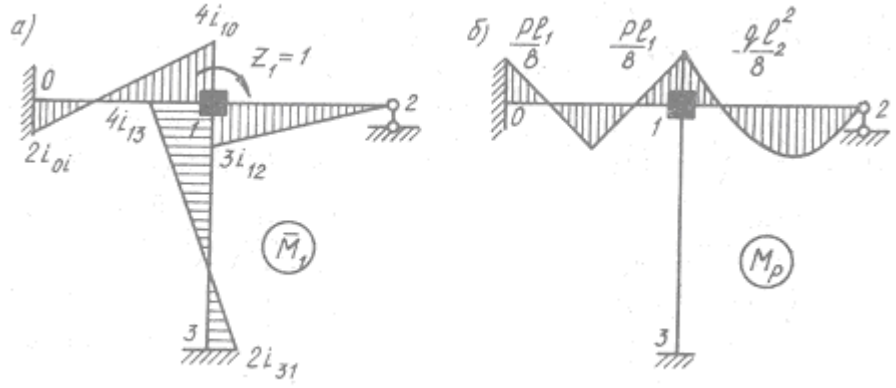
Мазкур усулнинг замирида кўчиш усули ётади. Бироқ бунда каноник тенгламалар тузилмай, оддий арифметик ҳисоблар амалга оширилади. Усул тақрибий бўлишига қарамай, ҳисоб ишлари керакли аниқликкача олиб борилиши мумкин. Мазкур усулни айрим муаллифлар моментларни тақсимлаш усули ёки кетма-кет яқинлаштириш усули деб атайдилар.

Тугунларни мувозанатлаш усули 1929 йилда Тошкентлик муҳандис Н. М. Бернадский томонидан ишлаб чиқилган. Шунга ўхшаш усулни 1930 йилда америка олими Ҳарди Кросс ҳам таклиф этган.

Тугунларни мувозанатлаш усулида рамалар озод ва озодмас рамаларга ажратилади. Чизиқли кўчиш имкониятига эга бўлган рамалар озод, эга бўлмаганлари озодмас рамалар деб аталади.



10.4- расм



10.5- расм

Усулнинг моҳияти билан 10.4- расм, *а* — да тасвирланган озодмас рама мисолида танишиб ўтамиз. Берилган рамага эквивалент бўлган система кўчиш усулида 10.4- расм, *б* — да кўрсатилган. Кўчиш усулининг каноник тенгламаси эса қуйидаги кўринишга эга:

$$Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0 \qquad (10.4)$$

Бу тенгламадан номаълум бурчакли кўчиш Z_1 аниқланади:

$$Z_1 = - R_{1p} : r_{11} \qquad (10.5)$$

Раманинг биринчи тугунида ҳосил бўладиган реактив моментлар r_{11} ва R_{1p} бирлик кўчиш ва ташқи кучлардан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_1$ ва M_p дан топилади (10.5-расм, а, б):

$$r_{11} = 4\left(i_{10} + i_{13} + \frac{3}{4}i_{12}\right);\ i_{12}^1 = \frac{3}{4}i_{12} \quad деб\ олсак;$$

$$r_{11} = 4(i_{10} + i_{13} + i'_{12}); \qquad (10.6)$$

$$R_{1p} = \frac{pl}{8} - \frac{pl_2^3}{8} \qquad бўлади. \qquad (10.7)$$

Бу ерда R_{1p} раманинг биринчи тугунига киритилган қўшимча боғланишдаги мувозанатлашмаган момент бўлиб, уни $M_1^{неур}$ деб белгилаймиз, яъни $R_{1p} = M^{неур}$ («неур» — неуровновешанный — мувозанатлашмаган сўзидан олинган). Буни инобатга олсак, (10.5) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$Z_1 = -\frac{M_1^{неур}}{r_{11}} \tag{10.8}$$

Бурчакли кўчиш Z_1 аниқлангач, қуйидаги формуладан фойдаланиб, стержень учларидаги моментлар аниқланади:

$$M_{ki} = M_{ki}^{p} + \overline{M}_{ki} Z_1 \tag{10.9}$$

Раманинг 0 — 1 стерженини чап учидаги момент

$$M_{01} = -\frac{Pl_1}{8} + 2i_{01}\left(-\frac{M_1^{неур}}{r_{11}}\right) = \frac{pl_1}{8} - \frac{2i_{10} \cdot M_1^{неур}}{4(i_1 + i_{13} + i_{12})} = \frac{pl_1}{8} - \frac{1}{2} K_{01} \cdot M_1^{неур}$$

бўлади. Шу стерженнинг ўнг учидаги момент қуйидагича ифодаланади:

$$M_{10} = \frac{Pl_1}{8} + 4_{i10}\left(-\frac{M_1^{неур}}{r_{11}}\right) = \frac{pl_1}{8} - \frac{4i_{10} \cdot M_1^{неур}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{pl_1}{8} K_{10} \cdot M_1^{неур}$$

Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинган:

$$K_a = K_{10} = \frac{i_{10}}{(i_1 + i_{13} + i_{12})}$$

ва унга *тақсимлаш коэффициенти* деб ном берилган. Тақсимлаш коэффициенти умумий кўринишда

$$K_{ki} = \frac{i_{ki}}{\sum_{i=1}^{n} i_{ki}} \tag{10.10}$$

тарзида ифодаланади.

Қолган стерженлардаги моментлар ҳам шу тариқа аниқланади:

$$M_{12} = -\frac{ql_2^2}{8} - K_{12} - M_1^{неур} \ ;$$

$$M_{13} = 0 - K_{13} \cdot M_1^{неур} \ ;$$

$$M_{31} = 0 - \frac{1}{2} K_{13} \cdot M_1^{неур} \ ; \quad M_{21} = 0.$$

Бир тугунда учрашувчи стерженларнинг тақсимлаш коэффициентлари йиғиндиси бирга тенг бўлади.

$$K_{10} + K_{12} + K_{13} = 1. \tag{10.11}$$

Биринчи тугуннинг мувозанатини текширамиз. Бунинг учун шу тугундаги моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - K_{01} M_1^{неур} \right) + \left(-\frac{ql_2^2}{8} - K_{01} M_1^{неур} \right) + \left(K_{13} M_1^{неур} \right).$$

Қавсларни очиб, гуруҳлаймиз

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - \frac{ql_2^2}{8} \right) - \left(K_{10} + K_{12} + K_{13} \right) M_1^{неур}. \qquad (10.12)$$

Биринчи қавсдаги ифода $M_1^{неур}$ га, иккинчи қавс эса бирга тенг эканлигини ҳисобга олсак, тугуннинг мувозанатини белгиловчи тенгламага эга бўламиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = 0. \qquad (10.13)$$

(10.12) тенгламадаги биринчи қавснинг ўрнига $M^{неур}$ ни қўйиб иккинчи қавсни очиб ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = M_1^{неур} + \left(K_{12} M^{неур} \right) = M_1^{неур} + M_{10}^{ур} + M_{12}^{ур} + M_{13}^{ур} = 0.$$

Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинди:

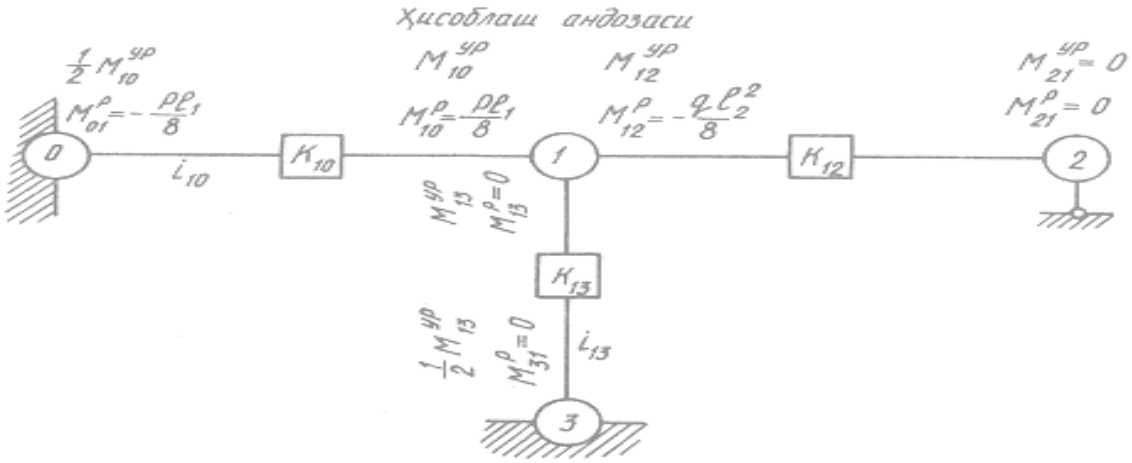
$$M_{ki}^{ур} = -K_{ki} \cdot M_1^{неур} \qquad (10.14)$$

$M_{ki}^{ур} - ki$ стерженнинг «К» учидаги мувозанатлашган момент («ур» — уровновешанный сўзидан олинган).

(10.14) формуланинг маъноси: бикир тугунга киритилган қўшимча боғланиш олиб танланса, яъни тугун бўшатилса, у Z_1 бурчакка бурилади. Натижада тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_1^{неур}$ шу тугунга келиб туташган стерженларга уларнинг тақсимлаш коэффициентларига пропорционал равишда тақсимланиб кетади. Манфий ишора мувозанатлашган момент билан мувозанатлашмаган моментнинг йўналиши қарама-қарши эканлигини билдиради.

(10.14) формула ёрдамида топилган мувозанатлашган моментларнинг қийматини берилган рама шаклида чизилган ҳисоблаш андозасига жойлаштирамиз (10.6- расм). Ҳар қайси стержен учидаги натижавий

моментнинг қиймати ҳисоблаш андозасига ёзилган тегишли моментларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

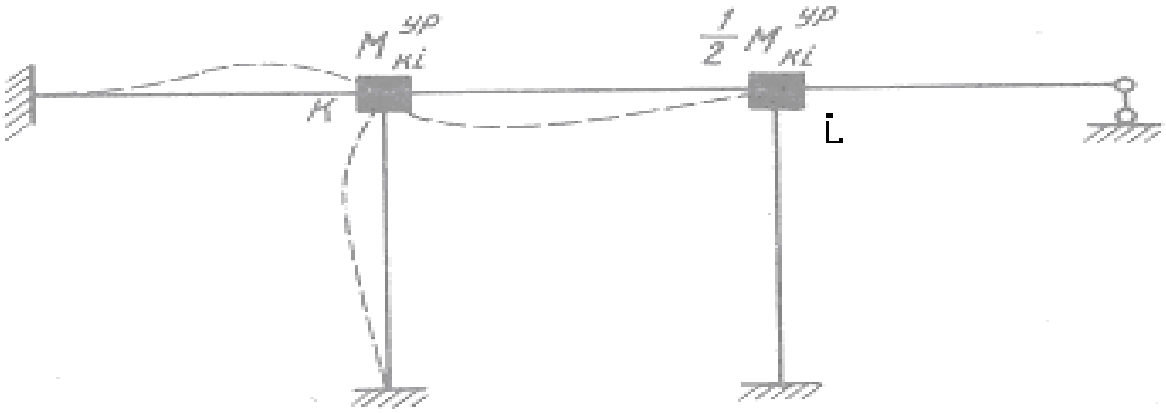


10.6- расм

Мазкур мисолда бикир тугуни битта бўлган рама, яъни бир номаълумли рама кўриб ўтилди. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент стерженларга тўла тўкис ва қолдиқсиз тақсимланиб кетди. Шу сабабли ҳисоб аниқ бўлди. Агар бикир тугунлар сони бирдан ортиқ бўлса, у ҳолда ечим тақрибий бўлади.

Раманинг бикир тугуни бирдан ортиқ бўлган ҳол

Юқорида раманинг бикир тугуни битта бўлган ҳолни кўриб ўтдик. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг тўла ва аниқ тақсимланганининг гувоҳи бўлдик. Агар раманинг бикир тугунлари иккита ва ундан ортиқ бўлса, у ҳолда вазият бироз бошқача бўлади.



10.7- расм

Мисол тариқасида бикир тугуни иккита бўлган статик ноаниқ рамани (10.7- расм) кўриб ўтайлик. Раманинг «*К*» ва «*i*» тугунлари қўшимча боғланиш билан маҳкамланган. Ҳисобни исталган тугундан бошлаш мумкин. Раманинг «*К*» тугунидаги мувозанатлашмаган момент $M_к^{неур}$ ни аниқладик, дейлик. Энди «*К*» тугунини бўшатамиз. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_к^{неур}$ шу тугунга туташган стерженларга тақсимланиб кетади. Тақсимот натижасида *k - i* стерженининг «*К*» учига $M_{кі}^{ур}$ моменти тегади, «*i*» учига эса шу моментнинг ярми, яъни 1/2 $M_{кі}^{ур}$ тегади. Шу билан битта жараён тугайди. Шундан кейин «*К*» тугунини қайта маҳкамлаб, «*i*» тугунини бўшатамиз. Бунда стерженнинг «*i*» учига $M_к^{ур}$ моменти, «*К*» учига эса шунинг ярми, яъни 1/2 $M_к^{ур}$ тегади. Шу йўсинда.«*К*» тугунига бошқа қарама-қарши тугунлардан ҳам (агар мавжуд бўлса) яримталик моментлар келиб қўшилади, натижада «*К*», тугунииг дастлабки мувозанати бузилади. Бироқ энди бу сафар «*К*» тугунидаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати аввалгисидан кичикроқ бўлади. Ҳисобнинг навбатдаги жараёнида бу моментни яна қайта тақсимлаймиз. Қайта тақсимлаш амали бир неча марта такрорланганда, тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати тобора нолга яқинлашиб боради. Қайта тақсимлаш амали тугагач, стержень учидаги моментлар йиғиндиси топилади. Ана шу йиғинди момент натижавий момент ҳисобланади.

Тугунларни барин-кетин мувозанатлаш усулининг моҳияти ана шундан иборат.

11 – БОБ
ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ТАДБИҚИ

Матрицалар ҳақида тушунча

Тўғри бурчакли жадвал кўринишида жойлаштирилган сонлар системаси *матрица* деб аталади ва *А* ҳарфи билан белгиланиб қуйидаги тартибда ёзилади:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Матрицани ташкил этувчи a_{ik} сонлари унинг *элементлари* деб аталади. Матрица элементларининг горизонтал қаторлари *сатрлар*, вертикал қаторлари *устунлар* деб аталади. Юқорида жадвал кўринишида ифодаланган A матрицаси m та сатр ва n та устундан иборат. Демак m ва n миқдорлар матрицанинг тартибини ифода этади. Агар матрица сатрлари сони m, устунлар сони n га тенг бўлса ($m=n$), A матрица n – тартибли *квадрат матрица* дейилади.

Квадрат матрицада бош диагонал бўйлаб жойлашган a_{11}, a_{22}, . . . a_{nn} элементлар бош элементлар деб, бошқа элементлари ёрдамчи элементлар деб аталади.

Агар A матрицанинг устунлари сони $n=1$ бўлса, у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{vmatrix}$$

ҳамда бир устунли матрица ёки *вектор – устун* дейилади.

Агар матрица фақат бир сатрдан ($m=1$) иборат бўлса, у қуйидаги кўринишда ёзилади ва бир сатрли матрица ёки *вектор – сатр* дейилади:

$$A = |a_1\ a_2\ \dots\ a_n|.$$

Агар матрицанинг ҳамма элементлари нолдан иборат бўлса, *ноль матрица* дейилади.

Агар матрицанинг бош диагоналидаги элементлари нолдан фарқ қилиб, бошқа ёрдамчи элементлари нолга тенг бўлса, бундай матрица *диагонал матрица* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Агар диагонал матрицада диагонал элементлар бирга тенг бўлса, у бирлик матрица деб аталади ва E ҳарфи билан белгиланади:

$$E=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Агар бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган ёрдамчи элементлар ўзаро тенг бўлса, бундай матрица *симметрик матрица* дейилади.

Сатр ва устунлари сони бир хил бўлган матрицалар номдош матрицалар дейилади. Агар иккита номдош A ва B матрицаларнинг симметрик жойлашган ҳар бир элементи ўзаро тенг бўлса, яъни

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix}=B,$$

у ҳолда бу матрицалар *тенгдош матрицалар* деб аталади.

Агар A матрицанинг сатрларини устунга, устунларини эса сатрга айлантириб ёзсак, у ҳолда A матрицага нисбатан транспонирланган матрица ҳосил бўлади ва A^T деб белгиланади:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\qquad A^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Сатр матрица устун матрица A нинг транспонирланган кўринишида бўлади:

$$A^T = |a_1 \;\; a_2 \; \ldots a_m|.$$

Юқори тартибли тенгламаларни ЭҲМ да ечишни осонлаштириш мақсадида блоксимон ва квази матрицалардан фойдаланилади. Блоксимон матрица ҳосил қилиш учун А матрицасида горизонтал ва вертикал пунктир чизиқлар ўтказиб, уни бир неча блокларга ажратамиз:

$$A = \left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{27} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right|$$

Ажратилган блокларни мустақил матрицалар кўринишида алоҳида кўчириб ёзамиз ва A_{11}, A_{12}, ... ҳарфлари билан белгилаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{vmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{vmatrix} \quad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

У ҳолда A матрицанинг элементларини қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}$$

Бундай матрица *блоксимон матрица* деб аталади.

Агар блоксимон матрицанинг ёрдамчи элементлари ноль бўлса, бундай матрицалар *квазидиагонал*:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{12} & & & \\ & & A_{13} & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & A_{1n} \end{vmatrix}$$

баъзилари ноль бўлса,

$$A=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & & & & \\ A_{21} & A_{22} & & & & \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & & & A_{nn} \end{vmatrix}$$

квазилентасимон матрица деб юритилади.

11.2. Матрица амаллари

Матрицаларни қўшиш ва айириш.

A ва *B* матрицаларни қўшиш ёки айириш амалларини фақат уларнинг тартиблари бир хил, яъни сатр ва устунлари сони тенг бўлгандагина бажариш мумкин. Бунда натижавий янги *C* матрицаси қўшилувчи ёки айрилувчи матрицалар билан номдош бўлади:

$$C=A\pm B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\pm\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{22} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{22} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

бу ерда $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij};\quad i=1,\dots n;\quad j=1,\dots m$

Матрицаларни қўшиш ва айириш амалларида қуйидаги алгебраик қоидалар ўз кучига эга:

$$A+B=B+A;\quad (A+B)+C=A+(B+C);\quad A+0=A.$$

Матрицаларни кўпайтириш.

A матрицасини *B* матрицасига кўпайтириш учун *A* матрицасининг устунлар сони *B* матрицасининг сатрлар сонига тенг бўлиши шарт. Буларнинг кўпайтмасидан ҳосил бўлган $C=A\cdot B$ матрица элементлари қуйидаги кўпайтмалар йиғиндисига тенгдир:

$$C_y=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{K=1}^{P}a_{ik}b_{kj}$$

Яна шунга эътибор бериш керакки, А ва В матрицалар ўзаро мос бўлгандангина, яъни уларнинг тартиблари бир хил бўлгандагина кўпайтириш мумкин.

Масалан:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \textit{ва} \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{vmatrix} \quad \textit{бўлади},$$

бу ерда $C_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ ва ҳоказо.

Агарда А ва В матрицаларининг тегишли тартиблари тенг бўлмаса, уларни кўпайтириб бўлмайди ва бундай матрицалар *мос бўлмаган матрицалар* дейилади.

Масалан, юқоридаги В ва А матрицалар ўзаро мос эмас, шунинг учун уларни В·А тарзида кўпайтириб бўлмайди. Чунки матрицаларни кўпайтиришда коммуникативлик (ўрин алмаштириш) қоидалари ишламайди, яъни А·В≠В·А. Бу тенгсизлик икки матрица квадрат ва тенг тартибли (мос матрицалар) бўлганда ҳам сақланади.

A матрицасини α миқдорга кўпайтириш қуйидагича бажарилади:

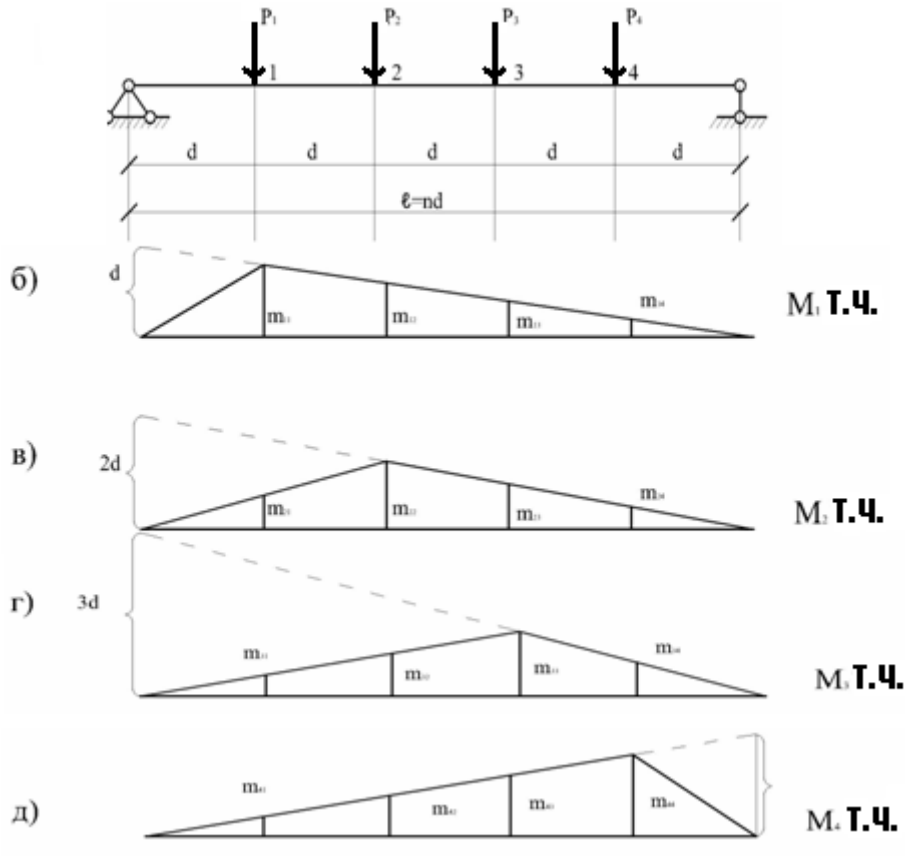
$$C = \alpha A = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{vmatrix}$$

Умуман матрицаларни кўпайтиришда қуйидаги алгебраик боғланишлар амал қилади:

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A;$
$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B;$
$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A);$
$(AB)C = A(BC);$
$\alpha(AB) = (\alpha A)B = (\alpha B)A;$
$(A+B)C = AC + BC;$
$C(A+B) = CA + CB;$
$AE = A.$

11.3. Статик аниқ балкаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш

11.1 – расм, *а* да берилган статик аниқ балканинг 1, 2, 3 ва 4 – кесимларидаги эгувчи моментлар ва кўндаланг кучларни матрица усулида аниқлаш талаб этилади, дейлик.



11.1 – расм

Балканинг тўртта 1, 2, 3 ва 4 кесими учун эгувчи моментларнинг таъсир чизиқларини чизамиз (11.1 – расм, *б, в, г, д*). Таъсир чизиқларида тегишли кесимлар остидаги ординаталарни m_{ik} деб белгилаймиз, бинобарин, m_{ik} *к* кесимига қўйилган бирлик куч $P=1$ дан *i* кесимида ҳосил бўладиган эгувчи моментдир. m_{ik} нинг қийматларини таъсир чизиқларидан ёки бирлик кучлардан қурилган эгувчи моментлар эпюрасидан топса бўлади.

Агар 1, 2, 3, 4 нуқталарга $P_1; P_2; P_3; P_4$ кучлар қўйилган бўлса, тегишли кесимлардаги эгувчи моментлар қуйидаги тенгламалардан аниқланади:

$$M_1 = P_1 m_{11} + P_2 m_{12} + P_3 m_{13} + P_4 m_{14};$$

$$M_2 = P_1 m_{21} + P_2 m_{22} + P_3 m_{23} + P_4 m_{24};$$

$$M_3 = P_1 m_{31} + P_2 m_{32} + P_3 m_{33} + P_4 m_{34};$$

$$M_4 = P_1 m_{41} + P_2 m_{42} + P_3 m_{43} + P_4 m_{44}.$$

бу тенгламаларнинг матрица шакли қуйидаги кўринишга эга:

$$\vec{M} = L_m \cdot \vec{P}. \qquad (a)$$

Бу ерда $\vec{M}$ – эгувчи моментларнинг матрица – устуни (вектор);

$\vec{P}$ – таъсир этувчи кучларнинг матрица – устуни (вектор);

L_m – эгувчи моментларнинг таъсир матрицаси, m_{ik} миқдорларнинг матрицаси.

(а) формула тўлиқ шаклда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{vmatrix} \qquad (б)$$

Агар балка тенг бўлакларга бўлинса, таъсир матрицаси L_m нинг элементлари қуйидаги формулалардан топилиши мумкин:

$$m_{ik} = \frac{d}{n} i(n-k) \qquad i \le k \quad \textit{бўлганда};$$

$$m_{ik} = \frac{d}{n} k(n-i) \qquad i \ge k \quad \textit{бўлганда}.$$

Биз кўраётган балка учун:

$$L_m = \begin{vmatrix} \frac{4d}{n} & \frac{3d}{n} & \frac{2d}{n} & \frac{d}{n} \\ \frac{3d}{n} & \frac{6d}{n} & \frac{4d}{n} & \frac{2d}{n} \\ \frac{2d}{n} & \frac{4d}{n} & \frac{6d}{n} & \frac{3d}{n} \\ \frac{d}{n} & \frac{2d}{n} & \frac{3d}{n} & \frac{4d}{n} \end{vmatrix} = \frac{d}{n} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}. \qquad (в)$$

Моментлар таъсир матрицаси *(в)*нинг таҳлили қуйидаги хулосаларга олиб келади:

а) моментлар таъсир матрицаси ($\frac{d}{n}$) кўпайтувчига эга.

Бу ерда: *d* – кесимлар оралиғи, *n* – кесимлар сони;

б) таъсир матрицасининг биринчи сатри (қатори) ва биринчи устуни сонлар қатори (*n-1*), (*n-2*), (*n-3*) . . . . , 1 дан, масалан, 4, 3, 2, 1 сонлардан ташкил топади;

в) охирги сатр ва охирги устун ҳам ўша сонлардан, бироқ тескари тартибда, ташкил топади;

г) бош диагоналдан қуйида (ёки ўзида) жойлашган элементни аниқлаш учун, керакли сатрнинг биринчи элементини тегишли устуннинг охирги элементига кўпайтириш зарур, яъни

$$a_{ik} = a_{i1} \cdot a_{(n-1)k};$$

д) бош диагоналдан юқорида (ёки ўзида) жойлашган элементни аниқлаш учун, керакли устуннинг биринчи элементини тегишли сатрнинг охирги элементига кўпайтириш зарур, яъни

$$a_{ik} = a_{1k} \cdot a_{i(n-1)},$$

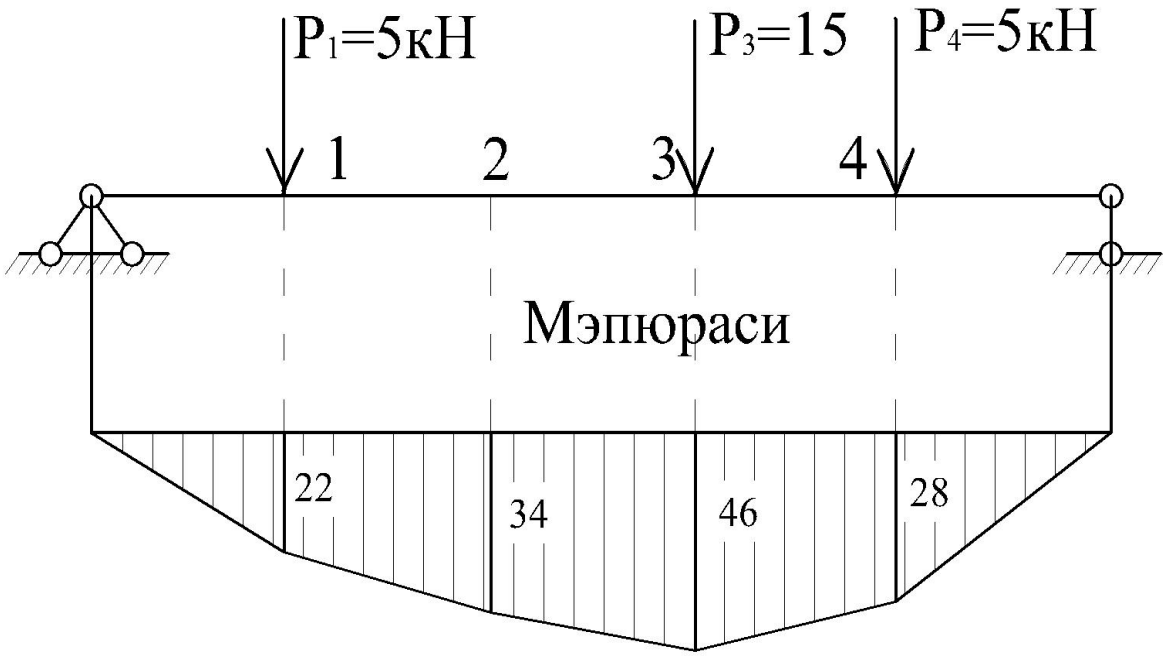
ёки матрицанинг симметриклигидан фойдаланилади. Баён этилган қоидаларни схема кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$L_m = \frac{d}{n}\begin{vmatrix} n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & 3 & 1 \\ n-2 & & & & 3\cdot 2 & 2 \\ n-3 & \text{------}\rightarrow & (n-3)\cdot 3 & \leftarrow \text{---} & \text{------} & 3 \\ n-4 & (n-4)\cdot 2 & \uparrow & & & 4 \\ \vdots & \uparrow & \uparrow & & & \vdots \\ 4 & \uparrow & \uparrow & & & n-4 \\ 3 & \uparrow & \uparrow & & & n-3 \\ 2 & \text{----}\uparrow\text{----} & \text{----}\uparrow\text{----} & \text{-----}\rightarrow & 2\cdot(n-3) & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & n-3(n-2) & n-1 \end{vmatrix}$$

Мисол. 11.2 – расмда берилган балканинг *M* эпюраси моментларнинг таъсир матрицалари орқали қурилсин. Балкага $P_1 = P_4 = 5кН;\ P_2 = 0;\ P_3 = 15кН$ кучлар қўйилган. *d=2м, n=5.*

$$\vec{M} = L_m \cdot \vec{P} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \\ 5 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}\begin{vmatrix} 55 \\ 85 \\ 115 \\ 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ 34 \\ 46 \\ 28 \end{vmatrix}$$

Шундай қилиб, 1,2,3,4 кесимларда вужудга келадиган эгувчи моментлар $M_1=22кН\cdot м;\ M_2=34кН\cdot м;\ M_3=46кН\cdot м;\ M_4=28кН\cdot м$ аниқланди. Балканинг *M* эпюраси 11.2 – расмда тасвирланган.



11.2 – расм

11.4. Статик аниқ фермаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш

Ихтиёрий *n* – та стержен ва *q* – та тугундан ташкил топган статик аниқ ясси ферма берилган бўлсин. Ферманинг юқори ёки пастки тасмасидаги тугунларга ташқи кучлар P_i қўйилган дейлик. Шу кучлар таъсирида ферма стерженларида вужудга келадиган зўриқишларни аниқлаш талаб этилади. Мазкур дарсликнинг 4 – бобида шу масалани аналитик усулда ечишни ўрганган эдик. Энди шу масалани матрица усулида ечишни ўрганамиз.

Ферма стерженларидаги зўриқишларни матрица усулида аниқлашда қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$\vec{N} = L_N \cdot \vec{P},$$

бу ерда: $\vec{N}$ – ферма элементларида изланаётган зўриқишлардан тузилган бир устунли матрица – вектор;

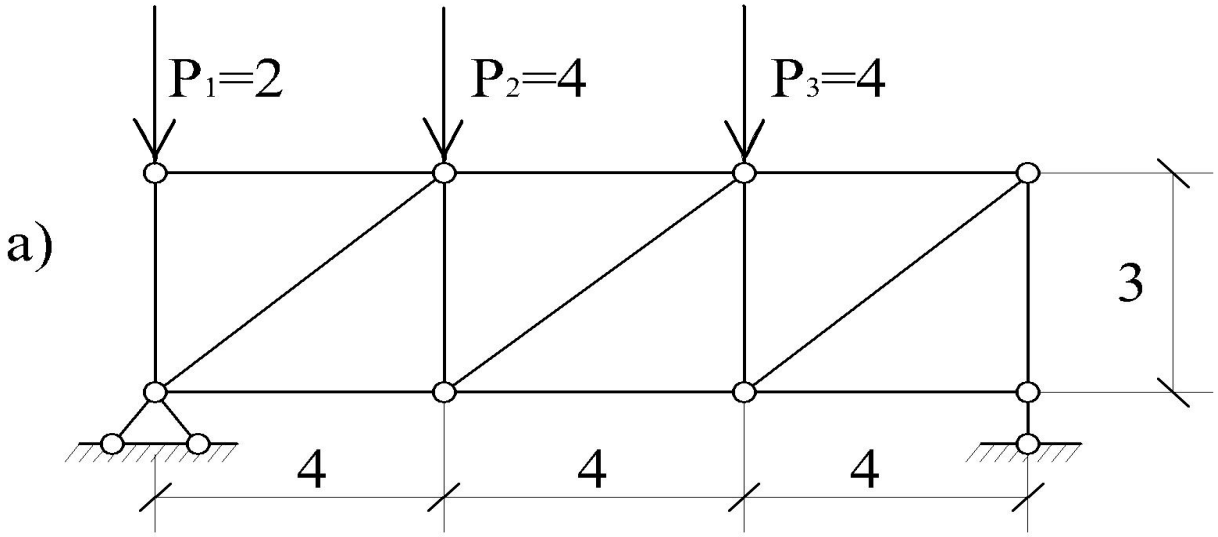
L_N – бирлик зўриқишларнинг таъсир матрицаси;

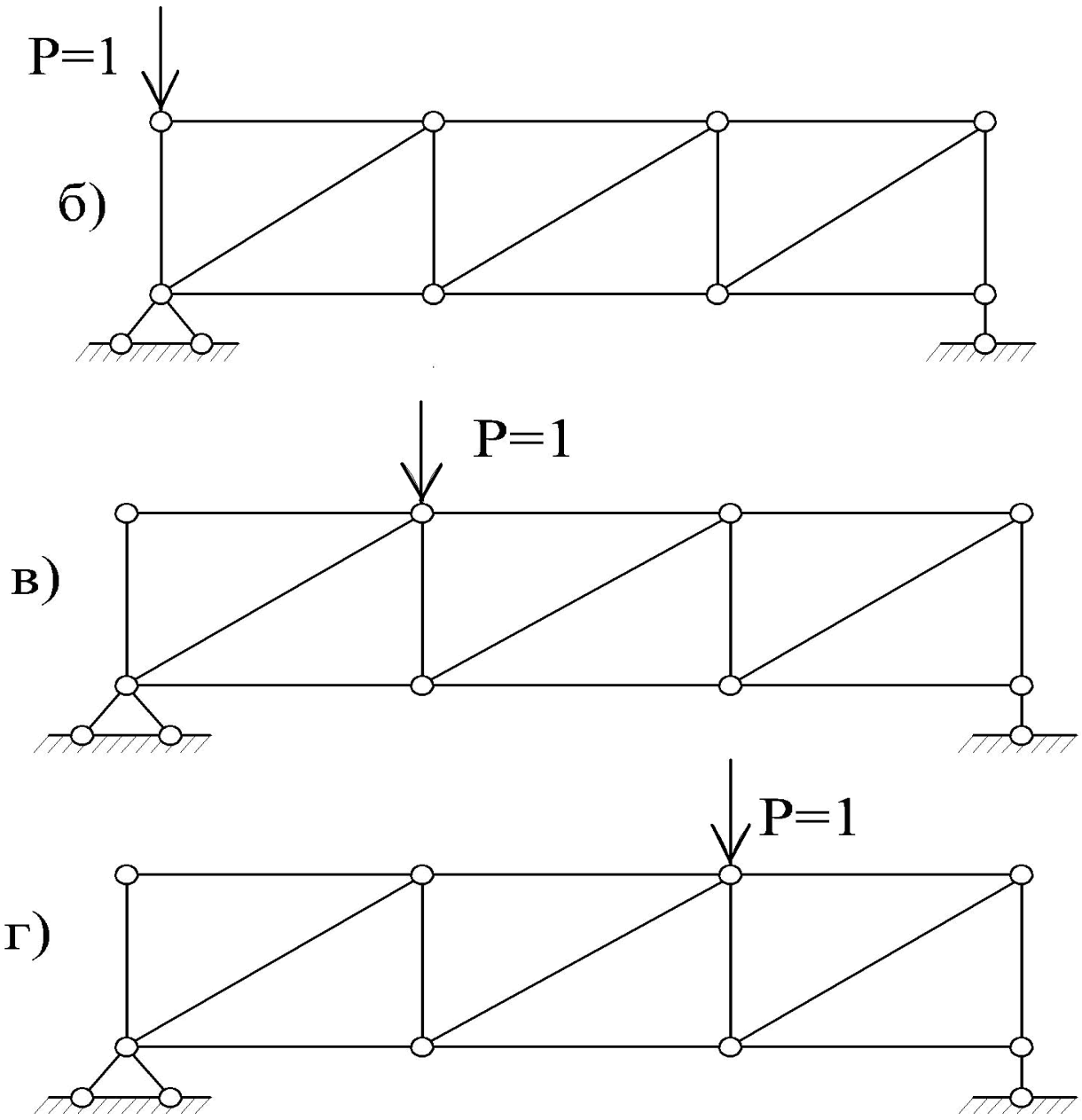
$\vec{P}$ – ферма тугунларига қўйилган ташқи кучлар матрица устуни;

Бирлик зўриқишларнинг таъсир матрицасини тузиш учун ферманинг ташқи юк қўйилган тугунларига навбатма – навбат бирлик кучлар қўйилади ва ферма стерженларидаги зўриқишлар аниқланади.

11.3 – расм, *а* да берилган ферма, *б, в, г* – да ферманинг бирлик кучлар қўйилган ҳолати тасвирланган.

Ҳар бир бирлик ҳолат учун ферманинг барча элементларидаги зўриқишларни аниқлаймиз ва шулар асосида бирлик зўриқишларнинг таъсир матрицасини тузамиз:





11.3 – расм

$$L_N = \begin{vmatrix} -2,0 & 0 & 0 \\ -2,0 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & -1,33 & -0,67 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,2 \end{vmatrix}.$$

Ташқи кучлар устун матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$P = \begin{vmatrix} 2,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \end{vmatrix}.$$

Бирлик зўриқишлар таъсир матрицаси ва ташқи кучлар вектор матрицаси аниқлангач, ферма стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш имконияти туғилади:

$$N = \begin{vmatrix} -2,0 & 0 & 0 \\ -2,0 & -1,0 & 0 \\ -2,0 & -1,33 & -0,67 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 0 & 0 \\ 2,24 & 1,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2,0 \\ 4,0 \\ 4,0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4,0 \\ -8,0 \\ -12,0 \\ 4,48 \\ 4,48 \\ 8,96 \\ 0 \\ 5,64 \\ -2,0 \\ 7,20 \end{vmatrix}.$$

11.5. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули

Эластик системаларнинг кўчишларини Мор – Верешчагин усулида аниқлаш тартибини 6 – бобда кўриб ўтган эдик. Ўшанда кўчишларни аниқлаш учун Морнинг интеграллик формуласи

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\vec{M}_k M_p}{EJ} dx \qquad \text{ни}$$

Верешчагиннинг интегралсиз ифодаси

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EJ} \sum \omega_p y_c$$

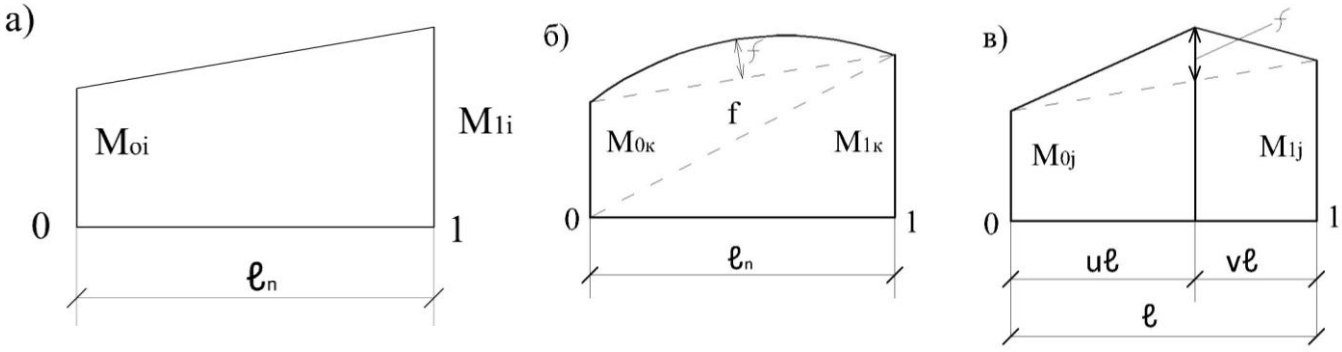
билан алмаштирган эдик.

Бу ерда: ω_p – ташқи кучлардан қурилган M_p эпюрасининг юзаси;

y_c – M_p эпюрасидаги юзанинг оғирлик марказига мос бўлган $\vec{M}_k$ эпюрасидаги ордината.

Кўчишларни Верешчагин усулида аниқлашда икки эпюра ўзаро кўпайтирилади. Бундай “кўпайтирувни” матрица шаклида ҳам амалга оширса бўлади.

Мисол тариқасида икки эпюра M_i ва M_k ни оламиз (11.4 – расм, *а, б*).



11.4 – расм

M_k эпюрасини пунктир чизиқлар билан уч қисмга бўламиз ва Верешчагин усули бўйича “кўпайтирамиз”.

$$\int_0^{\ell}\frac{M_i M_k}{EJ_n}dx=\frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{1}{2}M_{ok}\ell_n\left[M_{oi}+\frac{1}{3}(M_{1i}-M_{oi})\right]+\frac{1}{EJ_n}-\frac{2}{3}f\ell_n\frac{M_{oi}+M_{1i}}{2}+$$
$$+\frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{1}{2}M_{1k}\ell_n\cdot\left[M_{oi}+\frac{2}{3}(M_{1i}-M_{oi})\right]=(\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{\ell_n}{6EJ_n}M_{1i})M_{ok}+$$
$$+(\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{1i})f+(\frac{\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{1i})M_{1k}.$$

Ҳосил бўлган ифодани сатр матрицаси билан устун матрицасининг кўпайтмаси кўринишида ёзса бўлади:

$$\int_0^{\ell}\frac{M_i M_k}{EJ_n}dx=\left|\left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{\ell_n}{6EJ_n}M_{1i}\right)\left(\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{1i}\right)\left(\frac{\ell_n}{6EJ_n}M_{oi}+\frac{2\ell_n}{6EJ_n}M_{1i}\right)\right|\cdot\begin{vmatrix}M_{0k}\\f\\M_{1k}\end{vmatrix}.$$

Сатр матрицаси $\frac{\ell_n}{6EJ_n}$ ва $\frac{2\ell_n}{6EJ_n}$ коэффициентлари билан бирга M_{0i} ва M_{1i} моментларининг йиғиндисидан иборат. Агар M_{0i} ва M_{1i} сатр матрицаларини коэффициентлардан ташкил топган матрицалар билан кўпайтирсак, уларнинг биринчи устуни

$$\begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix};$$ иккинчи устуни $$\begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix};$$ учинчи устуни $$\begin{vmatrix} \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади.

Бунда масаланинг тўлиқ матрицаси қуйидаги кўринишда ифодаланилади:

$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{oi} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{0k} \\ f \\ M_{1k} \end{vmatrix} = \vec{M}_i^1 \cdot D_{gn} \cdot \vec{M}_k. \qquad (11.1)$$

Бу ерда: $\vec{M}_i^1$ – M_i эпюрасидаги моментларнинг транспонирланган устун матрицаси;

$Д_{дп}$ – қаралаётган участканинг бикирлик матрицаси;

$\vec{M}_k$ – $M_к$ эпюрасидаги моментларнинг устун матрицаси;

f – $M_к$ эпюрасининг параболик сигментидаги қўшимча қиймат.

Агар $f=0$ бўлса, яъни M_k эпюраси тўғри чизиқли бўлса, бикирлик матрицасининг ўрта устуни чиқариб ташланади. У ҳолда матрица қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{oi} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{0k} \\ M_{1k} \end{vmatrix} \qquad (11.2)$$

Агар тўғри чизиқли эпюрада f қўшимчаси парабола эмас, учбурчакда ҳосил бўлса, у ҳолда M_i ва M_j эпюраларнинг “кўпайтмаси” матрица кўринишида қуйидагича ифодаланилади (11.4 – расм, *в*):

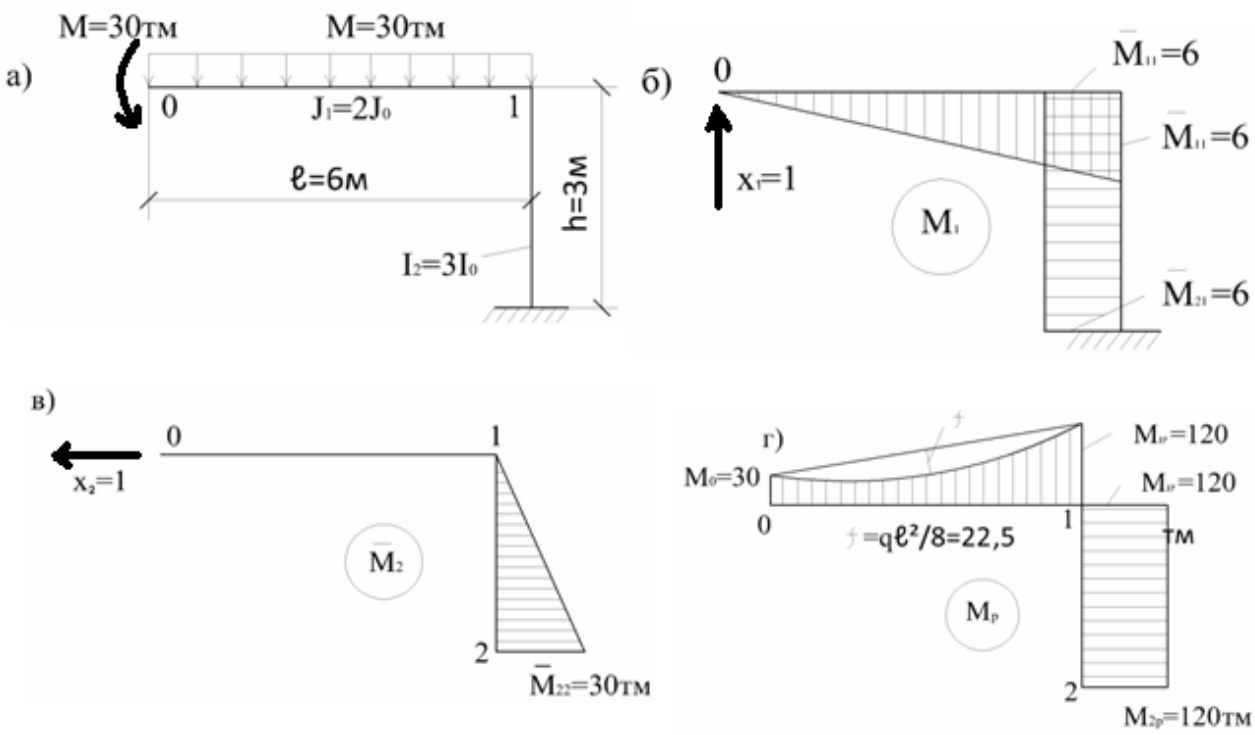
$$\int_0^{\ell} \frac{M_i M_k}{EJ_n} dx = \begin{vmatrix} M_{01} & M_{1i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\ell_n}{6EJ_n} & (1+v)\frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{\ell_n}{6EJ_n} \\ \frac{\ell_n}{6EJ_n} & (1+u)\frac{\ell_n}{6EJ_n} & \frac{2\ell_n}{6EJ_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{oj} \\ f \\ M_{1j} \end{vmatrix}. \qquad (11.3)$$

Мисол. Синиқ балка кўринишидаги раманинг 0 нуқтасини вертикал ва горизонтал кўчиши аниқлансин (11.5 – расм, *а*).

Вертикал кўчишни аниқлаш учун 0 нуқтасига вертикал йўналишда X_1=1 кучини қўямиз ва шу кучдан бирлик $\vec{M}_1$ эпюрасини курамиз (11.5 – расм, *б*). Ташқи кучдан қурилган эпюра 11.5 – расм, *г* да берилган.

$\vec{M}_1$ ва M_p эпюраларнинг биринчи участкаларини (ригелларни) “кўпайтирамиз”:

$$\Delta_{1p}^{/} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\cdot 6}{6\cdot 2EJ_0} & \frac{2\cdot 6}{6\cdot 2EJ_0} & \frac{6}{6\cdot 2EJ_0} \\ \frac{6}{6\cdot 2EJ_0} & \frac{2\cdot 6}{6\cdot 2EJ_0} & \frac{2\cdot 6}{6\cdot 2EJ_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 30 \\ -22{,}5 \\ 120 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_0} \begin{vmatrix} 67{,}5 \\ 112{,}5 \end{vmatrix} = -\frac{675}{EJ_0}.$$



11.5 – расм

Бу ерда ригелнинг устки ва устуннинг ўнг томони толаларини чўзувчи моментлар мусбат, f эса манфий ишора билан олинган, чунки у ригелдаги моментни оширмайди, аксинча камайтиради.

$\vec{M}_1$ ва M_p эпюраларнинг иккинчи участкаларини (устунларни) “кўпайтирамиз”.

$$\Delta_{1P}^{//} = \begin{vmatrix} -6 & -6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{2\cdot 3}{6\cdot 3EJ_0} & \frac{3}{6\cdot 3EJ_0} \\ \frac{3}{6\cdot 3EJ_0} & \frac{2\cdot 3}{6\cdot 3EJ_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 120 \\ 120 \end{vmatrix} = -\frac{720}{EJ_0},$$

$$\Delta_{1P} = \Delta_{1P}^{/} + \Delta_{1P}^{//} = -\frac{1395}{EJ_0}.$$

Энди $x_2 = 1$ йўналишидаги горизонтал кўчишни аниқлаймиз (11.5–расм, *в*):

$$\Delta_{2P} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{EJ_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 30 \\ -22{,}5 \\ 120 \\ 120 \end{vmatrix} = \frac{180}{EJ_0}.$$

12 – БОБ
ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. Усулнинг ғояси

Чекли элементлар усули ўтган асрнинг ўрталарида шаклланди ва ҳозирги пайтда физика ва механиканинг турли масалаларини ечишда самарали воситалардан бирига айланди. Дастлабки кезларда чекли елементлар усули пластиналар, қобиқлар, аркалар, гидротехника иншоотлари сингари еластик системалар соҳасида қўлланилган бўлса, кейинги пайитларда мазкур усул динамика, иссиқлик ўтказувчанлик, чизиқсиз диффузия, гидродинамика сингари соҳаларда ҳам кенг қўлланила бошланди.

Бу усулнинг номи маълум маънода унинг моҳиятини англатади,яъни бу усулга кўра яхлит конструкция алоҳида оддий елементларга бўлиб чиқилади, кейин унинг кучланиш-деформацияланиш ҳолати тадқиқ етилади. Элементларни бириктириш масаласи мувозанат шартларини қаноатлантириш ёки кўчишларнинг узлуксизлигини таъминлаш орқали амалга оширилади.

ЧЭУ нинг асосий афзалликларидан бири унинг кенг миқёслилигидир. Агар ҳар хил қурилиш конструкцияларини ЭҲМда ҳисоблаш учун ҳар қайсисига алоҳида дастурлар тузилган бўлса (масалан, ферма учун алоҳида, балка учун

алоҳида) ЧЭУ деярли ҳамма қурилиш конструкцияларини ЭҲМда ягона ҳисоблаш алгортми ва дастури асосида ҳисоблаш имконини беради. Бу лойиҳачи – муҳандиснинг ишини анча енгиллаштиради. Ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури ҳисоблаш вақтини тежайди, ҳисобнинг аниқлик даражасини оширади. Бу усулнинг афзаллиги ҳам шунда.

Умуман конструкцияларни ЭҲМда ҳисоблашда ўта аниқлик ва универсал усуллардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Олдинги усуллар ҳамма вақт ҳам бу талабларга жавоб бермайди. Шунинг учун ҳам машинабоп усуллар яратилишига эҳтиёж туғилди. Айниқса, ҳисоблашдаги бир неча ҳил мураккабликларни, яъни конструкцияларнинг чизиқли ва чизиқсиз ишлаш хусусиятларини, ерга эластик таяниши, устуворлик ва бошқа шартларни бир йўла ҳисобга оладиган усул керак эди. Чекли элементлар усули (ЧЭУ) шундай самарали усуллардан бири сифатида юзага келди.

ЧЭУ ғояси берилган системани, масалан, рамани чекли элемент деб аталувчи алоҳида содда элементларга ажратишдан иборатдир. Чекли элементлар аниқ геометрик, физик ва механик ўлчамларга эга бўлиши шарт.

Пластина ва қобиқ конструкцияларини ҳисоблашда чекли элемент сифатида учбурчак, кўпбурчак ва тўғри бурчакли пластиналар қабул қилиниши мумкин, массив конструкциялардан кичик хажмий бўлак тетраэдр ва х,.к. чекли элемент деб қабул қилинади.

Стерженлар системасида чекли элемент сифатида доимий бикирликка эга бўлган стержень қабул қилинади.

Шундай қилиб ЧЭУ берилган конструкцияларни содда, чекли элементларга бўлиб, қурилиш механикаси қоидалари асосида ҳисоблайди.

Содда кўринишга эга бўлган чекли элементнинг ташқи таъсирларга қаршилик кўрсатиш имкониятлари олдиндан аниқланади. ЧЭУ куч усули ёки кўчиш усулларига асосланиши мумкин. Чекли элементлар усулида ҳам асосий система танланиб, тенгламалар тизими тузилади. Асосий система — берилган раманинг энг содда чекли элементлари йиғиндисидир. Тенгламалар тизими чекли элементларнинг узлуксизлигини таъминловчи шартни ифодалайди.

Демак, системани содда бўлакларга бўлиш ғояси, мураккаб конструкцияни содда «чекли» элементлар оркали ифодалаш имконини беради. Киритилувчи узлуксизлик ва бошқа статик шартлар эса чекли элементларнинг берилган система каби ишлашини таъминлайди. Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда номаълум сифатида.куч ёки кўчиш усулларидагидек ички кучлар ёки кўчишлар қабул қилинади.

Ҳисоб куч усули асосида бажарилса, чекли элементларнинг уланиш жойида номаълум сифатида куч қабул қилинади, агарда кўчиш усули асосида олиб борилса, у ҳолда номаълум сифатида тугунларнинг кўчиши қабул қилинади. Умумий ҳолда аралаш усулдан фойдаланса ҳам бўлади. ЧЭУ бўйича ҳисоблашда асосий ролни *мойиллик матрицаси* ёки *бикирлик матрицаси* ўйнайди. Агар ҳисоб куч усулида бажарилса мойиллик матрицасидан, кўчиш усулида бажарилганда эса бикирлик матрицасидан фойдаланилади.

Куч усулида номаълум кучлар чекли элементларнинг уланиш жойидаги кўчишларнинг тенглигини ифодаласа, кўчиш усулидаги номаълум кўчишлар — тугунларнинг мувозанатини ифодалайди.

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблаганда бир вақтнинг ўзида ҳар бир элементнинг икки учидаги ички кучлар *M, Q, N* ларни аниқлаш мумкин. ЧЭУ ни матрица кўринишда ифодалаш мақсадга мувофик бўлиб, ҳисоб охирида кўчишлар ҳамда ички кучлар ҳам матрица кўринишида аниқланади.

Чекли элементнинг кўчиш усулига асосланган умумлаштирилган тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\overline{R} \cdot Z + R_p = 0 \qquad (12.1)$$

бу ерда $\overline{R}$ — конструкциянинг, хусусан, раманинг бикирлик матрицаси;

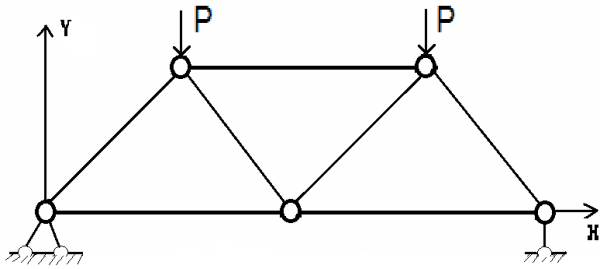
R_p — юк матрицаси.

Бу тенглама асосий системага киритилган ҳар бир қўшимча боғланишда бирлик буралиш, силжиш ва чўзилиш, шунингдек, ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўлган тугунлардаги реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ифодалайди.

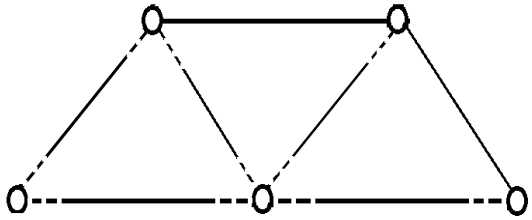
Чекли элементлар усулининг кўчиш усулидан асосий фарқи шундан иборатки, бу усулда деформацияларнинг барча тури инобатга олинади ва ҳар бир тугунда умумлаштирилган кўчишлар аниқланади. Шунинг учун ҳам бу фарқлар бикирлик матрицаларида яққол кўзга ташланади.

12.2. Стерженли системаларни чекли элементлар усулида ҳисоблаш

Ясси ёки фазовий фермалар стерженли системаларнинг энг кенг тарқалган туридир. Статик аниқ ясси қфермани чекли элементлар усулида ҳисоблаш тартиби билан танишамиз. Ферманинг тугунларига ташқи кучлар қўйилган (12.1-расм). Кўп ҳолларда ферма стерженларидаги зўриқишлар ва ферма тугунларининг кўчишларини аниқлаш талаб этилади.



12.1-расм



12.2-расм

Ушбу фермани алоҳида элемент ва тугунлар йиғиндисидан ташкил топган система деб талқин этсак бўлади (12.2-расм).

Ферма стерженларидаги зўриқишлар қуйидаги мувозанат тенгламаларидан топилади:

$$\sum_k N_k \cos\alpha_k + x_j = 0; \qquad \sum_k N_k \sin\alpha_k + y_j = 0;$$

$$(j = 1,2,\ldots,m).$$

Узлуксизлик шарти j тугунга келиб туташувчи элементларнинг учларини кўчиши, айни чоғда, шу кўчишларнинг координат ўқларига бўлган проекциялари ўзаро тенг бўлишини талаб этади, яъни

$$u_{js_1} = u_{js_2} = \ldots = u_{js_k} = \ldots u_j; \qquad v_{js_1} = v_{js_2} = \ldots = v_{js_k} = \ldots v_j,$$

Бу ерда u_j ва v_j - j – тугун кўчишларининг проекциялари;

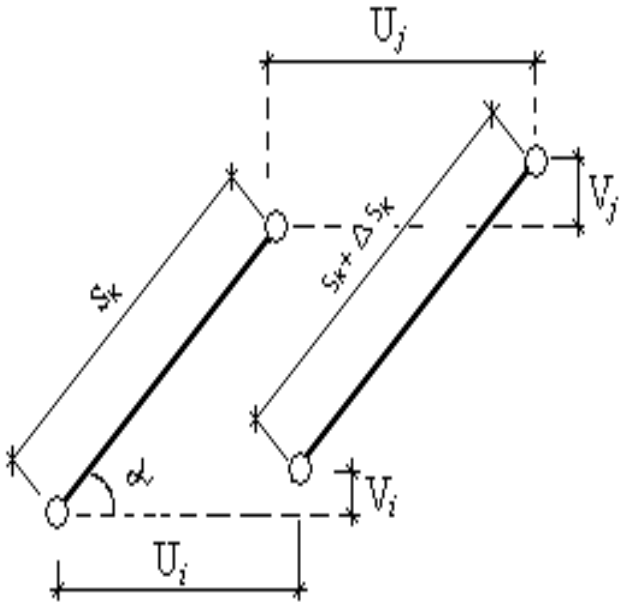
u_{js_k} ва v_{js_k} - k стержень учлари кўчишининг координат ўқларига проекцияси.

Элементларнинг узайиши билан улар учларининг кўчиши орасидаги боғланиш қуйидаги геометрик тенгламада ўз аксини топган (12.3-расм):

$$\Delta_{s_k} = (u_j - u_i)\cos\alpha_k + (v_j - v_i)\sin\alpha_k.$$

Стерженлар узайишини бўйлама кучлар билан боғлиқлигини ифодаловчи физик тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$\Delta_{s_k}\ N_k S_k/(EF_k).$$



12.3-расм

Мувозанат тенгламаларини матрица кўринишида ифодалаймиз:

$$(\bar{S}_c\,\bar{\alpha})\vec{N} + \vec{P} = 0,$$

бу ерда

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \end{vmatrix}, \qquad \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vdots \\ \vec{P}_m \end{vmatrix},$$

$$\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} \vec{\alpha}_1 & & & \\ & \vec{\alpha}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \vec{\alpha}_s \end{vmatrix}.$$

Узайишлар вектори

$$\vec{\Delta} = -\vec{\alpha}^*\,\bar{S}_c^*\,\vec{u}\ , \quad \text{бу ерда} \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{vmatrix},\ \vec{u}_j = \begin{vmatrix} u_j \\ v_j \end{vmatrix}.$$

Физик тенгламалар

$$\vec{\Delta} = \vec{G}\,\vec{N}, \quad \text{бу ерда} \quad G = \begin{vmatrix} \frac{\ell_1}{EF_1} & & & \\ & \frac{\ell_2}{EF_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\ell_s}{EF_s} \end{vmatrix},$$

бундан $\bar{G}\,\vec{N} = -\bar{\alpha}^*\,\bar{S}_c^*\,\vec{u}$ келиб чиқади.

Охирги тенгламадан зўриқишлар билан кўчишлар орасидаги боғланишни аниқлаш мумкин:

$$\vec{N} = -\overline{G}^{-1}\,\overline{\alpha}^{*}\,\overline{S}_c^{*}\,\vec{u}.$$

Кўчишлар орқали ифодаланган тенгламани мувозанат тенгламасига қўямиз:

$$\overline{S}_o\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\,\overline{G}^{-1}\overline{\alpha}^{*}\,\overline{S}_c^{*}\,\overline{S}_o^{*}\,\vec{v} = \vec{Q},$$

бу ердаги $\vec{V}$ кўчишлар тенгламаси $\vec{U}$ дан нолга тенг бўлган кўчишларни чиқариб ташлаш йўли билан аниқланади. $\vec{U}$ нинг ўзи қуйидаги формуладан топилади:

$$\vec{u} = \overline{S}_o^{*}\vec{v}.$$

Шундай қилиб, берилган кучлар маълум бўлса, ферма стерженларидаги зўриқишлар

$$\vec{N} = \vec{T}\,\vec{Q} \qquad (a)$$

ифодадан аниқланиши мумкин,

бу ерда

$$\overline{T} = -\overline{G}^{-1}\overline{\alpha}^{*}\overline{S}_c^{*}\,\overline{S}_o^{*}(\overline{S}_o^{*}\,\overline{S}_c^{*}\overline{\alpha}\overline{G}^{-1}\overline{\alpha}^{*}\overline{S}_c^{*}\overline{S}_o^{*})^{-1},$$

кўчишлар эса қуйидаги ифодадан топилади:

$$\vec{V} = \overline{L}\,\vec{Q}\,, \qquad (б)$$

бу ерда

$$\overline{L} = (\overline{S}_o\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\overline{G}^{-1}\overline{\alpha}^{*}\overline{S}_c^{*}\overline{S}_o^{*})^{-1}.$$

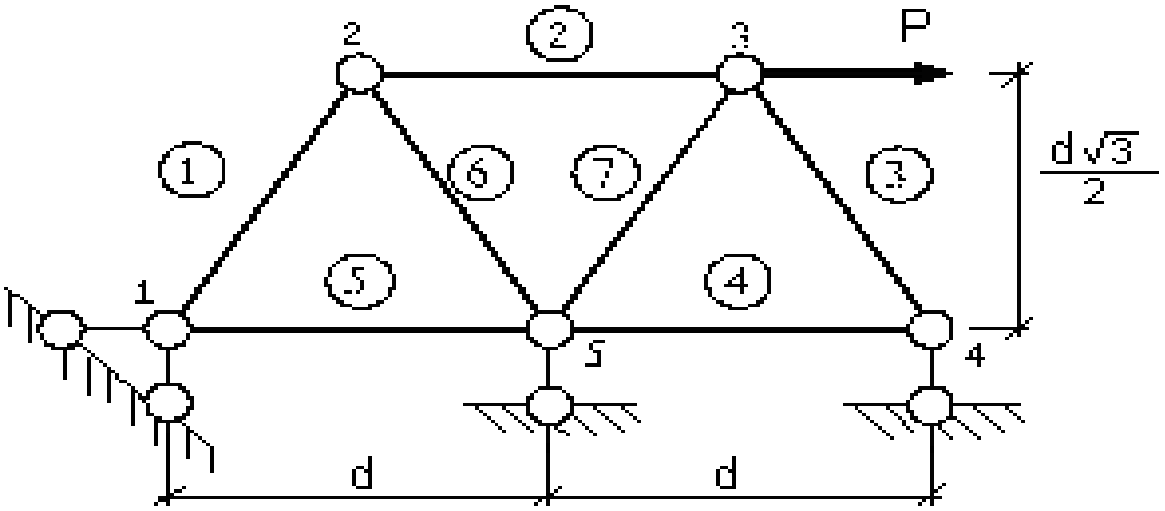
$\overline{L}$ – *системанинг мойиллик матрицаси* деб аталиб, унинг ҳар бир элементи кўчиши изланаётган нуқтага қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўладиган солқиликни аниқлайди.

Мойиллик матрицасининг тескариси *бикирлик матрицаси* дейилади. Бу матрица орқали зўриқишлар аниқланади.

Қўйилган масала (а) ва (б) ифодалар бўйича ҳал этиладиган бўлса, бирор асосий системани танлашга эхтиёж қолмайди, чунки бунда масала бирорта классик усул доирасида эмас, балки умумийроқ тарзда ечилади; кучлар усули ва кўчишлар усули умумлашган усулнинг хусусий ҳоли бўлиб қолади.

Масалани ечишда бундай ёндашувнинг афзаллиги шундан иборатки, бунда статик аниқ ёки статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш учун ягона алгоритмдан фойдаланилади. Бу усул ЭҲМ ни қўллашда янада самаралироқ саналади.

Мисол. 12.4-расмда берилган ферманинг стерженларидаги зўриқишлар ва тугунларининг кўчишлари аниқлансин. Барча стерженларнинг кўндаланг кесимлари бир хил деб қабул қилинсин. Стержень ва тугунларнинг тартиб рақамлари расмда қайд этилган. $\bar{S}_c$ $\bar{S}_o$ ва $\bar{\alpha}$ матрицаларини ёзиб оламиз:



12.4 – расм

$$\bar{S}_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \bar{S}_o = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,866 \end{vmatrix} & & & & & & & & & \\ & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & & & & \\ & & \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,866 \end{vmatrix} & & & & & & & \\ & & & \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & & \\ & & & & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} & & & & & \\ & & & & & \begin{vmatrix} 0,5 \\ -0,866 \end{vmatrix} & & & & \\ & & & & & & \begin{vmatrix} -0,5 \\ -0,866 \end{vmatrix} & & & \end{vmatrix}$$

$\overline{G}$ матрицаси

$$\overline{G} = \frac{d}{EF}\begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \end{vmatrix}$$

Матрицаларни кўпайтириб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\overline{S}_o\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha} = \begin{vmatrix} -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 5 \\ -0,866 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,866 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,866 & 0 & 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0 & 0,5 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

Бикирлик матрицасини тузамиз:

$$\overline{S}_o\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha}\,G^{-1}(\overline{S}_o\,\overline{S}_c\,\overline{\alpha})^* = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,433 \\ -1 & 0 & 1,5 & 0 & 0,25 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & -0,433 & -0,433 \\ 0 & 0 & 0,25 & -0,433 & 1,25 & 1 \\ -0,25 & 0,433 & -0,25 & -0,433 & 1 & 2,5 \end{vmatrix}$$

Мойиллик матрицасини тузамиз:

$$\overline{L} = \begin{vmatrix} 1,693 & -0,190 & 1,375 & -0,0459 & -0,818 & 0,659 \\ -0,190 & 0,726 & -0,216 & -0,00379 & 0,262 & -0,276 \\ 1,375 & -0,216 & 1,875 & -0,0722 & -1,00 & 0,750 \\ -0,0459 & -0,00379 & -0,0722 & 0,746 & 0,262 & 0,0131 \\ -0,818 & 0,262 & -1,00 & 0,262 & 1,818 & -0,909 \\ 0,659 & -0,276 & 0,750 & 0,0131 & -0,909 & 0,955 \end{vmatrix}$$

Кўчишларни аниқлаш учун (*б*) формуласидан фойдаланамиз:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}375 \\ -0{,}216 \\ 1{,}875 \\ -0{,}0722 \\ -1{,}00 \\ 0 \\ 0{,}750 \\ 0 \end{vmatrix} P.$$

Зўриқишлар (*а*) формуласидан аниқланади:

$$\vec{N} = -\overline{G}^{-1}(\overline{S}_o\ \overline{S}_c\ \overline{\alpha})^*\,\overline{Z} = \begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1{,}75 \\ 0{,}75 \\ -0{,}5 \\ -1{,}65 \end{vmatrix}$$

12.3. Ясси рамаларни ҳисоблаш

Ҳар қандай ясси рама системасини алоҳида элементлар ва тугунлар мажмуаси деб қабул қилиш мумкин. Энг аввал системанинг кучланиш – деформацияланиш ҳолатини белгиловчи матрицаларни: зўриқишлар (ички кучлар) вектори $\vec{Y}$, стержень учлари кўчиши $\vec{u}$ ва тугунлар кўчиши $\vec{\delta}$ ларни аниқлаб оламиз:

$$\vec{Y} = \begin{vmatrix} \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_2 \\ \vdots \\ \vec{Y}_s \end{vmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vdots \\ \vec{u}_s \end{vmatrix}, \quad \vec{\delta} = \begin{vmatrix} \vec{\delta}_1 \\ \vec{\delta}_2 \\ \vdots \\ \vec{\delta}_m \end{vmatrix},$$

бу ерда s – система элементларининг сони;

m – системадаги тугунлар сони;

$\vec{\delta}_i$ – i тугунининг уч хил кўчиши: горизонтал ва вертикал кўчиш ҳамда оғиш ($i = 1,2 \ldots m$).

Кейин системанинг кучланиш-деформацияланиш ҳолатини ифодаловчи асосий тенгламаларни тузатамиз.

Тугунларнинг мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\bar{S}_p \bar{S}_1 \vec{Y} = \vec{P}.$$

Бундай тенгламалар сони $3m\text{-}C_o$ га тенг бўлади.

Бу ерда $\vec{P}$ - ташқи кучлар вектори бўлиб, унинг элементлари сони $3m\text{-}C_o$ га тенг (C_o- таянч стерженлари сони). Ноъмалум таянч реакциялари $\vec{R}$ вектори орқали аниқланади. $\vec{C}$ - таняч стерженлари кўчишлари.

Стерженларнинг мувозанат тенгламалари:

$$\bar{S}_2 \bar{Y} = 0.$$

Буларнинг сони 3_S га тенг.

Оралиқ шарнирларда зўриқишларнинг нолга тенглиги шарти:

$$\bar{S}_t \bar{Y} = 0.$$

Бундай тенгламаларнинг сони t га тенг бўлади.

Физик тенгламалар

$$\bar{S}_y \vec{Y} - \bar{S}_\phi \vec{u} = 0.$$

Бундай тенгламалар сони 3_S га тенг.

Тугунлардаги кўчишларнинг узлуксизлиги шарти

$$-\bar{S}_T \vec{u} + \bar{S}_\delta \vec{\delta} = 0.$$

Бундай тенгламаларнинг сони 6_S - t га тенг.

Чегаравий шартлар

$$\bar{S}_R \vec{\delta} = \vec{C}.$$

Бундай тенгламалар сони C_o га тенг.

Тенгламаларнинг умумий сони $3m+12s$ га тенг.

Системанинг таянч реакциялари қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\vec{R} = \overline{S}_R \, \overline{S}_1 \vec{Y} \, .$$

Юқорида келтирилган тенгламаларни умумлаштирсак, қуйидаги тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\begin{vmatrix} \overline{S}_p \, \overline{S}_1 & 0 & 0 \\ \overline{S}_2 & 0 & 0 \\ \overline{S}_t & 0 & 0 \\ \overline{S}_y & -\overline{S}_\phi & 0 \\ 0 & -\overline{S}_T & \overline{S}_\delta \\ 0 & 0 & \overline{S}_R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{Y} \\ \vec{u} \\ \vec{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{P} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vec{C} \end{vmatrix}$$

Мазкур тенгламалар системаси ясси раманинг кучланиш – деформацияланиш ҳолатини тўлиқ аниқлаш имкониятини беради.

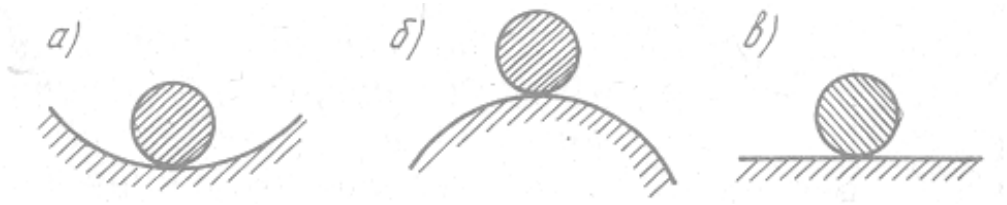
13-БОБ
СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ

13.1. Асосий тушунчалар

Устуворлик деганда, иншоотнинг ташқи кучлар таъсирида ўзининг дастлабки ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туриш хоссаси тушунилади.

Иншоотларнинг устуворлиги ҳам мустаҳкамлиги сингари ташқи кучларнинг миқдорига боғлиқ. Куч маълум миқдорга етгунча иншоот ўзининг устувор ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туради. Куч маълум миқдордан ошганда, иншоотнинг устуворлиги бузилади, яъни дастлабки ҳолати ёки деформация шакли ўзгаради.

Фикримизни мисоллар ёрдамида равшанлаштирамиз. l3.1- расмда ботиқ, қабариқ ва текис сиртга ўрнатилган оғир шарча тасвирланган. Агар шарчани бироз оғдириб, сўнг ўз ҳолига қўйсак, қуйидаги вазият юзага келади: биринчи ҳолда шарча ўзининг дастлабки ҳолатига қайтиб келади.



13.1- расм

Унинг бу ҳолати *устувор мувозанат* ҳолати деб аталади. Бу ҳолда шарча энг кичик потенциал энергияга эга бўлади. Иккинчи ҳолда шарча дастлабки ҳолатига кайтмайди. Бу ҳол *ноустувор мувозанат* ҳолатига киради. Бунда шарчанинг потенциал энергияси энг катта қийматга эга бўлади. Учинчи ҳолда шарча озгина юриб тухтайди, дастлабки ҳолатига қайтмайди. Бундай ҳалат *бефарқ мувазанат* деб юритилади. Бунда потенциал энергия ўзгармас бўлади.

Келтирилган мисол қаттиқ жисм ҳолатининг устуворлигига доир. Биз бу мисол ёрдамида устувор, ноустувор ва бефарқ мувозанатлар қандай бўлишини билиб олдик. Энди мана шу вазиятлар эластик системаларда кай тариқа содир бўлишини кўриб ўтайлик.

Маълумки, ташқи кучлар таъсирида эластик системаларда эластик деформациялар, ҳосил бўлади. Ташқи кучларнинг миқдори орта бориб, маълум қиймагга ётганда, деформация шакли ноустувор бўлиб қолади бошқача қилиб айтганда, ташқи кучларнинг маълум қийматида эластик системанинг дастлабки деформация шакли ўз устуворлигини йўқотади. Система устуворлиги йўқолганда; ташқи ва ички кучлар орасидаги мувозанат ҳам бузилади.

Устувор ва ноустувор ҳолат орасидаги чегара системанинг *бефарқ ҳолати* деб аталади.

Устувор мувозанат ҳолатидаги системани кичик масофага оғдирилса, оғдирувчи сабаб йўқолгач, система дастлабки ҳолатига қайтади. Ноустувор мувозанатда қўшимча юк қўйилмаса ҳам деформация давом этади. Бефарқ мувозанатда эса система оғганича қолаверади.

Амалда устуворлик бузилиши (йўқолиши)нинг икки тури мавжуд. Устуворлик бузилишининг биринчи турида, яъни куч аста ортиб борганда,

деформациянинг дастлабки шакли йўқолиб, унинг ўрнига янги шакли ҳосил бўлади ва ривожланиб боради.

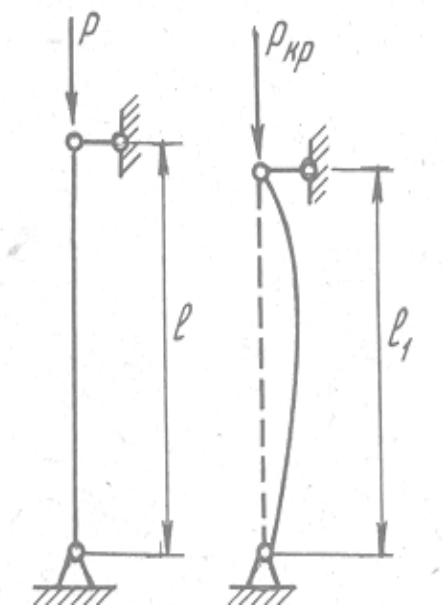
Деформацияни бир шаклдан иккинчи шаклга ўққазувчи куч *критик куч*[1] деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи турига мисол келтирамиз (13.2- расм). Агар $P<P_{kp}$ бўлса, устун тўғри чизиқли ҳолатини сақлайди. Мувозанатнинг бу кўриниши устувор мувозанат саналади.

Агар устунни тўғри чизиқли ҳолатидан чиқарилса (масалан, озгина туртки берилса), стержень тебрана бошлайди ва ички кучларнинг қаршилиги туфайли яна дастлабки тўғри чизиқли ҳолатига қайтади.

Устуворликнинг бузилиши (йўқолиши)нинг иккинчи турини кўриб ўтамиз. Устуворлик бузилишининг иккинчи турида деформациянинг янги шакли пайдо бўлмай, дастлабки деформация кескин равишда ўсиб боради (13.3- расм, а).

Маълум чегарада С шарнирга қўйилган Р кучининг ортиши билан солқилик *y*, ҳам мос равишда ортиб боради. Бунда ташқи ва ички кучлар орасидаги мувозанат сақланади. Бироқ бу жараён давомида шундай ҳолат вужудга келадики, бунда ташқи куч Р нинг қиймати ортмаса ҳам солқилик y_c ортиб бораверади (13.3- расм, б).



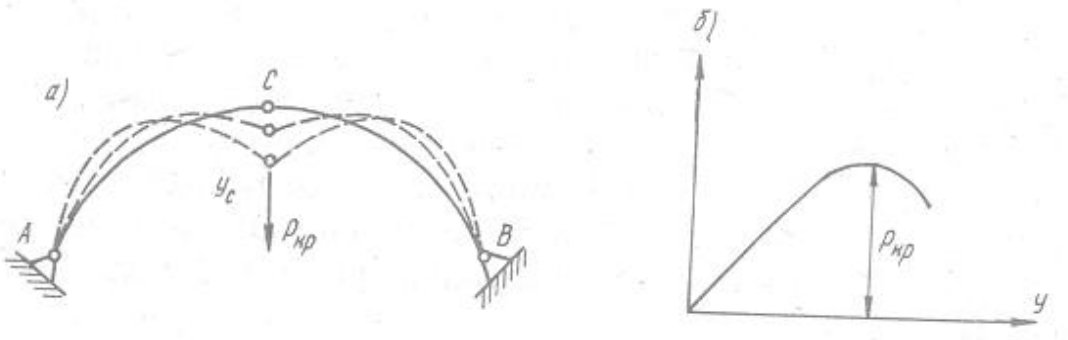
13.2- расм

Сиқувчи куч *P* нинг қиймати орта бориб, критик қийматга етганда мувозанатнинг тўғри чизиқли шакли ноустувор бўлиб қолади. Кучнинг бу қийматида берилган озгина туртки устунда деформациянинг янги шаклини эгилиш деформациясини ҳосил қилади.

$P= P_{kp}$ бўлганда, устуннинг тўғри чизиқли деформацияси ноустувор, эгри чизиқли деформацияси эса устувор бўлади.

[1] Критик куч – танг ҳолатни вужудга келтирувчи куч

Кучнинг қиймати критик қийматдан яна бироз ошса, эгилиш деформацияси тез ўсиб бориб, устун бутунлай ишдан чиқади.



13.3- расм

Деформациянинг узлуксиз равишда ўсиб боришига олиб келувчи ўзгармас куч *критик куч* деб аталади. $P = P_{kp}$ бўлганда, ташқи ва ички кучлар орасидаги мувозанат ноустувор бўлади. $P > P_{kp}$ бўлганда, мувозанат умуман мавжуд бўлмайди. Бу ходиса устуворлик бузилишининг *иккинчи тури* деб аталади.

Иншоотларни устуворликка ҳисоблашда баъзи чекланишлар ва фаразларга йўл қўйилади. Масалан, рамаларни ҳисоблашда система мутлақ тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган деб фараз этилади.

Устуворлик бузилганда стержендаги силжиш ва бўйлама деформациялар ҳисобга олинмай, фақат эгилиш деформацияси текширилади. Бунда стержень эгилган ўқининг қуйидаги тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланилади:

$$EJ\,y'' = -M_x$$

Ваҳоланки, дифференциал тенгламанинг аниқ ифодаси қуйидаги кўринишга эга:

$$EJ\frac{y''}{[1+(y^1)^2]^{3/2}} = -M_x$$

Икки учи шарнирли маҳкамланган стерженнинг устуворлиги масаласини биринчи бўлиб 1744 йилда Леонард Эйлер ҳал этган. Ўша даврлардан буён

иншоотлар устуворлиги масаласи ривожлана бориб, ҳозирги даврда қурилиш механикасининг катта сохасига айланди. Критик кучларни аниқлашда статик, динамик ва энергетик деб аталувчи асосий усуллар қўлланилмоқда.

Статик усул замирида стерженли системанинг устуворлиги йўқолгандан кейинги деформацияланган холати ётади, яъни стерженнинг эгилган ҳолати учун мувозанат тенгламалари тузилади ва улардан системани шу ҳолатда ушлаб тура оладиган кучнинг қиймати аниқланади. Бу куч критик куч бўлади.

Динамик усулга кўра берилган система учун ҳусусий тебраниш тенгламаси тузилади ва бу тенгламадан ҳусусий тебранишлар частотаси нолга теңглиги шартидан фойдаланиб, критик кучнинг қиймати P_{kp} аниқланади.

Энергетик усул Дирихле қоидасига асосланади. Бу қоидага биноан устувор мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси П минимал қийматга эга бўлади, бефарқ мувозанат ҳолатида эса потенциал энергиянинг икки қўшни қийматлари орасидаги фарқ ΔП нолга тенг бўлади:

$$\Delta\Pi = \Delta\upsilon - \Delta E = 0$$

бу ерда υ — ички кучлар потенциал энергияси;

Е — ташқи кучлар потенциал энергияси.

Бундан $\Delta\upsilon = \Delta E$ келиб чиқади.

Бу қоидага асосланиб системалар учун аниқ тенгламалар тузилади ва улардан критик кучнинг қиймати аниқланади.

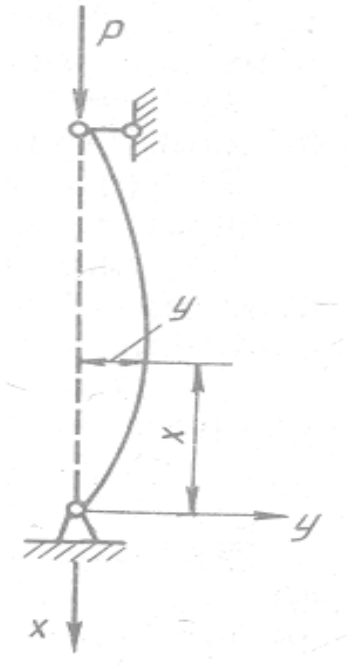
Иншоотга таъсир этувчи юк орта бориб, ўзининг критик қийматига эришганда, иншоотда танг (критик) ҳолат вужудга келади, юк яна бироз оширилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади (бузилади). Тарихда сиқилган стерженлар устуворлигининг йўқолиши оқибатида иншоотларнинг қулаб тушиш ҳолати кўп учрайди. Масалан, 1907 йили АҚШнинг, Шимолий Лаврентия дарёсига қурилган металл кўприк қулаб тушиб, 74 киши халок бўлган. Бу фожиага сиқилишга ишлайдиган стерженлар устуворлигининг нотўғри ҳисобланганлиги сабаб бўлган.

Шунга ўхшаш фалокат 1891 йили, Швецарияда рўй берган, 12 вагонли пассажир, поезди кўприкдан ўтаётганда, кўприк босиб қолган. Фалокат натижасида 74 киши ўлиб, 200 киши тан жарохати олган. Кўприк фермасининг сиқилувчи ховонларидан бирининг устуворлигини йўқолиши кўприкни ҳалокатга олиб келган.

Бинокорлик ва кўприксозлик тарихида бунга ўхшаш мисоллар оз эмас. Бироқ иншоотлар устуворлиги масаласини тўғри ҳал этилиши инсонлар учун нақадар катта аҳамиятга эга эканлиги юқоридаги икки мисолдан яққол кўриниб турибди.

13.2. Сиқилган стерженлар учун Эйлер формуласи

Икки учи шарнирли махкамланган стерженга марказий P кучи қўйилган (13.4- расм). Сиқувчи кучнинг қиймати P_{kp} дан кичик бўлса, стержень бирдан-бир тўғри чизиқли мувозанат шаклига эга бўлади. $P = P_{kp}$ бўлганда, стержень икки хил: тўғри чизиқли ва эгри чизиқли мувозанат шаклига эга. Бунда тўғри чизиқли мувозанат ноустувор, эгри чизиқлиси — устувор ҳисобланади.



13.4- расм

Критик кучни аниқлаш учун солқиликнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EJ_{\min} y'' = -M_x \qquad (13.1)$$

бу ерда x — стержендаги ихтиёрий нўқтанинг координаты;

y — шу нуқтанинг солқилиги;

E — эластиклик модули;

J_{min} — стержень кўндаланг кесимининг минимал инерция моменти;

EJ_{min} — стерженнинг эгилишга бўлган минимал бикирлиги;

M — ташқи кучлар эгувчи моменти.

Бизнинг х,олда $M_x = Py$.

Моментнинг қийматини (13.1) га қўямиз

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_{\min}} = -\frac{Py}{EJ_{\min}}$$

Қуйидаги белгилашни қабул қилсак:

$$\alpha^2 = -\frac{P}{EJ_{\min}} \qquad (13.2)$$

тенглама ихчамлашади

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \qquad (13.3)$$

Мазкур тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

Ихтиёрий ўзгармаслар А ва В қуйидаги чегаравий шартлардан топилади: х=0 бўлганда, у=0 ҳамда $x = l$ бўлганда, у=0.

Биринчи шартдан $B=0$ келиб чиқади. Бинобарин стержень эгилган ўқининг тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$y = A\sin\alpha x \qquad (13.4)$$

Демак, стержень синусоида шаклида эгилар экан.

Иккинчи шартдан $A\sin\alpha l=0$ ҳосил бўлади. Бу шарт қуйидаги икки долга тўғри келади:

1) А=0, бунда стержень эгилмайди, чунки (13.4) га биноан барча кесимлардаги солқилик долга тенг.

2) $\sin\alpha l = 0$, бундан $\alpha l = \pi; 2\pi; \ldots n\pi$ эканлиги келиб чиқади.

Натижада al нинг бу қийматлари ҳамда (13.2) ифода асосида критик кучларни аниқлаш учун қуйидаги қатор формулаларга эга бўламиз:

$$P_{1kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2};$$

$$P_{2kp} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2};$$

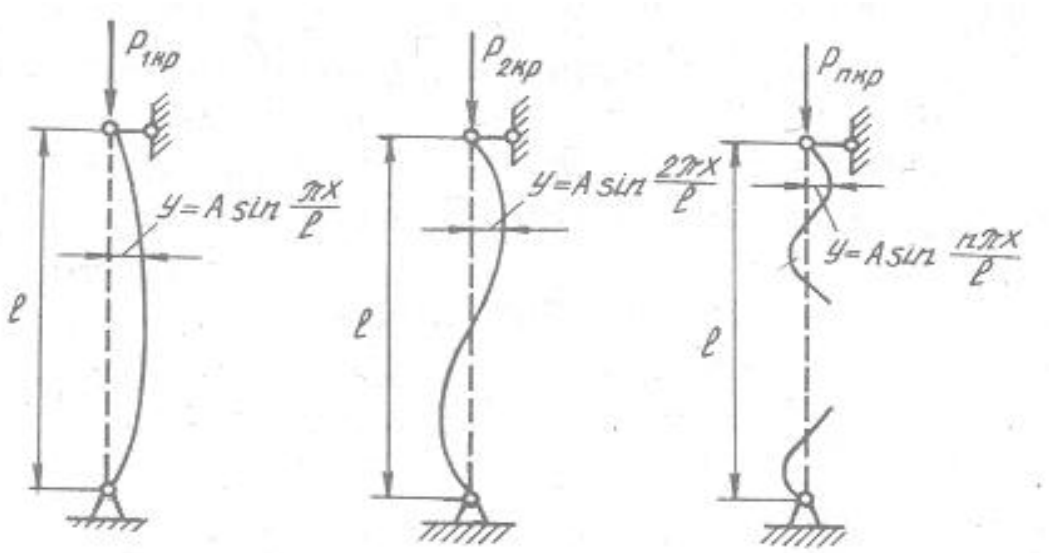
$$P_{nkp} = \frac{n^2\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}$$

Критик кучнинг zap бир қиймати ўзининг эгилиш шаклига эга. Биринчи ҳолда стержень синусоиданинг битта ярим тулкини бўйлаб, иккинчи ҳолда иккита ярим тулкин бўйлаб эгилади ва коказо (13.5- расм).

Амалда критик кучларнинг энг кичиги (биринчиси) қўлланилади, ҳолганлари фақат назарий акамиятга эга:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2} \qquad (13.5)$$

Бу формула ўз муаллифи номи билан — *Эйлер формуласи* деб аталади.



13.5- расм

Демак, критик куч стерженнинг бикирлигига тўғри пропорционал, стержень узунлиги квадратига тескари пропорционал.

Критик ҳол атдаги стерженнинг эгилиши тусатдан содир бўлади, шунинг учун ҳам унинг олдини олиш қийин. Чўзилган стерженларнинг ўзилишини олдиндан пайкаса бўлади, Бироқ сиқилган стерженнинг устуворлиги йўқолишини олдиндан илгаб бўлмайди. Унинг хавфли томони ҳам айнан шундан иборат.

Эгилган ўқ тенгламаси (13.4) даги ихтиёрий ўзгармас А нинг физик моҳиятини аниқлаш учун тенгламага $\alpha = \frac{\pi}{l}$ ва $x = \frac{l}{2}$ қийматларни қўямиз. Бунда

sin90=1 ва $y_{max} = A$ келиб чиқади. Демак, А стерженнинг ўртасидаги солқилик экан.

Агар критик куч P_{kp}, ни стерженнинг кўндаланг кесим юзаси F га бўлсак, устуворлик йўқоладиган даражадаги критик кучланиш келиб чиқади:

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E r_{\min}^2}{l^2}$$

бу ерда $r_{\min}^2 = \frac{J_{\min}}{F}$ кесимнинг минимал инерция радиусининг квадрати.

$\frac{l}{r_{\min}} = \lambda$ деб белгиласак (буни стерженнинг эгилувчанлиги деб аталади), критик кучланиш формуласи қуйидаги кўринишга келади:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Шуни назарда тўтиш керакки, Эйлер формуласини чиқараётганда кучланиш пропорционаллик чегарасидан ортиб кетмайди, деб қабул қилинган, акс ҳолда эгилган ўқ эластик чизиқ бўлмас эди.

Шундай қилиб, Эйлер формуласи қуйидаги чегарада қўлланиши мумкин:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_n$$

Бу формуладан стержень эгилувчанлигининг чегаравий қийматини аниқлаш мумкин:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}.$$

Мисол. Ст.3 маркали пулат учун. $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kgk/sm^2, пропорционаллик чегараси $\sigma_n = 2000$ kgk/sm^2. Бу қийматларни формулага қўйиб, эгилувчанликни аниқлаймиз:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3.14^2 \cdot 2100000}{2000}} = 100$$

Ст. 5 маркали пулат учун $\lambda = 90$ бўлади.

Ёғоч учун Е= 100000 кгк/см^2 ва $\sigma_n = 175$ кгк/см^2.

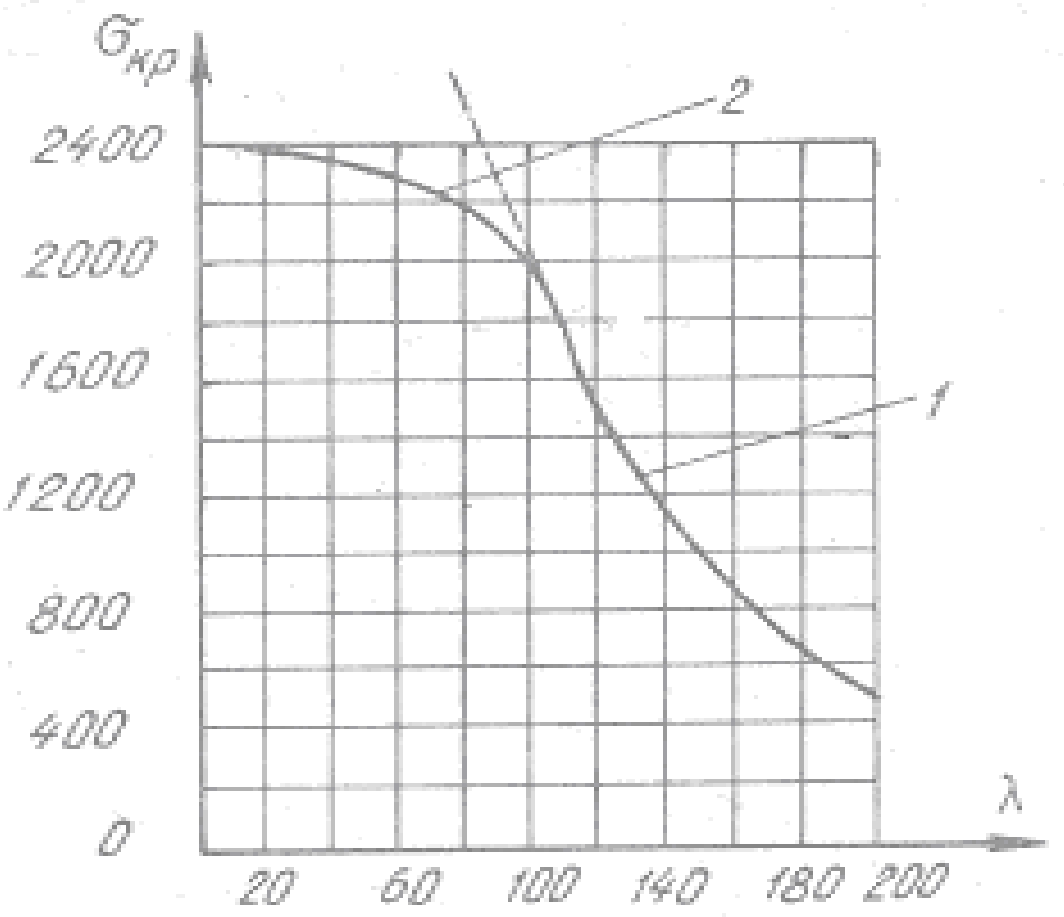
Бинобарин ёғоч стерженлар учун чегаравий эгилувчанлик қуйидаги қийматга тенг бўлади:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3.14^2 \cdot 100000}{175}} = 75$$

Шундай қилиб, эгилувчанлик пўлат стерженлар учун 100 дан, ёғоч стерженлар учун 75 дан кам бўлмаса Эйлер формуласидан фойдаланиш мумкин.

Ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган стерженлар учун, яъни эластиклик чегарасидан ташқарида ишлайдиган стерженлар учун олимлар тажрибалар асосида критик кучни аниқлайдиган қатор формулалар таклиф этганлар.

Критик кучланиш σ_{kp} ни топадиган формулани чизмада тасвирласак (13.6-расм), эластиклик чегарасида ишловчи сиқилган стерженларнинг критик кучланишларини аниқлаш имкониятига эга бўламиз.



13.6- расм

Расмда эгилувчанлиги $\lambda \geq 100$ бўлган стерженлар учун Эйлер эгри чизиғи 1 ракамли туташ чизиқ билан берилган. Эгилувчанлик $\lambda < 100$ бўлган ҳолларни ўзида акс эттирган пунктир чизиқ тўғри натижа бермайди. Шунинг учун ҳам ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган пулат стерженларда критик кучланишларни аниқлаш учун бир қатор тажрибалар асосида (расмда 2 раками билан белгиланган) ёрдамчи эгри чизиқ ўтказилган. Бу чизиқ Эйлер эгри чизиғининг ўзвий давоми сифатида акс этган.

13.3. Учлари турлича маҳкамланган стерженлар учун критик куч ифодаси

Қурилиш конструкцияларида стержень учларини махкамлаш (бириктириш) нинг 13.7- расмда тасвирланган тўрт тури кенг қўлланилади. Олдинги параграфда икки учи шарнирли бириктирилган стержень учун критик кучни аниқлаб, бунда чегаравий шартларни танлашда стержень учларининг бириктирилиш тури мухим роль ўйнашининг гувохи бўлдик. Агар ўша усулда қолган схемалар учун ҳам критик кучларни аниқласак, тузилиши жиҳатидан умумий бўлган қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$P_{kp} = m\frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

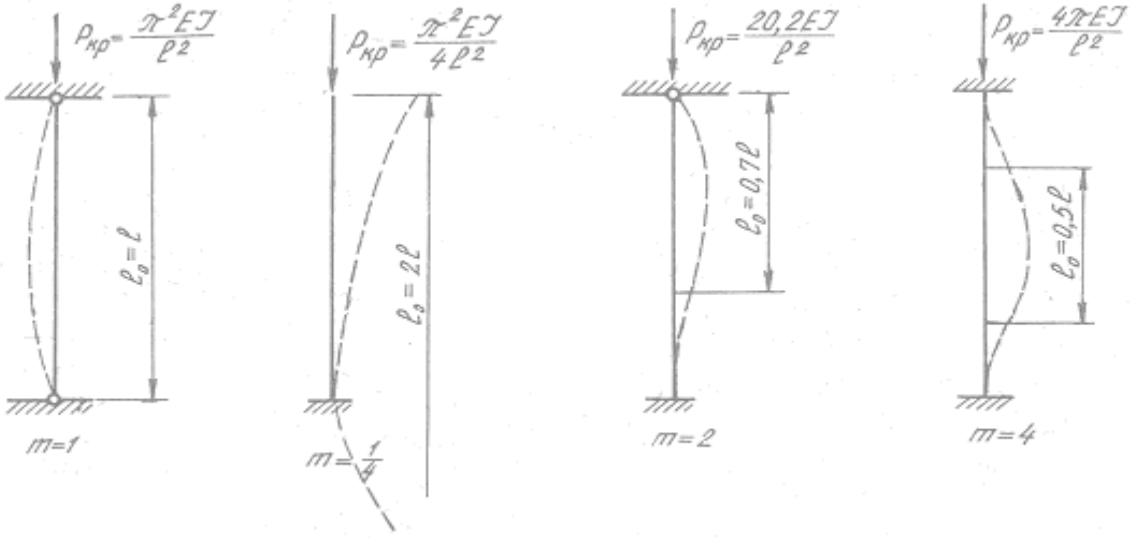
Тўрт хил схема учун чиқарилган критик куч ифодалари бир-биридан тузатувчи коэффициент m билан фарқ қилиб, биринчи схема учун m = 1, иккинчиси учун m = 1/4, учинчиси учун m = 2 ва тўртинчи схема учун m = 4.

Формула шаклини ўзгартирамиз:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{\sqrt{m}}\right)^2}$$

$\frac{l}{\sqrt{m}} = l_o$ — стерженнинг келтирилган (эркин) узунлиги дейилади. Буни формулага қўйсак, Эйлер формуласининг дастлабки кўринишига эга бўламиз.

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$



13.7- расм

Келтирилган узунликлар тўрттала ҳол учун қуйидаги қийматларга эга:

биринчи ҳол $l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{1}} = l;$

иккинчи ҳол $l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2l;$

учинчи ҳол $l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7l;$

тўртинчи ҳол $l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{4}} = 0{,}5l.$

13.4. Сиқилган стерженларни амалий ҳисоблаш

Сиқилишга ишлайдиган пўлат стерженлар икки сабабга кўра ишдан чиқади: биринчидан, материалдаги кучланиш σ оқиш чегараси σ_T га етганда мустаҳкамлик бузилади; иккинчидан, материалдаги кучланиш критик қиймат σ_{kp} га етганда устуворлнк йўқолади. Ҳар иккала сабаб стерженнинг ишдан чиқишига олиб келади. Шунга кўра сиқилган стерженларнинг ҳисобий чегаравий юк кўтариш қобилияти қуйидаги икки шарт бўйича ифодаланади:

а) мустаҳкамлик шарти $\sigma \le \sigma_T$;

б) устуворлик шарти $\sigma \le \sigma_{kp}$.

Критик кучланиш σ_{kp} оқиш чегараси σ_T дан кичик бўлганлиги сабабли, уларни бирдан кичик бўлган мослаштирувчи коэффициент φ_1 ёрдамида ўзаро боғлаш мумкин: $\sigma_{kp} = \sigma_T \varphi_1$. Бунда устуворлик шарти қуйидаги кўринишни олади:

$$\sigma \le \sigma_T \varphi_1 .$$

Қурилиш нормаларида оқиш чегарасининг энг кичик миқдори сифатида ҳисобий қаршилик R қўлланишини эътиборга олсак, юқоридаги шарт қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sigma \le R\varphi_1 , \quad бу\ ерда\ \ \varphi_1 = \frac{\sigma_{kp}}{\sigma_T}.$$

Реал конструкцияларда сиқувчи кучларнинг аниқ маркази бўлмайди, улар ҳамма вақт маълум елкага эга бўлади, бу эса критик кучланишнинг камайишига олибкелади. Буни эътиборга олиб, нормаларда яна бир коэффициент киритилган:

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}}$$

бу ерда σ_{kp}^e — тасодифий елка *«е»* орқали қўйилган сиқувчи кучдан ҳосил бўлган критик кучланиш. Унинг қиймати назарий ёки тажриба йўли билан аниқланади.

Натижада бўйлама эгилиш коэффициенти қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}}{\sigma_T} \cdot \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}} = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_T}.$$

Шундай қилиб, сиқилган стерженларнинг устуворлик шарти қуйидаги формула билан.ифодаланади:

$$\sigma = \frac{P}{F} \le R\varphi;$$

бу ерда P — ҳисобий сиқувчи куч;

F — стерженнинг кўндаланг юзаси;

R — материалнинг сиқилишга бўлган ҳисобий қаршилиги.

Металл конструкцияларида қўлланиладиган пўлатнинг турли маркалари учун бўйлама эгилиш коэффициентининг қиймати эгилувчанлик λ га боғлиқ ҳолда 13.1- жадвалда берилган.

Темир-бетон, ёғоч, ғишт каби бошқа материаллар учун ҳам φ коэффициенти ҳисоблаб чиқилган.

Стерженли системаларни устуворликка ҳисоблашда уч масала ҳал этилади:

1) агар R, φ, F маълум бўлса, сиқилган стерженнинг юк кўтариш кобилияти аниқланади;

2) агар P, F, R, φ маълум бўлса, стерженнинг устуворлиги текширилади;: $\sigma = P/F \le R_{\varphi}$;

3) агар P, R, φ маълум бўлса, стерженнинг кўндаланг кесим юзаси аниқланади $F \ge P/R\varphi$.

Юқорида айтиб ўтилгандек, φ коэффициенти жадвалдан эгилувчанлик λ орқали топилади. λ нинг ўзи эса кесим юзаси F ва инерция моменти J га боғлиқ миқдордир:

$$\lambda = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{\frac{J}{F}}}.$$

13.1- жадвал

Марказий сиқилган стерженлар учун

бўйлама эгилиш коэфициентлари

Эгилувчанлик λ	Турли маркали пўлат элементлар учун φ нинг қийматлари			
	Ст. 3 ва Ст. 4	Ст. 5	14*Г*2,15*ТС* 10*Г*2*С*, 10*Г*2*Сд* 15*ХСНД*	10 *ХСНД*
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,98
20	0,97	0,96	0,95	0,95
30	0,95	0,93	0,92	0,92
40	0,92	0,89	0,89	0,88
50	0,89	0,85	0,84	0,82
60	0,86	0,80	0,78	0,77
70	0,81	0,74	0,71	0,68
80	0,75	0,67	0,63	0,59
90	0,69	0,69	0,54	0,50
100	0,60	0,50	0,46	0,43
110	0,52	0,43	0,39	0,36
120	0,45	0,37	0,33	0,31
130	0,40	0,32	0,29	0,27
140	0,36	0,28	0,25	0,23
150	0,32	0,25	0,23	0,20
160	0,29	0,23	0,21	0,18
170	0,26	0,21	0,19	0,16
180	0,23	0,19	0,17	0,14
190	0,21	0,17	0,15	0,12
200	0,19	0,15	0,13	0,11
210	0,17	0,14	0,12	0,10
220	0,16	0,13	0,11	0,09

Шу боисдан изланаётган юзани аниқлашдан илгари бирор юзани тусмоллаб қабул қилинади ҳамда шу юза бўйича λ ва φ топилади, сўнгра қабул қилинган юза шарт бўйича, текширилади. Агар шарт каноатлантирилса, ўша юза қолдирилади, қаноатлантирилмаса, шу жараён яна такрорланади.

Металл конструкцияларини ҳисоблашда кўпинча φ коэффициенти аввал тусмоллаб танланади, кейин юза аниқланади ва шарт бўйича текширилади.

Элементнинг кўндаланг кесимини танлашда мустахкамлик шарти билан бир қаторда бикирлик шартинй ҳам каноатлантириш талаб этилади. Шу муносабат билан қурилиш конструкцияларининг турли элементлари учун чегаравий эгилувчанликлар белгиланган. Масалан, ферманинг ховонлари, устунчалари ва асосий устунлар учун рухсат этилган энг юқори эгилувчанлик $\lambda = 120$. Ферманинг бошқа элементлари ва иккинчи даражали устунлар учун чегаравий эгнлувчанлик $\lambda=150$. Металл конструкцияларининг қолган элементлари учун $\lambda = 200$.

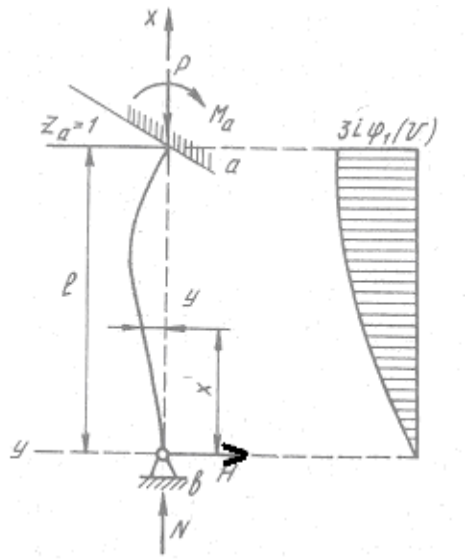
13.5. Сиқилган стерженларда бирлик кўчишдан ҳосил бўлган реакцияларни аниқлаш

Бундан кейинги параграфда рамалар устуворлигини ҳисоблашда кўчишлар усулининг татбиқини кўриб ўтамиз. Тўққизинчн бобда танишиб ўтганимиздек, статик ноаниқ системаларни бу усулда ҳисоблаганда, қўшимча равишда киритилган боғланишларда бирлик кўчишлар натижасида вужудга келадиган реакцияларни аниқлай билиш талаб этилади. Қуйида ана шундай реакциялар аниқланади.

Бу масалани ҳал этишда ҳам солқиликнинг тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EJ\,y'' = -M_x$$

Бир учи мустаҳкам, иккинчи учи шарнирли бириктирилган стерженни кўриб ўтамиз. 13.8- расмда тасвирланган ҳол учун таянч реакцияларини аниқлаб, эгувчи момент M эпюрасини қурамиз.



13.8- расм

Агар горизонтал реакция кучи H маълум бўлса, a таянчини бир бирликка буришдан ҳосил бўлган реактив момент

$$M_a = H\,l \qquad (13.6)$$

бўлар эди. Бироқ, H нинг ўзи номаълум. Эндиги вазифа унинг қийматини топишдан иборат.

Элементнинг исталган кесимидагн эгувчи момент

$$M_x = H\,x + N\,y$$

Ишорага изоҳ: y ўқи чапга йўналган, стерженнинг қабариғи ўқнинг мусбат томонига қараган. Шунинг учун Hx мусбат олинди. Иккинчи ҳаднинг мусбат олинишига сабаб, бўйлама куч N стерженни сиқади. Сиқса мусбат, чўзса, манфий олинади.

Шу кесим учун солқиликнинг дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$EJ\,y'' = -(H\,x + N\,y)$$

ёки $$y'' + \frac{N}{EJ}y = -\frac{H}{EJ}x$$

$\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{H}{EJ}x \qquad (13.7)$$

келиб чиқади. Бу тенгламанинг ечими қуйидаги кўринншга эга:

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{H}{\alpha^2 EJ}\,x \qquad (13.8)$$

А ва В ўзгармаслари чегаравий шартлардан топилади:

x=0; y=0 бўлса, B=0 бўлади. x=l бўлса, y=0 ва

$$A = \frac{H\cdot l}{\alpha^2 EJ} - \frac{1}{\sin\alpha l}$$

бўлади.

Натижада стержень эгилган ўқининг тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$y = \frac{H\,l}{\alpha^2 EJ} \cdot \frac{\sin \alpha\, x}{\sin \alpha\, l} - \frac{H\,x}{\alpha^2 EJ} = \frac{H\,l}{\alpha^2 EJ}\left(\frac{\sin \alpha\, x}{\sin \alpha\, l} - \frac{x}{l}\right) \qquad (13.9)$$

Энди $y^1 = Za = -1$ эканлигини назарда тутиб, (13.9) тенгламадан x бўйича ҳосила оламиз ва чиққан натижани — 1 га тенглаймиз:

$$-1 = \frac{H\,l}{\alpha\, EJ}\left(\frac{1}{tg\,\alpha\, l} - \frac{1}{\alpha\, l}\right) \qquad (13.10)$$

(13.10) ифодани ихчамлаштириш мақсадида қуйидаги белгилашларни қабул қиламиз:

$$\upsilon = \alpha\, l \quad ва \quad i = \frac{EJ}{l}$$

Буларни (13.10) га қўйиб, ундан изланаётган горизонтал реакция H ни топамиз:

$$H = \frac{i}{l} - \frac{\upsilon^2 tg\,\upsilon}{tg\,\upsilon - \upsilon}$$

H нинг бу қийматини (13.6) ифодага қўямиз:

$$M_a = H\,l = 3i \cdot \varphi_1(\upsilon)$$

бу ерда $\varphi_1(\upsilon) = \frac{\upsilon^2 tg\,\upsilon}{3(tg\,\upsilon - \upsilon)}$ — сиқилган стерженларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларга бўйлама кучнинг таъсирини ҳисобга олувчи коэффициент.

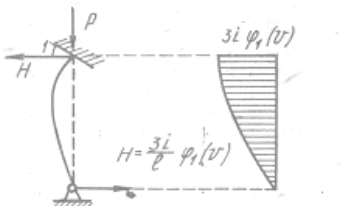
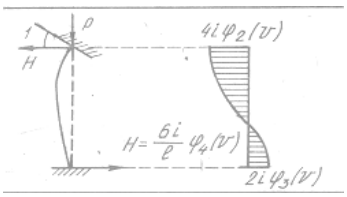
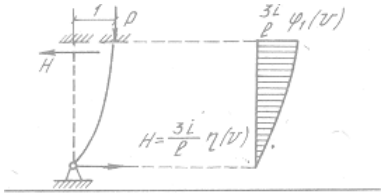
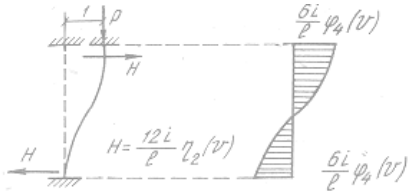
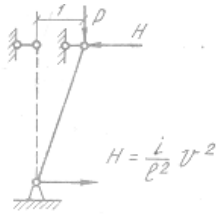
Бўйлама куч бўлмаса $\varphi_1(\upsilon) = 1$ бўлади. Буларга тегишли эгувчи момент M эпюраси 13.8- расмда берилган.

Стержень учларининг бошқача махкамланган ҳоллари учун $\varphi_2(\upsilon)$, $\varphi_3(\upsilon)$, $\eta(\upsilon)$ ва х,.к. функциялар кўринишида тузатувчи кўпайтувчилар киритилади. 13.2- жадвалда сиқилиб-эгилган стерженлар учун эластик реакцияларнинг қийматлари ҳамда тузатувчи функциялар берилган. Тузатувчи функциялар $\varphi(\upsilon)$ ва $\eta(\upsilon)$ нинг қийматлари 13.3-жадвалдан аниқланади.

Шу нарсага эътиборни алоҳида жалб этиш лозимки, тузатувчи функциялар фақат сиқилган стерженларда қўлланилади. Асосий системада сиқувчи куч

қўйилмаган стерженларда тузатувчи коэффициентлар ишлатилмайди. 13.2-жадвалнинг оҳирги қаторида икки учй шарнирли махкамланган стержень берилган бўлиб, таянчлардан бири силжиганда, стерженга қўйилган бўйлама куч туфайли вужудга келган горизонтал реакциянинг қиймати берилган.

13.2- жадвал

Кўчишнинг тури ва $\overline{M}$ эпюраси	Тузатувчи функциялар
	$\varphi_1(V)=\dfrac{V^2}{3(1-\dfrac{V}{tgV})}$
	$\varphi_2(V)=\dfrac{V(tgV-V)}{8tgV(tg\dfrac{V}{2}-\dfrac{V}{2})}$ $\varphi_3(V)=\dfrac{V(V-\sin V)}{4\sin V(tg\dfrac{V}{2}-\dfrac{V}{2})}$
	$\eta_1(V)=\varphi_1(V)-\dfrac{V^2}{3}$
	$\varphi_4(V)=\varphi_1(\dfrac{V}{2})$ $\eta_2(V)=\eta_1(\dfrac{V}{2})=\varphi_4(V)-\dfrac{V^2}{12}$
	$V=\ell\sqrt{\dfrac{P}{EJ}}$

13.3- жадвал

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9326	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0805	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7531	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5991	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4256	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299

13.3- жадвал давоми

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-0,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-0,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	0,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2,0	0,0000	-	-	0,0000	-13,033	-3,2898

13.6. Рамалар устуворлиги

Рамаларни устуворликка ҳисоблашда кучлар ёки кўчишлар усулидан фойдаланилади. Булардан кейингиси ўзининг қулайлиги ва соддалиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради. Қуйида рамалар устуворлигини ҳисоблашда кўчишлар усулидан фойдаланишни кўриб чиқамиз.

Аввало бинокорликда кенг тарқалган тўғри чизиқли стерженлардан ташкил топган раманинг тугунларига бўйлама кучлар қўйилган ҳолни кўриб ўтамиз. Кучларнинг критик қийматида рамада критик (танг) ҳолат вужудга келади. Бунда раманинг тўғри чизиқли мувозанати ноустувор ва эгри чизиқли мувозанати устувор бўлиб қолади. Ҳисобни соддалаштириш мақсадида стерженлардаги бўйлама деформацияларни эътиборга олмаймиз.

Раманинг асосий системаси аввалгисидан, яъни мустахкамликка ҳисоблашдаги схемадан фарқ қилмайди. Каноник тенгламалар тизими раманинг деформацияланган ҳолати учун тузилади. Тугунларга қўйилган ташқи кучлар асосий системага киритилган қўшимча боғланишларда Ҳеч қандай реакция уйготмайди, шунинг учун ҳам тенгламалар бир жинсли бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + \ldots + Z_n r_{1n} = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + \ldots + Z_n r_{2n} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + \ldots + Z_n r_{nn} = 0. \end{array}\right\} \qquad (13.11)$$

Бу ерда Z_1, Z_2, ... Z_n — номаълум эгилиш бурчаклари ва чизиқли кўчишлардир.

Тенгламаларнинг физик.маъноси ҳам ўша-ўша, яъни исталган қўшимча боғланишдаги реакциялар йиғиндиси нолга тенг.

Бироқ (13.11) тенгламанинг коэффициентлари r_{ik} —реактив момент ва реактив кучлар кўчиш усулининг аввалги оддий коэффициентларидан бироз фарқ қилади. Аввалги коэффициентлар ташқи кучларга боғлиқ бўлмас эди. Устуворлик масаласидаги коэффициентлар эса бўйлама кучларга боғлиқ: олдинги параграфда кўриб ўтганимиздек, коэффициентларнинг қийматини аниқлашда тугунларга қўйилган бўйлама кучларнинг таъсири ҳам ҳисобга олинади.

Яна шуни ҳам эслатиб ўтиш лозимки, устуворлик тенгламаларида ҳам Релей теоремаси ўз'кучига эга, яъни $r_{ik} = r_{ki}$.

Каноник тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимга эга бўлишлиги учун, яъни рама тўғри чизиқли мувозанатдан ташқари эгри чизиқли мувозанатга ҳам эга бўлишлиги учун, (13.11) системанинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$D = \begin{bmatrix} r_{11}, & r_{12}, & \dots & r_{1n} \\ r_{21}, & r_{22}, & \dots & r_{2n} \\ r_{n1}, & r_{n1}, & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} = 0 \qquad (13.12)$$

Аниқловчини очиб, устуворлик тенгламасини ҳосил қиламиз. Сўнгра ундвн критик куч топилади. Бирлик эластик реакциялар бўйлама кучнинг функцияси бўлиб, υ параметрига боғлиқдир. Шунинг учун ҳам аниқловчини очганда, υ га нисбатан — трансцендент тенглама ҳосил бўлади. Тенглама қатор илдизларга эга бўлиб, уларнинг ичидан энг кичиги танлаб олинади. Тенгламанинг ўзи эса танлаш ёки кетма-кет яқинлашув усулида ечилади.

Умуман рамада қанча сиқилган стержень бўлса, ўшанча $\upsilon = 1\sqrt{N : EJ}$ бўлади. Бироқ, υ_1, υ_2 ... ларни бирорта υ_n орқали ифодалаб олса бўлади. Бунда барча r_{ik} битта параметрнинг функциясига айланиб қолади:

$$r_{ik} = f_{ik}(\upsilon_n),$$

критик ҳолат тенгламаси эса қуйидаги кўринишни олади:

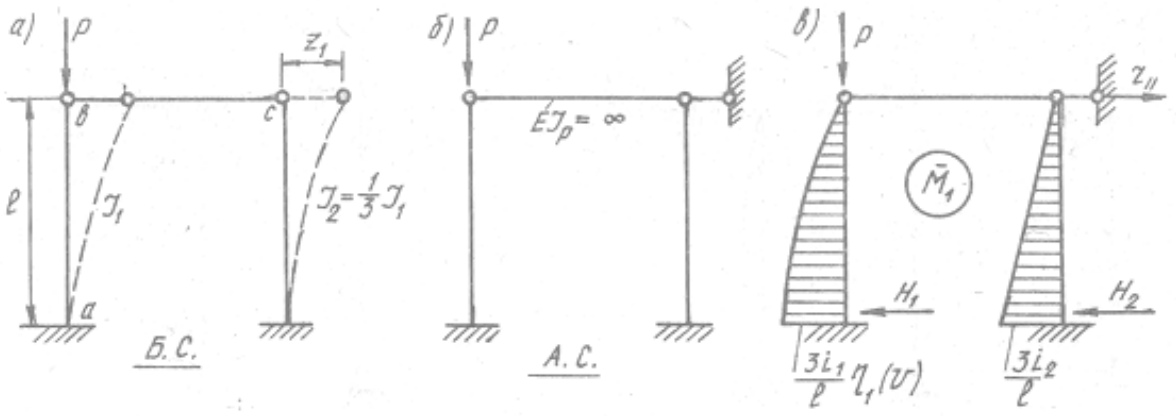
$$D = \left(\upsilon_n \right) = \left| f_{ik} \left(\upsilon_n \right) \right| = 0 .$$

Мазкур аниқловчи тенгламанинг энг кичик илдизи $\upsilon_{n,\ kp}$ ни аниқлаш имконини беради. Параметр $\upsilon_{n,kp}$ асосида n- стержендаги бўйлама кучнинг критик қиймати аниқланади:

$$N_{n_1 kp} = \upsilon_{n,kp}^2 \frac{EJ_n}{l_n^2}. \qquad (13.13)$$

Шу стерженнинг ҳисобий узунлиги қуйидаги формуладан топилади:

$$l_{0,n} = \pi \sqrt{\frac{EJ_n}{N_{n\ kp}}} = \frac{\pi}{\upsilon_{n,kp}} l_n \qquad (13.14)$$



13.9- расм

Кейин υ лар орасидаги.боғланишлардан фойдаланиб, раманинг қолган стерженлари учун υ_{kp} ва N_{kp} аниқланади. Баён этилган умумий мулоҳазаларни аниқ мисоллар асосида тушунтирамиз.

1- мисол. Раманинг *ab* устунчаси учун критик куч ва ҳисобий узунлик аниқлансин (13.9- расм, а). Ригель чексиз катта бикирликка эга. $J_2 = J_1/3$.

Номаълумлар сони бирга тенг. Асосий система ва бирлик эпюра $\overline{M}_1$ 13.9- расм, б, в да тасвирланган. P кучидаи $P \cdot y$ моменти келиб қўшилганлиги сабабли сиқилган стерженнинг эпюраси эгри чизиқли кўринишга эга.

Реакцияларни аниқлашда бу эгрилик тузатувчи коэффициент $\eta_1\ (\upsilon)$ орқали ҳисобга олинади. $\overline{M}_1$ эпюрасини қуришда 13.2- жадвалдан фойдаланилади.

Тугунлардаги кучлар учун υ параметрлари:

$$\upsilon_1 = l\sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = \upsilon,$$

$\upsilon_2 = 0$, чунки иккинчи тугунда куч йўқ.

Берилган рама учун устуворлик каноник тенгламаси $Z\ \ r_{11} = 0$ бўлади; $Z_1 \neq 0$ бўлгани учун критик ҳолат тенгламаси қуйидагича ифодаланади: $r_{11} = 0$.

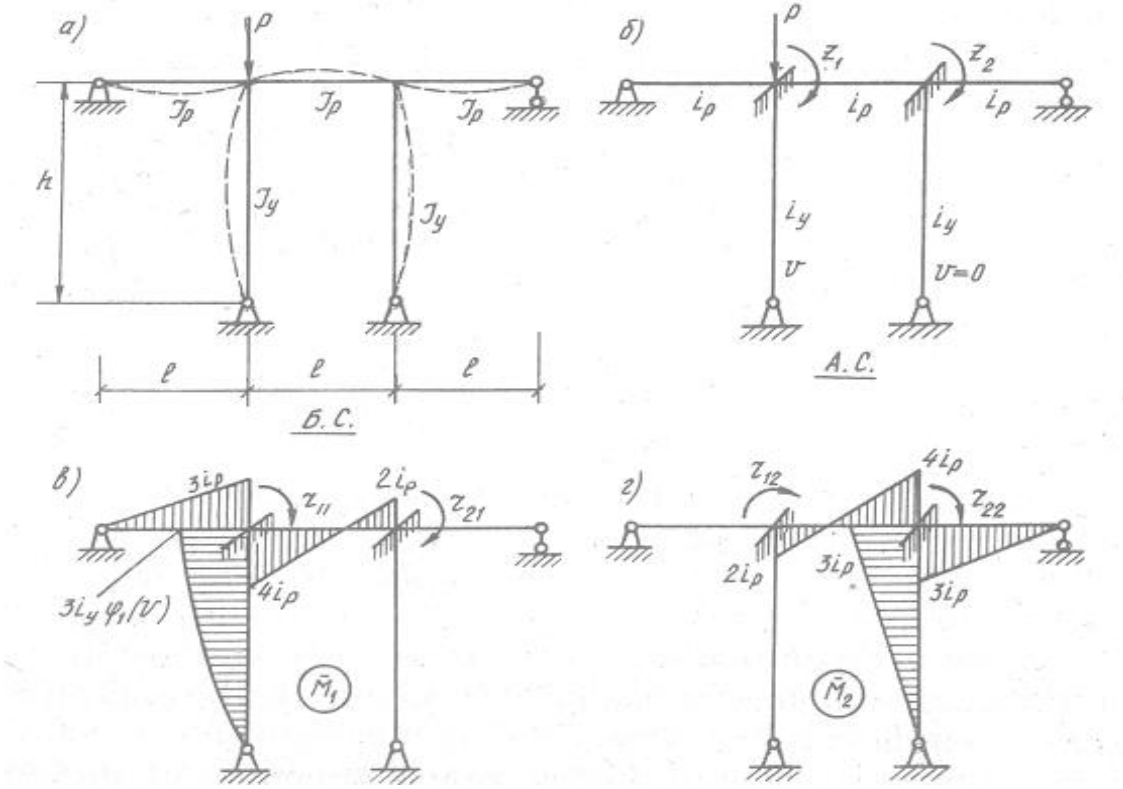
$\overline{M}_1$ эпюрасидан реакциянинг қийматини топамиз:

$$r_{11} = H_1 + H_2 = \frac{3i_1}{l}\eta + \frac{3i_2}{l} = 0;\ l_2 = \frac{1}{2}i_1.$$

Бу ердан $\eta_1\ (\upsilon) = —\ 0{,}333$; 13.3- жадвалдан $\upsilon_{kp} = 1{,}81$.

Критик куч

$$P_{kp} = \upsilon_{kp}^2 \frac{EJ_1}{l^2} = 3{,}28\frac{EJ_1}{l^2}.$$



13.10- расм

Ҳисобий узунлик

$$l_0 = \frac{\pi}{\nu_{kp}} l = \frac{3{,}14}{1{,}81} l = 1{,}73 l.$$

2- мисол. Шаклда кўрсатилган озодмас рама учун критик куч ва ҳисобий узунлик аниқланиши керак (13.10- расм, а).

Раманинг устунчаси, ригели ҳамда инерция моментлари орасидаги боғланиш қуйидагича. $l = 2/3\ h$; $J_p = 2J$; $i_p = 3i_y$. Асосий система ва бирлик эпюралар 13.10- расм, б, в, г да тасвирланган. Раманинг критик ҳолат тенгламаси

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Бирлик эпюралардан фойдаланиб эластик реакцияларни аниқлаймиз:

$$r_{11} = 3i_y \varphi_1(\upsilon) + 3i_p + 4i_p = 3i_y \varphi_1(\upsilon) + 7i_y;$$
$$r_{12} = 3i_y + 3i_p + 4i_p = 24 i_y;$$
$$r_{12} = r_{21} = 2i_p = 6i_y; \quad \nu = h\sqrt{p / EJ_y}.$$

Топилган қийматларни тенгламага қўямиз:

$$D = 3i_y \varphi_1(\upsilon) + 7i_y \cdot 24 i_y - 6 \cdot 6 i_y^2 = 0,$$

бу ердан $\varphi_1(\upsilon) = -6{,}5$.

13.3- жадвалдан $\varphi_{kp} = 4{,}29$. Бунга мос бўлган критик куч $P_{kp} = \upsilon_{kp}^2 \frac{EJ_y}{h^2} = 18{,}4 \frac{EJ_y}{h^2}$, ҳисобий узунлик

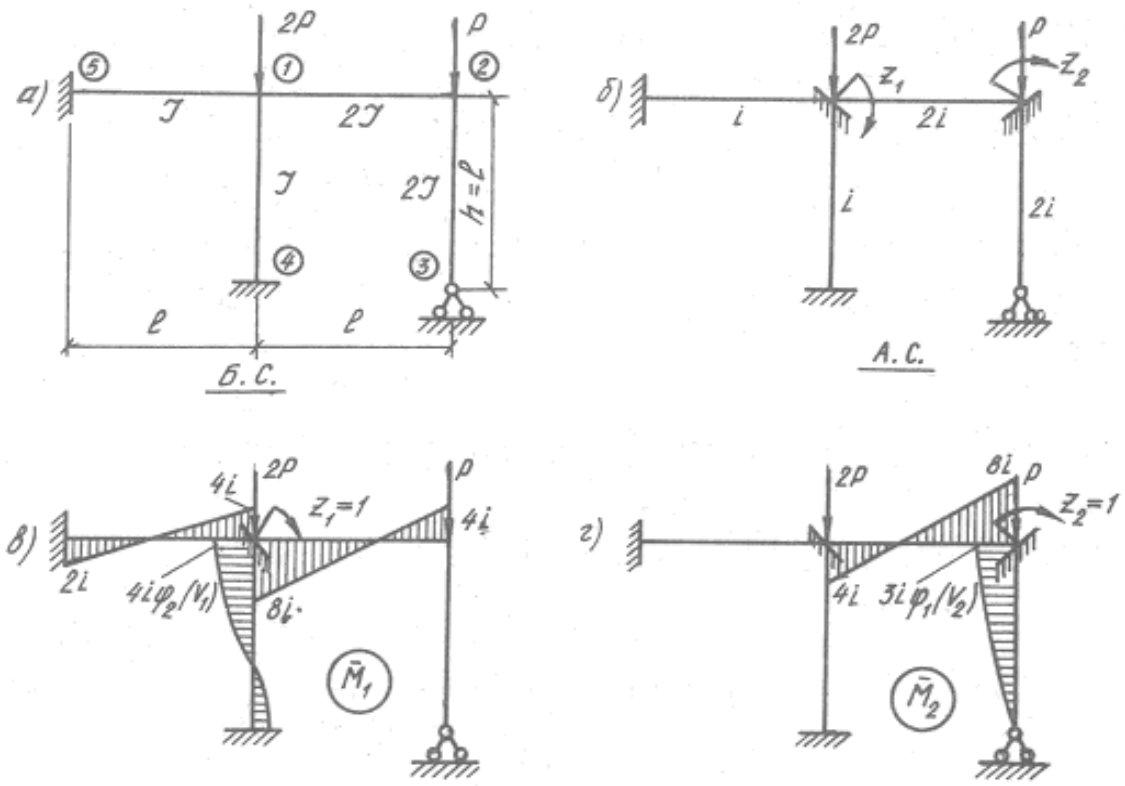
$$h_0 = \frac{\pi}{\upsilon_{kp}} h = \frac{3{,}14}{4{,}29} h = 0{,}732 h$$

бўлади.

3- мисол. 13.11- расм, а да тасвирланган раманинг устунларига қўйилган кучнинг критик қиймати аниқлансин.

Мазкур раманинг асосий системаси ва бирлик эпюралари ($\overline{M}_1, \overline{M}_2$) 13.11-расм, б, в, г да кўрсатилган. Тугунларга қўйилган куч рамада эгувчи момент ҳосил қилмайди, шунинг учун M_p = 0 бўлади. У ҳолда кўчиш усулининг каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$z_1 r_{11} + z_2 r_{12} = 0;$$
$$z_1 r_{12} + z_2 r_{22} = 0.$$



13.11- расм

Ушбу тенгламалар системаси икки ечимга эга:

а) $z_1 = 0$; $z_2 = 0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йўқотмайди.

б) $z_1 \neq 0$; $z_2 \neq 0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йўқотади.

Ана шу шартдан келиб чикиб критик кучнинг қийматини аниқлаймиз. Бу шарт каноатлантирилиши учун юқоридаги тенглама коэффициентларидан тузилган аниқловчи нолга тенг бўлиши керак:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Оҳирги тенглама *устуворлик тенгламаси* деб аталади.

$\overline{M}_1$ ва $\overline{M}_2$ эпюраларидан каноник тенглама коэффициентларини аниқлаймиз:

$$r_{11} = 4i + 8 + 4i\,q\varphi_2(\upsilon_1) = 12i + 4i\varphi_2(\upsilon_1);$$

$$r_{12} = r_{21} = 4i;$$

$$r_{22} = 8i + 3i\varphi_1(\upsilon_2)$$

φ_2 (υ_1) ва φ_1 (υ_2) сингари мураккаб функциялар махсус китобларда бериладиган жадваллардан топилади (бизда 13.3- жадвал), υ_2 параметрини υ_1 орқали ифодалаймиз:

$$\upsilon_1 = l\sqrt{\frac{2P}{EJ}};\ \upsilon_2 = l\sqrt{\frac{P}{2EJ}};$$

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 2;\ \upsilon_1 = 2\upsilon_2;\ \upsilon_2 = 0{,}5\upsilon_1.$$

Топилган коэффициентларни устуворлик тенгламасига қўямиз:

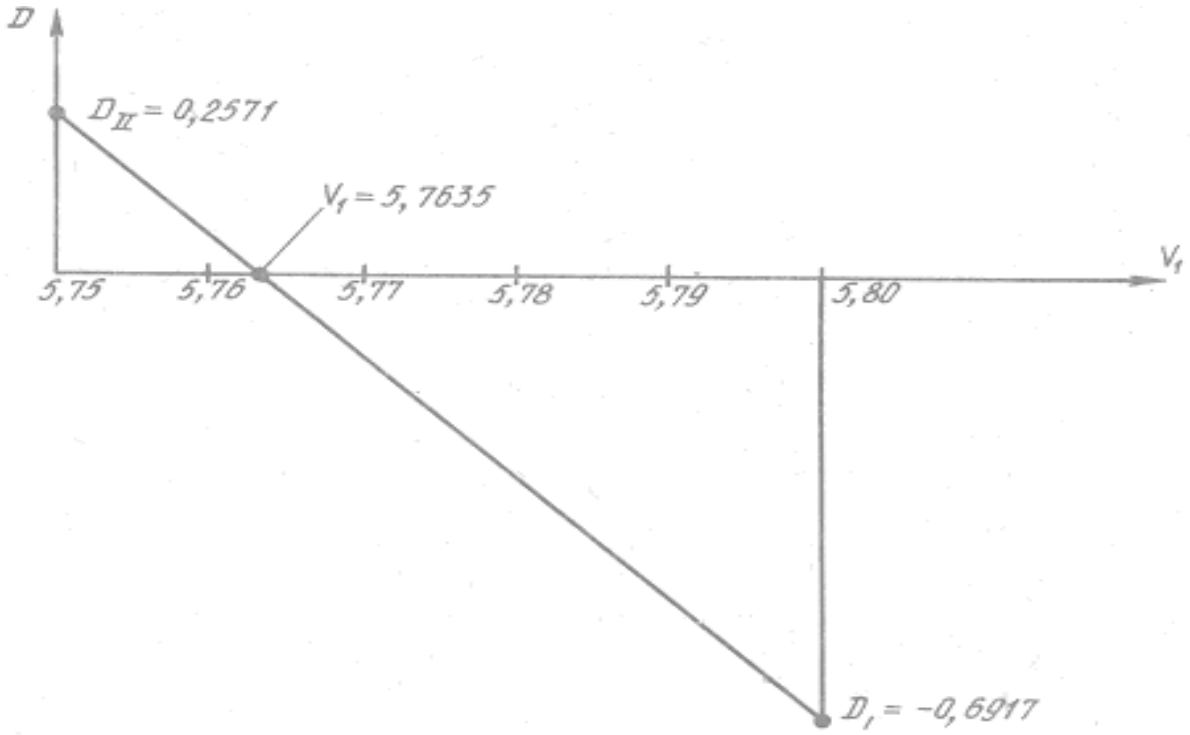
$$D = [2i + 4i\varphi_2(\upsilon_1)][i + 3i\varphi_1(\upsilon_2)] - (4i)^2 = 0 \quad ёки$$

$$D = [1 + \varphi_2(\upsilon_1)][2{,}6667 + \varphi_1(0{,}5 - \upsilon_1)] - 1{,}3333 = 0.$$

Тенгламани кетма- кет яқинлашув усулида ечамиз.

Биринчи яқинлашув. υ_2=2,9; υ_1 = 2 · 2,9=5,8 деб қабул қиламиз ва 13.3-жадвалдан шуларга мос бўлган φ_1 ва φ_2 ни аниқлаймиз:

$$\varphi_1(2{,}9) = 0{,}2195;\ \varphi_2(6{,}8) = -2{,}7777.$$



13.12- расм

Буларни устуворлик тенгламасига қўямиз:

$$D_I = (3 - 2{,}7777) \cdot (2{,}6667 + 0{,}2195) - 1{,}3333 = -\,0{,}6917.$$

Чиққан қиймат нолдан анча фарқ қилади. Шунинг учун иккинчи яқинлашувни бажарамиз.

Иккинчи яқинлашув. υ_2=2,875; $\upsilon_1 = 2{,}875 \cdot 2$=5,75 деб қабул қиламиз.

13.3- жадвалдан υ_1 (2,875) = 0,2388; υ_2 = - (5,75) = - 2,4526. Устуворлик тенгламаси.

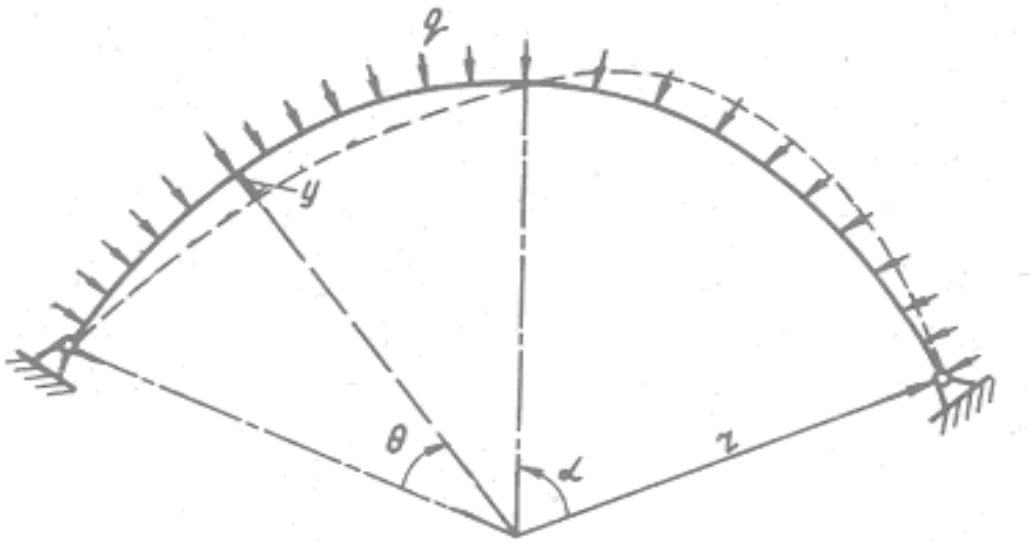
$$D_{II} = (3 - 2{,}4526) \cdot (2{,}6667 + 0{,}2388) - 1{,}3333 = 0{,}2571.$$

Иккита яқинлашувдан кўриниб турибдики, устуворлик тенгламасининг ечими (илдизи) υ_1 = 5,75 билан υ_2 = 5,8 оралиғида ётади. Масофа кичик бўлгани учун бу ораликда D (υ_1) функциясини чизиқли деб қабул қилса бўлади. Бундай вазият тенглама ечимини график усулда аниқлаш имконини беради (13.12-расм). Маълум масштабда горизонтал ўққа υ_1 нинг қийматлари, вертикал ўққа D_I ва D_{II} нинг қийматлари ўлчаб қўйилади ва ўзаро туташтирилади.

Туташтирувчи чизиқ горизонтал ўқни кесиб ўтган нуқта тенгламанинг илдизи бўлади, яъни υ_1 нинг биз излаётган қиймати бўлади: $\upsilon_1 = 5{,}7635$.

Критик куч

$$P_{ik} = \frac{5{,}7635^2\, EJ}{\ell^2} = 33{,}218\,\frac{EJ}{\ell^2}$$



13.13- расм

13.7. Аркалар устуворлиги

Аркаларнинг энг содда вакили — айлана бўйлаб чизилган икки шарнирли аркани кўриб ўтамиз. Аркага текис ёйилган, радиус бўйлаб йўналган юк қўйилган (13;13- расм). Бикирлиги EJ — ўзгармас. Агар $q < q_{kp}$ бўлса, арканинг барча кесимларида бир хил қийматга эга бўлган бўйлама куч N ҳосил бўлади. Арка ўқига тик йўналган кўчишни y деб белгиласак, устуворлик бузилганда бўйлама кучдан ҳосил бўладиган момент $M = N\,y$ бўлади. Бўйлама куч билан радиал юк орасидаги боғланиш $N=q\,r$ кўринишида ифодаланади.

Арка эгилган ўқининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{d^2y}{d\Theta^2} + k^2 y = 0,$$

бу ерда

$$k^2 = 1 + \frac{qr^3}{EJ}.$$

Дифференциал тенгламанинг ечими

$$y = A\cos k\Theta + B\sin k\Theta$$

бўлади. Бу ерда Θ — радиал бурчак.

Устуворлик тенгламасига эга булиш учун қуйидаги чегаравий шартларни қабул қиламиз:

$$\Theta = 0;\ y = 0;$$
$$\Theta = \alpha;\ y = 0.$$

Биринчи шартдан $A = 0$, иккинчисидан $B\sin k\alpha = 0$ келиб чиқади. Бу ерда B≠0 бўлганидан, $\sin k\alpha = 0$ бўлади. Оҳирги тенглама устуворлик бузилишининг ҳарактеристик тенгламаси деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи шакли учун $k\alpha = \pi$ бўлади. Бундан фойдаланиб минимал критик юкни аниқлаймиз:

$$1 + \frac{qr^3}{EJ} = \frac{\pi^2}{\alpha^2},$$

бу ердан

$$q_{kp} = \frac{EJ}{r^3}\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}\right).$$

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, яъни арка ярим айлана шаклида бўлса, $q_{kp} = \frac{3EJ}{r^3}$ бўлади.

Аркаларнинг бошқача турларини текширганда ҳам мувозанатнинг тегишли дифференциал тенгламасига эга бўлиш мумкин. Аммо уларнинг ечими бирмунча мураккаброк бўлади. Шунинг учун ҳам уларни ечишда тақрибий усулларни қўллаш мақсадга мувофикдир.

14- БОБ
ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ АСОСЛАРИ

14.1. Иншоотлар динамикасининг вазифалари ва асосий тушунчалар

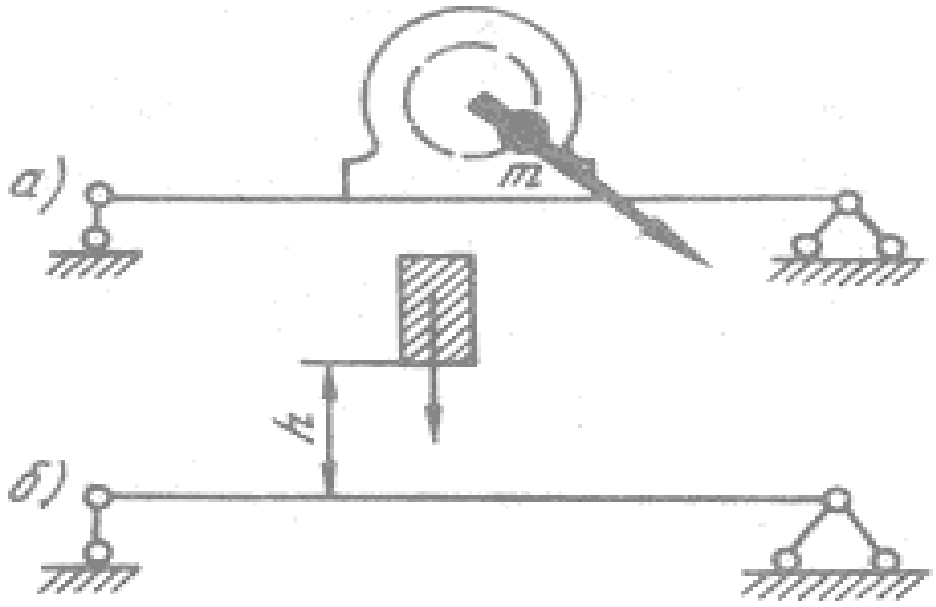
Иншоотлар динамикаси қурилиш механикасининг махсус бўлими бўлиб, унда иншоотларга динамик кучларнинг таъсири кўриб ўтилади.

Иншоот массаларида тезланиш уйғотадиган кучлар *динамик кучлар* деб аталади. Иншоот қисмларига аста-секин қўйиладиган кучлар статик кучларни ташкил этади. Динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган кучланиш, деформация ва кўчишлар вақт ўтиши билан ўзгариб туради. Статик кучлар таъсирида эса бундай ўзгаришлар содир бўлмайди.

Динамик кучларнинг қуйидаги хиллари мавжуд:

1. Қўзғалмас даврий кучлар. Бундай кучлар иншоотнинг бирор ерига ўрнатилган, айланувчи қисмида мувозанатлашмаган массаси бўлган механизмлар таъсирида вужудга келади (14.1- расм, а).

Агар даврий кучлар синус ёки косинус қонуни бўйича бетўхтов таъсир этса, у ҳолда бундай кучлар вибрацион ёки *гармоник кучлар* деб аталади.



14.1-расм

2. Зарбий куч. Иншоотга (14.1- расм, б) зарб билан урилувчи механизмлар бундай кучга мисол бўла олади.

3. Қисқа муддат таъсир этувчи кучлар (импульслар). Бундай кучлар бирдан пайдо бўлиб, бирдан сўнади. Портлаш натижасида ҳосил бўладиган куч қисқа муддат таъсир этувчи куч ҳисобланади.

4. Қўзғалувчи кучлар. Иншоот устида ҳаракатланувчи транспорт воситалари қўзғалувчи кучларни ҳосил қилади.

5. Сейсмик кучлар. Зилзила жараёнида бино ва иншоотларга таъсир этувчи кучлардир.

Сейсмик кучлар қийматини тўғри аниқлай билиш иишоотларнинг сейсмик мустаҳкамлигини таъминлашда катта аҳамиятга эга.

Динамик кучлар ўз табиатига кўра статик кучларга нисбатан бирмунча мураккаб бўлади, чунки бундай кучлар қиймати, йўналиши ва қўйилиш нуқтаси билангина эмас, балки вақт бўйича ўзгариши билан ҳам фарқланади. Шунинг учун ҳам иншоотларни динамик кучлар таъсирига ҳисоблаш мураккаб жараён саналади.

Иншоотлар динамикаси қуйидаги икки асосий масала:

1) динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган максимал деформация ва кучланишларни аниқлаш;

2) иншоотда етарли даражада кичик деформация ва кучланиш ҳосил бўлишини таъминлйдиган геометрик ўлчамлар танлаш масаласи билан шуғулланади.

Тебраниш турлари. Тебраниш турлари бенихоя кўп бўлиб, инсон юрагининг уриши, ўпканинг нафас олиши, совуқдан қалтираш, ёруғлик ва товуш тўлқинлари, қадам ташлаб юришимиз, электр кўнғироғининг жиринглаши, автомобиль ҳаракати, ер қимирлаш каби ходисаларнинг барчаси тебранишга жонли мисол бўла олади.

Бироқ мазкур курсимизнинг мақсади тебраниш ходисаларини тўлиқ, ҳар тарафлама ўрганиш эмас, балки муҳандиснинг мехнат фаолиятида кўп учрайдиган механик тебранишларни таҳлил этишдан иборатдир.

Тинч турган механик системага (масалан, балка ёки математик тебрангичга) ташқаридан куч таъсир эттирилиб, шу захоти олинса, система тебранма ҳаракатланади. Системанинг бундай тебраниши *эркин ёки хусусий* тебраниш деб аталади.

Агар тебранаётган система доим кўзгатувчи куч таъсири остида бўлса (14.1- расм, а), системанинг бундай тебраниши *мажбурий* тебраниш деб аталади.

Системанинг эркин тебранишига тикловчи (эластик) кучлар билан бирга қаршилик кўрсатувчи (диссипатив[1]) кучлар ҳам таъсир этади. Диссипатив кучлар тебранншнинг сўнишига сабаб бўлади.

Мухитнинг қаршилиги, ички ишкаланиш кучлари, таянчлардаги қуруқ ишқаланиш *диссипатив* кучлардир.

Айрим масалаларни тақрибан ечишда диссипатив кучлар эътиборга олинмайди. Тебранишнинг бундай тури *сўнмайдиган* эркин тебраниш деб ном олган.

Маълум вақт ичида узлуксиз такрорланиб турадиган тебранишлар *даврий* тебранишлар деб аталади. Тўла тебраниш учун кетгай вақт тебраниш *даври* (Т) дейилади.

Системаиинг эркинлик даражаси.

Иншоотлар статикасидаги каби динамикасида ҳам «система» деганда стерженли системалар, яъни иншоотлар тушунилади. Динамик ҳисоблаш жараёнида иншоотнинг динамик ҳисоблаш схемасидан фойдаланилади. Динамик ҳисоблаш схемаларида иншоот массаси айрим нуқталарга тўпланган ёки система бўйлаб тарқалган деб қаралади. Массаларнинг қандай олинишига қараб системанинг эркинлик даражаси турлича бўлади.

Система деформацияланганда барча массаларнинг ҳолатини (ўрнини) белгиловчи геометрик параметрлар сони системанинг *эркинлик даражаси* деб аталади.

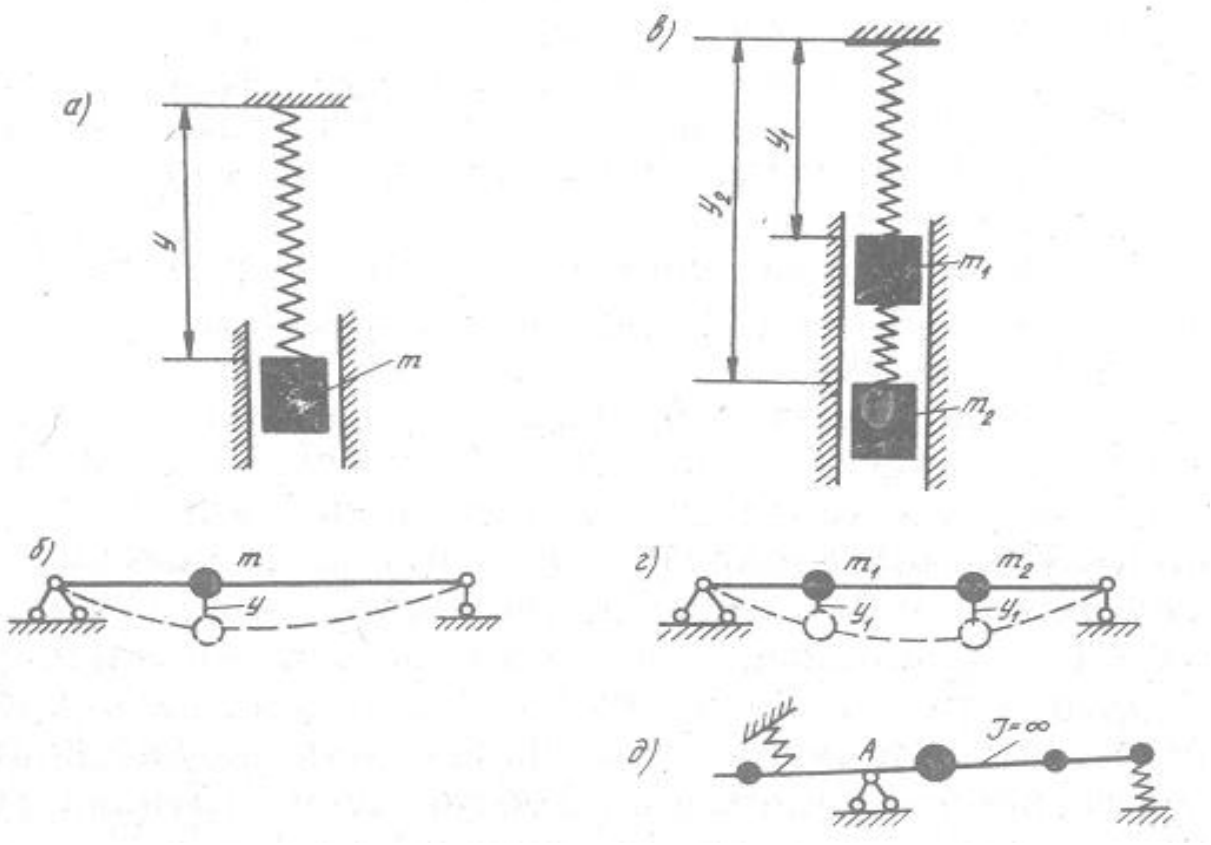
Вазнсиз пружинага осилган *m* массанинг (14.2- расм, а) эркинлик даражаси бирга тенг, чунки унинг ҳолатини биргина параметр (у — координатаси) билан аниқлаш мумкин. Ҳудди шундай бир массали балканинг (14.2- расм, б) эркинлик даражаси ҳам бирга тенг. 14.2- расм, в ва г ларда эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системалар тасвирланган.

Тўпланма (йиғиқ) массалар бикирлиги чексиз катта стержень устида жойлашган бўлса, системанинг ҳолати стерженнинг ҳолати билан белгиланади.

---

[1] Диссипатив – лотинча сочилиш деган маънони англатади.

Масалан, 14.2- расм, д даги системанинг эркинлик даражаси, масса ва пружиналарнинг сонидан қатъи назар, бирга тенг бўлади. Чунки массаларнинг ҳолатини стерженнинг А таянчи атрофида огиш бурчаги билан белгилаш мумкин.

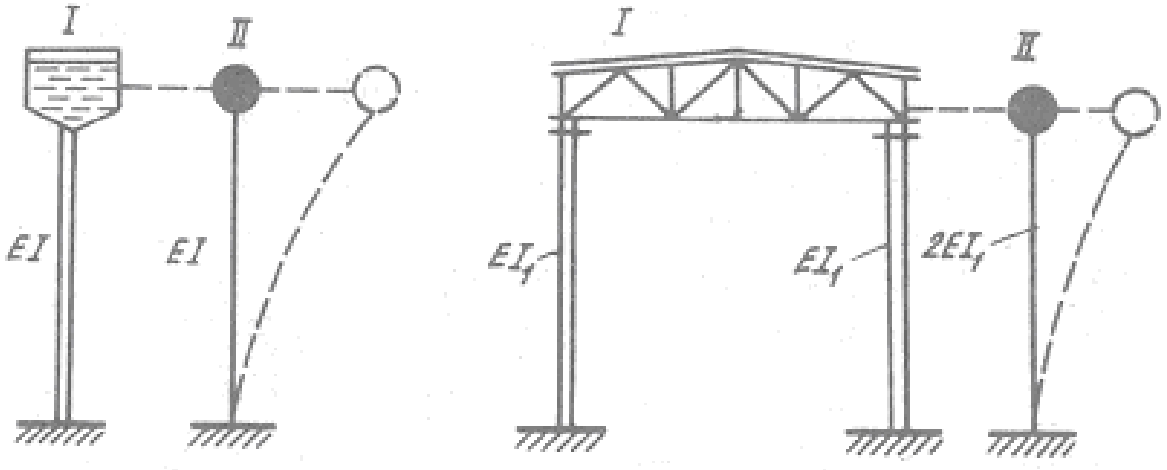


14.2-расм

Аслида реал конструкцияларда масса бутун элемент хажми бўйлаб ёйилган бўлади.

Бу эса массаларнинг сони чексиз кўп демакдир. Шундай экан, массаларнинг ҳолатини белгиловчи параметрлар ҳам чексиз кўп бўлади. Шунга кўра гап реал конструкциялар устида борганда, уларнинг эркинлик даражаси *чексиз кўп* деб юритилади. Бироқ, системанинг эркинлик даражаси қанча кўп бўлса, ҳисоб ишлари шунча мураккаблашади. Шу сабабли кўпинча техник ҳисобларда, унча жўзъий бўлмаган хатоликка йўл қўйилган ҳолда, системанинг эркинлик даражаси чекли равишда олинади. Бунда массалар системанинг айрим нуқталарига, масалан, иншоотдаги оғир юклар жойлашган ерларга тўпланади.

14.3- расмда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг конструкцияси ва ҳисоблаш схема тасвирланган. Шаклдаги сув босими минораси ва бир қаватли рамада масса асосий юк жойлашган ерга тўпланган.



14.3- расм

14.2. Иншоотлар динамикаси усуллари

Иншоотлар динамикасида *статик* ва *энергетик* усул деб аталувчи икки асосий усул кенг қўлланилади.

Статик усулнинг мокияти шундан иборатки, бунда динамика масалалари Даламбер қоидаси асосида шаклан статика масалаларига келтирилади, яъни динамика тенгламалари статика тенгламаларига келтирилади.

Даламбер қоидасига кўра динамиканинг мувозанат тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} \sum \mathrm{X} + (-\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}) = 0 \\ \sum \mathrm{У} + (-\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dt}^2}) = 0 \\ \sum \mathrm{Z} + (-\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{z}}{\mathrm{dt}^2}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14.1)$$

бу ерда m — мувозанати текширилаётган жисмнинг массаси; x, y, z — жисмнинг координата ўқлари бўйлаб чизиқли кўчишлари; $\Sigma X, \Sigma У, \Sigma Z$ — жисмга таъсир этаётган кучлар проекцияларининг йиғиндиси, қавсдаги хадлар массанинг инерция кучини ифодалайди.

Вақт бўйича олинган ҳосилани нуқта билан белгиласак, тенглама қуйидаги содда кўринишни олади:

$$\sum X - m\ddot{x} = 0;\ \sum У - \mathrm{m}\ddot{y} = 0;\ \sum Z - m\ddot{z} = 0. \qquad (14.2)$$

Динамика масалаларини ҳал этишда энергетик усулдан кенг фойдаланилади. Бу усул системанинг тебранма ҳаракатида энергиянинг сақланиш қонунига асосланади.

Мазкур қонунга биноан потенциал $П$ ва кинетик $К$ энергнялар йиғиндиси ўзгармас миқдордир.

$$П + К = const.$$

Системанинг потенциал энергияси қурилиш механикасининг қуйидаги формуласидан топилади:

$$П = \frac{1}{2}\left[\sum \int_0^1 \frac{M^2 dx}{EJ} + \sum \int_0^1 \frac{N^2 dx}{EF} + \sum \int_0^1 \mu \frac{\mathrm{Q}^2 dx}{GF}\right] \qquad (14.4)$$

бу ерда M, N, Q — эгувчи момент, бўйлама ва кўндаланг кучлар;

J, F — инерция моменти ва кўндаланг кесим юзи;

E, G — сиқилиш (чўзилиш) ва силжишдаги эластиклик модули;

μ — кўндаланг кесимнинг шаклига боғлиқ бўлган коэффициент (бу коэффициент уринма кучланишларни кесим бўйлаб нотекис таркалишини ҳисобга олади).

Системанинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$K = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + \sum \int m(x) dx \frac{\upsilon^2}{2} \qquad (14.5)$$

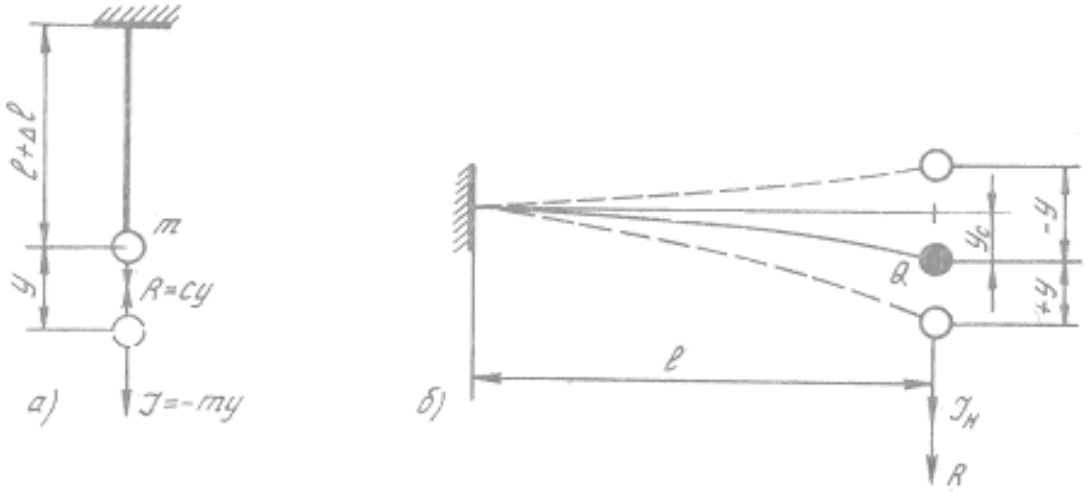
бу ерда v — тезлик; m_i — йиғиқ массалар; $m\ (x)$ — ёйиқ массалар.

Формуланинг биринчи хади йиғиқ массаларга, иккинчи хади эса ёйиқ массаларга тегишлидир.

15- БОБ
ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИРГА ТЕНГ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

15.1. Системанинг эркин тебраниши

Системанинг эркин тебранишини абстракт ва реал ҳоллар учун кўриб ўтамиз. Абстракт ҳолда система тебранишига қаршилик кўрсатувчи кучлар эътиборга олинмайди, реал ҳолда эса тебранма ҳаракатни сунишга олиб келувчи қаршилик кучлари ҳисобга олинади.



l5.1- расм

Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол. Бир массали эластик системаларнинг (15.1- расм, а ва б) вертикал йўналишдаги эркин тебранишини кўриб ўтамиз. Эластик системаларнинг мувозанати бир зумга қўйиб олинган ташқи куч таъсири остида бўзилди деб фараз этайлик. Бунинг оқибатида стерженли системалар эркин тебранма ҳаракатга келади.

Стерженлар учига вазни $Q=mg$ бўлган юк қўйилган. m — юк массаси, g — эркин тушиш тезланиши. Юк Q таъсирида балка y_{st} масофага солқиланади (15.1- расм, б) Вертикал стержень эса $\Delta\ l$ масофага узаяди, натижада улар **тикловчи** (қайтарувчи) куч R ва **инерция** кучи J_n таъсирида бўлади. Мувозанат тенгламасини тузишда пастга йўналган куч, кўчиш, тезлик ва тезланишнинг ишорасини мусбат деб қабул қиламиз.

Тикловчи куч *R* системанинг эластик реакция кучи бўлиб, масса *m* статик мувозанат ҳолатдан четга чиққанда, уни дастлабки вазиятига қайтаришга интилади. Бу куч кўчишга нисбатан тескари йўналганлиги учун унинг ишораси манфий бўлади. Тикловчи куч масса тўпланган нуқтанинг солқилиги *y* га пропорционал бўлади, яъни.

$$R = -c\,y. \tag{15.1}$$

Пропорционаллик коэффициенти с масса тупланган нуқта бирлик кўчиш олганда балкада ҳосил бўладиган реакция кучидир. Бу кучнинг миқдори системанинг эластик ва геометрик ҳарактеристикаларига боғлик бўлиб, кўчиш тенгламасидан фойдаланиб аниқланадн:

$$c\,\delta_{11} = 1,\; c = \frac{1}{\delta_{11}} \tag{15.2}$$

бу ерда δ_{11} — масса тўпланган нуқтанинг бирлик куч таъсирида кўчиши.

Масалан, вертикал стержень учун бирлик куч таъсирида кўчиши $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l}{EF}$;

консоль балка учун $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{3EF}$ бўлади. (15.2) га асосан стержень учун $c = EF : l$ ва балка учун $c = 3EJ : l^3$ бўлади. Баъзан с система бикирлиги деб ҳам юритилади.

Инерция кучи *J* Даламбер қоидасига кўра масса *m* билан тезланишнинг кўпайтмасига тенг. Тезланишни аниқлаш учун эса кўчиш *y* дан вақт *t* бўйича икки марта ҳосила олинади. Инерция кучи тезланишга нисбатан тескари йўналганлиги учун ишораси манфий олинади.

$$J_n = -m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -m\,\ddot{y} \tag{15.3}$$

Бир массали системанинг динамик мувозанат шартини ёзамиз

$$\sum Y = J_n + R = 0.$$

Кўчишлар нолдан эмас, статик мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобланганлиги (15.1- расм, б га қаранг) сабабли Q куч тенгламага киритилмаган. R ва J_n нинг (15.1) ва. (15.3) да келтирилган ифодасини тенгламага қўямиз, тенглама хадларини m га бўлиб, ишорасини ўзгартирамиз:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0. \qquad (15.4)$$

Ҳосил бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама қаршилик ҳисобга олинмаганда бир массали системанинг сунмайдиган эркин тебранишини ифодалайди.

$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

деб олсак, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (15.5)$$

Бу ерда $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ система тебранишининг доиравий такрорлиги (частотаси).

(15.5) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \qquad (15.6)$$

унинг ҳосиласи тебраниш тезлигини ифодалайди:

$$\dot{y} = \upsilon = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t \qquad (15.7)$$

C_1 ва C_2 доимий сонлар бошланғич шартлардан топилади. Тебранишнинг t = 0 лахзасида бошланғич солқилик y_0 ва бошланғич тезлик υ_0 маълум деб фараз этайлик. У ҳолда (15.6) ва (15.7) тенглама асосида

$$C_1 = y_0 \text{ ва } C_2 = \frac{\vartheta_0}{\omega}$$

топилади.

Буларни (15.6) га қўйсак, тебранишнинг исталган лахзаси учун, яъни t нинг иҳтиёрий қиймати учун дифференциал тенгламанинг ечимига эга бўламиз:

$$y = y_0 \cos\omega t + \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t. \qquad (15.8)$$

Қуйидаги белгилашни киритиб

$$y_0 = A\sin\lambda; \quad \frac{\vartheta_0}{\omega} = A\cos\lambda$$

тенгламани янада ихчамлаштирамиз:

$$y = A\sin\lambda\cos\omega t + A\cos\lambda\sin\omega t \qquad (15.9)$$

ёки

$$y = A\sin(\omega t + \lambda) \qquad (15.10)$$

бу ерда A — амплитуда, λ — бошланғич фаза.

(15.10) тенглама эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг даврий ҳусусий (эркин) тебранишини ифодалайди. Унинг графиги 15.3- расм, *а* да тасвирланган.

Давр ва такрорлик орасидаги боғланишни кўриб чиқамиз. Агар вақтнинг t лахзасида солқилик y бўлса,

$$\mathrm{t}_1 = \mathrm{t} + \frac{2\pi}{\omega}$$

ёки

$$\omega t_1 = \omega t + 2\pi$$

дакиқада ҳам (15.10) га биноан ўшанча солқилик ҳосил бўлади. Бундан кўринадики, тебраниш даври, яъни тебранишнинг бир цикли учун кетадиган вақт

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (15.11)$$

бўлади.

Агар T вақт ичида система битта тебранса, $2\pi c$ ичида ω марта тебранади; ω нинг *доиравий такрорлик* деб аталишининг сабаби ҳам шунда. Бир секунддаги тебранишлар сони t *техник такрорлик* деб аталади:

$$t = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{c}\right) \qquad (15.12)$$

Кўриб ўтилган тенгламалар асосида такрорлик ва давр учун қуйидаги формулаларни берамиз: доиравий такрорлик

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{Q}{m y_{ст}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}} = \left(\frac{1}{c}\right) \qquad (15.13)$$

давр

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\delta_{11}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_{ст}}{g}} \qquad (15.14)$$

Бир минутдаги тебранишлар сони қуйидаги формуладан аниқланади:

$$n = \frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}$$

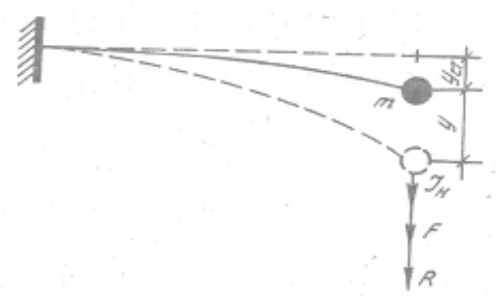
Агар $g = 981 \approx (10\pi)^2$ деб олсак, амалда кенг қўлланиладиган

$$n = \frac{300}{\sqrt{y_{ст}}} \qquad (15.15)$$

формула келиб чиқади. Бунда $y_{ст}$ см да ўлчанади.

Қаршилик кучлари ҳисобга олинган ҳол

Абстракт ҳолда системанинг эркин тебраниши ўзгармас амплитудада бетўхтов давом этишини кўриб ўтдик. Бироқ амалда эркин тебранишлар сўнувчан бўлади, яъни тебраниш амплитудаси тўхтовсиз камая бориб, нолга интилади. Реал конструкцияларнинг тебранишига тикловчи R ва инерция кучлари J_H дан ташқари қаршилик кучлари F ҳам таъсир этади (15.2- расм).



15.2- расм

Қаршилик кучи турли ташқи ва ички сабаблар: ташқи мухит қаршилиги, элементларнинг туташиш жойлари ва таянчлардаги ишкаланишлар, материалнинг ички ноэластик қаршилиги каби сабаблар таъсирида вужудга келади.

Қаршилик кучи тебраниш тезлиги $\dot{y}$ га пропорционал (бу фаразни 1890 йилда Фойгт киритган) ва ҳаракатга қарама-қарши йўналган деб олинади:

$$F = -\beta\,\dot{y}.$$

Бу ерда β -пропорционаллик коэффициенти.

Қаршилик кучи ҳисобга олинганда системанинг динамик мувозанати тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$\Sigma У = J_н + F + R = 0.$$

$J_н$, F ва R нинг қийматларини ўрнига қўйсак,

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = 0 \qquad (15.16)$$

келиб чиқади. Бу дифференциал тенглама қаршилик ҳисобга олинган ҳол учун системанинг эркин тебранишини ифодалайди.

$$2\alpha = \frac{\beta}{m};\quad \omega^2 = \frac{c}{m} \qquad (15.16)^1$$

деб белгилаб,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad (15.17)$$

га эга бўламиз. Бу тенгламага мос ҳарактеристик тенглама

$$z^2 + 2\alpha z + \omega^2 = 0$$

кўринишида бўлиб, унинг илдизлари

$$z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2};\qquad z_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

бўлади. Бу ерда $\alpha \geq \omega$ бўлиши мумкин.

1- ҳол: ω > α. Бу ҳолда илдизлар комплекс сонлар бўлиб:

$$z_1 = -\alpha + i\omega_1; \quad z_2 = -\alpha - i\omega_1; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

бўлади.

(15.17) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y = e^{-\alpha t}(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t) \qquad (15.18)$$

Бу ерда

$$\alpha = \frac{\beta}{2m} = \frac{\beta\,\delta_{11}\,\omega^2}{2}$$

(15.18) да келтирилган қавсдаги ифода даврий функциядир, чунки t га $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ миқдорнинг қўшилиши билан функциянинг қиймати ўзгармайди.

Демак, сўнувчи эркин тебранишларни

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$$

даврли *даврий тебранишлар* деб аташ мумкин экан.

Агар $\alpha \to 0$ бўлса, яъни қаршилик кучи камая бориб нолга айланса, қаршилик ҳисобга олинмаган ҳолдаги давр келиб чиқади:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} < T_1$$

Аввалгига ўхшаб, $A = C\cos\alpha$ ва $B = C\sin\alpha$ деб белгилаб олсак, (15.18) тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$y = e^{-\alpha t}C\sin(\omega_1 t + \lambda), \qquad (15.19)$$

бу ерда λ — бошланғич фаза бўлиб, массанинг ҳаракат бошидаги оғишини ҳисобга олади; $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ — бошланғич амплитуда;

$$tg\lambda = \frac{B}{A}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \omega\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} \qquad (15.20)$$

Қурилиш конструкцияларида α доиравий такрорлик ω дан анча кичик бўлади. Шу сабабли (15.20) ни қуйидагича олиш мумкин:

$$\omega_1 \approx \omega.$$

Сўнувчи эркин тебранишлар графиги 15.3- расм, б да тасвирланган.

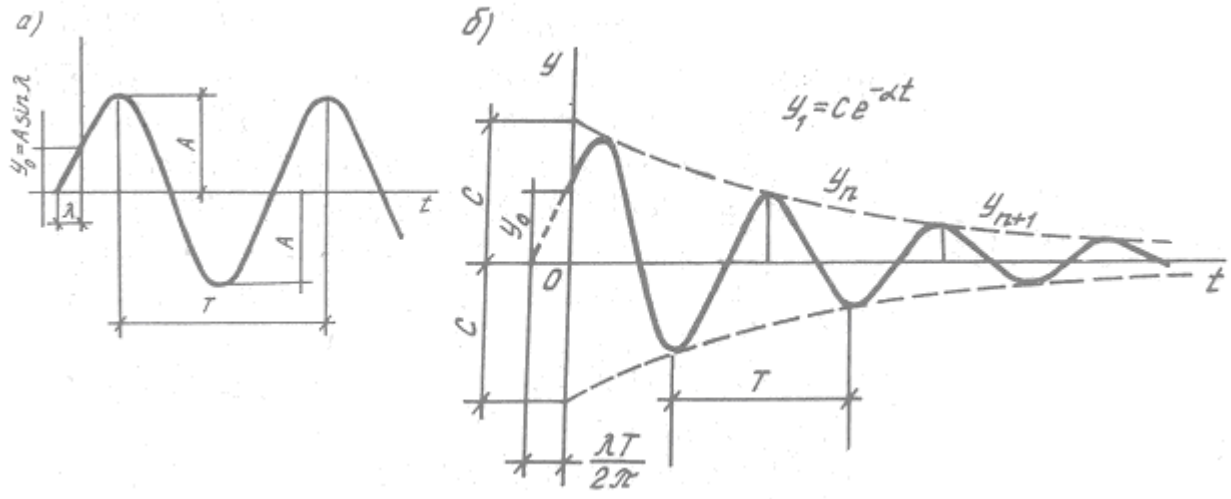
Сўниш жараёни амалда тебранишнинг логарифмик декременти ёки *энергиянинг ютилиш коэффициенти* Ψ орқали хисобга олинади.

2- ҳол. α > ω. Ҳарактеристик тенгламанинг илдизлари хақиқий ва ҳар хил:

$$z_1 = -\alpha + \omega_2 < 0; \qquad z_2 = -\alpha - \omega_2 < 0; \qquad \omega_2 = \sqrt{\alpha - \omega_2}.$$

Бу ҳол учун 15.17 тенгламанинг ечими

$$y = e^{-\alpha t}(A\sin\omega_2 t + B\cos\omega_2 t)$$



15.3- расм

бўлади. Бундай ҳолда ҳаракат тебранма ҳарактерга эга бўлмайди. Оғдирилган масса аста-секин ўзининг дастлабки вазиятига қайтади.

3-ҳол: α = ω.

Ҳарактеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиққий ва тенг:

$$z_1 = -\alpha; \qquad z_2 = -\alpha.$$

(15.17) тенгламанинг интеграли

$$y = e^{-\alpha t}(A + Bt)$$

бўлади. Бу ҳолда ҳам ҳаракат нодаврий ҳарактерга эга.

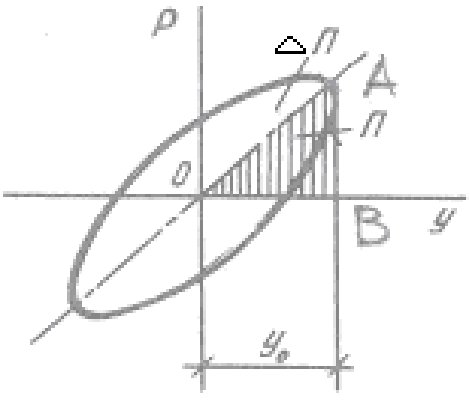
Умуман, тебраниш чекланиши зарур бўлган системаларда $\alpha \geq \omega$ олинади.

Кетма-кет қўшни амплитудалар нисбатининг логарифми тебранишларнинг логарифмик декременти деб аталади ва қуйидагича ифодаланади:

$$\delta = \ell n \frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha T_1 \qquad (15.21)$$

$\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ нисбат сўниш коэффициенти деб аталиб, тебранишнинг сўниш тезлигини ифодалайди.

Тебранишнинг сўнишини ифодалайдиган миқдорлардан яна бири энергиянинг *ютилиш коэффициенти* ёки *сочилиш* (*диссипация*) *коэффициенти* деб аталади ва ψ ҳарфи билан белгиланади. Бу коэффициент гистерезис сиртмоғи номи билан юритиладиган графикдан аниқланади (15.4- расм). Гистерезис сиртмоғи ташки куч P ва деформация y орасидаги муносабатни ифодаловчи график бўлиб, системани юклаш ва юкдан бўшатиш жараёнида ҳосил бўлади. Идеал эластик материалларда юкланиш чизиғи билан юкдан бўшатиш чизиғи устма-уст тўшади, гистерезис сиртмогининг юзаси нолга тенг



15.4- расм

бўлади, яъни юкланиш чогида материалда тўпланган энергия юк олингандан кейин системани дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла-тўкис сарф бўлади. Ҳақиқатда эса юклаш чоғида реал материалларда тўпланган энергия юк олингандан сўнг тўла қайтмасдан, яъни материални дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла сарф бўлмасдан,

энергиянинг бир қисми эластик бўлмаган (қолдиқ) деформацияга сарф бўлади. Натижада юкланиш ва юкни олиш чизиқлари орасида юза ҳосил бўлади.

Қолдиқ деформацияга сарф бўлган энергиянинг миқдори гистерезис сиртмогининг юзи ($\Delta П$) га тенг бўлади.

ОАВ учбурчагининг юзи эса тебраниш чоғидаги, системанинг потенциал энергияси $П$ га тенгдир. Қуйидаги нисбат:

$$\psi = \frac{\Delta П}{П} \tag{15.22}$$

энергиянинг *ютилиш коэффициенти* деб аталади.

Чексиз қисқа вақт dt мобайнида энергиянинг ютилиши $d\,П$, T вақт ичида эса

$$\psi = -\int_{t_1}^{t_1+T} \frac{dП}{П}$$

бўлади. Бундан

$$\psi = \ell nП(t_1) - \ell nП(t_1+T) = \ell n\frac{П_n}{П_{n+1}}$$

келиб чиқади.

$$П_n = \frac{cy_n^2}{2} \text{ ва } П_{n+1} = \frac{cy_{n+1}^2}{2}$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\psi = 2\ln\frac{y_n}{y_{n+1}}$$

$$\psi = 2\delta \tag{15.23}$$

бўлади.

δ va ψ тажриба йўли билан аниқланади.

Мисол. 14.1- расм, а да кўрсатилган балканинг ўртасига ўрнатилган двигателнинг вазни Q = 4 кН. Узунлиги 3 м бўлган пўлат балка ($E=2{,}1\cdot10^8$ kN/m^2) 12- номерли қўштаврдан ($J_x = 350\cdot10^{-8}$ $м^4$) ясалган. Балканинг хусусий оғирлигини ҳисобга олмай, тебраниш такрорлиги ва даври аниқлансин.

Ечиш. Двигатель оғирлигидан балка ўртасида ҳосил бўладиган солқилик:

$$y_{ст} = \frac{Q\ell^3}{48EJ}$$

Тебраниш такрорлиги

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Y_{ct}}} = \sqrt{\frac{9.81 \cdot 48 \cdot 2.1 \cdot 10^{8} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3^{3}}} 56,6 \ c^{-1}$$

Тебраниш даври

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{56,6} = 0,11 \,\mathrm{c}.$$

Бир минутдаги тебранищлар сони

$$n = \frac{60}{T} = 545,5$$

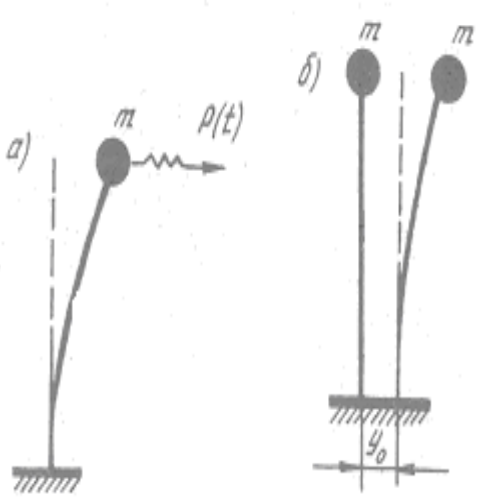
15.2. Мажбурий тебранишлар

(Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол)

Олдинги бобда системанинг эркин тебранишларини кўриб ўтган эдик, унда бутун тебраниш жараёнида системага ташқи (уйғотувчи) кучлар таъсир этмаслиги кайд этилганди (тебраниш бошидаги таъсир бундан мустасно). Мазкур бобда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системаларга вақтнинг ўтиш и билан ўзгариб борувчи кучлар таъсирини кўриб чиқамиз.

Бундай кучлар *уйғотувчи кучлар*, улар таъсиридаги тебранишлар эса *мажбурий тебранишлар* деб аталади.

15.5- расмда мажбурий тебранишларнинг икки хили тасвирланган. Уларнинг бирида (15.5- расм, а) *m* массанинг тебраниши уйғотувчи ташқи куч *P (t)* таъсирида, иккинчисида эса (15.5- расм, б) таянчнинг қўзғалиши натижасида ҳосил бўлади. Мажбурий тебраниш масалаларида тебранишнинг амплитудасини аниқлаш асосий назифа ҳисобланади, чунки тебранаётган иншоотда ҳосил бўладиган кучланишлар ана шу амплитудаларга боғликдир.



15.5- расм

Мажбурий тебранишларнинг умумий тенгламаси ва унинг ечими. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системага

$$P = P(t)$$

уйғотувчи куч таъсир этаяпти деб фараз килайлик (15.6- расм).

Вақтнинг t лахзасида массага таъсир этувчи кучлар шаклда кўрсатилган. Бу ҳол учун ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$-c(y - y_{cm}) + mg + P(t) = m\ddot{y}$$

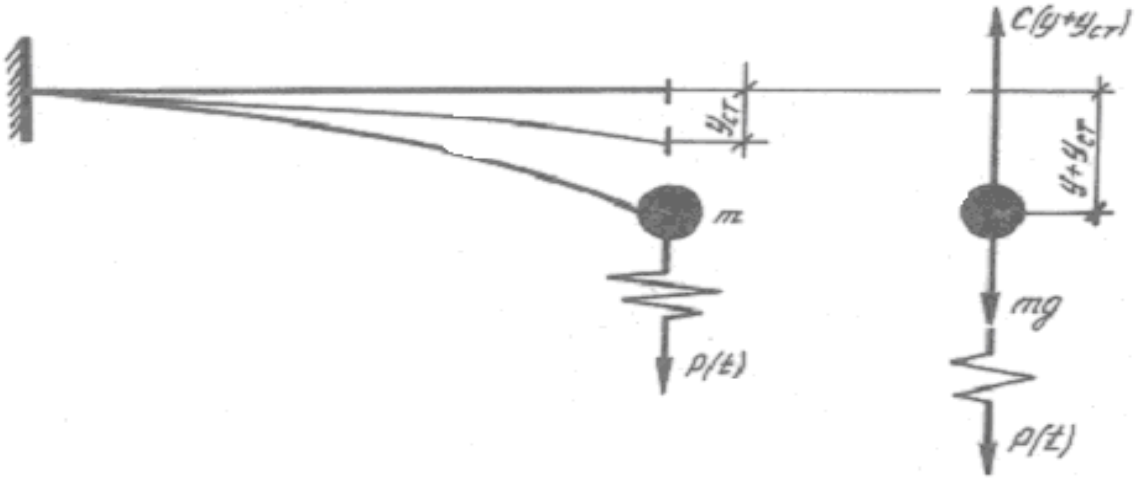
агар $my = c\ y_{ст}$ ва $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$ эканлигини ҳисобга олсак, мажбурий тебранишнинг асосий тенгламаси

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m} \qquad (15.24)$$

кўринишни олади.

Оғирлик mg ва статик реакция cy_{st} эътиборга олинмаган такдирда ҳам, яъни куч ва кўчишлар системанинг статик мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобланганида ҳам ҳудди ана шу (15.24) натижага келган бўлур эдик.

Бир жинсли бўлмаган (15.24) тенгламанинг ечимини икки: 1) эркин тебраниш тенгламасининг (бир жинсли тенглама) интеграли ва 2) берилган тенглама (15.24) нинг бирор ҳусусий интеграли йиғиндиси кўринишида излаш зарур. Ҳар бир конкрет ҳол учун тенгламанинг ўнг томонига мос ҳусусий ечим танлаш ўрнига, ихтиёрий доимийларни вариациялаш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофикдир. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, шу йўл билан уйғотувчи куч исталган қонун бўйича ўзгарганда, тегишли ечимга эга бўламиз.



15.6- расм

Бу усулга кўра (15.24) тенгламанинг ҳусусий ечими

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \qquad (15.25)$$

кўринишда изланади. Бироқ бу ҳолда C_1 ва C_2 нинг қийматлари ўзгарувчи деб қаралиши керак. Шундай қилиб, $y(t)$ функциясини аниқлаш масаласи $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини аниқлаш масаласи билан алмаштирилади. Ихтиёримизда фақат биргина (15.24) тенглама бўлганлиги сабабли $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини яна бир ихтиёрий тенглама билан боғлаймиз. Бунинг учун (15.25) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t + C_2 \omega \sin \omega t + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

ҳамда $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ ни қуйидаги ифода билан боғлаймиз:

$$C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = 0 \qquad (15.26)$$

У ҳолда юқоридаги тезликни аниқлаш тенгламаси бирмунча соддалашади:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t + C_2 \omega \sin \omega t.$$

Тезланишни топамиз:

$$\ddot{y} = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t + C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t \qquad (15.27)$$

(15.25) ва (15.27) ифодаларни (15.24) тенгламага қўйиб,

$$C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = \frac{1}{m\omega} P(t) \qquad (15.28)$$

ни хосил қиламиз.

(15.26) ва (15.28) тенгламалардан қуйидаги ҳосилаларни аниқлаймиз:

$$C_1 = \frac{1}{m\omega} P(t)\cos\omega t; \qquad C_2 = -\frac{1}{m\omega} P(t)\sin\omega t.$$

Уни интеграллаб:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\cos\omega\tau d\tau + B_1 \\ C_2 &= -\frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega\tau d\tau + B_2 \end{aligned}\right\} \qquad (15.29)$$

ни топамиз. Бу ерда B_1 ва B_2 бошланғич шартларга боғлиқ бўлган доимий сонлардир.

Интегралаш жараёнида ўзгариб борувчи вақтни о дан t гача, интегралнинг ўзгармас деб қаралувчи, юқори чегараси t дан фарқ қилиш учун τ деб белгилаш қабул қилинган.

(15.29) ифодани (15.25) тенгламага қўйиб, берилган (15.24) тенгламанинг умумий интегралига эга бўламиз:

$$y = \frac{1}{m\omega}\left[\sin\omega\tau\int_0^t P(\tau)\cos\omega\tau d\tau + \cos\omega t\int_0^t P(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right] +$$
$$+ B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t.$$

$\sin\omega t$ ва $\cos\omega t$ ни интеграл остига киритиб ихчамлаштирсак масаланинг умумий ечими келиб чиқади:

$$y = B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.30)$$

Бундан ҳосила олиб, тезлик тенгламасига эга бўламиз:

$$\dot{y} = B_1\omega\cos\omega t - B_2\omega\sin\omega t + \frac{1}{m}\int_0^t P(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.31)$$

B_1 ва B_2 доимийларнинг қиймати ҳаракат бошидаги шартларга боғлиқ. Агар ҳаракат бошида, яъни

$t=0$ бўлганда $y = y_0$, $\dot{y} = \upsilon_0$ бўлса, (15.30) ва (15.31) тенгламалардан

$$B_1 = \frac{\upsilon_0}{\omega} \quad \text{ва} \quad B_2 = y_0$$

келиб чиқади.

У ҳолда юқоридаги ечим қуйидаги кўринишни олади:

$$y = y_0 \cos\omega t - \frac{\upsilon_0}{\omega}\omega \sin\omega t + \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

Бу ердаги дастлабки икки хад бошланғич кўчиш y_0 ва бошланғич тезлик υ_0 таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди.

Бошланғич шартлар y_0 ва υ_0 ноль бўлса, қуйидаги асосий формула келиб чиқади.

$$y = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.32)$$

Зарбий куч таъсиридаги мажбурий тебранишлар. Тинч ҳолатдагн системага вақтнинг τ лаҳзасида зарбий куч берилди дейлик. Бу лакзада системада кўчиш бўлмайди:

$$y(\tau) = 0$$

бироқ системада, ҳаракат миқдори қонунига биноан, зарбий куч таъсирида

$$\upsilon(\tau) = \frac{S}{m}$$

тезлик ҳосил бўлади. Вужудга келган тебранишни эркин тебраниш деб қараш мумкин. У ҳолда кўчиш ва тезлик учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$y = A\sin(\omega t + \lambda);$$

$$\upsilon = \dot{y} = A\omega\cos(\omega t + \lambda).$$

Ифодаларнинг чап томонига бошланғич шартларни, ўнг томонидаги t ҳарфи ўрнига τ ни қўйсак,

$$0 = A\sin(\omega\,\tau + \lambda)$$

$$\frac{S}{m} = A\omega\cos(\omega\,\tau + \lambda)$$

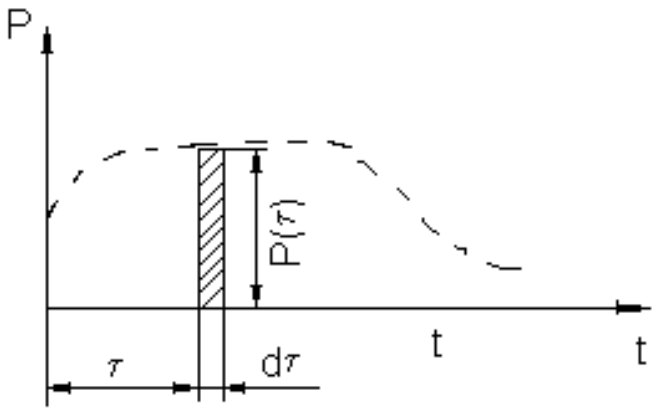
келиб чиқади. Бу тенгламалардан

$$A = \frac{S}{m\omega} \quad ва \quad \lambda = -\omega\tau$$

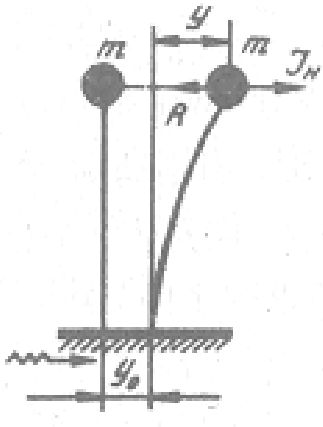
топилади; Буларни ўз ўрнига қўйсак, зарбий куч таъсир этган ҳол учун ҳаракат қонуни келиб чиқади:

$$y = \frac{S}{m\omega}\cos\omega(t+\tau) \qquad (15.33)$$

Бу ҳолни уйғотувчи куч $P(\tau)$ таъснр этган ҳол билан боғлаймиз. Бунинг учун уйғотувчи



15.7- расм



15.8- расм

кучни чексиз кичик зарблар $P(\tau)d\tau$ нинг кетма-кетлиги деб фараз этамиз.(15.7-расм). Битта зарбий куч таъсирида вақтнинг $t \geq \tau$ лахзасида (15.33) формулага асосан

$$\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\omega(t-\tau)$$

кўчиш ҳосил бўлади.

Вақтнинг $0 \div t$ оралиғида зарбий кучларнинг кетма-кет таъсири остида ҳосил бўладиган кўчишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаш зарур. Бу эса (15.32) формулага олиб келади.

Замин тебранишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишлар. Мажбурий тебранишлар системанинг асоси (таянчи) қўзғалиши натижасида ҳам вужудга келиши мумкин (15.8- расм). Ер (бино замини) қимирлаганда бино ва иншоотларнинг тебраниши бунга мисол бўла олади.

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг таянчи кўзгалганида унга инерция кучи $J_н = -m\ddot{z}$ ва тикловчи куч $R = - cy$ таъсир этади.

Системанинг динамик мувозанат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{z} + cy = 0 \qquad (15.34)$$

Система массасининг тўлиқ кўчиши таянчнинг кўчиши $y_0(t)$ ва массанинг таянчга нисбатан кўчиши $y(t)$ дан ташкил топади:

$$z = y_0 + y \qquad (15.35)$$

z нинг қийматини (15.34) тенгламага қўйиб, унинг барча ҳадларини m га бўлсак,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \qquad (15.36)$$

келиб чиқади. Бу тенглама замин қўзғалишидан вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди. Бу тенглама иҳтиёрий уйғотувчи куч $P(t)$ таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишлар тенгламаси (15.24) га ўхшашдир.

(15.36) тенгламанинг ечими йиғинди кўринишида $(y = y_1 + y_2)$ ифодаланиши мумкин. Бунда y_1 бир жинсли тенгламанинг ечимидан топилади, бу эса эркин тебранишлар учун чиқарилган қуйидаги ечимдан фойдаланиш имконини беради (15.10):

$$y_1 = A\sin(\omega t + \lambda) \qquad (15.37)$$

(15.36) нинг ҳусусий интеграли қуйидаги кўринишга эга:

$$y_2 = -\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_0(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.38)$$

Шундай қилиб, (15.36) тенгламанинг ечими

$$y = A\sin(\omega t + \lambda) - \frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_0(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.39)$$

бўлади.

Гармоник куч таъсири. Резонанс. Саноат биноларида баъзан мувозанатлашмаган айланувчи қисми бўлган машиналар ўрнатилади (15.9-расм). Мувозанатлашмаган массанинг ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган марказдан қочма куч P таъсирида балка тебранади. Бу кучнинг вертикал ташкил этувчиси

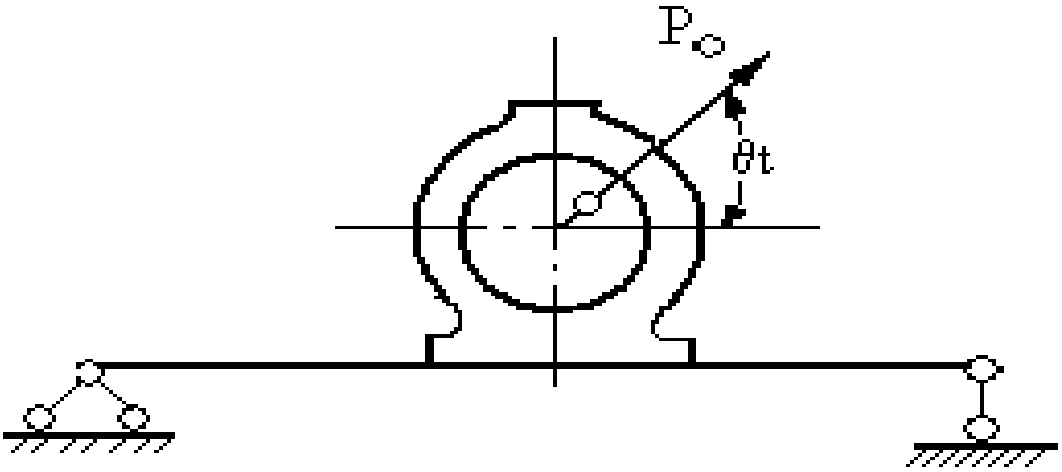
$$P = P_0 \sin \theta\ t \tag{15.40}$$

бўлади. Бу ерда θ ротор айланишининг бурчак тезлиги.

Формуладан кўриниб турибдики, уйғотувчи кучнинг балкага таъсири гармоник қонун асосида ўзгаради.

Бундай куч таъсирида вужудга келадиган тебраниш жараёнини математик кўринишда ифодалаш учун (15.32) формуладан фойдаланамиз:

$$y = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin \theta t \sin \omega(t-\tau) d\tau, \tag{15.41}$$



15.9-расм

$\omega \neq 0$ ҳол учун иитегралниig ечими

$$y = \frac{P_o}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta\ t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega\ t \right),$$

бўлади.

Бу формулага $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ва $y_{ст} = \frac{P_o}{c}$ белгилаш киритсак,

$$y = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right), \tag{15.42}$$

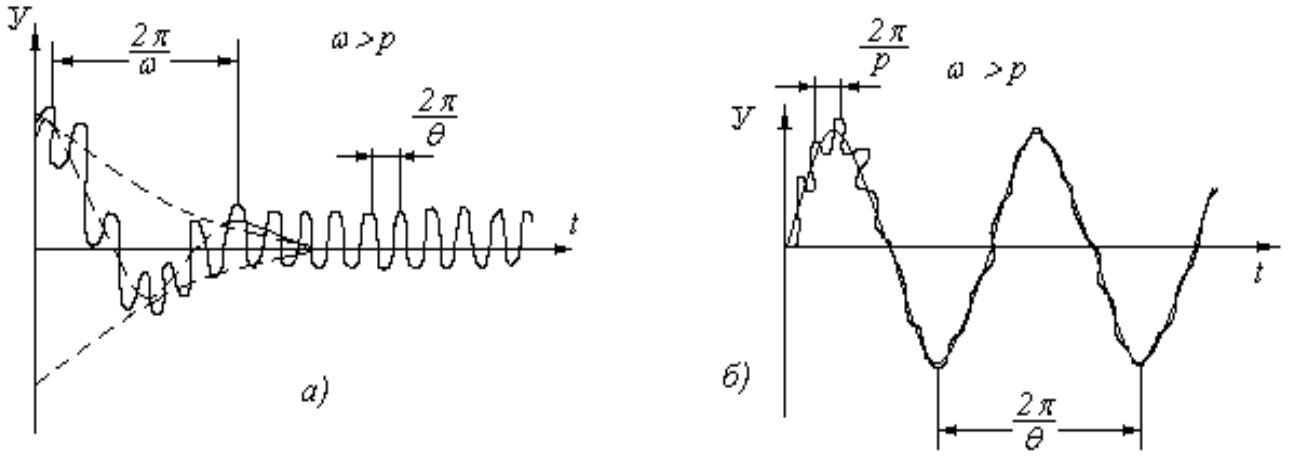
келиб чиқади. Бу ерда y_{st} — статик куч P_0 таъсирида ҳосил бўлган солқилик.

(15.42) формуланинг таҳлили, бошланғич шартлар ноль бўлганда, системада икки қисмдан иборат мураккаб тебраниш вужудга келишини

кўрсатади: қавс ичидаги биринчи хад уйғотувчи куч такрорлиги бўйича бўладиган тебранишни; иккинчи хад эса ҳусусий тебраниш такрорлиги ω билан бўладиган тебранишни ифодалайди. Шунга кўра биринчиси — *мажбурий*, иккинчиси — *эркин тебраниш* деб аталади.

Реал конструкцияларда ноэластик қаршилик кучлари таъсирида эркин тебранишлар (иккинчи ҳад) вақт ўтиши билан сўниб боради: мажбурий тебранишлар эса аввалги амплитуда билан давом этаверади.

Вақт ўтиши билан эркин тебранишларнинг сўниб бориши (б) ҳамда икки хил тебранишнинг қўшилиш жараёни (а) 15.10- расмда тасвирланган. Шаклдан кўриниб турибдики, $\theta>\omega$ ёки $\theta<\omega$ бўлишидан қатъи назар, эркин тебранишлар жараённинг бошидаёқ сўниб қолади. Шунинг учун ечимнинг доимий — сўнмайдиган қисмини таҳлил қилиш билан чегараланамиз:



15.10- расм

$$y = \frac{y_{cm}}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t \qquad (15.43)$$

Бинобарин, мажбурий тебранишлар уйготувчи куч частотаси билан тебранади ва бу куч гўё система ҳаракатини «ўз амрига бўйсундиргандек» кўринади. Мажбурий тебраниш амплитудаси (динамик солқилик)

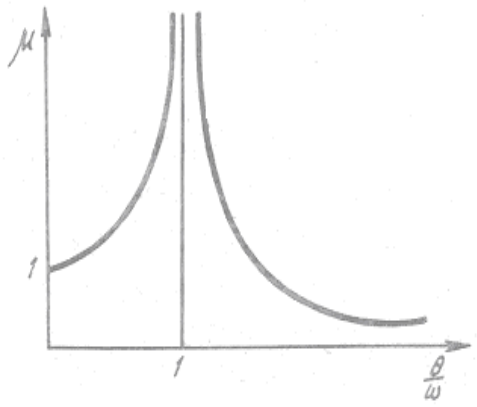
$$A = \frac{y_{st}}{\left|1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right|} \qquad (15.43')$$

уйготувчи куч P_0 нинг статик таъсирида ҳосил бўлган солқилик y_{st} дан фарқ қилади. Уйғотувчи куч таъсирининг динамик эффекти *динамик коэффициент* деб аталувчи қуйидаги нисбат билан аниқланади:

$$\mu = \frac{A}{y_{cm}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|} \qquad (15.44)$$

Динамик коэффициент тақрорликлар нисбати $\frac{\theta}{\omega}$ га боғлиқ миқдордир. 15.11- расмда μ билан $\frac{\theta}{\omega}$ орасидаги боғланиш график кўринишда тасвирланган.

Уйғотувчи куч тақрорлиги θ ҳусусий тебраниш тақрорлиги ω дан анча кичик бўлса, $\mu \to 1$, динамик солқилик A статик солқилик y_{st} га яқинлашади. $\theta<\omega$ чегарада θ нинг ўсиши билан динамик коэффициент μ нинг қиймати тез ўсиб боради; бу ҳол тебраниш амплитудаси A нинг ўсишини билдиради. Агар $\theta>\omega$ бўлса, (15.44) формулага биноан $A< 0$ бўлади; бу эса тебраниш амплитудаси уйғотувчи кучга қарама-қарши йўналганлигини билдиради.



15.11- расм

Уйғотувчи куч тақрорлиги билан ҳусусий тебраниш тақрорлиги тенг бўлган ҳол ($\theta=\omega$) резонанс деб аталади. Бунда $\frac{\theta}{\omega}$ =1 бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси чексизликка интилади. Қаршилик (диссипатив) кўрсатувчи кучлар ҳисобга олинмаганлиги туфайли шундай хулосага келинди.

Бироқ реал конструкцияларда қаршилик кўрсатувчи кучларнинг мавжудлиги амплитуданинг чекли бўлишига олиб келади; амплитуда чекли, айни бир вақтда катта қийматга эга бўлади. Шунинг учун резонанс ҳолати иншоот учун хавфли саналади.

Осма кўприк сингари баъзи реал иншоотларда энергиянинг сочилиши (қаршилик кўрсатувчи кучлар) жуда кичик бўлади. Бундай ҳолларда унча катта бўлмаган уйготувчи куч иншоотда хавфли резонанс тебранишларини уйғотиши

мумкин. Масалан, шахдам қадам ташлаб келаётган пиёда аскарлар кўприкка етганда қадамларини ўзгартириб, тартибсиз юра бошлайдилар. Чунки қадам зарби кўприкнинг ҳусусий-тебраниш такрорлиги билан бир хил бўлиб қолса, кўприк резонанс тебранишларига учраб, бузилиши мумкин. Тарихда бундай ҳоллар учраб туради. 1831 йили Манчестрда (Англия) Ирвель дарёсига қурилган осма кўприк 60 кишининг қадами зарбидан бўзилиб тушган.

1868 йилда Чатамада Британия денгиз пиёда аскарлари ўтаётганда кўприк босиб қолган. 1850 йилда Анжердаги осма кўприкда катта фожиа рўй берган; 500 кишидан иборат француз пиёда аскарлари батальони ўтаётганда кўприк бузилиб, 226 киши ҳалок бўлган.

Резонанс тебранишларини сўндиришнинг икки хил йўли бор: бири иншоотнинг ҳусусий тебраниш такрорлигини уйғотувчи куч такрорлигидан фарқли қилиб танлаш, иккинчиси, иншоотда демпфер (сўндиргич) ларни кўпайтириш.

15.3. Мажбурий тебранишларга қаршилик кучларининг таъсири

Қаршилик кучларининг эркин тебранишларга сезиларли даражада таъсир этишини олдинги сахифаларда кўриб ўтган эдик. Мазкур сарлавхада қаршилик кучлари мажбурий тебранишларга қай даражада таъсир этишини кўриб ўтамиз.

Аввал ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий ечими билан танишиб чиқамиз, сўнгра системага кўрсатиладиган гармоник куч таъсирини батафсил кўриб ўтамиз.

Қаршилик кучлари эътиборга олинса, мажбурий тебранишларнинг асосий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \qquad (15.45)$$

Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишлар тенгламаси (15.17) дан баробарнинг ўнг томони билан, қаршилик ҳисобга олинмаган мажбурий тебранишлар тенгламаси (15.24) дан чап томондаги иккинчи хад билан фарқ

қилади. Система тебранишига қаршилик кучларининг таъсири ана шу иккинчи хад орқали ҳисобга олинади.

Олдинги параграфдаги сингари уйғотувчи куч *P(t)* ни чексиз кичик зарблар *P(τ)dτ* кетма-кетлиги деб қабул қилсак, у ҳолда юқоридаги,дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишни олади:

$$y(t)=\frac{1}{m(\omega^2-\alpha^2)}\int_0^t P(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\sqrt{\omega^2-\alpha^2}(t-\tau)\,d\tau \qquad (15.46)$$

Бу формулада *P(t)* ҳар қандай қонун бўйича ўзгарганда ўз кучини сақлайди; $\alpha=0$ бўлганда (15.32) формула келиб чиқади.

(15.46) формулани уйғотувчи ташқи кучнинг гармоник қонун бўйича:

$$P(t)=P_0\sin\theta t$$

ўзгарувчи ҳолга татбиқ этамиз. Бундай ҳол учун дифференциал тенглама.

$$\ddot{y}+2\ \alpha\ \dot{y}+\omega_2 y=\frac{P_0\sin\theta\, t}{m}$$

кўринишга эга бўлади. Маълумки, бундай тенгламанинг интеграли икки қисмдан иборат бўлади: 1) бир жинсли тенгламанинг интеграли (яъни, тенгликнинг ўнг томони ноль бўлган ҳол); 2) умумий тенгламанинг (15.47) ҳусусий интеграли.

Бир жинсли тенгламанинг ечимини (15.18) илгари кўриб ўтган эдик. Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишларни ифодалашини ва эркин тебранишлар жараёнининг бошидаёк сўниб қолишини биламиз. Шунга кўра, мажбурий тебранишларнинг стационар қисмини ифода этувчи (15.47) тенгламанинг ҳусусий ечими билан чекланамиз:

$$y=a\sin\theta t+b\cos\theta t \qquad (15.48)$$

Шуни назарда тутиш керакки, *a* ва *b* нинг қийматлари тегишлича танланган тақдирдагина (15.48) ифода (15.47) тенгламанинг ечими бўла олади. Бунинг учун (15.48) дан икки марта хосила олиб:

$$\dot{y}=a\theta\cos\theta t-b\theta\sin\theta t$$

$$\ddot{y}=-a\theta^2\sin\theta t-b\theta^2\cos\theta t$$

(15.47) га қўямиз:

$$-a\theta^2\sin\theta t - b\theta^2\cos\theta t + 2a\theta\alpha\cos\theta t - 2b\theta\alpha\sin\theta t + a\omega^2\sin\theta t +$$

$$+ b\omega^2\cos\theta t = \frac{P_0}{m}\sin\theta t$$

ёки $\left(-a\theta^2 - 2b\theta\alpha + \theta\omega^2 - \frac{P_0}{m}\right)\sin\theta t + \left(-b\theta^2 + 2a\theta\alpha + b\omega^2\right)\cos\theta t = 0$.

Қавс ичидаги хадлар алоҳида олинганда нолга тенг бўлсагина ҳосил бўлган тенглама *t* нинг ҳар қандай қийматида қаноатлантирилади. Бу эса ўз навбатида қуйидаги икки тенгламага олиб келади:

$$a\left(\omega^2 - \theta^2\right) - 2b\theta\alpha = \frac{P_0}{m};$$

$$b\left(\omega^2 - \theta^2\right) + 2a\omega\alpha = 0;$$

бу ердан

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{P_0\left(\omega^2 - \theta^2\right)}{m\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + \theta^2\alpha^2}; \\ b &= \frac{2P_0\theta\alpha}{m\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\theta^2\alpha^2} \end{aligned}\right\} \qquad (15.49)$$

a ва *b* доимий сонларнинг мана шу қийматларида (15.48) ифода (15.47) нинг ечими ҳисобланади.

a ва *b* ни бошқа ўзгармовчилар A ва γ билан алмаштирсак, (15.48) ечим янада ихчамлашади:

$$\left.\begin{aligned} a &= A\cos\gamma \\ b &= -A\sin\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (15.50)$$

Буни (15.48) га қўямиз:

$$y = A\sin\theta t\cos\gamma - A\sin\gamma\cos\theta t = A\sin(\theta t - \gamma). \qquad (15.51)$$

(15.49) ва (15.50) ифодалардан фойдаланиб A ва γ нинг қийматини аниқлаймиз;

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{y_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}}; \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{2\theta\alpha}{\omega^2 - \theta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (15.52)$$

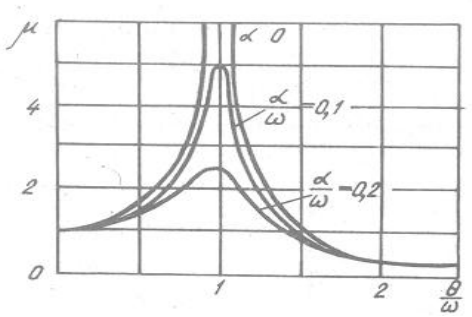
Бу ерда γ — бошланғич фаза.

Биринчи формулада $\frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{C} = y_{st}$ эканлиги ҳисобга олинган.

Мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг статик солқилик y_{st} га нисбати, аввал (15.44) кўриб ўтганимиздек, динамик коэффициент деб аталади:

$$\mu = \frac{A}{y_{cm}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}} \qquad (15.53)$$

Динамик коэффициент μ нинг бу қиймати билан аввалги (15.44) қийматининг фарқи шундаки, бу қийматда система тебранишига қаршилик қилувчи кучларнинг таъсири ҳисобга олинган. Уйғотувчи куч такрорлиги θ га ҳар қандай қиймат берганда ҳам μ ҳеч қачон чексиз бўлмайди. μ нинг қиймати энди θ/ω дан ташқари α/ω га ҳам боғлиқ. Буларнинг ўзаро муносабати 15.12-расмда график кўринишда тасвирланган.



15.12- расм

$\alpha=0$ бўлганда 15.11- расмдаги ҳол келиб чиқади, яъни $\mu=\infty$ бўлади. Аммо $\alpha \neq 0$ бўлганда μ нинг энг катта қиймати ҳам чекли бўлади. Қаршилик кучлари резонанс зонасида ўзининг таъсирини кучлироқ намоён қилади.

$\omega=\theta$ деб олсак, 15.53 формуладан динамик коэффициентнинг юқори қиймати келиб чиқади:

$$\mu_{\max} = \frac{\omega}{2\alpha} \qquad (15.54)$$

Бундан маълум бўлишича, динамик коэффициент сўниш коэффициенти α га тескари пропорционал экан.

Мавзуимиз охирида замин қўзғалишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишларга қисқача тўхталиб ўтамиз. Маълумки, қаршилик кучлари эътиборга олинмаган ҳолда тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси (15.36) кўринишда ва унинг ечими (15.39) кўринишда берилган эди. Юқорида

кўриб ўтилган тенгламалар (15.45) ва (15.39) га қаршилик кучларини ифода этувчи ҳадлар ($2\alpha\dot{y}$) ҳамда $e^{-\alpha t}$ ни киритсак, тебраниш тенгламаси

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \qquad (15.55)$$

кўринишни, унинг ечими эса

$$y = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \gamma) - \frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_0(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.56)$$

кўринишни олади.

Мисол. Узунлиги *l*=3 м бўлган балканинг ўртасига ўрнатилган мувозанатлашмаган двигателнинг вазни *Q*=4 кН, айланишлар сони n= 450 айл/мин. Двигателдан ҳосил бўладиган марказдан қочма кучнинг вертикал ташкил этувчиси $Psin\theta\, t$ бўлиб, P=1 кН. Балка 12-номерли пўлат қўштаврдан ясалган. Двигатель тўхтовсиз ишлаганда ҳосил бўладиган мажбурий тебранишлар амплитудаси ва кучланишлар аниқлансин (15.9- расмга қаранг).

Ечиш. Шу балканинг ҳусусий тебранишлари такрорлиги аввалги мисолда топилган эди:

$$\omega = 56.6\ \ c^{-1}$$

Мажбурий куч такрорлиги

$$\theta = \frac{\pi\ n}{30} = \frac{3.14\cdot 450}{30} = 47{,}1$$

Динамик коэффициент

$$\mu = \frac{1}{1-\dfrac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{47{,}1}{56{,}6}\right)^2} = 3{,}25.$$

Демак, динамик кучдан ҳосил бўладиган кучланиш ва деформация статик кучланиш ва деформациядан 3,25 марта катта бўлар экан.

Балка ўртасининг максимал солқилиги

$$y_{\max} = y_{ст\,(Q)} + \mu\ y_{ст\,(P)} = \frac{Ql^3}{48EJ} + \mu\frac{Pl^3}{48EJ} = 0{,}306 + 3{,}25\cdot 0{,}077 = 0{,}556\ \ см$$

Балка ўртасидаги максимал кучланиш

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ст\,(Q)} + \mu\sigma_{ст\,(P)} = \frac{Q\ell}{4W} + \mu\frac{P\ell}{4W} = 93049{,}1\ Н/м^2$$

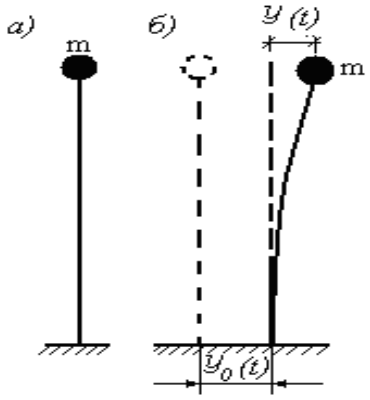
СГС бирликлар системасида $\sigma_{max} = 930{,}5\ кГ/см^2$.

15.4. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг сейсмик тебранишлари дифференциал тенгламаси ва унинг ечими

Мазкур бобнинг аввалги параграфларида эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системаларнинг хусусий ва мажбурий тебранишлари умумий ҳолда кўриб ўтилди. Энди шу моделни сейсмик кучларни аниқлаш жараёнига бевосита татбиқ этиш амали билан танишамиз. Сейсмик куч деганда зилзила чоғида бино ва иншоотларга таъсир этадиган кучлар тушунилади.

Зилзилабардошлик назариясининг асосий тушунчалари ва ҳисоблаш усуллари ҳақида эркинлик даражаси бирга тенг бўлган содда системанинг тебранишлари орқали умумий тасаввурга эга бўлиш мумкин. Зилзилабардошлик назариясида бундай системанинг ҳисоблаш схемаси бир учи замин (асос)га маҳкамланган, иккинчи учига тўпланма масса ўрнатилган вазнсиз стержень кўринишида қабул қилинади(15.13-расм, *а*).

Масалани чизиқли ҳолатда кўриб ўтамиз, яъни вазнсиз стерженнинг деформацияси эластиклик чегарасида содир бўлади, деб қараймиз. Бундай ҳолатда ишловчи содда тебранувчи система *чизиқли осцилятор* деб аталади.



15.13-расм. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг ҳисоблаш схемаси.

Зилзила чоғида системанинг тебраниши замин тебраниши туфайли вужудга келади. Ер қимирлаганда стер-женнинг асоси $y_0(t)$ масофага силжий-ди, деб фараз қиламиз. Бунда y_0 силжиш стерженнинг ер қимирлашдан аввалги тинчлик ҳолатидан бошлаб ўлчанади. Тебраниш чоғидаги системанинг дефор-мацияси $y(t)$ эса стерженнинг деформа-циядан олдинги ҳолатидан ўлчанади.

Массанинг тўлиқ кўчиши системанинг қўзғалмас ҳолатидан ҳисобланиб, y_0 *(t)*+ y *(t)* ни ташқил этади (15.13-расм, *б*).

Система тебранаётганида *m* масса $R = -cy$ тикловчи (эластик) куч таъсир этишини юқорида кўриб ўтган эдик. Агар қаршилик кучларини ҳисобга олмасак, Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан *m* юк ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$\mathrm{m}(\ddot{y}_0 + \ddot{y}) = -\mathrm{c}y \qquad (15.57)$$

ёки $$m\ddot{y} + cy = -m\ddot{y}_0 \qquad (15.58)$$

Тенгламадаги y_0 *(t)* ва y *(t)* функциялари устига қўйилган нуқталар дифференциаллаш вақт бўйича эканлигини билдиради.

(15.58) тенглама энергиянинг сўниши ҳисобга олинмаган ҳол учун бир массали система сейсмик тебранишларининг дифференциал тенгламасини ифода этади. Бошқача айтганда, $-m\ddot{y}_0$ кучи таъсир этганда чизиқли осциляторнинг мажбурий тебранишлари дифференциал тенгламасини англатади. Бу ҳад системанинг замин билан биргаликдаги илгарилама ҳаракати инерция кучидир. Система деформацияси ҳисобга олингандаги *m* массанинг тўлиқ инерция кучи қуйидагига тенг:

$$S = -m(\ddot{y}_0 + \ddot{y}). \qquad (15.59)$$

Ҳаракатланаётган *m* масса томонидан вазнсиз стерженга таъсир этувчи бу куч – сейсмик куч деб аталади.

(15.58) тенгламани бошқача кўринишда ёзамиз:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0. \qquad (15.60)$$

Бу ерда ω – система хусусий тебранишларининг (сўниш ҳисобга олинмаган ҳол учун) доиравий частотаси:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{m}\delta}}. \qquad (15.61)$$

Техник частота (герцларда) ва тебранишлар даври

$$\mathrm{f} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \textit{ва} \quad \mathrm{T} = \frac{1}{\mathrm{f}} = 2\pi\sqrt{\mathrm{m}\delta} \text{ га тенг.} \qquad (15.62)$$

Механик тебранишларда энергиянинг сочилишини (тебранишларнинг сўнишини) ҳисобга олиш масаласи анча мураккаб муаммолардан саналади. Бу масала хусусида жаҳоннинг кўп олимлари тадқиқот олиб борганлар. Иншшотлар зилзилабардошлиги бўйича хорижий мамалакатларда бажариладиган ишларда энергияқинг сочилиши одатда Фохтнинг қовушоқ қаршилик (вязкое сопротивление) гипотезаси асосида олинади. Собиқ Итифоқ республикаларида энергияни сочилиши Е.С.Сорокиннинг ноэластик қаршилик назарияси бўйича ҳисобланади. Қуйида ана шу иккита гипотезани кўриб ўтамиз.

Фохт гипотезасига кўра қаршилик кучларини уйғотадиган ва энергияни сочилишга олиб келадиган материалнинг ички ишқаланиш кучлари деформация тезлигига пропорционал деб олинади. Агар шундай деб қарайдиган бўлсак, тикловчи куч R билан кўчиш y орасидаги боғланиш қуйидаги кўринишда ифодаланади.

$$\mathrm{R}(y) = -(\mathrm{c}y + \mathrm{k}_1 \dot{y}), \qquad (15.63)$$

Бу ерда κ_1 – қаршилик коэффициенти.

(15.63) ни ҳисобга олсак, (15.58) дифференциал тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\mathrm{m}\ddot{y} + k_1\dot{y} + cy = -m\ddot{y}_0$$

ёки

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \qquad (15.64)$$

бу ерда $\varepsilon = \kappa/2m$ – сўниш коэффициенти.

Бу тенглама (15.60) тенгламадан тебраниш энергиясини сочилишини ҳисобга олувчи ҳад $2\varepsilon\dot{y}$ билан фарқланади.

Фохт гипотезаси бир қанча камчиликларга эга бўлиб, баъзи тажриба натижаларига мос келмайди; унинг асосий афзаллиги – қўлланишдаги соддалиги ва қулайлиги бўлиб, олинадиган дифференциал тенгламалар чизиқли кўринишга эга бўлади. Ноэластик қаршилик назарияси тўлиқ эластик бўлмаган жисмнинг тебранишларига асосланади, циклик (гармоник) таъсирлар натижасида кўчиш y билан куч P орасидаги боғланиш гистерезис характерига

эга деб қаралади.

Гистерезис сиртмоғи ҳақида аввалги параграфда қисқача маълумот берилган.

Е.С.Сорокиннинг ноэластик назариясига кўра тебранишлар чоғида энергиянинг сочилишини ҳисобга олиш учун эластик кучларни *(1+γj)* га кўпайтириш лозим. Бунда (15.58) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$m\ddot{y} + (1+\gamma j)cy = -m\ddot{y}_0 \qquad (15.65)$$

ёки

$$\ddot{y} + (1+\gamma j)\,\omega^2 y = -\ddot{y}_0 \qquad (15.66)$$

бу ерда γ – ноэластик қаршилик коэффициенти, $\gamma = \frac{\psi}{2\pi}$;

j – мавҳум бирлик.

Ноэластик қаршилик назарияси ҳам баъзи камчиликларга эга; тебраниш тенгламаларини ечишда маълум қийинчиликлар туғдиради. Бироқ хилма-хил системалар учун бир хил шаклда қулай тенгламалар тузиш имкониятини беради ва ҳисоб натижалари синов натижаларига кўпроқ яқин келади.

Сейсмик тебранишлар масаласини ҳал этиш осциллятор кўчишларини топишдан, яъни тебранишлар дифференциал тенгламаси ва бошланғич шартларни қаноатлантирадиган $y(t)$ функциясини аниқлашдан иборат. $y(t)$ функцияси, яъни m массанинг кўчиши орқали системанинг умумий ҳолатига, ундаги куч ва деформация омилларига тўлиқ баҳо бериш мумкин. Хусусан, агар $y(t)$ функцияси маълум бўлса (15.59) формуладан инерция кучини ва y орқали вазнсиз стерженда вужудга келадиган зўриқишларни тўла аниқлаш мумкин.

Энергиянинг сочилишини Фохт гипотезаси бўйича ҳисобга олганда сейсмик тебранишлар дифференциал тенгламасининг ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y(t) = e^{-\varepsilon t}(C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t) - \frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_0(\tau)e^{-\varepsilon(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad (15.67)$$

Бу ерда C_1 ва C_2 интеграл доимийлари бўлиб, бошланғич шартлардан топилади.

Энергиянинг сочилиши Сорокин назарияси бўйича олинса, дифференциал

тенглама ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}\omega t}(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) - \frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{y}_0(\tau) e^{-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau \qquad (15.68)$$

(15.67) билан (15.68) таққосланса улар орасидаги фарқ натурал сон *e* нинг даража кўрсаткичида эканлигини кўрамиз. Тебранишлар энергия-сининг сочилиши, яъни тебранишларнинг сўниши айнан ана шу даража кўрсаткичлари орқали ҳисобга олинади. (15.67) ифода (15.64) тенгламанинг ечими бўлиб, унинг биринчи ҳади, иккинчи ҳад нолга тенг бўлганда, бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими ҳисобланади ва системанинг эркин тебранишларини ифодалайди. (15.67) тенгламанинг иккинчи ҳади (15.64) тенгламанинг хусусий ечими бўлиб, $-m\ddot{y}_0$ инерция кучи таъсирида системанинг мажбурий тебранишларини ифода этади. (15.67) дан кўринадики, системанинг эркин тебранишлари сўниш хусусиятига эга. Сўниш суръати (эркин тебраниш амплитудаларининг кичрайиб бориши) сўниш коэффициенти ε ва тебранишлар логарифмик декременти δ га боғлиқ.

(15.68) ифоданинг ҳар иккала ҳадлари (15.67) ифоданинг ҳадлари билан бир хил маънога эга.

16- БОБ

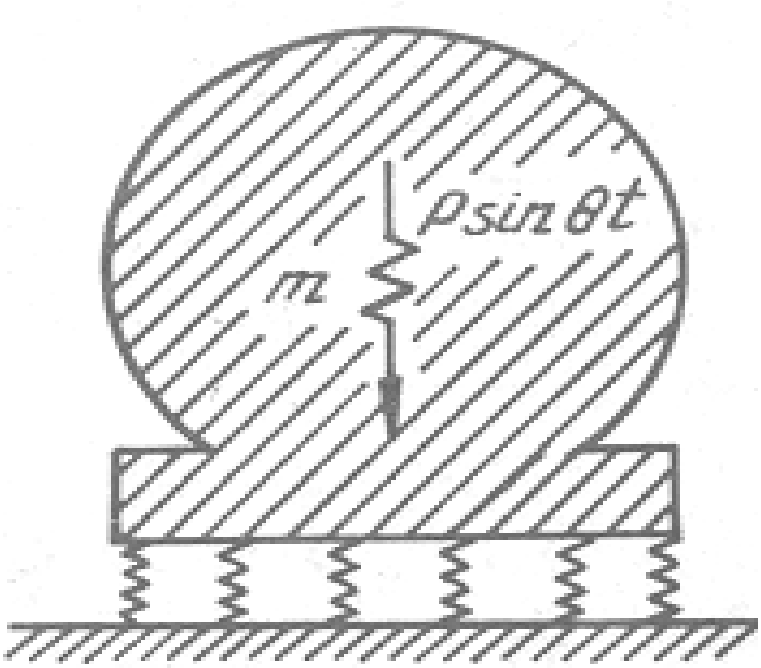
ТЕБРАНИШЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ТЕХНИКАГА ТАДБИҚИ

Тебранишларнинг техникадаги ўрни ҳақида гап борганда уларнинг фойдали ва зарарли турлари мавжуд эканлигини таъкидлаб ўтмоқ зарур. Мутахассислар тебранишнинг зарарли кўринишига қарши кураш воситаларини яратиш билан бирга, унинг фойдали томонини инсон манфаатига бўйсундиришга интилиб келадилар.

Қуйида ана шулар ҳақида баъзи маълумотларни баён этамиз.

16.1. Тебранишни ютувчи амортизаторлар

Бирор *m* массага қўйилган вертикал титратувчи кучнинг таъсирини юмшатиш мақсадида масса билан таянч орасига юмшоқ қайишқоқ қатлам (амортизаторлар) жойланади (16.1- расм).



16.1- расм

(15.43) формулага кўра массанинг тебраниш амплитудаси кичик бўлиши учун пружинанинг ҳусусий такрорлиги таъсир этаётган куч такрорлигидан анча кичик бўлиши керак.

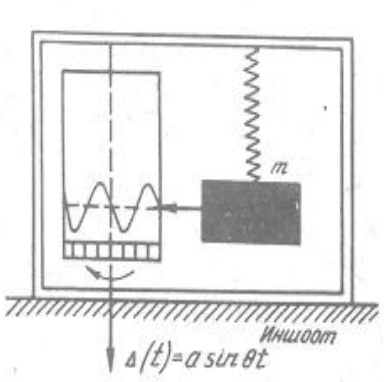
Масалан, $\frac{\theta}{\omega}=10$ деб олсак, энг катта амплитуда

$$A=\frac{y_{st}}{\left|1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}=\frac{y_{st}}{\left|1-10^2\right|}=\frac{y_{st}}{99}.$$

бўлади. Бу эса статик солқиликнинг атиги бир фоизини ташкил этади. Қаршилик кучлари ҳисобга олинса, амплитуда янада кичраяди.

16.2. Виброграф

Виброграф иншоотлар тебранишини ёзиб оладиган асбобдир. Назарий жиҳатдан у эркинлик даражаси битта бўлган система бўлиб, унинг схема 16.2-шаклда тасвирланган.



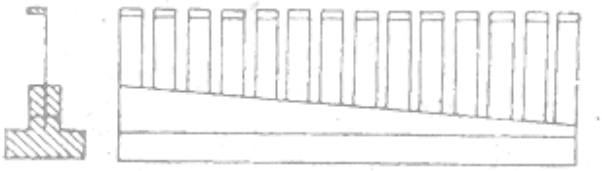
16.2- расм

Қути кўринишидаги корпуснинг юқори қисмига юмшок пружина ёрдамида осиб қўйилган оғир масса m вибрографнинг асосий элементи ҳисобланади. Массага махкамланган қалам айланувчи барабанга тегиб туради. Виброграф тебранувчи иншоотга шундай ўрнатиладики, барабаннинг ўқи тебраниш йўналиши билан бир хил бўлсин.

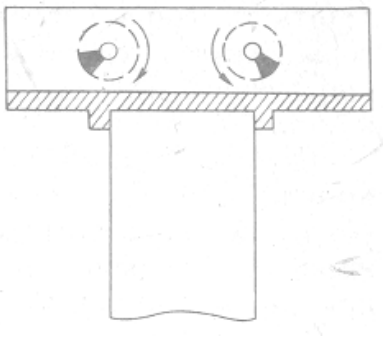
Асбоб корпуси иншоот билан бирга тебранади, масса эса пружина бўлганлиги туфайли деярли қўзғалмас, бўлиб тураверади. Шунда қалам барабанга ўралган лентага тебранишнинг эгри чизиғини чизади.

Массанинг қўзғалмаслигини таъминлаш учун (15.43) формуладаги θ/ω нисбатни мумкин қадар катта олиш лозим. Агар, аввалгидаги сингари, $\theta/\omega = 10$ деб олинса, у ҳолда асбоб орқали олинган тебраниш ёзувида йўл қўйилган хатолик бир фоизни ташкил этади:

$$A = \frac{1}{99}\, a\sin\theta t$$



16.3- расм



16.4- расм

16.3. Такрорлик ўлчагичи (частотометр)

16.3- расмда резонанс қоидасига асосланган частото метр (такрорлик ўлчагич) нинг схемаси тасвирланган. Частометр асосий корпусга махкамланган ҳар хил узунликдаги юпка пластинкачалардан ташкил топган. Пластинкачаларнинг учига қўшимча массалар маҳкамланган.

Пластинкачаларнинг узунликлари ҳар хил бўлганлиги сабабли ҳусусий такрорликлари ҳам ҳар хил бўлади, улар олдиндан ҳисоблаб қўйилади. Частотометрнинг корпуси тебранаётган объектга ўрнатилади. Натижада кинематик таъсир остида пластинкачалар тебранади. Ҳусусий такрорлиги объект такрорлигига яқин бўлган пластинкача катта амплитуда билан тебрана бошлайди, яънн резонансга тушади. Ўлчанаётган тебраниш такрорлиги шу йўсинда аниқланади.

16 4. Пойдевор қозикларини вибрацион усулда қоқиш

Узунлиги бир неча метр бўлган металл ёки темир-бетон қозиқларни ерга зарб билан қоқиш кўп вақт талаб қиладиган мураккаб жараёндир. Тебранма ҳаракатга асосланган вибрацион усул эса қозиқни қисқа вақт ичида керакли чуқурликкача осонгина қоқиш имконини беради.

Қозиқнинг юқори учига тебраниш уйғотувчи оғир вибратор ўрнатилади (16.4- расм). Вибраторнинг параллел жойлашган иккита вали қарама-қарши йўналишда айланади. Валнинг ҳар бирига дебаланс ўрнатилган. Валлар айланганда марказдан кочма кучлар ҳосил бўлади. Дебаланслар бир-бирига нисбатан шундай жойлаштириладики, бунда марказдан қочма кучларнинг горизонтал тузувчилари ўзаро мувозанатлашади, вертикал тузувчилари эса бир томонга йўналганлиги туфайли қўш илади.

Шундай қилиб, вибратор вақт ўтиши билан синус қонуни бўйича ўзгарадиган қўшимча вертикал кучлар уйғотади. Тадқиқотларнинг кўрсатишича, қозиқни ерга киритувчи асосий сабаб — оғирлик кучи бўлиб, тебранишлар қаршилик кучини камайтириб беради холос.

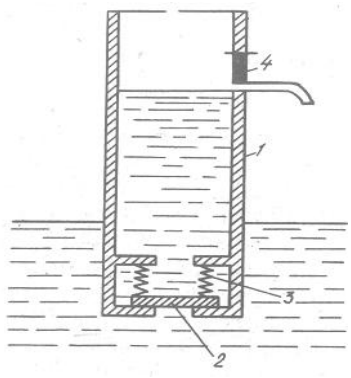
16.5. Вибрацион сув кўтаргичлар

Баъзан чуқур қудуқлардан сув тортиб чиқаришда оддий насослар ўрнига вибрацион сув кўтаргич (водоподъемник) лардан фойдаланилади (16.5- расм).

Тик ўрнатилган қувур 1 нинг туби қудуқдаги сувга ботиб туради. Қувур тубидаги тешик пружинали 3 қопқоқ 2 билан беркитилади.

Қувурнинг юқори қисмига сув оқиб тушадиган жўмрак 4 ўрнатилади. Шу жумраккача сув қўйилади. Агар қувурни катта тезлик билан пастга силжитсак, у ҳолда ташқи босим остида қопқоқ очилади, қувурга сув киради, кўтарилган сув жумрак орқали ташқарига оқиб тушади.

Сув кўтаргич ўз иши жараёнида узлуксиз равишда юқорига ва пастга кўтарилиб тушиб туради. Кўтарилиш ва тушиш масофаси мумкин қадар қисқа олинади. Ҳар бир циклда остки тешикдан маълум миқдор сув кириб, шунча сув жумрак орқали ташқарига чиқади. Цикллар даврий 16.5- расм равишда такрорлангани сабабли сув жўмракдан тўхтовсиз тушади.



16.5-расм

Қувурни ҳаракатга келтириш учун дебалансли ёки электромагнитли вибраторлардан фойдаланилади.

Техникада вибрацион сув кўтаргичларнинг бошқа хиллари ҳам ишлатилади. Биз вибротехник жараёнларнинг айрим хиллари билан танишиб чикдик. Аммо тебранишларнинг техникада қўлланилиш кўлами анча кенг ва ранг-барангдир.

Масалан, улар оғма новдан тушаётган жисмнинг ҳаракатини, шунингдек, бетоннинг бункердан тушишини тезлатиш, сочилувчан жисмларни пастдан юқорига ташиш, қаттиқ жисмларни майдалаш, ҳар хил материалларни навларга ажратиш, турли жисмларни аралаштириш каби ншларда самарали фойдаланилади.

17- БОБ

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИР НЕЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

17.1. Қаршиликсиз муҳитда системанинг эркин тебраниши

Бир неча йиғиқ массаларга эга бўлган эластик консолнинг эркин тебраниши билан танишиб чиқамиз (17.1- расм). Бу масалани ҳал этишда ҳам

бир массали системадаги сингари Даламбер қоидасидан фойдаланамиз: консол балка тебранганда $m_1, m_2, \ldots, m_n$ массалар йўналишида

$$-m_1\ddot{y}_1;\ -m_2\ddot{y}_2;\ \ldots,\ -m_n\ddot{y}_n$$

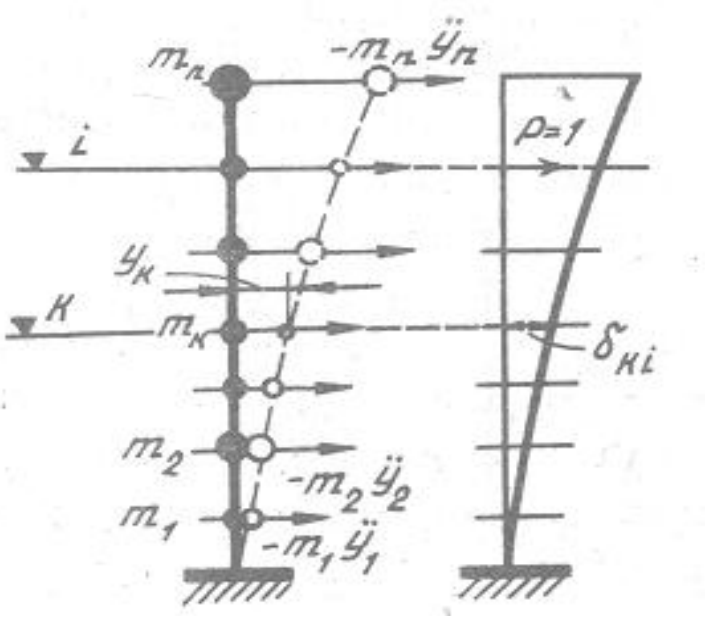
инерция кучлари ҳосил бўлади.

Ҳисоб ишларини осонлаштириш мақсадида, қурилиш механикасида кенг қўлланадиган, бирлик кўчиш δ_{ki} тушунчасидан фойдаланамиз. δ_{ki} — балка k нуқтасининг кўчиши бўлиб, бу кўчиш балканинг i нуқтасига қўйилган бирлик куч $P=1$ таъсирида ҳосил бўлади. Агар ташқи куч $P_i \neq 1$ бўлса, у холда P_i таъсиридаги тўлиқ кўчишни аниқлаш учун бирлик кўчишни ташқи кучга кўпайтирилади.

$$y_к = P_i\delta_{ki} \qquad (17.1)$$

Бир вақтнинг ўзида балкага бир қанча кучлар $P_1, P_2, \ldots P_n$ қўйилган бўлса, балка k нуқтасининг тўлиқ кўчиши алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида аниқланади.

$$y_к = \mathrm{P}_1\delta_{k1} + \mathrm{P}_2\delta_{k2} + \ldots. + \mathrm{P}_n\delta_{kn} \qquad (17.2)$$



17.1- расм

Тебранишлар тенгламасини тузишда мана шу формулага асосланамиз. Биз текшираётган системада (17.1- расм) ташқи кучлар P_i ўрнида инерция кучлари

(-m_n $\ddot{y}_n$) турибди. Шунга кўра, бу система учун (17.2) формула қуйидагича ёзилади:

$$y_{\text{к}} = -\text{m}_1\ddot{y}_1\delta_{\text{к}1} - \text{m}_2\ddot{y}_2\delta_{\text{к}2} -, \ldots, -\text{m}_\text{n}\ddot{y}_\text{n}\delta_{\text{кn}} \qquad (17.2)^1$$

ҳар бир массанинг кўчиши қуйидагича топилади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12} - \ldots. - m_n\ddot{y}_n\delta_{1n} \\ y_2 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22} - \ldots. - m_n\ddot{y}_n\delta_{2n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{n1} - m_2\ddot{y}_2\delta_{n2} - \ldots. - m_n\ddot{y}_n\delta_{nn} \end{aligned}\right\} \qquad (17.3)$$

Бу тенгламалар системасининг ҳусусий интеграли

$$y_k = A_\kappa \sin(\omega t + \lambda) \qquad (17.4)$$

кўринишда қабул килиииши мумкин.

(17.4) ифодани тенгламалар системаси (17.3) га қўйиб, номаълум амплитуда A_k ва такрорлик (ω) га нисбатан бир жинсли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\text{A}_1(\text{m}_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \text{A}_2\text{m}_2\delta_{12}\omega^2 + \ldots. + \text{A}_\text{n}\text{m}_\text{n}\delta_{1\text{n}}\omega^2 = 0; \\ &\text{A}_1\text{m}_1\delta_{21}\omega^2 + \text{A}_2 + \text{A}_2(\text{m}_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \ldots. + \text{A}_\text{n}\text{m}_\text{n}\delta_{2\text{n}}\omega^2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{A}_1\text{m}_1\delta_{\text{n}1}\omega^2 + \text{A}_2(\text{m}_2\delta_{\text{n}2}\omega^2 + \ldots. + \text{A}_\text{n}(\text{m}_\text{n}\delta_{\text{nn}}\omega^2 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.5)$$

$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$ бўлганда (17.5) тенгламалар системаси қаноатланса-да, қўйилган масалага ечим бўла олмайди, чунки бунда балка тинч ҳолатда бўлади. (17.5) тенгламалар системаси коэффициентларидан ташкил топган аниқловчи (дитерминант) нолга тенг бўлса, A_k нинг қийматлари нолдан фарқ қилади, яъни консол тебранаётган бўлади..

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & (m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \tag{17.6}$$

Аниқловчини очиб чиқсак, ω^2 га нисбатан n — тартибли тенглама ҳосил бўлади:

$$1 - \alpha_1\omega^2 + \alpha_2\omega^4 - \alpha_3\omega^6 + ...+ (-1)^n \alpha_n\omega^{2n} = 0 \tag{17.7}$$

Бу тенглама такрорликлар тенгламаси ёки *асрий тенглама* деб аталиб, *n* та ҳақиққий ва мусбат илдизга эга. Илдизларни ω_1^2, ω_2^2, ..., ω_n^2 деб белгилаймиз ва такрорликлар учун қуйидаги *n* та жавобга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_1^2}\,; \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_2^2}\,; \\ \omega_n &= \sqrt{\omega_n^2} \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Система эркин тебранишларининг барча такрорликлари мажмуаси *такрорликлар спектори* деб аталади.

Буларнинг ичида энг кичиги биринчи ёки *асосий такрорлик* дейилади. Амалий ишларда дастлабки уч такрорлик муҳим аҳамиятга эга.

(17.3) тенгламалар системасининг умумий ечими (17.4) кўринишдаги ҳусусий ечимларнинг йиғиндисидан иборат.

$$y_k = A_{\kappa 1}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{k2}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + ...+ A_{kn}\sin(\omega_n t + \lambda_n) \tag{17.9}$$

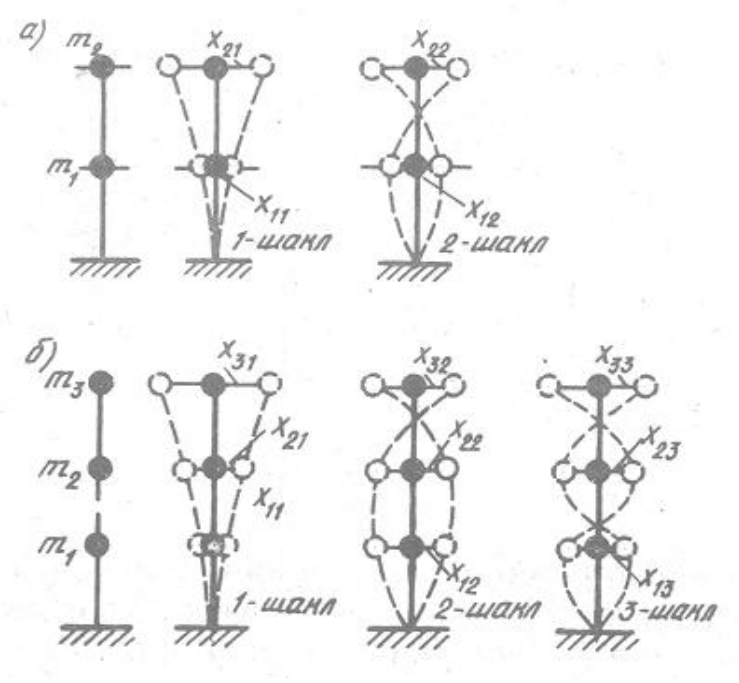
Буни ҳар бир масса кўчиши учун алоҳида ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + ... + A_{1n}\sin(\omega_n t + \lambda_n) \\ y_2 &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + ... + A_{2n}\sin(\omega_n t + \lambda_n \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n &= A_{n1}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{n2}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + ... + A_{nn}\sin(\omega_n t + \lambda_n\gamma_n) \end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

A_{ki} нинг биринчи индекси координатани, иккинчиси такрорлик номерини билдиради.

(17.10) тенгламалардан кўриниб турибдики, ҳар бир масса мураккаб ҳаракатда бўлиб, бу ҳаракат такрорлиги турлича бўлган тебранишларнинг (синусоидаларнинг) йиғиндисидан ташкил топади. Қўшилувчиларнинг сони ҳусусий такрорликлар сонига, яъни системанинг эркинлик даражасига тенг.

Умуман олганда система тебранишининг формаси (солқилик шакли) ўзгарувчан бўлиб, амплитудалар нисбати узлуксиз равишда ўзгариб боради.



17.2- расм

Бироқ ҳамма вақт система ҳаракатининг бошланғич шартларини, барча массаларни маълум бир такрорлик ω_i бўйича тебранадиган қилиб олиш мумкин. Бундай тебраниш *асосий* ёки *нормал тебраниш* деб, тебраниш шакли эса *асосий шакл* деб аталади. Айрим муаллифлар буни ҳусусий шакл деб атайдилар.

Тебранишнинг асосий шаклларида исталган массанинг амплитудалари нисбати ҳар доим ўзгармас бўлиб, вақтга боғлиқ бўлмайди. Бинобарин, асосий шакллар амплитудалар ёки уларнинг нисбатлари орқали аниқланади.

Аксарият ҳолда эркин тебранишлар асосий шаклдаги тебранишларнинг комбинациясидан иборат бўлади.

Ўз навбатида ҳар бир хусусий такрорлик ўзига мос асосий тебраниш шаклига эга, яъни биринчи такрорликка – биринчи, иккинчи такрорликка — иккинчи шакл ва хоказо мос келади (17.2- расм). Системанинг эркинлик даражаси ортган сари тебраниш шаклидаги тўлқинлар сони ҳам ортиб

бораверади. Қисқаси, асосий шакллар сони системанинг эркинлик даражаси n га тенг бўлади.

Системанинг мураккаб тебранма ҳаракатига ҳар бир тебраниш шаклининг улуши, эркин тебранишларни вужудга келтирган бошланғич шартларга боғлиқ.

Тебраниш асосий шаклларининг муҳим хоссларидан бири уларнинг ортогоналлигидир. Бу хоссага кўра бир асосий шакл инерция кучларининг бошқа асосий шакл кўчишларида бажарган иши нолга тенгдир, яъни

$$\sum_{k-1}^{n} m_k X_{ik} X_{ki} = 0.$$

(17.5) тенглама A_k га нисбатан бир жинсли бўлганлиги сабабли амплитудаларнинг қийматини бевосита шу тенгламанинг ўзидан аниқлаб бўлмайди. Бироқ бу тенгламалар системасидан фойдаланиб, ҳар бир такрорлик ω учун, *асосий шакл* деб ном олган

$$\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1}, \frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{A}_1}, \ldots\ldots \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_1}$$

нисбатларни аниқлашимиз мумкин.

Агар (17.5) тенгламалар системасига такрорликнинг бошқа қиймати қўйилса, бошқа асосий шаклни белгиловчи бошқа қийматли амплитудалар нисбати келиб чиқади.

Амплитудалар индексини (17.10) тенгламалар системасидаги каби олсак, тебранишларнинг биринчи асосий шакли учун

$$X_{21} = \frac{\mathrm{A}_{21}}{\mathrm{A}_{11}}; \quad X_{31} = \frac{\mathrm{A}_{31}}{\mathrm{A}_{11}}; \quad X_{n1} = \frac{\mathrm{A}_{n1}}{\mathrm{A}_{11}}$$

нисбатларга, иккинчи асосий шакли учун эса

$$X_{22} = \frac{\mathrm{A}_{22}}{\mathrm{A}_{12}}; \quad X_{32} = \frac{\mathrm{A}_{32}}{\mathrm{A}_{12}}; \quad X_{n2} = \frac{A_{n2}}{A_{12}}$$

нисбатларга эга бўламиз.

X_{ki} нисбатлар фақатгина система параметрларига боғлиқ миқдорлар бўлиб, бошланғич шартларга ҳеч бир алокаси йўқ. X_{ki} нинг қийматлари шакл *ординатаси* ёки *амплитуда коэффициенти* деб ҳам юритилади.

X_{ki} нисбатлардан фойдаланиб, умумий ечнм (17.10) ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t+\lambda_1)+A_{12}\sin(\omega_2 t+\lambda_2)+....+A_{1n}\sin(\omega_n t+\lambda_n)\\ y_2 &= X_{21}A_{11}\sin(\omega_1 t+\lambda_1)+X_{22}A_{12}\sin(\omega_2 t+\lambda_2)+....+X_{2n}A_{1n}\sin(\omega_n t+\lambda_n)\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ y_n &= X_{n1}A_{11}\sin(\omega_1 t+\lambda_1)+X_{n2}A_{12}\sin(\omega_2 t+\lambda_2)+....+X_{nn}A_{1n}\sin(\omega_n t+\lambda_n) \end{aligned}\right\} \quad (17.11)$$

Номаълум n та амплитуда A_{11}, A_{12},...., A_{1n} ни ва n та бошланғич фаза λ_1, λ_2, …, λ_n ни аниқлаш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз. Ҳаракат бошидаги ($t=0$) n та кўчишлар $y_1(0)$, $y_2(0)$, ..., $y_n(0)$ ҳамда ўшанча тезликлар $\dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0), ..., \dot{y}_n(0)$ бошланғич шартлар ҳисобланади. Булар ёрдамида биринчи координата амплитудалари A_{11}, A_{12},...., A_{1n} аниқланади, қолган координаталарнинг амплитудалари асосий шакллардан топилади.

Ҳаракат бошида барча тезликлар нолга тенг дейлик. У холда (17. 1 1) тенгламалар бир жинсли системага айланади:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1(0) &= A_{11}\omega_1\cos\lambda_1+A_{12}\omega_2\cos\lambda_2+...+A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n=0\\ \dot{y}_2(0) &= X_{21}A_{11}\omega_1\cos\lambda_1+X_{22}A_{12}\omega_2\cos\lambda_2+...+X_{2n}A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n=0\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \dot{y}_n(0) &= X_{n1}A_{11}\omega_1\cos\lambda_1+X_{n2}A_{12}\omega_2\cos\lambda_2+...+X_{nn}A_{1n}\omega_n\cos\lambda_n=0 \end{aligned}\right\} \quad (17.12)$$

Бунинг ечими:

$$\cos\lambda_1=\cos\lambda_2=\ldots=\cos\lambda_m=0,$$

демак

$$\lambda=\lambda_{21}=\ldots=\lambda_n=\frac{\lambda}{2}$$

Бошланғич фазанинг бу қийматида (17. 1 I) тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11}\cos\omega_1 t+A_{12}\cos\omega_2 t+...+A_{1n}\cos\omega_n t;\\ \dot{y}_2 &= X_{21}A_{11}\cos\omega_1 t+X_{22}A_{12}\cos\omega_2 t+...+X_{2n}A_{1n}\cos\omega_n t;\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \dot{y}_n &= X_{n1}A_{11}\cos\omega_1 t+X_{n2}A_{12}\cos\omega_2 t+...+X_{nn}A_{1n}\cos\omega_n t \end{aligned}\right\} \quad (17.14)$$

Бошланғич кўчишлар $y_1(0)$, $y_2(0)$, ... , $y_n(0)$ маълум бўлса, номаълум n та амплитудалар A_{11}, A_{12}, ... қуйидаги тенгламалардан топилади:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = A_{11} + A_{12} + \ldots\ldots + A_{1n}; \\ \dot{y}_2(0) = X_{21}A_{11} + X_{22}A_{12} + \ldots\ldots + X_{2n}A_{1n}; \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n(0) = X_{n1}A_{11} + X_{n2}A_{12} + \ldots\ldots + X_{n}A_{1n}. \end{array}\right\} \qquad (17.15)$$

17.2. Қаршиликли мухитда системанинг эркин тебраниши

Эркинлик даражаси бир неча бўлган системанинг сўнувчи тебранишларини кўриб чиқамиз. Масса m_k ҳаракатига қаршилик қилувчи кучларни ҳаракат тезлигига пропорционал деб оламиз. Тебраниш тенгламаси сифатида (17.2)[1] дан фойдаланамиз; бироқ бу тенгламага қаршилик кучларини ҳисобга олувчи $2_{\alpha i} m_i \delta_{ki} y_i$ ҳад киритамиз:

$$y_k = -m_1\delta_{k1}(\ddot{y}_1 + 2\alpha_1\dot{y}_1) - m_2\delta_{k2}(\ddot{y}_2 + 2\alpha_2\dot{y}_2) - \ldots - \\ - m_n\delta_{kn}(\ddot{y}_n + 2\alpha_n\dot{y}_n) \qquad (17.16)$$

Бу ерда (15.16)[1] га биноан

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2m_1};\ \alpha_2 = \frac{\beta}{2m_2}; \ldots \quad \alpha_n = \frac{\beta}{2m_n}$$

Одатда, сўниш коэффициенти α_i барча шакллар учун бир хил олинади, шунга кўра $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_n = \alpha$ бўлади.

Буни эътиборга олсак, ҳаракатнинг дифференциал тенгламалар системаси қисқа кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$y = m_1\delta_{k1}(\ddot{y}_1 + 2\alpha\dot{y}_1) + m_2\delta_{k2}(\ddot{y}_2 + 2\alpha\dot{y}_2) + \ldots + m_n\delta_{kn}(\ddot{y}_n + 2\alpha\dot{y}_n) = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (17.17)$$

Бу тенгламаларнинг ечими

$$y_k = A_k e^{-\alpha t}\sin(\omega_{it} + \lambda_i) \qquad (17.18)$$

кўринишда аниқланади.

Бундан кейинги амаллар қаршиликсиз муҳитдаги системадаги каби бўлади. Натижада кўп массали системанинг сўнувчи тебранишлари учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$y_k = A_{ki}e^{-\alpha t}\sin(\overline{\omega}_1 t + \lambda_i) + A_{k2}e^{-\alpha t}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \ldots + A_{kn}e^{-\alpha t}\sin(\overline{\omega}_n t + \lambda_n). \quad (17.19)$$

Бу ерда

$$\overline{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2} \quad (17.20)$$

17.3. Эркинлик даражаси иккита ва учта бўлган системалар

Эркинлик даражаси иккита ва учта бўлган системалар эркинлик даражаси бир нечта бўлган системаларнинг ҳусусий ҳолидир. Аммо бундай системалар учун тузиладиган тенгламалар оддий бўлганлиги туфайли ечимларни тугал кўринишгача етказса бўлади. Шу сабабли бундай системалар устида алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Эркинлик даражаси иккита бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Тебранишлар каноник тенгламаси (17.5) икки массали система учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2 m_2\delta_{12}\omega^2 = 0; \\ A_1 m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17\ 21)$$

Аниқловчи (17.6) эса қуйидагича ифодаланади:

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1)m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (17.22)$$

Аниқловчини ёйганда келиб чиқадиган такрорлик тенгламаси биквадрат кўринишда бўлади.

$$\omega^4(\delta_{11}\delta_{22}\omega^2 - \delta_{12}^2)m_1m_2 - \omega^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0$$

$\omega^2 = z$ деб белгиласак,

$$z^2(\delta_{11}\delta_{22}\omega^2 - \delta_{12}^2)m_1m_2 - z(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0$$

келиб чиқади. Бунинг ечими

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

бўлади. Илдиз остини ўзгартирамиз:

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \qquad (17.24)$$

Бундан биринчи ва иккинчи такрорлик келиб чиқади:

$$\omega_1 = \sqrt{z_1}; \qquad \omega_2 = \sqrt{z_2}.$$

z_1 ни аниқлашда (17.24) ифода «минус», z_2 ни аниқлашда эса «плюс» ишора билан олинади.

Эркин тебранишлар дифференциал тенгламаларининг умумий ечими (17.10) га кўра

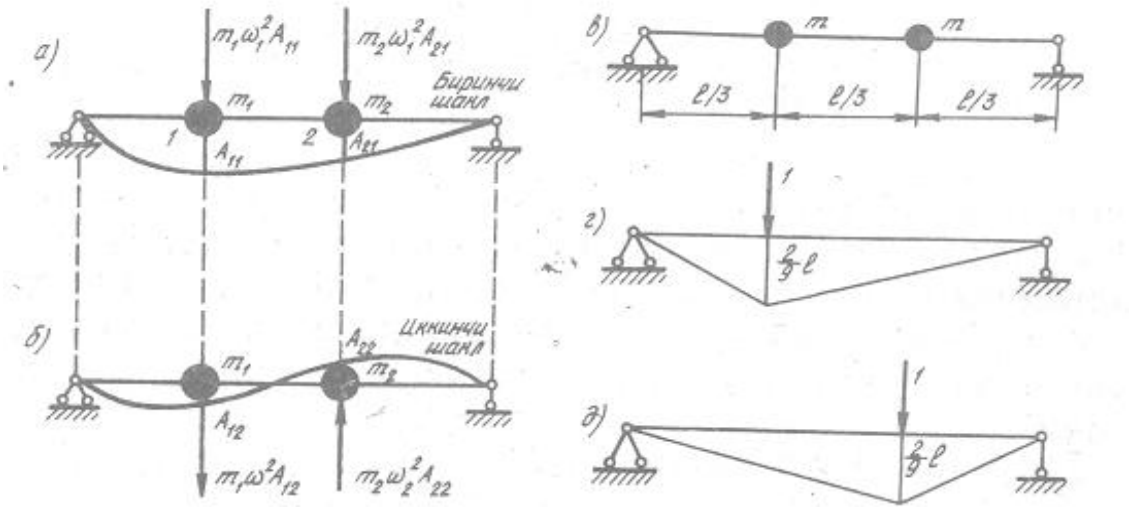
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_2 &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned}\right\} \qquad (17.25)$$

кўринишга эга.

Ҳар бир тебраниш шакли ўз такрорлигига эга:

A_{11}, A_{21} — такрорлиги ω_1 бўлган биринчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3- расм, а), бу ерда биринчи индекс — координата номерини, иккинчи индекс — такрорлик номерини билдиради. A_{12}, A_{22} — такрорлиги ω_2 бўлган иккинчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3- расм, *б*).

Тебранишнинг асосий шакли деганда, $\sin(\omega_i t + \lambda_i) = 1$ бўлганда, бирор ҳусусий такрорлик билан тебранаётган система деформациясининг шакли тушунилади.



17.3- расм

Бинобарин, ҳар бир асосий шаклни юқори инерция кучлари таъсирида ҳосил бўладиган солқилик сифатида аниқлаш мумкин: биринчи шакл 17.3-расм, *а* да, иккинчи шакл эса 17.3- расм, *б* да тасвирланган кучлар таъсирида ҳосил бўлади. Ҳар иккала асосий шакл ўзаро ортогоналдир, яъни биринчи шакл кучларининг иккинчи шакл кўчишларида бажариши мумкин бўлган иш нолга тенг.

Биринчи гармоника амплитудалари нисбатини $X_{21}=\frac{A_{21}}{A_{11}}, X_{22}=\frac{A_{22}}{A_{12}}$ деб белгиласак, (17.25) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{A}_{11}\sin(\omega_1 t+\lambda_1)+\mathrm{A}_{12}\sin(\omega_2 t+\lambda_2);\\ y_2 &= X_{21}\mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{11}\sin(\omega_1 t+\lambda_1)+X_{22}\mathrm{A}_{12}\sin(\omega_2 t+\lambda_2).\end{aligned}\right\} \qquad (17.26)$$

Бу ерда ҳусусий такрорликлар ω_1 ва ω_2 ҳамда тебраниш шаклининг ҳарактеристикаси деб аталувчи амплитудалар нисбати X_{21} ва X_{22} фақатгина тебранаётган системанинг параметрларига боғлиқ бўлган миқдорлардир. $A_{11}, A_{12,}\lambda_1$ ва λ_2 нинг қийматлари ҳаракат бошидаги кўчиш ва тезликни нфодаловчи бошланғич шартлардан топилади.

Масалан, *t=0* бўлганда

$$y_1(0)=0, \quad y_2(0)=0;$$
$$\dot{y}_1(0)=0, \quad \dot{y}_2(0)=v_0;$$

яъни ҳаракат иккинчи массага зарб берилишдан бошланди, дейлик. У ҳолда (17.26) тенгламадан

$$y_1(0) = A_{11}\sin\lambda_1 + A_{12}\sin\lambda_2 = 0;$$
$$y_2(0) = X_{21}A_{11}\sin\lambda_1 + X_{22}A_{12}\sin\lambda_2 = 0;$$
$$\dot{y}_1(0) = A_{11}\omega_1\cos\lambda_1 + A_{12}\omega_2\cos\lambda_2 = 0;$$
$$\dot{y}_2(0) = X_{21}A_{11}\omega_1\cos\lambda_1 + X_{22}A_{12}\omega_2\cos\lambda_2 = 0;$$

келиб чиқади. Юқоридаги икки тенгламадан $\lambda_1 = \lambda_2 = 0;$ пастдаги икки тенгламадан эса

$$A_{11} = \frac{\upsilon_0}{\omega_1} - \frac{1}{X_{21} - X_{22}}; \quad A_{12} = \frac{\upsilon_0}{\omega_2} - \frac{1}{X_{22} - X_{21}}$$

эканлиги маълум бўлади.

Бошланғич шартларнн махсус танлаш йўли билан ҳар иккала массани бир хил такрорликда тебранишига эришиш мумкин. Масалан, $A_{12} = 0$ бўлганда тебраниш битта гармоника бўйича содир бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1); \\ y_{21} &= X_{21}A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) \end{aligned}\right\} \qquad (17.27)$$

ҳамда биринчи асосий тебраниш деб аталади. X_{21} тебранишларнинг *биринчи асосий шаклини* ифодалайди.

Агар $A_{11} = 0$ бўлишига эришилса, иккинчи асосий тебраниш содир бўлади

$$\left.\begin{aligned} y_{11} &= A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_{22} &= X_{22}A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) \end{aligned}\right\} \qquad (17.28)$$

Бу ерда X_{22} тебранишларнинг *иккинчи асосий шаклини* ифодалайди.

Тебранишларнинг биринчи асосий шаклида ҳар иккала масса ω_1 такрорлик билан бир йўналишда тебранади. Иккинчи асосий шаклда эса массалар ω_2 такрорлик билан қарама-қарши йўналишда тебранади.

Мисол. Иккита бир хил массали вазнсиз балканинг эркин тебранишлари такрорлиги аниқлансин (17.3- расм, в).

Ечиш. Моментларнинг бирлик эпюраларидан Верешчагин қоидаси бўйича кўпайтириш йўли билан бирлик кўчишларни топамиз (17.3- расм, *г, д*).

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4\ell^3}{243EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7\ell^3}{246EJ}.$$

(17.24) формула берилган масала учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)m}\left[\delta_{11} \mp \sqrt{4\delta_{11}^2 - 4(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)}\right],$$

бундан

$$\omega_1 = 5{,}69\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \quad \textbf{ва} \quad \omega_2 = 22\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

аниқланади.

Эркинлик даражаси учта бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Уч массали системанинг ҳусусий тебранишлари тенгламаси (17.5) га асосан қуйидагича бўлади:

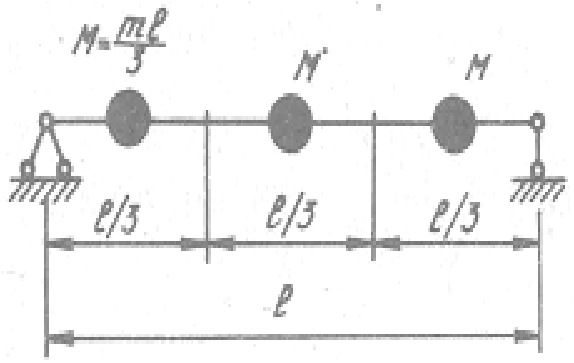
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \mathrm{A}_2 m_2\delta_{12}\omega^2 + \mathrm{A}_3 m_3\delta_{13}\omega^2 = 0; \\ \mathrm{A}_1 m_1\delta_{21}\omega^2 + \mathrm{A}_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \mathrm{A}_3 m_3\delta_{13}\omega^2 = 0; \\ \mathrm{A}_1 m_1\delta_{31}\omega^2 + \mathrm{A}_2 m_2\delta_{32}\omega^2 + \mathrm{A}_3(m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.29)$$

Бу тенгламаларнинг аниқловчиси (17.6) га кўра қуйидагича ифодаланади:

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 & m_3\delta_{13}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) & m_3\delta_{23}\omega^2 \\ m_1\delta_{31}\omega^2 & m_2\delta_{32}\omega^2 & (m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.30)$$

Амплитуда коэффициентлари $X_{kn}=\dfrac{A_{kn}}{A_{1n}}$ қуйидаги тенгламалардан топилади:

$$\left.\begin{aligned}&(m_1\delta_{11}\omega^2-1)+X_{2n}m_2\delta_{12}\omega^2+X_{3n}m_3\delta_{13}\omega^2=0;\\&m_1\delta_{21}\omega^2+X_{2n}(m_2\delta_{22}\omega^2-1)+X_{2n}m_3\delta_{23}\omega^2=0;\\&m_1\delta_{31}\omega^2+X_{2n}m_2\delta_{32}\omega^2+X_{3n}(m_3\delta_{33}\omega^2-1)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (17.31)$$



17.4- расм

Бу тенгламалардан бирортаси ташлаб юборилиб, қолган иккитасидан X_{2n} ва X_{3n} номаълум коэффициентлар аниқланади.

Уч массали балка тебранишининг такрорликлари ва асосий шаклларини аниқлашга доир мисолни кўриб ўтамиз (17.4- расм).

Балканинг бирлик кучлар таъсиридаги кўчишлари берилган дейлик:

$$\delta_{11}=\frac{25\ell^3}{3888EI};\qquad \delta_{22}=\frac{81\ell^3}{3888EI};$$
$$\delta_{12}=\frac{39\ell^3}{3888EI};\qquad \delta_{21}=\delta_{12}$$
$$\delta_{13}=\frac{17\ell^3}{3888EI};\qquad \delta_{33}=\frac{25\ell^3}{3888EI}.$$

Балка тебранишларининг каноник тенгламаси (17.29) га кўра

$$\left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EI}M-1\right)A_1+\frac{39l^3\omega^2}{3888EJ}MA_2+\frac{17l^3\omega^2}{3888EJ}MA_3=0;$$
$$\frac{39l^3\omega^2}{3888EI}MA_1+\frac{39l^3\omega^2}{3888EI}MA_2+\left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EI}M-1\right)A_3=0;$$
$$\frac{17l^3\omega^2}{3888EI}MA_1+\left(\frac{81l^3\omega^2}{3888EI}M-1\right)A_2+\frac{39l^3\omega^2}{3888EJ}MA_3=0.$$

$K_n = \dfrac{3888EJ}{l^3\omega^2 M}$ деб олсак, тенглама ихчамлашади:

$$\left.\begin{aligned}(25-K_n)A_1+39A_2+17A_3=0;\\ 39A_1+(81-K_n)A_2+39A_3=0;\\ 17A_1+39A_2+(25-K_n)A_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Тенгламалар аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$D=\begin{vmatrix}(25-K_n) & 39 & 17\\ 30 & (81-K_n) & 39\\ 17 & 39 & (25-K_n)\end{vmatrix}=0$$

Бунинг ёйилмаси

$$K_n^3-132K_n^2+1344K_n-2880=0\,.$$

Тенгламанинг илдизлари: $K_1 = 120,\ K_2 = 8,\ K_3 = 3$.

Эркин тебраниш такрорликлари

$$\omega_n^2=\frac{3888EJ}{l^3MK_n}=\frac{3888EJ}{l^3\dfrac{ml}{3}K_n}$$

дан аниқланади:

1) биринчи асосий шакл такрорлиги (K_1 =120)

$$\omega_1=\sqrt{388EJ/\frac{1}{3}ml^4\cdot 120}=\frac{9{,}859}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

2) иккинчи асосий шакл такрорлиги (K_2 = 8)

$$\omega_2=\sqrt{3888EJ/\frac{1ml^4}{3}\cdot 8}=\frac{38{,}184}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

3) учинчи асосий шакл такрорлиги ($K_3 = 3$)

$$\omega_3 = \sqrt{3888\,EJ / \frac{1}{3} ml^4 \cdot 3} = \frac{62{,}354}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Топилган такрорликлар бўйича (17.31) дан фойдаланиб, асосий шаклларни аниқлаймиз. Бунинг учун ($а$) тенгламанинг барча хадларини A_1 га бўлиб, тенгламани қайта ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} &(25 - Kn) + 39X_{2n} + 17X_{3n} = 0;\\ &39 + (81 - Kn)X_{2n} + 39X_{3n} = 0;\\ &17 + 39X_{2n} + (25 - Kn)X_{3n} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (б)$$

Биринчи асосий шаклни аниқлаш учун ($б$) тенгламада K_1 = 120 деб олинади:

$$\begin{aligned} &(25-120) + 39\mathrm{X}_{21} + 17\mathrm{X}_{31} = 0;\\ &39 + (81-120)\mathrm{X}_{21} + 39\mathrm{X}_{31} = 0;\\ &17 + 39\mathrm{X}_{21} + (25-120)\mathrm{X}_{31} = 0. \end{aligned}$$

Тенгламаларнинг биттаси ортиқча. Учинчисини ташлаб юбориб, қолган иккитасидан

$$\mathrm{X}_{21} = \frac{95\cdot 39 + 39\cdot 17}{39\cdot 39 + 39\cdot 17} = 2 \quad \text{ва} \quad \mathrm{X}_{31} = \frac{-39\cdot 39 + 39\cdot 95}{39\cdot 39 + 39\cdot 17} = 1$$

аниқланади. Шундай қилиб, биринчи асосий шаклни қуйидаги миқдорлар белгилайди: $A_{21} = 2A_{11}$; $A_{31} = A_{11}$ (17.5- расм, $а$).

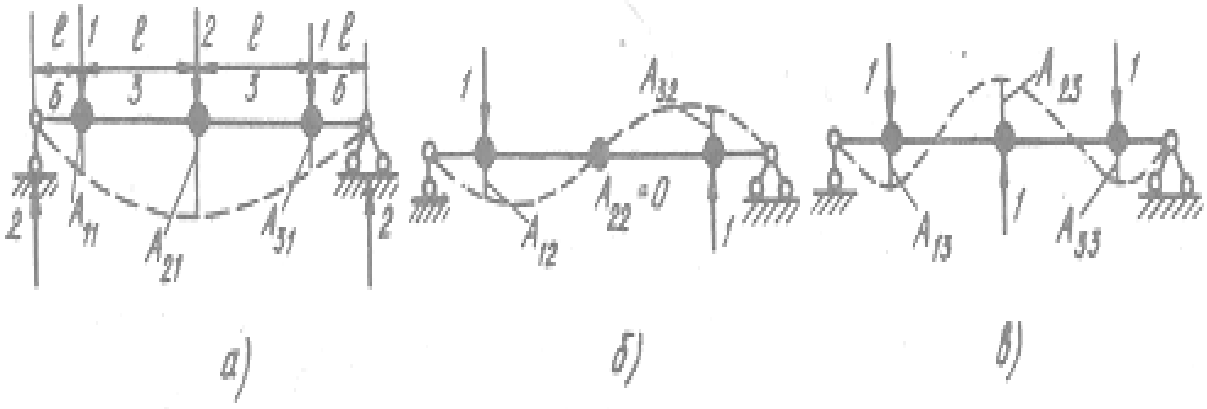
Иккинчи асосий шаклни аниқлаш ($б$) тенгламадаги K нинг қийматини 8 га тенг деб оламиз:

$$\begin{aligned} &(25-8) + 39X_{22} + 17X_{32} = 0;\\ &39 + (81-8)X_{22} + 39X_{32} = 0;\\ &17 + 39X_{22} + (25-8)X_{32} = 0. \end{aligned}$$

Дастлабки икки тенгламадан

$$X_{22} = \frac{-17\cdot 39 + 17\cdot 39}{39\cdot 39 - 73\cdot 17} = 0 \quad \text{ва} \quad X_{32} = \frac{-39\cdot 39 + 73\cdot 17}{39\cdot 39 - 73\cdot 17} = -1$$

топилади. Асосий шаклни белгиловчи кучлар схемаси 17.5- расм, $б$ да берилган.



17.5- расм

Учинчи асосий шаклни аниқлашда $К_З$=3 деб,олинади. Бунда $X_{23}=1$ ва $X_{33}=1$ ҳамда $A_{23}=-A_{13}$, $A_{33}=A_{13}$ келиб чиқади.

Кучлар схемаси ва учинчи асосий шакл 17.5- расм, *в* да берилган.

Хулоса: ҳусусий тебранишларнинг биринчи асосий шаклида иккита четки масса бир хил масофага, ўртадаги масса эса икки баравар кўпроқ масофага кўчади. Ҳусусий тебранишларнинг иккинчи шаклида ўртадаги масса ўз ўрнида ҳолиб, четки массалар тенг ва қарама-қарши масофаларга кўчади. Ниҳоят, ҳусусий тебранишларнинг учинчи асосий шаклида иккита четки масса яна тенг масофага кўчади; ўртадаги масса эса миқдор жиҳатдан тенг, йўналиш жиҳатдан қарама-қарши томонга кўчади.

17.4. Эркинлик даражаси бир нечта бўлган системаларнинг мажбурий даврий тебранишлари

Мисол тариқасида *n* та йиғиқ массага эга бўлган балканинг (17.6- расм) мажбурий тебранишларини кўриб ўтамиз. Балканинг *k* массасига

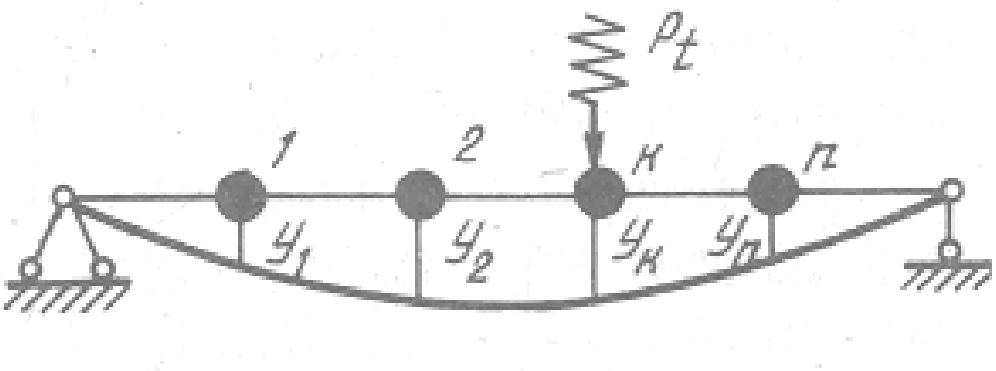
$$P_t = P_k \sin \theta t \qquad (17.32)$$

уйғотувчи куч таъсир этяпти дейлик. Бу ерда P_k — куч амплитудаси, θ — унинг такрорлиги.

Бунда (17.3) тенглама таркибида уйғотувчи куч таъсирини ҳисобга олувчи қўшимча ҳад пайдо бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = A_1 m_1 \delta_{11} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{12} \theta^2 + \ldots + A_n m_n \delta_{1n} \theta^2 + P_k \delta_{1k};\\
&A_2 = A_1 m_1 \delta_{21} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{22} \theta^2 + \ldots + A_n m_n \delta_{2n} \theta^2 + P_k \delta_{2k}.\\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&A_n = A_1 m_1 \delta_{n1} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{n2} \theta + \ldots + A_n m_n \delta_{nn} \theta^2 + P_k \delta_{nk}.
\end{aligned}\right\} \quad (17.33)$$

Ҳар бир массанинг кўчишини қуйидагича ифодалаш мумкин:



17.6 – расм

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = A_1 \sin \theta t\\
&y_2 = A_2 \sin \theta t\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = A_n \sin \theta t
\end{aligned}\right\} \quad (17.34)$$

(17.34) ифодаларни (17.33) тенгламага қўйсак, тебраниш амплитудалари $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ни аниқлайдиган тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1 = A_1 m_1 \delta_{11} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{12} \theta^2 + \ldots + A_n m_n \delta_{1n} \theta^2 + P_k \delta_{1k};\\
&A_2 = A_1 m_1 \delta_{21} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{22} \theta^2 + \ldots + A_n m_n \delta_{2n} \theta^2 + P_k \delta_{2k}.\\
&\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&A_n = A_1 m_1 \delta_{n1} \theta^2 + A_2 m_2 \delta_{n2} \theta + \ldots + A_n m_n \delta_{nn} \theta^2 + P_k \delta_{nk}.
\end{aligned}\right\} \quad (17.35)$$

Тенглама коэффициентлари (масса m_i, кўчиш δ_{ik}, такрорлик θ) маълум қийматлар бўлганлиги сабабли, тенгламалар системасини биргаликда ечиб, номаълум n та амплитудани аниқласа бўлади. Амплитудаларнинг аниқланиши

ҳар бир массада вужудга келадиган инерция кучларини аниқлаш имконини беради:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= m_1 A_1 0^2 \\ J_2 &= m_1 A_2 0^2 \\ \cdots &\quad \cdots \\ J_n &= m_n A_n 0^2 \end{aligned}\right\} \qquad (17.36)$$

Инерция кучлари J_n аниқлангач, динамик эгувчи моментлар эпюрасини қуриш қийин эмас.

18- БОБ

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

Юқорида кўриб ўтилган схемаларда массали элементлар сони *чекли* деб қаралди. Иншоотларни бу тарзда схемалаштириш ҳақиқий ҳолатни тўлиқ акс эттирмайди; реал объектларнинг барча элементлари деформацияланади ва айни пайтда маълум массага ҳам эга. Шунга кўра конструкция тебранишини тадқиқ этишда, унинг массасини узлуксиз тарқалган деб олинса, ҳақиқатга анча яқин бўлади. Бундай ҳолда системанинг эркинлик даражаси *чексиз* деб қаралади.

Олдинги бобда баён этилганидек, ҳусусий такрорликлар сони ва уларга мос бўлган тебранишнинг асосий шакллари системанинг эркинлик даражаси сонига тенг бўлади, бинобарин, массаси узлуксиз тарқалган системаларнинг, яъни эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларнинг ҳусусий такрорликлари ҳамда тебраниш шакллари сони чексиз бўлади.

Эркин тебранишга оид масалаларда системаларнинг ҳусусий такрорликлари ва уларга мос бўлган тебраниш шаклларини аниқлаш амаллари асосий ўрин тутади.

18.1. Балкаларнинг кўндаланг тебранма ҳаракати дифференциал тенгламаси

Бинокорликда ишлатиладиган тўсинни кўз олдингизга келтиринг. Унинг массаси тўсин узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Бундай конструкциялар эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларга яққол мисол бўла олади.

Балкалар тебранганда уларнинг солқилиги икки ўзгарувчи: кесим координати z ҳамда вақт t нинг функцияси бўлади, яъни

$$y = f(z,t).$$

Материаллар қаршилиги курсидан маълумки, солқилик y билан эгувчи момент M қуйидаги дифференциал боғланишга эга:

$$EJ\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -M.$$

Бу ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) = -\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -P(z,t). \qquad (18.1)$$

Бу ерна $P(z, t)$ — балкага таъсир этувчи кўндаланг куч бўлиб, у қуйидаги омиллардан ташкил топади:

1) интенсивлиги $q(z, t)$ бўлган актив ёйиқ куч;

2) интенсивлиги $m\ddot{y}$ бўлган инерция кучлари;

3) интенсивлиги $r(z, t)$ бўлган ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи кучлар:

$$P(z,t) = Q(z, t) + m\ddot{y} + r(z, t) \qquad (18.2)$$

(18.2) ни (18.1) га қўйсак, балка тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial y^2}{\partial z^2}\right) + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(z,t) = -q(z,t) \qquad (18.3)$$

келиб чиқади.

(18.3) тенгламада *q(z,t)=0* деб олинса, эркин тебранишлар дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ\frac{\partial y^2}{\partial z^2}\right)+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+r(z,t)=0. \qquad (18.4)$$

Агар балканинг бикирлиги ўзгармас бўлиб, муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса (18.4), тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4}=0 \qquad (18.5)$$

18.2. Балканинг эркин тебранишлари

1. Эгилиш тебранишлари. Балка эркин тебранишлари дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий ечимини бири *z* га, иккинчиси *t* га боғлиқ бўлган, икки хил функциянинг кўпайтмаси кўринишида излаймиз:

$$y(z,t)=Z(z)\times T(t). \qquad (18.6)$$

(18.6) функциядан ҳосила олиб, (18.5) га қўямиз

$$Z(z)\frac{d^2T(t)}{dt^2}+\frac{EJ}{m}T(t)\frac{d^4Z(z)}{dz^4}=0. \qquad (18\ 7)$$

(18.7) тенгламанинг барча хадларини $T(t)\cdot Z(z)$ га бўламиз ва хадлардан бирини ўнг томонга ўтказамиз:

$$\frac{\frac{EJd^4Z(z)}{mdz^4}}{Z(z)}=\frac{\frac{d^2T(t)}{dt^2}}{T(t)} \qquad (18.8)$$

Шу йўл билан ўзгарувчиларни икки қисмга ажратдик — чап томондаги функция фақат *Z* га, ўнгдагиси эса фақат *t* га боғлиқ. Ҳар иккала функция маълум бир ўзгармас сонга тенг бўлгандагина улар орасидаги тенглик мавжуд бўлади, ана шу ўзгармас сонни ω^2 деб қабул қиламиз. Бунда иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2\mathrm{T}(t)}{dt^2}+\omega^2\mathrm{T}(t)=0; \qquad \frac{d^4\mathrm{Z}(z)}{dz^4}-\omega^2\frac{m}{\mathrm{E}J}\mathrm{Z}(z)=0\ . \tag{18.9}$$

Биринчи тенгламанинг ечими:

$$\mathrm{T}(t)=\mathrm{A}\sin\omega t+\mathrm{B}\cos\omega t=C\sin(\omega t+\lambda) \tag{18.10}$$

бўлиб, балканинг тебранма харакатда эканлигини билдиради. Бу ечимдан ω нинг физик маъноси — тебраниш такрорлиги эканлиги ҳам кўриниб турибди. Иккинчи тенгламадан тебраниш шакли аниқланади. Унинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$Z(z)=D_1\sin uz+D_2\cos uz+D_3 shuz+D_4 chuz \tag{18.11}$$

бу ерда

$$u=\sqrt{\frac{\omega^2 m}{\mathrm{E}J}}\ .$$

D_1 ,D_2 ,D_3 , D_4 доимийлари балканинг икки учига боғлиқ бўлган чегаравий шартлардан топилади. Чегаравий шартлар эса D_1 ,D_2 ,D_3 , D_4 ни ўз ичига олган тўртта чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалардан иборат. Бизни системанинг нолдан фарқли бўлган ечими қизиқтиради, чунки $Z(z)=0$ бўлганда балка тебранмайди. Тенгламалар системасининг аниқловчиси нолга тенг бўлгандагина тенгламаларнинг ечими нолдан фарқли бўлади.

D_1 , ... , D_4 ни ўз ичига олган тенгламалар системасининг аниқловчисини нолга тенглаш йўли билан ҳосил қилинган тенглама u га нисбатан трансцендент бўлади, яъни тригонометрик ва гиперболик функцийлардан ташкил топади. Бу тенгламани ечиб, ҳар бирининг ўзига мос такрорлиги ва шакли бўлган, чексиз кўп илдизлар топилади.

Шундай қилиб, эркинлик даражаси чексиз бўлган системанинг эркин тебраниши дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий интеграли қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} y(z,t)=\sum_{n-1}^{\infty}\mathrm{Z}_n(z)\mathrm{T}_n(t)=\sum_{n-1}^{\infty}\ (D_{1n}\sin u_n z+D_{2n}\cos u_n z+ \\ +D_{3n}shu_n z+D_{4n}chu_n z)\sin(\omega_n t+\lambda). \end{aligned} \tag{18.12}$$

Мисол. Икки учи шарнирли бириктирилган балканинг эркин тебранишлари такрорликлари ва шакллари топилсин.

Ечиш. *y (z, t)* функцияси учун чегаравий шартларни белгилаймиз:

$$y\,(\mathrm{z},\,\mathrm{t})\,\Big|_{z=0}^{=0} \qquad \frac{d^2y(z,t)}{dz^2}\Big|_{z=l}^{=0} \qquad y\,(\mathrm{z},\,\mathrm{t})\,\Big|_{z=l}^{=0} \qquad \frac{d^2y(z,t)}{dz^2}\Big|_{z=l}^{=0}$$

$Z_n(z)$ функция учун балка учлари шарти қуйидагича бўлади:

$$Z_n\,(\mathrm{z})\,\Big|_{z=0}^{=0;} \qquad \frac{d^2Z(z,)}{dz^2}\Big|_{z=0}^{=0;} \qquad Z_n\,(z)\,\Big|_{z=\ell}^{=0} \qquad \frac{d^2Z_n(z,)}{dz^2}\Big|_{z=\ell}^{=0;}$$

Бу шартлар ёйиқ кўринишда $z=0$ бўлган ҳол учун

$$D_{2n}+D_{4n}=0\ ; \qquad -D_{2n}\,u^2+D_{4n}\,u^2=0\ ;$$

бўлади. Бундан

$$D_{2n}+D_{4n}=0 \qquad (a)$$

келиб чиқади.

Чегаравий шартлар, (*а*) ни эътиборга олганда $z=1$бўлган ҳол учун, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\mathrm{D}_{1\,\mathrm{n}}\sin\,u_n\ell+D_{3n}sh\,u_n\ell=0$$

$$-D_{1n}u_n^2\sin u_n\ell+D_{3n}u_n^2sh\,u_n\ell=0 \qquad (б)$$

Системанинг нолдан фарқли ечимига эга бўлиши учун унинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$\begin{vmatrix}\sin u_n\ell & sh\ u_n\ell\\ -\sin u_n\ell & sh\ u_n\ell\end{vmatrix}=0; \qquad 2\sin u_n\ell\times sh\ u_n\ell=0\,.$$

Бу ўринда $shu_n\ell = 0$ шартидан фойдаланиб бўлмайди, чунки мазкур шарт $U=0$ бўлгандагина бажарилиши мумкин. Бу эса такрорлик ω нинг нолга тенг бўлишига, яъни тебранишнинг бўлмаслигига олиб келади. Шу сабабли $\sin u_{\mathrm{n}}$

l=0 деб оламиз, ўз навбатида $u_n = \frac{n\pi}{\ell}$. Айни вақтда $sin\, u_n l$= 0 ва $sh\ u_n l$ = 0 бўлганлиги сабабли, (*б*) тенглама шартлари қаноатлантирилиши учун D_{3n}= *0* бўлиши зарур. Шундай қилиб нолдан фарқли интеграл доимийси биргина D_{1n} қолди.

Демак,

$$Z_n(z) = D_{\ell n} \sin u_n z = D_{1n} \sin \frac{n\pi}{\ell} z .$$

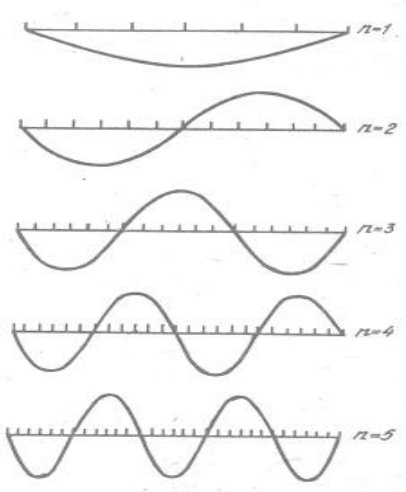
Ҳусусий тебраниш такрорликлари қуйидаги формуладан топилади:

$$\omega_n = u_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} .$$

18.1- расмда sin π z/ℓ функцияси бўйича қурилган тебраниш шакллари тасвирланган.

Қуйидаги ифода (18.5) тенгламанинг ечими ҳисобланади:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{1n} \sin u_n z \sin(\omega_n t + \lambda) .$$



18.1- расм

2. Силжиш тебранишлари. Кўпинча реал биноларнинг тебранишида кўндаланг кучлар таъсири эгувчи моментга нисбатан салмоқли бўладн. Шу сабабли биноларда силжиш деформацияси вужудга келади. Бундай ҳол учун тебранишнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{\alpha GF} \times \frac{dQ(z)}{dz} = -\frac{q(z)}{\alpha GF} \qquad \text{(a)}$$

кўринишга эга бўлади.

Бу ерда Q *(z)* — кўндаланг куч; *q (z)* = $\frac{dQ(z)}{dz}$ ёйиқ куч; α — системанинг кўндаланг кесимига боғлиқ бўлган коэффициент; *F* — кўндаланг кесим юзаси; *G* — силжиш модули.

Агар $q\ (z) = -m(z)\dfrac{d^2y}{dt^2}$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда (*а*) тенглама

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{m}{\alpha GF}\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (б)$$

кўринишга келади.

Сўнгги тенглама ечимини $y(z,t) = Z(z) \times T(t)$ кўринишида излаймиз. Бу ечимнинг иккннчи тартибли ҳосиласини (*б*) тенгламага қўйсак, ечимлари қуйидагича бўлган, иккита дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} T(t) &= A\sin(\omega t + \lambda) \\ Z(z) &= C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Бу ерда $\lambda = \dfrac{m\omega^2}{\alpha GF}$.

Мисол. Консол балканинг — силжиш тебраниши такрорликлари аниқлансин.

Консол балканинг чегаравий шартлари: Z (0) = 0; Z' (0) = 0; Z" (ℓ); Z"' (ℓ) = 0. Бундан $C_2 = 0$ ва $Z(z) = C_1 \sin \lambda z$ келиб чиқади.

Агар $Z = \ell$, $Z'''(\ell) = 0$ бўлса, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$C_1\lambda^3 \cos\lambda\ell = 0.$$

C_1 ва λ нолдан фарқли миқдорлар бўлганлиги сабабли, $\cos\lambda\ell = 0$; $\lambda\ell = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{2}$ ва ҳоказо бўлади.

Буларга мос такрорликлар

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2\ell}\sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}; \qquad \omega_2 = \frac{3}{2}\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}; \qquad \omega_3 = \frac{5}{2}\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}$$

ва ҳоказо.

3. Эгилиш-силжиш тебранишлари. Баъзан бино ва иншоотлар тебранишини ўрганишда эгилиш ва силжиш деформацияларини бир йўла ҳисобга олиш зарурати туғилади. Бундай ҳолда система тебранишининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EJ} - \frac{q(z)}{\alpha GF} \qquad (г)$$

бўлади.

Аввал кўриб ўтганимиздек, *q (z)* ни инерция кучи орқали ифодалаб, (*г*) тенгламани *z* бўйича икки марта дифференциалласак,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{m}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{m}{\alpha GF} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \cdot \partial z^2} = 0$$

келиб чиқади.

Мазкур тенгламанинг ечими тебраниш формулалари ва ҳусусий такрорликларини аниқлайдиган қуйидаги ифодаларни беради:

$$Z(z) = C_1\left[\sin \lambda_i z - \frac{C_2}{C_1}(\cos \lambda_i z - sh\bar{\lambda}_i z - sh\bar{\lambda}_i z) - \frac{C_3}{C_1}\sin \bar{\lambda}_i z\right];$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ\lambda_i^4}{m(1+k\lambda_1^2)}} \quad \text{ёки} \quad \omega = \sqrt{\frac{EJ\bar{\lambda}_i^4}{m(1+k\lambda_1^2)}}$$

Бу ерда $K = \frac{EJ}{\alpha GF}$; $(l\bar{\lambda}_i)^2 = \frac{(l\lambda_i)^2}{1+k\lambda_i^2}$,

Бир учи мустаҳкам бириктирилган, иккинчи учи озод стержень учун

$$\lambda_i = \frac{\pi}{2l}; \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{1}; \quad \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{1} \quad \ldots..$$

бўлади.

18.3. Мажбурий тебранишлар

Вазнга эга бўлган призма шаклидаги балканинг мажбурий тебранишлари масаласи қуйидаги тенгламани, ечиш билан боғлиқдир:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q(z,t). \qquad (18.13)$$

Бу ерда *q(z,t)* — тебраниш уйғотувчи ёйиқ куч интенсивлиги. (18.13) тенглама чизиқли бўлганлиги сабабли, унинг умумий ечими ўзига мос бир жинсли тенглама (18.5) нинг умумий-ечими ва мазкур бир жинссиз тенгламанинг ҳусусий ечимидан ташкил топади. Бир жинсли тенглама (18.5)

нинг умумий ечими аввалги параграфда кўриб ўтилган эди. (18.13) тенгламанинг ҳусусий ечимига тўхталиб ўтамиз. Шу мақсадда ҳусусий ечим ва *q(z, t)* функциясини қуйидаги кўринишда ифодалаймиз:

$$y(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t)Z_n(z);\quad q(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}H_n(t)\times Z_n(z). \tag{18.14}$$

Бу ерда Z_n — балканинг тебраниш шаклини ифодаловчи функция. (18.14) ни (18.13) га қўйиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot{S}_n(t)+\frac{EJ}{m}\frac{n^4\pi^4}{\ell^4}S_n(t)\right]\sin\frac{n\pi z}{\ell}=\sum_{n-1}^{\infty}H_n\cdot\sin\frac{nz\pi}{\ell}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$\ddot{S}_n=\frac{EJ}{m}\cdot\frac{n^4\pi^4}{\ell^4}\cdot S_n=H_n \tag{18.15}$$

келиб чиқади.

Бир жинсли тенгламанинг бошланғич шартлари хусусий ечимини ҳам каноатлантиради; шу сабабли унинг, шунингдек, S_n функциясининг бошланғич шартлари бир жинсли бўлади.

$$S(0)=0;\quad \ddot{S}(0)=0.$$

Шундай қилиб,

$$S_n=\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sqrt{\frac{m}{EJ}}\int_0^t H_n(\tau)\sin\sqrt{\frac{EJ}{m}}(t-\tau)d\tau. \tag{18.16}$$

$H_n(\tau)$ функцияси Фурье қатори коэффициентларини аниқлайдиган оддий формуладан топилади:

$$H_n(\tau)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{18.17}$$

Қуйидаги ифода (18.17) ни (18.16) га қўйиш орқали топилади:

$$S_n=\frac{2\ell}{n^2\pi^2}\sqrt{\frac{m}{EJ}}\int_0^t d\tau\int_0^{\ell}f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}(t-\tau)dx \tag{18.18}$$

(18.18) ни (18.14) га қўйсак, *y (z, t)* келиб чиқади.

19- БОБ
ИНШООТЛАР ТЕБРАНИШИНИ ТАДҚИҚ ЭТИШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

Аввалги бобларда иншоотлар тебранишини тадқиқ этишнинг айрим аниқ усуллари билан танишиб чиққан эдик. Бироқ улар кўпинча ҳисоб ишларида математик жиҳатдан анча мураккаб қийинчиликлар туғдиради. Иншоотларни лойиҳалаш жараёнида базан уларнинг динамик хоссаларини, тақрибан бўлса ҳам, тезда аниқлаш зарурати учраб туради. Бундай ҳолларда системаларни таҳлил қилишнинг тақрибий усуллари жуда қўл келади. Бунда гап система тебранишининг ҳусусий такрорликлари ва шаклларини аниқлаш ҳамда иншоотларнинг динамик мустаҳкамлигини текшириш ҳақида боради, албатта. Мазкур бобда ана шундай усуллар билан танишиб чиқамиз.

19.1. Энергетик усул

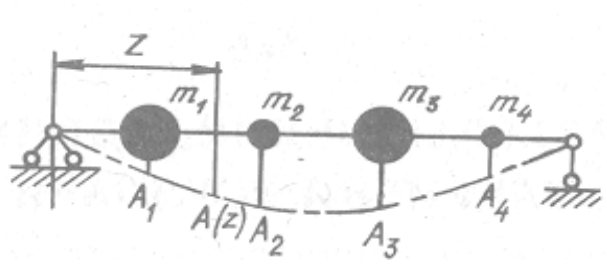
Энергетик усул қаршиликсиз муҳитда эркин тебраниш жараёнида системаларнинг потенциал ва кинетик энергиялари йиғиндиси ўзгармас миқдор эканлигига асосланади. Эркин тебраниш жараёнида системанинг кинетик энергияси эластик потенциал энергияга, потенциал энергия эса кинетик энергияга ўтиб туради. Муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса, энергиянинг сақланиш қонунига биноан

$$К + П = С = const \qquad (19.1)$$

бўлади, бу ерда $К$ — кинетик энергия, $П$ — потенциал энергия.

Тебранаётган системанинг солқилиги максимал бўлганда кинетик энергия нолга тенг бўлади, чунки бу вазиятда тебранаётган массаларнинг тезлиги ноль бўлади, система дастлабки мувозанат вазиятидан ўтаётган лахзада эса потенциал энергия нолга тенг, чунки бунда система деформацияланмаган ҳолатда бўлади. Потенциал энергия ноль бўлганида, кинетик энергия ўзининг энг катта қийматига ($К_{max}$) эришади. Кинетик энергия ноль бўлганда эса

потенциал энергия ($П_{max}$) максимум бўлади. Бу мулоҳазалардан $K_{max}= П_{max}$ келиб чиқади (19.2).



19.1- расм

Кўп массали балка (19.1- расм) қуйидаги қонуният бўйича эркин тебраняпти дейлик:

$$y(z, t)=A \sin(\omega t + \lambda) \qquad (19.3)$$

бу ерда $y(z, t)$ — абциссаси z бўлган нуқтанинг t лаҳзадаги кўчиши;

$A=A(z)$ — тебраниш шакли, яъни энг катта солқилик.

(19.3) тенглама барча нуқталар битта фазада бир хил такрорлик билан тебранишини, яъни барча нуқталар статик мувозанат ҳолатинн бир вақтда босиб ўтиб, бир вақтнннг ўзида максимал солқиликка эришишини англатади.

Балка тебранаётган пайтда нуқталарнинг тезлиги

$$\dot{y}\ (z, t) = A(z)\omega\cos(\omega t+\lambda)$$

тенгламадан топилади. Максимал кўчиш ва максимал тезлик

$$y_{max} = A(z); \qquad \dot{y}_{max} =\omega\ A(z);$$

бўлади.

Балканинг солқилиги (кўчиши) максимал бўлгандаги потенциал энергия:

$$П_{\max} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EJ(A'')^2\,dz$$

Тезлик максимал бўлгандаги кинетик энергия:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}\sum m_i(A_i\omega)^2, \qquad (19.5)$$

бу ерда A_i — i-масса кўчишининг амплитудаси.

(19.2) га асосан (19.4) ни (19.5) га тенглаштирамиз ва бундан такрорликни аниқлаш формуласини (Рэлёй формуласини) келтириб чиқарамиз:

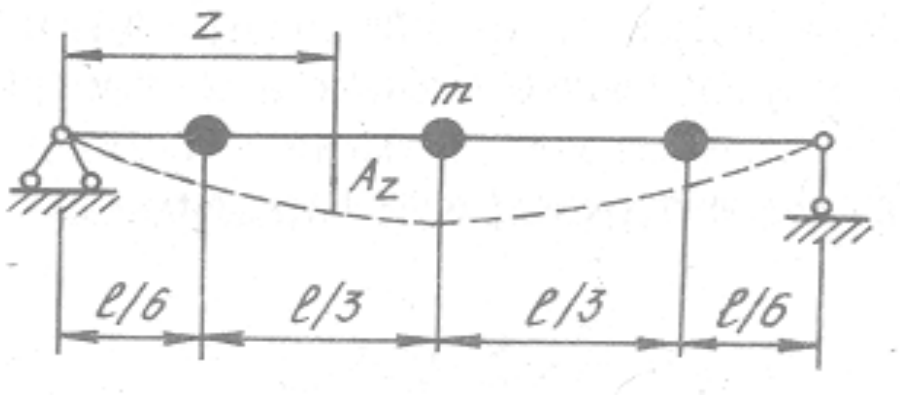
$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\ell} EJ(A'')^2\,dz}{\sum m_i A_i^2}. \qquad (19.6)$$

Агар балкага узлуксиз ёйиқ масса қўйилган бўлса, махраждаги йиғинди интеграл билан алмаштирилади.

Агар тебранишларнинг ҳақиққий шакли *A=A (z)* маълум бўлса, у ҳолда Релей формуласи аниқ натижа беради. Бироқ *A (z)* олдиндан маълум бўлмаганлиги сабабли, уни ўзимиз ихтиёрий равишда қабул қиламиз. Бунинг оқибатида ҳисоб тақрибий тус олади. (19.6) дан топилган такрорликнинг қиймати ҳамма вақт ҳақиққий қийматдан ортиқроқ юради.

A (z) функциясини шундай танлаш керакки, тахмин қилинган тебраниш шакли ҳақиққий тебраниш шаклига мумкин қадар яқин келсин. Чегаравий шартларга қатъий амал қилиш зарур. Тахминий шакл ҳақиққий шаклга қанча яқин бўлса, ҳисоб шунча аниқ бўлади.

Мисол. Ўзаро тенг учта массага эга бўлган балканинг (19.2- расм) ҳусусий такрорлиги энергетик усулда аниқлансин.



19.2- расм

Ечиш. Тебраниш шаклини

$$A = a\sin\frac{pz}{\ell}$$

кўринишда қабул қиламиз. Бу ифода барча чегаравий шартларни қаноатлантиради. Чунончи, *z=0;* ва *z=l* бўлганда, *A=0* ва *A"=0*; айни пайтда *A'≠0* ва *A"' ≠ 0*. Ифодадаги *a* миқдор аниқсизлигича қолаверади, чунки у касрнинг суратида ҳам махражида ҳам қатнашмаганлиги учун қисқариб кетади, ҳисоб натижасига таъсир этмайди.

Берилган ифодадан икки марта ҳосила оламиз ва уни квадратга оширамиз:

$$A'' = -a\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{\pi z}{\ell};$$

$$(A'')^2 = -a^2\frac{\pi^4}{\ell^4}\sin^2\frac{\pi z}{\ell};$$

(19.6) формуланинг сурати

$$\int_0^{\ell} EJ(A'')^2 dz = \frac{a^2 p^4 EJ}{2\ell^3}$$ га тенг.

Формула махражига кирувчи кўчишларни ҳисоблаймиз:

$$A = a\sin\frac{\pi}{\ell}\cdot\frac{\ell}{6} = \frac{a}{2};$$

$$A = a\sin\frac{\pi}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2} = a;$$

$$A = a\sin\frac{\pi}{\ell}\cdot\frac{5\ell}{6} = \frac{a}{2}.$$

(19.6) формуланинг махражи

$$\sum m_i A_i^2 = m(\frac{a}{2})^2 + ma^2 + m(\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{2}ma^2$$

Такрорлик квадрати

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EJ}{3m\ell^3}.$$

Такрорлик

$$\omega = \frac{5{,}696}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}.$$

Такрорликнинг бу қиймати аниқ усулда топилган

$$\omega = \frac{5{,}692}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}$$

қийматидан жуда оз фарқ қилади.

(19.б) формуладан фойдаланишнинг бошқача йўллари ҳам бор. Масалан, тебраниш шакли *A (z)* ни тахминий олмасдан, балкага ихтиёрий статик кучлар қўямиз ва бу кучлардан ҳосил бўлган солқиликни тебраниш шакли деб қабул қиламиз. Бу усулнинг қулайлиги шундаки, чегаравий шартлар ўз-ўзидан қаноатлантирилади.

Такрорлиги изланаётган балкага ихтиёрий P_1, P_2 ... кучлар системаси қўйилган дейлик. Бунда системанинг потенциал энергияси ташқи кучлар иши орқали осонгина топилади:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2}\sum \mathrm{P_i A_i}$$

бу ерда A_i — қабул қилинган кучлар системаси таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Потенциал энергиянинг янги ифодасини (19.6) формулага қўйсак:

$$\omega^2 = \frac{\sum P_i A_i}{\sum m_i A_i} \tag{19.8}$$

келиб чиқади. Агар $P_i=mg$ эканлиги эътиборга олинса, такрорлик формуласи янада соддалашади:

$$\omega^2 = \mathrm{g}\frac{\sum \mathrm{m_i A_i}}{\sum \mathrm{m_i A_i^2}} \tag{19.9}$$

Масаланинг шартида берилган ташқи кучларни ихтиёрий кучлар сифатида қабул қилса ҳам бўлади.

(19.6) формуладан фойдаланишнинг яна бир йўли билан танишиб ўтамиз. Бунда тебраниш шаклини аниқлаш учун балканинг ихтиёрий бир нуқтасига биргина ташқи куч қўямиз. A_0 — куч қўйилган нуқтанинг (“келтирилган нуқта”) шу куч таъсирида ҳосил бўлган кўчиши дейлик.

У ҳолда балкада тўпланган максимал потенциал энергия

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} cA_0^2 \tag{19.10}$$

бўлади. Бу ерда c — балканинг бикирлик коэффициенти.

(19.10) ифодани (19.5) ифодага тенглаштириб,

$$\omega^2 = \frac{cA_0^2}{\sum m_i A_i} \tag{19.11}$$

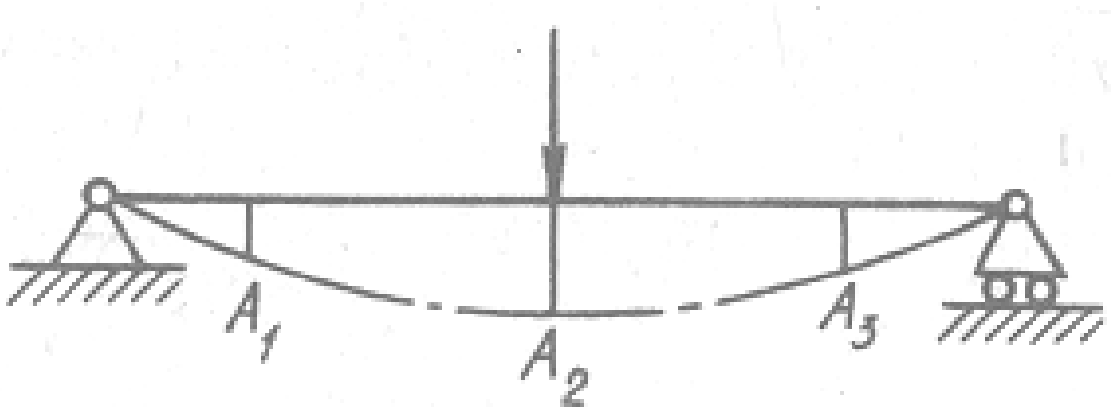
формулага эга бўламиз. Қуйидаги ифода

$$m_0 = \frac{\sum m_i A_i^2}{A_0^2} \tag{19.12}$$

системанинг келтирилган массаси деб аталади.

Буни эътиборга олсак, (19.11) формула янада ихчамлашади:

$$\omega^2 = \frac{c}{m_0} \qquad (19.13)$$



19.3- расм

Мисол. Юқорида кўриб ўтилган, балканинг такрорлигини (19.13) формула ёрдамида аниқлаймиз. Бунинг учун аввал йиғиқ куч таъсирида балканинг кўчишларини топамиз. Келтирилган нуқта балканинг ўртасида, деб олсак, у ҳолда қуйидаги кўчишларга эга бўламиз (19.3- расм);

$$A_1 = A_3 = \frac{39}{81} A_0, \qquad A_2 = A_0;$$

(кучнинг қиймати ва A_0 нинг масштаби аҳамиятга эга эмас).

(19.12) формуладан келтирилган массани топамиз:

$$m_0 = m(\frac{39}{81})^2 + m + m(\frac{39}{81})^2 = 1{,}4636\ m\,.$$

Берилган балканинг бикирлик коэффициенти

$$c = \frac{48EJ}{\ell^3}\,.$$

(19.13) формулага биноан такрорликнинг квадрати

$$\omega^2 = \frac{48EJ}{1{,}4636\ m\ell^3} = 32{,}79\,\frac{EJ}{m\ell^3};$$

такрорлик

$$\omega = \frac{5{,}726}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}\,.$$

Такрорликнинг бу қиймати аниқ ечимдан 0,6 % фарқ қилади.

19.2. Бубнов — Галеркин усули

Агар қуйидаги дифференциал тенглама:

$$(EJy_i'')'' - m\omega_i^2 y_i(z) = 0 \qquad (19.14)$$

системанинг эркин тебранишини ифодаласа, унинг ечимини

$$y_i(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) \qquad (19.15)$$

кўринишда олиш мумкин. Бу ерда $\varphi_i\ (z)$ — барча чегаравий шартларни қаноатлантирувчи, танланувчи функция: a_i — номаълум коэффициентлар. (19.15) ни (19.1) га қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left[EJ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) = 0$$

Бу айният ҳар қандай ихтиёрий функция $\varphi_к\ (z)$ га кўпайтирилганда ҳам ўз кучини сақлаб қолади:

$$\left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) = 0$$

Тенгламанинг интегралини тузамиз

$$\int_0^{\ell} \left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m_i \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) dz = 0, \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (19.16)$$

(19.16) тенглама Бубнов — Галеркин усули тенгламаси деб аталади. Мазкур тенглама a_i коэффициентларига нисбатан бир жинслидир. Тенгламанинг нолдан фарқли ечимига эга бўлиш учун унинг аниқловчиси нолга тенглаштирилади. Ҳосил бўлган тенгламанинг энг кичик илдизи системанинг ҳусусий такрорлиги бўлади.

Биринчи яқинлашувда, яъни $n = 1$ бўлганда, каноник тенглама $C_{11}a_1=0$ бўлади. $a_1 \neq 0$ бўлгани учун

$$C_{11} = \int_0^{\ell} \left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i''(z) \right]'' \varphi_i(z) - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i^2(z) \right\} dz = 0 \qquad (19.17)$$

Бу ердан такрорлик квадратини аниқлайдиган

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{\ell} [EJ\varphi''(z)]'' \varphi_i(z) - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i^2(z)\, dz}{\int_0^{\ell} m\varphi_i^2(z)\, dz} \qquad (19.18)$$

формула келиб чиқади. $\varphi_i\ (z)$ функция тебранишнинг асосий шаклига қанча яқин танланса, ҳисоб аниқлиги шунча ортади.

Мисол. Бир учи шарнирли қўзғалмас, иккинчи учи шарнирли қўзғалувчан таянчга эга бўлган, текис ёйиқ массали балканинг биринчи такрорлиги тақрибий усулда аниқлансин ва аниқ ечим билан таққослансин.

1. Танланувчи функцияни $\varphi_1(z) = \sin\frac{\pi z}{\ell}$ кўринишда, яъни тебраиш биринчи шаклининг аниқ ифодаси бўйича оламиз. (19.18) га кўра

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{\ell} \left[EJ\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\frac{\pi z}{\ell}\right)\right]'' \sin\frac{\pi z}{\ell}\, dz}{\int_0^{\ell} m\sin^2\frac{\pi z}{\ell}\, dz} = \frac{\pi^4}{\ell^4}\cdot\frac{EJ}{m}$$

Биринчи такрорликнинг аниқ қийматига эга бўлдик.

2. Танланувчи функцияни балканинг ёйиқ кучдан ҳосил бўлган солқилиги кўринишида қабул қиламиз:

$$\varphi_i(z) = A\left(\frac{z}{\ell} - \frac{2z^3}{\ell^3} + \frac{z^4}{\ell^4}\right),\ \text{бу ерда}\ A = \frac{q\ell^4}{24EJ}$$

(19.18) формулага кўра

$$\omega_i^2 = \frac{\int_0^{\ell} \left[EJ\frac{A}{\ell^2}\left(-\frac{12z}{\ell} + \frac{12z^2}{\ell^2}\right)\right]'' A\left(\frac{z}{\ell} - \frac{2z^3}{\ell^2} + \frac{z^4}{\ell}\right) dz}{\int_0^{\ell} mA^2\left(\frac{z}{\ell} - \frac{2z^3}{\ell^3} + \frac{z^4}{\ell}\right) dz} = \frac{97{,}55}{\ell^4}\cdot\frac{EJ}{m};$$

$$\omega_1 = \frac{9{,}887}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}};\quad \text{аниқ қиймати}\ \omega_1 = \frac{9{,}8696}{\ell^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

19.3. Кетма-кет яқинлашув усули

Бир неча массага эга бўлган система тебранганда ҳар бир массада (система энг катта солқиликка эришганда:

$$J_{ni}=m_iA_i\omega^2$$

инерция кучи ҳосил бўлади. Агар бу кучларнинг миқдори маълум бўлганида тебраниш шакли ва такрорлигини осонгина аниқласа бўларди. Бироқ кучларнинг миқдори такрорликка боғлиқ бўлгани учун номаълумдир. Бундай ҳолларда масалани ҳал этишда кетма-кет яқинлашув усули жуда қўл келади.

Кетма-кет яқинлашув услубининг *Стодола* таклиф этган вариантини кўриб этамиз. Биринчи яқинлашувда балканинг солқилиги A_1 ни иҳтиёрий қабул қиламиз. Бунга мос инерция кучи

$$J_{ni}^{(1)} = m_i A_i \omega_1^2$$

бўлади; ω_1^2 – ҳозирча номаълум миқдор.

ω_1^2 мартта кичрайтирилган $J_{ni}^{(1)}$ кучидан (яъни m_i A_i) кучидан ҳосил бўладиган солқилик A_{12} ни аниқлаймиз; $J_{ni}^{(1)}$ дан ҳосил бўладиган ҳақиқий солқилик ω_1^2 марта катта бўлади:

$$A_{12}\omega_1^2.$$

Агар A_{12} солқилик аниқ танланса, у ҳолда A_2 солқилик A_1 га айнан ўҳшаш бўлади ва

$$A_{i1} = A_{i2}\omega_1^2$$

тенглик бажарилади. Бу ердан

$$\omega_1^2 = \frac{A_{i1}}{A_{i2}}.$$

Тебраниш шакли A_{12} тақрибан қабул қилинганлигидан ҳисоб натижаси ҳам тақрибий бўлади. Шу сабабли, A_{i1}/A_{i2} нисбат ҳам турли нуқталар $\omega_1^2 = \frac{A_{1max}}{A_{2max}}$

учун турлича қийматга эга бўлади, такрорлик квадратининг тақрибий қиймати учун эса солқилик энг катта бўлган нуқтанинг амплитудалари олинади:

$$\omega_2^2 = \frac{A_{2max}}{A_{3max}}.$$

Шундай қилиб, такрорликнинг тақрибий қиймати икки солқиликнинг ҳарактерли ординаталари нисбатига тенг экан: солқиликларнинг бири A_1 қабул қилинадиган миқдор бўлиб, иккинчиси m_i A_{i1} кучи таъсирида ҳисоблаб топиладиган A_2 солқиликдир. Агар $\frac{A_1}{A_2}$ нисбат барча нуқталар i учун бир хил қийматга эга бўлса, натижа қаноатланарли бўлади, борди-ю нисбат турли қийматга эга бўлса, у ҳолда иккинчи яқинлашувни бажариш зарур. Бунда A_2 ни бошланғич шакл сифатида қабул қилиб, m_i A_{i2} кучи топилади ва унинг таъсирида ҳосил бўладиган солқилик A_3 аниқланади. Иккинчи яқинлашувда такрорлик квадрати

$$\omega_2^2 = \frac{A_{2max}}{A_{3max}}$$

нисбатдан топилади.

Яқинлашувлар барча нуқталар учун бир хил нисбатлар ҳосил бўлгунга қадар шу йўсинда давом эттирилаверади.

19.4. Дункерлай формуласи

Дункерлай формуласи эркинлик даражаси бир неча бўлган системаларнинг биринчи такрорлигини такрибан аниқлашда қўлланилади .

Агар балкага бирин-кетин массалар юкласак, ҳар бир юкланган ҳол учун тебраниш такрорлиги

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{m_j \delta_{jj}}}.$$

бўлади; бунда

$$\frac{1}{\omega_j^2} = m_j \delta_{jj} \qquad (19.19)$$

бу ерда δ_{jj} — йиғиқ масса m_j жойлашган нуқтага қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган кўчиш.

Дункерлай формуласига кўра, қолган массаларнинг система тебранишига бўлган таъсири, уларнинг (19.19) формуладан топилган қийматларини қўшиш орқали ҳисобга олинади, яъни

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

ёки

$$\omega_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_j \delta_{jj}}}. \qquad (19.20)$$

Энергетик усулда такрорлик орттирилган қийматда топилган бўлса, Дункерлай формуласи такрорликнинг кичрайган қийматини беради. Такрорликнинг аниқ киймати шу икки қиймат орасида ётади. Бироқ такрибий ҳисобларнинг аниқлик даражаси амалий талабларни тўла каноатлантиради.

Мисол. Энергетик усулда ҳисобланган уч массали балканинг (19.2- расмга қаранг) такрорлиги Дункерлай формуласи ёрдамида аниқлансин.

Бир массали системанинг такрорлиги аввалдан маълум формула $\omega^2 = \frac{c}{m}$ дан топилади. Бизнинг ҳолда бикирлик коэффициенти $C = \frac{3EJ(a+b)}{a^2b^2}$ ифодадан аниқланади. Бу ерда: a — массадан чап таянчгача бўлган масофа, b — массадан ўнг таянчгача бўлган масофа.

Чапдаги ва ўнгдаги массалар учун тебраниш такрорлиги бир хил бўлади:

$$\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{3 \cdot 1296\,\mathrm{EJ}}{25\mathrm{m}\ell^3} = 155{,}5\,\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{m}\ell^3}$$

Иккита четки массани йўқ деб фараз қилиб, фақат ўртадаги массанинг ўзини олсак, тебраниш такрорлиги

$$\omega_2^2 = \frac{48\mathrm{EJ}}{\mathrm{m}\ell^3}$$

бўлади. Дункерлай формуласига кўра:

$$\frac{1}{\omega^2}=\frac{\mathrm{m}\ell^3}{155{,}5\mathrm{EJ}}+\frac{\mathrm{m}\ell^3}{48\mathrm{EJ}}+\frac{\mathrm{m}\ell^3}{155{,}5\mathrm{EJ}}=0{,}03368\,\frac{\mathrm{m}\ell^3}{\mathrm{EJ}}.$$

Бундан

$$\omega=\sqrt{\frac{EJ}{0{,}03368\,m\ell^3}}=\frac{5{,}449}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}.$$

Бу натижа такрорликнинг аниқ қийматидан 5,5 % камроқдир.

Шундай қилиб, такрорликнинг аниқ қиймати энергетик усул ва Дункерлай формуласи билан топилган қийматларнинг оралиғида ётишига ишонч ҳосил қилдик, яъни

$$\frac{5{,}449}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}<\omega_0<\frac{5{,}696}{\ell}\sqrt{\frac{EJ}{m\ell}}$$

19.5. Спектрал функция усули

С. А. Бернштейн ўзининг бу усулида изланаётган ҳусусий такрорлик квадратининг юқори ва қуйи чегараларини белгилаб беради:

$$\frac{1}{\sqrt{B_{i2}}}<\omega_j^2<\frac{2}{\frac{1}{B_{i1}}+\sqrt{2\frac{B_{j2}}{B_i^2}-1}} \qquad (19.21)$$

Эркин тебранишларнинг биринчи такрорлигини аниқлашда B_{11} ва B_{12} қуйидаги формулалар орқали топилади:

$$\mathrm{B}_{11}=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}m_j\delta_{\mathrm{jj}}=m_1\delta_{11}+m_2\delta_{22}+\ldots+m_n\delta_{\mathrm{nn}};$$

$$B_{12}=\sum_{j=1}^{n}m_j^2\delta_{jj}^2+2\sum_{j=1}^{n}m_jm_k\delta_{jk}^2\quad(jk)$$

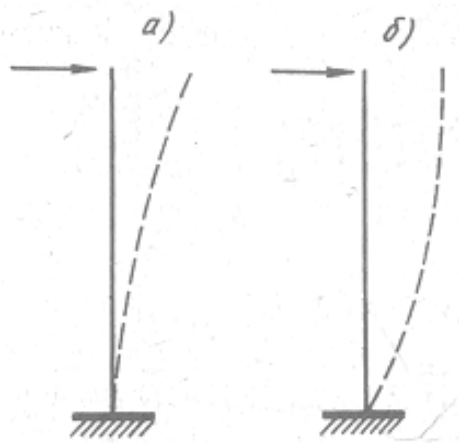
Ҳусусий тебранишларнинг иккинчи такрорлиги (ω^2) ни аниқлашда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$\mathrm{B}_{21}=\mathrm{B}_{11}-\frac{1}{\omega_1^2};\ \mathrm{B}_{22}=\mathrm{B}_{12}-\frac{1}{\omega_1^4}$$

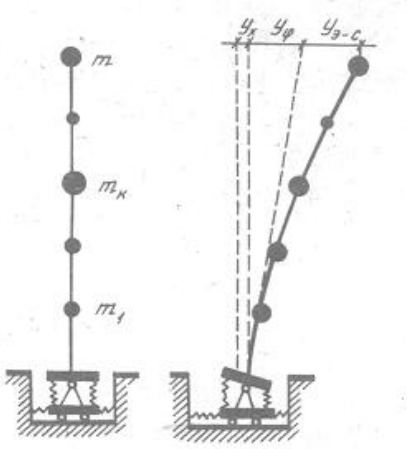
Такрорликнинг ҳисобий қиймати сифатида тенгсизликнинг чап ва ўнг томонидаги натижаларнинг ўртача арифметик қиймати олинади.

19. 6. «Иншоот — замин» системасининг эркин тебранишлари[1]

Реал бино ва иншоотларнинг тебранишида ҳар бир нуқтанинг умумий кўчиши икки хил кучишнинг йиғиндисидан — бинонинг эластик деформацияси оқибатидаги кўчиш ҳамда заминнинг деформацияланиши натижасида юзага келадиган кўчишлардан ташкил топади. Ўз навбатида, иншоотлар тузилиши, массаси ва ўлчамларига қараб эгилиш (19.4- расм, *а*) ёки силжиш (19.4- расм, *б*) деформацияси бўйича тебранади. Кўпинча иншоотлар тебранишида деформациянинг ҳар иккала хили баравар иштирок этади. Бундай тебранишлар *эгилиш - силжиш тебранишлари* деб аталади.



19.4-расм



19.5- расм

Иншоот кўчишларида замин (ер)нинг қайишқоқлиги (эластиклиги) ҳам сезиларли роль ўйнайди. Ҳар қандай бино тебраниш жараёнида замин устида чайкалиши (оғишма ҳаракатда бўлиши) ҳамда замин бўйлаб силжиши (сирпанма ҳаракатда бўлиши) мумкин. Демак, заминнинг қайишқоқлиги ҳам иншоотлар тебранишида икки хил — *чайкалма* ва *сирпанма кўчишларни* юзага келтирар экан.

Тебраниш жараёнида ана шу тўрттала омил эътиборга олинадиган ҳисоблаш моделини илмий адабиётда «*иншоот – замин*» системаси деб юритилади.

---

[1]. Мазкур параграфда баён этилган усул Б.А.Ҳобилов ва В.П.Цой томонидан ишлаб чиқилган.

Ҳозир кўриб ўтиладиган усулда ҳар қандай системанинг эркин тебраниши такрорлиги ва шаклини аниқлашда юқорида санаб ўтилган тўрттала кўчиш ҳисобга олинади. Бу усулга кўра бинонинг замин устидаги оғишма ва сирпанма тебранишлари аниқланаётганда бино абсолют қаттиқ жисм деб фараз этилади. Бинонинг эластик эгилиш-силжиш тебранишлари эса қаттиқ жисмга боғланган координата системаси орқали аниқланади. Бундай ҳолатни акс эттирувчи динамик ҳисоблаш схемаси 19.5- расмда тасвирланган. Усулнинг замирида тебраниш шаклларини кетма-кет яқинлаштириш усули билан солқиликни аниқлашнинг графоаналитик усули ётади.

Усулларнинг биринчисига кўра, массалар тўпланган нуқталарнинг қабул қилинган солқиликлари мос равишда, массаларга ва такрорликнинг квадратига кўпайтирилади. Ҳосил бўлган кўпайтма инерция кучини беради. Бу куч таъсирида вужудга келган солқилик графо – аналитик усул бўйича аниқланади. Шу йўл билан топилган солқиликларни биринчи яқинлашувдаги *тебраниш шакллари* деб қаралади. Изланаётган такрорликларнинг тақрибий қийматлари иккита кетма-кет яқинлашувдаги солқиликларнинг тенглиги шартидан фойдаланиб топилади. Агар қабул қилинган тебраниш шакллари (солқилик) ҳисоблаш натижасида топилган шаклларга етарли даражада яқин бўлса, такрорликларнинг тақрибий қийматлари ҳам бир хил бўлади. Изланаётган такрорлик тақрибий қийматларнинг ўртача арифметик миқдори сифатида аниқланади.

Усулнинг тафсилотини тўрт массали системанинг мисолида баён этамиз. Иншоотнинг ҳисоблаш схемаси 19.5- расмдаги сингари бўлади. Системанинг асосий (биринчи) тебраниш шакли ва шунга мос такрорлигини аниқлаш талаб этилади, дейлик.

Ҳисоб ишлари жадвал кўринишида бажарилади. 1- жадвалда эгилиш, 2- жадвалда эса силжиш тебранишлари ҳисобланади. Иккала ҳолда ҳам таянч қайишқоқлиги ҳисобга олинмаган.

1- жадвалнинг дастлабки устунида механик миқдорлар, оҳиргисида ҳисоблаш алгоритми (тартиби) келтирилган. Охиридан битта олдинги

устундаги «кўпайтувчилар» ҳисоб ишларини соддалаштириш мақсадида киритилган. Бу миқдорлар арифметик амалларда қавсдан ташқарига чиқарилган сон вазифасини ўтайди. Ўртадаги устунларда ҳисоблаш схемаси тасвирланган. Агар берилган система кўп қаватли бино бўлса, у ҳолда массалар қаватлараро ёпмалар сатхида тўпланади. Массаларни тўплашда бинонинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал элементлари вазни йиғиб чиқилади. Қаватлар вазни йиғиқ куч сифатида жадвалнинг биринчи қаторида келтирилган.

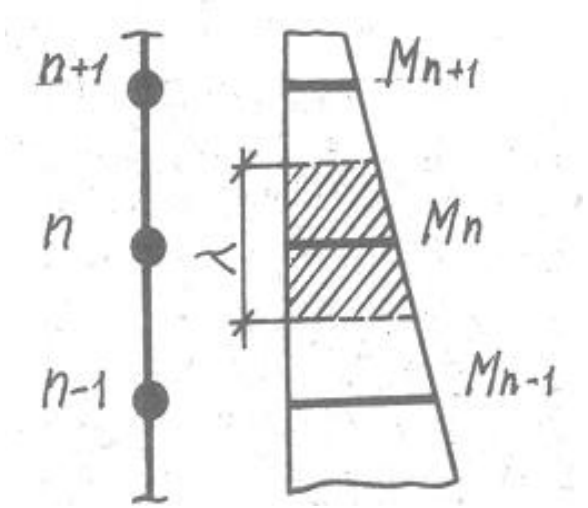
Жадвалнинг иккинчи қаторида иншоот вертикал элементларининг эгилишдаги бикирлиги берилган. Қулайлик учун *EJ* «кўпайтувчи» устунига чиқарилган. Тебраниш шакллари $z_i^{(0)}$ нолинчи яқинлашувда ихтиёрий равишда қабул қилинади (3- қатор). Бунда, ҳисобнинг талаб этилган аниқлик даражасига қараб, камдан – кам ҳолларда кейинги яқинлашув амаллари бажарилади. Кўпинча такрорлик биринчи яқинлашувнинг ўзида етарли даражада аниқликка эга бўлади.

Инерция кучи (4- қатор} қабул қилинган солқиликлар $z_i^{(0)}$ ни тегишли масса ва изланаётган такрорликнинг квадратига кўпайтириш орқали топилади. Бу ўринда ҳисоблаш алгоритмида (1) • (3) амали ёзилган. Бунинг маъноси: тўртинчи қатор миқдорларини аниқлаш учун 1- қатор сонларини 3- қатор сонларига кўпайтириш зарур, демакдир. Кўндаланг кучлар $\sum\rightarrow(4)$ алгоритми бўйича топилади, яъни 4- қатордаги сонларнинг чапдан ўнгга томон йиғиндиси олинади. 5- қатор сонларининг йиғиндиси эса эгувчи моментларни беради. *M:EJ* ни фиктив сохта куч интенсивлиги деб қабул қилинади. Фиктив ёйиқ кучларни йиғиқ кучга келтириш учун, яъни фиктив кўндаланг кучларни аниқлаш учун, эгувчи моментларнинг трапеция шаклидаги юзалари қўшиб чиқилади; бунда эпюранинг учбурчакли юзаси охиридан битта олдинги массанинг эпюрасига қўшилади (19.6- расм). 8- қатор сонларини ўнгдан чапга қараб қўшиб чиқсак, солқилик бурчаги φ топилади. Ҳудди шундай, 9- қатор сонларининг йиғиндиси солқилик y ни беради. Барча солқиликларни оҳирги массанинг солқилигига (бизда y_4) бўлсак, биринчи яқинлашувдаги тебраниш

шакли $z_i^{(1)}$ келиб чиқади (19.7- расм, 1- пунктир чизиқ). Биринчи шакл бўйича эгилиш тебранишлари такрорликлари қуйидаги формуладан топилади:

$$\omega_{i\,э} = \sqrt{\frac{z_i EJg}{y_i \lambda^3}} \qquad (19.22)$$

бу ерда y_i — масса тўпланган нуқталарнинг солқиликлари; λ — йиғиқ массалар орасидаги масофа: z_i — тебранишларнинг биринчи шакли ординаталари: i — массанинг тартиб номери.



19.6- расм

$z_i^{(0)}$ қийматлари билан $z_i^{(1)}$ қийматлари орасидаги тафовутнинг катта ёки кичиклиги, шунингдек, массаларнинг тегишли такрорликлари ўзаро яқин ёки йироқлиги навбатдаги яқинлашувни бажариш ёки бажармаслик масаласини ҳал этади. Агар такрорликлар орасидаги фарқ катта бўлса, у ҳолда навбатдаги яқинлашувни амалга ошириш лозим.

Бунда дастлабки шакл сифатида $z_i^{(1)}$ қабул килиниб, 4 дан 12- гача бўлган амаллар (1- жадвал) кўриб ўтилган тартибда такроран бажарилади.

Такрорликларнинг ўзаро яқин қийматлари топилгач, уларнинг ўртача арифметик қиймати $\omega_э^{ўр}$ аниқланади. Эгилиш тебранишлари асосий шаклининг даври қуйидаги формуладан топилади:

$$T_э = \frac{2\pi}{\omega_э^{ўр}} \qquad (19.23)$$

Силжиш тебранишларининг шакли ва такрорлиги ҳам жадвал кўринишида аниқланади (2- жадвал). Ҳисоблаш тартиби, жадвалнийг оҳирги устунида келтирилган. Силжишдаги бикирлик αGF ни ҳисоблашда, пландаги шакли тўғри тўртбурчак бўлган бинолар учун α=0,67 деб олинади.

1 – жадвал

ЭГИЛИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик миқдорлар	m_4	m_3	m_2	m_1		Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
1.	Йиғиқ куч	300	300	300	300			
2.	Бикирлик EJ	1	1	1	1		$18\cdot10^6$	
3.	Тебраниш шакли $Z_i^{(0)}$	1,0	0,8	0,5	0,1	0,0	Z_4	қабул қилинади
4.	Инерция кучи	300	240	150	30	0,0	$\omega^2 Z_4 : g$	$(1)\cdot(3)$
5.	Кўндаланг куч Q	300	540	690	720		–»–	$\sum(4)\rightarrow$
6.	Эгувчи момент M	0	300	840	1530	2250	$\lambda\omega^2 Z_4 : g$	$\sum(5)\rightarrow$
7.	Фиктив куч интенсивлиги	0	300	840	1530	2250	$\lambda^2\omega^2 Z_4 : gEJ$	$(6):(2)$
8.	Йиғиқ фиктив куч	0	337,5	840	1530	2250	$\lambda^3\omega^3 Z_4 : EJg$	M эп. юзаси
9.	Солқилик бурчаки φ	4957,5	4620	3780	2250		–»–	$\leftarrow\sum(8)$
10.	Солқилик y_i	15607,5	10650	6030	2250	0,0	$\lambda^3\omega^3 Z_4 : EJg$	$\leftarrow\sum(9)$
11.	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,68	0,39	0,14	0,0		$(y_i):(y_4)$
12.	Тебраниш такрорлиги ω_i	20,5	20,4	20,7	20,2	0,0		$\omega_э^{ўр} = 20{,}45$

2 - жадвал

СИЛЖИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик миқдорлар	m_4	m_3	m_2	m_1		Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
1.	Йиғиқ куч	300	300	300	300			
2.	Бикирлик $\alpha G F$	1	1	1	1		$0{,}24 \cdot 10^6$	
3.	Тебраниш шакли $Z_{1i}^{(0)}$	1,0	0,9	0,8	0,5	0,0	Z_4	қабул қилинади
4.	Инерция кучи	300	270	240	150	0,0	$\omega^2 Z_4 : g$	$(1) \cdot (3)$
5.	Кўндаланг куч Q	300	570	810	960		–»–	$\sum (4) \rightarrow$
6.	Фиктив куч интенсивлиги	300	570	810	960		$\omega^2 Z_4 : \alpha G F g$	$(5) : (2)$
7.	Йиғиқ фиктив куч	0	300	570	810	960	$\lambda \omega^2 Z_4 : \alpha G F g$	Q эп. юзаси
8.	Солқилик φ	2640	2340	1770	960	0,0	–»–	$\leftarrow \sum (7)$
9.	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,89	0,67	0,36	0,0		$(y_i) : (y_4)$
10.	Тебраниш такрорлиги ω_{1i}	17,2	17,3	17,2	17,1	0,0		$\omega_c^{\text{ўр}} = 17{,}2$

Силжиш тебранишларининг асосий такрорлиги тақрибий қийматлари қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\omega_{i\,э} = \sqrt{\frac{z_i \alpha G F g}{y_i \lambda^3}} \qquad (19.24)$$

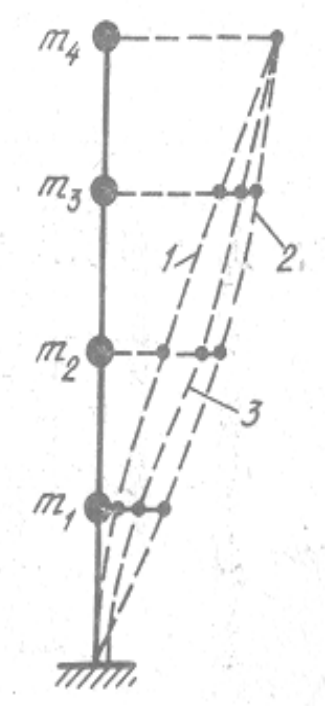
(19.24) асосида,такрорликларнинг ўртача арифметик қиймати $\omega_c^{ўр}$ ва бу асосда давр T_c аниқланади.

Силжиш тебранишларининг шакли 2- жадвалнинг 9- қатори миқдорлари асосида қурилади (19.7- расм, 2- пунктир чизиқ).

Ҳусусий системанинг эгилиш ва силжиш деформациялари ҳисобга олинган ҳолда эркин тебраниш даври Дункерлай формуласи ёрдамида аниқланади:

$$T_{э,\,с} = \sqrt{T_э^2 + T_c^2} \qquad (19\ 25)$$

Иншоот заминининг қайишқоқлигидан келиб чиқадиган тебраниш такрорлигини аниқлашда, эластик заминда жойлашган бикир жисм туридаги ҳусусий система тебранишлари текширилади.



19.7- расм

Иншоотнинг оғишма (ω_φ) ва сирпанма (ω_x) тебраниши такрорликлари қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\omega_\varphi^2 = \frac{1}{J_0}(C_\varphi J_ф - P_c \ell_0);$$

$$\omega_x^2 = \frac{1}{M_c} C_x F_ф \qquad (19.26)$$

бу ерда: $J_ф$ — пойдевор ости юзасининг инерция моменти:

$F_ф$ — пойдевор ости юзаси;

P_c — иншоотнинг умумий вазни (пойдевор вазни ҳам қўшилади);

M_c — иншоот массаси;

C_x — грунтнинг текис эластик сирпаниш коэффициенти;.

C_φ —, грунтнинг нотекис эластик сиқилиш коэффициенти;

J_0 — системанинг қутби 0 дан ўтувчи, тебраниш текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан олинган инерция моменти: $J_0 = \sum r_i^2 m_i$; ℓ_c — пойдевор ости юзасининг оғирлик марказида етувчи кутб 0 дан системанинг инерция марказигача бўлган масофа: $\ell_c = \dfrac{\sum r_i^2 m_i}{\sum m_i}$; r_i — қутбдан массаларгача бўлган масофа.

Ҳисоб натижаларининг аниқлик даражаси кўп жиҳатдан C_φ ва C_x коэффициентларини тўғри танлашга боғлиқ. Ҳар иккала коэффициент замин тупроғининг физик-механик хоссаларига боғлиқ миқдорлар бўлиб, уларни аниқлашда турли усуллар мавжуд. Илмий тадқиқотларнинг кўрсатишича, синчли биноларни ҳисоблашда О. А. Савинов[1] усули, синчсиз биноларда эса СН 18 — 58 [2] қурилиш нормаларида берилган усул жуда қўл келади.

Ҳусусий системалар такрорлиги ва уларга мос даври аниқлангач, бикир системанинг қайишқоқ заминдаги эркин тебранишлари даври Дункерлай формуласи билан аниқланади:

$$T_{\varphi,\ x} = \sqrt{T_\varphi^2 + T_x^2} \qquad (19.27)$$

Иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформацияларини, шунингдек замин бўйлаб сирпаниши ва оғишини ҳисобга олувчи эркин тебранишлари даври

$$T_{э,\ с,\ \varphi,\ x} = \sqrt{T_{э,с}^2 + T_{\varphi,x}^2} \qquad (19.28)$$

кўринишда аниқланади.

Кўриб ўтилган учул «иншоот-замин» системасининг эркин тебранишлари даврини аниқлашда, шунингдек иншоотнинг умумий ишида алоҳида омиллар (бино вертикал ўқининг эгилиши ва силжиши, қайишқоқ заминда бинонинг оғиши ва сирпаниши) улушига баҳо беришда катта қулайлик туғдиради. Бироқ бу усул «иншоот-замин» системасининг тебранишлари шаклини белгилашда махсус ҳисоб ишлари бажаришни талаб этади.

---

[1]. О. А. Савинов, Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Стройиздат, 1964.

[2]. Технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (СН 18— 58).

Усулнинг кейинги параграфда кўриб ўтиладиган бошқа варианти системанинг эркин тебранишлари даври ва шаклини, барча омилларни ҳисобга олган ҳолда, бир вақтнинг ўзида аниқлаш имконини беради.

19.7. Иншоотлар эркин тебранишлари даври ва шаклини аниқлаш

Бундан олдинги параграфда «иншоот-замин» системасининг тебранишида алоҳида параметрларни аниқлаш масаласи билан танишиб чиққан эдик. Мазкур параграфда иншоотларнинг эркин тебранишлари даври (такрорлиги) ҳамда шаклини бир йўла аниқлаш усули билан танишамиз. Бу ерда ҳам усулнинг замирида кетма-кет яқинлашув усули ётади, ҳисоблаш схемаси ҳам аввалгича қолади (19.5- расмга қаранг).

Усулда қўлланиладиган асосий механик миқдорлар: солқилик бурчаги, эгувчи момент ва кўндаланг кучлар қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi_э + \varphi_c; \qquad (19.29)$$

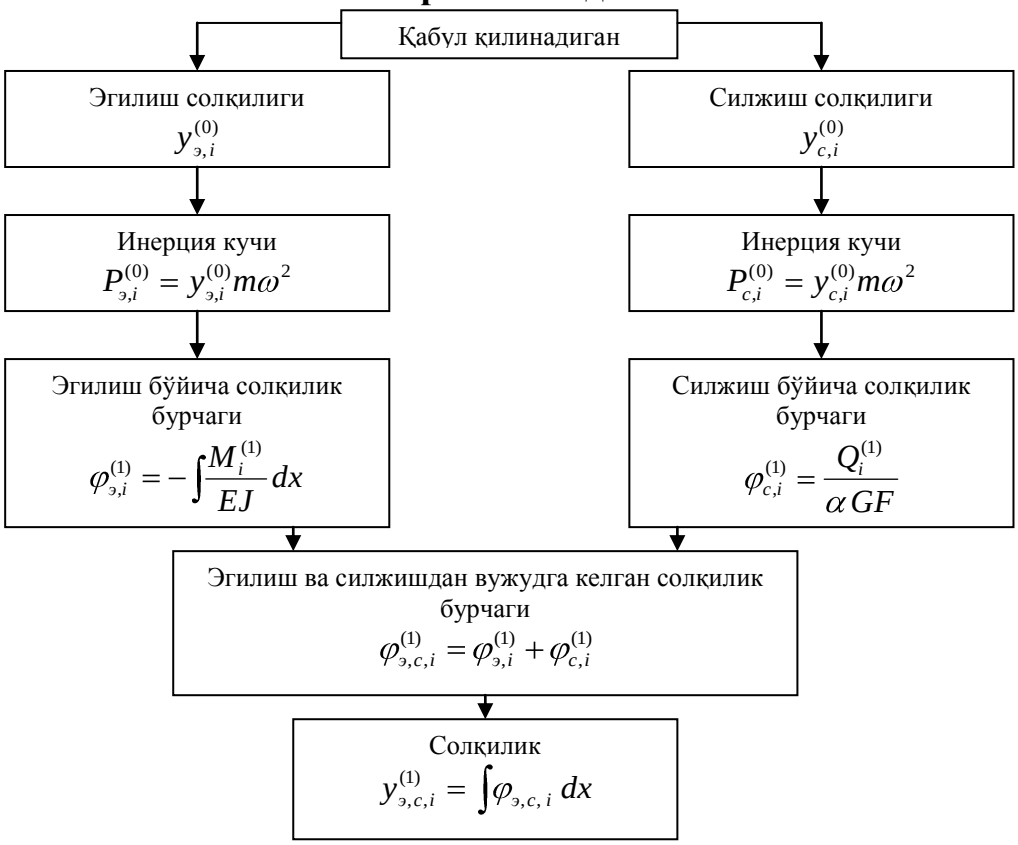
$$M = -EJ\frac{\partial \varphi_э}{\partial x}, \quad Q = \alpha GF\varphi_c, \qquad (19.30)$$

бу ерда y — иншоот вертикал ўқи нуқталарининг эластик оғиши (солқилик); $\varphi_э$ — фақат эгувчи моментдан ҳосил бўлган оғиш (солқилик) бурчаги; φ_c — кўндаланг кучдан ҳосил бўлган оғиш бурчаги; EJ ва GF эгилиш ва силжишдаги бикирликлар; α — кўндаланг кесим шаклига боғлиқ бўлган коэффициент.

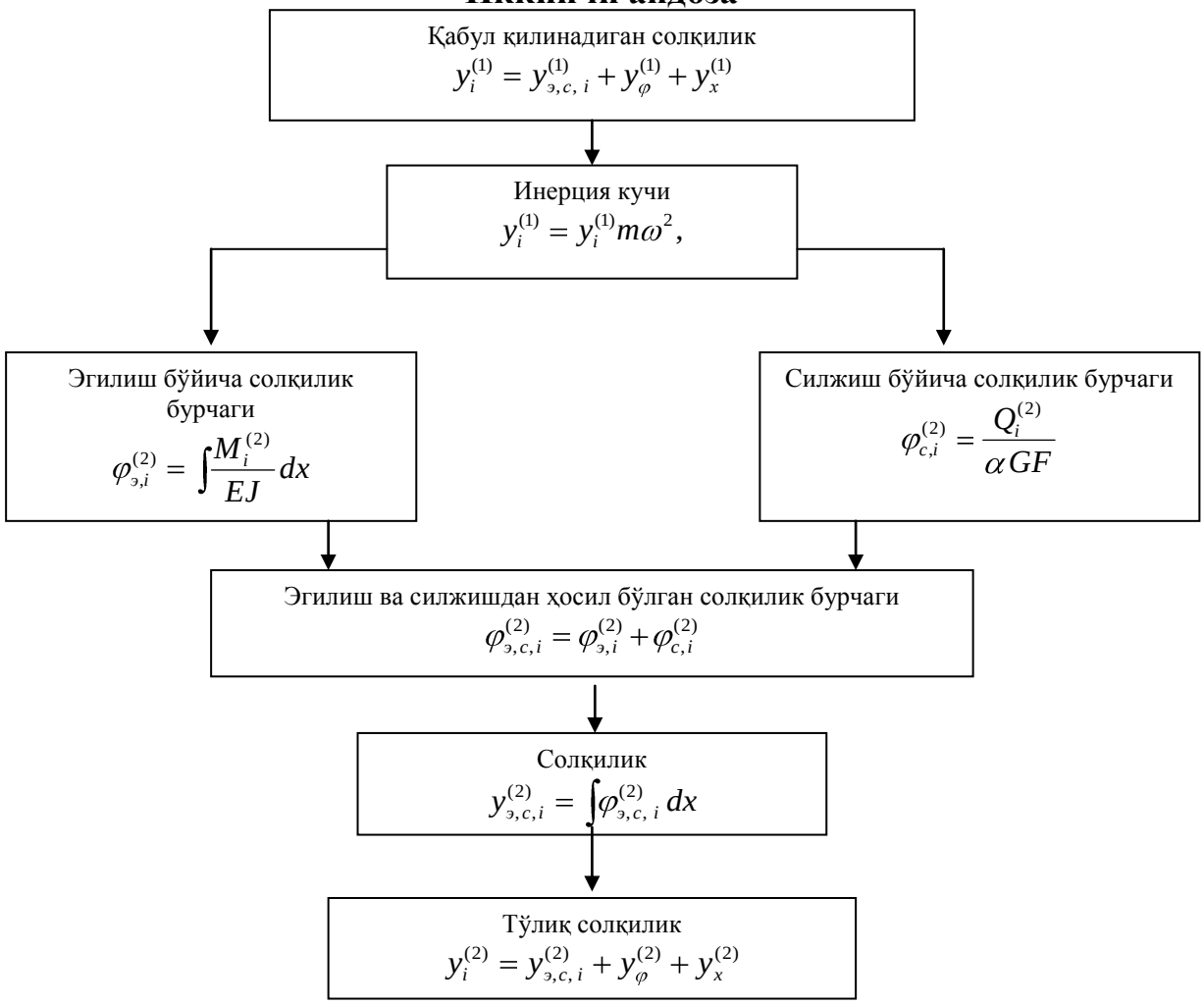
Иншоот вертикал ўқининг солқилиги (19.29) ифодани интеграллаш йўли билан топилади. Интеграллаш алгоритми биринчи ва иккинчи андозаларда берилган.

Ҳисобнинг биринчи босқичи биринчи андозада тасвирланган бўлиб, бунда инерция кучи, эгувчи момент ва қирқувчи кучларни аниқлашда замин қайишқоқлиги ҳисобга олинмай, фақат инщоотнинг вертикал ўқи солқилиги орқали топилади. Босқич охирида заминга бикир махкамланган бинонинг, эгилиш ва силжиш деформацияларидан ташкил топган солқилиги аниқланади.

Биринчи андоза



Иккинчи андоза



Ҳисобнинг иккинчи боскичида (2- андоза) биринчи яқинлашув учун иншоотнинг тебраниш шакли сифатида қуйидаги ифода қабул қилинади:

$$y_i^{(1)} = y_{э,с,i}^{(1)} + y_{\varphi}^{(1)} + y_x^{(1)}, \qquad (a)$$

бу ерда $y_{э,с,i}^{(1)}$— иншоот вертикал ўқининг эгилиш ва силжиш деформацияларидан ташкил топган солқилиги; $y_{\varphi}^{(1)}$ — бинонинг қайишқоқ заминда оғишидан ҳосил бўлган солқилик; $y_x^{(1)}$ — бинонинг замин бўйлаб сирпаниши.

Ўз навбатида кейинги икки миқдор қуйидаги формулалардан топилади:

$$y_{\varphi}^{(1)} = (h_{\phi} - h_i)\frac{M_{\max}^{(1)}}{C_{\varphi} J_{\phi}}; \quad y_x^{(1)} = \frac{Q_{\max}^{(1)}}{C_x F_x}$$

бу ерда M_{max} ва Q_{max} бино асосидаги эгувчи момент ва кўндаланг куч; h_{ϕ} — пойдевор баландлиги; h_i — пойдевор устки сиртидан йиғиқ массаларгача бўлган масофалар.

Иккинчи андозада (а) ифодаси асосида инерция кучлари ҳисобланади. Бу инерция кучлари таъсирида вужудга келадиган эгувчи момент ва кўндаланг кучлар (19.30) формула ёрдамида аниқланади.

Иккинчи андоза бўйича ҳисоб амаллари бажарилиб, бино вертикал ўқининг солқилиги $y_{э,с,i}^{(2)}$ кейин бинонинг тўлиқ горизонтал кўчиши

$$y_i^{(2)} = y_{э,с,i}^{(2)} + y_{\varphi}^{(2)} + y_x^{(2)}, \qquad (б)$$

аниқланади.

Тебраниш шаклларини кетма-кет яқинлаштириш усулига биноан

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)}, \qquad (в)$$

шарти асосида изланаётган такрорликнинг тақрибий қиймати, сўнгра тебраниш даври топилади. Тебраниш шакли эса (б) ифодаси асосида аниқданади.

Усулнинг моҳиятини тушунтириш учун мисол келтирамиз. Аввалги параграфда берилган тўрт массали системанинг тебраниш даври (такрорлиги)

ва асосий шаклини аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бу сафар ҳам ҳисоб ишларини жадвал кўринишида бажарамиз (3- ва 4- жадваллар). Қулай бўлсин учун ҳисоб ишлари- андозаларга мос равишда икки боскичга ажратилган: биринчи боскичда (3- жадвал) замин абсолют бикир деб олиниб, иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформациялари натижасида ҳосил бўлган кўчишлар аниқланади, иккинчи босқичда эса (4- жавдал) замин қайишқоқлиги эътиборга олинган ҳолда иншоот тебранишининг такрорлиги ва шакли излаб топилади.

Жадвалларнинг «Ҳисоблаш алгоритми> деб номланган оҳирги'устунида навбатдаги қатор рақамларини аввалги қаторлар рақамлари асосида аниқлаш усули берилган. Масалан, (1) • (3) — биринчи қатор рақамларининг учинчи қатор рақамларига мос равишда кўпайтириш лозимлигини англатади; $\sum$ (4) — тўртинчи қатор рақамларини чапдан ўнгга томон йиғиндиси олиниши зарурлигини билдиради. 4- жавдалда кичик қавс билан шу жадвал қаторлари, ўрта қавс билан эса 3- жадвал қаторлари белгиланган. Масалан, [1] (15) — учинчи жадвалнинг 1- қатори рақамларини 4-жадвалнинг 15- қатори рақамларига кўпайтириш зарур демакдир. Ҳар икала жадвалда β^2 коэффициенти қуйидаги ифодадан топилади:

$$\beta^2 = \frac{EJ}{\alpha GF\lambda^2},$$

бу ерда λ — йиғиқ массалар орасидаги масофа.

Масала шартида қўйилган саволларга 4- жадвалнинг 20 ва 21- қаторларидан жавоб топамиз. Чунончи, 20- қатор рақамлари тебраниш шаклини англатади. 21- қатор рақамларининг ўртача арифметик қиймати тебраниш такрорлигининг такрибий қиймати $\omega^{o'r}$ = 9,37 ни беради. Такрорликнинг бу қиймати асосида тебраниш даври аниқланади:

$$T=0,67 \text{ с.}$$

3 – жадвал

	№	Механик миқдорлар	m_4	m_3	m_2	m_1		Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
Эгилиш тебранишлари	1.	Йиғиқ куч	300	300	300	300			
	2.	Бикирлик EJ	1	1	1	1		$18 \cdot 10^6$	
	3.	$y_{3,1}^{(0)} = Z_1^{(0)} \cdot y_4^{(0)}$	1,0	0,7	0,4	0,1	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
	4.	Инерция кучи	300	210	120	30	0,0	$\omega^2 y_4 : g$	$(1) \cdot (3)$
	5.	Кўндаланг куч Q	300	510	630	660		–»–	$\sum (4) \rightarrow$
	6.	Эгувчи момент M	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda\omega^2 y_4 : g$	$\sum (5) \rightarrow$
	7.	Ёйиқ фиктив куч	0,0	300	810	1440	2100	$\lambda\omega^2 y_4 : EJg$	$(6) : (2)$
	8.	Йиғиқ фиктив куч	0,0	337,5	810	1440	2100	$\lambda\omega^2 y_4 : EJg$	M эп. юзаси
	9.	Солқилик бурчаки $\varphi_{Э,i}^{(1)}$	4687,5	4350	3540	2100		–»–	$\leftarrow \sum (8)$
Силжиш тебранишлари	10.	Бикирлик $\alpha\ GF$	1	1	1	1		$0{,}24 \cdot 10^6$	
	11.	$y_{i,1}^{(0)} = Z_1^{(0)} \cdot y_4^{(0)}$	1,0	0,9	0,7	0,3	0,0	$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
	12.	Инерция кучи	300	270	210	90	0,0	$\omega^2 y_4 : g$	$(1) \cdot (11)$
	13.	Кўндаланг куч Q	300	570	780	870		–»–	$\sum (12) \rightarrow$
	14.	Солқилик бурчаги $\varphi_{c,i}^{(1)}$	300	570	780	870		$\omega^2 y_4 : \alpha GF\, g$	$(13) : (10)$
Эгилиш – силжиш тебранишлари	15.	$\varphi_{3,1}^{(1)} \cdot \beta^2$	2490	4731	6474	7271		$\lambda^2\omega^2 y_4 : EJ\, g$	$(14) \cdot \beta^2$
	16.	Солқилик бурчаги $\varphi_{3,c,i}^{(1)}$	7177,5	9081	10014	9371		–»–	$(9) + (15)$
	17.	Солқилик $y_{3,c,i}^{(1)}$	35643,5	28466	19385	9371	0,0	$\lambda^3\omega^2 y_4 : EJ\, g$	$\leftarrow \sum (16)$
	18.	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,80	0,54	0,26	0,0		$(y_{3,c,i}) : (y_4)$

4 – жадвал

	№	Механик миқдорлар	m_4	m_3	m_2	m_1		Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
Тўлиқ кўчиш	1.	Инерция кучлари	300	240	162	78	0,0	$\omega^2 y_4 : g$	$(1)\cdot(18)$
	2.	Кўндаланг куч Q	300	540	702	780		–»–	$\sum(1)\rightarrow$
	3.	Эгувчи момент M	0,0	300	840	1542	2322	$\lambda\omega^2 y_4 : g$	$\sum(2)\rightarrow$
	4.	$y_1^{(1)} = Z_1^{(1)} \cdot y_4^{(1)}$	1,0	0,84	0,58	0,30	0,04	$y_4^{(1)}$	
Замин қайишқоқлиги ҳисобга олинганда эгилиш-силжиш кўчишлари	5.	Инерция кучи	300	252	174	90	12	$\omega^2 y_4 : g$	[illegible]$\cdot(4)$
	6.	Кўндаланг куч Q	300	552	726	816	828	–»–	$\sum(5)\rightarrow$
	7.	Эгувчи момент M	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda\omega^2 y_4 : g$	$\sum(6)\rightarrow$
	8.	Ёйиқ фиктив куч	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda\omega^2 y_4 : EJg$	[illegible]
	9.	Йиғиқ фиктив куч	0,0	337,2	852	1578	2399 3222	$\lambda^2\omega^2 y_4 : EJg$	M эп. юзаси
	10.	Солқилик бурчаки $\varphi_{э,i}^{(2)}$	9393,5	8046	7194	5616	3222	–»–	$\sum(9)\rightarrow$
	11.	Солқилик бурчаки $\varphi_{c,i}^{(2)}$	300	552	726	816	828	$\omega^2 y_4 : \alpha GF\, g$	[illegible]0
	12.	$\varphi_{c,1}^{(2)} \cdot \beta^2$	2490	4581,6	6025,8	6772,8	6872,4	$\lambda^2\omega^2 y_4 : EJ\, g$	$(11) : \beta^2$
	13.	Солқилик бурчаки $\varphi_{3,c,i}^{(2)}$	10879,5	12627,6	13219,8	12388,8	10094,4	–»–	$(10) + (12)$
	14.	Солқилик $y_{3,c,i}^{(2)}$	59210,1	48330,6	35703	22483,2	10094,4	$\lambda^3\omega^2 y_4 : EJ\, g$	$\leftarrow\sum(13)$
	15.	Тебраниш шакли $Z_{3,c,i}^{(2)}$	1,0	0,82	0,60	0,38	0,17		$(y_{i,c,i}) : (y_4)$

4- жадвал давоми

	№	Механик миқдорлар	m_4 m_3 m_2 m_1					Кўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
Тўлиқ кўчишлар ва тақрорликлар	16.	Инерция кучи	300	246	180	114	51	$\lambda^3\omega^2 y_4 : EJ\,g$	[illegible]
	17.	Кўндаланг куч Q	300	546	726	840	891	–»–	$\rightarrow \sum (16)$
	18.	Эгувчи момент M	300	846	1572	2412	3303	$\lambda\omega^2 y_4 : g$	$\rightarrow \sum (17)$
	19.	Солқилик $y_i^{(2)}$	74210	59630	43703	26983	11194	$\lambda^3\omega^2 y_4 : EJ\,g$	$14 + y_\varphi + y_x$
	20.	Тебраниш шакли $Z_{3,i,\varphi,x}^{(2)}$	1,6	0,80	0,59	0,36	0,15		[illegible]
	21.	Такрорликлар $\omega_i^{(2)}$	9,38	9,36	9,39	9,34	9,36		$\omega_{ўр} = 9{,}37$

20-БОБ
ИНШООТЛАРНИ ЮК КЎТАРИШ ҚОБИЛИЯТИ БЎЙИЧА ҲИСОБЛАШ

20.1. Асосий тушунчалар

Ҳозирги даврда қурилиш меъёрлари ва қоидаларига (ҚМҚ) кўра қурилиш конструкциялари чегаравий ҳолатлар методи (услуби) бўйича ҳисобланади.

Системанинг чегаравий ҳолати деб шундай ҳолатни айтиладики, бу ҳолатда система ташқи таъсирларга қаршилик кўрсатиш қобилиятини йўқатади ёки фойдаланиш учун яроқсиз ҳолатга тушади.

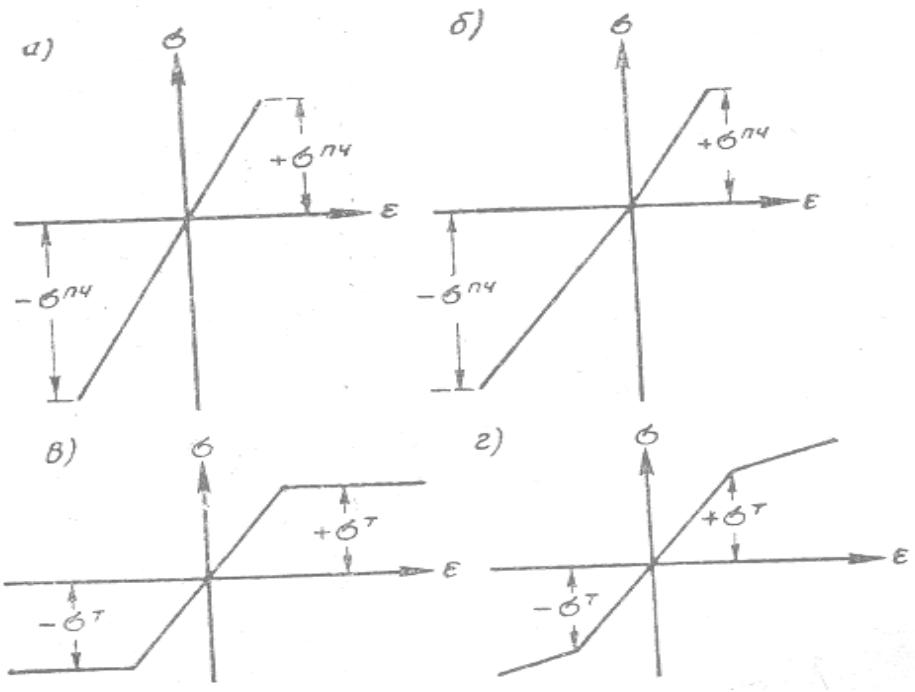
Ўз навбатида чегаравий ҳолатлар икки гуруҳга ажратилади:

Юк кўтариш қобилиятини йўқотиш – биринчи гуруҳга, нормал эксплуатация қилиш учун яроқсиз ҳолатга тушиш – иккинчи гуруҳга киради.

Конструкциянинг юк кўтариш қобилиятини ҳисоблашда, зарур бўлган ҳолларда, материалнинг пластик хусусияти эътиборга олиниши мумкин. Бунда конструкция *чегаравий мувозанат усулида* (чегаравий ҳолат усули эмас) ҳисобланади. Бу усулда ҳисобланган конструкция анча тежамли бўлади. Чунки конструкция элементларини эластик усулда ҳисоблаганда мустаҳкамлик заҳираси яширинган бўлади. Ана шу заҳирадан фойдаланиш эвазига конструкция бир мунча арзонлашади.

Мазкур бобнинг навбатдаги параграфларида стерженли системаларни материалнинг пластиклиги ҳисобга олинган ҳолда юк кўтариш қобилияти бўйича ҳисоблаш йўллари баён этилган.

Қисқача қилиб *пластик* усул деб аталувчи, бу ҳисоблаш усулида эластик – пластик материалнинг ҳақиқий чўзилиш – сиқилиш диаграммаси ўрнига эластик – пластик жисмнинг соддалаштирилган кучланиш σ – деформация ε координаталари системасидан фойдаланилади (20.1 - расм).



20.1 – расм

Соддалаштирилган диаграмма кўринишлари мўрт материаллар учун 20.1 – расм, *а, б* да, пластик материаллар учун 20.1 – расм, *в, г* да тасвирланган. Мазкур диаграмма кўпгина мўрт материаллар учун дастлабки ва тақрибий яқинлашув вазифасини ўтайди. Аммо у оддий йўллар билан кесимнинг чегаравий ҳолатини аниқлаш имконини беради.

Мўрт материалларда кучланиш биргина нуқтада мустахкамлик чегарасига етишиши билан бутун кесим бўйлаб бирданига бузилиш рўй беради. Пластик материалларда кесимнинг чегаравий ҳолати бутун кесим бўйлаб пластик деформация (оқувчанлик) тўлиқ содир бўлганида вужудга келади, ёки, бошқача айтганда, кесимда “пластик шарнир” ҳосил бўлади. Ички кучлар пластик шарнирларда энди орта олмайди, кесим пластик деформацияга қаршилик кўрсата олмайди ва пластик шарнир ўсиб бораётган деформация йўналишида “очила бориши” мумкин. Материалнинг пластик ҳусусияти туфайли пластик шарнирдаги ички кучлар стержен иккига бўлингунга қадар сақланиб туриши мумкин. Мўрт ёки пластик материаллардан ясалган стерженларнинг чегаравий ҳолатлари орасидаги фарқ ана шулардан иборат.

Система юк кўтариш қобилияти бўйича чегаравий ҳолатга етганда, у оқувчанлик ёки бузилишга олиб келадиган куч таъсирида *ўзгарувчан* системага айланиб қолади. Бунда айрим кесимларда чегаравий ҳолат вужудга келади, яна мўрт материалларда ёриқлар пайдо бўлади ва ривожланади, пластик материалларда пластик шарнирлар ҳосил бўлади. Кесимдаги ёриқ биттадан учтагача бўлган боғлагичга, пластик шарнир эса биргина боғлагичга барҳам беради. Чунки пластик шарнир *биртомонлама* бўлиб, фақат бир томонга "очилади". Оддий шарнир билан пластик шарнирнинг фарқи айнан шундан иборат. Бундан ташқари эгувчи момент пластик шарнирда кўпинча нолга тенг бўлмай, моментнинг чегаравий қийматига тенг бўлади.

Системада пластик шарнир ҳосил бўлганда кесимдаги ички кучлар йўқ бўлиб кетмайди, аммо кесимда ёриқ пайдо бўлса, ички кучлар барҳам топади.

Системада бундай чегаравий ҳолат уйғотувчи куч *чегаравий* ёки *бузувчи* куч (юк) деб аталади.

Статик аниқ система кесимда биргина ёриқ ёки биргина пластик шарнир пайдо бўлиши билан чегаравий ҳолатга ўтади.

Исталган кесим учун чегаравий эгувчи момент қуйидаги формуладан аниқланади:

$$M_{пр} = \sigma_T W_T \nu = M^0_{пр} \nu, \qquad (20.1)$$

бу ерда: σ_T - материалнинг чўзилишдаги оқиш чегараси;

W_T - кўндаланг кесимнинг пластик қаршилик моменти;

$M^0_{пр}$ - соф эгилишдаги чегаравий эгувчи момент;

ν - стерженнинг юк кўтариш қобилиятига бўйлама ва кўндаланг кучлар таъсирини ҳисобга олувчи коэффциент.

Тўғри тўртбурчакли кесим учун ν коэффициенти қуйидаги тақрибий формуладан аниқланади:

$$\nu = 1 - (N_{пр} / N^0_{пр})^2 - (Q_{пр} / Q^0_{пр})^2, \qquad (20.2)$$

бу ерда $N_{пр}$ ва $Q_{пр}$ – стерженнинг чегаравий ҳолатида $M_{пр}$ билан бирга таъсир этувчи бўйлама ва кўндаланг куч;

$N_{пр}^{0}$ *ва* $Q_{пр}^{0}$ - соф чўзилиш ва соф силжишда стерженда чегаравий ҳолат вужудга келтирадиган бўйлама ва кўндаланг куч бўлиб, қуйидаги формуладан топилади:

$$N_{пр}^{0} = \sigma_T F \qquad ва \qquad Q_{пр}^{0} = \tau_T F.$$

Бу формулада F – кўндаланг кесим юзаси; $\tau_т$ – чегаравий уринма кучланиш.

Пластик қаршилик моменти эластик қаршилик моменти w орқали топилади:

$$W_T = \lambda W. \qquad (20.3)$$

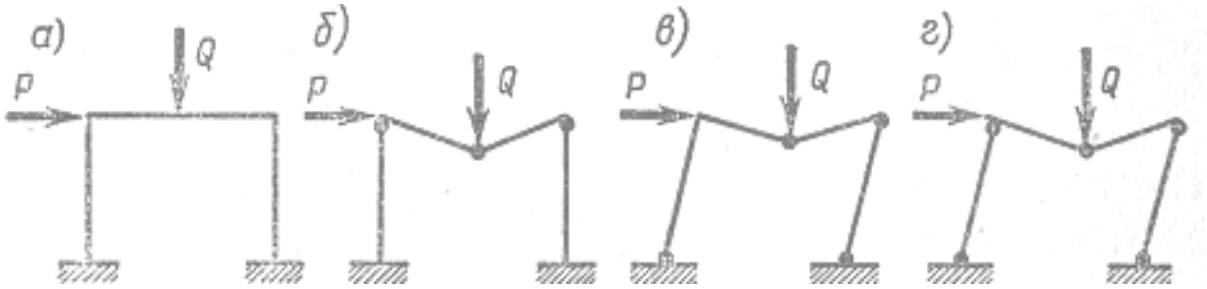
λ коэффициенти кўндаланг кесим шаклига боғлиқ: айлана учун – *1,7*;

тўғри тўртбурчак учун – *1,5*; юпқа деворли ҳалқа учун – *1,27*; қўштавр учун – *1,15*.

Системада вужудга келадиган эгувчи моментнинг қиймати (*20.1*) формуладаги қийматга, яъни чегаравий қийматга етганда конструкцияда *платик шарнир* ҳосил бўлади.

Систик аниқ системанинг бирор элементида пластик шарнир ҳосил бўлса, унинг юк кўтариш қобилияти бутунлай тугайди, ишга яроқсиз бўлиб қолади.

Статик ноаниқ системаларда зўриқишлар чегаравий қийматга эришганда конструкция бирданига ишдан чиқмайди. Аввал айрим элементларда дастлабки шарнирлар пайдо бўлади ва зўриқишлар бошқа элементларга қайта тақсимланади, бунинг ҳисобига системанинг юк кўтариш қобилияти бироз ортади (20.2-расм, *б*). Кейин шарнирлар сони ортган сари системанинг бузилиш даражаси ортиб боради (20.2-расм, *в.г.*).



20.2-расм

Системаларни пластик босқичда ҳисоблаганда статиканинг мувозанат тенгламалари шаклида ёки ички ёки ташқи кучлар бажариши мумкин бўлган иш тенгламалари кўринишида тенгламалар тузилади. Бунда ташқи кучлар $P_{i,\text{пр}}$ иши мусбат, ички кучлар, яъни чегаравий эгувчи моментлар $M_{к,пр}$ иши манфий ишора билан олинади: ишлар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\sum P_{i,пр}\,\delta_i = \sum M_{k,пр}\theta_k\,, \qquad (20.4)$$

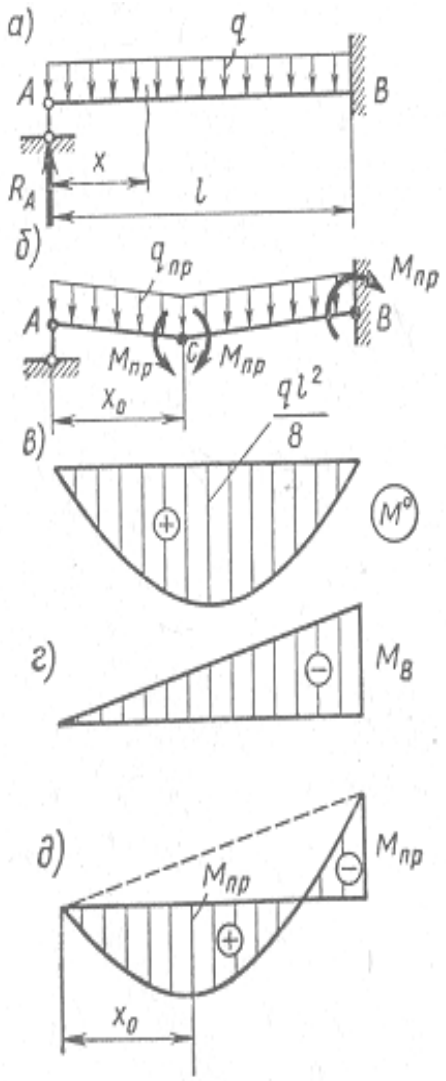
Бу ерда θ_k – пластик шарнирлардаги бурилиш бурчаклари;

δ_i – куч қўйилган нуқталарнинг чизиқли кўчишлари.

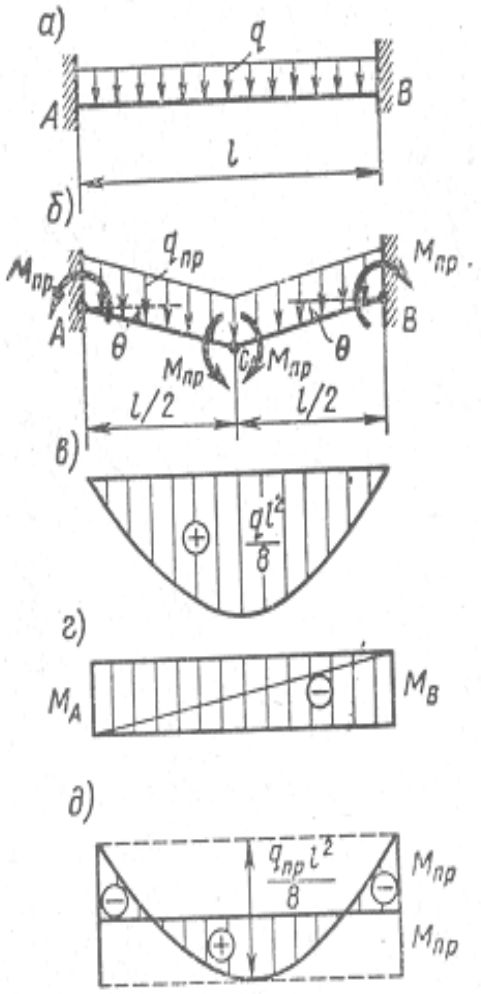
Бу тенгламадан, агар кесимларнинг юк кўтариш қобилияти маълум бўлса, чегаравий юк параметрлари ёки агар чегаравий юклар маълум бўлса, кесимларнинг юк кўтариш қобилиятлари аниқланиши мумкин.

20.2. Бир оралиқли статик ноаниқ балкаларни ҳисоблаш

20.3 – расм, а да кўрсатилган статик ноаниқ бир оралиқли балка бузилиш жараёнида ҳосил бўладиган иккита пластик шарнир воситасида механизмга айланади (20.3-расм, *б*). Балка бузилиш ҳолатидаги узил-кесил эпюра, яъни *чегаравий моментлар эпюраси* балкавий момент эпюраси M^o (20.3-расм, *в*) билан таянч моменти эпюраси M_B (20.3-расм, *г*)ни устма-уст жойлаштириш йўли билан ҳосил қилинади (20.3-расм, *д*).



20.3-расм



20.4-расм

Чегаравий юкни аниқлашда *B* ва *C* пластик шарнирларида ҳосил бўладиган эгувчи момент чегаравий қиймат $M_{пр}$ га эришган, деб қабул қиламиз.

1-мисол. 20.3-расм, *а* да берилган балканинг пластик ширнир ҳосил бўладиган кесими ҳамда чегаравий юкнинг қиймати аниқлансин.

Пластик шарнир ҳосил бўладиган X_0 кесимни аниқлаш учун ихтиёрий *x* кесими учун моментлар тенгламасини тузамиз:

$$M_x = R_A x - \frac{qx^2}{2} = \left[\left(\frac{q\ell}{2}\right) - \left(\frac{M_B}{\ell}\right)\right]x - \frac{qx^2}{2}.$$

Бу эгувчи момент балка оралиғида энг катта қийматга эга бўлиши лозим. Шунинг учун M_x дан x бўйича ҳосила олиб, тенгламани нолга тенглаймиз:

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{q\ell}{2} - \frac{M_B}{\ell} - qx = 0.$$

Бундан

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{M_B}{q\ell}.$$

X нинг шу қийматида эгувчи момент чегаравий қиймат $M_{пр}$ га эришади. Таянч моментини ҳам шу қийматга тенглаштирамиз. Тенгламани нолга тенглаб, ундан қуйидагиларни аниқлаймиз.

$$M_{пр} = 0{,}0857\, q_{пр}\ell^2 \quad ёки \quad q_{пр} = 11{,}66 M_{пр}/\ell^2; \quad x_0 = 0{,}414\ell.$$

2-мисол. Шунга ўхшаш масалани икки учи маҳкам бириктирилган балка учун (20.4-расм, *а*) ечиш талаб этилади.

Мазкур ҳолда балка оралиғидаги пластик шарнирнинг ўрни маълум ($x_0 = \ell/2$, 20.4-расм, *б*). Балкавий эгувчи моментлар эпюраси ординаталари (20.4-расм, *в*) билан чегаравий эгувчи моментлар эпюраси ординаталари нисбатидан (20.4-расм, *д*) қуйидагилар аниқланади:

$$q_{пр}\ell^2/8 = 2M_{пр}.$$

Бундан

$$M_{пр} = q_{пр}\ell^2/16 \quad ёки \quad q_{пр} = 16 M_{пр}/\ell^2.$$

(20.4)формуладан фойдаланиб, кинематик усулда ечилса ҳам айнан шу натижага келинади:

$$4M_{пр}\theta = 2\theta(q_{пр}\ell/2)(\ell/4).$$

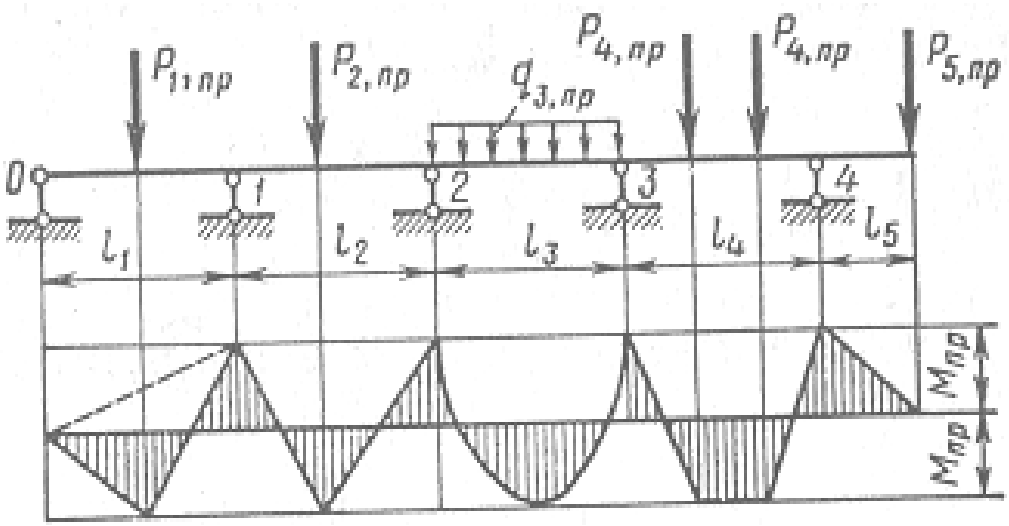
Чегаравий эгувчи моментлар эпюрасини мусбат ишорали балкавий эпюра (20.4-расм, *в*) билан манфий ишорали таянч моментлари эпюраси

(20.4-расм, *г*) нинг йиғиндиси сифатида талқин этса бўлади. Бунда чегаравий таянч моментлари оралиқдаги энг катта чегаравий моментга тенг бўлиши лозим, деган шарт қаноатлантирилади.

20.3. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш

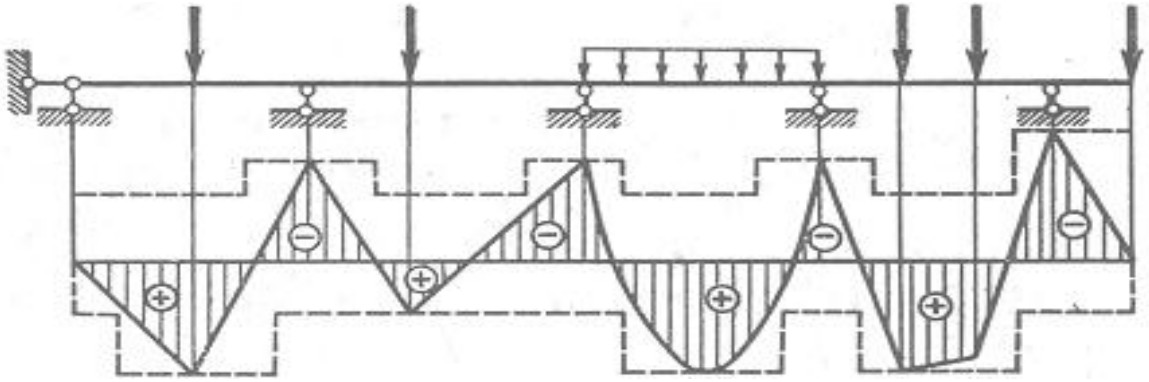
Узлуксиз балкаларнинг ўрта оралиғида учтадан, четки оралиқларида иккитадан пластик шарнирлар ҳосил бўлиб, балкавий механизмларнинг вужудга келиши бузилишнинг дастлабки кўриниши ҳисобланади. Баъзан узлуксиз балканинг бир неча оралиғида ёки барча оралиқларида балкавий механизмлар вужудга келиши мумкин. Амалда энг ноқулай шароитда ишлайдиган оралиқнинг бузилиши чегаравий ҳолатнинг бошланиши саналади.

Узлуксиз балкаларнинг текширув ҳисобларида барча кесимларнинг чегаравий юк кўтариш қобилиятлари маълум бўлса, чегаравий юкнинг қийматини аниқлаш қийин эмас. Бунда кесимларнинг чегаравий юк кўтариш қобилияти эпюрасидан фойдаланилади. Агар узлуксиз балкаларнинг барча кесимлари бир хил юк кўтариш қобилиятига эга бўлса, у ҳолда чегаравий юк осонгина топилади. Бундай балка учун натижавий эгувчи моментлар эпюраси ординаталарини текисланса кифоя (20.5-расм). Бунинг учун балка, ўқидан $M_{пр}$ масофада иккита параллель чизиқ ўтказилади. Мазкур чизиқлар орасига балкавий-эгувчи моментлар эпюраси чизилади.



20.5-расм

Балканинг юк кўтариш қобилияти эпюраси бундан кўра мураккаброқ бўлган ҳолларда ҳам масала худди шу йўсинда ҳал этилади (20.6-расм).



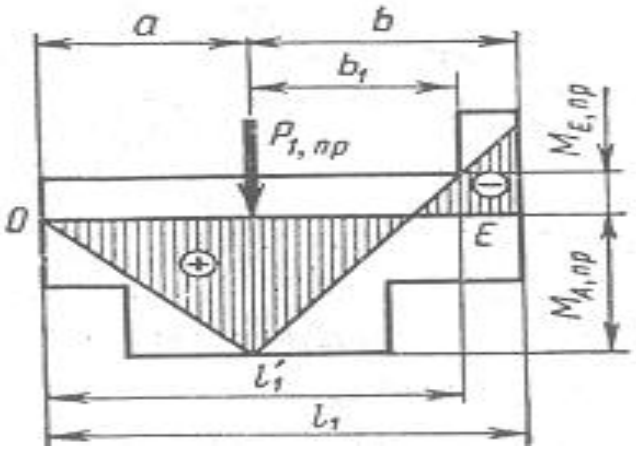
20.6-расм

Шундай қилиб, узлуксиз балка учун чегаравий юкни аниқлаш масаласи, агар барча кесимларнинг юк кўтариш қобилияти маълум бўлса, фақат биргина ечимга эга.

Балка узунлиги бўйлаб кесимларнинг юк кўтариш қобилияти поғонасимон ўзгарувчан бўлса, пластик шарнирлар таянч кесимларининг ўзига эмас, балки ундан маълум масофада ҳосил бўлиши мумкин (20.7-расм). Бундай ҳолда P_1 кучининг чегаравий қиймати қуйидаги формуладан аниқланади:

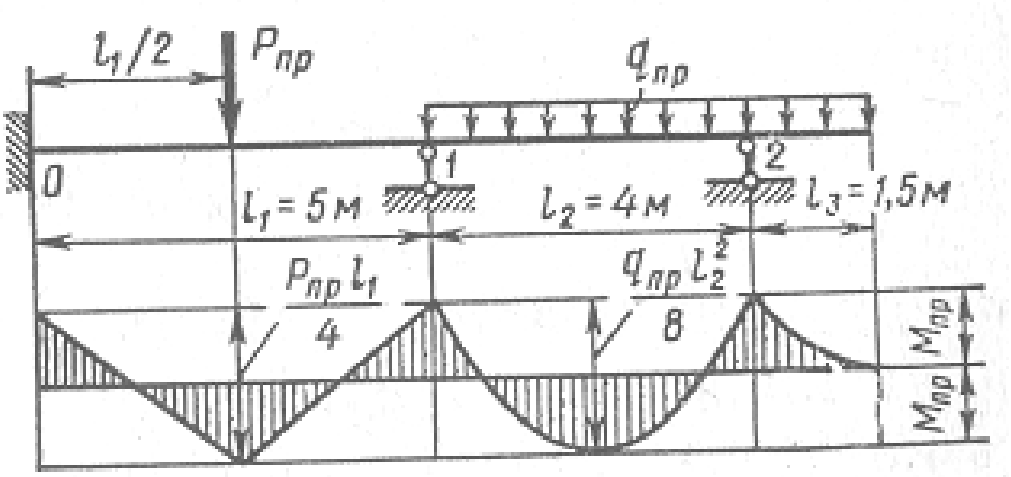
$$P_{1,пр} = \frac{M_{E,пр}}{b_1} + \frac{M_{A,пр}(a+b_1)}{ab_1}. \qquad (13.5)$$

Кўндаланг кучнинг таъсири v коэффициенти орқали (20.2 формула) ҳисобга олинади.



20.7-расм

1-мисол. 20.8-расмда кўрсатилган узлуксиз балка учун чегаравий юкнинг қиймати аниқлансин. Балка материали 20а рақамли қўштавр, пластик қаршилик моменти $W_т = 273$ см^3, пўлатнинг оқиш чегараси $\sigma_т = 2400$ кгк/ см^2.



20.8-расм

Балка кесимларининг эгилиш бўйича чегаравий юк кўтариш қобилияти

$$M_{пр} = \sigma_T W_T = 2400 \cdot 273 = 655000\ кгк \cdot см \ \ 6.55\ T \cdot м.$$

Эгувчи моментлар эпюраси ординаталари ва биринчи оралиқнинг чегаравий юк кўтариш қобилияти нисбатидан балка учун чегаравий юкни аниқлаймиз:

$$P_{пр} \ell_1 / 4 = 2M_{пр}; \quad P_{пр} = 8M_{пр} / \ell_1 = 8 \cdot 6{,}55 / 5 = 10{,}45\ T.$$

Иккинчи оралиқ учун

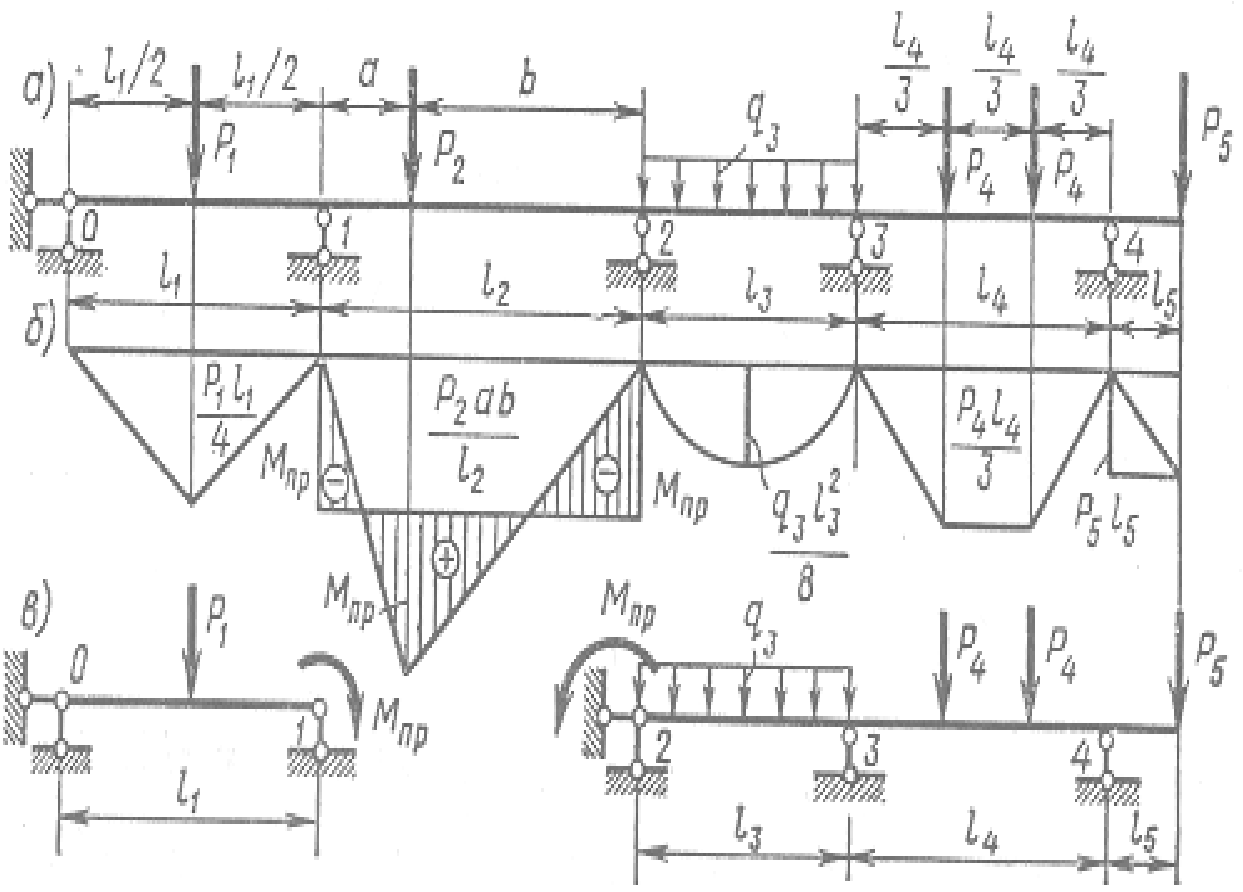
$$q_{пр} \ell_2 / 8 = 2M_{пр}; \quad q_{пр} = 16M_{пр} / \ell_2^2 = 16 \cdot 6{,}55 / 4^2 = 6{,}55\ T / m.$$

Консол учун

$$q_{пр} \ell_3^2 / 2 = M_{пр}; \quad q_{пр} = 2M_{пр} / \ell_3^2 = 2 \cdot 6{,}55 / 1{,}5^2 = 5{,}82\ T / m.$$

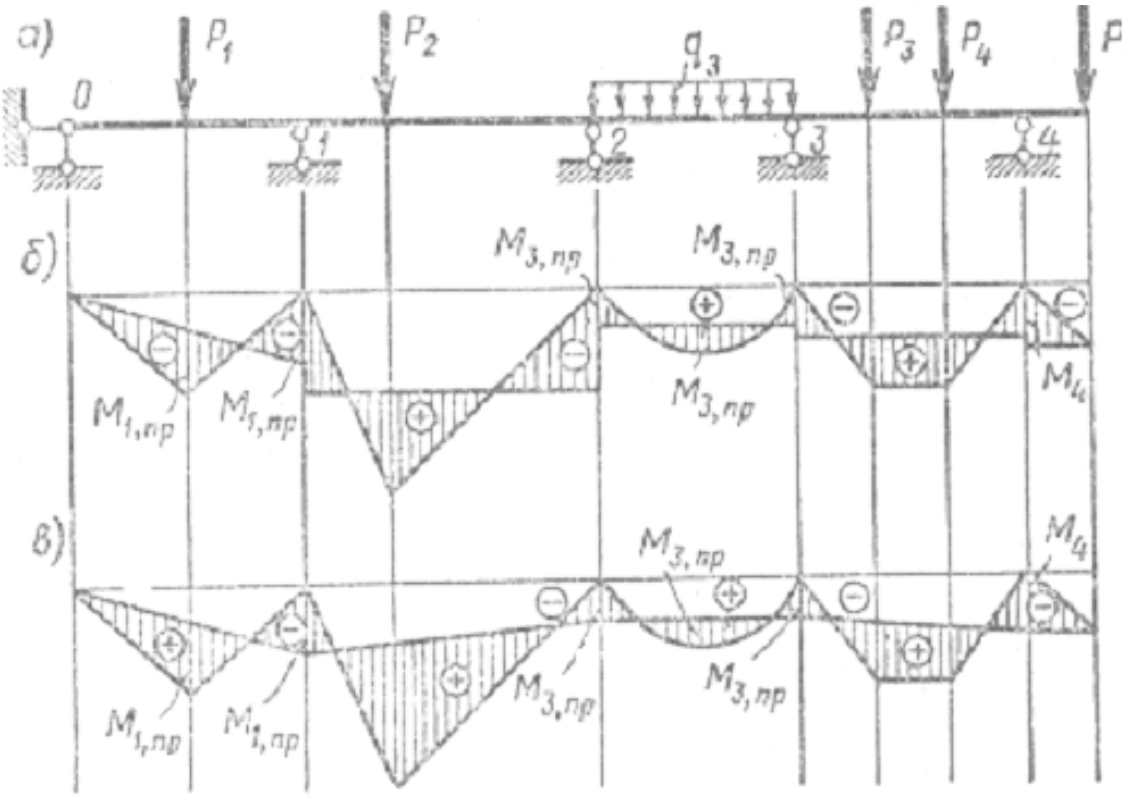
2-мисол. Узлуксиз балка (20.9-расм, *а*) узунлиги бўйлаб барча кесимларнинг юк кўтариш қобилияти ўзгармас бўлиши талаб этилади, дейлик. Бундай ҳолда кесимнинг юк кўтариш қобилияти энг кўп юкланган

ораликдан изланади, шу ораликда эгувчи моментлар эпюраси текисланади (20.9-расм, *б*). Бундай юк таъсирида бошқа оралиқларда пластик шарнирлар ҳосил бўлмайди ва у оралиқлар учун алоҳида эластик ҳисоб амалга оширилади (20.9-расм, *в*).



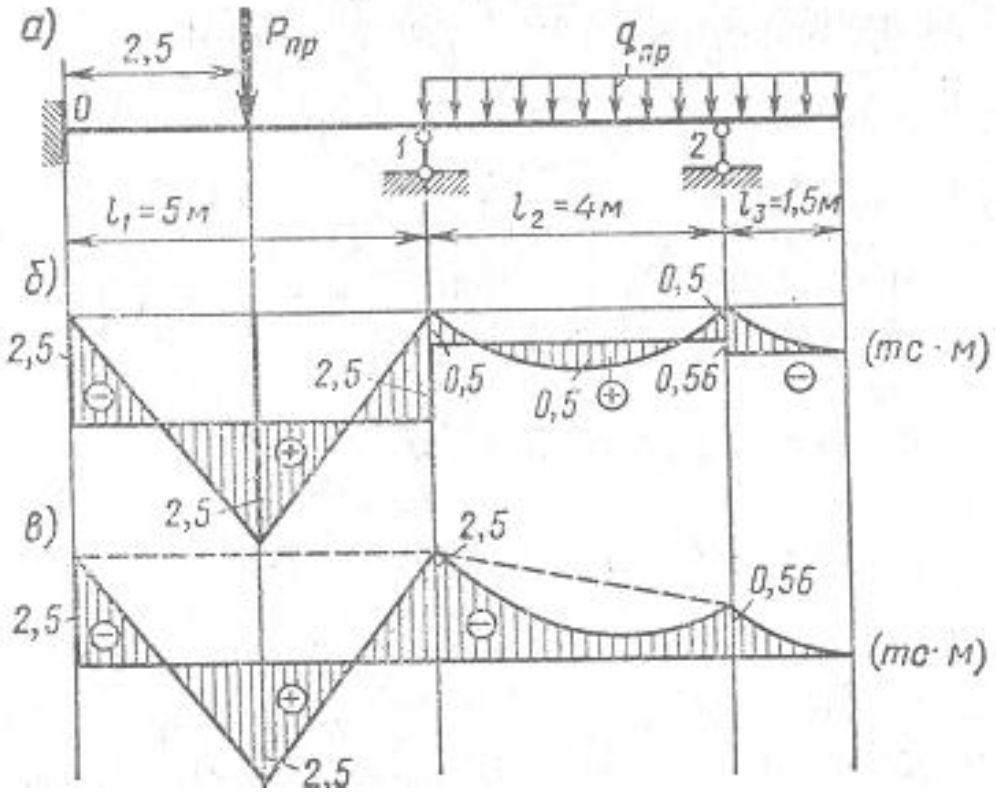
20.9- расм

20.10 – расм, *а* кўрсатилган балкадаги моментларни дастлабки текислаш жараёнида энг кичик моментлар $M_{3,\ пр}$ учинчи ораликда ҳосил бўлади (20.10-расм, *б*). Улардан кейин миқдор бўйича биринчи ораликдаги текисланган $M_{1\ ,пр}$ моментлари туради.булар ҳам натижавий моментлар сифатида қабул қилинади. *4*-танячдаги момент аввалдан маълум бўлганлиги ҳамда *1,2* ва *3*-таянчлардаги моментлар аниқланганлиги сабабли иккинчи ва тўртинчи оралиқлар учун таянч моментлари чизиғини ўтказса бўлади. Шундан кейин оралиқлардаги моментларни аниқлаш мумкин. Якуний чегаравий эпюра 20.10-расм, *в* да тасвирланган.



20.10-расм

3-мисол. 20.11-расм, *а* да тасвирланган узлуксиз балка учун ҳисобий юклар қийматлари $P_{пр}$= *4*т $q_{пр}$ = *0,5* т/*м* берилган.



20.11-расм

Барча оралиқлар учун доимий қийматга эга бўлган кесимларнинг юк кўтариш қобилиятини аниқлаш талаб этилади.

Биринчи ва иккинчи оралиқдаги балкавий эгувчи момент эпюраларининг энг катта ординаталари қуйидаги қийматларга эга:

$$P_{пр} \cdot \frac{\ell_1}{4} = 4 \cdot \frac{5}{4} = 5\ T \cdot m;$$

$$q_{пр} \cdot \frac{\ell_2^2}{8} = 0{,}5 \cdot \frac{4^2}{8} = 1\ T \cdot m.$$

Иккинчи таянчдаги эгувчи момент қиймати

$$-q_{пр} \cdot \frac{\ell_3^2}{2} = -0{,}5 \cdot \frac{1{,}5^2}{2} = -0{,}56\ T \cdot m$$

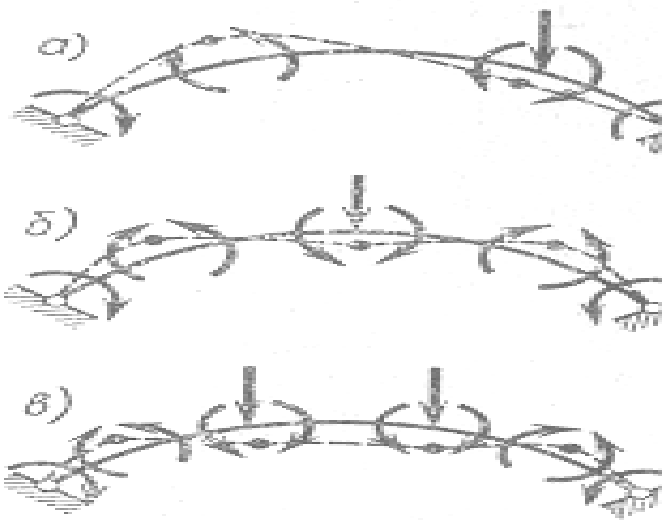
га тенг.

Эпюраларни дастлабки текислашда ҳар бир оралиқда бу ординаталар таянч моментлари чизиғи билан иккига бўлинади (20.11-расм, *б*).

Якуний эгувчи моментлар эпюраси 20.11-расм, *в* да берилган. Балканинг кесимини танлашда биринчи оралиқдаги эгувчи момент (*2,5 Тм*) дан фойдаланилади. Иккинчи оралиқ ва консолда пластик шарнирлар ҳосил бўлмайди.

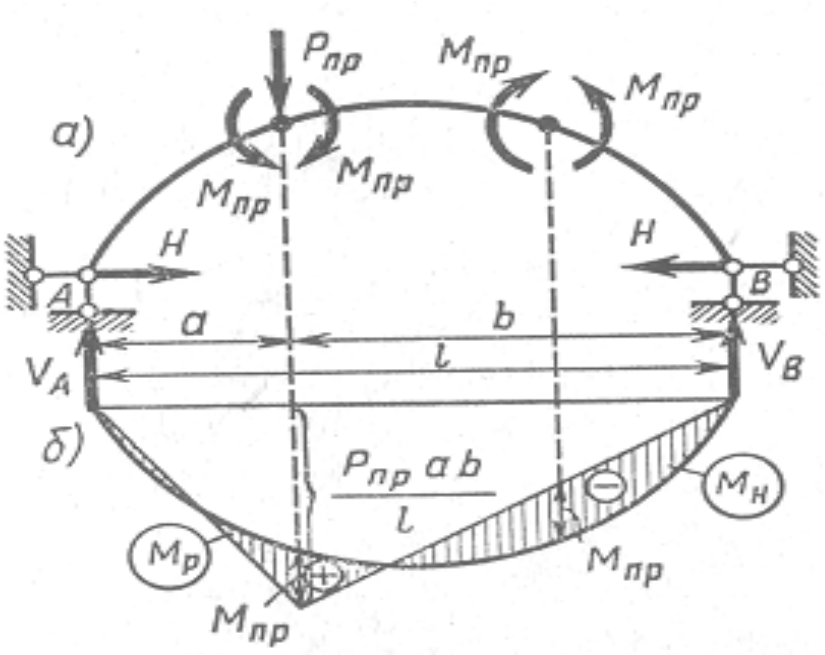
20.4. Статик ноаниқ аркаларни ҳисоблаш

Икки шарнирли аркаларни ўз текислигида кўп учрайдиган бузилиш схемаси 20.12-расм, *а* да берилган. Кучларнинг таъсир этиш тарзига қараб 20.12-расм, б.в шаклдаги бузилишлар ҳам учрайди.



20.12-расм

Кўп ҳолларда бузилишнинг ҳавфли шакли балкавий эгувчи момент эпюраларини керки (распор) моментлари эпюраси устига жойлаштириш йўли билан аниқланади. Бироқ уч шарнирли аркалардан фарқли равишда, икки эпюра ординаталари орасидаги нисбат қулф кесимидаги ординаталар тенглиги шартидан эмас, балки пластик шарнирлардаги моментларнинг ($M_{пр}$нинг) чегаравий қийматига тенглиги шартидан фойдаланиб топилади (20.20-расм *а,б*).



20.13-расм

Якуний чегаравий эгувчи моментлар эпюраси қурилгач, балкавий эпюра ординаталари билан керки кучи эпюраси ординаталари нисбатидан, агар кесимнинг юк кўтариш қобилияти берилган бўлса, чегаравий юкни, агар ҳисобий юк берилган бўлса кесимнинг талаб этилган юк кўтариш қобилиятини аниқлаш мумкин.

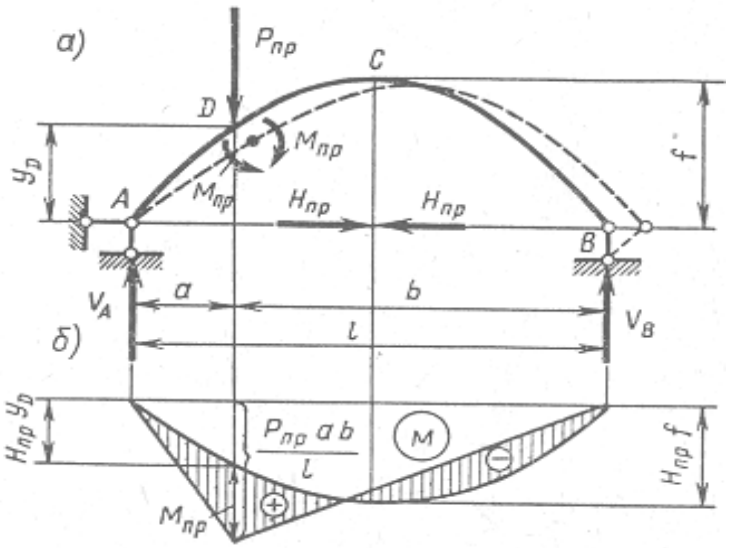
20.14-расм, *а* да тасвирланган икки шарнирли тортқичли арканинг бузилиши тортқичдаги оқувчанлик (текучесть)нинг бошланиши ва арканинг ўзида битта пластик шарнирнинг вужудга келишидан бошланади. Тортқичда вужудга келадиган зўриқишнинг чегаравий қиймати олдиндан маълум:

$$H_{пр} = \sigma_T F_з,$$

бу ерда $\sigma_т$ – тортқич материалининг оқувчанлик чегараси;

$F_з$ – тортқич кўндаланг кесимининг юзаси.

Керки кучидан ҳосил бўлган моментлар эпюрасининг барча ординаталари маълум ва уларнинг энг катта қиймати *Hпр f* га тенг (20.14-расм, *б*).



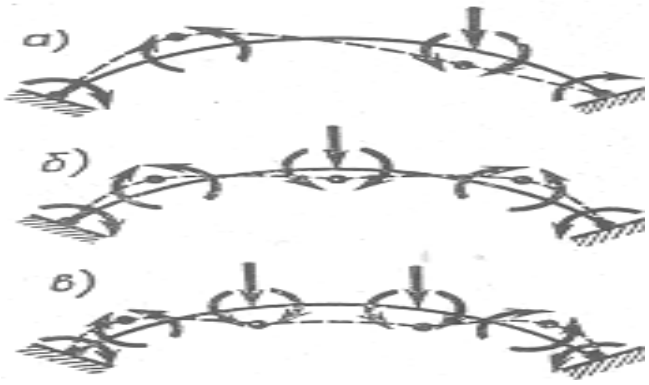
20.14-расм

Балкавий эпюрани *Pпр* ёки *Mпр* нинг берилган қийматлари бўйича қуриш мумкин. Эпюралар ординаталари нисбатидан:

$$\frac{P_{пр}ab}{\ell} = M_{пр} + H_{пр}Y_D$$ келиб чиқади.

Pпр ёки *Mпр* маълум бўлса, бошқа миқдорларни топиш қийин эмас.

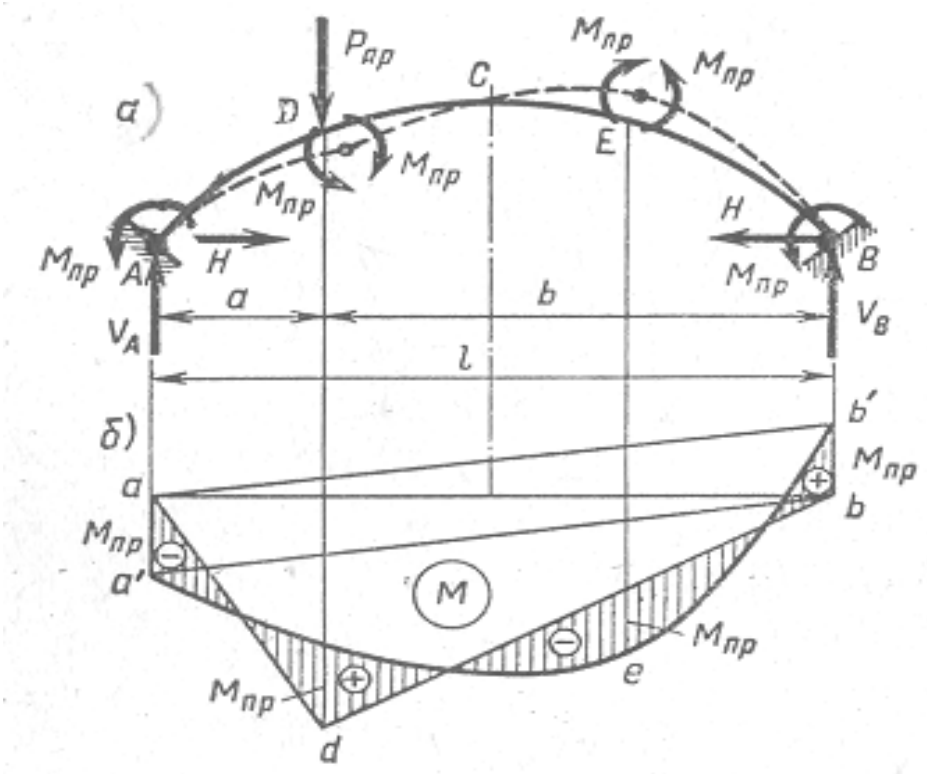
Шарнирсиз аркаларнинг бузилишида учрайдиган шакллар 20.15-расм *а,б,в* да берилган.



20.15-расм

Бузилишнинг асосий шаклида тўртта пластик шарнир ҳосил бўлади (20.15-расм, *а*). Чегаравий эгувчи моментларнинг якуний эпюраси тўртта эпюранинг йиғиндисидан ташкил топади (20.16-расм, *б*): *авd* учбурчаги балкавий моментлар эпюраси ҳисобланади; *а а' в* учбурчаги – чап таянч моментининг моментлар эпюраси; *а в в'* учбурчаги – ўнг таянч моменти эпюраси; арка ўқига ўхшаш *а' е в'* эгри чизиғи – керки кучи эпюрасидир.

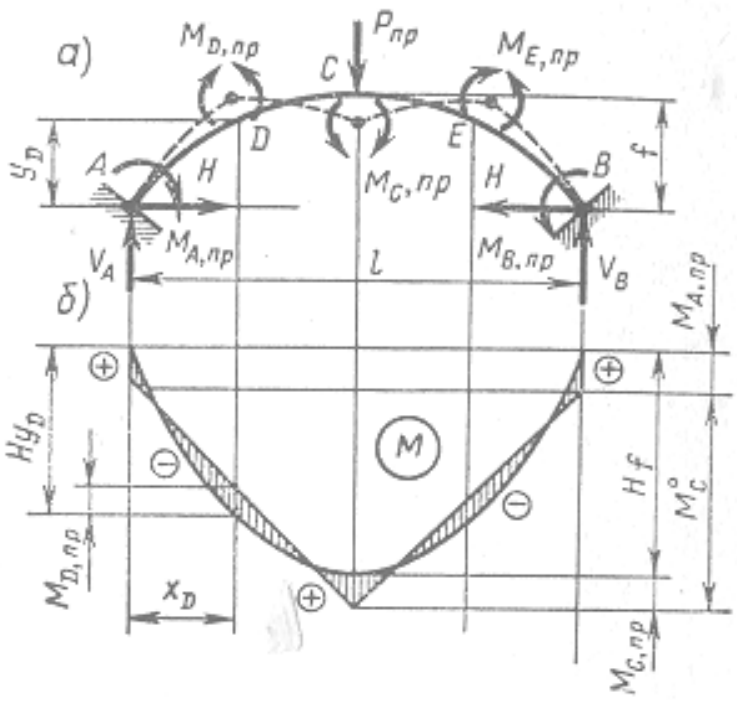
А, В, Е, В (20.16 – расм, а) кесимларидаги моментлар турли ишораларга эга бўлиб (20.16-расм, *б*), ана шу кесимларнинг юк кўтариш қобилиятини ифода этади.



20.16-расм

Мисол. Парабола шаклли шарнирсиз арка учун чегаравий эгувчи моментлар эпюраси қурилсин. Арка оралиғи ℓ=12 м., баландлиги f=3 м. *С* шарнирига қўйилган ҳисобий юкнинг қиймати Рпр=20 т. Арканинг юк кўтариш қобилияти Мпр барча кесимлар учун бир хил (20.17-расм, *а*).

Арка бузилганда унда бешта пластик шарнир ҳосил бўлади. Шунга мос бўлган якуний чегаравий моментлар эпюраси 20.17-расм, *б* да тасвирланган.



20.17-расм

Керки кучини аниқлаймиз:

$$M_{A,пр} = +M_c^0 = Hf + M_{c,пр},$$
$$M_{A,пр} = M_{c,пр} = M_{пр}$$

бўлгани учун

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{P_{пр}\ell}{4f} = \frac{20 \cdot 12}{4 \cdot 3} = 20t.$$

Д нуқтасидаги пластик шарнирнинг ҳолатини белгиловчи $X_Д$ масофасини аниқлаймиз:

$$M_{D,пр} = M_{A,пр} + M_D^0 - Hy_D = M_{A,пр} + \frac{P_{пр}x_D}{2} - \frac{4fx_D}{\ell^2}(\ell - x_D) = M_{A,пр} - 10x_D + \frac{5}{3}x_D^2.$$

Бу нуқтадаги моментнинг қиймати максимал бўлиши лозимлигини эътиборга олиб, тенглама хосиласини нолга тенглаймиз ва ундан $X_Д$ ни аниқлаймиз:

$$\frac{dM_D}{dx} = -10 + \frac{10}{3}x_D = 0, \quad \textit{бундан} \quad x_D = 3m.$$

Топилган қийматни тенгламага қўйямиз:

$$M_{D,пр} = M_{A,пр} - 10x_D + \frac{5}{3}x_D^2 = -M_{D,пр} - 15,$$

$$M_{D,пр} = -7{,}5t \cdot m;$$

$$M_{A,пр} = M_{C,пр} = -M_{D,пр} = 7{,}5t \cdot m.$$

20.5. Рамаларни ҳисоблаш

Рамаларни ҳисоблашда асосий қийинчилик шундан иборатки, рўй бериши мумкин бўлган бузилиш шакллари жуда кўп ва уларнинг ичида қайси бири ҳақиқий эканлигини ажратиб олиш жуда қийин.

Ҳақиқий бузилиш шаклини аниқлаш учун *комбинациялашган механизм* усулидан фойдаланилади. Бу усулга кўра, берилган рама учун барча рўй бериши мумкин бўлган механизмлар кам миқдордаги оддий мустақил механизмларнинг комбинациясини тузиш йўли билан аниқланади. Бунда кўп ҳолларда баъзи комбинацияларнинг тадқиқот учун номақбуллиги, ҳисоб нуқтаи назаридан самарасизлиги кўзга ташланиб қолади ва улар ташлаб юборилади.

Бир қанча бузилиш механизмлари орасида, чегаравий эгувчи моментларнинг берилган қийматида минимал чегаравий юк ҳосил бўладиган ёки берилган чегаравий юк таъсирида энг катта эгувчи момент вужудга келадиган механизм ҳақиқий саналади.

Ҳар оддий ёки комбинациялашган бузилиш механизми учун мувозанат тенгламалари тузилади (20.4). Оддий мустақил бузилиш механизмларининг сони қуйидаги формуладан аниқланади:

$$m = n - л, \qquad (20.7)$$

бу ерда: n – эгувчи моментлар эпюрасини қуриш учун талаб этилган кесимлар сони;

$л$ – раманинг статик ноаниқлик даражаси.

Вужудга келиши мумкин бўлган бузилиш механизмларининг қуйидаги турлари мавжуд:

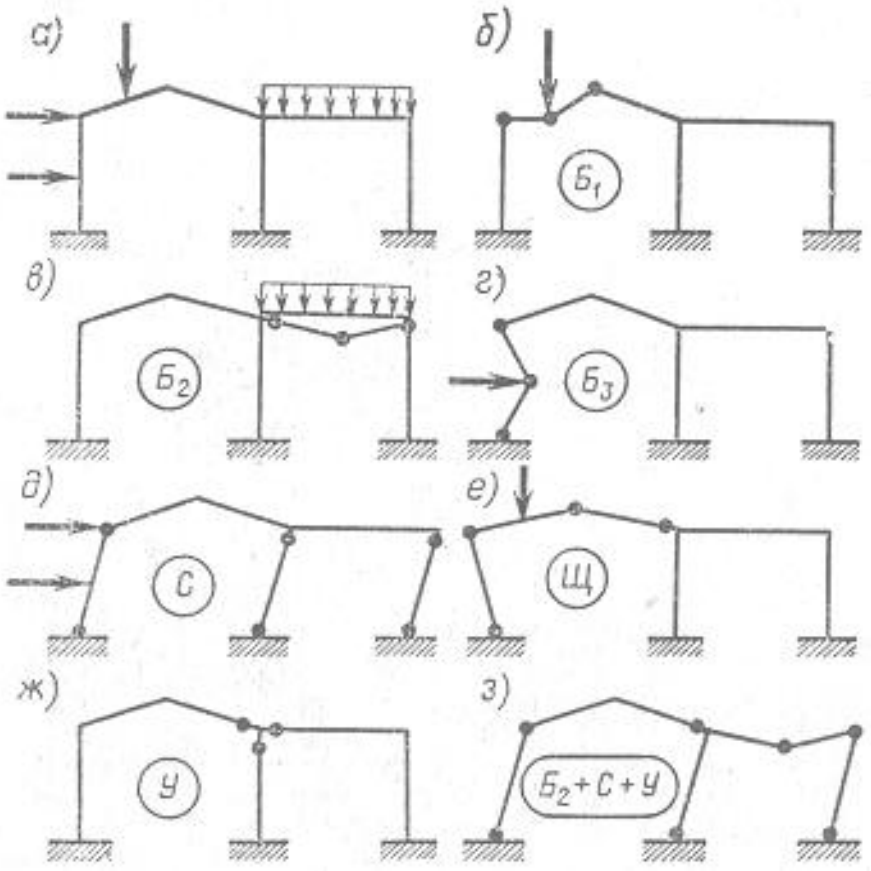
1) балкавий механизмлар (Б);

2) ёнлама силжиш механизми (С);

3) қисқич (щипцовые) механизмлар (Щ);

4) тугунларнинг айланиш механизми (У).

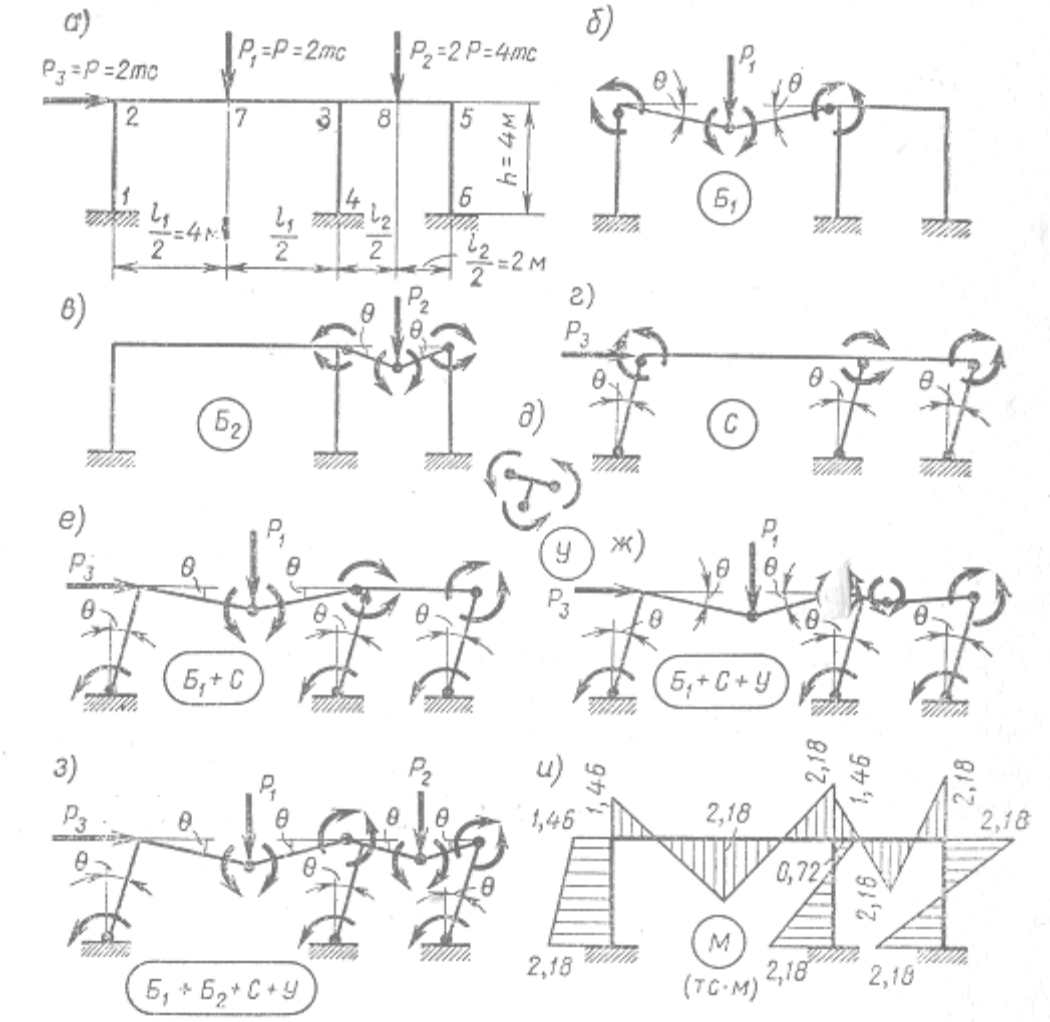
20.18 – расмда берилган рама (*а*) учун мустақил бузилиш механизмлари (*б – ж*) ва битта комбинация қилинган механизм (*з*) тасвирланган.



20.18-расм

1 – мисол. *20.19 – расм, а* да берилган рама учун чегаравий эгувчи моментлар эпюраси қурилсин ва пўлат рама стерженларининг кесими учун талаб этилган қаршилик моментлари аниқлансин. Пўлатнинг эгилишдаги ҳисобий қаршилиги $R_u = 2100\,кг/см^2$.

Вужудга келиши мумкин бўлган оддий бузилиш механизмларининг сони *т=п–л=10– 6=4.* Булар $Б_1$, $Б_2$, С ва У шаклларидир (20.19 – расм, *б, в, г, д*). Булардан ташқари яна учта комбинациялашган шакллар учраши мумкин (20.19 – расм, *е, ж, з*).



20.19-расм

Юқорида санаб ўтилган механизмларнинг ҳар бири учун ишлар тенгламаларини тузамиз:

$Б_1$ учун: $P_{1,пр}(\ell_1/2)\theta = 4M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр} = P_{1,пр}\cdot\ell_1/8 = 2\cdot 8/8 = 2\ т\cdot м;$

$Б_2$ учун: $P_{2,пр}(\ell_2/2)\theta = 4M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр} = P_{2,пр}\cdot\ell_2/8 = 4\cdot 4/8 = 2\ т\cdot м;$

С учун: $P_{3,пр}h\theta = 6M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр} = P_{3,пр}\cdot h/6 = 2\cdot 4/6 = 1{,}33\ т\cdot м;$

У учун: $3M_{пр} = 0$

ёки $M_{пр} = 0.$

$Б_1$ + С учун: $P_{1,пр}(\ell_1/2)\theta + P_{3,пр}h\theta = 8M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр}(P_{1,пр}/8)(\ell_1/2+h) = 2\ т\cdot м;$

$Б_1$ + С + У учун: $P_{1,пр}(\ell_1/2)\theta + P_{3,пр}h\theta = 9M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр} = (P_{1,пр}/9)(\ell_1/2+h) = 1{,}78\ т\cdot м;$

$Б_1$ + $Б_2$ + С + У учун: $P_{1,пр}(\ell_1/2)\theta + P_{2,пр}(\ell_2/2)\theta + P_{3,пр}h\theta = 11M_{пр}\theta$

ёки $M_{пр} = (P_{1,пр}/11)(\ell_1/2+\ell_2+h) = 2{,}18\ т\cdot м.$

Энг катта эгувчи момент $M_{пр} = 2{,}18$ т · м охирги комбинациялашган бузилиш механизмида ҳосил бўлади.

$Б_1$ + $Б_2$ +С+ У чегаравий эгувчи моментлар эпюрасини қуришда, $M_{12} = M_{32} = M_{43} = M_{53} = M_{56} = M_{65} = M_7 = M_8 = 2{,}18$ т · м деб ҳисоблаймиз. Агар тугунлардаги эгувчи моментлар чегаравий қийматга етмаган бўлса, уларнинг қиймати бевосита мувозанат шартларидан топилади.

Раманинг биринчи оралиқ ригелидан:

$$\frac{P_{1,пр}\ell_1}{4} = \frac{M_{32}+M_{23}}{2} = M_7 \quad \text{ёки} \quad \frac{2\cdot 8}{4} - \frac{2{,}18+M_{23}}{2} = 2{,}18,$$

бундан $M_{23} = 1{,}46$ т · м.

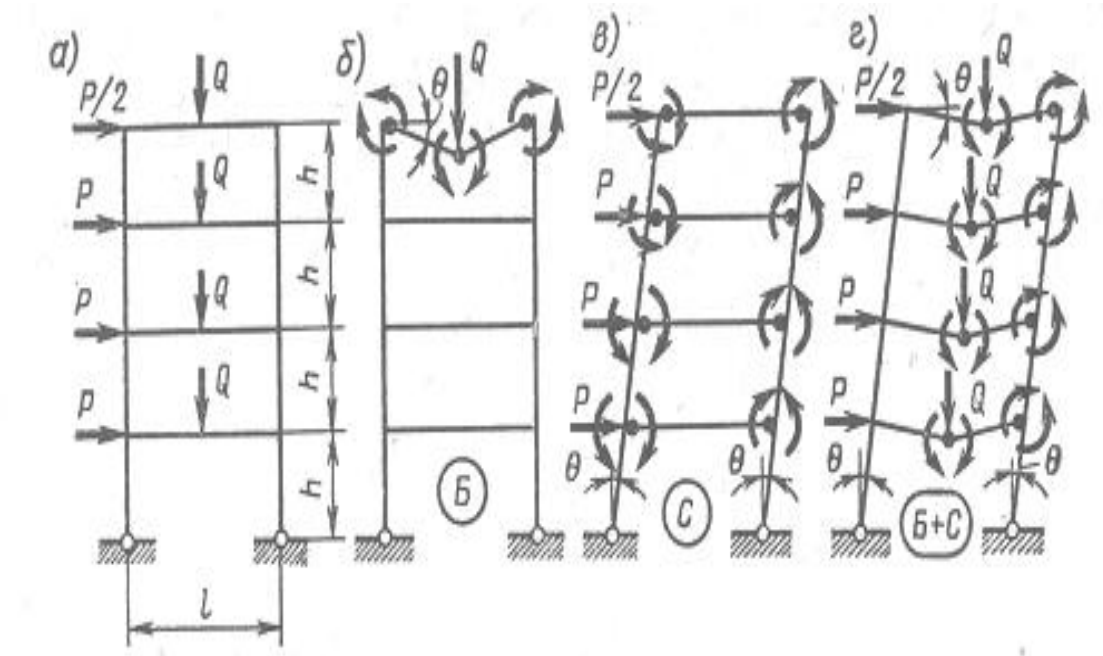
Шу йўл билан иккинчи оралиқ ригели учун $M_{35} = 1{,}46$ т · м ни аниқлаймиз. Учинчи тугун учун мувозанат тенгламаси:

$\sum M_3 = 2{,}18 - 1{,}46 - M_{34} = 0.$ Бундан $M_{34} = -0{,}72$ т · м.

Рама стерженлари учун талаб этилган пластик қаршилик моменти:

$$W_T = M_{\max}/R_u = 218000/2100 = 104\,см^3.$$

2 – мисол. 20.20 – расм, *а* да тасвирланган рама учун чегаравий эгувчи моментларнинг қийматлари аниқлансин. Рамага *P* ва *Q=2P* кучлари таъсир этади, $\ell = 2h.$



20.20-расм

Раманинг конструктив тузилишидан келиб чиқиб, пластик шарнирлар фақат ригелларда ҳосил бўлиши мумкин, деб қабул қиламиз.

Шундай қилинса, кўпгина бузилиш механизмлари орасида фақат учтасини кўриб ўтсак кифоя қилади (20.20 – расм, *б, в, г*).

Учта схема учун ишлар тенгламасини тузамиз.

Б учун: $Q_{np}(\ell/2)\theta\ 4M_{np}\theta,\quad$ *бундан* $\quad M_{np}=Q_{np}\ell/8=P_{np}h/2;$

С учун: $P_{np}h(1+2+3+\frac{4}{2})\theta=8M_{np},\quad$ *бундан* $\quad M_{np}=P_{np}h.$

Б+С учун: $4Q_{np}(\ell/2)\theta+P_{np}h(1+2+3+\frac{4}{2})\theta=16M_{np}\theta,$

бундан $\quad M_{np}=Q_{np}\ell/8+P_{np}h/2=P_{np}h.$

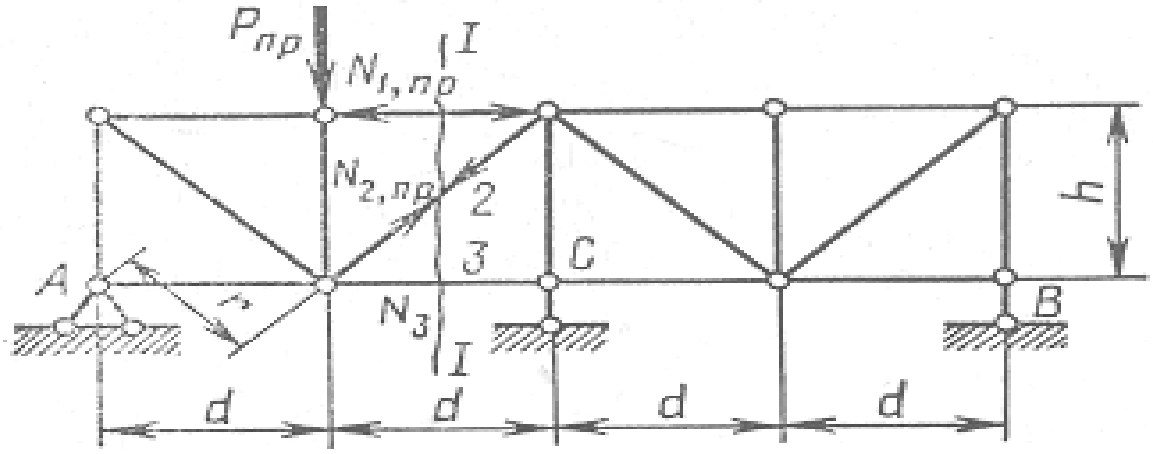
Бу ерда $M_{np}=P_{np}h$ рама учун учун чегаравий эгувчи моментдир.

20.6. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш

Статик ноаниқ фермаларда ҳам, рамалардаги сингари, бузилиш схемаси олдиндан маълум эмас. Шунинг учун бир неча, баъзан эса кўплаб бузилиш

схемаларини таҳлил қилишга тўғри келади. Булар ичида энг кичик чегаравий кучга дош беролмайдигани чинакам бузилиш схемаси бўлади.

Битта ортиқча стерженга эга бўлган, яъни бир номаълумли фермани кўриб ўтамиз (*20.21 - расм*). Ферма 17 стержендан ташкил топган.



20.21 – расм

Ферма бузилиш ҳолатига келиши учун ўн етти стержендан иккитаси оқувчанлик чегарасига етиши керак. Аммо шунча стерженлар ичида бузилиш ҳолатидаги икки стерженни излаб топиш осон иш эмас. Бу масалага жавоб топиш учун фермани дастлаб эластик зонада ҳисоблаб кўриш мақсадга мувофиқ. Ҳисоб натижасида энг катта кучланиш ҳосил бўладиган, бинобарин, бошқаларидан илгари “оқиб кетадиган” стержен аниқланади. Бу стержен топилгач, унга $N_{пр} = \sigma_T F$ кучини қўйиб, ферма эластик зонада қайта ҳисобланади. Ҳисоб натижасида “оқиб кетадиган” иккинчи стержен аниқланади.

Бундай ҳисоблаш фермада нечта ортиқча стержен бўлса, ўшанча бажарилади.

Ферманинг бузилиш шакли аниқлангач, чегаравий юкнинг қиймати механизмга айланган ферманинг мувозанат шартидан фойдаланиб топилади.

Оқувчанликка дуч келган дастлабки стерженлар 1 ва 2 – стерженлар десак, уларда вужудга келадиган чегаравий зўриқишлар қуйидаги қийматларга эга бўлади:

$$N_{1,пр} = \sigma_T F_1 \quad ва \quad N_{2,пр} = \sigma_T F_2.$$

У ҳолда P кучининг чегаравий қиймати, бошқача айтганда, ферманинг юк кўтариш қобилияти кесилган ферманинг чап қисми учун A нуқтасига нисбатан тузилган моментлар тенгламасидан топилади:

$$\sum M_A = P_{пр} d - N_{1,пр} h - N_{2,пр} ч = 0,$$

бу ердан $$P_{пр} = (N_{1,пр} h + N_{2,пр} ч)/d = \sigma_T (hF_1 + чF_2)/d.$$

Статик ноаниқ фермалар ҳисобини мураккаблаштирадиган яна бир омил бор. У ҳам бўлса шундан иборатки, сиқилишга ишлайдиган стерженлар устуворлигини йўқотиши, яни улардаги зўриқишнинг қиймати $\sigma_T F$ га етмасдан туриб, эгилиб кетиши мумкин. Бундай ҳолда улар ўзларидаги кучланиш критик қийматга етганда ишдан чиқади.

Бундан ташқари ферма фақат юкланиш чоғида эмас, юкдан бўшалиш чоғида ҳам шикастланиши мумкин. Бу масала С.А. Бернштейн ва Н.С. Стрелецкийларнинг тадқиқотларида ўз ечимини топган.

20.7. Такрорий – ўзгарувчан юкланиш

Иншоот хизмат муддати давомида турли кучлар таъсирида бўлади: доимий ва муваққат кучлар, кучларни юклаш ва юкдан бўшатиш жараёни ва ҳ.к.

Ҳисоб ишларини соддалаштириш мақсадида муваққат (вақтинча) кучларнинг ўзгариш чегараси берилган ва уларнинг қўйилиш кетма-кетлиги ихтиёрий деб қаралади. Бундай юкланиш *такрорий – ўзгарувчан* деб аталади. Агар баъзи муваққат юклар ўз йўналишини ўзгартирса, системанинг айрим кесимларида чўзилиш ва сиқилиш жараёнида *ўзгарувчан оқувчанлик* вужудга келиши мумкин.

Эластик – пластик босқичда ишлаётган статик ноаниқ системадан юк олинса, уларда қолдиқ деформация ва кучланиш сақланиб қолади; ҳар гал қайта юкланганида улардаги кучланиш орта боради ва оқибатда системани бузилишга олиб келади.

Эластик босқичда содир бўладиган чарчаш (усталость) емирилишидан фарқли равишда такрорий – ўзгарувчан юкланишда бузилиш миллионлаб эмас, балки юзлаб, ўнлаб, хаттоки бир – неча қайта юкланишлардан сўнг содир бўлиши мумкин.

Агар такрорий – ўзгарувчан юкланишда юкларнинг параметри баъзи чегаравий миқдордан кичиклигича қолаверса, конструкцияда мослашув рўй беради ва у эластик ҳолатдаги каби ишлай бошлайди. Агар юклар параметри ўша чегаравий миқдордан ортиқ бўлса, конструкциянинг мослашуви рўй бермайди ва у ортиб борувчи пластик бузилиш ҳолатига ўтади, бу ҳолатда йўл қўйилмайдиган даражада катта деформациялар ва кўчишлар содир бўлади. Бундай ҳолатни вужудга келтирувчи юк *чегаравий ўсувчи юк* деб аталади.

Ўзгарувчан оқувчанликни вужудга келтирувчи юк *ўзгарувчан оқувчанликнинг чегаравий юки* деб аталади.

Ўсиб борувчи пластик бузилиш ва айниқса ўзгарувчан оқувчанлик оддий пластик бузилишга қараганда хавфлироқдир. Чунки мазкур конструкция учун оддий юкланишдаги чегаравий параметр ўсиб борувчи чегаравий юк параметридан юқорироқдир.

Ўсиб борувчи чегаравий юк ва ўзгарувчан оқувчанликни вужудга келтирувчи юкнинг қиймати мослашувчанлик ҳақидаги теорема асосида аниқланиши мумкин. Мазкур теоремага кўра чегаравий юклар таъсирида ҳосил бўлган қолдиқ эгувчи моментлар мувозанат шартини қаноатлантириш билан бирга, система механизмга айланган чоғда ҳар бир пластик шарнирдаги қолдиқ, эластик максимал ($M_{мах}$) ёки эластик минимал (M_{min}) эгувчи моментларнинг йиғиндиси чегаравий эгувчи моментга тенг бўлиши лозим. Бунда $M_{мах}$ ёки M_{min} ни танлаш масаласи пластик шарнирни қайси томонга очилишига қараб ҳал этилади. Бу шарт қолдиқ эгувчи моментлар қийматини қуйидаги формула орқали аниқлаш имконини беради: $M^0 = M_{пр} - M_{\max}$ ёки $M^0 = M_{пр} - M_{\min}$.

M_{max} ва M_{min} учун уларнинг мутлоқ қийматлари олинади.

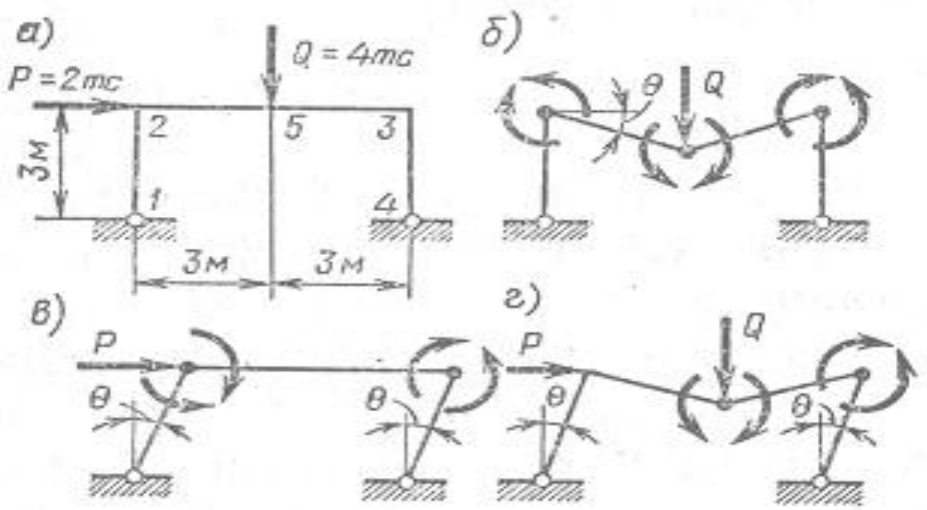
Эластик ҳисоб натижалари жадвал кўринишида ёзиб борилади. Ҳар бир бузилиш механизми учун мувозанат тенгламаси тузилиб, унинг таркибига $M_{пр}$ ва M_{max} ёки M_{min} орқали ифодаланган қолдиқ эгувчи моментлар киради.

Ўзгарувчан оқувчанликнинг чегаравий юкини аниқлашда юкларнинг икки хил ишорага эга бўлиши мумкинлиги инобатга олинади.

Ушбу масала А.А. Гвоздев[1] ва А.Р. Ржаницин[2] ларнинг асарларида батафсил баён этилган.

Мисол. 20.22 – расм, *а* да берилган рама кесимларининг талаб этилган юк кўтариш қобилияти аниқлансин. Рамага қиймати *P* ва *Q* бўлган муваққат кучлар таъсир этади. Раманинг барча стерженлари ўзгармас кесимга эга.

Рамага бир хил шароитда такрорий – ўзгарувчан кучлар таъсир этади ва ўсиб борувчи бузилиш ҳолати унга ҳавф солиб туради.



20.22 – расм

Раманинг эластик ҳолатида таъсир этган ҳар бир юкдан эгувчи моментлар ҳисоблаб топилган ва қуйидаги жадвалда қайд этилган. Шу жадвалда эгувчи моментларнинг максимал ва минимал қийматлари ҳам ўз аксини топган.

---

[1] Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Стройиздат, 1949.

[2] Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., Госстройиздат, 1954.

Юклар	M_2	M_5	M_3	Юклар	M_2	M_5	M_3
Q=4тк	-2,25	3,75	-2,25	$M_{мах}$	3	3,75	0
P=2тк	3	0	-3	M_{min}	-2,25	0	-5,25

Ригелнинг ўсиб борувчи бузилишининг балкавий механизми учун пластик шарнирлардаги қолдиқ моментларни чегаравий ҳамда максимал ёки минимал эластик моментлар орқали ифодалаймиз (20.22 – расм, *б*).

$$M_2^0 = M_{пр} - 2{,}25; \qquad M_3^0 = M_{пр} - 5{,}25; \qquad M_5^0 = M_{пр} - 3{,}75.$$

Буларни ригелнинг мувозанат тенгламасига қўйиб, 2,25 + 2 · 3,75 + 5,25 = 4 $M_{пр}$; $M_{пр}$=3,75тк · м га эга бўламиз.

Ёнлама силжиш механизми учун (20.22 – расм, *в*):

$$M_2^0 = M_{пр} - 3; \qquad M_3^0 = M_{пр} - 5{,}25;$$
$$3 + 5{,}25 = 2M_{пр}; \qquad M_{пр} = 4{,}125\, тк \cdot м.$$

Комбинациялашган бузилиш механизми учун (20.22 – расм, *г*):

$$M_3^0 = M_{пр} - 5{,}25; \qquad M_5^0 = M_{пр} - 3{,}75;$$
$$2 \cdot 5{,}25 + 2 \cdot 3{,}75 = 4M_{пр}; \qquad M_{пр} = 4{,}5\, тк \cdot м.$$

Ҳисобий чегаравий эгувчи момент сифатида энг катта момент $M_{пр}$= 4,5 тк·м қабул қилинади. Рама учун бузилишнинг комбинациялашган механизм ҳамда P ва Q кучларини навбатма – навбат қўйиб – олиниши ҳавфли саналади.

Хулоса қилиб айтганда, *чегаравий мувозанат ҳолатида статик ноаниқ системалар геометрик ўзгарувчан систамаларга айланиб қолади*. Шунинг учун таянчларнинг силжиши, ҳароратнинг ўзгариши бундай системаларнинг чегаравий юк кўтариш қобилиятига таъсир этмайди.

МУНДАРИЖА

Кириш 7

I – БОБ.

1.1. Қурилиш механикаси фани ва унинг вазифалари..... 7

1.2. Қурилиш механикасининг ривожланишига оид маълумотлар..... 9

1.3. Иншоотлар ва уларнинг ҳисоблаш схемалари..... 15

1.4. Таянчлар ва юклар..... 17

1.5. Стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартлари..... 18

1.6. Стерженли системаларнинг эркинлик даражалари …..... 23

1.7. Кучлар тасирининг мустақиллиги қоидаси ва умумлашган эпюралар 26

II – БОБ. ТАСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ

2.1. Таъсир чизиқлари ҳақида тушунча 28

2.2. Оддий балкаларда зўриқишларнинг таъсир чизиқлари.....……. 29

2.3. Зўриқишлар қийматини таъсир чизиқлари ёрдамида аниқлаш…..... 37

2.4. Юк тугунлар орқали узатилганда таъсир чизиқларни қуриш…..... 40

2.5. Таъсир чизиқлари қуришнинг кинематик усули……..... 44

III – БОБ. КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР

3.1. Умумий маьлумотлар..... 47

3.2. Кўп ораликли статик аник шарнирли балкаларни аналитик усулда ҳисоблаш…..... 51

3.3. Кўп ораликли статик аник балкаларда таьсир чизиклари…..... 53

IV – БОБ. СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР

4.1. Фермалар тўғрисида тушунча ва уларнинг турлари…..…..... 56

4.2. Фермаларни аналитик усулда ҳисоблаш..... 59

4.3. Ферма стерженлардаги зўрикишларнинг таьсир чизиклари.....…… 68

4.4. Шпренгелли фермалар..... 76

V – БОБ. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР

5.1. Уч шарнирли системалар..... 81

5.2. Уч шарнирли аркаларнинг таянч реакцияларини аниқлаш…..... 84

5.3. Уч шарнирли аркаларни аналитик усулда ҳисоблаш..... 86
5.4. Уч шарнирли арканинг макбул ўқи……..... 88
5.5. Уч шарнирли аркаларни қўзғалувчи юк таъсирига ҳисоблаш.....… 89
5.6. Уч шарнирли тортқичли арка ва рамаларни ҳисоблаш. Ядро моментлари……..... 96
5.7. Уч шарнирли аркасимон фермаларни ҳисоблаш..... 99

VI – БОБ. КЎЧИШЛАР НАЗАРИЯСИ

6.1 Кўчишлар ва ишлар ҳақида тушунча..... 110
6.2. Ишлар ва кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теоремалар..... 115
6.3. Кўчишларни аниқлаш учун Мор формуласи ва Верешчагин усули.... 119
6.4. Ҳароратнинг ўзгаришидан ва таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар..... 124
6.5. Кўчишларни Симпсон усулида аниқлаш……..... 139

VII - БОБ СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

7.1. Статик ноаниқ системалар ҳақида тушунча..... 143
7.2. Кучлар усулининг асосий системасини танлаш..... 146
7.3. Кучлар усулининг каноник тенгламалари 149
7.4. Каноник тенглама коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш…..... 152
7.5. Статик ноаниқ рамаларнинг M, Q ва N эпюраларини қуриш…..... 155
7.6. Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда соддалаштириш усуллари..... 158

VIII – КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИҚ БАЛКА, ФЕРМА ВА АРКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш..... 172
8.2. Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш..... 183
8.3. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш..... 192

8.4. Икки шарнирли аркаларни ҳисоблаш..... 197

8.5. Шарнирсиз аркаларни ҳисоблаш..... 200

IX – БОБ. СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. Усулнинг моҳияти 202

9.2. Кўчишлар усулининг асосий системаси ва каноник тенгламалари..... 205

9.3. Реакциялар ва кўчишлар орасидаги боғланиш ҳақида теорема..... 210

9.4. Каноник тенглама коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш..... 214

9.5. Раманинг M, Q, ва N эпюраларини қуриш 220

9.6. Кўчишлар усулида соддалаштириш 221

9.7. Статик ноаниқ рамаларни аралаш ва комбинация усулларида ҳисоблаш…….. 222

X – БОБ СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. Тақрибий усуллар ҳақида тушунча 234

10.2. Рамаларни вертикал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш..... 235

10.3. Рамаларни горизантал юклар таъсирига тақрибий ҳисоблаш..... 236

10.4. Тугунларни мувозанатлаш усули..... 238

XI– БОБ. ҚУРИЛИШ МЕҲАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ТАТБИҚИ

11.1. Матрицалар ҳақида тушунча 243

11.2. Матрица амаллари..... 247

11.3. Статик аниқ балкаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш..... 249

11.4. Статик аниқ фермаларни матрицалар ёрдамида ҳисоблаш..... 252

11.5. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули 255

XII – БОБ. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. Усулнинг ғояси 259

12.2. Стерженли системаларни чекли элементлар усулида ҳисоблаш..... 262

12.3. Ясси рамаларни ҳисоблаш 267

XIII – БОБ. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ
13.1. Асосий тушунчалар..... 269
13.2. Сиқилган стерженлар учун Эйлер формуласи..... 274
13.3. Учлари турлича маҳкамланган стерженлар учун критик куч ифодаси……... 279
13.4. Сиқилган стерженларни амалий ҳисоблаш 280
13.5. Сиқилган стерженларда бирлик кўчишдан ҳосил бўлган реакцияларни аниқлаш 284
13.6. Рамалар устуворлиги 289
13.7. Аркалар устуворлиги 297
XIV – БОБ. ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ АСОСЛАРИ
14.1. Иншоотлар динамикасининг вазифалари ва асосий тушунчалари.... 298
14.2. Иншоотлар динамикаси усуллари 303
XV–БОБ. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИРГА ТЕНГ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР
15.1. Системанинг эркин тебраниши..... 305
15.2. Мажбурий тебранишлар (Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол)..... 315
15.3. Мажбурий тебранишларга қаршилик кучларининг таъсири..... 325
15.4. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг сейсмик тебранишлари дифференциал тенгламаси ва унинг ечими..... 330
XVI – БОБ. ТЕБРАНИШЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ТЕХНИКАГА ТАДБИҚИ
16.1. Тебранишни ютувчи амортизаторлар..... 334
16.2. Вибраграф..... 335
16.3. Такрорлик ўлчагичи (частотометр)..... 336
16.4. Пойдевор қозиқларини виброцион усулда қоқиш 337
16.5. Вибрацион сув кўтаргичлар 337
XVII – БОБ ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИР НЕЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР
17.1. Қаршиликсиз муҳитда системанинг эркин тебраниши..... 338

17.2. Қаршиликли муҳитда системанинг эркин тебраниши..... 345
17.3. Эркинлик даражаси иккита ва учта бўлган системалар..... 346
17.4. Эркинлик даражаси бир нечта бўлган системаларнинг мажбурий даврий тебранишлари 354
XVIII – БОБ ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР
18.1. Балкаларнинг кўндаланг тебранма ҳаракати дефференциал тенгламаси…….. 357
18.2. Балканинг эркин тебранишлари 358
18.3 Мажбурий тебранишлар 363
XIX – БОБ ИНШООТЛАР ТЕБРАНИШИНИ ТАДҚИҚ ЭТИШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ
19.1. Энергетик усул..... 365
19.2. Бубнов – Галёркин усули..... 371
19.3. Кетма – кет яқинлашув усули 373
19.4. Дункерлай формуласи 374
19.5. Спектрал функция усули 376
19.6. “Иншоот – замин” системасининг эркин тебранишлари 377
19.7. Иншоотлар эркин тебранишлари даври ва шаклини аниқлаш 385
XX – БОБ ИНШООТЛАРНИ ЮК КЎТАРИШ ҚОБИЛИЯТИ БЎЙИЧА ҲИСОБЛАШ
20.1. Асосий тушунчалар 392
20.2. Бир оралиқли статик аниқ балкаларни ҳисоблаш 396
20.3. Узлуксиз балкаларни ҳисоблаш 397
20.4. Статик ноаниқ аркаларни ҳисоблаш 404
20.5. Рамаларни ҳисоблаш 409
20.6. Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш 413
20.7. Такрорий – ўзгарувчан юкланиш 415

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Введение ……..…….……7

1.1 Предмет строительной механики и её задачи ……..……...7

1.2 Пути развития строительной механики ……...……9

1.3 Сооружения и их расчетные схемы ……...……15

1.4 Опоры и нагрузки ……..……...……17

1.5 Условия геометрической неизменяемости стержневых систем……...18

1.6 Степени свободы стержневых систем ……....23

1.7 Принцип независимости действия сил и огибающие эпюры ……...26

Глава II. Теория линий влияния ……..……..28

2.1 Понятия о линиях влияния ……..……..28

2.2 Линии влияния усилий по линиям влияния ……..……...29

2.3 Определение усилий по линиям влияния ……....37

2.4 Построение линий влияния при узловой передаче нагрузок ……40

2.5 Кинематический способ построения линий влияния……..……44

Глава III. Многопролетные статически определимые балки……..47

3.1 Общие сведения ……..…47

3.2 Аналитический расчет многопролетных шарнирных балок ……..51

3.3 Линии влияния в многопролетных балках ……...53

Глова IV. Статически определимые фермы ……..……56

4.1 Сведения о фермах и их классификация ……..……56

4.2 Аналитический расчет ферм ……..59

4.3 Линии влияния усилий в фермах ……..68

4.4 Шпренгельные фермы ……76

Глова V. Трехшарнирные арки и рамы……..81

5.1 Трехшарнирные системы …….....81

5.2 Определение опорных реакций трехшарнирных арок …….....84

5.3 Аналитический расчет трехшарнирные арок …….....86

5.4 Рациональный ось трехшарнирной арок ……..…….....88

5.5 Расчет трехшарнирных арок на действие подвижных нагрузок ……89

5.6 Расчет трехшарнирных арок и рам с затяжкой ……..…….....96
5.7 Расчет трехшарнирных арочных ферм ……..…….....99
Глава VI. Теория перемещений ……..…….110
6.1 Понятия о перемещениях и работах ……..…….....110
6.2 Теоремы о взаимности работ и перемещений ……..…….....115
6.3 Формула Мора для определения перемещений и правило Верещагина……..119
6.4 Перемещения возникающие в следствии изменения температур и осадка опор ……..…….....124
6.5 Определение перемещений по способу Симпсона……139
Глава VII. Расчет статически неопределимых рам методом сил ……143
7.1 Понятие о статически не определимых системах …….....143
7.2 Выбор основной системы метода сил …….....146
7.3 Канонические уравнения метода сил …….....149
7.4 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений …….....152
7.5 Построение эпюр M, Q и N для статически неопределимых рам……155
7.6 Способы упрощения при расчетах статически неопределимых рам…..158
Глава VIII. Применение метода сил при расчетах статически неопределимых балок, ферм и акор …….....172
8.1 Расчет неразрезных балок…….....172
8.2 Расчет неразрезных балок методом моментных фокусов….....183
8.3 Расчет статически неопределимых ферм…….....192
8.4 Расчет двухшарных арок …….....197
8.5 Расчет безшарнирных арок…….....200
Глава IX. Расчет статически неопределимых рам методом переменой.
9.1 Сущность метода …….....202
9.2 Основная система метода перемешенный и канонические уравнения…….205
9.3 Теорема о взаимности реакций и перемещений…….....210

9.4 Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений…….....214
9.5 Построение эпюр M,Q и N статические неопределимых рам.....220
9.6 Упрощения в методе перемещений …….....221
9.7 Расчет статические неопределимых рам смешанным и комбинированным методами……..…….…….....222
Глава X. Приближенные способы расчета статически неопределимых рам.
10.1 Понятия о приближенных способах …….....234
10.2 Приближенный расчет рам на действие вертикальных сил……235
10.3 Приближенный расчет рам на действие горизонтальных сил……..236
10.4 Способ уравновешивания узлов……...238
Глава XI. Применение теории матриц в задачах строительной механики.
11.1 Понятия о матрицах……..243
11.2 Матричное исчисление……..247
11.3 Расчет статически определимых балок матричным способом……..249
11.4 Расчет статически определимых определимых ферм матричных способом …….....252
11.5 Определение перемещений матричным способом ……255
Глава XII. Метод конечных элементов..……..……259
12.1 Идея метода…..……...259
12.2 Расчет стержневых систем методом конечных элементов ……262
12.3 Расчет плоских рам……267
Глава XIII. Устойчивость стержневых систем ……..……269
13.1 Основные понятия…..……269
13.2 Формула Эйлера для сжатых стержней …….……..274
13.3 Критическая сила для стержней различных закреплений ……279
13.4 Практический расчет сжатых стержней ……....280
13.5 Определение реакций сжатых стержней от единичных перемещений……284

13.6 Устойчивость рам..……..289
13.7 Устойчивость арок ……297
Глава XIV. Основы динамики сооружений…….298
14.1 Задачи динамики сооружений и основные понятия..……..298
14.2 Методы динамики сооружений ……303
Глава XV. Системы с одной степенью свободы……305
15.1 Свободные колебания системы …….305
15.2 Вынуждение колебания системы без учета сил сопротивления ……315
15.3 Вынуждение колебания системы с учетом сил сопротивления …….325
15.4 Дифференциальное уровнен сейсмических колебаний системы с одной степенью свободы и его решение …….....330
Глава XVI. Применение теории колебаний в технике……..334
16.1 Амортизатор поглощающие колебания…..…….....334
16.2 Виброграф…….....335
16.3 Частот о метр ……..336
16.4 Погружение свай вибрационным способам ……337
16.5 Вибрационные водоподъемники …….....337
Глава XVII. Системы с несколькими степенями свободы ……338
17.1 Свободные колебания системы без учета сил сопротивление …….....338
17.2 Свободные колебания системы с учетом сил сопротивление……345
17.3 Системы с двумя и тремя степенями свободы ……..346
17.4 Вынужденные колебания систем с несколькими степенями свободы…….354
Глава XVIII. Системы с бесконечным числом степеней свободы ……...356
18.1 Дифференциальное уровнен поперечных колебаний балок 357
18.2 Свободный колебания балки …….....358
18.3 Вынужденные колебания …….....363
Глава XIX. Приближенные методы исследования колебаний сооружение.
19.1 Энергетический метод …….....365
19.2 Метод Буднова - Галёркина …….....371

19.3 Способ последовательных приближений …….....373
19.4 Формула дункерлая ……..…….....374
19.5 Метод спектральных функций …….....376
19.6 Свободные колебания системы «Сооружение – основание» 377
19.7 Определение периода и формы свободных колебаний систем..……385
Глава XX. Расчет сооружений по несущей способности …….....392
20.1 Основные понятия ……..…….....392
20.2 Расчет однопролетных статически определимых балок….....396
20.3 Расчет неразрезных балок …….....397
20.4 Расчет статически неопределимых арок …….....404
20.5 Расчет рам …….....409
20.6 Расчет статически неопределимых ферм …….....413
20.7 Повторно - изменяемое загружение 415

CONTENTS

Chapter 1. Kinematic analyses of constructions……..7
1.1 Buildings and their calculating scheme……7
1.2 Supports and loads……9
1.3 Terms of geometrical invariable fars system……...15
1.4 Degrees of freedom of fars systems……17
1.5 Principles of independent force action……18
1.6 Degree of the liberty of the pivotal systems……23
1.7 Principle to independence of the action of power and bending around эпюры……26
Chapter 2. Theory of lines of influences……28
2.1 Concepts of influence lines……...28
2.2 Line Influence of simple beams……29
2.3 Deficition of force by influence lines……37
2.4 Construction of line Influence transferring of loads……40
2.5 Kinematicheskiy way of the influence line building……44
Chapter 3. Calculation of multy spam statistic determinable beams……47
3.1 General information ……..47
3.2 Calculation of multy spam statistic determinable beams……..51
3.3 Line influence in multy spam statistic determinable beams……..53
Chapter 4. Statistical definite frames……56
4.1 General concepts……...56
4.2 Analytical calculation of frames for moving loads……...59
4.3 Influence lines of efforts in far frames……..68
4.4 Truss frames……..76
Chapter 5. Three hingled arches and frames……..81
5.1 Three hingled arches systems……81
5.2 Determinate of support reaction of Three hingled arches……84
5.3 Analytical calculation of three hingled arches……..86

5.4 Pational arches of Three hingled arches……..……..88
5.5 Calculation of Three hingled arches for action of moving loads…..……..…89
5.6 Calculation of three hingle and frame with frightening……96
5.7 Calculation of three hingle and frames……..99
Chapter 6. Theary of movement ……..…110
6.1 Conseption about movement and work……...110
6.2 Theary about reciprocity of work and movement……...115
6.3 Formula of work for Determinate movement and rules of vereshagina……..119
6.4 Movement occur changing of temperature and seeting of bearing……124
6.5 Determinate of movement by Simpson……...139
Chapter 7. Calculation of statistic undefined system by force……143
7.1 Conception of statistic indeterminable frame by methods of force……..…143
7.2 Choice of main system force method……..146
7.3 Comical eqnation of force method……..149
7.4 Determinate of coefficient and free members of conocical equation …….152
7.5 Construction curve of M,Q and N for statistic indeterminable frame…….155
7.6 Methods of simplication on calculation indeterminable frame...……158
Chapter 8. Application of force methods Calculation of statistic indeterminable beams, frames and arches ……...……..172
8.1 Calculation of continuous beams…….……172
8.2 Calculation of continuous beams by methods of moment focuses.……..…189
8.3 Calculation of statistic indeterminable Frames……...……192
8.4 Calculation of twocirrled arches ……197
8.5 Calculation of cireled arches……...200
Chapter 9. Calculation of indeterminable frames by changing methods……202
9.1 Essence of methods……202
9.2 Main system of methods of movement and canonical equation……..205
9.3 Theary about reciprocity of work and movement……...210
9.4 Determinate of coefficient and free members of conocical equation …….214
9.5 Construction curve of M,Q and N for statistic indeterminable frame……..…220

9.6 Simplefication in methods of movement……221
9.7 Calculation of statistic indeterminable frames mixed and complex methods……..222
Chapter 10. Approching methods of Calculation of statistic indeterminable frames……234
10.1 Conception Approching methods……..234
10.2 Approching Calculation of frames to action……235
10.3 Approched Calculation of frame to action of corizontal force ……236
10.4 Methods of balancing knot……238
Chapter 11. Application of theory matrix in tasks of constructional mechanics……..243
11.1 Conception of matrix……243
11.2 Matrix calculus……..247
11.3 Calculation of statistical determinable beams by Matrix methods……249
11.4 Calculation of statistical determinable frames by Matrix methods……252
11.5 Determinatee movement by matrix methods……255
Chapter 12. Methods of final elements……259
12.1 Method idea ……..259
12.2 Calculation of bar system by methods of final element……262
12.3 Calculation of flat frame……267
Chapter 13. Stability of bar system……..269
13.1 General conception……....269
13.2 Formula ailer for compressed bars……274
13.3 Critical force for bars of different fixing……...279
13.4 Practical calculation of compressed bars ……280
13.5 Determinate of reaction of compressed bars from unit movement……...284
13.6 Stability of frame……...289
13.7 Stability of arches……..297
Chapter 14. General dynamics of building……..298
14.1 Tasks of building dynamics and main conception……298

14.2 Methods of building dynamics……..303
Chapter 15. System with one degrees of freedom……..…….305
15.1 Free vibration of system without accounting of streng force resistance…...305
15.2 Enforcement of vibration of systems without accounting resistance force...315
15.3 Enforcement of vibration of systems without accounting resistance force...325
15.4 Differential equation of seismic vibration system with are degree of freedom and its solution……...330
Chapter 16. Application of theory vibration in technics……..334
16.1 Buffer action of absorbing vibration…….334
16.2 Vibragraph……....335
16.3 Frequence about metre……..336
16.4 Loading of poling with methods of vibration……337
16.5 Vibrational water up……..337
Chapter 17. Systems of some degrees of freedom……...338
17.1 Freedom vibration system without accounting of free resistance……338
17.2 Freedom vibration with accounting of force resistance……345
17.3 System of two and three degrees of freedom……346
17.4 Enforcement vibration system with some degrees of freedom…….354
Chapter 18. System of endless degrees of freedom…….356
18.1 Differencial equation of cross vibration of beams……357
18.2 Freedom vibration of beams……..358
18.3 Enforcement vibration……...363
Chapter 19. Approching methods of building vibration……..365
19.1 Methods of power producing……365
19.2 Methods of Bundov –Yalerkin……..371
19.3 Methods of successive apporimation…….373
19.4 Formula Dunkerlay……374
19.5 Methods of spectral functions……...376
19.6 Freedom vibration of system ‘’Building – faundation’’……377
19.7 Determinate of period and forms of freedom vibration system……385

Chapter 20. Calculation of building on bearing capacity……392
20.1 General conception……392
20.2 Calculation of single-spam statistic determinable beams……..396
20.3 Calculation of continuous beams……...397
20.4 Calculation of statistic intederminable arches……...404
20.5 Calculation of frames……...409
20.6 Calculation of indeterminable frames..…….413
20.7 Repeated variable loading……415