

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Методические указания и задания к расчетно-графической
работе по курсу “Сопротивление материалов”
для студентов 2-го курса всех строительных
специальностей очной формы обучения

Краснодар
2006

Составители: д-р. физ.-мат. наук, проф. Н. Н. Фролов,
канд. физ.-мат. наук, доц. С. Ю. Молдаванов,
канд. физ.-мат. наук, доц. С.Б. Лозовой.

УДК 539.3

Расчет балок на прочность и жесткость. Методические указания и задания к расчетно-графической работе по курсу «Сопротивление материалов» для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения / Кубан. гос. технол. ун-т; сост.: Н. Н. Фролов, С. Ю. Молдаванов, С.Б. Лозовой. Краснодар, 2006. 20 с.

Предлагаемые методические указания содержат примеры решения типовых задач, входящих в состав расчетно-графической работы по курсу «Сопротивление материалов», посвященной рассмотрению расчетов балок на прочность и жесткость. Предназначены для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения.

Ил. 16. Табл. 2.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кубанского государственного технологического университета

Рецензенты: доц. кафедры строительных конструкций и гидротехнических сооружений КубГТУ С.И. Дизенко;
доц. кафедры сопротивления материалов и строительной механики КубГТУ В. В. Попов.

1. РАСЧЕТ ДЕРЕВЯННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Строим эпюры внутренних силовых факторов в заданной консольной балке. Используя ранее построенные эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x , определяем величину и направление опорных реакций балки: $M_A = 7,5$ кНм; $V_A = 5$ кН.

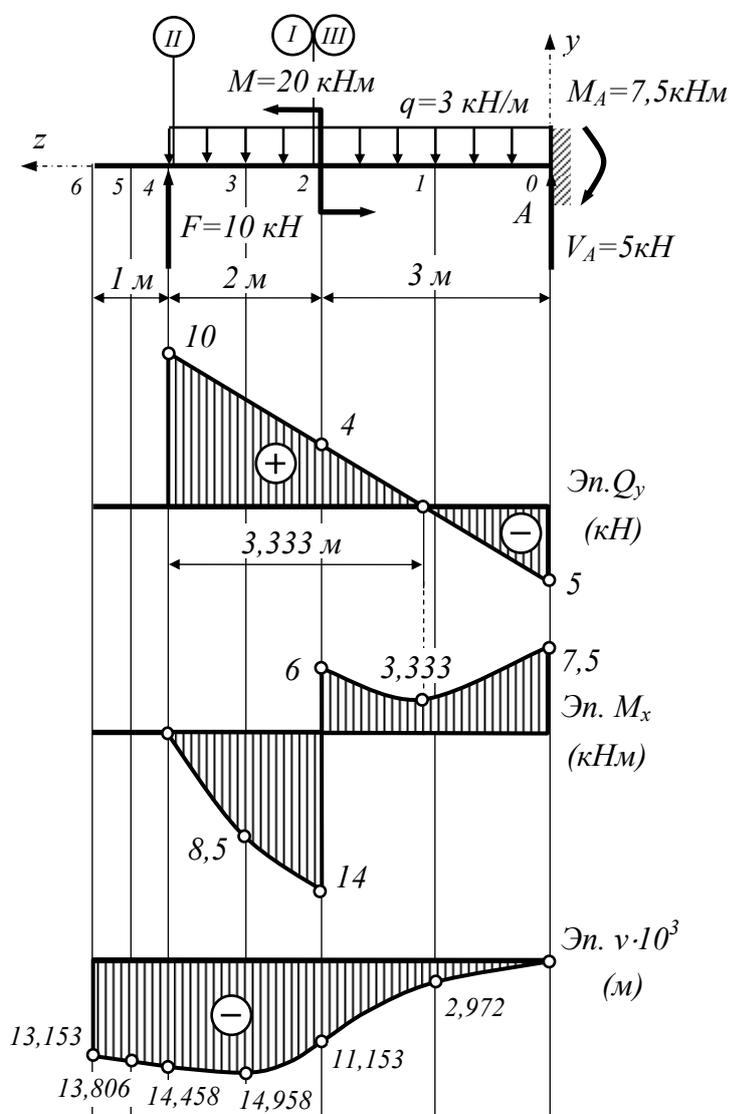


Рис. 1.1. Эпюры в заданной балке

сечения первого и третьего типов находятся в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии левее сосредоточенного момента $M = 20$ кНм. Опасное сечение второго типа находится в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии правее сосредоточенной силы $F = 10$ кН.

Запишем условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

Исходя из построенных эпюр Q_y и M_x , определяем положение опасных сечений трех типов:

- сечение первого типа соответствует точке, где возникает максимальный по модулю изгибающий момент. В этом сечении действуют максимальные нормальные напряжения;
- сечение второго типа соответствует точке, где возникает максимальная по модулю поперечная сила. В этом сечении будут действовать максимальные касательные напряжения;
- сечение третьего типа соответствует точке, где возникают значительные изгибающие моменты и соответствующие им поперечные силы. В этом сечении строят эпюры распределения главных напряжений по его высоте. В рассматриваемом примере опасные

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R = 10 \text{ МПа},$$

где $R = 10 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление дерева;

$$W_x - \text{момент сопротивления круглого сечения балки, } W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Тогда требуемый диаметр круглого поперечного сечения равен:

$$d_{\text{нec}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,243 \text{ м}.$$

Округляем полученную величину диаметра в большую сторону до целых сантиметров и принимаем $d = 25 \text{ см}$. Момент инерции принятого поперечного сечения равен:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 25^4}{64} = 19165,04 \text{ см}^4 = 1,9165 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Выполняем расчет балки на жесткость, для чего необходимо построить эпюру прогибов балки. При построении эпюры прогибов будем использовать уравнение метода начальных параметров:

$$EJ_x v_{(i)} = EJ_x v_{(0)} \Big|_0^i + EJ_x \theta_{(0)} z_{(i)} \Big|_0^i + \frac{V_A z_{(i)}^3}{6} \Big|_0^i - \frac{M_A z_{(i)}^2}{2} \Big|_0^i - \frac{q z_{(i)}^4}{24} \Big|_0^i + \frac{M(z_{(i)} - 3)^2}{2} \Big|_3^i +$$

$$+ \frac{F(z_{(i)} - 5)^3}{6} \Big|_5^i + \frac{q(z_{(i)} - 5)^4}{24} \Big|_5^i.$$

При использовании записанного уравнения следует помнить, что в выбранной системе координат положительные изгибающие моменты создают положительные вертикальные перемещения.

Начальные параметры $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ определяем из условия закрепления балки. В точке A расположено защемление, препятствующее вертикальным и угловым перемещениям балки. Следовательно, начальные параметры рассматриваемой задачи $v_{(0)} = 0$ и $\theta_{(0)} = 0$.

Жесткость при изгибе подобранного круглого поперечного сечения балки равна $EJ_x = 1 \cdot 10^{10} \cdot 1,9165 \cdot 10^{-4} = 1916,5 \text{ кНм}^2$. Используя найденные значения начальных параметров, определяем ординаты эпюры прогибов в расчетных сечениях:

$$- \text{сечение 1: } z_{(1)} = 1,5 \text{ м; } EJ_x v_{(1)} = \frac{5 \cdot 1,5^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 1,5^2}{2} - \frac{3 \cdot 1,5^4}{24} = -5,695 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(1)} = \frac{-5,695}{1916,5} = -2,972 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$- \text{сечение 2: } x_{(2)} = 3 \text{ м; } EJ_x v_{(2)} = \frac{5 \cdot 3^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 3^2}{2} - \frac{3 \cdot 3^4}{24} = -21,375 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(2)} = \frac{-21,375}{1916,5} = -11,153 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– сечение 3: $x_{(3)} = 4 \text{ м};$

$$EJ_x v_{(3)} = \frac{5 \cdot 4^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 4^2}{2} - \frac{3 \cdot 4^4}{24} + \frac{20 \cdot (4-3)^2}{2} = -28,667 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(3)} = \frac{-28,667}{1916,5} = -14,958 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– сечение 4: $x_{(4)} = 5 \text{ м};$

$$EJ_x v_{(4)} = \frac{5 \cdot 5^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 5^2}{2} - \frac{3 \cdot 5^4}{24} + \frac{20 \cdot (5-3)^2}{2} = -27,708 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(4)} = \frac{-27,708}{1916,5} = -14,458 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– сечение 5: $x_{(5)} = 5,5 \text{ м};$

$$EJ_x v_{(5)} = \frac{5 \cdot 5,5^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 5,5^2}{2} - \frac{3 \cdot 5,5^4}{24} + \frac{20 \cdot (5,5-3)^2}{2} + \frac{10 \cdot (5,5-5)^3}{6} + \frac{3 \cdot (5,5-5)^4}{24} =$$

$$= -26,458 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(5)} = \frac{-26,458}{1916,5} = -13,806 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– сечение 6: $x_{(6)} = 6 \text{ м};$

$$EJ_x v_{(6)} = \frac{5 \cdot 6^3}{6} - \frac{7,5 \cdot 6^2}{2} - \frac{3 \cdot 6^4}{24} + \frac{20 \cdot (6-3)^2}{2} + \frac{10 \cdot (6-5)^3}{6} + \frac{3 \cdot (6-5)^4}{24} =$$

$$= -25,208 \text{ кНм}^2; \quad v_{(6)} = v_{(B)} = \frac{-25,208}{1916,5} = -13,153 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Проверка жесткости балки. Условие жесткости: $[f] \geq v_{\max}$. Как следует из эпюры прогибов балки, максимальное вертикальное перемещение равно $|v_{\max}| = 1,446 \text{ см}$. Для деревянных конструкций величина допускаемого прогиба определяется из следующего условия:

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{300},$$

здесь l – вылет консоли балки.

Следовательно, величина допускаемого прогиба балки равна

$$[f] = \frac{l}{300} = \frac{6,0}{300} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

Условие жесткости балки $v_{\max} = 1,446 \text{ см} < [f] = 2 \text{ см}$ выполняется. Таким образом, принятые размеры поперечного сечения удовлетворяют условиям прочности и жесткости.

2. РАСЧЕТ СТАЛЬНОЙ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ

Определяем величину опорных реакций заданной балки:

$$\sum m_A = 0; V_B = -\frac{10 + 4 \cdot 4^2 / 2 - 10 \cdot 2 - 20 \cdot 1 - 20}{4} = -4,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; V_A = \frac{20 + 4 \cdot 4^2 / 2 - 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 - 10}{4} = 30,5 \text{ кН};$$

Проверка:

$\sum y = 0; V_A - V_B - F_1 + F_2 - q \cdot 4 = 0; 30,5 - 4,5 - 20 + 10 - 4 \cdot 4 = 0$, следовательно, опорные реакции найдены верно.

Используя полученные значения опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x . Исходя из построенных эпюр, определяем положение опасных сечений трех типов:

- сечение первого типа соответствует точке, где возникает максимальный по модулю изгибающий момент. В этом сечении действуют максимальные нормальные напряжения;
- сечение второго типа соответствует точке, где возникает максимальная по модулю поперечная сила. В этом сечении будут действовать максимальные касательные напряжения;
- сечение третьего типа соответствует точке, где возникают значительные изгибающие моменты и соответствующие им поперечные силы. В этом сечении строят эпюры распределения главных напряжений по его высоте.

В рассматриваемом примере сечения всех трех типов находятся в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии левее опоры A . Величина внутренних усилий в этих сечениях равна: $M_x = -20 \text{ кНм}$ и $Q_y = -20 \text{ кН}$.

Условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq R = 160 \text{ МПа}.$$

Вычисляем требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_{нес} = \frac{M_{x,max}}{R} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

Определяем размеры поперечных сечений заданных типов:

– круглое поперечное сечение:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \quad d_{нес} \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_{нес}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{3,14}} = 10,84 \text{ см}, \text{ принимаем } d = 109 \text{ мм}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10,9^2}{4} = 93,27 \text{ см}^2;$$

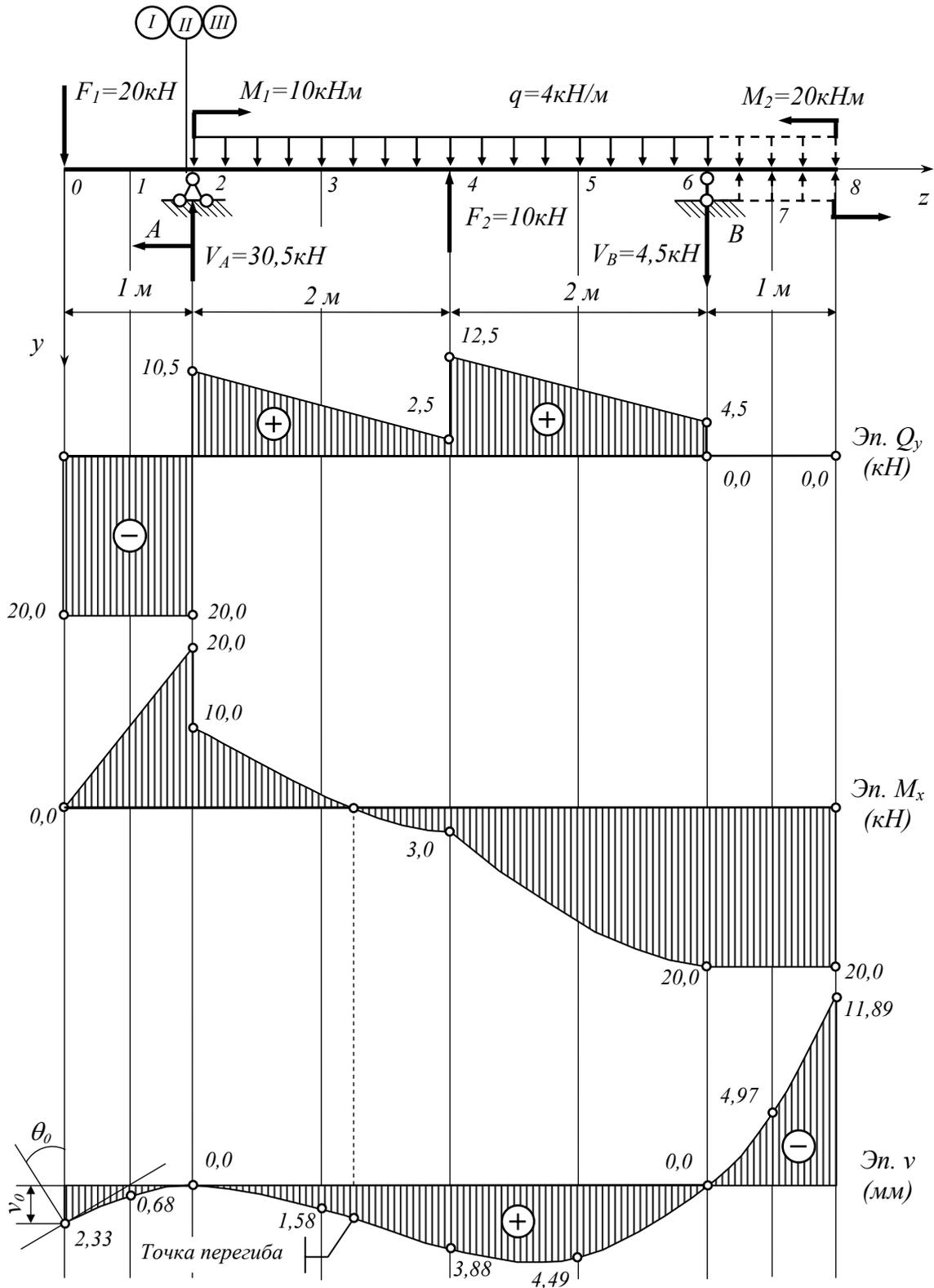


Рис. 2.1. Эпюры внутренних силовых факторов и перемещений заданной стальной балки

– квадратное поперечное сечение:

$$W_x = \frac{a^3}{6} a_{nec} \geq \sqrt[3]{6W_{nec}} = \sqrt[3]{6 \cdot 125} = 9,09 \text{ см, принимаем } a = 91 \text{ мм}$$

$$A = a^2 = 9,1^2 = 82,81 \text{ см}^2;$$

– прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон $h/b = 2/1$:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{4b^3}{6} b_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{6W_{nec}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 125}{4}} = 5,72 \text{ см, принимаем } b = 58 \text{ мм}$$

$$h = 2 \cdot 58 = 116 \text{ мм; } A = ah = 5,8 \cdot 11,6 = 67,28 \text{ см}^2;$$

– прямоугольное поперечное сечение с соотношением сторон $h/b = 3/1$:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{9b^3}{6} b_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{6W_{nec}}{9}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 125}{9}} = 4,37 \text{ см, принимаем } b = 44 \text{ мм}$$

$$h = 3 \cdot 44 = 132 \text{ мм; } A = ah = 4,4 \cdot 13,2 = 58,08 \text{ см}^2;$$

– сечение, составленное из двух швеллеров, сложенных полками:

$$W_{x_{ув}} \geq \frac{W_{nec}}{2} = \frac{125}{2} = 62,5 \text{ см}^3, \text{ по сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8240-89)}$$

принимаем швеллер №14 с $W_{ув} = 70,2 \text{ см}^3$ и $A_{ув} = 31,2 \text{ см}^2$. Общая площадь составного сечения $A = 31,2 \cdot 2 = 62,4 \text{ см}^2$.

– двутавровое сечение: $W_x \geq W_{nec} = 125 \text{ см}^3$, по сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр №18 с $W_x = 143 \text{ см}^3$, $A_x = 23,4 \text{ см}^2$, $S_x = 81,4 \text{ см}^3$, $J_x = 1290 \text{ см}^4$, $h = 180 \text{ мм}$, $b = 90 \text{ мм}$, $d = 5,1 \text{ мм}$ и $t = 8,1 \text{ мм}$.

Сравнивая площади подобранных сечений приходим к выводу, что наиболее рациональным по расходу материала является двутавровое сечения, которое обладает минимальной площадью. Указанное сечение принимаем для дальнейших расчетов.

Используя формулу Журавского, проверяем выбранное двутавровое сечение по максимальным касательным напряжениям:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x,max}^{омс}}{J_x b_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 24,75 \text{ МПа} < R_s = 100 \text{ МПа, следовательно,}$$

условие прочности сечения по максимальным касательным напряжениям выполняется.

Строим эпюры распределения нормальных, касательных и главных напряжений по высоте сечения по формулам:

$$\sigma_{(i)} = \frac{M_x \cdot y_{(i)}}{J_x}; \quad \tau_{(i)} = \frac{Q \cdot S_{x(i)}}{J_x \cdot b_{(i)}}; \quad \sigma_{1,3(i)} = \frac{\sigma_{(i)}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{(i)}^2 + 4\tau_{(i)}^2}.$$

Построения ведем для опасного сечения третьего типа, для которого $M_x = -20 \text{ кНм}$ и $Q_y = -20 \text{ кН}$. Напряжения вычисляем в точках 1-7 двутаврового сечения (рис. 2).

Точка 1: $y_{(1)} = -\frac{h}{2} = -\frac{18}{2} = -9 \text{ см}$; $\sigma_{(1)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot (-9) \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = 139,53 \text{ МПа}$;

$S_{x(1)}^{omc} = 0$; $\tau_{(1)} = 0$; $\sigma_{1,3(1)} = \frac{139,53}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{139,53^2 + 4 \cdot 0^2} = 69,765 \pm 69,765 \text{ МПа}$;

$\sigma_{1(1)} = 139,53 \text{ МПа}$; $\sigma_{3(1)} = 0 \text{ МПа}$.

Точка 2: $y_{(2)} = -\left(\frac{h}{2} - t\right) = -\left(\frac{18}{2} - 0,81\right) = -8,19 \text{ см}$;

$\sigma_{(2)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot (-8,19) \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = 126,98 \text{ МПа}$;

$S_{x(2)}^{omc} = A_{(2)}^{omc} \cdot y_{c(3)}^{omc} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 9 \cdot 0,81 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{0,81}{2}\right) = 62,66 \text{ см}^3$.

Рассматриваем сечение со стороны полки: $b'_{(2)} = b = 90 \text{ мм}$;

$\tau'_{(2)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = -1,08 \text{ МПа}$;

$\sigma'_{1,3(2)} = \frac{126,98}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{126,98^2 + 4 \cdot 1,08^2} = 63,49 \pm 63,50 \text{ МПа}$;

$\sigma'_{1(2)} = 126,99 \text{ МПа}$; $\sigma'_{3(2)} = -0,01 \text{ МПа}$.

Рассматриваем сечение со стороны стенки: $b''_{(2)} = d = 5,1 \text{ мм}$;

$\tau''_{(2)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = -19,05 \text{ МПа}$;

$\sigma''_{1,3(2)} = \frac{126,98}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{126,98^2 + 4 \cdot 19,05^2} = 63,49 \pm 66,29 \text{ МПа}$;

$\sigma''_{1(2)} = 129,78 \text{ МПа}$; $\sigma''_{3(2)} = -2,80 \text{ МПа}$.

Точка 3: $y_{(3)} = -\frac{h}{4} = -\frac{18}{4} = -4,5 \text{ см}$; $\sigma_{(3)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot (-4,5) \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = 69,77 \text{ МПа}$;

$S_{x(3)}^{omc} = A_{(3)}^{omc} \cdot y_{c(3)}^{omc} = S_{x(2)}^{omc} + (y_{(3)} - t) \cdot d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y_{(3)} - t}{2} - t\right) =$

$= 62,66 + (4,5 - 0,81) \cdot 0,51 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{4,5 - 0,81}{2} - 0,81\right) = 74,46 \text{ см}^3$.

$b_{(3)} = d = 5,1 \text{ мм}$; $\tau_{(3)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 74,46 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-2}} = -22,64 \text{ МПа}$;

$\sigma_{1,3(3)} = \frac{69,77}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{69,77^2 + 4 \cdot 22,64^2} = 34,89 \pm 41,59 \text{ МПа}$;

$\sigma_{1(3)} = 76,48 \text{ МПа}$; $\sigma_{3(3)} = -6,70 \text{ МПа}$.

Точка 4: $y_{(4)} = 0 \text{ см}$; $\sigma_{(4)} = 0 \text{ МПа}$; $S_{x(4)}^{omc} = S_{x,max}^{omc} = 81,4 \text{ см}^3$. $b_{(4)} = d = 5,1 \text{ мм}$;

$$\tau_{(4)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-2}} = -24,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1,3(4)} = \frac{0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4 \cdot 24,75^2} = 0 \pm 24,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1(4)} = 24,75 \text{ МПа}; \quad \sigma_{3(4)} = -24,75 \text{ МПа}.$$

$$\text{Точка 7: } y_{(7)} = \frac{h}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}; \quad \sigma_{(7)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -139,53 \text{ МПа};$$

$$S_{x(7)}^{omc} = 0; \quad \tau_{(7)} = 0; \quad \sigma_{1,3(7)} = -\frac{139,53}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{139,53^2 + 4 \cdot 0^2} = -69,765 \pm 69,765 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1(7)} = 0 \text{ МПа}; \quad \sigma_{3(7)} = -139,53 \text{ МПа}.$$

$$\text{Точка 6: } y_{(6)} = \frac{h}{2} - t = \frac{18}{2} - 0,81 = 8,19 \text{ см};$$

$$\sigma_{(6)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 8,19 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -126,98 \text{ МПа};$$

$$S_{x(6)}^{omc} = A_{(6)}^{omc} \cdot y_{c(6)}^{omc} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 9 \cdot 0,81 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{0,81}{2} \right) = 62,66 \text{ см}^3.$$

Рассматриваем сечение со стороны полки: $b'_{(6)} = b = 90 \text{ мм};$

$$\tau'_{(6)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = -1,08 \text{ МПа};$$

$$\sigma'_{1,3(6)} = -\frac{126,98}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{126,98^2 + 4 \cdot 1,08^2} = -63,49 \pm 63,50 \text{ МПа};$$

$$\sigma'_{1(6)} = 0,01 \text{ МПа}; \quad \sigma'_{3(6)} = -126,99 \text{ МПа}.$$

Рассматриваем сечение со стороны стенки: $b''_{(6)} = d = 5,1 \text{ мм};$

$$\tau''_{(6)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 62,66 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = -19,05 \text{ МПа};$$

$$\sigma''_{1,3(5)} = -\frac{126,98}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{126,98^2 + 4 \cdot 19,05^2} = -63,49 \pm 66,29 \text{ МПа};$$

$$\sigma''_{1(6)} = 2,80 \text{ МПа}; \quad \sigma''_{3(6)} = -129,78 \text{ МПа}.$$

$$\text{Точка 5: } y_{(5)} = \frac{h}{4} = \frac{18}{4} = 4,5 \text{ см}; \quad \sigma_{(5)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-2}}{1290 \cdot 10^{-8}} = -69,77 \text{ МПа};$$

$$S_{x(5)}^{omc} = A_{(5)}^{omc} \cdot y_{c(5)}^{omc} = S_{x(6)}^{omc} + (y_{(5)} - t) \cdot d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y_{(5)} - t}{2} - t \right) =$$

$$= 62,66 + (4,5 - 0,81) \cdot 0,51 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{4,5 - 0,81}{2} - 0,81 \right) = 74,46 \text{ см}^3.$$

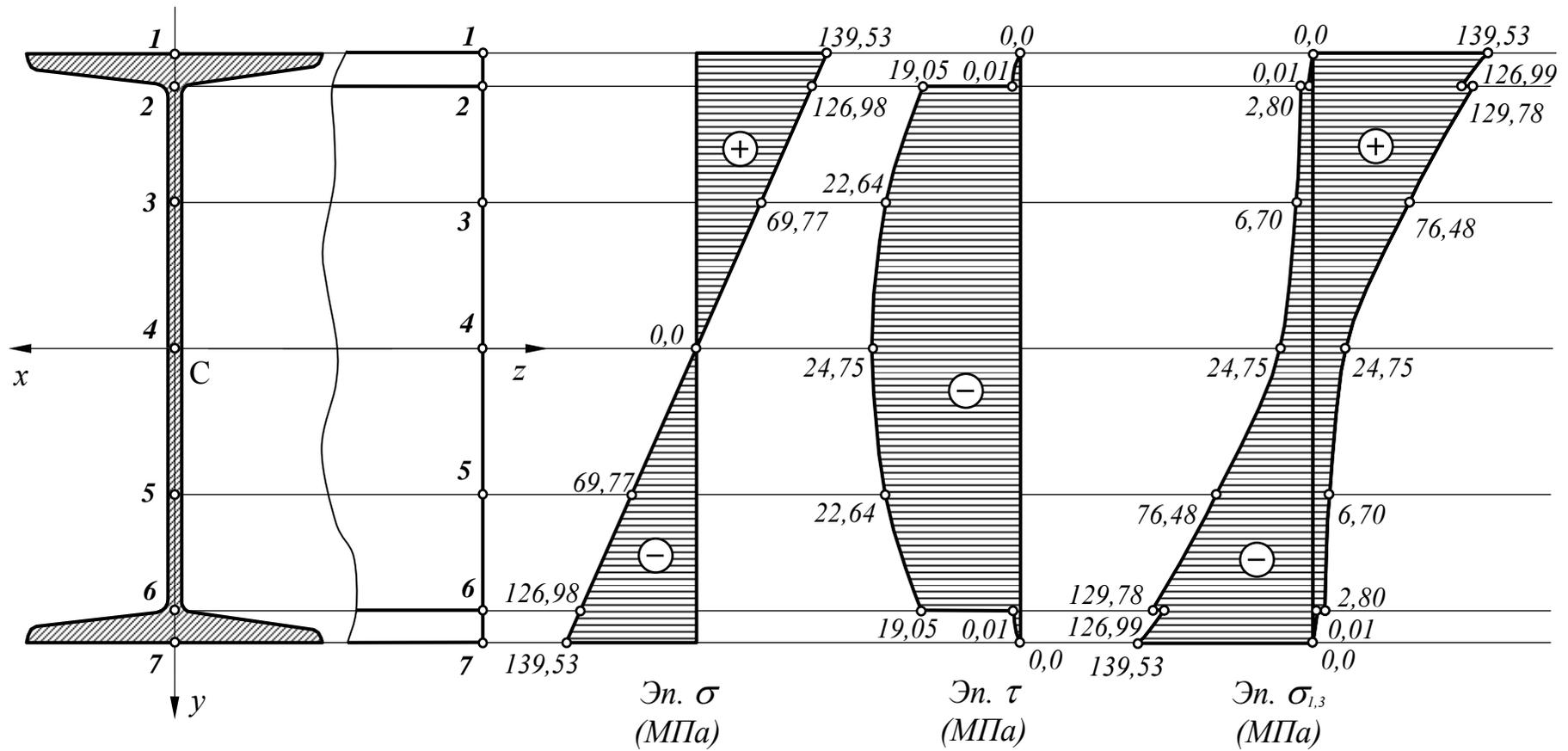


Рис. 2.2. Эпюры распределения напряжений по высоте сечения стальной двутавровой балки

$$b_{(5)} = d = 5,1 \text{ мм}; \quad \tau_{(5)} = \frac{(-20) \cdot 10^3 \cdot 74,46 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-2}} = -22,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1,3(5)} = -\frac{69,77}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{69,77^2 + 4 \cdot 22,74^2} = -34,89 \pm 41,59 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{1(3)} = 6,70 \text{ МПа}; \quad \sigma_{3(5)} = -76,48 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим искомые эпюры (рис. 2).

Выполняем расчет балки на жесткость, для чего необходимо построить эпюру прогибов балки. При построении эпюры прогибов будем использовать уравнение метода начальных параметров:

$$EJ_x v_{(i)} = EJ_x v_{(0)} \Big|_0^6 + EJ_x \theta_{(0)} z_{(i)} \Big|_0^6 + \frac{F_1 z_{(i)}^3}{6} \Big|_0^6 - \frac{V_A (z_{(i)} - 1)^3}{6} \Big|_1^6 - \frac{M_1 (z_{(i)} - 1)^2}{2} \Big|_1^6 + \\ + \frac{q (z_{(i)} - 1)^4}{24} \Big|_1^6 - \frac{F_2 (z_{(i)} - 3)^3}{6} \Big|_3^6 + \frac{V_B (z_{(i)} - 5)^3}{6} \Big|_5^6 - \frac{q (z_{(i)} - 5)^4}{24} \Big|_5^6.$$

Следует помнить, что в принятой системе координат отрицательный изгибающий момент создает положительные перемещения.

Начальные параметры $v_{(0)}$ и $\theta_{(0)}$ определяем из условия закрепления балки. В точках A и B расположены опорные устройства, препятствующие вертикальным перемещениям балки. Запишем уравнения метода начальных параметров для указанных точек:

$$z_{(A)} = 1 \text{ м};$$

$$EJ_x v_{(A)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} \cdot 1 + \frac{20 \cdot 1^3}{6} = 0;$$

$$z_{(B)} = 5 \text{ м};$$

$$EJ_x v_{(B)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} \cdot 5 + \frac{20 \cdot 5^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (5-1)^3}{6} - \frac{10(5-1)^2}{2} + \frac{4(5-1)^4}{24} - \frac{10 \cdot (5-3)^3}{6} = 0.$$

Решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} EJ_x v_{(A)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} \cdot 1 + 3,333 = 0 \\ EJ_x v_{(B)} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} \cdot 5 + 40,667 = 0 \end{cases}$$

$EJ_x \theta_{(0)} = -9,333 \text{ кНм}^2$; $EJ_x v_{(0)} = 6 \text{ кНм}^3$. Жесткость подобранного сечения при изгибе равна $EJ_x = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8} = 2580 \text{ кНм}^2$, тогда величина перемещений в начале координат равна:

$$- \text{угол поворота сечения } \theta_{(0)} = -\frac{9,333}{EJ_x} = -\frac{9,333}{2580} = -3,62 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$- \text{вертикальное перемещение } v_{(0)} = \frac{6}{EJ_x} = \frac{6}{2580} = 2,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Используя найденные значения начальных параметров, определяем ординаты эпюры прогибов в расчетных точках:

– точка 1: $z_{(1)} = 0,5 \text{ м}$; $EJ_x v_{(1)} = 6 - 9,333 \cdot 0,5 + \frac{20 \cdot 0,5^3}{6} = 1,75 \text{ кНм}^2$;

$$v_{(1)} = \frac{1,75}{2580} = 0,68 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 2: $z_{(2)} = 1 \text{ м}$; $EJ_x v_{(2)} = 6 - 9,333 \cdot 1 + \frac{20 \cdot 1^3}{6} = 0,0003 \approx 0$; $v_{(2)} = v_{(A)} = 0 \text{ м}$;

– точка 3: $z_{(3)} = 2 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(3)} = 6 - 9,333 \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (2-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (2-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (2-1)^4}{24} = 4,08 \text{ кНм}^2$$

$$v_{(3)} = \frac{10,0}{2580} = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 4: $z_{(4)} = 3 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(4)} = 6 - 9,333 \cdot 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (3-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (3-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (3-1)^4}{24} = 10,01 \text{ кНм}^2$$

$$v_{(4)} = \frac{10,01}{2580} = 3,88 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 5: $z_{(5)} = 4 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(5)} = 6 - 9,333 \cdot 4 + \frac{20 \cdot 4^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (4-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (4-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (4-1)^4}{24} -$$

$$- \frac{10 \cdot (4-3)^3}{6} = 11,585 \text{ кНм}^2; \quad v_{(5)} = \frac{11,585}{2580} = 4,49 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 6: $z_{(6)} = 5 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(6)} = 6 - 9,333 \cdot 5 + \frac{20 \cdot 5^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (5-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (5-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (5-1)^4}{24} -$$

$$- \frac{10 \cdot (5-3)^3}{6} = 0,0017 \text{ кНм}^2; \quad v_{(6)} = v_{(B)} = \frac{0,0017}{2580} \approx 0 \text{ м};$$

– точка 7: $z_{(7)} = 5,5 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(7)} = 6 - 9,333 \cdot 5,5 + \frac{20 \cdot 5,5^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (5,5-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (5,5-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (5,5-1)^4}{24} -$$

$$- \frac{10 \cdot (5,5-3)^3}{6} + \frac{4,5 \cdot (5,5-5)^3}{6} - \frac{4 \cdot (5,5-5)^4}{24} = -12,832 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(7)} = -\frac{12,832}{2580} = -4,97 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

– точка 8: $z_{(8)} = 6 \text{ м}$;

$$EJ_x v_{(8)} = 6 - 9,333 \cdot 6 + \frac{20 \cdot 6^3}{6} - \frac{30,5 \cdot (6-1)^3}{6} - \frac{10 \cdot (6-1)^2}{2} + \frac{4 \cdot (6-1)^4}{24} -$$

$$- \frac{10 \cdot (6-3)^3}{6} + \frac{4,5 \cdot (6-5)^3}{6} - \frac{4 \cdot (6-5)^4}{24} = -30,665 \text{ кНм}^2;$$

$$v_{(8)} = -\frac{30,665}{2580} = -11,89 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Проверка жесткости балки. Условие жесткости: $[f] \geq v_{max}$. Как следует из эпюры прогибов балки, максимальное вертикальное перемещение равно $|v_{max}| = 1,19 \text{ см}$. Для стальных конструкций величина допускаемого прогиба

определяется из следующего условия: $\left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{250}$. Здесь l – расстояние между

опорами или вылет консоли балки. Максимальный прогиб балки возникает на консольном участке вылетом $l = 1 \text{ м}$, следовательно, величина допускаемого прогиба равна $[f] = \frac{l}{250} = \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,4 \text{ см}$. Условие жесткости

балки $v_{max} = 1,19 \text{ см} > [f] = 0,4 \text{ см}$ не выполняется. Необходимо увеличить размеры поперечного сечения. Назначаем новые размеры двутаврового сечения, для чего максимальный прогиб балки в точке 8 приравняем величине допускаемого прогиба $v_{max} = \frac{30,665}{EJ_x} = \frac{30,665 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot J_x} \leq [f] = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кНм}^2$, тогда требуемый момент инерции поперечного сечения равен

$J_{x,nec} \geq \frac{30,665 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 3833,12 \cdot 10^{-8} = 3833,12 \text{ см}^4$.

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ8239-89) принимаем двутавр №27 с $J_x = 5010 \text{ см}^4$. Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям для нового сечения будут заведомо выполняться.