В. В. Розен

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Рекомендовано УМО по образованию
в области математических методов
в экономике в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 061800
«Математические методы в экономике»
и другим экономическим специальностям

УНИВЕРСИТЕТ
книжный дом

«Высшая школа»

МОСКВА
2002

УДК 519.8(075.8)
ББК 65.9(2)23я73
Р 64

Розен В. В.

Р64 Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие. – М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. – 288 с., ил.

ISBN 5-8013-0157-7 (Книжный дом «Университет»)
ISBN 5-06-004356-8 (Высшая школа)

В пособии рассмотрены принципиальные аспекты построения и анализа математических моделей принятия решений в экономике. В нем отражены как оптимизационные, так и теоретико-игровые подходы к принятию решений.

Книга написана в лекционной форме. Каждая лекция содержит теоритический материал математического характера и заканчивается задачей экономического содержания, иллюстрирующей возможности применения рассмотренных вопросов в конкретной экономической ситуации (в основном, на уровне фирмы).

Рекомендуется для студентов экономических специальностей в качестве математической поддержке дисциплин «Экономико-математическое моделирование», «Математическое моделирование социально-экономических процессов», «Микроэкономика».

Может быть также использовано в лицеях и колледжах экономического профиля.

УДК 519.8(075.8)
ББК 65.9(2)23я73

ISBN 5-8013-0157-7 (Книжный дом «Университет»)
ISBN 5-06-004356-8 (Высшая школа)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель пособия — изложение принципиальных аспектов построения и анализа математических моделей принятия решений в экономике.

Математические модели принятия решений можно разбить на два больших класса — *оптимизационные* и *теоретико-игровые*. Оптимизационные модели «уходят корнями» в классический математический анализ и имеют весьма «почтенный» возраст. Теоретико-игровые модели начали исследоваться лишь в последние десятилетия — после выхода в 1944 г. фундаментальной монографии Джона фон Неймана (выдающийся математик) и Оскара Моргенштерна (известный экономист) «Теория игр и экономическое поведение». Таким названием авторы хотели подчеркнуть взаимосвязь между экономикой и теорией игр. Однако только в наши дни глубина проникновения теории игр в экономику была оценена в полной мере. Наиболее ярким выражением этого явилось присуждение Нобелевской премии 1994 года по экономике трем профессиональным математикам за их исследования по теории игр. Механизмы функционирования рынка, конкуренции, возникновения или краха монополий, а также способы принятия решений в условиях конкурентной борьбы, т.е. механизмы игры монополий, действующие в экономической реальности, — не могут быть исследованы и поняты без теории игр.

В данном пособии представлены как оптимизационные, так и теоретико-игровые модели принятия решений. Теоретический материал базируется на математических курсах по исследованию операций, теории игр, теории принятия решений и включает в себя задачи принятия решений в условиях определенности, риска, неопределенности, а также в теоретико-игровых условиях. В пособии принято «параллельное» изложение математических основ теории принятия решений и их экономических реализаций. Материал представлен в форме лекций. В каждой лекции вначале излагаются теоретические и математические основы рассматриваемого вопроса, затем дается его конкретизация в рамках некоторой задачи экономического содержания. Перечислим эти задачи (в скобках приведены названия соответствующих теоретических разделов математики).

Задача 1. Задача об оптимальном размере закупаемой партии товара (экстремум функции одной переменной).

Задача 2. Задача максимизации производственной функции (оптимизация при наличии ограничений).

Задача 3. Распределение заказа между двумя фирмами (условный экстремум функции).

Задача 4. Задача производственного планирования (линейное программирование).

Задача 5. Задача о смеси (линейное программирование).

Задача 6. Задача о перевозках — транспортная задача (линейное программирование).

Задача 7. Выбор места работы (многокритериальная оптимизация — дискретный случай).

Задача 8. Оптимизация производственного процесса (многокритериальная оптимизация — непрерывный случай).

Задача 9. Сравнение объектов по предпочтительности (многокритериальная оптимизация со сравнимыми критериями).

Задача 10. Исследование потребительских предпочтений (многокритериальная оптимизация при заданном локальном коэффициенте замещения).

Задача 11. Выбор проекта электростанции (принятие решения в условиях неопределенности).

Задача 12. Выбор варианта производимого товара (принятие решений в условиях риска — дискретный случай).

Задача 13. Сравнение качества обслуживания станций скорой помощи (принятие решения в условиях риска по критерию ожидаемой полезности).

Задача 14. Задача об оптимальном портфеле (принятие решения в условиях риска — непрерывный случай).

Задача 15. Бурение нефтяной скважины (принятие решения в условиях риска с возможностью проведения эксперимента).

Задача 16. Профилактика нежелательного события (решение матричной игры в чистых стратегиях).

Задача 17. Выбор момента поступления товара на рынок в условиях антагонистической конкуренции (решение матричной игры в смешанных стратегиях).

Задача 18. Планирование посева в неопределенных погодных условиях (графоаналитический метод нахождения решения матричной игры).

Задача 19. Инспекция предприятий торговли (решение матричной игры в смешанных стратегиях).

Задача 20. Задача распределения ресурсов (ситуации равновесия в игре общего вида).

Задача 21. Борьба за рынки сбыта (ситуации равновесия в биматричной игре).

Задача 22. Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры без разделения полезности).

Задача 23. Рынок трех лиц (построение характеристической функции кооперативной игры).

Задача 24. Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры с разделением полезности).

Задача 25. Оценка «силы» держателей акций (вектор Шепли для кооперативной игры).

Основной текст сгруппирован по частям, каждая из которых состоит из лекций, объединенных общей тематикой, а также единым математическим аппаратом. В конце каждой части имеется резюме изложенного материала. Кроме того, в резюме содержатся некоторые дополнительные сведения (касающиеся истории вопроса, библиографические ссылки), а также упражнения, решение которых будет способствовать лучшему усвоению материала.

В книге нашли отражение идеи, методы и результаты теории принятия решений, опубликованные в последние десятилетия в отечественной и зарубежной литературе (см. список литературы в конце книги); ряд примеров заимствован из этих источников.

Следует иметь в виду, что приведенные примеры экономических задач носят иллюстративный или даже схематический характер. Это объясняется тем, что для построения адекватных моделей реальных задач принятия решений в экономике требуется большой объем данных и сами модели становятся весьма громоздкими; вместе с тем, проследить основные этапы анализа, логику рассуждений и применение математического аппарата гораздо легче на упрощенных моделях. Поэтому опущены вопросы «добывания» необходимой для принятия решения дополнительной информации, относящейся к предметной области, в данном случае — к экономике. Безусловно, все эти вопросы важны, но это — другая задача.

Несколько замечаний о характере изложения. В пособии основное внимание сосредоточено на принципиальных вопросах анализа математических моделей принятия решений — приоритетными являются понятия оптимальности и их экономические реализации. При изложении каждой темы приводится «полный набор» связанных с ней математических понятий и результатов; однако автор не ставил своей задачей проведение всюду строгих математических доказательств, зачастую они заменены содержательными пояснениями или геометрическими иллюстрациями. Усвоение изложенного материала не требует математических знаний, выходящих за пределы подготовки в рамках стандартного вузовского курса высшей математики (дополнительный материал, требующий более специальных математических знаний, выделен мелким шрифтом и может быть опущен без ущерба для понимания основного содержания лекций). Значительная часть излагаемого материала основана на элементарной математике и доступна студентам колледжей экономического профиля и учащимся старших классов средней школы.

В основу настоящего пособия положен курс лекций, читаемый автором в Высшей школе Бизнеса при Саратовском Государственном Техническом Университете и в Саратовском филиале Московского Международного Университета Бизнеса и Информационных Технологий.

Лекция 1 (*вводная*). *Принятие решений в экономике. Математические модели принятия решений* (*общее описание*)

• Экономика как система. Централизованная и децентрализованная экономика. Некоторые черты принятия решений в микроэкономических системах. • Системное описание задачи принятия решения (ЗПР). *• Математическая модель задачи принятия решения. Реализационная и оценочная структура задачи принятия решения. Особенности математических моделей принятия решений в экономике. • Методика исследования задач принятия решения на основе математического моделирования.*

1. В соответствии со сложившимся в современной науке системным подходом, экономику любого государства (или региона) можно рассматривать как большую систему, элементами которой являются производители и потребители разнообразных товаров и услуг. По способу координации экономической деятельности экономические системы подразделяются на ***централизованные*** (*административно-командные*) и ***децентрализованные*** (*рыночные*).

Характерной особенностью административно-командной системы является то, что в ней экономические решения принимаются единым управляющим органом (государством) и передаются субъектам экономики в форме распоряжений, обязательных к исполнению. При административном управлении экономикой управляющий орган должен располагать чрезвычайно большим количеством информации, касающейся потребностей населения, имеющихся производственных мощностей, запасов товара и сырья, распределения рабочей силы и т.п. Поэтому необходима многочисленная (и дорогостоящая) армия чиновников — государственная бюрократия, которая занимается сбором информации, ее обработкой, составлением на этой основе хозяйственных планов, их согласованием, корректировкой, а также контролем за их выполнением.

Децентрализованная экономика основана на суверенитете субъектов экономики. Так, применительно к производителям (фирмам) это означает, прежде всего, наличие свободы в принятии экономических решений: **что**, в каких количествах и какого качества производить из имеющихся ресурсов, а также **кому** и по каким ценам продавать произведенную продукцию. Суверенитет потребителя есть право принимать решения, связанные с распоряжением принадлежащими ему ресурсами. При этом взаимная координация планов производителей и потребителей осуществляется с помощью обмена произведенными товарами на рынке, который происходит по ценам, устанавливаемым свободно в зависимости от соотношения спроса и предложения.

Экономическая деятельность отдельных субъектов экономики (индивидуумов, домохозяйств, фирм, владельцев первичных ресурсов и т. п.) изучается в разделе экономической теории, который принято называть ***микроэкономикой***. При этом деятельность субъектов экономики, рассматриваемая в рамках микроэкономической системы, характеризуется большой зависимостью от действий других субъектов. Например, если фирма принимает определенное решение, связанное с производством той или иной продукции или с продажей некоторого товара, то окончательный результат (например, прибыль фирмы) зависит не только от принятого ею решения, но и от множества других факторов: решений, принятых другими фирмами, поведения покупателей, действий законодательных органов, курса валют и т. п. Поэтому решение, которое принимает фирма, будет *решением в условиях неопределенности*. Эта неопределенность создается как за счет действий других субъектов экономики, преследующих собственные интересы, так и за счет неполноты имеющейся у фирмы информации о сложившейся экономической обстановке.

Основной метод исследования, который использует экономическая теория, — моделирование экономических процессов и явлений. Предметом изучения данного курса являются математические модели поведения субъектов экономики в рамках микроэкономической системы. При этом направленность анализа рассматриваемых математических моделей имеет *нормативный характер* и состоит в том, чтобы дать ответ на вопрос — какие действия следует предпринять, чтобы добиться наилучших (в определенном смысле)

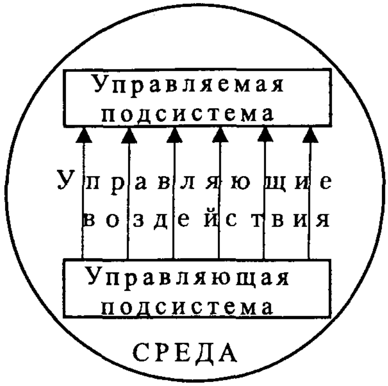


Рис. 1.1

результатов? Таким образом, содержание курса может быть охарактеризовано как построение математических моделей микроэкономики и их исследование в нормативном аспекте.

2. Наиболее общий подход к описанию задач принятия решений (ЗПР) формулируется «на языке систем». Приведем *системное описание задач принятия решений.*

Пусть имеется некоторая *система*, в которой выделена *управляемая подсистема* (*объект управления*), *управляющая подсистема* и *среда*. Управляющая подсистема может воздействовать на объект управления с помощью альтернативных управляющих воздействий (рис. 1.1). Состояние объекта управления определяется двумя факторами: выбранным управляющим воздействием со стороны управляющей подсистемы и состоянием среды. Принципиальным является следующее обстоятельство: управляющая подсистема не может воздействовать на среду и, более того, она, как правило, не имеет полной информации о наличном состоянии среды.

Управляющая подсистема является целенаправленой, причем цель управляющей подсистемы состоит в том, чтобы перевести объект управления в наиболее предпочтительное для себя состояние (или в некоторое подмножество предпочтительных состояний). Для достижения этой цели управляющая подсистема может использовать любое находящееся в ее распоряжении управляющее воздействие.

Выбор управляющей подсистемой конкретного управляющего воздействия (выбор допустимой альтернативы) называется

принятием решения. Принятие решения является центральным моментом всякого управления.

При принятии решения основной задачей является нахождение *оптимального решения*. На содержательном уровне оптимальное решение может быть определено как наилучшее в следующем смысле: оно в наибольшей степени соответствует цели управляющей подсистемы в рамках имеющейся у ней информации о состоянии среды.

3. *Математическая модель принятия решения* представляет собой формализацию той схемы, которая приведена в системном описании ЗПР. Для построения математической модели принятия решения необходимо задать следующие три множества:

X — ***множество допустимых альтернатив***,[1]

Y — ***множество возможных состояний среды***,

A — ***множество возможных исходов***.

(Всегда предполагается, что множество X содержит не менее двух альтернатив — иначе надобность в принятии решения отпадает.)

В системном описании ЗПР альтернативы интерпретируются как управляющие воздействия, а исходы — как состояния управляемой подсистемы.

Так как состояние управляемой подсистемы полностью определяется выбором управляющего воздействия и состоянием среды, то каждой паре (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$, соответствует определенный исход $a \in A$. Другими словами, существует функция F: $X \times Y \to A$, которая называется *функцией реализации*. Функция реализации каждой паре вида (альтернатива, состояние среды) ставит в соответствие определяемый ею исход.

Набор объектов $\langle X, Y, A, F\rangle$ составляет *реализационную структуру* задачи принятия решения. Реализационная структура отражает связь между выбираемыми альтернативами и исходами; в общем случае эта связь не является детерминированной (однозначной): появление того или иного конкретного исхода зависит не только от выбранной альтернативы, но и от наличного состояния среды. Таким образом, имеется, как принято говорить, *неопределенность стратегического типа*; эта неопределенность создается за счет воздействия среды на объект управления.

---

[1]В конкретных задачах принятия решения элементы множества X называются также: *альтернативы, стратегии, варианты, действия, решения, планы* и т. п.

В зависимости от информации, которую имеет при принятии решения управляющая подсистема относительно состояния среды, различают несколько основных типов задач принятия решения.

1. *Принятие решения в условиях определенности* характеризуется тем, что состояние среды является фиксированным (неизменным), причем управляющая система «знает», в каком состоянии находится среда.
2. *Принятие решения в условиях риска* означает, что управляющая подсистема имеет информацию стохастического характера о поведении среды (например, ей известно распределение вероятностей на множестве состояний среды).
3. *Принятие решения происходит в условиях неопределенности*, если никакой дополнительной информации (кроме знания самого множества возможных состояний среды) управляющая подсистема не имеет.
4. *Принятие решения в теоретико-игровых условиях* имеет место тогда, когда среду можно трактовать как одну или несколько целенаправленных управляющих подсистем. В этом случае математическая модель принятия решения называется ***теоретико-игровой моделью*** (*игрой*).

Реализационная структура задачи принятия решения составляет ее первую компоненту. Вторая компонента ЗПР называется ее *оценочной структурой*. Если реализационная структура определяет возникающий результат, то оценочная структура указывает оценку этого результата с точки зрения принимающего решение.

В математической модели ЗПР оценочная структура может задаваться различными способами.

Например, если принимающий решение может оценить эффективность (равнозначные по смыслу термины: «полезность», «ценность») каждого исхода $a \in A$ некоторым числом $\varphi(a)$, то оценочная структура задается в виде пары $\langle A, \varphi \rangle$, где $\varphi : A \to \mathbb{R}$; при этом φ называется ***оценочной функцией***.

Другой способ задания оценочной структуры состоит в указании *отношения предпочтения исходов*, что сводится к перечислению пар исходов (a_1, a_2), для которых a_1 лучше, чем a_2 (это записывается в виде $a_1 \succ a_2$ и читается «a_1 предпочтительней, чем a_2».

Замечание. Иногда используется *отношение нестрогого предпочтения исходов* $\succsim$; запись $a_1 \succsim a_2$ читается: «исход a_1 не менее предпочтителен, чем исход a_2».

Еще один способ задания оценочной структуры — разбиение множества исходов A на два класса: A_0 — класс «плохих» исходов и A_1 — класс «хороших» исходов. Существуют и другие способы задания оценочной структуры.

Отметим еще раз, что оценочная структура ЗПР носит субъективный характер: оценивание исходов производится с точки зрения принимающего решение.

Наиболее распространенным является задание оценочной структуры в виде оценочной функции φ.

Целевая функция f есть композиция функции реализации F и оценочной функции φ, т.е. $f = \varphi \circ F$. Таким образом, $f(x,y) = \varphi(F(x,y))$. Целевая функция имеет следующий содержательный смысл: *число* $f(x,y)$ *есть оценка полезности* (с точки зрения принимающего решение) *того исхода, который возникает в ситуации, когда он выбирает альтернативу* x, *а среда принимает состояние* y.

Замечание. В некоторых задачах принятия решения оценка исхода характеризует его в негативном смысле, являясь выражением затрат, убытков и т.п. В этом случае целевая функция f называется ***функцией потерь***.

Итак, построение математической модели задачи принятия решения сводится к заданию двух структур: реализационной структуры и оценочной структуры. Реализационная структура отражает зависимость между выбираемыми альтернативами и возникающими исходами. С помощью оценочной структуры производится субъективная оценка возникающих исходов с точки зрения принимающего решение.

В заключение укажем некоторые особенности математических моделей задач принятия решений в экономике. Как уже отмечалось, в микроэкономических ситуациях принятия решений в качестве субъекта, принимающего решение (т.е. в качестве управляющей подсистемы) чаще всего выступает фирма. В качестве среды здесь может быть и природная среда (или ее аналог), и конкурирующая фирма, и покупатели, и законодательный орган и т.п. Хотя при построении модели принятия решения в общем случае невозможно однозначно указать, *что* является средой, полезно руководствоваться следующим принципом: среда — это *то*, что определяет при каждой фиксированной альтернативе появление того или иного исхода. Другими словами, в качестве среды выступает система (структура, организация, физическое лицо), фиксирование состояния которой приводит при выборе управляющей подсистемой любой конкретной альтернативы к однозначно оцениваемому ею результату.

Наконец, в качестве оценочной функции в экономических задачах принятия решений чаще всего выступает величина прибыли (или величина затрат). Однако в ряде задач в качестве естественной оценки исходов можно рассматривать и другие величины, например, количество произведенной продукции, время реализации проекта, долю рынка, которая контролируется данной фирмой, и др.

4. Методика исследования задач принятия решений на основе математического моделирования состоит в реализации следующих трех этапов.

Этап 1. *Построение математической модели* ЗПР.

Этап 2. *Формулировка принципа оптимальности и нахождение оптимального решения.*

Этап 3. *Анализ полученных результатов.*

Первый этап рассмотрен выше, поэтому кратко охарактеризуем следующие два этапа.

Реализация второго этапа связана с введением принципа оптимальности. Универсального понятия оптимального решения, которое было бы пригодным для любой ЗПР, не существует. Поэтому в теории принятия решений рассматривают отдельные классы задач принятия решений и для каждого класса формулируют свой принцип оптимальности. Задача нахождения оптимального решения (в смысле некоторого указанного принципа оптимальности) является уже формальной задачей и решается математическими средствами.

Следует отметить, что для ЗПР данного класса может существовать не один, а несколько различных принципов оптимальности; кроме того, даже при фиксированном принципе оптимальности может быть не одно, а несколько оптимальных решений. Это объясняет необходимость третьего этапа, который состоит в анализе полученных результатов. Такой анализ проводится на содержательном уровне и заключается в соотнесении формально полученных рекомендаций с требованиями задачи принятия решения. Если полученное формальным способом оптимальное решение по каким-либо причинам оказывается неприемлемым, то это приводит либо к выбору другого оптимального решения (если оно имеется), либо к смене принципа оптимальности, либо к изменению самой математической модели ЗПР.

Часть I
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лекция 2. *Экстремум функций одной переменной*

• *Этапы исследования ЗПР в условиях определенности.* • *Основные теоремы об экстремумах и методы нахождения экстремумов функции одной переменной.* • Задача 1. *Задача об оптимальном размере закупаемой партии товара.*

1. Как отмечено в лекции 1, при принятии решения в условиях определенности состояние среды является фиксированным и оно известно принимающему решение. В этом случае исход однозначно определяется выбором альтернативы, поэтому выбор альтернативы здесь эквивалентен выбору исхода. Следовательно:

а) *альтернативы и исходы могут быть отождествлены* ($X = A$);

б) *целевая функция* f *становится функцией только переменной* x.

Итак, первый этап исследования ЗПР в условиях определенности — построение математической модели — сводится здесь к указанию множества допустимых альтернатив X и заданию целевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Второй этап состоит во введении понятия оптимального решения и нахождении оптимальных решений. Так как в рассматриваемом случае число $f(x)$ представляет собой оценку «полезности» альтернативы x (с точки зрения принимающего решение), то на множестве X допустимых альтернатив естественным образом возникает отношение нестрогого предпочтения $\succsim$: альтернатива x_1 считается не менее предпочтительной, чем альтернатива x_2, если полезность альтернативы x_1 не меньше, чем полезность альтернативы x_2:

$$x_1 \succsim x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2). \tag{2.1}$$

В этом случае представляется разумной единственная концепция оптимальности, когда оптимальной считается та допустимая альтернатива $x^* \in X$, которая является не менее предпочтительной, чем любая другая допустимая альтернатива $x \in X$; в терминах целевой функции это означает, что *оптимальная альтернатива должна доставлять максимум (наибольшее значение) целевой функции.*

Замечание. Если целевая функция f в некоторой ЗПР рассматривается как функция потерь, то при задании отношения предпочтения на множестве X надо в формуле (2.1) знак неравенства в правой части изменить на противоположный; в этом случае *оптимальной будет та допустимая альтернатива, которая доставляет минимум (наименьшее значение) функции потерь.*

Таким образом, исследование математической модели ЗПР в условиях определенности сводится к трем шагам:

1) указанию множества X допустимых альтернатив;
2) заданию целевой функции $f : X \to \mathbb{R}$;
3) нахождению максимума или минимума функции f.

2. При рассмотрении математических моделей ЗПР возникают два основных вопроса:

(1) *Существует ли оптимальное решение?*

(2) *Если оптимальное решение существует, то как его найти?*

Для ЗПР в условиях определенности все сводится к нахождению максимума или минимума целевой функции. В случае, когда множество X допустимых альтернатив конечно, обе проблемы легко разрешимы. Ответ на первый вопрос всегда утвердительный (так как в конечном множестве $M = \{f(x) : x \in X\}$ всегда есть наименьший и наибольший элементы). Что касается ответа на второй вопрос, то существует тривиальный алгоритм нахождения оптимального решения — перебор элементов множества M с отбрасыванием на каждом шаге меньшего элемента (при нахождении максимума). Здесь могут возникнуть сложности технического характера, связанные с «обширностью» множества M.

Рассмотрим теперь случай, когда множество допустимых альтернатив бесконечно. Здесь ответы на вопросы (1) и (2) зависят от структуры множества допустимых альтернатив и от свойств целевой функции. В приложениях, в том числе экономического характера, множество допустимых альтернатив, как правило, состоит из чисел или наборов чисел, т.е. представляет собой некоторую область $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ или $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Остановимся на случае, когда $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Случай $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, где $n > 1$, рассмотрен в лекции 3. Тогда целевая функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ есть числовая функция, заданная на числовом множестве $\mathcal{D}$, и задача нахождения оптимального решения превращается в классическую задачу нахождения экстремума функции одной переменной в некоторой допустимой области.

Рассмотрим эту задачу в общем виде. Напомним, что экстремумы бывают двух типов: *глобальные* и *локальные*.

Определение. *Пусть задана функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Точка $x^* \in \mathcal{D}$ называется точкой* ***глобального максимума*** *(**глобального минимума**) функции f, если для всех $x \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x^*)$ (соответственно $f(x) \ge f(x^*)$).*

Принципиальным результатом, дающим условия, гарантирующие существование глобальных экстремумов, является классическая теорема математического анализа — теорема Вейерштрасса, которая утверждает, что *всякая непрерывная функция, заданная на замкнутом интервале $[a, b]$, достигает на этом интервале как глобального максимума, так и глобального минимума.*

Итак, для важного класса ЗПР в условиях определенности, когда целевая функция задана на замкнутом интервале и непрерывна на нем, ответ на вопрос (1) оказывается утвердительным (заметим, что условие непрерывности целевой функции f не является «обременительным», так как для экономических задач оно обычно выполнено).

Однако теорема Вейерштрасса бесполезна в плане *нахождения* глобальных экстремумов, т.е. для решения вопроса (2). В математике методы нахождения глобальных экстремумов функции детально исследованы для дифференцируемых функций и основаны на связи между глобальными и локальными экстремумами.

Определение. *Пусть задана функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Говорят, что в точке $x_0 \in \mathcal{D}$ функция f имеет* ***локальный максимум****, если существует открытый интервал, содержащий точку x_0 и целиком содержащийся в $\mathcal{D}$ такой, что в пределах этого интервала функция f имеет наибольшее значение в точке x_0.*

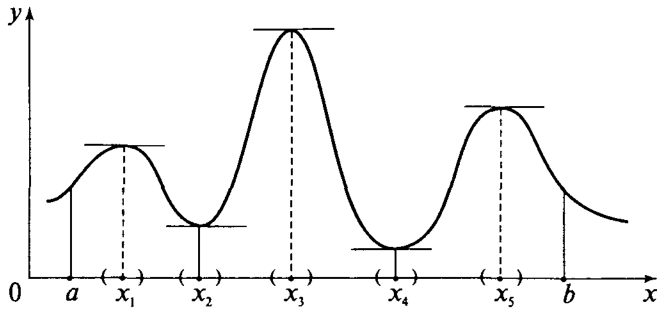


Рис. 2.1

Формально: *существует такое положительное число* $\delta > 0$, *что интервал* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *содержится в* $\mathcal{D}$ *и для всех* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leq f(x_0)$.

Если поменять знак последнего неравенства, то получим определение локального минимума.

Различие между локальным и глобальным экстремумом видно из рис. 2.1. Здесь x_3 — единственная точка глобального максимума, $\{x_1, x_3, x_5\}$ — точки локального максимума, x_4 — единственная точка глобального минимума, $\{x_2, x_4\}$ — точки локального минимума.

Рассмотрим теперь способы нахождения экстремумов дифференцируемой функции f, заданной на замкнутом интервале $[a, b]$.

Основной принцип: *если* x *— точка локального экстремума дифференцируемой функции* f, *то ее производная в этой точке равна нулю*: $f'(x) = 0$ (геометрически это означает, что касательная, проведенная к графику функции f в соответствующей точке, параллельна оси $0x$ (см. рис. 2.1).

Точка, в которой производная функции равна нулю, называется ***стационарной***; через $\operatorname{St} f$ будем обозначать множество всех стационарных точек функции f.

Приведенный выше основной принцип можно теперь сформулировать следующим образом: *для дифференцируемой функции* f *множество точек локального экстремума содержится в множестве ее стационарных точек.*

Далее, очевидно, что если x_0 — точка глобального экстремума, являющаяся *внутренней* точкой интервала $[a, b]$, то x_0 также будет точкой локального экстремума и, в силу основного принципа, является стационарной точкой.

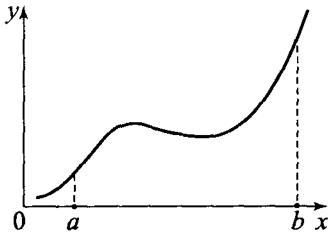


Рис. 2.2

Однако глобальный экстремум — в отличие от локального — может достигаться не только во внутренней точке замкнутого интервала $[a, b]$, но и на его границе (т. е. в точке a или b) (рис. 2.2). Учитывая это обстоятельство, окончательно получаем следующее правило.

Правило 2.1. *Для дифференцируемой функции $f(x)$, заданной на замкнутом интервале $[a, b]$, точки глобального экстремума содержатся во множестве критических точек*

$$\mathrm{Kr}\, f = \mathrm{St}\, f \cup \{a, b\},$$

являющемся объединением множества стационарных точек функции f и концов интервала $[a, b]$.

Основанный на правиле 2.1 метод нахождения точек глобального экстремума дифференцируемой функции f, заданной на отрезке $[a, b]$, состоит в следующем: во-первых, следует найти множество всех критических точек функции f и, во-вторых, сравнить значения функции f во всех ее критических точках. Та критическая точка x^*, в которой значение функции f оказалось наибольшим, будет точкой глобального максимума, а критическая точка x^0, в которой значение функции f оказалось наименьшим, — точкой глобального минимума.

3. В качестве примера построения и исследования математической модели принятия решения в условиях определенности рассмотрим следующую задачу.

Задача 1 (*об оптимальном размере закупаемой партии товара*). Фирма закупает некоторый товар в течение планового периода партиями одинаковой величины, при этом закупленный товар расходуется с постоянной скоростью. Как только запас товара кончается, закупается следующая партия и т.д. Неизрасходованный товар фирма сдает на склад за определенную плату.

Предполагаются известными следующие данные:

Q — требуемое количество товара на плановый период;

c_0 — стоимость единицы товара;

c_1 — стоимость заказа одной партии товара (считается, что стоимость заказа не зависит от величины заказываемой партии);

c_2 — стоимость хранения единицы товара в течение планового периода (считается, что стоимость хранения товара пропорциональна его количеству и времени хранения).

Требуется определить оптимальный размер закупаемой партии товара (т.е. такой, при котором суммарные затраты фирмы будут минимальными).

Решение. В соответствии с методикой, изложенной в п.4 лекции 1, необходимо реализовать три этапа.

Этап 1. *Построение математической модели* ЗПР. Здесь этот этап сводится к нахождению функции суммарных затрат в зависимости от величины заказываемой партии товара. Пусть x — величина заказываемой партии товара (по смыслу должно выполняться условие $0 < x \leq Q$, т.е. $\mathcal{D} = (0, Q]$). Затраты фирмы состоят из трех частей:

(α) *Затраты на покупку товара.* Они равны $c_0 Q$ и не зависят от величины заказываемой партии товара.

(β) *Затраты на заказы в течение планового периода.* Число заказов равно Q/x (точнее, Q/x, если это число оказывается целым, и $[Q/x]+1$ — в противном случае; в рассматриваемой модели этим обстоятельством мы пренебрегаем). Отсюда суммарная стоимость заказов в течение планового периода равна $c_1 Q/x$.

(γ) *Затраты на хранение товара.* Стоимость подсчета затрат на хранение товара осложняется тем, что в рассматриваемом случае количество хранимого товара является не постоянным, а переменным. Поскольку задача подсчета стоимости хранения переменного количества товара имеет самостоятельный интерес, рассмотрим решение этой задачи в общем виде.

Итак, пусть количество товара, хранимого в течение некоторого временно́го периода $[a, b]$, задается неотрицательной функцией $g(t) \geq 0$, c — стоимость хранения единицы товара в течение всего периода времени $T = b - a$. Чтобы решить задачу, какова должна быть стоимость хранения товара за период времени T, изобразим на

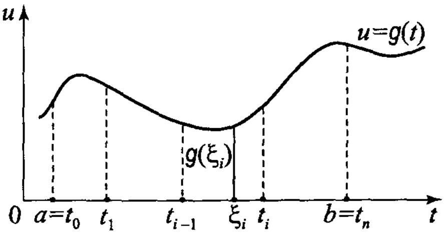


Рис. 2.3

координатной плоскости (по оси абсцисс откладываем время t, по оси ординат — количество товара u) график функции $g(t)$ (рис. 2.3). Разобьем, как это принято при построении определенного интеграла, интервал $[a, b]$ точками деления $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < < t_i < \cdots < t_n = b$; выберем в каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$ точку ξ_i и положим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Считая, что за малый промежуток времени Δt_i количество товара меняется незначительно, можем считать, что в течение временно́го периода $[t_{i-1}, t_i]$ количество товара остается практически неизменным и равным $g(\xi_i)$. Учитывая, что стоимость хранения пропорциональна количеству хранимого товара и времени хранения, получаем, что стоимость хранения товара в течение периода $[t_{i-1}, t_i]$ приблизительно равна $cg(\xi_i)\dfrac{\Delta t_i}{b-a}$, откуда общая стоимость хранения v за весь временной промежуток $[a, b]$ определяется приблизительным равенством

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} cg(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{b-a}. \tag{2.2}$$

Точное значение v получается при переходе к пределу при условии, что $\lambda \to 0$, где $\lambda = \max \Delta t_i$; учитывая, что сумма в правой части (2.2), является интегральной суммой, при переходе к пределу получаем определенный интеграл

$$v = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} cg(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{b-a} = \frac{c}{b-a} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta t_i = \frac{c}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt.$$

Итак,

$$v = \frac{c}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt. \tag{2.3}$$

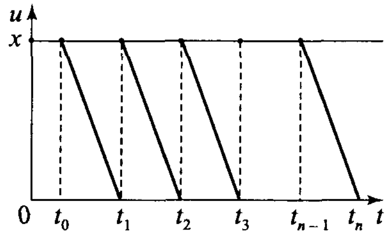


Рис. 2.4

Так как $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ — среднее значение функции $g(t)$ на интервале $[a,b]$, приходим к следующему простому правилу.

Правило 2.2. *Стоимость хранения переменного количества товара в течение некоторого временно́го периода равна стоимости хранения среднего количества товара за этот период.*

(Согласно (2.3) стоимость хранения получается умножением среднего количества хранимого товара на стоимость хранения единицы товара в течение всего временно́го периода.)

Вернемся к подсчету стоимости хранения товара в задаче 1. В рассматриваемом случае переменное количество товара изображается графически в виде системы параллельных отрезков (рис. 2.4). (*Пояснение.* Считаем, что заказы товара происходят в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$; так как товар расходуется равномерно, то его количество равномерно убывает на каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = \overline{1,n})$, поэтому оно изображается графически на этом интервале прямой, имеющей отрицательный наклон.)

Среднее значение функции, график которой изображен на рис. 2.4, можно подсчитать как отношение суммарной площади построенных прямоугольных треугольников к суммарной длине их оснований; оно, очевидно, равно $x/2$. По правилу 2.2 затраты на хранение товара в течение планового периода составляют $c_2x/2$, а суммарные затраты можно представить в виде следующей функции:

$$f(x) = c_0Q + \frac{c_1Q}{x} + \frac{c_2x}{2}, \tag{2.4}$$

заданной в области $\mathcal{D} = (0, Q]$.

Построением целевой функции (в данном случае — функции потерь) заканчивается первый этап.

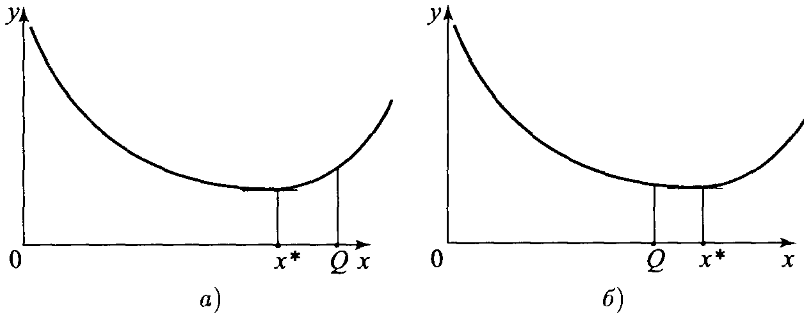


Рис. 2.5

Этап 2. *Исследование построенной функции на экстремум.* Находим производную

$$f'(x) = -\frac{c_1 Q}{x^2} + \frac{c_2}{2}.$$

В случае, когда числовые значения величин Q, c_0, c_1, c_2 заданы, нахождение экстремума сводится к нахождению стационарных точек, то есть к решению уравнения $f'(x) = 0$, и сравнению значений функции f в стационарных точках и граничных точках интервала (см. п. 2). В рассматриваемом случае попробуем проанализировать поведение функции $f(x)$ в зависимости от величин Q, c_0, c_1, c_2, рассматриваемых как параметры. Для этого найдем интервалы распределения знаков производной. Имеем

$$\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{c_2}{2} \geq \frac{c_1 Q}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \sqrt{\frac{2c_1 Q}{c_2}};\\
f'(x) \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{c_2}{2} \leq \frac{c_1 Q}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \sqrt{\frac{2c_1 Q}{c_2}};\\
f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2c_1 Q}{c_2}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Итак, для функции $f(x)$ имеется единственная стационарная точка $x^* = \sqrt{2c_1 Q/c_2}$, причем левее точки x^* функция $f(x)$ убывает, а правее точки x^* — возрастает. Возможны два случая:

(а) $x^* \leq Q$ (т.е. $x^* \in \mathcal{D}$);

(б) $x^* > Q$ (т.е. $x^* \notin \mathcal{D}$).

В случае (а) очевидно, что x^* — единственная точка глобального минимума функции $f(x)$ на интервале $(0, Q]$ (рис. 2.5, a). В случае (б) точкой глобального минимума функции $f(x)$ на интервале

$(0, Q]$ будет точка Q (рис. 2.5, *б*). При этом случай (*а*) имеет место, когда $\sqrt{2c_1Q/c_2} \le Q$, т. е. $Q \ge 2c_1/c_2$; случай (*б*) имеет место, когда $Q < 2c_1/c_2$.

Этап 3. *Анализ результатов.* Оптимальная величина x^* заказываемой партии товара зависит от соотношения между параметрами c_1, c_2, Q. Установим характер этой зависимости «на уровне здравого смысла».

1) x^* должна быть монотонно возрастающей функцией от Q (если при неизменной плате за заказы и за хранение потребуется большее количество товара, то и величина заказываемой партии должна быть увеличена).
2) x^* должна быть монотонно возрастающей функцией от c_1 (при увеличении стоимости заказов c_1 выгодно уменьшить их число, а для этого надо увеличить размер заказываемой партии).
3) x^* должна быть монотонно убывающей функцией от c_2 (при увеличении стоимости хранения выгодно уменьшить количество хранимого товара, а для этого надо уменьшить размер заказываемой партии).

Функция $x^* = \sqrt{2c_1Q/c_2}$ удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Далее, возьмем какой-нибудь частный случай, например, $x^* = Q$ (т.е. когда оптимальным является решение о заказе всего требуемого товара целиком). Согласно формальным выкладкам, проведенным выше, такая ситуация наступает при выполнении условия (б): $Q < 2c_1/c_2$. Интуитивно ясно, что решение $x^* = Q$ будет оптимальным тогда, когда требуемое количество товара Q «не слишком велико», а плата за хранение «достаточно мала» по сравнению с платой за заказы. Но тогда решение «заказать весь товар целиком» будет тем более верным при уменьшении Q, увеличении c_1 и уменьшении c_2, что как раз имеет место для критерия $Q < 2c_1/c_2$.

Таким образом, содержательный анализ здесь согласуется с формальными результатами.

Итак, оптимальное решение для задачи 1 состоит в следующем: если $Q < 2c_1/c_2$, то надо весь товар заказать целиком; если $Q \ge 2c_1/c_2$, то товар следует заказывать партиями по $\sqrt{2c_1Q/c_2}$ за один заказ.

Лекция 3. *Оптимизация при наличии ограничений*

• *Экстремум функции нескольких переменных.* • *Графический способ нахождения экстремума функции двух переменных.* Задача 2. *Задача максимизации производственной функции.* • *Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа.* Задача 3. *Распределение заказа между двумя фирмами.*

1. В этой лекции рассматриваются задачи принятия решений в условиях определенности, задаваемые целевыми функциями вида $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 1$; множество $\mathcal{D}$ называется в этом случае ***допустимой областью***. Нахождение оптимального решения такой ЗПР сводится к нахождению экстремума целевой функции в допустимой области (см. лекцию 2). Хотя с принципиальной точки зрения ситуация с *существованием* экстремумов для функции n переменных аналогична той, которая имеет место для функции одной переменной, однако вопросы, связанные с *нахождением* точек экстремума для функции n переменных (значит, и вопросы нахождения оптимальных решений соответствующих ЗПР), технически оказываются существенно более сложными, чем для функции одной переменной. Достаточные условия существования экстремума функции n переменных дает следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывная функция f, заданная в замкнутой ограниченной области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, достигает в этой области как глобального максимума, так и глобального минимума.*

Пояснение. Условие замкнутости области $\mathcal{D}$ эквивалентно тому, что $\mathcal{D}$ содержит свою границу; условие ограниченности области $\mathcal{D}$ означает, что $\mathcal{D}$ содержится в некотором шаре достаточно большого радиуса.

Приведем простое доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на понятии компактности. Как известно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ замкнутость и ограниченность множества эквивалентны его компактности. Таким образом, множество $\mathcal{D}$ здесь компактное. Далее, образ компактного множества при непрерывном отображении также является компактным, поэтому множество $M = \{f(x) : x \in \mathcal{D}\}$ будет компактным, а так как оно содержится в $\mathbb{R}$, оно имеет наименьший элемент $f(x^0)$ и наибольший элемент $f(x^*)$, где $x^0, x^* \in \mathcal{D}$. Получаем, что x^0 — точка глобального минимума, а x^* — точка глобального максимума функции f в допустимой области $\mathcal{D}$.

Для ЗПР в условиях определенности теорема Вейерштрасса имеет принципиальное значение: она обеспечивает реализуемость принципа оптимальности (сводящегося здесь к максимизации или минимизации целевой функции) для важного класса задач принятия решений.

Как и в случае функции одной переменной, глобальный экстремум функции n переменных, где $n > 1$, может достигаться либо во внутренней точке допустимой области $\mathcal{D}$, либо в граничной точке области $\mathcal{D}$. Для дифференцируемой функции n переменных основной принцип, позволяющий выделить множество *внутренних* точек области $\mathcal{D}$, среди которых находятся точки глобального экстремума, это следующий

Принцип стационарности. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, заданная в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Если функция f имеет глобальный экстремум во внутренней точке x_0 области $\mathcal{D}$, то x_0 является стационарной точкой функции f (т. е. все частные производные функции f в точке x_0 должны быть равны нулю).*

Замечание. Напомним,что вектор $\operatorname{grad} f$, координатами которого являются частные производные функции f, называется ***градиентом функции*** f. Таким образом, принцип стационарности состоит в том, что *если x_0 — точка глобального экстремума функции f, являющаяся внутренней точкой области $\mathcal{D}$, то градиент функции f в точке x_0 должен быть равен нулю.*

Приведем простое обоснование этого утверждения. Предположим, что x_0 — внутренняя точка области $\mathcal{D}$, в которой функция f достигает, например, глобального максимума, и вектор $\operatorname{grad} f$ в точке x_0 отличен от нуля. Сместимся из точки x_0 по направлению градиента в некоторую точку x_*, оставаясь при этом в области $\mathcal{D}$ (это можно сделать, так как точка x_0 — внутренняя). В направлении градиента функция возрастает, поэтому $f(x_*) > f(x_0)$ в противоречие с тем, что x_0 — точка глобального максимума функции f в области $\mathcal{D}$.

Итак, для дифференцируемой в области $\mathcal{D}$ функции f точка, в которой достигается глобальный экстремум, является либо стационарной, либо граничной точкой. Введем обозначения:

$\mathrm{St}\, f$ — множество стационарных точек функции f;

$\mathrm{Fr}\, \mathcal{D}$ — множество граничных точек области $\mathcal{D}$;

$\mathrm{Kr}\, f$ — множество критических точек функции f, являющееся объединением множества стационарных и граничных точек:

$$\mathrm{Kr}\, f = \mathrm{St}\, f \cup \mathrm{Fr}\, \mathcal{D}. \tag{3.1}$$

Правило 3.1. *Пусть f — дифференцируемая функция, заданная в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Точки глобального экстремума функции f содержатся в множестве* $\mathrm{Kr}\, f$ *ее критических точек.*

Замечание. Хотя правило 3.1 внешне аналогично правилу 2.1 (и является его непосредственным обобщением), однако практическое применение этого правила для нахождения глобального экстремума функции n переменных возможно лишь в простейших случаях (в основном при $n = 1, 2, 3$). Дело в том, что в случае $n = 1$ множество $\mathcal{D}$ лежит на прямой и его граница $\mathrm{Fr}\, \mathcal{D}$ имеет, как правило, очень простую структуру (например, для замкнутого интервала $\mathcal{D} = [a, b]$ его граница состоит из двух точек a и b — концов этого интервала). В случае $n = 2$ множество $\mathcal{D}$ лежит на плоскости и его граница представляет собой некоторую кривую. Поэтому для нахождения точек глобального экстремума здесь можно использовать графические методы (в сочетании с аналитическими). В некоторых простых случаях аналогичный прием можно использовать для $n = 3$. Однако при $n > 3$ геометрическая интерпретация области $\mathcal{D}$ теряется и правило 3.1 для нахождения точек глобального экстремума неприемлемо. В теории оптимизации разработаны многочисленные методы и алгоритмы нахождения точек глобального экстремума функции n переменных для различных частных случаев, которые выделяются наложением условий на функцию f и на допустимую область $\mathcal{D}$, однако эффективных способов нахождения экстремумов функции для общего случая не существует.

2. Для случая функции двух переменных задача нахождения ее экстремума в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ может быть решена графическим методом, который рассмотрен в этом пункте. Введем следующее определение.

Определение. ***Линией уровня*** *функции двух переменных $f(x, y)$ называется линия на плоскости, состоящая из всех точек этой плоскости, в которых функция f имеет постоянное значение.*

Уравнение линии уровня записывается в виде $f(x, y) = c$, где c — произвольная постоянная (константа). Каждому значению константы c соответствует своя линия уровня; варьируя константу c, в результате получаем *семейство линий уровня*, при этом различные (т.е. соответствующие различным значениям c) линии уровня не пересекаются. Таким образом, через каждую точку плоскости $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащую области определения функции f, проходит, причем только одна, линия уровня функции f; ее уравнение

$$f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Графический метод нахождения экстремума функции двух переменных состоит в следующем. Пусть требуется найти экстремум функции f, заданной в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Шаг 1. Изобразим область $\mathcal{D}$ на координатной плоскости.

Шаг 2. Рассмотрим семейство линий уровня функции f — оно покрывает всю область $\mathcal{D}$.

Так как линии уровня, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, соответствует константа $c = f(x_0, y_0)$, то справедливо следующее правило.

Правило 3.2. 1. *Точка $M^*(x^*; y^*) \in \mathcal{D}$ является точкой глобального максимума функции f в области $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда проходящей через нее линии уровня соответствует наибольшее возможное значение константы c (возможные значения константы c — те, для которых линия уровня $f(x, y) = c$ пересекает область $\mathcal{D}$).*

2. *Точка $M^0(x^0; y^0) \in \mathcal{D}$ является точкой глобального минимума функции f в области $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда проходящей через нее линии уровня соответствует наименьшее возможное значение константы c.*

Основанный на правиле 3.2 практический способ нахождения глобального экстремума функции $f(x, y)$ состоит в следующем. Построим какую-нибудь линию уровня $f(x, y) = c$, пересекающую область $\mathcal{D}$. Постепенно увеличивая значение константы c, тем самым «сдвигаем» линию уровня; продолжаем это движение до тех пор, пока линия уровня еще имеет с областью $\mathcal{D}$ непустое пересечение. Пусть c^* — наибольшее значение константы c, при котором линия уровня $f(x, y) = c$ пересекает $\mathcal{D}$. Тогда c^* есть глобальный максимум функции f в области $\mathcal{D}$ и любая точка $M^* \in \mathcal{D}$, лежащая на линии уровня $f(x, y) = c^*$, является точкой глобального максимума функции f.

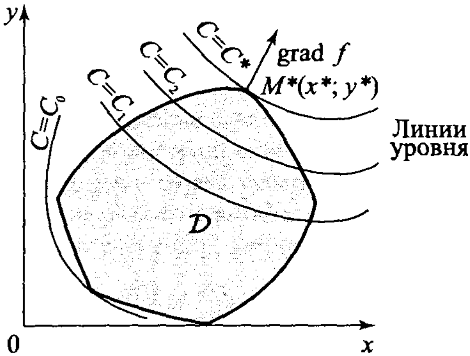


Рис. 3.1

Для нахождения точки глобального минимума надо сдвигать линию уровня в направлении, соответствующем уменьшению константы c. Этот метод иллюстрирует рис. 3.1.

Замечания. 1. Разумеется, графический метод дает лишь приближенное решение задачи нахождения экстремума. Однако при $n = 2$ во многих практических случаях графический метод может быть дополнен аналитическим следующим образом. Если граница области $\mathcal{D}$ состоит из нескольких отдельных линий, то, используя графический способ, определим ту линию γ_0, на которой лежит точка глобального экстремума. Составим систему:

$$\begin{cases} \varphi_0(x, y) = 0, \\ f(x, y) = c, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\varphi_0(x, y) = 0$ — уравнение линии γ_0, и найдем (при поиске глобального максимума) наибольшее значение параметра $c = c^*$, при котором система (3.2) совместна (при поиске глобального минимума — наименьшее значение $c = c^0$, при котором система (3.2) совместна). Решение системы (3.2) при $c = c^*$ дает координаты точки глобального максимума, а при $c = c^0$ — координаты точки глобального минимума функции f. Этот способ будет использован в задаче 2.

2. Для каждой точки $M_0(x_0; y_0) \in \mathcal{D}$ можно построить вектор $\operatorname{grad} f$ — *градиент функции* f, координатами которого являются частные производные f'_x и f'_y, вычисленные в точке $(x_0; y_0)$. Напомним геометрический смысл направления градиента: оно совпадает с направлением наибольшей скорости роста функции f. При этом для каждой точки M_0 градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку. Таким образом, смещаясь из точки M_0 в направлении градиента, получаем для линии уровня увеличение значения соответствующей ей константы c, а смещаясь из точки M_0 в направлении, противополож-

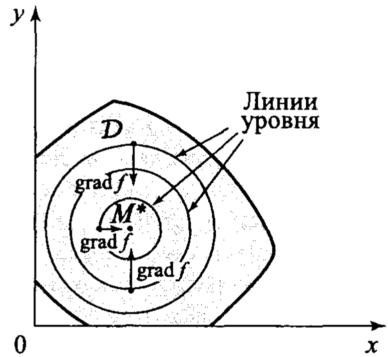


Рис. 3.2

ном направлению градиента, — уменьшение значения константы c. При этом надо иметь в виду, что в общем случае градиент функции не является постоянным вектором, поэтому, смещаясь, например, из точки M_0 по направлению градиента в точку M_1, далее надо строить градиент уже в точке M_1 и т.д.

3. В примере, который иллюстрирует рис. 3.1, глобальный максимум и глобальный минимум функции f достигаются на границе допустимой области $\mathcal{D}$. Но так бывает не всегда (правило 3.1). Пример, которому соответствует рис. 3.2, наглядно показывает, какой вид должно иметь семейство линий уровня функции $f(x, y)$, чтобы ее глобальный максимум достигался во внутренней точке M^* области $\mathcal{D}$. В этом случае (согласно принципу стационарности) точка M^* должна быть стационарной точкой области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим теперь пример задачи экономического содержания, решение которой сводится к нахождению глобального экстремума функции.

Задача 2. *Максимизация производственной функции.*

Предположим, что для производства некоторой продукции используется n типов ресурсов. Затраты ресурсов могут быть формально представлены вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где x_i — количество ресурса типа i $(i = \overline{1, n})$, по смыслу $x_i \geq 0$. Так как объем произведенной продукции определяется (при неизменной технологии) количеством затраченных ресурсов всех типов, возникает функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ — количество продукции, получаемой при векторе затрат ресурсов $(x_1, \ldots, x_n)$. Функция f называется в этом случае ***производственной функцией***. Основное свойство производственной функции — монотонность: при увеличении затрачиваемых ресурсов количество произведенной продукции увеличивается.

Пусть целью фирмы является максимизация количества производимой продукции. Причиной, по которой нельзя произвести «как угодно большое количество продукции», является ограниченность ресурсов (или ограниченность средств на их покупку). Рассмотрим случай, когда фирма покупает ресурсы по фиксированным ценам. Пусть $p = (p^1, \ldots, p^n)$ — вектор цен, где $p^i \geq 0$ — цена единицы ресурса i-го типа. Предположим, что суммарные затраты на все ресурсы не должны превышать некоторой пороговой величины d. Тогда вектор ресурсов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ будет *допустимым*, если общая стоимость ресурсов не превосходит d, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p^i x_i \leq d. \tag{3.3}$$

В компактной записи неравенство (3.3) можно представить в виде: $(p, x) \leq d$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. Неравенство (3.3) называется ***бюджетным ограничением***.

Задача максимизации производственной функции состоит в следующем. *Найти максимум производственной функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *в допустимой области* $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (p, x) \leq d; \ x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$, *где* $d > 0$, $p = (p^1, \ldots, p^n)$ *— заданные величины.*

Рассмотрим конкретный пример такой задачи, когда есть всего два типа ресурсов, а производственная функция имеет вид: $f(x, y) = \sqrt{xy}$, где x и y количество ресурса первого и второго типа соответственно. Пусть цена одной единицы первого ресурса равна двум денежным ед., а цена одной единицы второго ресурса — трем денежным ед., причем общая стоимость ресурсов не должна превосходить шести денежных ед.

Здесь допустимая область

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + 3y \leq 6; x, y \geq 0\}.$$

Она представляет собой треугольник, ограниченный осями декартовой системы координат и прямой $l : \ 2x + 3y = 6$ (рис. 3.3). Линии уровня целевой функции определяются уравнением: $\sqrt{xy} = c$. При каждом фиксированном $c > 0$ линия уровня представляет собой гиперболу, лежащую в I координатной четверти. Точкой максимума

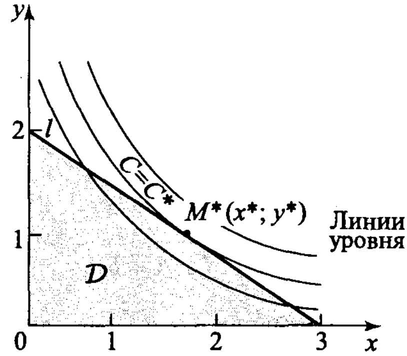


Рис. 3.3

функции $f(x, y)$ является $M^*(x^*; y^*)$, для которой проходящая через нее гипербола касается прямой l (рис. 3.3). Приближенно значения координат точки M^* определяют по графику. Для нахождения точных значений координат точки M^* составим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ \sqrt{xy} = c. \end{cases} \tag{3.4}$$

Гипербола, проходящая через точку M^*, характеризуется тем, что при соответствующем ей значении константы $c = c^*$ система (3.4) имеет единственное решение — это обстоятельство мы и используем для нахождения x^*, y^*. Выражая из первого уравнения $y = (6 - 2x)/3$, подставляя его во второе уравнение и возводя обе части в квадрат, получаем в результате квадратное уравнение относительно x:

$$2x^2 - 6x + 3c^2 = 0.$$

Последнее уравнение также должно иметь единственное решение, поэтому его дискриминант должен быть равен нулю Имеем $D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3c^2 = 0$, откуда $c^* = \sqrt{6}/2$. Находим: $x^* = 6/4 = 3/2$, $y^* = 1$.

Итак, максимальное значение функции $\sqrt{xy}$ в области $\mathcal{D}$ достигается в точке $M^*(3/2; 1)$. Оптимальное решение состоит в том, что надо использовать 3/2 ед. ресурса первого типа и одну единицу ресурса второго типа (при этом бюджетное ограничение выполнено: $2x^* + 3y^* = 6$). Вектор ресурсов $(3/2; 1)$ дает максимально возможное — с учетом бюджетного ограничения — количество произведенной продукции.

3. Рассмотрим кратко важный метод нахождения экстремума функции в допустимой области — метод множителей Лагранжа.

Задача. Найти глобальный максимум (или глобальный минимум) функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m. \end{cases} \tag{3.5}$$

Предполагается, что функции $f, g_1, \ldots, g_m$ являются непрерывно дифференцируемыми. Это — классическая задача нахождения условного экстремума, которая формулируется обычно в следующем виде: *найти экстремум функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *при системе ограничений* (3.5). С точки зрения подхода, изложенного в п. 1, рассматриваемая задача является задачей нахождения глобального экстремума функции f в случае, когда допустимая область $\mathcal{D}$ есть множество решений системы (3.5). Обычно предполагается, что $n > m$ и разность $n - m$ называется ***числом степеней свободы*** данной задачи.

Основной метод решения этой задачи состоит в следующем: составляется ***функция Лагранжа***

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x_1, \ldots, x_n) - b_j),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — переменные, называемые ***множителями Лагранжа***.

Справедливо следующее правило.

Правило 3.3. *Точка, являющаяся точкой условного экстремума, должна быть стационарной точкой функции Лагранжа (т. е. в этой точке все частные производные функции Лагранжа L по переменным $x_1, \ldots, x_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ должны быть равны нулю).*

Метод нахождения условного экстремума, основанный на правиле 3.3, называется ***методом множителей Лагранжа***.

Рассмотрим более подробно случай $n = 2$ и $m = 1$ (число степеней свободы равно 1). Тогда целевая функция имеет вид $f(x, y)$, а система ограничений (3.5) сводится к одному уравнению $g(x, y) = 0$. В этом случае ищется экстремум функции двух переменных $f(x, y)$

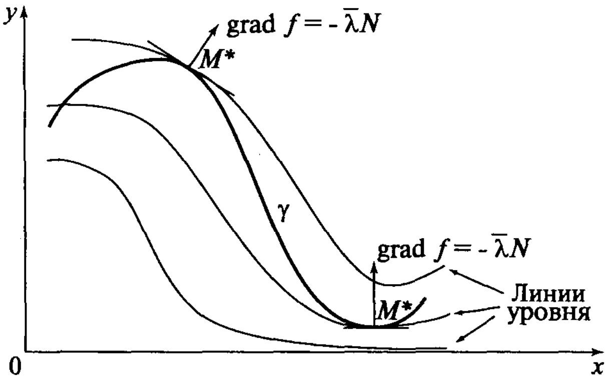


Рис. 3.4

на линии γ, определенной уравнением $g(x, y) = 0$. Функция Лагранжа принимает вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

а необходимые условия экстремума — условия стационарности функции Лагранжа — сводятся к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Так как вектор $\operatorname{grad} f\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ — градиент целевой функции $f(x, y)$, а вектор $\overline{N}\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}\right)$ — нормальный вектор к линии γ, то первые два условия в (3.6) эквивалентны векторному равенству $\operatorname{grad} f = -\lambda \overline{N}$, а последнее условие в (3.6) означает, что точка $M(x; y)$ находится на линии γ. Таким образом, с геометрической точки зрения система условий (3.6) означает следующее.

Точка условного экстремума $M(x; y)$ представляет собой такую точку линии γ, в которой векторы grad f *и вектор нормали* $\overline{N}$ *коллинеарны между собой.*

Рис. 3.4 позволяет представить эту ситуацию наглядно (здесь тонкие линии являются линиями уровня целевой функции $f(x, y)$, а жирная линия — линия γ). Легко понять, почему в точках экстремума $M^*(x^*;y^*)$ и $M^0(x^0;y^0)$ линия γ не должна пересекать проходящие через эти точки линии уровня целевой функции: например, если бы в точке M^* линия γ пересекала проходящую через M^* линию уровня функци $f(x,y)$, то можно было сместиться по линии γ в некоторую точку $M'(x';y') \in \gamma$ в направлении, составляющем острый угол с вектором $\operatorname{grad} f$; в этом случае выполнялось бы неравенство $f(M') > f(M^*)$ в противоречие с тем, что M^* — точка условного максимума. Таким образом, в точке условного экстремума линия γ и линия уровня целевой функции должны иметь общую касательную, поэтому нормали к ним коллинеарны.

Аналогично интерпретируется условие стационарности функции Лагранжа в общем случае: в точке условного экстремума градиент целевой функции должен быть представи́м в виде линейной комбинации нормалей к гиперповерхностям $g_j(x_1,\ldots,x_n) = b_j$ $(j=\overline{1,m})$.

Замечание. Метод множителей Лагранжа может быть применен для нахождения экстремума функции и при более общей системе ограничений, чем система (3.5). Например, когда система ограничений имеет вид системы неравенств

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) \le b_m \end{cases} \tag{3.7}$$

и все $x_i \ge 0$ $(i=\overline{1,n})$. Такая оптимизационная задача называется ***задачей нелинейного программирования***. Функция Лагранжа в этом случае определяется как сумма целевой функции и скалярного произведения вектора множителей Лагранжа и вектора разностей правых и левых частей системы (3.7). (Более подробно см., например, в [1].)

Проиллюстрируем метод множителей Лагранжа на следующем примере.

Задача 3. *Распределение заказа между двумя фирмами.*

Предпринимателю требуется приобрести c ед. некоторого продукта, распределив заказ между двумя фирмами A и B. Стоимость производства x ед. продукта фирмой A составляет

$$p_A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \text{ денежных ед.},$$

а фирмой B

$$p_B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \text{ денежных ед.},$$

где $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 > 0)$.

При каком распределении заказа между этими двумя фирмами общая стоимость заказа будет наименьшей?

Решение. Пусть заказ распределен между фирмами так, что фирма A производит x_1 ед. продукта, а фирма B — x_2 ед. продукта (при этом должно выполняться услове $x_1 + x_2 = c$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$). Тогда целевая функция — стоимость заказа

$$f(x_1, x_2) = (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2) + (b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2),$$

а система ограничений сводится к уравнению $x_1 + x_2 = c$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(c - x_1 - x_2).$$

Находя частные производные функции L и приравнивая их к нулю, получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 x_1 - \lambda = 0, \\ b_1 + 2b_2 x_2 - \lambda = 0, \\ c - x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

которую можно решить любым известным способом. Например, вычтем из первого уравнения второе:

$$(a_1 - b_1) + 2a_2 x_1 - 2b_2 x_2 = 0;$$

подставляя в последнее уравнение из третьего уравнения $x_2 = c - x_1$, находим

$$x_1 = \frac{2b_2 c - a_1 + b_1}{2(a_2 + b_2)}, \qquad x_2 = c - x_1 = \frac{2a_2 c + a_1 - b_1}{2(a_2 + b_2)}.$$

Окончательно получаем решение в виде

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{b_2}{a_2 + b_2} c + \delta_1, \qquad \delta_1 = \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}, \\ x_2^0 &= \frac{a_2}{a_2 + b_2} c + \delta_2, \qquad \delta_2 = \frac{a_1 - b_1}{2(a_2 + b_2)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Заметим, что всегда $x_1^0 + x_2^0 = c$; для выполнения граничных условий $x_1^0, x_2^0 > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось двойное неравенство $0 < x_1^0 < c$, т. е.

$$0 < \frac{b_2}{a_2 + b_2}c - \frac{a_1 - b_1}{2(a_2 + b_2)} < c,$$

отсюда $c > \dfrac{a_1 - b_1}{2b_2}$, $c > \dfrac{b_1 - a_1}{2a_2}$.

Итак, задача имеет решение только в том случае, когда

$$c > \max\left\{\frac{a_1 - b_1}{2b_2}, \frac{b_1 - a_1}{2a_2}\right\}.$$

Анализ результатов. Приведем некоторые содержательные пояснения полученного решения. Формулы (3.9) наглядно показывают способ оптимального распределения заказа: вначале общую величину заказа c делят на две части обратно пропорционально старшим коэффициентам многочленов $p_A(x)$ и $p_B(x)$; затем к полученным величинам прибавляют «добавки» δ_1 и δ_2, пропорциональные разностям коэффициентов при первых степенях многочленов, причем $\delta_2 = -\delta_1$. Рассмотрим теперь частный случай, когда $a_1 = b_1$. Интуитивно ясно, что в этом случае надо делить заказ обратно пропорционально коэффициентам при старших членах, что и диктует формула (3.9) (в этом случае «добавки» равны нулю).

Лекция 4. *Задачи линейного программирования*

• *Общая задача линейного программирования.* Задача 4. *Задача производственного планирования.* Задача 5. *Задача о смеси.* Задача 6. *Задача о перевозках (транспортная задача).* • *Основной принцип линейного программирования. Понятие о симплекс-методе. Особенности существования решений в задачах линейного программирования.* • *Двойственность в линейном программировании. Экономический смысл двойственности.*

1. Задача линейного программирования представляет собой частный случай задачи оптимизации при наличии ограничений, который характеризуется тем, что:

а) *целевая функция является линейной*;

б) *система ограничений, выделяющая допустимую область $\mathcal{D}$, представляет собой систему линейных неравенств.*

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть задана в следующем виде: *найти* $\max f(x_1, \ldots, x_n)$ *при ограничениях*

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) \le b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $f, g_1, \ldots, g_m$ — *линейные функции n переменных*; при этом, как правило, накладываются *граничные условия* неотрицательности переменных: $x_i \ge 0$ для всех $i = \overline{1, n}$.

Замечание. К общей задаче линейного программирования легко приводится случай, когда вместо максимума требуется найти минимум целевой функции и в системе ограничений (4.1) знаки неравенств противоположны, а также если некоторые ограничения имеют вид равенств: задача нахождения минимума функции f эквивалентна задаче нахождения максимума функции $-f$; изменение направления знака неравенства эквивалентно умножению обеих частей неравенства на -1, а равенство эквивалентно двум противоположным неравенствам.

ОЗЛП на плоскости (т. е. относительно двух переменных) имеет следующий вид: *найти максимум функции*

$$f(x,y) = Ax + By + C$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \le c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my \le c_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

Так как каждое неравенство $a_jx + b_jy \le c_j \quad (j = \overline{1,m})$ определяет полуплоскость, ограниченную прямой $a_jx + b_jy = c_j$, то допустимая область $\mathcal{D}$, выделяемая системой ограничений (4.2), представляет собой в этом случае пересечение конечного числа полуплоскостей, называемое ***выпуклым многоугольным*** (или ***многогранным***) ***множеством***. Если выпуклое многоугольное множество ограничено, оно будет *выпуклым многоугольником.*

ОЗЛП в пространстве (т.е. относительно трех переменных) принимает вид: *найти максимум линейной функции*

$$f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z \le d_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz \le d_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь каждое неравенство $a_jx+b_jy+c_jz \le d_j \quad (j = \overline{1,m})$ определяет полупространство, ограниченное плоскостью $a_jx + b_jy + c_jz = d_j$; пересечение конечного числа полупространств называется ***выпуклым многогранным множеством*** (ВММ); если это множество ограничено, то оно представляет собой *выпуклый многогранник.*

Та же терминология принимается и для общего случая n переменных (термин *плоскость* заменяют в общем случае на *гиперплоскость*). Итак, с геометрической точки зрения ОЗЛП *состоит в нахождении максимума линейной функции в допустимой области, которая представляет собой выпуклое многогранное множество.*

Рассмотрим несколько стандартных задач линейного программирования.

Задача 4. *Задача производственного планирования.*

Содержательная постановка задачи такова. Предприятие может производить продукцию различных типов $1, \ldots, n$, имея запас ресурсов типов $1, \ldots, m$. Пусть a_i^j — количество ресурса типа j, которое требуется для производства единицы продукции типа i; b^j — наличный запас ресурса типа j, а c_i — прибыль от реализации единицы продукции типа i $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m})$. Все эти данные можно свести в таблицу (табл. 4.1).

Таблица 4.1

	1	...	j	...	m	Прибыль
x_1	a_1^1		a_1^j		a_1^m	c_1
$\vdots$						
x_i	a_i^1		a_i^j		a_i^m	c_i
$\vdots$						
x_n	a_n^1		a_n^j		a_n^m	c_n
Запас	b^1		b^j		b^m	

Производственный план (короче — план) формально можно задать вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где неотрицательное число $x_i \geq 0$ указывает количество продукции i-го типа $(i = \overline{1, n})$, производимое в случае принятия этого плана (некоторые x_i могут быть равны нулю — это означает, что соответствующий тип продукции при этом плане не производится). Перейдем к определению оптимального плана.

Определение. а) *План называется* ***допустимым****, если он может быть реализован, т. е. если для его реализации хватает ресурсов всех типов.*

б) *План называется* ***оптимальным****, если, во-первых, он является допустимым, и, во-вторых, дает максимальную прибыль среди всех допустимых планов.*

Выразим теперь условия допустимости и оптимальности плана. Так как при плане $x = (x_1, \ldots, x_n)$ расход ресурса j-го типа равен $a_1^j x_1 + \cdots + a_n^j x_n$, а запас ресурса j-го типа равен b^j, то для того чтобы план был реализуемым «по ресурсу j», надо, чтобы выполнялось неравенство $a_1^j x_1 + \cdots + a_n^j x_n \leq b^j$; реализуемость плана «в целом» означает его реализуемость по каждому виду ресурсов и сводится, таким образом, к системе линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n \le b^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^j x_1 + \cdots + a_n^j x_n \le b^j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x_1 + \cdots + a_n^m x_n \le b^m, \end{cases} \tag{4.4}$$

к которой должны быть добавлены граничные условия неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$.

Далее, прибыль от реализации плана $x = (x_1, \ldots, x_n)$ равна $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. Таким образом, задача нахождения оптимального плана сводится к следующей оптимизационной задаче:

найти максимум линейной функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

в допустимой области $\mathcal{D}$, выделяемой системой линейных неравенств (4.4) *при граничных условиях* $x_i \ge 0$ $(i = \overline{1,n})$. Это — частный случай общей задачи линейного программирования.

• **Пример 4.1.** Найдем оптимальный план для задачи производственного планирования, заданной табл. 4.2.

Таблица 4.2

	1	2	3	Прибыль
x	1	16	9	5
y	2	6	7	7
Запас	15	96	69	

Здесь система ограничений сводится к системе линейных неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \le 15, \\ 16x + 6y \le 96, \\ 9x + 7y \le 69 \end{cases}$$

при граничных условиях неотрицательности $x \ge 0$, $y \ge 0$. Допустимая область $\mathcal{D}$ представляет собой многоугольник (рис. 4.1), ограниченный следующими прямыми: (l_1) : $x + 2y = 15$; (l_2) : $16x + 6y = 96$; (l_3) : $9x + 7y = 69$; (l_4) : $x = 0$; (l_5) : $y = 0$. Целевая функция имеет вид: $f(x,y) = 5x + 7y$, а семейство линий уровня — это семейство прямых $5x + 7y = c$, где c — константа. Градиентом целевой функции здесь является постоянный вектор $\overline{g} = \operatorname{grad} f$ с координатами $(5; 7)$, который

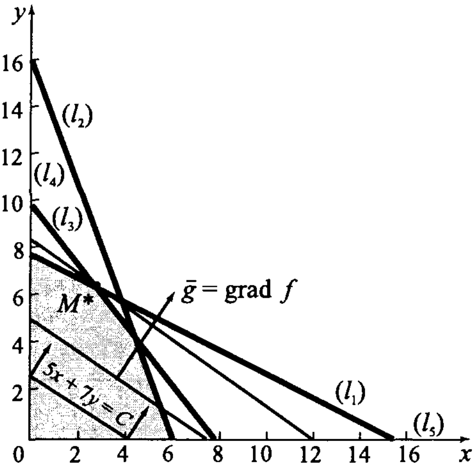


Рис. 4.1

перпендикулярен всем линиям уровня. Задача нахождения глобального максимума функции $f(x, y)$ в допустимой области $\mathcal{D}$ в данном случае может быть решена графическим способом (см. лекцию 3, п. 2). Точка глобального максимума функции $f(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ это та вершина M^*, через которую проходит линия уровня при наибольшем возможном значении константы c (геометрически точка M^* получается перемещением прямой $5x + 7y = c$ в направлении градиента до тех пор, пока она еще пересекает область $\mathcal{D}$). Приближенно значения координат $(x^*; y^*)$ точки M^* могут быть найдены по графику (рис. 4.1). Для нахождения точных значений $(x^*; y^*)$ составим систему из уравнений прямых (l_1) и (l_3), пересечением которых является эта точка:

$$\begin{cases} x + 2y = 15, \\ 9x + 7y = 69. \end{cases} \tag{4.5}$$

Решая систему, находим $x^* = 3$, $y^* = 6$.

Задача 5. *Задача о смеси.*

Содержательная постановка задачи состоит в следующем. Имеется некоторый набор первичных продуктов, из которых можно составлять различные смеси. Обязательное требование к составляемой смеси заключается в том, что в ней количество питательных веществ (белков, жиров, углеводов, минеральных солей, витаминов и т. п.) должно быть не ниже заданной нормы. Требуется среди всех смесей, удовлетворяющих этому требованию, найти такую, которая имеет минимальную стоимость.

Все данные, необходимые для формальной постановки задачи о смеси, сведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

	1	...	j	...	m	Стоимость
x_1	a_1^1		a_1^j		a_1^m	c_1
$\vdots$						
x_i	a_i^1		a_i^j		a_i^m	c_i
$\vdots$						
x_n	a_n^1		a_n^j		a_n^m	c_n
Минимальная норма	b^1		b^j		b^m	

Здесь a_i^j — количество питательных веществ j-го типа, которое содержится в единице продукта i-го типа, c_i — стоимость единицы продукта i-го типа, b^j — минимальная норма питательного вещества типа j в смеси $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$.

Смесь называется ***допустимой***, если содержащееся в ней количество питательного вещества каждого типа не ниже минимальной нормы.

Смесь называется ***оптимальной***, если она допустима и среди всех допустимых смесей имеет наименьшую стоимость.

Условия допустимости смеси $x = (x_1, \ldots, x_n)$ сводятся к системе линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n \geq b^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^j x_1 + \cdots + a_n^j x_n \geq b^j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m x_1 + \cdots + a_n^m x_n \geq b^m, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Так как стоимость смеси x равна $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, то задача нахождения оптимальной смеси сводится к следующей оптимизационной задаче:

найти минимум функции $f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ *в области* $\mathcal{D}$, *заданной системой линейных неравенств* (4.6) *при условии неотрицательности переменных.*

С учетом замечания на с. 39 сформулированная задача является частным видом общей задачи линейного программирования.

Задача 6. *Задача о перевозках* (*транспортная задача*).

Имеется n пунктов производства (или хранения) некоторого продукта и m пунктов потребления этого продукта. Количество данного продукта в пункте i равно c_i, а потребность в нем в пункте j равна b^j $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$. Стоимость перевозки единицы продукта из пункта i в пункт j равна d_i^j. Как оптимальным образом спланировать перевозки?

Решение этой задачи состоит в следующем. Составить план перевозок — значит для каждого пункта производства i и для каждого пункта потребления j указать количество x_i^j продукта, которое должно перевозиться из i в j при этом плане. Таким образом, математически план перевозок может быть задан в виде неотрицательной матрицы $x = \|x_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. Установим условия допустимости (т.е. реализуемости) такого плана. Общее количество продукта, вывозимое из пункта i, есть $\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^j$, а общее количество продукта, доставляемого в пункт j, равно $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^j$.

План будет *допустимым*, если, во-первых, для каждого пункта производства вывезенное количество продукта не превышает его наличного количества, и, во-вторых, должны быть удовлетворены потребности в данном продукте всех пунктов потребления. Итак, условия допустимости плана $x = \|x_i^j\|$ принимают следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{m} x_i^j \le c_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^j = b^j, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{4.8}$$

(Заметим, что условия допустимости могут быть выполнены тогда, когда общая потребность в данном продукте не превышает его общего запаса, т.е. когда $\sum\limits_{j=1}^{m} b^j \le \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$.)

План перевозок называется ***оптимальным***, если он является допустимым и среди всех допустимых планов перевозок имеет наименьшую стоимость.

Общая стоимость всех перевозок при плане перевозок $x = \|x_i^j\|$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_i^j x_i^j \tag{4.9}$$

(считается, что стоимость перевозок продукта пропорциональна его количеству).

Итак, задача нахождения оптимального плана перевозок сводится к нахождению минимума функции (4.9) при ограничениях (4.7), (4.8) и граничных условиях неотрицатетельности переменных. Данная задача с учетом замечания на с. 39 является частным случаем общей задачи линейного программирования.

2. Сформулируем основной принцип линейного программирования. Он базируется на следующем утверждении.

Правило 4.1. *Линейная функция n переменных, заданная в области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ и отличная от постоянной, может достигать глобального экстремума только на границе области $\mathcal{D}$.*

Для простоты записи рассмотрим случай функции трех переменных

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D.$$

Градиент функции f является здесь постоянным вектором с координатами (A, B, C), причем так как функция f отлична от постоянной, ее градиент не равен нулю. На основании *принципа стационарности* и замечания к нему (см. лекцию 3, п. 1) получаем, что функция f не может достигать глобального экстремума ни в какой внутренней точке области $\mathcal{D}$. Отсюда и следует утверждение правила 4.1.

Рассмотрим теперь линейную функцию f, заданную на выпуклом многограннике $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Так как выпуклый многогранник представляет собой замкнутое и ограниченное множество, то согласно теореме Вейерштрасса (см. лекцию 3, п. 1) функция f достигает на нем глобального максимума; учитывая правило 4.1, приходим к следующему утверждению.

Следствие. *Линейная функция f, заданная на выпуклом многограннике $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, достигает как глобального минимума, так и глобального максимума на границе многогранника $\mathcal{D}$.*

Теперь, чтобы сформулировать основной принцип линейного программирования, остается сделать одно уточнение к указанному следствию; оно состоит в том, что линейная функция, заданная

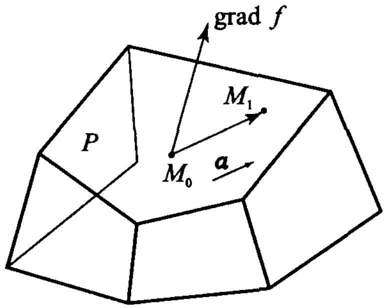


Рис. 4.2

на выпуклом многограннике, достигает своих экстремумов *в некоторых вершинах этого многогранника.*

Обоснуем это утверждение, ограничиваясь случаем функции трех переменных. Согласно приведенному выше следствию, глобальный экстремум функции f достигается на границе многогранника $\mathcal{D}$. Граница выпуклого многогранника представляет собой объединение выпуклых многоугольников. Предположим, что функция f достигает, например, глобального максимума в некоторой внутренней точке M_0 многоугольника P, представляющего собой часть границы выпуклого многогранника $\mathcal{D}$ (рис. 4.2). Тогда градиент функции f в точке M_0 должен быть перпендикулярен плоскости многоугольника P. В самом деле, если бы это было не так, то можно было бы сдвинуться из точки M_0 в некоторую точку $M_1 \in P$ по направлению вектора a, составляющему острый угол с вектором $\mathbf{g} = \operatorname{grad} f|_{M_0}$. Так как разность $f(M_1) - f(M_0)$ представима в виде скалярного произведения $\mathbf{g}$ на вектор смещения $\overrightarrow{M_0M_1}$, то учитывая, что $\mathbf{g} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} > 0$, получаем $f(M_1) > f(M_0)$ в противоречие с тем, что M_0 — точка глобального максимума функции f в области $\mathcal{D}$. Из условия перпендикулярности градиента $\mathbf{g}$ плоскости многоугольника P сразу следует, что функция f является постоянной на P, значит, она достигает глобального максимума в любой вершине многоугольника P.

Итак, получаем следующее правило.

Правило 4.2 (Основной принцип линейного программирования). *Линейная функция, заданная на выпуклом многограннике $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, достигает как глобального минимума, так и глобального максимума в некоторых вершинах этого многогранника.*

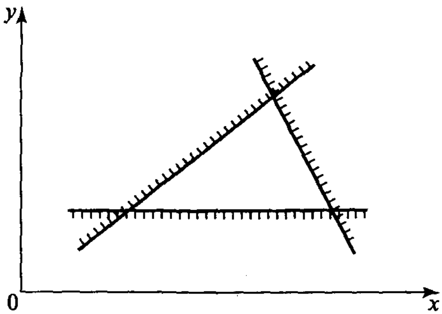


Рис. 4.3

На правиле 4.2 основаны общие алгоритмы нахождения решения задач линейного программирования. В принципе можно найти точки глобального экстремума линейной функции, заданной на выпуклом многограннике, с помощью перебора его вершин. Однако технические сложности процедуры перебора вершин многогранника настолько существенны, что, за исключением простейших случаев, этот метод в практическом отношении бесполезен. Самый известный алгоритм решения задач линейного программирования — симплекс-метод — использует «направленный перебор», когда, например, при поиске глобального максимума, вначале находят какую-нибудь вершину допустимого многогранника, а затем переходят к таким соседним вершинам этого многогранника, в которых значения целевой функции увеличиваются (алгоритм симплекс-метода детально описан во многих учебниках).

В заключение отметим некоторые особенности, относящиеся к *существованию* решений в задачах линейного программирования (в качестве иллюстрации используются задачи линейного программирования на плоскости). Может быть несколько основных случаев.

(1) *Допустимая область $\mathcal{D}$ есть пустое множество* (рис. 4.3). Это означает, что система ограничений является несовместной. Тогда ни допустимых, ни оптимальных решений нет.

(2) *Допустимая область $\mathcal{D}$ ограничена.* Тогда она представляет собой выпуклый многогранник, который является всегда замкнутым. Так как линейная функция непрерывна, то, в силу теоремы Вейерштрасса (см. лекцию 3), в этом случае целевая функция достигает в области $\mathcal{D}$ как глобального минимума, так и глобального максимума. По правилу 4.2 точками глобального минимума и глобального максимума являются некоторые вершины выпукло-

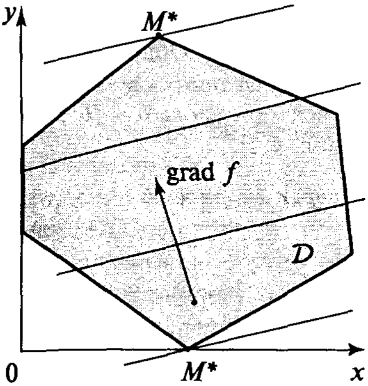


Рис. 4.4

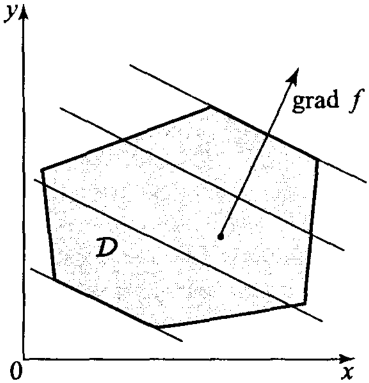


Рис. 4.5

го многогранника $\mathcal{D}$ (рис. 4.4). При этом один из экстремумов, а также оба они могут достигаться во всех точках некоторого ребра многогранника $\mathcal{D}$ (в общем случае — во всех точках некоторого многогранника меньшей размерности); последняя ситуация показана на рис. 4.5.

(3) *Допустимая область $\mathcal{D}$ не ограничена.* Тогда она представляет собой выпуклое многогранное множество, не являющееся выпуклым многогранником. В этом случае в зависимости от направления градиента grad f целевая функция f может иметь в области $\mathcal{D}$ оба экстремума (рис. 4.6), а также иметь экстремум одного вида и не иметь другого (рис. 4.7).

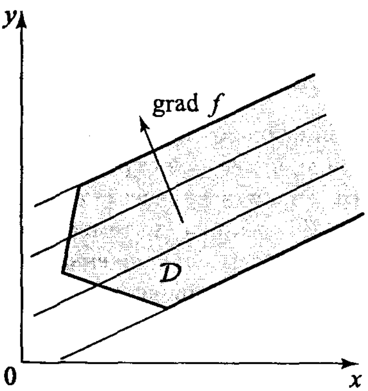


Рис. 4.6

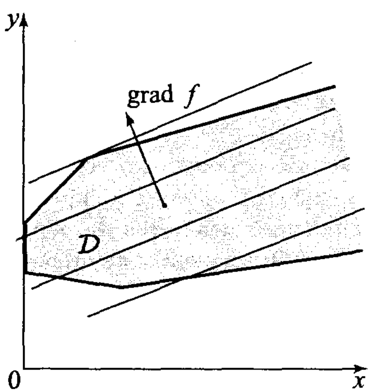


Рис. 4.7

3. Рассмотрим кратко одно из важнейших понятий линейного программирования — понятие двойственности. Общая задача линейного программирования полностью определяется матрицей (a_i^j) размера $n \times m$, к которой добавлены вектор-строка $b = (b^1, \dots, b^m)$ и вектор-столбец $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ (табл. 4.4).

Таблица 4.4

	y^1	$\dots y^j \dots$	y^m	
x_1	a_1^1		a_1^m	c_1
$\vdots$ x_i $\vdots$		a_i^j		$\vdots$ c_i $\vdots$
x_n	a_n^1		a_n^m	c_n
	b^1	$\dots b^j \dots$	b^m	

В компактной записи система ограничений такой задачи имеет вид следующей системы линейных неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i \le b^j, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{4.10}$$

при граничных условиях $x_i \ge 0$ $(i = \overline{1, n})$, а целевая функция имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = (c, x).$$

Напомним, что общая задача линейного программирования состоит в максимизации целевой функции (c, x) при системе ограничений (4.10). Назовем эту задачу ***прямой задачей*** линейного программирования.

Тогда *двойственная* ей задача линейного программирования формально строится по той же матрице, в которой строки и столбцы меняются ролями и, кроме того, знаки неравенств в системе ограничений меняются на обратные. Для записи системы ограничений двойственной задачи, во-первых, введем *двойственные переменные* $y = (y^1, \dots, y^m)$. Система ограничений двойственной задачи имеет вид следующей системы линейных неравенств:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i^j y^j \ge c_i, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{4.11}$$

при граничных условиях $y^j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, m})$, а целевая функция

$$g(y^1, \ldots, y^m) = b^1 y^1 + \cdots + b^m y^m = (b, y).$$

Если прямая задача линейного программирования состоит в нахождении максимума целевой функции, то двойственная задача состоит в нахождении минимума целевой функции (b, y) при системе ограничений (4.11).

Можно показать, *если допустимые области как прямой, так и двойственной задачи линейного программирования не пусты, то и прямая, и двойственная задачи имеют решение.*

В заключение этой темы укажем экономический смысл двойственности на примере задачи о смеси (см. п. 1).

Таблица 4.5

		y^1	y^2	y^3	
		Б	*Ж*	*У*	Стоимость
x_1	*П*$_1$	a_1^1	a_1^2	a_1^3	c_1
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_i	*П*$_i$	a_i^1	a_i^2	a_i^3	c_i
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
x_n	*П*$_n$	a_n^1	a_n^2	a_n^3	c_n
Минимальная норма		b^1	b^2	b^3	

Рассмотрим задачу о смеси, заданную таблицей типа табл. 4.5, где $\{П_1, \ldots, П_n\}$ — первичные продукты, из которых составляется смесь, а в качестве питательных веществ берутся белки (*Б*), жиры (*Ж*) и углеводы (*У*). Прямая задача линейного программирования в данном случае имеет следующий вид:

найти минимум функции $f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ *при системе ограничений*

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_i^1 x_i + \cdots + a_n^1 x_n \geq b^1, \\ a_1^2 x_1 + \cdots + a_i^2 x_i + \cdots + a_n^2 x_n \geq b^2, \\ a_1^3 x_1 + \cdots + a_i^3 x_i + \cdots + a_n^3 x_n \geq b^3 \end{cases} \tag{4.12}$$

и граничных условиях $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Построим двойственную задачу линейного программирования. Система ограничений двойственной задачи принимает вид

$$\begin{cases} a_1^1 y^1 + a_1^2 y^2 + a_1^3 y^3 \le c_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i^1 y^1 + a_i^2 y^2 + a_i^3 y^3 \le c_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 y^1 + a_n^2 y^2 + a_n^3 y^3 \le c_n \end{cases} \tag{4.13}$$

с граничными условиями $y^1 \ge 0$, $y^2 \ge 0$, $y^3 \ge 0$. Целевая функция двойственной задачи есть $g(y^1, y^2, y^3) = b^1 y^1 + b^2 y^2 + b^3 y^3$. Двойственная задача формулируется следующим образом:

найти максимум функции $g(y^1, y^2, y^3)$ при системе ограничений (4.13).

В чем состоит в данном случае экономический смысл двойственной задачи?

Предположим, что некая фирма A продает первичные продукты $\{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$ по цене c_i за единицу продукта Π_i ($i = \overline{1,n}$). Возникает конкурирующая фирма B, которая предлагает покупателям не сами первичные продукты $\Pi_1, \dots, \Pi_n$, а белки, жиры и углеводы «в чистом виде» (например, в виде таблеток, или «на вес»). Пусть y^1, y^2, y^3 — цена «единицы белков», «единицы жиров» и «единицы углеводов» соответственно. Так как единица продукта Π_i может быть заменена набором, состоящим из a_i^1 ед. белков, a_i^2 ед. жиров и a_i^3 ед. углеводов (будем записывать такой набор в виде $a_i^1 Б \oplus a_i^2 Ж \oplus$ $\oplus a_i^3 У$), то покупатель сможет предпочесть такой набор единице продукта Π_i только в том случае, когда стоимость этого набора будет не больше стоимости единицы продукта Π_i, т.е. когда

$$a_i^1 y^1 + a_i^2 y^2 + a_i^3 y^3 \le c_i,$$

но это и есть как раз неравенство, входящее в систему ограничений двойственной задачи. Далее, если покупатель приобретает белки, жиры и углеводы «в чистом виде», то для получения требуемой смеси он должен приобрести набор, состоящий из b^1 ед. белков, b^2 ед. жиров и b^3 ед. углеводов, т.е. набор

$$b^1 Б \oplus b^2 Ж \oplus b^3 У.$$

Стоимость такого набора равна $b^1 y^1 + b^2 y^2 + b^3 y^3$, что совпадает с целевой функцией двойственной задачи.

Итак, в данном случае смысл двойственных переменных y^1, y^2, y^3 — это цены, назначаемые за единицу белков, жиров и углеводов соответственно.

Экономический смысл оптимального вектора цен $y = (y^1, y^2, y^3)$ состоит в следующем.

а) *Допустимость* вектора цен $y = (y^1, y^2, y^3)$ означает, что «цены должны быть не слишком высокими»; точнее, такими чтобы покупателю было выгодно вместо покупки единицы каждого продукта $П_i$ купить по этим ценам эквивалентный ему набор

$$a_i^1 Б \oplus a_i^2 Ж \oplus a_i^3 У, \qquad i = \overline{1,n}.$$

б) *Оптимальность* вектора цен состоит в том, что «цены должны быть не слишком низкими». Точнее, среди всех допустимых векторов цен оптимальный вектор цен характеризуется тем, что при покупке набора $b^1 Б \oplus b^2 Ж \oplus b^3 У$ по оптимальным ценам он приносит фирме B наибольший доход.

Лекция 5. *Принятие решений при многих критериях (многокритериальная оптимизация)*

• *Оценка исходов по нескольким критериям. Математическая модель многокритериальной* ЗПР *в условиях определенности.* • *Отношение доминирования по Парето. Парето-оптимальность.* • *Простейшие способы сужения Парето-оптимального множества и нахождения оптимального решения:* а) *указание нижних границ критериев*; б) *выделение одного критерия* (*субоптимизация*); в) *упорядочение критериев по важности* (*лексикографическая оптимизация*). Задача 7. *Выбор места работы.* • *Обобщенный критерий в многокритериальных* ЗПР. *Построение обобщенного критерия в виде взвешенной суммы частных критериев.* Задача 8. *Оптимизация производственного процесса.*

1. Задачи принятия решений, рассмотренные в предыдущих лекциях, характеризуются тем, что в них оценочная структура задается в виде оценочной функции. Для построения оценочной функции необходим некоторый *измеримый критерий эффективности исходов.* Однако, в большинстве практических задач принятия решения исходы (в качестве которых выступают реальные объекты и явления) оцениваются, как правило, не по одному, а по нескольким критериям. Так, при оценке технического изделия основными критериями (показателями) оценки служат его технические характеристики, а также такие качества, как надежность, эргономичность, внешний вид. При выборе кандидата на должность важнейшими критериями оценки являются квалификация, образование, эрудиция, возраст, коммуникабельность и т. п. В экономических задачах основными критериями служат экономическая эффективность и стоимость, при этом каждый из этих критериев, в свою очередь, может быть подразделен на более частные критерии.

Если исходы оцениваются по m критериям, где $m > 1$, то такая задача принятия решений называется ***многокритериальной***. Основная сложность логического анализа многокритериальных задач состоит в том, что в них, в отличие от «обычных» (однокритериальных) задач появляется ***эффект несравнимости исходов***. Например, если исходы оцениваются по двум критериям, несводимым один к другому, и исход a_1 лучше исхода a_2 по первому критерию, но хуже по второму, то исходы a_1 и a_2 несравнимыми между собой. Несравнимость исходов является *формой неопределенности*, которая, в отличие от стратегической неопределенности, вызванной воздействием среды на объект управления (см. лекцию 1), связана со стремлением принимающего решение «достичь противоречивых целей» и может быть названа ***ценностной неопределенностью***. Выбор между несравнимыми исходами является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

Математическая модель задачи принятия решения при многих критериях может быть представлена в виде $\langle \mathcal{D}; f_1, \ldots, f_m \rangle$, где $\mathcal{D}$ — некоторое множество (множество допустимых исходов), f_j — числовая функция, заданная на множестве $\mathcal{D}$; при этом $f_j(a)$ есть оценка исхода $a \in \mathcal{D}$ по j-му критерию ($j = \overline{1,m}$). Такая модель соответствует задаче принятия решения в условиях определенности, в которой множество альтернатив отождествляется с множеством допустимых исходов, а оценочная структура задается вектором $(f_1, \ldots, f_m)$.

2. Критерий f_j называется ***позитивным***, если принимающий решение стремится к его увеличению, и ***негативным***, если он стремится к его уменьшению. В конкретных задачах принятия решений характер критерия устанавливается по содержательным соображениям. Технически «превращение» негативного критерия в позитивный (и наоборот) можно осуществить заменой знака; при рассмотрении многокритериальных ЗПР в общем виде будем, если не оговорено противное, предполагать, что все имеющиеся критерии являются позитивными. В многокритериальной ЗПР с позитивными критериями цель принимающего решение — получение исхода, имеющего как можно более высокие оценки по каждому критерию.

Пусть Y_j — множество значений функции f_j, т.е. множество всех оценок по j-му критерию ($j = \overline{1,m}$). Тогда множество $Y = \prod\limits_{j=1}^{m} Y_j$, состоящее из всевозможных упорядоченных наборов оценок по критериям $1, \ldots, m$, называется ***множеством векторных оценок***. Любой элемент $y \in Y$ представляет собой вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $y_j \in Y_j$. Для всякого исхода $a \in \mathcal{D}$ набор его оценок по всем критериям, т.е. набор $(f_1(a), \ldots, f_m(a))$ есть *векторная оценка исхода a*. Векторная оценка исхода содержит полную информацию о ценности (полезности) этого исхода для принимающего решение и сравнение любых двух исходов заменяется сравнением их векторных оценок.

Основное отношение, по которому производится сравнение векторных оценок (значит, и сравнение исходов), — это *отношение доминирования по Парето*, которое определяется следующим образом.

Определение. *Говорят, что векторная оценка $y = (y_1, \ldots, y_m)$* ***доминирует по Парето*** *векторную оценку $y' = (y'_1, \ldots, y'_m)$ (записывается в виде: $y \overset{\mathrm{Par}}{>} y'$), если для всех $j = \overline{1,m}$ выполняется неравенство $y_j \geq y'_j$, причем по крайней мере для одного индекса $j = \overline{1,m}$ неравенство должно быть строгим.*

Определение. *Пусть $Q \subseteq Y$ — некоторое множество векторных оценок. Векторная оценка $y^* \in Q$ называется* ***Парето-оптимальной*** *в Q, если она является максимальным элементом множества Q относительно Парето-доминирования (т. е. если в множестве Q не существует такой векторной оценки y, которая доминирует по Парето векторную оценку y^*).*

Перенесем теперь эти понятия на исходы.

Определение. *Говорят, что исход a_1* ***доминирует по Парето*** *исход a_2 (записывается в виде $a_1 \overset{\mathrm{Par}}{>} a_2$), если векторная оценка исхода a_1 доминирует по Парето векторную оценку исхода a_2.*

Содержательно условие $a_1 \overset{\mathrm{Par}}{>} a_2$ означает, что исход a_1 не хуже, чем исход a_2 по любому из рассматриваемых критериев, причем, по крайней мере, по одному из этих критериев a_1 лучше, чем a_2. Поэтому при сравнении двух исходов $a_1, a_2 \in \mathcal{D}$, для которых $a_1 \overset{\mathrm{Par}}{>} a_2$, принимающий решение безусловно отдаст предпочтение исходу a_1. Введем теперь основное понятие.

Определение. *Исход $a^* \in \mathcal{D}$ называется* ***Парето-оптимальным*** *исходом в множестве $\mathcal{D}$, если он не доминируется по Парето никаким другим исходом из множества $\mathcal{D}$ (т. е. если векторная оценка исхода a^* является Парето-оптимальной в множестве векторных оценок*

$$Q = \{(f_1(a), \ldots, f_m(a)) : a \in \mathcal{D}\}).$$

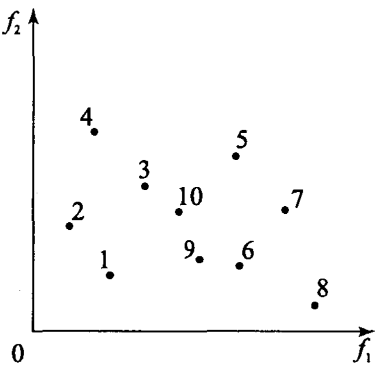


Рис. 5.1

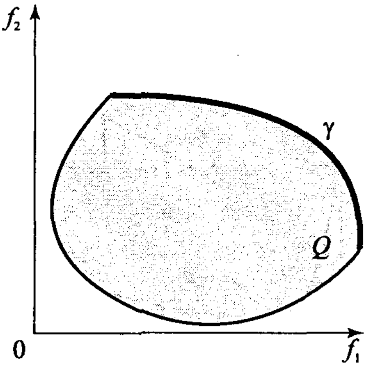


Рис. 5.2

Парето-оптимальность исхода a^* означает, что он не может быть улучшен ни по одному из критериев без ухудшения по какому-нибудь другому критерию.

Для наглядного представления доминирования по Парето и Парето-оптимальности рассмотрим случай двух позитивных критериев f_1 и f_2. Векторные оценки исходов предста́вим точками координатной плоскости (по оси абсцисс откладываем значения критерия f_1, а по оси ординат — значения критерия f_2). В случае, когда множество допустимых исходов является дискретным (конечным), получаем «картинку» типа изображенной на рис. 5.1. Здесь Парето-оптимальными являются исходы $\{4, 5, 7, 8\}$. При этом каждый исход, не являющийся Парето-оптимальным, доминируется по Парето некоторым Парето-оптимальным исходом (не обязательно одним). Например, $6 \overset{\text{Par}}{<} 5$, $6 \overset{\text{Par}}{<} 7$, $10 \overset{\text{Par}}{<} 7$, $10 \overset{\text{Par}}{<} 5$ и т.д.

В случае, когда множество допустимых исходов является непрерывным, их векторные оценки «заполняют» некоторую область Q на плоскости и получается «картинка» вроде изображенной на рис. 5.2. В этом случае множество Парето-оптимальных исходов (жирная линия γ) представляет собой часть границы Q, образно говоря, ее «*северно-восточную*» границу. (Напомним, что при позитивных критериях f_1, f_2 целью принимающего решение является увеличение значений обоих критериев f_1 и f_2, что соответствует движению внутри области Q вправо и вверх.) Здесь также любой исход, не являющийся Парето-оптимальным, доминируется по Парето некоторым Парето-оптимальным исходом.

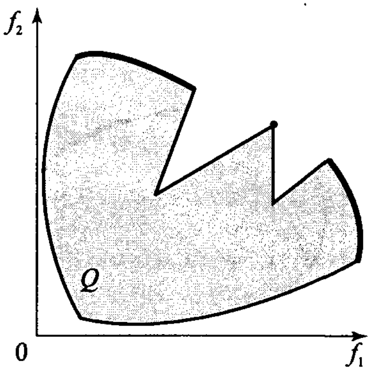


Рис. 5.3

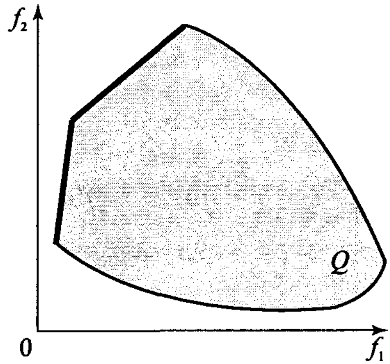


Рис. 5.4

Замечания 1. Область, изображенная на рис. 5.2, является *выпуклой* (т.е. вместе с любыми двумя своими точками она содержит весь соединяющий их отрезок). В случае невыпуклой области ее Парето-оптимальная граница может иметь более «экзотический» вид, например, состоять из отдельных линий и/или точек. Пример такой Парето-оптимальной границы изображен на рис. 5.3.

2. Предположим, что в задаче принятия решения имеются критерии разного характера. Пусть, например, f_1 — негативный, а f_2 — позитивный критерий. Тогда целью принимающего решение будет уменьшение критерия f_1 и увеличение критерия f_2, что соответствует движению на координатной плоскости «влево и вверх». В этом случае Парето-оптимальная граница области Q представляет собой ее «се́веро-западную» границу (рис. 5.4).

Перейдем теперь к основной проблеме — проблеме оптимальности для многокритериальных ЗПР. *Сформулировать единый принцип оптимальности для класса таких задач не представляется возможным, так как понятие векторного оптимума не определено.* Укажем вначале необходимое условие оптимальности: если исход $a \in \mathcal{D}$ не является Парето-оптимальным, он не может «претендовать на роль» оптимального исхода. Действительно, в этом случае существует такой допустимый исход $a' \in \mathcal{D}$, что $a' \overset{\mathrm{Par}}{>} a$; тогда, как отмечалось выше, принимающий решение, безусловно, предпочтет исход a' исходу a, значит, исход a не оптимален.

Итак, *«кандидатом» на оптимальное решение многокритериальной* ЗПР *может являться только Парето-оптимальный исход.* Однако, как видно из приведенных выше примеров, в типичных случаях Парето-оптимальных исходов может быть несколько (а в непрерывном случае — бесконечное множество). Дать однозначный ответ на вопрос, какой же из Парето-оптимальных исходов следует считать оптимальным, для общего случая, не имея дополнительной информации о критериях, невозможно. Дело в том, что *любые два Парето-оптимальных исхода не сравнимы относительно доминирования по Парето.* (В самом деле, если для двух исходов $a, a' \in \mathcal{D}$ выполняется $a' \overset{\text{Par}}{>} a$, то исход a не может быть Парето-оптимальным.) Поэтому для любых двух Парето-оптимальных исходов a_1 и a_2 всегда найдутся такие два критерия $j_1, j_2 \in \{\overline{1,m}\}$, что a_1 лучше, чем a_2 по критерию j_1, но хуже по критерию j_2. Если нет информации об *относительной важности критериев* j_1 и j_2, то рациональный выбор между a_1 и a_2 сделать невозможно. (Отметим, что нельзя сделать рационального выбора и в такой ситуации, когда, например, имеется всего 10 критериев, причем a_1 лучше, чем a_2 по одному критерию, но хуже по девяти остальным: понятно, что в некоторых реальных случаях превосходство по одному критерию может «перевесить» превосходство по всем остальным.)

3. Изложенная в п. 4 лекции 1 общая методика исследования задач принятия решений на основе математического моделирования для многокритериальных ЗПР может быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

Первый подход. Для заданной многокритериальной ЗПР находится множество ее Парето-оптимальных исходов, а выбор конкретного оптимального исхода из множества Парето-оптимальных предоставляется принимающему решение.

Второй подход. Производится сужение множества Парето-оптимальных исходов (в идеале — до одного элемента) с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный выбор исхода для принимающего решение. Отметим, что такое сужение может быть произведено только при наличии дополнительной информации о критериях или о свойствах оптимального решения.

Рассмотрим некоторые простейшие способы сужения Парето-оптимального множества, акцентируя при этом внимание на необходимой дополнительной информации. Считаем, что многокритериальная ЗПР задана в виде $\langle \mathcal{D}; f_1, \ldots, f_m \rangle$, где $f_j \quad (j = \overline{1,m})$ — позитивные критерии.

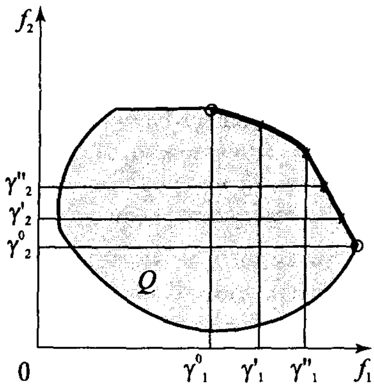


Рис. 5.5

а) *Указание нижних границ критериев.*

Дополнительная информация об оптимальном исходе $a^* \in \mathcal{D}$ в этом случае имеет следующий вид:

$$f_j(a^*) \geq \gamma_j, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{5.1}$$

Число γ_j рассматривается здесь как *нижняя граница* по j-му критерию.

Отметим, что указание нижних границ по критериям $j = \overline{1,m}$ не может быть «извлечено» из математической модели ЗПР; набор оценок $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ представляет собой *дополнительную информацию*, полученную от принимающего решение.

При указании нижних границ критериев оптимальным может считаться только такой Парето-оптимальный исход, для которого оценка по каждому из критериев $j = \overline{1,m}$ не ниже назначенной оценки γ_j. Таким образом, происходит сужение Парето-оптимального множествав за счет условия (5.1).

Ясно, что при увеличении значений γ_j $(j = \overline{1,m}))$ Парето-оптимальное множество «сокращается». Пример, представленный на рис. 5.5, демонстрирует это обстоятельство для случая двухкритериальной задачи с критериями f_1 и f_2.

На рисунке кружком отмечены концы Парето-оптимальной границы области Q; | означает концы части Парето-оптимальной границы, полученной при ограничениях $f_j(a^*) \geq \gamma'_j$; || означает часть Парето-оптимальной границы, соответствующей ограничениям $f_j(a^*) \geq \gamma''_j$.

При использовании способа а) окончательный выбор Парето-оптимального исхода производится из суженного Парето-оптимального множества принимающим решение (на основе субъективных соображений).

Основной недостаток метода а) состоит в том, что оптимальное решение становится здесь субъективным, так как зависит, во-первых, от величин назначаемых нижних границ критериев и, во-вторых, от окончательного выбора, совершаемого принимающим решение.

б) *Субоптимизацию* производят следующим образом: выделяют один из критериев, а по всем остальным критериям назначают нижние границы. Оптимальным при этом считается исход, максимизирующий выделенный критерий на множестве исходов, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных.

Пусть, например, f_1 — выделенный критерий и γ_j — нижняя граница для j-го критерия, где $j = \overline{2,m}$. Тогда оптимальным считается тот исход $a^* \in \mathcal{D}$, на котором достигает максимума функция f_1, рассматриваемая на множестве $\mathcal{D}_1 = \{a \in \mathcal{D} : f_j(a) \geq \geq \gamma_j \ \ (j = 2, \ldots, m)\}$.

Возьмем, например, для ЗПР, представленной на рис. 5.5, в качестве выделенного критерия f_1, а в качестве нижней границы по критерию f_2 величину γ_2'; тогда оптимальное решение соответствует точке пересечения горизонтальной прямой, проведенной через γ_2', с Парето-оптимальной границей. Ясно, что при увеличении нижней границы критерия f_2 максимум функции f_1 уменьшается (не увеличивается) (см. рис. 5.5).

С помощью метода субоптимизации задача многокритериальной оптимизации превращается в задачу «обычной» (скалярной) оптимизации на суженном допустимом множестве. Выделение одного из критериев, а также указание нижних границ для остальных критериев основано на дополнительной информации, получаемой от принимающего решение. Следовательно, окончательное решение здесь также имеет субъективный характер.

в) *Лексикографическая оптимизация* основана на упорядочении критериев по их относительной важности. После этого процедуру нахождения оптимального решения проводят следующим образом. На первом шаге отбирают исходы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такой исход единственный, то его и считают оптимальным. Если же таких исходов несколько, то среди них отбирают те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию и т. д. В результате такой процедуры всегда остается (по крайней мере, в случае конечного множества исходов) единственный исход — он и будет оптимальным.

Основными недостатками метода лексикографической оптимизации являются следующие.

(1) При практическом применении данного метода возникают содержательные трудности в установлении полной упорядоченности критериев по их относительной важности.

(2) Фактически при использовании этого метода принимается во внимание только первый — важнейший критерий. Например, следующий за ним по важности критерий учитывается только тогда, когда важнейший критерий достигает максимума на нескольких исходах.

Проиллюстрируем рассмотренные в этом пункте методы нахождения оптимального решения в многокритериальных ЗПР на следующем примере.

Задача 7. *Выбор места работы*

Предположим, что Вам предстоит выбрать место работы из девяти вариантов, представленных в табл. 5.1. В качестве основных критериев взяты: зарплата *З*, длительность отпуска *Д*, время поездки на работу *В*. Так как критерий *В* имеет характер потерь, оценки по этому критерию берутся со знаком «минус». Какой вариант является оптимальным?

Таблица 5.1

	Критерий		
Варианты	Зарплата (руб)	Длительность отпуска (дни)	Время поездки (мин)
1	900	20	−60
2	500	30	−20
3	700	36	−40
4	800	40	−50
5	400	60	−15
6	600	30	−10
7	900	35	−60
8	600	24	−10
9	650	35	−40

Р е ш е н и е. Выделим вначале Парето-оптимальные варианты. Здесь

$$3 \overset{\text{Par}}{>} 9, \qquad 6 \overset{\text{Par}}{>} 2, \qquad 6 \overset{\text{Par}}{>} 8, \qquad 7 \overset{\text{Par}}{>} 1$$

и других пар, находящихся в отношении доминирования по Парето, нет. Отбрасывая доминируемые по Парето варианты $\{1, 2, 8, 9\}$, получаем Парето-оптимальное множество $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. При отсутствии информации об относительной важности рассматриваемых критериев, а также о каких-либо дополнительных свойствах оптимального решения дальнейшее сужение Парето-оптимального множества произвести нельзя. Тогда формальный анализ заканчивается указанием Парето-оптимального множества и окончательный выбор оптимального варианта производится принимающим решение из этих пяти вариантов на основе каких-то дополнительных соображений.

Рассмотрим теперь второй подход, который приводит к сужению Парето-оптимального множества на основе дополнительной информации, получаемой от принимающего решение.

а) *Указание нижних границ критериев.* Наложим, например, следующие ограничения на оптимальное решение:

зарплата — не менее 600 руб;

длительность отпуска — не менее 30 дней;

время поездки — не более 40 мин.

Варианты, удовлетворяющие этим дополнительным ограничениям: $\{3, 6, 9\}$; из них оптимальными по Парето являются варианты 3 и 6. Остается сделать окончательный выбор между вариантами 3 и 6.

б) *Субоптимизация.* Пусть в качестве выделенного критерия выступает критерий *зарплата*; ограничения: длительность отпуска — не менее 30 дней, время поездки — не более 40 мин. Отбросим варианты, которые не удовлетворяют данным ограничениям; остаются варианты: $\{2, 3, 5, 6, 9\}$. Из них максимальную зарплату имеет вариант 3. Этот вариант и будет оптимальным.

в) *Лексикографическая оптимизация.* Упорядочим критерии по относительной важности, например, следующим образом: $З \succ В \succ Д$ (т.е. важнейший критерий — *зарплата*, следующий за ним по важности — *время поездки*, наименее важный критерий — *длительность отпуска*). Максимальное значение по критерию $З$ имеют варианты 1 и 7. Далее сравниваем эти варианты по второму по важности критерию $В$. Так как время поездки для этих вари-

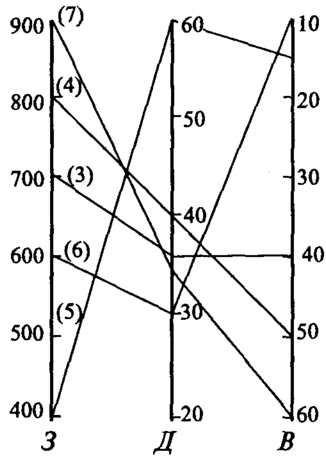


Рис. 5.6

антов одинаково, переходим к третьему критерию *Д*; по критерию *длительность отпуска* лучшим является вариант 7, который и является здесь оптимальным.

(Проверьте, что при упорядочении $B \succ Д \succ З$ оптимальным будет вариант 6, а при упорядочении $Д \succ З \succ B$ — оптимальным становится вариант 5.)

Замечание 1. Здесь наглядно проявляется недостаток лексикографической оптимизации — фактический учет одного (важнейшего) критерия. Например, в последнем случае в качестве оптимального выступает вариант 5, который имеет самую низкую оценку по критерию *зарплата*.

2. Существует удобный геометрический способ представления векторных оценок многокритериальной ЗПР, при котором оценки по всем критериям откладывают на параллельных осях и затем те оценки, которые составляют интересующую векторную оценку, соединяются отрезками прямых; получающаяся при этом ломаная задает *профиль векторной оценки*. На рис. 5.6 приведены профили векторных оценок для оптимальных по Парето вариантов Задачи 7.

4. Под построением *обобщенного критерия* в многокритериальной ЗПР понимается процедура, которая «синтезирует» набор оценок по заданным критериям (называемым в этом случае ***частными*** или *локальными* критериями), в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность этого набора оценок для принимающего решение. Формально обобщенный критерий для

ЗПР вида $\langle \mathcal{D}; f_1, \ldots, f_m \rangle$ представляет собой функцию $\varphi : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to \mathbb{R}$, где Y_j — множество оценок по j-му критерию. Если обобщенный критерий φ построен, то для каждого допустимого исхода $a \in \mathcal{D}$ может быть найдена численная оценка его полезности (ценности, эффективности): $f(a) = \varphi(f_1(a), \ldots, f_m(a))$. Таким образом, задание обобщенного критерия сводит задачу многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации с целевой функцией f.

Наиболее распространенным обобщенным критерием является «взвешенная сумма частных критериев», которая превращает векторную оценку $y = (y_1, \ldots, y_m)$ в скалярную оценку

$$\varphi(y) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m, \tag{5.2}$$

где $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$ (иногда дополнительно требуют выполнение условия $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$). Числа α_j в этом случае называют ***весовыми коэффициентами***. При этом весовой коэффициент α_j интерпретируется как «показатель относительной важности» j-го критерия: чем больше α_j, тем больший «вклад» дает оценка по j-му критерию в итоговую оценку $\varphi(y)$.

Правило 5.1. *Пусть $Q \subseteq Y$ — произвольное множество векторных оценок.*

Если векторная оценка $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ доставляет максимум функции $\varphi(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$, где все $\alpha_j > 0$, то векторная оценка y^* является Парето-оптимальной в множестве Q.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует векторная оценка $y' = (y'_1, \ldots, y'_m) \in Q$, которая доминирует по Парето векторную оценку y^*. Тогда при всех $j = \overline{1,m}$ выполняется неравенство $y'_j \geq y_j^*$, причем хотя бы для одного индекса j неравенство выполняется как строгое. Умножая эти неравенства на α_j, суммируя по $j = \overline{1,m}$ и учитывая, что все $\alpha_j > 0$, получаем $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y'_j > \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j^*$, т.е. $\varphi(y') > \varphi(y^*)$ в противоречие с тем, что y^* есть точка максимума функции φ на множестве Q.

Обратное утверждение справедливо не всегда, но в случае, когда множество Q является выпуклым, обратное утверждение также имеет место. Точнее, справедливо следующее правило.

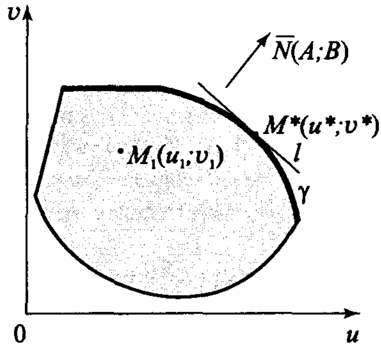


Рис. 5.7

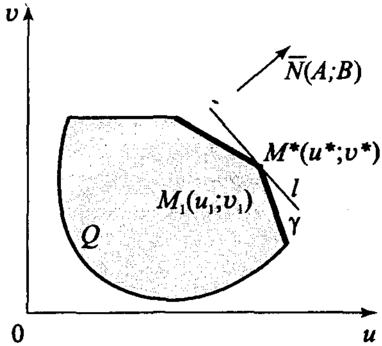


Рис. 5.8

Правило 5.2. *Пусть $Q \subseteq Y$ — выпуклое множество, $y^* \in Q$ — Парето-оптимальная векторная оценка на множестве Q. Тогда найдутся такие неотрицательные числа $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$, что функция $\varphi(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ достигает максимума на множестве Q в точке y^*.*

Рассмотрим это утверждение для случая двух критериев u и v. Изобразим множество векторных оценок Q на координатной плоскости переменных (u, v). Пусть $M^*(u^*; v^*)$ — Парето-оптимальная векторная оценка множества Q (рис. 5.7). Проведем в точке M^* касательную l к линии γ, являющейся Парето-оптимальной границей области Q (предполагая, что в некоторой окрестности точки M^* эта линия гладкая). Пусть $\mathbf{N}(A, B)$ — вектор нормали к прямой l, ориентированный так, чтобы $\mathbf{N}$ был направлен вне Q. Тогда касательная l определяется уравнением вида: $Au + Bv + C = 0$, а неравенство $Au + Bv + C \leq 0$ определяет полуплоскость, ограниченную прямой l и содержащую область Q. Таким образом, для любой точки $M_1(u_1; v_1) \in Q$ выполняется неравенство $Au_1 + Bv_1 + C \leq 0$; в то же время для точки $M^*(u^*; v^*)$ имеет место равенство $Au^* + Bv^* + C = 0$, поэтому $Au^* + Bv^* \geq Au_1 + Bv_1$. Так как числа (A, B) — координаты вектора $\mathbf{N}$ — неотрицательны, получаем, что линейная функция $\varphi(u, v) = Au + Bv$ является искомой: максимум функции $\varphi(u, v)$ в области Q достигается в точке $M^*(u^*; v^*)$.

Замечания. 1. Если линия γ, составляющая Парето-оптимальную границу, не является гладкой в окрестности точки M^*, то вместо касательной прямой в точке M^* надо взять *опорную прямую* (рис. 5.8) —

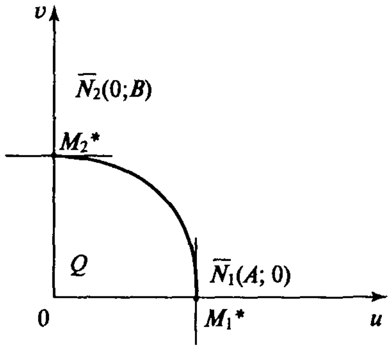


Рис. 5.9

ее существование обеспечивается выпуклостью области Q. Наконец, в случае m критериев, где $m > 2$, надо опорную прямую заменить *опорной гиперплоскостью.*

2. В общем случае правило 5.2 гарантирует существование *неотрицательных* коэффициентов α_j, $j = \overline{1,m}$, при которых максимум линейной функции $\varphi(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ достигается в заданной Парето-оптимальной точке; существование требуемых *положительных* коэффициентов α_j имеет место не всегда. Рис. 5.9 поясняет это обстоятельство для случая двух критериев. Здесь область Q представляет собой четверть круга. Для Парето-оптимальной точки M_1^* единственной подходящей линейной функцией является функция $\varphi_1(u,v) = Au$, где $A > 0$, а для Парето-оптимальной точки M_2^* — функция вида $\varphi_2(u,v) = Bv$, где $B > 0$.

Правила 5.1 и 5.2 указывают «способ перебора» Парето оптимальных точек заданного множества Q: зафиксировав положительный «вектор весов» $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и найдя максимум взвешенной суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$, получаем некоторую точку Парето-оптимального множества; в случае выпуклого множества Q все Парето-оптимальные точки множества могут быть получены таким способом при некоторых $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$.

Задача 8. *Оптимизация производственного процесса*

Любой производственный процесс формально математически можно описать парой векторов (x, y), где x — *вектор затрат* и y — *вектор выпусков*. Напрмер, если в процессе производства затрачиваются продукты n типов и выпускаются продукты m типов, то

$x = (-x_1, \dots, -x_n)$, где x_i — количество затрачиваемого продукта (ресурса) i-го типа, а y_j — количество выпускаемого продукта j-го типа ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$). Пара (x, y) называется ***вектором затрат-выпусков*** и формально отражает экономическое содержание производственного процесса. Как правило, имеющаяся производственная технология позволяет реализовать не один, а множество производственных процессов, каждому из которых соответствут свой вектор затрат-выпусков. Множество всех таких векторов затрат-выпусков называется ***производственным множеством*** (или *технологическим множеством*). С экономической точки зрения изучение производства может быть представлено как изучение структуры производственного множества. Попробуем подойти к рассмотрению структуры производственного множества с позиций многокритериальной оптимизации.

Итак, пусть производственное множество T представляет собой некоторое множество векторов в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. Что означает в данном случае доминирование по Парето? Возьмем два производственных процесса

$$\Pi^1 = (-x_1^1, \dots, -x_n^1, y_1^1, \dots, y_m^1),$$
$$\Pi^2 = (-x_1^2, \dots, -x_n^2, y_1^2, \dots, y_m^2)$$

(компоненты вектора затрат берут со знаком *минус*). Условие $\Pi^1 \overset{\text{Par}}{>} \Pi^2$ сводится к тому, что $x_i^1 \le x_i^2$ и $y_j^1 \ge y_j^2$ для всех $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$ (хотя бы одно неравенство должно быть строгим). Таким образом, производственный процесс Π^1 доминирует по Парето производственный процесс Π^2 тогда и только тогда, когда для производственного процесса Π^1 затраты продуктов (ресурсов) каждого типа не превосходят затрат при производственном процессе Π^2, а выпуск продукта каждого типа при производственном процессе Π^1 не меньше, чем при Π^2. Поэтому в случае $\Pi^1 \overset{\text{Par}}{>} \Pi^2$ всякий разумный экономист, безусловно, выберет Π^1, а не Π^2. Это дает основание *в качестве оптимальных — с экономической точки зрения — производственных процессов рассматривать Парето-оптимальные векторы множества T*. Для характеризации Парето-оптимальных векторов воспользуемся правилами 5.1 и 5.2. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ — векторы с положительными компонентами. В силу правила 5.1, получаем:

А) Всякий вектор затрат-выпусков $(x^*, y^*) = (-x_1^*, \ldots, -x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)$, который доставляет на множестве T максимум функции

$$\begin{aligned}\varphi_{(\alpha,\beta)}(x,y) &= (\alpha, x) + (\beta, y) = \\ &= (\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m) - (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n), \end{aligned} \tag{5.3}$$

является Парето-оптимальным.

В случае, когда множество T является выпуклым (с содержательной точки зрения это означает возможность «дробления» затрачиваемых и произведенных продуктов), справедливо и обратное утверждение.

Б) Если производственный процесс $(x^*, y^*) \in T$ оптимален в T по Парето, то найдутся такие векторы α и β с неотрицательными компонентами, что (x^*, y^*) доставляет максимум функции $\varphi_{(\alpha,\beta)}$ на множестве T.

Экономическая интерпретация этих утверждений такова. Векторы α и β можно рассматривать как гипотетические (назначенные произвольно) векторы цен на затрачиваемые и на выпускаемые продукты (α_i — цена единицы затрачиваемого продукта i-го типа, β_j — цена единицы выпускаемого продукта j-го типа). Тогда $\varphi_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ — прибыль от реализации производственного процесса (x, y) по ценам (α, β). Утверждение А) имеет при этом следующий экономический смысл: *всякий производственный процесс, который максимизирует прибыль при некоторых гипотетических ценах, является Парето-оптимальным.*

Утверждение Б) означает, что *всякий Парето-оптимальный производственный процесс будет максимизировать прибыль при некоторых гипотетических векторах цен α и β (в этом случае некоторые компоненты этих векторов могут быть равны нулю).*

Лекция 6. *Проблема построения обобщенного критерия в многокритериальной* **ЗПР**

• *Сложности в построении обобщенного критерия; примеры.* • *Формальное определение обобщенного критерия. Эквивалентность обобщенных критериев.* • *Локальный коэффициент замещения* (ЛКЗ). *Карта безразличий. Условия постоянства* ЛКЗ. • *Определяемость обобщенного критерия картой безразличий.* Задача 9. *Сравнение объектов по предпочтительности.*

1. Как было указано в лекции 5, задание обобщенного критерия превращает задачу многокритериальной оптимизации в задачу однокритериальной оптимизации. Первоначально кажется, что это — наиболее естественный способ. Однако, на пути построения итоговой «синтетической» оценки имеются весьма существенные, а подчас — непреодолимые препятствия.

В качестве примера возникающих здесь трудностей рассмотрим в схематическом виде задачу построения обобщенного критерия оценки некоторой реальной системы (объекта). Частные критерии оценки системы можно разбить на две группы: критерии, отражающие эффективность системы, и критерии, связанные со стоимостью системы. Предположим, что уже удалось построить обобщенный критерий эффективности ($Э$) и обобщенный критерий стоимости (C). Как теперь соединить критерии стоимости и эффективности в один критерий? Наиболее естественным представляется в качестве такой оценки рассматривать «удельную эффективность», т.е. отношение эффективности к стоимости: $u \doteq Э/C$. Так как обобщенный критерий указывает «итоговую» оценку полезности системы для принимающего решение, то по величине обобщенного критерия устанавливается предпочтение между сравниваемыми объектами.

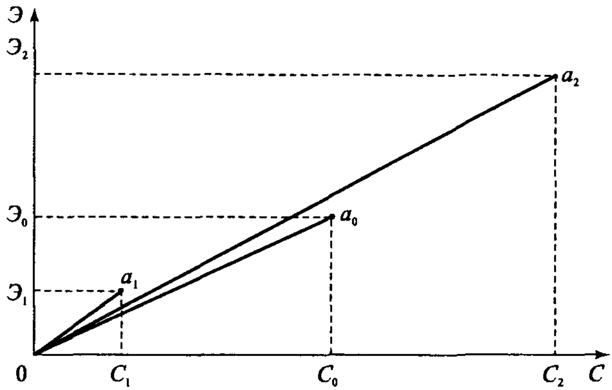


Рис. 6.1

Рассмотрим теперь показатели стоимости и эффективности для трех систем a_0, a_1, a_2, представленные на рис. 6.1. Здесь $u_0 = Э_0/C_0$, $u_1 = Э_1/C_1$, $u_2 = Э_2/C_2$, причем $u_1 > u_0$, $u_2 > u_0$. Таким образом, по обобщенному критерию $u = Э/C$ системы a_1 и a_2 являются более предпочтительными, чем система a_0. Однако система a_1 имеет очень низкую эффективность, а система a_2 — очень высокую стоимость. Ясно, что с практической точки зрения ни система a_1, ни система a_2 не могут рассматриваться как удовлетворительные. Поэтому критерий $u = Э/C$ не может претендовать на роль «адекватного» обобщенного критерия. Отметим, что даже на первом шаге — объединении всех частных критериев эффективности в единый обобщенный критерий ($Э$) можно встретиться с весьма существенными трудностями, особенно в случае наличия критериев, характеризующих объект с разных сторон (например, скорость автомобиля и его надежность).

Обратимся теперь к проблеме построения обобщенного критерия в виде взвешенной суммы частных критериев (см. формулу (5.2)). Предложено множество различных способов нахождения весовых коэффициентов, однако ни один их них не может претендовать на роль универсального. Рассмотрим в качестве примера следующий способ нахождения весовых коэффициентов:

$$\alpha_j = \frac{1}{M_j},$$

где $M_j = \max\limits_{a \in \mathcal{D}} |f_j(a)|$.

В этом случае

$$f(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{f_j(a)}{M_j}, \qquad (6.1)$$

т.е. итоговой численной оценкой исхода a является сумма нормализованных оценок по всем критериям (нормализованная оценка по j-му критерию есть отношение $f_j(a)/M_j$). На первый взгляд обобщенный критерий (6.1) представляется вполне разумным. Однако, следующий пример выявляет один существенный недостаток критерия (6.1).

Предположим, требуется сравнить два альтернативных варианта мест работы A и B, векторные оценки которых приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

	Зарплата (руб)	Длительность отпуска (дни)	Время поездки (мин)
A	900	20	−60
B	500	30	−40

Здесь $M_1 = 900$, $M_2 = 30$, $M_3 = 60$, откуда

$$f(A) = \frac{900}{900} + \frac{20}{30} - \frac{60}{60} = \frac{2}{3}; \quad f(B) = \frac{500}{900} + \frac{30}{30} - \frac{40}{60} = \frac{8}{9}.$$

Так как $f(B) > f(A)$, то альтернатива B более предпочтительна, чем альтернатива A.

Пусть теперь наряду с альтернативами A и B появилась еще одна альтернатива C, которая характеризуется векторной оценкой $(400, 60, -100)$. В этом случае $M_1' = 900$, $M_2' = 60$, $M_3' = 100$, откуда

$$f(A) = \frac{900}{900} + \frac{20}{60} - \frac{60}{100} = \frac{22}{30}; \qquad f(B) = \frac{500}{900} + \frac{30}{60} - \frac{40}{100} = \frac{59}{90};$$

$$f(C) = \frac{400}{900} + \frac{60}{60} - \frac{100}{100} = \frac{4}{9}.$$

Получаем, что теперь альтернатива A стала более предпочтительной, чем альтернатива B, т.е. порядок предпочтения альтернатив A и B получился в этом случае обратным! Итак, наличие еще одной альтернативы C меняет предпочтения между альтернативами A и B. Это парадоксальное свойство называется ***нарушением независимости предпочтений относительно посторонних альтернатив***. (При этом следует заметить, что дополнительная альтернатива C здесь не конкурирует ни с A , ни с B, так как A и B предпочтительнее, чем C.)

Подведем некоторые итоги. Принципиальная сложность построения обобщенного критерия заключена в том, что приходится «соотносить» друг с другом критерии, характеризующие объект с разных сторон; эти критерии имеют часто совершенно различную природу, в силу чего оценки по ним даются *в разных шкалах*. Построение итоговой («интегральной») оценки невозможно без соизмерения критериев между собой, что требует большой дополнительной информации об относительной важности этих критериев для принимающего решение. Как проводится построение обобщенного критерия и на базе какой дополнительной информации — это тема настоящей лекции.

2. Рассмотрим теперь в общем виде проблему построения обобщенного критерия для многокритериальных ЗПР. Ограничимся случаем двух критериев, оценки по которым будем обозначать через u и v соответственно; тогда каждая векторная оценка может быть представлена точкой на координатной плоскости (u, v). Считаем, что оба критерия являются позитивными, следовательно, целью принимающего решение будет увеличение обоих критериев.

Построение обобщенного критерия представляет собой процедуру, которая «синтезирует» пару оценок (u, v) в единую числовую оценку; формально обобщенный критерий может быть задан в виде отображения $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Главное (и, по-существу, единственное) требование, которое должно быть наложено на это отображение, состоит в том, что это отображение должно «сохранять» отношение доминирования по Парето. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение. *Под **обобщенным критерием** будем понимать отображение $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию*

$$(u_1, v_1) \overset{\mathrm{Par}}{>} (u_2, v_2) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u_1, v_1) > \varphi(u_2, v_2). \tag{6.2}$$

Замечание. Иногда рассматривают ослабленный вариант условия (6.2), состоящий в импликации

$$(u_1, v_1) \overset{\mathrm{Par}}{\geqq} (u_2, v_2) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u_1, v_1) \geq \varphi(u_2, v_2). \tag{6.3}$$

(Отношение $\overset{\mathrm{Par}}{\geqq}$ понимается как объединение отношения доминирования по Парето $\overset{\mathrm{Par}}{>}$ и отношения равенства $=$.) Например, взвешенная сумма с неотрицательными весовыми коэффициентами удовлетворяет условию (6.3), а с положительными — более сильному условию (6.2).

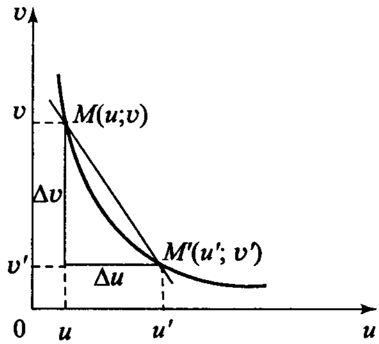


Рис. 6.2

Следующий шаг — введение понятия эквивалентности обобщенных критериев. Поскольку для обобщенного критерия φ существенным является не сама величина $\varphi(u, v)$, а соотношение типа $\varphi(u_1, v_1) \geq \varphi(u_2, v_2)$, введем следующее определение.

Определение. *Обобщенные критерии φ_1 и φ_2 называются* ***эквивалентными****, если для любых векторных оценок (u_1, v_1) и (u_2, v_2) выполняется равносильность*:

$$\varphi_1(u_1, v_1) \geq \varphi_1(u_2, v_2) \iff \varphi_2(u_1, v_1) \geq \varphi_2(u_2, v_2). \qquad (6.4)$$

Например, обобщенные критерии $\varphi_1(u, v) = 2u + 3v$, $\varphi_2(u, v) = 0,4u + 0,6v$ и $\varphi_3(u, v) = e^{2u+3v}$ эквивалентны между собой. Если φ — обобщенный критерий, то функция $\psi = \lambda \circ \varphi$, где λ — произвольная монотонно возрастающая функция, также будет обобщенным критерием, который эквивалентен критерию φ.

3. Основной нашей задачей является выявление данных, которые требуются для построения обобщенного критерия. Предположим, что обобщенный критерий $\varphi(u, v)$ построен. Тогда уравнение $\varphi(u, v) = c$ при каждом фиксированном значении константы c определяет на плоскости переменных (u, v) некоторую кривую, которая называется ***кривой безразличия***. Для любых двух точек $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$, принадлежащих одной кривой безразличия, $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$, поэтому принимающий решение будет рассматривать векторные оценки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) как равноценные.

Зафиксируем некоторую точку $M(u; v)$ и проанализируем, что происходит при переходе от точки M к точке $M'(u'; v')$ при движении по кривой безразличия (рис. 6.2). Положим $\Delta u = u' - u$,

$\Delta v = v' - v$. При переходе от точки M к точке M' оценка по первому критерию увеличивается на величину $|\Delta u|$, а оценка по второму критерию уменьшается на величину $|\Delta v|$ (заметим, что для точек, лежащих на одной кривой безразличия, Δu и Δv всегда имеют разные знаки). Так как принимающий решение рассматривает векторные оценки (u, v) и (u', v') как равноценные, то для него потеря $|\Delta v|$ единиц по второму критерию компенсируется прибавкой $|\Delta u|$ единиц по первому критерию. (В эквивалентной форме это можно выразить еще так: для принимающего решение прибавка $|\Delta v|$ единиц по второму критерию компенсирует потерю $|\Delta u|$ единиц по первому критерию.)

Положительное число $-(\Delta v/\Delta u)$, указывающее соотношение «потерь-прибавок», зависит конечно, от того, в какую точку M' мы сместимся из точки M по кривой безразличия. Чтобы исключить зависимость от точки M', надо взять «бесконечно малое смещение», т.е. перейти к пределу при условии $M' \to M$; последнее эквивалентно тому, что $\Delta u \to 0$. Итак, приходим к следующему важному понятию.

Определение. *Положительное число*

$$k = \lim_{\Delta u \to 0} \left(-\frac{\Delta v}{\Delta u} \right) \tag{6.5}$$

называется локальным коэффициентом замещения (ЛКЗ) *в точке* $M(u; v)$.

Конечно, в общем случае ЛКЗ зависит от точки M, т.е. $k = k(u, v)$.

Содержательный смысл локального коэффициента замещения заключается в следующем. Если Δu мало́, то можно считать, что $-\Delta v \approx k\Delta u$; приняв Δu за единицу, получаем $|\Delta v| = -\Delta v \approx k$. Таким образом, ЛКЗ *приблизительно равен той минимальной прибавке по второму критерию, которая компенсирует для принимающего решение потерю единицы по первому критерию* (равенство тем точнее, чем меньшей взята единица по первому критерию).

Геометрический смысл ЛКЗ ясен из рис. 6.2: так как $\Delta v/\Delta u$ есть тангенс угла наклона секущей MM' к оси абсцисс, то, переходя к пределу при $\Delta u \to 0$, получаем следующее правило.

Правило 6.1. ЛКЗ *в точке* $M(u; v)$ *равен взятому со знаком «минус» тангенсу угла наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к кривой безразличия в точке* M.

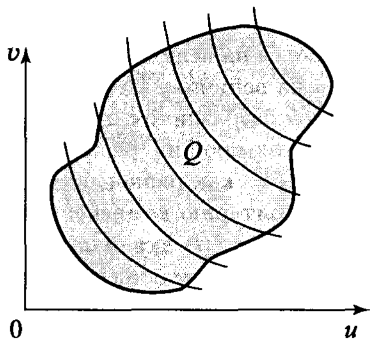


Рис. 6.3

Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ — некоторое множество векторных оценок. Из определения кривой безразличия следует, что через каждую точку $M \in Q$ проходит одна и только одна кривая безразличия. Множество всех кривых безразличия составляет *карту безразличий* в области Q; типичный вид карты безразличий представлен на рис. 6.3. Будем считать, что кривые безразличия являются гладкими (т.е. имеют касательную в каждой точке).

Правило 6.2. *Задание в области Q карты безразличий равносильно заданию* ЛКЗ *для каждой точки $M \in Q$.*

Действительно, предположим, что в области Q задана карта безразличий. Тогда для каждой точки $M(u; v) \in Q$ существует единственная проходящая через нее кривая безразличия. Взятый со знаком «минус» тангенс угла наклона касательной, проведенной к этой кривой безразличия в точке M, даст по правилу 6.1 ЛКЗ в точке M.

Обратно, пусть для каждой точки $M(u; v) \in Q$ задан соответствующий ей локальный коэффициент замещения $k(u, v)$. Тогда для каждой точки области Q известен угловой коэффициент касательной к кривой безразличия. В этом случае можно построить (при некоторых ограничениях на функцию $k(u, v)$) карту безразличий — это хорошо известный в математике способ построения интегральных кривых в заданном поле направлений.

В заключение данного пункта найдем условия, при которых ЛКЗ является постоянным.

1) Если в области векторных оценок $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ЛКЗ k постоянен, то семейство кривых, составляющих карту безразличий обобщенного критерия φ, определяется дифференциальным уравнением

$dv/du = -k$, откуда $v = -ku + c$, т.е. в этом случае карта безразличий представляет собой семейство параллельных прямых, угловой коэффициент которых равен $-k$.

2) Пусть в области Q задана карта K, состоящая из семейства параллельных прямых, имеющих отрицательный угловой коэффициент $-k$. Тогда обобщенный критерий $\varphi(u, v) = ku + v$ совместим с картой K (так как его карта безразличий состоит из линий $ku + v = c$ — прямых, имеющих угловой коэффициент $-k$, т.е. совпадает с картой K). Получаем, что в этом случае обобщенный критерий, совместимый с картой K, может быть представлен в виде взвешенной суммы критериев u и v (с положительными постоянными коэффициентами).

3) Предположим, что обобщенный критерий φ представи́м в виде взвешенной суммы: $\varphi(u, v) = \alpha u + \beta v$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — постоянные. Тогда кривые безразличия этого обобщенного критерия определяются уравнением $\alpha u + \beta v = c$, где c — постоянная, т.е. являются прямыми с угловым коэффициентом $k = -\alpha/\beta$; по правилу 6.1 в этом случае ЛКЗ равен α/β и является постоянным.

Утверждение. Следующие три условия эквивалентны между собой для произвольного обобщенного критерия φ, заданного в области векторных оценок Q.

а) Обобщенный критерий φ представи́м в виде взвешенной суммы частных критериев.

б) Карта безразличий обобщенного критерия φ состоит из семейства параллельных прямых.

в) Локальный коэффициент замещения в области Q постоянен.

Таким образом, для *представимости обобщенного критерия в виде взвешенной суммы частных критериев необходимо и достаточно постоянство* ЛКЗ. Это — очень сильное требование, которое в большинстве экономических задач не выполняется (в качестве примера см. задачи 9 и 10).

4. Перейдем теперь к решению основной задачи — выяснению дополнительной информации о частных критериях, которая необходима для построения обобщенного критерия. В принципе построение «какого-нибудь» обобщенного критерия не представляет никакого труда: например, функция $\varphi(u, v) = \alpha u + \beta v$ при любых $\alpha, \beta > 0$ всегда является обобщенным критерием, т.е. удовлетворяет условию (6.2). Дело, однако, в том, что при изменении весовых коэффициентов α, β меняются и предпочтения между векторными оценками (следовательно, и оптимальное решение в заданной области векторных оценок). Если мы хотим добиться независимости предпочтений векторных оценок от выбора конкретного обобщенного критерия, то следует ограничить класс обобщенных критериев так, чтобы любые два обобщенных критерия получались один из другого с помощью монотонно возрастающей функции. В этом случае обобщенные критерии становятся эквивалентными между собой (см. п. 2).

Сформулируем теперь основную проблему — проблему построения обобщенного критерия. Она состоит в том, чтобы *указать дополнительную информацию о критериях, которая определяет обобщенный критерий с точностью до эквивалентности.*

Предположим, что для многокритериальной ЗПР с областью векторных оценок $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ обобщенный критерий $\varphi(u, v)$ построен, тогда в области Q задается соответствующая ему карта безразличий (ее уравнение: $\varphi(u, v) = c$, где c — произвольная постоянная). Если перейти от обобщенного критерия φ к эквивалентному ему обобщенному критерию ψ, то, в силу (6.4),

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2), \tag{6.6}$$

откуда сразу следует, что для обобщенных критериев φ и ψ их карты безразличий совпадают.

Правило 6.3. *Задание в области векторных оценок Q обобщенного критерия с точностью до эквивалентности — определяет единственным образом в области Q карту безразличий.*

Осталось выяснить вопрос, в какой мере карта безразличий определяет обобщенный критерий? Для более точной постановки этого вопроса необходимо ввести следующее понятие.

Пусть в области $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ задана некоторая карта K (т.е. такое семейство кривых, что через каждую точку области Q проходит точно одна кривая этого семейства). Пусть $\varphi(u, v)$ — обобщенный критерий, заданный в области Q. Будем говорить, что обобщенный критерий φ *совместим с картой* K, если его карта безразличий в пределах области Q совпадает с картой K.

Вопрос об определяемости обобщенного критерия картой безразличий состоит из двух частей.

1) *Всегда ли по заданной карте можно построить совместимый с ней обобщенный критерий?*

2) *Будут ли критерии, совместимые с заданной картой, эквивалентными между собой?*

Решение этих вопросов сводится к решению следующих задач.

А) *Указать условия, при которых для заданной карты K существует совместимый с ней обобщенный критерий.*

Б) *Дать полное описание всех обобщенных критериев, совместимых с заданной картой K.*

Эти задачи решаются в теореме 6.1.

Сформулируем вначале условия, накладываемые на область Q и на карту K. Будем предполагать, что:

1) область Q является выпуклой;

2) карта K представляет собой однопараметрическое семейство кривых, заданных с помощью уравнения вида $\Phi(u, v, c) = 0$, где c — параметр;

3) функция Φ является непрерывно дифференцируемой в области Q;

4) в области Q выполнены условия существования неявных функций $c = c(u, v)$ и $v = v(u, c)$;

5) для функции $v(u, c)$ при любом фиксированном c выполнено условие $dv/du < 0$.

При сформулированных предположениях справедлив следующий результат.

Теорема 6.1.

(1) *Неявная функция* $c = c(u, v)$, *определенная уравнением* $\Phi(u, v, c) = 0$, *является обобщенным критерием, совместимым с картой* K;

(2) *Для того чтобы функция* $\varphi = \varphi(u, v)$ *была обобщенным критерием, совместимым с картой* K, *необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*: $\varphi = \lambda \circ c$, *где* λ — *монотонно возрастающая функция одной переменной.*

Доказательство. (1) Покажем вначале, что функция $c(u, v)$ является обобщенным критерием. В самом деле, функция $c(u, v)$ удовлетворяет тождеству $\Phi(u, v, c(u, v)) = 0$. Дифференцируя это тождество по u и по v, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial v} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial c}{\partial u} \Big/ \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Big/ \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \tag{6.7}$$

С другой стороны, функция $v = v(u, c)$ удовлетворяет тождеству $\Phi(u, v(u, c), c) = 0$; дифференцируя это тождество по u при произвольном фиксированном c, получаем $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \dfrac{dv}{du} = 0$, значит, $\dfrac{dv}{du} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \Big/ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$, и, в силу (6.7), приходим к равенству $\dfrac{\partial c}{\partial u} \Big/ \dfrac{\partial c}{\partial v} = -\dfrac{dv}{du}$. Согласно предположению 5), $\dfrac{dv}{du} < 0$, поэтому $\dfrac{\partial c}{\partial u} \Big/ \dfrac{\partial c}{\partial v} > 0$. Итак, частные производные функции $c(u,v)$ имеют одинаковый знак, т.е. они обе положительны или обе отрицательны во всех точках области Q. Меняя, в случае необходимости, знак функции $c(u,v)$, считаем далее, что $\dfrac{\partial c}{\partial u} > 0$, $\dfrac{\partial c}{\partial v} > 0$. Возьмем теперь в области Q любые две точки $M(u;v)$ и $M'(u';v')$ такие, что $(u',v') \overset{\text{Par}}{>} (u,v)$. Положим $\Delta u = u' - u$, $\Delta v = v' - v$. Выполняются неравенства $\Delta u \geq 0$, $\Delta v \geq 0$, причем по крайней мере одно неравенство строгое. Имеем

$$c(u',v') - c(u,v) = (\operatorname{grad} c) \cdot \overrightarrow{MM'},$$

где $\operatorname{grad} c$ надо взять в некоторой точке M'', лежащей между M и M' (точка M'' принадлежит области Q в силу ее выпуклости, см. условие 1)). Учитывая, что координатами вектора $\operatorname{grad} c$ являются частные производные $\dfrac{\partial c}{\partial u} > 0$, $\dfrac{\partial c}{\partial v} > 0$, а координаты вектора $\overrightarrow{MM'}$ суть $\Delta u \geq 0$ и $\Delta v \geq 0$, получаем

$$c(u',v') - c(u,v) = \frac{\partial c}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial c}{\partial v}\Delta v > 0,$$

откуда $c(u',v') > c(u,v)$.

Показали для функции $c(u,v)$ выполнимость условия (6.2), т.е. $c(u,v)$ — обобщенный критерий в области Q.

Проверим, что обобщенный критерий $c(u,v)$ совместим с картой K. Действительно, пусть точки $M_1(u_1;v_1)$ и $M_2(u_2;v_2)$ области Q лежат на одной кривой, принадлежащей карте K. Эта кривая определяется некоторым значением парметра $c = c_0$. Тогда $c(u_1,v_1) = c_0$, $c(u_2,v_2) = c_0$, откуда $c(u_1,v_1) = c(u_2,v_2)$.

(2) Пусть λ — монотонно возрастающая (в строгом смысле) функция одной переменной. Так как из условия $(u',v') \overset{\text{Par}}{>} (u,v)$ следует, что $c(u',v') > c(u,v)$, то $\lambda(c(u',v')) > \lambda(c(u,v))$, т.е. $\lambda \circ c(u',v') > \lambda \circ c(u,v)$, и получаем выполнимость условия (6.2) для функции $\lambda \circ c$. Аналогично проверяется для функции $\lambda \circ c$ условие совместимости с картой K.

Осталось показать, что если некоторая функция $\varphi(u,v)$ является обобщенным критерием, согласованным с картой K, то φ представима в виде $\varphi = \lambda \circ c$, где λ — монотонно возрастающая функция. Действительно, определим функцию λ одной переменной w следующим образом:

$$\lambda(w) = \varphi(u,v), \quad \text{где} \quad w = c(u,v). \tag{6.8}$$

Убедимся в корректности этого определния. Предположим, что $w = c(u_1,v_1)$ и $w = c(u_2,v_2)$. Тогда $c(u_1,v_1) = c(u_2,v_2)$, т.е. точки $M_1(u_1;v_1)$ и $M_2(u_2;v_2)$ лежат на одной кривой, принадлежащей карте K. Согласно условию совместимости обобщенного критерия φ с картой K, получаем $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_2,v_2)$. Проверим, что функция λ яв-

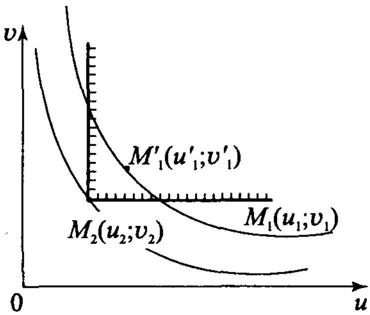


Рис. 6.4

ляется монотонно возрастающей. Пусть $w_1 > w_2$, т.е. найдутся такие точки $M_1(u_1;v_1)$ и $M_2(u_2;v_2)$, что $w_1 = c(u_1,v_1)$, $w_2 = c(u_2,v_2)$ и $c(u_1,v_1) > c(u_2,v_2)$. Из вида карты безразличий ясно, что на кривой безразличия, проходящей через точку M_1, должна найтись такая точка $M_1'(u_1';v_1')$, которая сравнима по Парето с точкой $M_2(u_2;v_2)$, т.е. выполняется $(u_1',v_1') \overset{\text{Par}}{>} (u_2,v_2)$ или $(u_2,v_2) \overset{\text{Par}}{>} (u_1',v_1')$ (рис. 6.4). Условие $(u_2,v_2) \overset{\text{Par}}{>} (u_1',v_1')$ влечет $c(u_2,v_2) > c(u_1',v_1') = c(u_1,v_1)$, что приводит к противоречию. Таким образом, $(u_1',v_1') \overset{\text{Par}}{>} (u_2,v_2)$, и так как φ — обобщенный критерий, то $\varphi(u_1',v_1') > \varphi(u_2,v_2)$. Учитывая, что точки $M_1(u_1;v_1)$ и $M_1'(u_1';v_1')$ лежат на одной кривой безразличия, получаем по условию совместимости φ с картой K: $\varphi(u_1,v_1) = \varphi(u_1',v_1')$, откуда $\varphi(u_1,v_1) > \varphi(u_2,v_2)$, т.е. $\lambda(w_1) > \lambda(w_2)$. Остается заметить, что, в силу (6.8), $\varphi(u,v) = \lambda(c(u,v))$, т.е. $\varphi = \lambda \circ c$. Теорема 6.1 доказана полностью.

На основании теоремы 6.1 получаем важное следствие.

Следствие 1. *Пусть φ_1 и φ_2 — два обобщенных критерия, совместимые с картой K. Тогда критерии φ_1 и φ_2 эквивалентны (в смысле определения, данного в п. 2).*

В самом деле, по теореме 6.1 каждый из этих обобщенных критериев может быть представлен в виде: $\varphi_1 = \lambda_1 \circ c$, $\varphi_2 = \lambda_2 \circ c$, где λ_1, λ_2 — монотонно возрастающие функции. Пусть для двух точек $M_1(u_1;v_1)$, $M_2(u_2;v_2)$ области Q выполняется неравенство $\varphi_1(u_1,v_1) \geq \varphi_1(u_2,v_2)$, тогда $\lambda_1(c(u_1,v_1)) \geq \lambda_1(c(u_2,v_2))$. В силу строгой монотонности функции λ_1, это соотношение равносильно тому, что $c(u_1,v_1) \geq c(u_2,v_2)$, а в силу строгой монотонности функции λ_2, последнее равносильно неравенству $\lambda_2(c(u_1,v_1)) \geq \lambda_2(c(u_2,v_2))$, т.е. условию $\varphi_2(u_1,v_1) \geq \varphi_2(u_2,v_2)$.

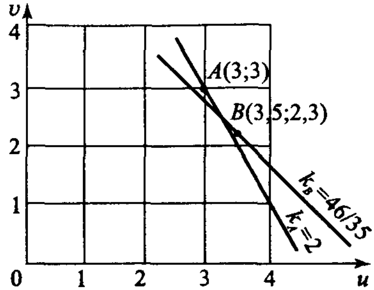


Рис. 6.5

Утверждение, обратное следствию 1, также справедливо и устанавливается очень легко: если обобщенные критерии φ_1 и φ_2 эквивалентны, то для них карты безразличий совпадают, и оба они совместимыми с общей для них картой.

Итак, приходим к следующему принципиальному выводу.

Правило 6.4. *Карта безразличий определяет обобщенный критерий с точностью до эквивалентности.*

На основании правил 6.2–6.4 можно дать полный ответ на основной вопрос данной лекции: *дополнительная информация относительно частных критериев, которая требуется для построения в области Q обобщенного критерия, определенного с точностью до эквивалентности, состоит в задании в этой области карты безразличий (что, в силу правила 6.2, равносильно заданию* ЛКЗ *в каждой точке области Q).*

Задача 9. *Сравнение объектов по предпочтительности.*

Пусть оценка некоторых реальных систем (объектов) производится по двум критериям: u и v. Предположим, что известен локальный коэффициент замещения в любой точке $M(u; v)$ области Q векторных оценок, т.е. ЛКЗ задан в виде функции $k = k(u, v)$. Как сравнить по предпочтительности два объекта, для которых даны их векторные оценки?

Рассмотрим в качестве примера задачу сравнения объектов $A(3; 3)$ и $B(3,5; 2,3)$, где $k(u, v) = 2v/u$. Считаем, что оба критерия являются позитивными, а область Q состоит из всех пар (u, v), где $u, v > 0$ (рис. 6.5).

Попробуем вначале сравнить объекты A и B по предпочтительности, используя известные соотношения «потерь–прибавок». В точке A ЛКЗ имеем $k_A = (2 \cdot 3)/3 = 2$. Таким образом, при смещении из точки A в другую точку области Q прибавка одной единицы по первому критерию компенсирует для принимающего решение потерю двух единиц по второму критерию. В рассматриваемом случае, переходя из точки $A(3;3)$ в точку $B(3,5;2,3)$, мы получаем прибавку по первому критерию в $0,5$ ед., которая, в силу сказанного выше, будет компенсировать потерю одной единицы по второму критерию; фактически же при переходе от A к B мы теряем всего $0,7$ ед. по второму критерию. Таким образом, объект B должен считаться для принимающего решение более предпочтительным, чем объект A (т.е. $B \succ A$).

Проанализируем теперь переход от B к A. В точке B ЛКЗ имеем

$$k_B = \frac{2 \cdot 2,3}{3,5} = \frac{46}{35}.$$

Значит, при смещении из точки B в другую точку области Q потеря единицы по первому критерию компенсируется для принимающего решение прибавкой $46/35$ единиц по второму критерию. В данном случае, переходя от B к A, мы теряем $0,5$ ед. по первому критерию, что в силу сказанного, компенсируется прибавкой в $23/35 \approx 0,66$ ед. по второму критерию; фактически же мы имеем прибавку по второму критерию в $0,7$ ед. В итоге получается, что объект A предпочтительнее для принимающего решение, чем объект B $(A \succ B)$.

Итак, мы пришли к парадоксу, причина которого кроется в том, что в области Q ЛКЗ *является переменным*, значит, при переходе от A к B он *непрерывно меняется*, а в проведенных рассуждениях мы считали ЛКЗ либо в точке A, либо в точке B, т.е. рассматривали его как постоянный.

Правильное решение задачи состоит в следующем. При переменном ЛКЗ, заданном в виде функции $k = k(u,v)$, вначале находят карту безразличий, на основе которой строят обобщенный критерий (см. теорему 6.1). Для нахождения карты безразличий надо использовать правило 6.1. Так как угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой безразличия в произвольной точке $M(u;v)$ области Q, равен $-k(u,v)$, то можно составить дифференциальное уравнение для кривых безразличия:

$$\frac{dv}{du} = -k(u,v). \tag{6.9}$$

Каждая интегральная кривая уравнения (6.9) представляет собой кривую безразличия, а однопараметрическое семейство всех интегральных кривых, рассматриваемых в области Q, составляет карту безразличий. Таким образом, *при заданном в аналитической форме* ЛКЗ *задача построения карты безразличий сводится к задаче интегрирования диференциального уравнения* (6.9).

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение кривых безразличия принимает следующий вид: $\dfrac{dv}{du} = -\dfrac{2v}{u}$. Разделяя пременные, имеем $\dfrac{dv}{v} = -2\dfrac{du}{u}$, откуда, интегрируя, получаем $u^2v = c$. Последнее соотношение при любом фиксированном $c > 0$ определяет кривую безразличия, а семейство всех таких кривых в области Q образует карту безразличий K. Согласно теореме 6.1 (легко проверить, что все условия теоремы 6.1 здесь выполнены), функция $c(u, v) = u^2v$ является обобщенным критерием, совместимым с картой K (значит, и с ЛКЗ $k(u, v) = 2v/u$). Находим: $c(A) = 3^2 \cdot 3 = 27$, $c(B) = 3,5^2 \cdot 2,3 \approx 28,2$. Таким образом, по обобщенному критерию $c(u, v) = u^2v$ (значит, и по любому обобщенному критерию, имеющему в качестве ЛКЗ функцию $k(u, v) = 2v/u$), объект B будет более предпочтительным, чем объект A.

Замечание. Согласно теореме 6.1, в качестве обобщенного критерия, совместимого с картой K, может быть взята любая функция, имеющая вид суперпозиции $\lambda \circ c$, где λ — монотонно возрастающая функция одной переменной. Например, взяв $\lambda(w) = \sqrt{w}$, получаем обобщенный критерий $c_1(u, v) = u\sqrt{v}$.

Лекция 7. *Задачи, решаемые при наличии карты безразличий*

• *Построение карты безразличий по значениям* ЛКЗ *в узловых точках.* • *Введение линейного квазиупорядочения множества векторных оценок, снабженного картой безразличий. Единственность линейного квазипорядка на множестве векторных оценок. Нахождение оптимального исхода при заданной карте безразличий.* • Задача 10. *Исследование потребительских предпочтений.*

1. Метод построения карты безразличий, рассмотренный при решении задачи 9, осуществим только тогда, когда ЛКЗ задается в аналитической форме, т. е. в виде функции $k = k(u, v)$. К сожалению, это бывает достаточно редко (например, тогда, когда ЛКЗ может быть найден из некоторых теоретических соображений). В большинстве практических случаев карта безразличий для двухкритериальной ЗПР может быть построена лишь приближенно на основе получаемой от принимающего решение дополнительной информации о замещениях между критериями.

Один из таких методов состоит в следующем. Рассмотрим задачу принятия решения с двумя критериям, оценки по которым обозначим через u и v. Пусть $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. На координатной плоскости (u, v) построим прямоугольник Π, проекции которого на координатные оси u и v совпадают с интервалами $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Далее, разобьем интервал $[a, b]$ на n равных частей: $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b$, взяв одну такую часть за единицу измерения первого критерия (рис. 7.1). Проведем через каждую точку деления прямую $u = u_i$ $(i = \overline{1, n})$, параллельную оси ординат.

Теперь построим *часть* кривой безразличия, лежащую между прямыми $u = u_{i-1}$, $u = u_{i+1}$ и проходящую через точку $(u_i; v_j)$. Отметим на прямой $u = u_{i+1}$ точку $(u_{i+1}; v_{j-1})$ так, чтобы разность $v_j - v_{j-1}$ была равна ЛКЗ в точке $(u_i; v_j)$. (Напомним, что знание ЛКЗ в точке $(u_i; v_j)$ эквивалентно наличию следующей информа-

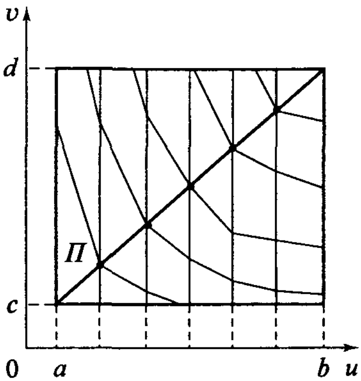


Рис. 7.1

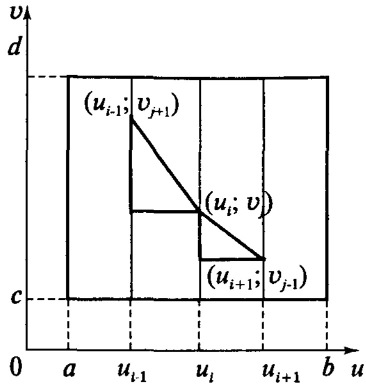


Рис. 7.2

ции: для векторной оценки $(u_i; v_j)$ — чему равна уступка по второму критерию, которая компенсируется прибавкой единицы по первому критерию? Эта информация не является формализованной и должна быть получена дополнительно от принимающего решение.) Аналогично на прямой $u = u_{i-1}$ отметим точку $(u_{i-1}; v_{j+1})$, для которой разность $v_{j+1} - v_j$ равна ЛКЗ в точке $(u_{i-1}; v_{j+1})$ (рис. 7.2). Ломаная с вершинами $(u_{i-1}; v_{j+1})$, $(u_i; v_j)$, $(u_{i+1}; v_{j-1})$ представляет собой *кусочно-линейную аппроксимацию* части кривой безразличия, лежащей между прямыми $u = u_{i-1}$ и $u = u_{i+1}$ и проходящей через точку $(u_i; v_j)$.

Чтобы построить приближенно карту безразличий в прямоугольнике Π, поступим следующим образом. Проведем в прямоугольнике Π диагональ, соединяющую левую нижнюю вершину с правой верхней. В качестве «опорных узлов» возьмем точки пересечения диагонали с прямыми $u = u_i$ $(i = \overline{1, n})$. Для каждого опорного узла строим указанным выше способом узлы на соседних прямых до тех пор, пока не дойдем до одной из прямых $u = a$, $u = b$, $v = c$, $v = d$. Соединяя полученные узлы ломаной, получаем «картинку» вроде приведенной на рис. 7.1. Она представляет собой *кусочно-линейную аппроксимацию карты безразличий в прямоугольнике Π*. Точность аппроксимации возрастает с уменьшением шага $h = u_i - u_{i-1}$, т.е. с уменьшением единицы измерения первого критерия. Однако увеличение точности карты возможно лишь при условии получения достоверной информации от принимающего решение относительно величин ЛКЗ во всех узлах (число узлов имеет порядок n^2 и быстро растет с уменьшением шага).

Замечание. С некоторыми усложнениями данный метод может быть использован для построения карты безразличий при наличии трех критериев (в этом случае возникают не кривые, а поверхности безразличия). При числе критериев больше трех указанный метод неприменим.

2. Предположим теперь, что в некоторой области векторных оценок $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ карта безразличий может быть построена (т.е. для каждой точки области Q можно построить проходящую через нее кривую безразличия). Согласно теореме 6.1, это дает принципиальную возможность задать обобщенный критерий с точностью до монотонно возрастающей функции. Однако, большинство задач, связанных с векторными оценками по двум критериям, можно решить без построения обобщенного критерия, используя только карту безразличий. Рассмотрим две важнейшие задачи.

Задача 1. *Сравнить по предпочтению две векторные оценки из области Q.*

Решение. Покажем, как устанавливается предпочтение между векторными оценками (без построения обобщенного критерия) для области Q, снабженной картой безразличий. Пусть (u_1, v_1), (u_2, v_2) — две векторные оценки из области Q. Возможны три случая.

а) *Векторные оценки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) сравнимы по Парето.* Пусть например, $(u_1, v_1) \overset{\text{Par}}{>} (u_2, v_2)$. Тогда векторная оценка (u_1, v_1) будет более предпочтительной (в строгом смысле), чем векторная оценка (u_2, v_2): $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$.

Замечание. При изображении на координатной плоскости векторные оценки, сравнимые по Парето с векторной оценкой (u_1, v_1), располагаются от нее либо в «северо-восточном», либо в «юго-западном» направлении; остальные векторные оценки несравнимы с ней по Парето (рис. 7.3)

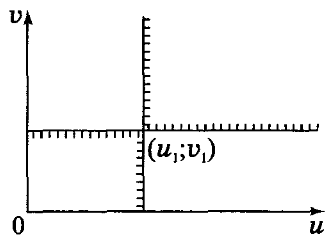


Рис. 7.3

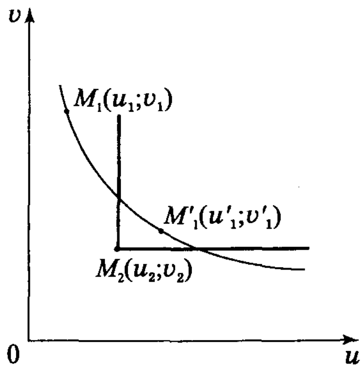


Рис. 7.4

б) *Точки* $M_1(u_1; v_1)$ *и* $M_2(u_2; v_2)$ *лежат на одной кривой безразличия.* Тогда векторные оценки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) считаются эквивалентными для принимающего решение (записывается $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$). Содержательно это означает, что для принимающего решение безразлично, что выбирать: исход, имеющий векторную оценку (u_1, v_1), или исход, векторная оценка которого (u_2, v_2).

в) *Векторные оценки* (u_1, v_1) *и* (u_2, v_2) *несравнимы по Парето и не лежат на одной кривой безразличия.* Рассмотрим проходящую через точку $M_1(u_1; v_1)$ кривую безразличия. Так как точка $M_2(u_2; v_2)$ не лежит на этой кривой, то она располагается выше или ниже нее. Рассмотрим, например, случай, когда точка $M_2(u_2; v_2)$ располагается ниже указанной кривой безразличия. Тогда, двигаясь по кривой безразличия от точки M_1 вниз, мы обязательно найдем на ней такую точку $M_1'(u_1'; v_1')$, для которой векторная оценка (u_1', v_1') доминирует по Парето векторную оценку (u_2, v_2) : $(u_1', v_1') \overset{\text{Par}}{>} (u_2, v_2)$ (рис. 7.4). Согласно п. а) выполняется условие $(u_1', v_1') \succ (u_2, v_2)$, а согласно п. б) — условие $(u_1, v_1) \sim (u_1', v_1')$; в результате получаем $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$.

Построенное отношение предпочтения может быть определено следующее простым правилом.

Правило 7.1. *Для любых двух векторных оценок* (u_1, v_1), (u_2, v_2) *области* Q:

1) *условие* $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$ *выполняется тогда и только тогда, когда точка* $M_1(u_1, v_1)$ *лежит на более высокой кривой безразличия, чем точка* $M_2(u_2, v_2)$;

2) *условие* $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$ *выполняется тогда и только тогда, когда точки* $M_1(u_1, v_1)$ *и* $M_2(u_2, v_2)$ *лежат на одной кривой безразличия.*

Замечание. Запись $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$ читается так: «векторная оценка (u_1, v_1) является *более предпочтительной*, чем векторная оценка (u_2, v_2)»; $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$ — «векторная оценка (u_1, v_1) *эквивалентна по предпочтительности* векторной оценке (u_2, v_2)». Условие $(u_1, v_1) \succsim (u_2, v_2)$ означает, что выполняется $(u_1, v_1) \succ (u_2, v_2)$ или $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$; оно может быть прочитано так: «векторная оценка (u_1, v_1) является *не менее предпочтительной*, чем векторная оценка (u_2, v_2)». Отношение $\succ$ называется ***отношением строгого предпочтения***, $\succsim$ — ***отношением нестрогого предпочтения***, $\sim$ — ***отношением эквивалентности предпочтений***.

Теперь выясним основные свойства построенного отношения предпочтения $\succsim$. Во-первых, оно устанавливает *полное ранжирование* множества векторных оценок, при котором любые две векторные оценки сравнимы между собой по предпочтению. Формально это означает выполнимость для отношения предпочтения $\succsim$ следующих двух аксиом.

(1) *Аксиома транзитивности*: для любых трех векторных оценок (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) области Q из условий $(u_1, v_1) \succsim (u_2, v_2)$ и $(u_2, v_2) \succsim (u_3, v_3)$ следует $(u_1, v_1) \succsim (u_3, v_3)$.

(2) *Аксиома линейности (сравнимости)*: любые две векторные оценки $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ области Q сравнимы между собой, т.е. $(u_1, v_1) \succsim (u_2, v_2)$ или $(u_2, v_2) \succsim (u_1, v_1)$.

В математике отношения, удовлетворяющие указанным двум аксиомам, принято называть ***отношениями линейного квазипорядка***. Таким образом, *построенное отношение предпочтения векторных оценок $\succsim$ является отношением линейного квазипорядка.*

Далее, из построения отношения предпочтения $\succsim$ видно, что оно удовлетворяет следующим двум дополнительным условиям:

(A_1) *отношение Парето-доминирования* $\overset{\text{Par}}{>}$ *содержится в отношении строгого предпочтения* $\succ$;

(A_2) *соотношение* $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2)$ *выполняется тогда и только тогда, когда точки* $M_1(u_1, v_1)$ *и* $M_2(u_2, v_2)$ *лежат на одной кривой безразличия.*

Сформулируем теперь следующий принципиальный результат.

Теорема 7.1. *Пусть $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ — множество векторных оценок, на котором задана карта безразличий. Существует единственное отношение линейного квазипорядка на множестве Q, удовлетворяющее дополнительным условиям (A_1) и (A_2).*

Для доказательства теоремы 7.1, установим одно вспомагательное утверждение, относящееся к отношениям линейного квазипорядка. Для отношения квазипорядка ρ будем через ε_ρ обозначать его симметричную часть, т. е. отношение эквивалентности $\varepsilon_\rho = \rho \cap \rho^{-1}$.

Лемма 7.1. *Для любых отношений линейного квазипорядка ρ_1, ρ_2 справедлива следующая импликация:*

$$\rho_1 \subseteq \rho_2, \quad \varepsilon_{\rho_1} = \varepsilon_{\rho_2} \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2. \tag{7.1}$$

Доказательство. Достаточно показать, что при выполнении условия импликации (7.1) имеет место включение $\rho_2 \subseteq \rho_1$. В самом деле, пусть $(a_1, a_2) \in \rho_2$. Надо проверить, что $(a_1, a_2) \in \rho_1$. Возможны два случая.

Случай 1. $(a_1, a_2) \in \varepsilon_{\rho_2}$. Тогда $(a_1, a_2) \in \varepsilon_{\rho_1} \subseteq \rho_1$.

Случай 2. $(a_1, a_2) \notin \varepsilon_{\rho_2}$. Предположим, что $(a_1, a_2) \notin \rho_1$. Тогда, по аксимоме линейности, выполняется $(a_2, a_1) \in \rho_1$ и, в силу включения $\rho_1 \subseteq \rho_2$, получаем $(a_2, a_1) \in \rho_2$.

Так как по предположению имеет место $(a_1, a_2) \in \rho_2$, то получаем $(a_1, a_2) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1} = \varepsilon_{\rho_2}$, что ведет к противоречию. Итак, $(a_1, a_2) \in \rho_1$ и импликация (7.1) установлена.

Вернемся к доказательству теоремы 7.1. Пусть $\overset{\rho}{\succsim}$ — произвольное отношение линейного квазипорядка, заданное на множестве векторных оценок Q. Предположим, что отношение $\overset{\rho}{\succsim}$ удовлетворяет рассмотренным выше дополнительным условиям:

(A_1) отношение доминирования по Парето $\overset{\mathrm{Par}}{>}$ содержится в отношении $\overset{\rho}{\succ}$;

(A_2) соотношение $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\sim} (u_2, v_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда точки $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$ лежат на одной кривой безразличия.

Покажем, что построенное при решении задачи 1 отношение предпочтения векторных оценок $\succsim$ содержится в отношении $\overset{\rho}{\succsim}$. Действительно, пусть $(u_1, v_1) \succsim (u_2, v_2)$. Тогда возможны три случая.

а) $(u_1, v_1) \overset{\mathrm{Par}}{>} (u_2, v_2)$;

б) точки $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$ лежат на одной кривой безразличия;

в) существует такая векторная оценка $(u_1', v_1') \in Q$, что точки $M_1(u_1; v_1)$ и $M_1'(u_1'; v_1')$ лежат на одной кривой безразличия и $(u_1', v_1') \overset{\mathrm{Par}}{>} (u_2, v_2)$.

В случае а) согласно условию (A_1) получаем $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\succ} (u_2, v_2)$. В случае б) согласно условию (A_2) имеем $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\sim} (u_2, v_2)$. Наконец, в случае в) согласно (A_2) имеет место $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\sim} (u_1', v_1')$, а согласно (A_1) получаем $(u_1', v_1') \overset{\rho}{\succ} (u_2, v_2)$, откуда $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\succ} (u_2, v_2)$.

Таким образом, в любом случае $(u_1, v_1) \overset{\rho}{\succsim} (u_2, v_2)$, т.е. отношение предпочтения $\succsim$ содержится в отношении $\overset{\rho}{\succsim}$. Так как симметричные части этих отношений представляют собой эквивалентности, классами которых служат кривые безразличия, то эти эквивалентности совпадают. В силу леммы 7.1, отношение линейного квазипорядка $\overset{\rho}{\succsim}$ совпадает с квазипорядком $\succsim$, что и заканчивает доказательство теоремы 7.1.

Построенное при решении задачи 1 отношение предпочтения векторных оценок $\succsim$ будем называть ***каноническим линейным квазипорядком на множестве векторных оценок***. По теореме 7.1 *всякое отношение линейного квазипорядка на Q, удовлетворяющее условиям (A_1) и (A_2), совпадает с каноническим линейным квазипорядком.*

Установим теперь связь между предпочтением, задаваемым каноническим линейным квазипорядком, и предпочтениями, которые определяются с помощью обобщенных критериев.

Пусть φ — какой-нибудь обобщенный критерий, определенный на множестве векторных оценок Q и совместимый с заданной на Q картой безразличий. Рассмотрим отношение предпочтения векторных оценок $\overset{\varphi}{\succsim}$, устанавливаемое по величине обобщенного критерия φ:

$$(u_1, v_1) \overset{\varphi}{\succsim} (u_2, v_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(u_1, v_1) \geq \varphi(u_2, v_2). \tag{7.2}$$

Ясно, что $\overset{\varphi}{\succsim}$ — отношение линейного квазипорядка на Q. Соотношение $(u_1, v_1) \overset{\varphi}{\sim} (u_2, v_2)$ означает, что $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ и, по условию совместимости с картой безразличий, отсюда следует, что точки $M_1(u_1; v_1)$ и $M_2(u_2; v_2)$ лежат на одной кривой безразличия; таким образом, условие (A_2) здесь выполнено.

Далее, если $(u_1, v_1) \overset{\text{Par}}{>} (u_2, v_2)$, то, согласно (6.2), $\varphi(u_1, v_1) > > \varphi(u_2, v_2)$; последнее эквивалентно тому, что $(u_1, v_1) \overset{\varphi}{\succ} (u_2, v_2)$ и получаем, что условие (A_1) также выполнено. На основании теоремы 7.1 имеем следующее следствие.

Следствие. *Отношение предпочтения векторных оценок, устанавливаемое по любому обобщенному критерию, совместимому с картой безразличий, совпадает с каноническим квазипорядком* $\underset{\sim}{>}$.

Итак, получаем следующее правило.

Правило 7.2. *При введении предпочтений на множестве векторных оценок — будем ли мы его вводить с помощью обобщенного критерия, совместимого с картой безразличий, или с помощью некоторого линейного квазипорядка, удовлетворяющего условиям* (A_1) *и* (A_2), *— оно совпадет с предпочтением, определяемым каноническим квазипорядком.*

В заключение данного пункта рассмотрим еще одну задачу, решаемую при наличии карты безразличий.

Задача 2. *В области векторных оценок* Q, *снабженной картой безразличий, найти наиболее предпочтительную векторную оценку.*

Решение. На основании правил 7.2 и 7.1 получаем, что наиболее предпочтительной будет векторная оценка (u^*, v^*), для которой точка $M^*(u^*; v^*)$ находится в области Q и лежит на самой «высокой» кривой безразличия, еще пересекающей область Q. (Здесь имеется очевидная аналогия с нахождением максимума функции двух переменных с помощью линий уровня — см. лекцию 3. Разница состоит в том, что при нахождении максимума функции линии уровня строятся *по заданной функции* $f(x, y)$, а кривые безразличия — на основе информации о замещениях между критериями, получаемой от принимающего решение.) Указанный способ нахождения наиболее предпочтительной векторной оценки иллюстрирует рисунок 7.5.

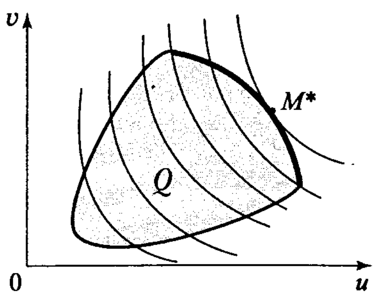


Рис. 7.5

3. Рассмотрим типичную экономическую задачу, решение которой может быть получено с помощью построения карты безразличий.

Задача 10. *Исследование потребительских предпочтений.*

Эта задача состоит из двух частей:

а) *построение отношения предпочтения наборов потребительских благ*;

б) *нахождение оптимального набора потребительских благ.*

Под ***потребительскими благами*** в экономике понимают товары, продукты и услуги. Для унификации терминологии будем далее использовать термин «товары». Если перенумеровать все мыслимые товары, то всякий набор товаров можно представить в виде вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \geq 0$ — количество i-го товара в этом наборе.

Основной постулат, принимаемый в экономике, состоит в том, что ***каждый потребитель имеет отношение предпочтения*** $\overset{\text{cons}}{\succsim}$ ***на множестве потребительских наборов*** (cons — от англ. consumer — потребитель).

Выявление (построение) отношения предпочтения данного потребителя является непростой задачей. Опишем подход к ее решению, при этом ограничимся случаем $n = 2$, т.е. будем рассматривать наборы, состоящие из двух товаров T_1 и T_2. Всякий набор товаров T_1 и T_2 может быть задан в виде пары неотрицательных чисел (x_1, x_2), где x_1 — количество товара T_1 и x_2 — количество товара T_2. Множество таких наборов можно отождествить с множеством векторных оценок по двум критериям (в качестве первого критерия выступает количество товара T_1, а в качестве второго критерия — количество товара T_2). Тогда при решении задачи нахождения предпочтений потребителя можно использовать полученные в данном пункте результаты о структуре отношения предпочтения векторных оценок.

Перечислим свойства, которыми обладает отношение предпочтения $\overset{\text{cons}}{\succsim}$. Во-первых, оно должно быть *отношением линейного квазипорядка*, т.е. удовлетворять аксиомам транзитивности и линейности. Во-вторых, отношение предпочтения $\overset{\text{cons}}{\succsim}$ обладает тем свойством, что при увеличении компонент потребительского набора его предпочтение для потребителя возрастает, т.е. *если* $x_1 \geq x_1'$

и $x_2 \geq x'_2$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое, то

$$(x_1, x_2) \overset{\text{cons}}{\succ} (x'_1, x'_2). \tag{7.3}$$

В экономике аксиому (7.3) называют ***аксиомой ненасыщения***. Формально условие импликации (7.3) означает, что набор (x_1, x_2) доминирует по Парето набор (x'_1, x'_2). Таким образом, аксиома ненасыщения эквивалентна тому,что отношение $\overset{\text{cons}}{\succ}$ строгого предпочтения потребительских наборов содержит отношение $\overset{\text{Par}}{>}$ доминирования по Парето.

Итак, с формальной точки зрения задача 10,а) состоит в том, что на множестве потребительских наборов надо построить отношение предпочтения $\overset{\text{cons}}{\succsim}$, которое должно являться линейным квазипорядком и содержать отношение доминирования по Парето.

Подчеркнем, что здесь речь идет не о том, чтобы построить какое-нибудь отношение предпочтения, удовлетворяющее указанным условиям, а о том, чтобы *найти* (или, как говорят, «*выявить*») уже имеющееся отношение предпочтения. Предположим, что на множестве потребительских наборов удалось построить отношение предпочтения $\overset{\text{cons}}{\succsim}$ некоторого потребителя. Тогда будет определена и симметричная часть этого отношения $\overset{\text{cons}}{\sim}$. С другой стороны, как мы видели при доказательстве теоремы 7.1, всякое линейное квазиупорядочение векторных оценок, содержащее Парето-доминирование, однозначно определяется своей симметричной частью (задание которой сводится к построению в области векторных оценок карты безразличий).

Вывод. ***Необходимым и достаточным условием выявления отношения предпочтения потребителя на заданном множестве потребительских наборов является нахождение на этом множестве его карты безразличий.***

Согласно правилу 6.2, построение карты безразличий в некоторой области эквивалентно заданию ЛКЗ в каждой точке этой области. В рассматриваемом случае ЛКЗ в точке $(x_1; x_2)$ имеет следующий содержательный смысл: он указывает приблизительное количество товара T_2, потеря которого компенсируется для потребителя увеличением на единицу количества товара T_1 в наборе (x_1, x_2); при этом равенство будет тем более точным, чем меньше взята единица товара T_1. В экономике указанный локальный коэффициент замещения называется ***предельной нормой замещения*** и обозначается через MRS (от англ. Marginal Rate of Substitution).

Имеет место следующее важное свойство локального коэффициента замещения: *по мере движения вправо вдоль оси абсцисс* ЛКЗ *уменьшается*, что соответствует общеизвестному принципу: *при увеличении количества продукта его ценность для потребителя уменьшается, а при уменьшении количества продукта его ценность увеличивается.* (Например, если у путешественника имеется одна буханка хлеба, то потеря 50 г хлеба для него будет малосущественной, но если у него всего 100 г хлеба, то потеря тех же 50 г весьма ощутима.)

Заметим, что указанное уменьшение величины ЛКЗ влечет *выпуклость кривой безразличия* (см. рис. 6.3); крайний случай — когда кривые безразличия превращаются в прямые. Этот случай соответствует тому, что ЛКЗ является постоянным (см. лекцию 6, п. 3).

В рамках рассматриваемой задачи условие, что ЛКЗ есть константа k, означает согласие потребителя компенсировать потерю k ед. товара T_2 увеличением на единицу количества товара T_1 *в любом наборе*, т. е. независимо от количества товара T_1 и T_2. Очевидно, что на практике это условиее осуществляется очень редко, т. е. как правило, ЛКЗ является переменным.

Итак, *при задании в области потребительских наборов карты безразличий искомое отношение предпочтения* $\overset{\text{cons}}{\succsim}$ *потребительских наборов определяется однозначно и представляется в следующем виде: набор (x_1, x_2) является для потребителя более предпочтительным, чем набор (x_1', x_2') тогда и только тогда, когда точка $M_1(x_1; x_2)$ лежит на более «высокой» кривой безразличия, чем точка $M_1'(x_1'; x_2')$. В случае, когда эти точки лежат на одной кривой безразличия, данные наборы считаются эквивалентными, т. е. потребителю безразлично — какой из этих наборов выбирать.*

Рассмотрим теперь решение задачи 10,б) — нахождения оптимального потребительского набора. При решении задачи 10,а) мы учитывали только желания (предпочтения) потребителя и не учитывали его возможностей. Между тем, возможности реального потребителя всегда ограничены, причем ограничивающими факторами здесь являются цены на товары и доход потребителя (под доходом понимается сумма, которую потребитель может потратить на приобретение какого-либо набора потребительских благ). Пусть $p = (p^1, \dots, p^n)$ — вектор цен, где p^i — цена единицы товара i, тогда стоимость набора $x = (x_1, \dots, x_n)$ выражается в виде скалярного произведения (p, x). Обозначим через d доход потребителя. Множество наборов x, которые потребитель может приобрести, задается неравенством

$$(p, x) \le d, \tag{7.4}$$

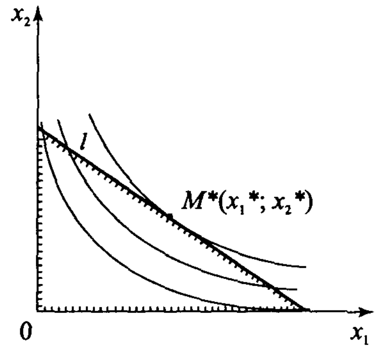


Рис. 7.6

которое называется ***бюджетным ограничением***. Задачу 10,б) теперь можно точно сформулировать в следующем виде.

При заданном векторе цен p и заданном доходе d в множестве всех потребительских наборов, удовлетворяющих бюджетному ограничению (7.4), *найти наиболее предпочтительный набор.*

Для случая двух товаров решение сформулированной задачи можно получить следующим образом. Полагая $p = (p^1, p^2)$, $x = (x_1, x_2)$, получаем, что бюджетное ограничение принимает здесь вид неравенства: $p^1x_1 + p^2x_2 \leq d$, причем по смыслу должно быть $x_1, x_2 \geq 0$.

Таким образом, геометрически область $\mathcal{D}$ потребительских наборов, удовлетворяющих бюджетному ограничению, представляет собой треугольник, ограниченный прямой (l) : $p^1x_1 + p^2x_2 = d$ и осями декартовой системы координат (рис. 7.6). Построим карту безразличий потребителя в области $\mathcal{D}$. Наиболее предпочтительным (оптимальным) из наборов, удовлетворяющих бюджетному ограничению, является набор (x_1^*, x_2^*), для которого проходящая через точку $M^*(x_1^*; x_2^*)$ кривая безразличия касается граничной прямой (l) (см. рис. 7.6). Так как для прямой (l) тангенс угла ее наклона к оси абсцисс равен $-p^1/p^2$, то в точке $M^*(x_1^*; x_2^*)$ тангенс угла наклона касательной к кривой безразличия равен $-p^1/p^2$. С другой стороны, по правилу 6.1 локальный коэффициент замещения в точке M^* равен взятому со знаком «минус» тангенсу угла наклона касательной к кривой безразличия в этой точке, откуда для точки M^* ЛКЗ равен p^1/p^2. Итак, получаем следующее **правило**:

в точке, являющейся оптимальным выбором потребителя, локальный коэффициент замещения равен отношению цен.

РЕЗЮМЕ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I. Построение математической модели задачи принятия решения (ЗПР) состоит в задании двух основных структур: ***реализационной*** и ***оценочной***. Реализационная структура отражает связь между выбираемыми альтернативами и возможными исходами, а оценочная структура устанавливает оценку возможных исходов с точки зрения принимающего решение.

ЗПР в условиях определенности характеризуется наличием детерминированной (однозначной) связи между допустимыми альтернативами и исходами, в силу чего выбор альтернативы эквивалентен выбору исхода. Поэтому построение реализационной структуры ЗПР в условиях определенности сводится к заданию множества X допустимых альтернатив; с содержательной точки зрения это означает перечисление всех возможных действий принимающего решение.

Оценочная структура задачи принятия решения может быть задана в различных видах, например, в виде оценочной функции; в виде бинарного отношения предпочтения; в виде оценок по нескольким критериям. В общем случае оценочная структура задачи принятия решения задается на множестве исходов. Для ЗПР в условиях определенности, в силу наличия однозначной связи между альтернативами и исходами, оценочные структуры всех типов могут быть тривиально перенесены с множества исходов на множество допустимых альтернатив.

В данной книге для ЗПР в условиях определенности рассматривается два типа оценочных структур: оценочная функция (лекции 2–4) и оценка по нескольким критерием (лекции 5–7).

II. Математическая модель ЗПР в условиях определенности, в которой оценочная структура задана в форме оценочной функции, принимает вид $\langle X, f\rangle$, где X — множество допустимых альтернатив, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — целевая функция. Для таких моделей принятия решения имеется по-существу единственный принцип оптимальности, в соответствии с которым оптимальной является альтернатива $x^* \in X$, доставляющая глобальный максимум целевой функции f на множестве допустимых альтернатив X (глобальный минимум, если f — функция потерь). Поэтому задача нахождения оптимального решени превращается здесь в математическую задачу нахождения экстремума функции. Для приложений наиболее важным является случай, когда множество допустимых альтернатив может быть отождествлено с некоторой областью $\mathcal{D}$, содержащейся в n-мерном евклидовом пространстве, т.е. $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. Для этого случая достаточные условия существования экстремума целевой функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ (значит, и существования оптимальных решений соответствующих ЗПР) дает классическая *теорема Вейерштрасса*: *если множество $\mathcal{D}$ является замкнутым и ограниченным, а функция f непрерывна, то глобальный максимум и глобальный минимум функции f достигается на $\mathcal{D}$.*

III. Возможности *нахождения* точек глобального экстремума функции $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, определяются видом функции f и свойствами области $\mathcal{D}$. Для дифференцируемой функции f точками глобального экстремума могут быть только критические точки (т.е. либо стационарные точки функции f, либо граничные точки области $\mathcal{D}$). Это правило дает возможность найти точки глобального экстремума функции одной или двух переменных, однако при $n > 2$ оно позволяет лишь сузить «область поиска». Для многих частных случаев (выделяемых видом функции f и свойствами допустимой области $\mathcal{D}$), разработаны методы и алгоритмы нахождения точек глобального экстремума функции (этот круг вопросов не входит в наше рассмотрение).

IV. При задании оценочной структуры ЗПР в виде оценок по нескольким критериям (т.е. в виде *векторной оценки*) получается многокритериальная задача принятия решения. Основная сложность логического анализа многокритериальных ЗПР заключена в том, что в них возникает «эффект несравнимости исходов», когда для двух исходов один из них оказывается лучше по одному критерию, но хуже по другому. Несравнимость исходов представляет собой форму неопределенности — ценностную неопределенность, которая связана со стремлением принимающего решение достичь противоречивых целей. Следствием указанной неопределенности является невозможность сформулировать для класса многокритериальных ЗПР единый принцип оптимальности решения.

Если для задач принятия решений, в которых оценочная структура задается в виде целевой функции, сложности нахождения оптимального решения имеют только технический характер, то для многокритериальных ЗПР возникают концептуальные сложности, связанные с проблемой — **что** следует понимать под оптимальным решением. В лекциях 5–7 рассмотрены некоторые подходы к решению этой проблемы.

V. Важнейшим понятием, вводимым для многокритериальных задач, является ***отношение доминирования по Парето*** $\overset{\text{Par}}{>}$. (*Вильфредо Парето* — известный итальянский экономист второй половины XIX – начала XX в.) Пусть $\mathcal{D}$ — множество возможных исходов. Условие $a_1 \overset{\text{Par}}{>} a_2$ содержательно означает, что исход a_1 не хуже, чем исход a_2 по любому из рассматриваемых критериев, причем, по крайней мере, по одному из критериев a_1 лучше, чем a_2.

Исход $a^* \in \mathcal{D}$ называется ***Парето-оптимальным***, если он не доминируется по Парето никаким исходом $a \in \mathcal{D}$.

При любом разумном понимании оптимальности для многокритериальных задач принятия решений оптимальный исход обязательно должен быть Парето-оптимальным. Поэтому окончательный выбор оптимального исхода в многокритериальной ЗПР следует производить из множества Парето-оптимальных исходов. Однако, в типичных случаях Парето-оптимальных исходов может быть несколько (в непрерывном случае — бесконечное множество), поэтому следующий этап анализа многокритериальных ЗПР представляет собой проблему сужения Парето-оптимального множества. Такое сужение производится с помощью некоторых формализованных процедур на базе получаемой от принимающего решение дополнительной информации о критериях или о свойствах оптимального решения.

Простейшие процедуры такого рода связаны, например, с назначением нижних границ критериев; выделением одного критерия (субоптимизация); упорядочением критериев по их относительной важности (лексикографическая оптимизация). Общим недостатком всех этих методов является то, что, во-первых, часто возникают содержательные трудности в получении требуемой информации от принимающего решение и, во-вторых, процедура сужения Парето-оптимального множества не дает, как правило, единственного решения.

VI. Для многокритериальных задач принятия решений проблема выбора оптимального решения — это фактически проблема получения от принимающего решение дополнительной информации о соотношении критериев между собой. Наиболее «емкой» здесь является информация о величине *локального коэффициента замещения* (ЛКЗ). Для ЗПР с двумя критериями локальный коэффициент замещения указывает величину прибавки по одному из критериев, которая компенсирует для принимающего решение потерю единицы по другому критерию. Зная ЛКЗ в каждой точке области векторных оценок, можно построить в этой области *карту безразличий*, состоящую из *кривых безразличия*. Обратно, если в области векторных оценок задана карта безразличий, то можно найти ЛКЗ в любой точке этой области. Оказывается, что *задание в области векторных оценок карты безразличий (или, что эквивалентно,* ЛКЗ *в каждой точке этой области) определяет единственным образом полное ранжирование множества векторных оценок, что приводит к единственному оптимальному решению.*

VII. Рассмотрим последний результат более подробно. Он может быть точно сформулирован либо в терминах *обобщенного критерия*, либо в терминах *линейного квазиупорядочения*.

Под *обобщенным критерием* в многокритериальной ЗПР понимается такая функция φ, которая превращает векторную оценку в скалярную и при этом сохраняет Парето-доминирование. В общем случае различные обобщенные критерии приводят к *разным* ранжированиям векторных оценок и (как следствие этого) — к *разным* оптимальным решениям. Предположим теперь, что в области Q векторных оценок двухкритериальной задачи принятия решения задана карта безразличий. Обобщенный критерий φ называется ***совместимым с картой безразличий***, если линиями уровня функции φ в области Q являются кривые безразличия. Показано (см. лекцию 6, п. 4), что *все обобщенные критерии, совместимые с картой безразличий, эквивалентны между собой в следующем смысле: они дают одно и то же ранжирование векторных оценок и (как следствие этого) одно и то же оптимальное решение.*

В терминах линейного квазиупорядочения уточнение состоит в следующем. Как показывает теорема 7.1, *в области векторных оценок Q, снабженной картой безразличий, существует одно и только одно линейное квазиупорядочение $\succsim$ (называемое* ***каноническим****), которое удовлетворяет следующим двум условиям:*

(1) *отношение* $\succ$ *содержит Парето-доминирование* $\overset{\mathrm{Par}}{>}$;

(2) *классами эквивалентности* $\sim$ (*симметричной части отношения* $\gtrsim$) *служат кривые безразличия.*

VIII. Дадим интерпретацию последнего результата применительно к экономической проблеме выявления предпочтения потребителя. *Основной постулат*, принимаемый в экономике потребления, состоит в том, что каждый потребитель имеет отношение предпочтения на множестве наборов потребительских благ, причем это отношение является отношением линейного квазипорядка. Далее, в экономике принимается *аксиома ненасыщаемости*, означающая с математической точки зрения, что отношение предпочтения потребителя содержит отношение доминирования по Парето. В силу теоремы 7.1, *необходимым и достаточным условием выявления отношения предпочтения потребителя на заданном множестве потребительских наборов является нахождение на этом множестве его карты безразличий.*

При имеющейся карте безразличий единственным линейным квазипорядком, совместимым с картой безразличий и удовлетворяющим аксиоме ненасыщаемости, будет канонический линейный квазипорядок $\gtrsim$.

IX. Кратко охарактеризуем задачи, рассмотренные в части I. ***Задача*** **1** относится к *задачам управления запасами* [10]; в данном случае ее решение сводится к нахождению экстремума функции одной переменной. ***Задача*** **2** связана с исследованием производственной функции. В экономике широкое распространение получили *мультипликативные производственные функции*, простейшим примером которой является производственная функция в задаче 2. ***Задача*** **3** заимствована из [1]. ***Задачи*** **4–6** — это типичные задачи линейного программирования (которые получили широкое распространение благодаря работам выдающегося советского математика Л.В. Канторовича, удостоенного за эти исследования Нобелевской премии). ***Задача*** **7** имеет иллюстративный характер и является дискретной задачей многокритериальной оптимизации. ***Задача*** **8** с математической точки зрения является непрерывной задачей многокритериальной оптимизации и по содержанию представляет значительный интерес для экономики; эта задача рассматривалась многими авторами (см., например, [14]). ***Задача*** **9** иллюстрирует способ сравнения объектов по векторному критерию при известном ЛКЗ. ***Задача*** **10** является типичной задачей экономики потребления (см., например, [5]).

X. Упражнения.

1. Рассмотрите все этапы решения задачи об оптимальном размере закупаемой партии товара (см. задачу 1) при следующих данных:

а) $Q = 72$ т, $c_0 = 3$ тыс. р/т, $c_1 = 400$ р, $c_2 = 100$ р/т;

б) $Q = 25$ т, $c_0 = 3$ тыс. р/т, $c_1 = 400$ р, $c_2 = 30$ р/т.

2. Продукт C производится из продуктов A и B, причем количество продукта C равно $5x^{1/3}y^{2/3}$, где x — количество продукта A, y — количество продукта B. Какое наибольшее количество продукта C может быть произведено, если стоимость единицы продукта C равна пяти денежным ед., стоимость единицы продукта B равна 2 ден. ед. и всего на покупку продуктов A и B ассигновано 20 денежных ед.?

Указание. Воспользуйтесь методом множителей Лагранжа (лекция 3).

3. Количество продукта C, производимого из продуктов A и B, находится по формуле $f(x, y) = 2x + 3y$, где x — количество продукта A, y — количество продукта B. Какое максимальное количество продукта C может быть получено при условии, что x и y связаны ограничением $4x^2 + 9y^2 \leq 72$?

Указание. Используйте графический метод нахождения экстремума функции (лекция 3).

4. В табл. 1 приведено количество белков $Б$, жиров $Ж$, углеводов $У$, витаминов B в единице продукта $П_1$ и $П_2$, а также минимальная норма питательных веществ в смеси этих продуктов и стоимость единицы продуктов $П_1$ и $П_2$. Найдите оптимальную смесь продуктов $П_1$ и $П_2$ (см. задачу 5).

Указание. Используйте графический метод нахождения решения задачи линейного программирования (см. лекцию 4).

Таблица 1

	$Б$	$Ж$	$У$	B	Стоимость
$П_1$	4	3	8	7	4
$П_2$	5	18	2	3	3
Минимальная норма	20	36	16	21	

5. Используя графический метод, найдите оптимальный производственный план в задаче, заданной табл. 2 (см. лекцию 4):

Таблица 2

	1	2	3	4	Прибыль
1	24	15	8	10	6
2	8	15	16	5	7
Запас	120	150	128	60	

6. В табл. 3 указана стоимость перевозки единицы продукта со складов C_1 и C_2 в пункты потребления $П_1$ и $П_2$, а также потребность в этом продукте для пунктов потребления и его наличный запас на складах C_1 и C_2. Составьте оптимальный план перевозок (см. задачу 6).

Указание. Используйте графический метод нахождения решения задачи линейного программирования (см. лекцию 4).

Таблица 3

	$П_1$	$П_2$	Запас
C_1	8	4	150
C_2	3	2	90
Потребность	100	120	

7. При выборе квартиры в качестве существенных критериев взяты: p_1 — метраж (в м^2), p_2 — время поездки на работу (в мин), p_3 — время поездки в зону отдыха (в мин); при этом критерий p_1 рассматривается как позитивный, а критерии p_2 и p_3 — как негативные. Сравните по предпочтительности семь вариантов, представленных в табл.4.

Таблица 4

	Критерий		
Вариант	p_1	p_2	p_3
1	60	50	30
2	50	45	25
3	45	30	20
4	60	40	30
5	42	20	10
6	45	30	15
7	48	45	25

Указание. Первый этап анализа — отбрасывание вариантов, доминируемых по Парето. Второй этап — сужение Парето-оптимального множества с помощью процедур, основанных на дополнительной информации, получаемой от принимающего решение, о критериях или свойствах оптимального решения (см. лекцию 5).

8. Используя в качестве обобщенного критерия для задачи 7 критерий (6.1), постройте полное ранжирование вариантов мест работы.

Соответствует ли полученное ранжирование вашим предпочтениям?

9. Постройте полное ранжирование указанных в табл. 5 векторных оценок по критериям u и v, зная, что в области векторных оценок ЛКЗ имеет вид: $k(u, v) = 2v/3u$ (см. задачу 9).

Таблица 5

	Критерий	
Вариант	u	v
1	5	2
2	3	3
3	2	4
4	1,5	4,5
5	1,3	5

10. В области векторных оценок $\mathcal{D}$, определенной системой неравенств

$$\begin{cases} 2u^2 + 9v^2 \leq 18, \\ u \geq 2, \quad v \geq 1/2, \end{cases}$$

найдите наиболее предпочтительную векторную оценку, если карта безразличий задается уравнением $uv = c$.

Указание. Используйте графоаналитический способ нахождения экстремума функции двух переменных (см. лекцию 3, п. 2).

ЛИТЕРАТУРА: [1, 3, 5, 8–11, 14, 20, 23, 28, 29, 37, 39, 40, 46, 48, 49].

Часть II
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

Лекция 8. *Принятие решений в условиях неопределенности*

• *Математическая модель задачи принятия решения в условиях неопределенности.* Пример: *аренда отеля.* • *Принцип доминирования стратегий. Методы анализа* ЗПР *в условиях неопределенности на основе введения гипотезы о поведении среды.* • *Критерии Лапласа, Вальда, Гурвица и Сэвиджа.* • Задача 11. *Выбор проекта электростанции.*

1. Как указывалось в лекции 1, реализационная структура задачи принятия решения включает в себя множество допустимых альтернатив X, множество состояний среды Y, множество исходов A и функцию реализации $F : X \times Y \to A$. Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что при выборе альтернативы принимающему решение неизвестно наличное состояние среды и он не имеет информации о вероятностях их появления. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решение известны множество возможных состояний среды (множество Y) и функция реализации F.

Оценочная структура ЗПР в условиях неопределенности может быть задана любым из способов, указанных в п. 3 лекции 1; в данной лекции будет рассмотрен случай, когда оценочная структура задается в виде оценочной функции. Композиция функции реализации и оценочной функции представляет собой целевую функцию f. При этом число $f(x, y)$ указывает полезность (ценность, эффективность) того исхода, который получается в ситуации, когда принимающий решение выбирает альтернативу $x \in X$, а среда принимает состояние $y \in Y$. Напомним, что если оценка исходов выражает затраты, убытки или другие негативные факторы, то в этом случае функция f называется ***функцией потерь***.

Итак, *математическая модель* ЗПР *в условиях неопределенности может быть задана в виде* следующей тройки объектов:

$$\langle X, Y, f \rangle, \tag{8.1}$$

где X — множество допустимых альтернатив, Y — множество возможных состояний среды, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — целевая функция.

Фактически построение такой математической модели принятия решения сводится к заданию целевой функции, определенной на множестве $X \times Y$ и принимающей числовые значения.

Рассмотрим пример построения математической модели ЗПР в условиях неопределенности.

• **Пример 8.1.** *Аренда отеля.* Предприниматель намерен взять в аренду отель сроком на один год. Имеются отели четырех типов: на 20, 30, 40 или 50 комнат. По условиям аренды предприниматель должен оплатить все расходы, связанные с содержанием отеля. Эти расходы (в некоторых денежных единицах) состоят из трех частей:

1) *Расходы, не зависящие от выбора проекта отеля*:

   а) благоустройство территории — 10 тыс. денежных ед.;
   б) затраты на текущий ремонт и содержание — 1,5 тыс. денежных ед.;
   в) один ночной дежурный — 6 тыс. денежных ед.;
   г) один служащий для уборки территории — 8 тыс. денежных ед..

2) *Расходы, зависящие от числа комнат отеля*:

   а) меблировка одной комнаты — 2 тыс. денежных ед.;
   б) 1 горничная на 10 комнат — 6 тыс. денежных ед.;
   в) содержание одной комнаты — 150 денежных ед.;
   г) страхование на случай пожара для одной комнаты — 25 денежных ед.

3) *Расходы, зависящие от числа занятых комнат*:

   а) стирка, уборка — 25 денежных ед.;
   б) электричество, газ, вода — 25 денежных ед.

Доход предпринимателя составляет 200 денежных ед. в день с каждой занятой комнаты. Какое решение должен принять предприниматель?

Построим математическую модель задачи принятия решения. Альтернативами здесь являются типы отелей, поэтому в качестве множества альтернатив можно взять $X = \{20, 30, 40, 50\}$.

В данном случае (в соответствии с изложенным в п. 3 лекции 1) среда — это то, что определяет при каждой фиксированной альтернативе появление конкретного исхода (результата). В рассматриваемом задаче в качестве исхода можно рассматривать прибыль, которую получит предприниматель за год аренды отеля. При фиксированной альтернативе $x \in X$ его прибыль полностью определяется средним числом y занятых комнат (т. е. в качестве единственного параметра, характеризующего состояние среды, здесь выступает среднегодовой спрос). Поэтому в качестве множества состояний среды в данной задаче можно взять $Y = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$. Целевая функция f имеет здесь следующий содержательный смысл: $f(x, y)$ — это прибыль, которую получит предприниматель за год в ситуации, когда он арендует отель из x комнат, а среднегодовой спрос равен y. Найдем целевую функцию $f(x, y)$ в явном виде.

1) Расходы, не зависящие от выбора проекта отеля, составляют

$$10\,000 + 1500 + 6000 + 8000 = 25\,500 \text{ (денежных ед.)}$$

2) Расходы, зависящие от числа x комнат отеля, равны

$$2\,000\,x + 600\,x + 150\,x + 25\,x = 2775\,x \text{ (денежных ед.)}$$

3) Расходы, зависящие от числа y занятых комнат, таковы:

$$365(25\,y + 25\,y) = 18\,250y \text{ (денежных ед.)}$$

4) Доход предпринимателя определяется числом y занятых комнат и составляет в год

$$365 \cdot 200\,y = 73\,000\,y \text{ (денежных ед.)}$$

Отсюда прибыль предпринимателя за год в ситуации (x, y) равна

$$73\,000\,y - (2775\,x + 18\,250\,y + 25\,500) =$$
$$= 54\,750\,y - 2775\,x - 25\,500 \text{ (денежных ед.)}$$

Итак, целевая функция для данной задачи принятия решения такова:

$$f(x, y) = 54\,750\,y - 2775\,x - 25\,500.$$

Методы анализа ЗПР в условиях неопределенности рассмотрены в следующих двух пунктах.

2. Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности состоит в том, что, выбирая одну из допустимых альтернатив, принимающий решение не знает имеющегося состояния среды; в то же время, получающийся исход *зависит* от того, в каком состоянии находится среда. Формально, целевая функция $f(x, y)$ является функцией двух аргументов x и y; принимающий решение должен выбирать значение аргумента $x \in X$, не зная значения аргумента $y \in Y$.

Ограничимся случаем, когда множества X и Y являются конечными; тогда целевая функция может быть задана табличным способом. Так как «природа» альтернатив и состояний среды в математической модели ЗПР никак не отражается, будем различать элементы этих множеств по номерам, полагая $X = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$, $Y = \{1, \ldots, j, \ldots, m\}$. Далее, положим $f(i, j) = a_i^j$ и будем интерпретировать число a_i^j как *выигрыш* принимающего решение в ситуации (i, j). Тогда целевая функция задается табл. 8.1, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число a_i^j — выигрыш принимающего решение в ситуации, когда он выбирает альтернативу i, а среда принимает состояние j. Табл. 8.1 называется также ***матрицей выигрышей*** или ***платежной матрицей***.

Таблица 8.1

	1	...	j	...	m
1	·				·
$\vdots$		·		·	
i			a_i^j		
$\vdots$		·		·	
n	·				·

Таблица 8.2

	1	2	3	4	5	6
1	5	3	4	2	1	2
2	1	2	5	4	3	3
3	7	6	7	3	1	2
4	1	2	4	4	4	5
5	1	2	3	4	3	5

• **Пример 8.2.** Рассмотрим ЗПР в условиях неопределенности, целевая функция которой задана табл. 8.2. Выбор какой альтернативы здесь следует считать оптимальным?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, надо иметь некоторый способ сравнения двух альтернатив. Наиболее простой и естественный принцип, по которому можно сравнить две альтернативы, — это *принцип доминирования*, состоящий в следующем: говорят, что альтернатива i_1 *доминирует* альтернативу i_2 (записывают $i_1 \geq i_2$), если при любом состоянии среды выигрыш принимающего решение при выборе им альтернативы i_1 не меньше, чем его выигрыш при выборе альтернативы i_2 (т.е. выполняется условие $a^j_{i_1} \geq a^j_{i_2}$ при всех $j = \overline{1, m}$).

Если $i_1 \geq i_2$, то альтернатива i_1 называется ***доминирующей***, а альтернатива i_2 — ***доминируемой***. Независимо от состояния среды доминирующая альтернатива является не менее предпочтительной для принимающего решение, чем доминируемая альтернатива, поэтому доминируемую альтернативу можно исключить из дальнейшего рассмотрения. ***Принцип доминирования*** состоит в отбрасывании доминируемых альтернатив.

В примере 8.2 имеем: $4 \geq 5$, $3 \geq 1$, и других пар, находящихся в отношенини доминирования, нет. Поэтому, исключая доминируемые альтернативы 1 и 5 (т.е. вычеркивая в табл. 8.2 строки с номерами 1 и 5), получаем ЗПР, в которой все альтернативы несравнимы по отношению доминирования. Для того чтобы выбрать из оставшихся альтернатив оптимальную, нужны какие-то дополнительные соображения.

Замечание. Сравнение альтернатив по отношению доминирования $\geq$ аналогично сравнению исходов многокритериальной ЗПР по Парето-доминированию (см. лекцию 5). Основное различие здесь в интерпретации: для ЗПР в условиях неопределенности номера столбцов соответствуют состояниям среды, а для многокритериальной ЗПР они соответствуют критериям.

Основной метод, позволяющий найти оптимальную альтернативу в ЗПР в условиях неопределенности, состоит в следующем:

формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать каждой альтернативе единую числовую оценку.

Задание числовой оценки для каждой альтернативы дает критерий для сравнения альтернатив по предпочтению: из двух альтернатив лучшей считается та, которая имеет бóльшую числовую оценку (альтернативы, имеющие одинаковые оценки, считаются эквивалентными). Тогда оптимальной будет та альтернатива, которая является наиболее предпочтительной, т.е. имеет наибольшую числовую оценку (для случая функции потерь — наименьшую числовую оценку).

3. Рассмотрим важнейшие типы критериев, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа основан на *гипотезе равновозможности* (*равновероятности*) и содержательно может быть сформулирован в виде: «*Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными*». При принятии данной гипотезы в качестве оценки i-й альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i-й строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка по критерию Лапласа имеет вид

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j. \tag{8.2}$$

При введении оценки Лапласа любые две альтернативы будут сравнимыми между собой по предпочтительности: лучшей считается та альтернатива, которая имеет бо́льшую оценку по критерию Лапласа.

Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива i^*, которая максимизирует оценку (8.2):

$$L(i^*) = \max_{i\le i\le n} L(i).$$

Основной недостаток критерия Лапласа связан с тем, что при нахождении по формуле (8.2) среднего выигрыша может происходить «эффект компенсации» маленьких выигрышей большими, и полученное в результате среднее арифметическое будет тогда весьма слабой характеризацией допустимых альтернатив. Например, сравнивая по критерию Лапласа альтернативы, указанные в табл. 8.3, получаем, что альтернатива 1 является более предпочтительной, чем альтернатива 2, поскольку $L(1) > L(2)$. Однако величина выигрышей для альтернативы 1 распределена крайне неравномерно, поэтому при выборе альтернативы 1 принимающий решение рискует не получить ничего; в то же время при выборе альтернативы 2 он имеет гарантированный выигрыш, равный 9,9.

Таблица 8.3

	1	2	...	9	10	$L(i)$
1	1	0	...	0	100	10,1
2	9,9	10	...	10	10,1	10

Критерий Вальда основан на *гипотезе антагонизма*, которая может быть сформулирована в следующем виде: «*При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант*».

При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $\underline{W}(i) = \min\limits_j a_i^j$ и сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия $\underline{W}$. Оптимальной в этом случае является альтернатива, максимизирующая функцию $\underline{W}$, т.е. альтернатива i^*, для которой выполняется условие

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \max_i \min_j a_i^j. \tag{8.3}$$

Альтернатива i^* называется ***максиминной***, а число $\max\limits_i \min\limits_j a_i^j$ называется ***максимином***. Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается максиминная альтернатива, называется ***принципом максимина***.

Содержательный смысл принципа максимина состоит с следующем. Число $\underline{W}(i)$ характеризует гарантированный уровень альтернативы i (так как при выборе альтернативы i выигрыш принимающего решение — независимо от состояния среды — не может быть меньше, чем $\underline{W}(i)$). Таким образом, *принцип максимина основан на макисимизации минимального возможного (т. е. гарантированного) выигрыша*; поэтому иногда этот принцип называют также ***принципом максимального гарантированного результата***.

На практике использование принципа максимина связано с психологическими особенностями принимающего решение, точнее, с его отношением к неопределенности. Расчет на наихудший вариант свойственен крайне осторожным людям («пессимистам»).

Главный недостаток принципа максимина состоит в том, что при выборе решения учитывается только наихудший вариант. Например, при сравнении альтернатив, приведенных в табл. 8.4, согласно принципу максимина, альтернатива 1 более предпочтительна, чем альтернатива 2, хотя, за исключением одного состояния среды, альтернатива 2 доминирует альтернативу 1.

Таблица 8.4

	1	2	3	4	5	$\underline{W}(i)$
1	2	3	1	5	4	1
2	0	6	8	7	9	0

Замечание. Если целевая функция является функцией потерь, то в соответствии с гипотезой антагонизма, оценкой альтернативы i является число $\overline{W}(i) = \max\limits_j a_i^j$. Альтернатива, минимизирующая функцию $\overline{W}$, т.е. альтернатива i^0, для которой выполняется условие

$$\overline{W}(i^0) = \min_i \overline{W}(i) = \min_i \max_j a_i^j, \tag{8.4}$$

называется ***минимаксной***, а число $\min\limits_i \max\limits_j a_i^j$ — ***минимаксом***. В этом случае принцип максимина трансформируется в *принцип минимакса*, по которому оптимальной альтернативой будет минимаксная альтернатива. Содержательно принцип минимакса есть ***принцип минимизации максимальных возможных потерь.***

Критерий Гурвица связан с введением показателя $0 \leq \alpha \leq 1$, называемого ***показателем пессимизма***. Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший — с вероятностью $1-\alpha$. Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha) \max_j a_i^j. \tag{8.5}$$

При $\alpha = 1$ этот критерий превращается в «критерий крайнего пессимизма» (т.е. в критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ — в критерий крайнего оптимизма. Основной недостаток критерия Гурвица состоит в том, что он учитывает только два исхода — наихудший и наилучший. Кроме того, имеется содержательная сложность при использовании критерия Гурвица — назначение показателя пессимизма α.

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей (a_i^j) в матрицу (r_i^j) — ***матрицу рисков*** (***матрицу сожалений***). ***Риском*** при выборе альтернативы i в состоянии j называется число $r_i^j = \beta^j - a_i^j$, где $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$. Содержательно r_i^j интерпретируется как «мера сожаления», возникающего от незнания истинного состояния среды. (Если бы принимающий решение знал истинное состояние среды j, он выбрал бы альтернативу, дающую максимальный возможный выигрыш в состоянии j и получил в результате выигрыш $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$ вместо полученного им выигрыша a_i^j.)

Для критерия Сэвиджа *оптимальной считается альтернатива, минимизирующая максимальный риск* (т.е. здесь используется минимаксный критерий для матрицы сожалений).

Замечание. В общем случае оптимальные решения, получаемые по указанным критериям, могут не совпадать (критерии противоречат друг другу). Это неудивительно, так как эти критерии основаны на *разных* гипотезах. Вводя ту или иную гипотезу о поведении среды, мы тем самым «снимаем неопределенность», однако всякая гипотеза является только предположением, а не знанием. Было бы странным, если различные предположения приводили всегда к одному и тому же результату.

4. Задача 11. *Выбор проекта электростанции.*

Энергетическая компания должна выбрать проект электростанции. Всего имеется четыре типа электростанций: A_1 — тепловые, A_2 — приплотинные, A_3 — бесшлюзовые, A_4 — шлюзовые. Последствия, связанные со строительством и дальнейшей эксплуатацией электростанции каждого из этих типов, зависят от ряда неопределенных факторов (состояния погоды, возможности наводнения, цены топлива, расходы по транспортировке топлива и т.п.). Предположим, что можно выделить четыре варианта сочетаний данных факторов — они выступают в качестве состояний среды и обозначены здесь через B_1, B_2, B_3, B_4. Экономическая эффективность электростанции определяется в данном случае как процент прироста дохода в течение одного года эксплуатации электростанции в сопоставлении с капитальными затратами; она зависит как от типа электростанции, так и от состояния среды и определяется табл. 8.5. Какой проект электростанции является здесь оптимальным?

Таблица 8.5

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	5	1	10
A_2	5	2	8	4
A_3	1	3	4	12
A_4	8	5	1	10

Проанализируем эту задачу принятия решения в условиях неопределенности на основании критериев, введенных в п. 3.

1) *Критерий Лапласа.* В соответствии с (8.2) находим оценки альтернатив A_1–A_4 по критерию Лапласа (табл. 8.6):

$$L(A_1) = \frac{1}{4}(7+5+1+10) = \frac{23}{4};$$
$$L(A_2) = \frac{1}{4}(5+2+8+4) = \frac{19}{4};$$
$$L(A_3) = \frac{1}{4}(1+3+4+12) = \frac{20}{4};$$
$$L(A_4) = \frac{1}{4}(8+5+1+10) = \frac{24}{4}.$$

Таблица 8.6

A_i	$L(A_i)$
A_1	23/4
A_2	19/4
A_3	20/4
A_4	24/4

Согласно критерию Лапласа, оптимальной здесь будет альтернатива A_4 — строительство шлюзовой электростанции.

Примечание. На практике критерий Лапласа — критерий максимизации средней эффективности — может быть использован при большом количестве испытаний (в рассматриваемом примере — при большом числе строящихся электростанций).

2) *Критерий Вальда* (*максиминный критерий*). Находим (табл. 8.7):

$$\underline{W}(A_1) = 1,$$
$$\underline{W}(A_2) = 2,$$
$$\underline{W}(A_3) = 1,$$
$$\underline{W}(A_4) = 1.$$

Таблица 8.7

A_i	$\underline{W}(A_i)$
A_1	1
A_2	2
A_3	1
A_4	1

Оптимальной по критерию Вальда (максиминной альтернативой) является альтернатива A_2. Строительство приплотинной электростанции обеспечивает максимальную эффективность при наихудшем состоянии среды. Отметим, что для каждой альтернативы имеется свое наихудшее состояние среды.

3) *Критерий Гурвица.* Возьмем, например, в качестве «показателя пессимизма» $\alpha = 1/2$. Тогда оценки альтернатив A_1–A_4 по критерию Гурвица с $\alpha = 1/2$ таковы (табл. 8.8):

$$H_{1/2}(A_1) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 10 = \frac{11}{2};$$
$$H_{1/2}(A_2) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 8 = \frac{10}{2};$$
$$H_{1/2}(A_3) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 12 = \frac{13}{2};$$
$$H_{1/2}(A_4) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 10 = \frac{11}{2}.$$

Таблица 8.8

A_i	$H_{1/2}(A_i)$
A_1	11/2
A_2	10/2
A_3	13/2
A_4	11/2

Оптимальной здесь будет альтернатива A_3 — строительство бесшлюзовой электростанции.

Как изменяется оптимальное решение при изменении «показателя пессимизма» α? В данной задаче при любом показателе $0 < \alpha < 1$ выполняется условие $H_\alpha(A_1) = H_\alpha(A_4) < H_\alpha(A_3)$, поэтому альтернативы A_1 и A_4 должны быть отброшены, а альтернативы A_2 и A_3 являются конкурирующими. Условие $H_\alpha(A_2) \leq H_\alpha(A_3)$ сводится к неравенству $2\alpha + 8(1-\alpha) \leq \alpha + 12(1-\alpha)$, решение которого $\alpha \leq 4/5$. Таким образом, при $\alpha \leq 4/5$ оптимальной по критерию Гурвица будет альтернатива A_3, а при $\alpha > 4/5$ оптимальной является альтернатива A_2. В частности, при $\alpha = 1$ в качестве оптимальной получается максиминная альтернатива A_2.

4) *Критерий Сэвиджа.* Для применения критерия Сэвиджа надо преобразовать матрицу выигрышей в матрицу рисков. Для удобства добавим к первоначальной матрице выигрышей (см. табл. 8.5) строку столбцовых максимумов β^j (табл. 8.9); затем составляем матрицу рисков по формуле: $r_i^j = \beta^j - a_i^j$ (табл. 8.10).

Таблица 8.9

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	5	1	10
A_2	5	2	8	4
A_3	1	3	4	12
A_4	8	5	1	10
β^j	8	5	8	12

Таблица 8.10

	B_1	B_2	B_3	B_4	max
A_1	1	0	7	2	7
A_2	3	3	0	8	8
A_3	7	2	4	0	7
A_4	0	0	7	2	7

Для того чтобы применить минимаксный критерий к матрице рисков, добавим к ней справа столбец строчных максимумов; каждый элемент этого столбца указывает наибольший риск (наибольшее «сожаление») при выборе соответствующей альтернативы. Из табл. 8.10 видно, что оптимальными по критерию Сэвиджа являются альтернативы A_1, A_3, A_4: они минимизируют максимальное «сожаление», связанное с незнанием истинного состояния среды.

Примечание. В данной задаче альтернатива A_4 доминирует альтернативу A_1, поэтому альтернатива A_1 может быть сразу исключена из дальнейшего рассмотрения.

Лекция 9. *Принятие решений в условиях риска*

• *Математическая модель* ЗПР *в условиях риска.* • *Критерий ожидаемого выигрыша. Необходимость введения меры отклонения от ожидаемого выигрыша.* • *Нахождение оптимального решения по паре критериев* (M, σ): (A) *на основе построения обобщенного критерия*; (B) *на основе отношения доминирования по Парето.* • Задача 12. *Выбор варианта производимого товара.*

1. Построение реализационной структуры задачи принятия решения сводится к заданию функции реализации $F(x, y)$ (см. лекцию 1). Формально функция реализации есть функция двух переменных x и y, но эти переменные входят в нее неравноправно, что является отражением неравноправия управляющей системы и среды. Дело в том, что управляющая система всегда имеет определенную цель, поэтому ее поведение имеет целенаправленный характер; поведение среды может иметь как целенаправленный, так и случайный характер. Принятие решения в условиях риска характеризуется тем, что поведение среды имеет случайный характер, причем в этой случайности имеются закономерности стохастического типа. В общем случае это проявляется в том, что существует некоторая *вероятностная мера*, в соответствии с которой возникают те или иные состояния среды. При этом принимающий решение имеет определенную информацию о вероятностях появления состояний среды, которая по своему характеру может быть весьма разнообразной. Так, если имеется всего три возможных состояния среды A, B, C, то дополнительная информация о появлении этих состояний может заключаться, например, в сообщении о том, что состояние A является наименее вероятным, а состояние C — наиболее вероятным; или что вероятность A больше, чем вероятность C; или что вероятность C составляет более 50% и т. п.

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды. Наиболее простой для анализа случай — когда эта дополнительная информация представлена в виде вероятностной меры на множестве состояний среды. Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{\overline{1,m}\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана *вероятностным вектором* $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $y_j \geq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$ (здесь y_j — вероятность наступления состояния $j = \overline{1,m}$). Именно этот способ задания дополнительной информации о состояниях среды рассматривается в данной лекции. Считаем, что оценочная структура ЗПР задается в виде оценочной функции.

Итак, предметом изучения являются задачи принятия решений, в которых целевая функция (функция выигрыша) представлена в виде таблицы — матрицы выигрышей $\|a_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$ и, кроме того, принимающему решение (игроку) известен вероятностный вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Такая ЗПР (называемая также *игрой с природой*) задается таблицей типа табл. 9.1.

Таблица 9.1

	Состояние среды				
Альтернатива	y_1 1	$\ldots$ $\ldots$	y_j j	$\ldots$ $\ldots$	y_m m
1	a_1^1		a_1^j		a_1^m
$\vdots$					
i	a_i^1		a_i^j		a_i^m
$\vdots$					
n	a_n^1		a_n^j		a_n^m

Выбирая альтернативу i, игрок знает, что получит один из выигрышей $a_i^1, \ldots, a_i^m$ с вероятностями $y_1, \ldots, y_m$ соответственно. Таким образом, исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы i является случайная величина

$$\xi_i = \begin{bmatrix} a_i^1, \ldots, a_i^m \\ y_1, \ldots, y_m \end{bmatrix}.$$

Следовательно, *сравнение двух альтернатив i_1 и i_2 сводится здесь к сравнению соответствующих им случайных величин ξ_{i_1} и ξ_{i_2}*.

• **Пример 9.1.** *Выбор варианта продаваемого товара.* Фирма A может выставить на продажу один из товаров T_1 или T_2, а фирма B — один из товаров T_1', T_2', T_3'. Товары T_1 и T_1' являются конкурирующими (например, пиво и лимонад), товары T_1 и T_3' — дополнительными (например, пиво и вобла); остальные пары товаров практически нейтральны. Прибыль фирмы A зависит от сочетания товаров, выставляемых на продажу обеими фирмами, и определяется табл. 9.2 (в некоторых денежных единицах). Известно, что фирма B выставляет на продажу товар T_3' в три раза реже, чем T_1' и в четыре раза реже, чем T_2'. Какой товар следует выставить на продажу фирме A?

Таблица 9.2

	T_1'	T_2'	T_3'
T_1	8	18	40
T_2	18	15	14

Рассмотрим эту задачу как задачу принятия решения для фирмы A, при этом табл. 9.2 будет матрицей выигрышей. В качестве состояний среды здесь выступают виды товаров, выставляемых на продажу фирмой B. Вероятности этих состояний могут быть найдены из указанного соотношения частот следующим образом. Пусть x — доля случаев, в которых выставляется на продажу товар T_3'. Тогда для товара T_1' доля случаев, в которых он выставляется на продажу, составляет $3x$, а для товара T_2' — $4x$. Так как $x + 3x + 4x = 1$, то $x = 1/8$, откуда вероятности состояний T_1', T_2' и T_3' равны соответственно 3/8, 4/8 и 1/8. В результате получаем ЗПР в условиях риска, заданную табл. 9.3.

Таблица 9.3

	3/8 1	4/8 2	1/8 3
T_1	8	18	40
T_2	18	15	14

2. Итак, принятие решения в условиях риска сводится к сравнению между собой случайных величин. Как известно из теории вероятностей, наиболее естественной числовой характеристикой случайной величины ξ является ее математическое ожидание (МО), обозначаемое далее через $M\xi$. Если для ЗПР в условиях риска в качестве критерия сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать альтернативу, максимизирующую ожидаемый выигрыш.

В примере 9.1 имеем:

$$M\xi_{T_1} = 8 \cdot \frac{3}{8} + 18 \cdot \frac{4}{8} + 40 \cdot \frac{1}{8} = 17, \quad M\xi_{T_2} = 18 \cdot \frac{3}{8} + 15 \cdot \frac{4}{8} + 14 \cdot \frac{1}{8} = 16.$$

Таким образом, здесь оптимальной по указанному критерию будет альтернатива T_1.

Можно ли согласиться с тем, что альтернатива T_1 лучше, чем T_2? Как известно из теории вероятностей, математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ представляет собой число, к которому приближается среднее значение этой случайной величины при большом числе испытаний. Таким образом, в игре с природой ориентация на математическое ожидание выигрыша есть фактически ориентация на средний выигрыш, который получится при многократном повторении этой игры (в предположении, что условия игры не изменятся). Разумеется, если в действительности игра повторяется многократно, то критерий среднего выигрыша (например, в экономических задачах — средней прибыли) можно считать оправданным. Однако разумно ли ориентироваться на этот критерий при единичном испытании? Вернемся к примеру 9.1. Здесь $M\xi_{T_1} = 17$, $M\xi_{T_2} = 16$. Безусловно, выигрыш в 17 денежных ед. лучше, чем выигрыш в 16 денежных ед., однако при выборе альтернативы T_1 мы получим не 17 денежных ед., а один из выигрышей: 8, 18 или 40 денежных ед.; точно так же при выборе альтернативы T_2 мы получим не 16 денежных ед., а один из выигрышей 18, 15 или 14 денежных ед. Составим табл. 9.4, в которой указаны отклонения возможных выигрышей от их ожидаемых значений и вероятности этих отклонений.

Таблица 9.4

	3/8	4/8	1/8	$M\xi$
T_1	-9	1	23	17
T_2	2	-1	-2	16

Из табл. 9.4 видно, что альтернативы T_1 и T_2, имея близкие значения ожидаемых выигрышей, по-разному ведут себя относительно возможных отклонений от ожидаемых выигрышей: для T_2 эти отклонения сравнительно невелики, а для T_1 — весьма значительны.

Можно сделать следующий вывод: *для* ЗПР *в условиях риска критерий ожидаемого выигрыша не является адекватным и* *должен быть трансформирован с учетом возможных отклонений случайной величины от ее среднего значения.*

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от ее среднего значения (меры «разброса») обычно берется дисперсия $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение (СКО) $\sigma = \sqrt{D\xi}$. Напомним, что формально дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее ожидаемого значения:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Замечание. Технически здесь удобнее использовать среднеквадратичное отклонение σ, так как при изменении масштаба измерения σ изменяется пропорционально.

Для ЗПР в условиях риска *будем рассматривать в качестве показателя риска среднеквадратичное отклонение σ.*

3. Из изложенного выше можно сделать следующий вывод: для ЗПР в условиях риска выбор альтернативы i приводит к случайной величине ξ_i, которая может быть охарактеризована парой показателей (M_i, σ_i), где $M_i = M\xi_i$ — ожидаемый выигрыш и $\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$ — показатель риска. Теперь можно приступить к решению основной задачи — построению адекватного критерия сравнения альтернатив. Фактически здесь получается задача двухкритериальной оптимизации (см. лекцию 5), где в качестве частных критериев выступают M и σ. В этой лекции рассмотрим два метода решения данной задачи (метод (A) и метод (B)).

(A) Наиболее заманчивым является «соединение» указанных двух критериев в единый (обобщенный) критерий. Возьмем в качестве обобщенного критерия

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma, \tag{9.1}$$

где λ — некоторая постоянная. Фактически критерий (9.1) представляет собой взвешенную сумму частных критериев M и σ с весовыми коэффициентами 1 и $-\lambda$. При $\lambda > 0$ оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия (9.1) меньше, чем ее среднее значение, что характерно для осторожного человека, т.е. человека, не склонного к риску. Напротив, при $\lambda < 0$ оценка (9.1) больше, чем ее среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. Наконец, при $\lambda = 0$ оценка (9.1) случайной величины совпадает с ее средним значением (т.е. возможные отклонения случайной величины от ее среднего значения игнорируются) — это характеризует человека, безразличного к риску. В качестве основного будем далее рассматривать случай, когда принимающий решение не склонен к риску, т.е. $\lambda > 0$.

Содержательный смысл обобщенного критерия (9.1) при $\lambda > 0$ состоит в том, что увеличение критерия q может происходить как за счет увеличения M, так и за счет уменьшения σ. Таким образом, для человека, не склонного к риску, критерий (9.1) отражает стремление к увеличению ожидаемого выигрыша и уменьшению риска отклонения от него. При этом показатель λ характеризует субъективное отношение принимающего решение к риску: чем больше λ, тем в большей степени он не склонен рисковать; таким образом, λ можно рассматривать как *субъективный показатель меры несклонности к риску* (*субъективный показатель осторожности*).

При использовании критерия (9.1) учет риска отклонения от ожидаемого значения выигрыша производится следующим образом. Ожидаемый выигрыш уменьшается или увеличивается (в зависимости от того, имеется «несклонность» или склонность к риску) на величину, равную произведению показателя риска σ (представляющего собой объективную характеризацию меры риска), на субъективный показатель λ, характеризующий отношение принимающего решение к риску.

Что можно сказать о мере склонности или несклонности к риску по величине показателя λ? Например, большая ли несклонность к риску у человека, для которого $\lambda = 3$? Для ответа на этот вопрос воспользуемся известным в теории вероятностей неравенством Чебышёва. Пусть принимающий решение не склонен к риску. Так как оценкой случайной величины ξ служит число $M - \lambda\sigma$, то «неприятность» для принимающего решение наступает тогда, когда $\xi < M - \lambda\sigma$. Оценим вероятность этого события. В этом случае выполняется неравенство $M - \xi > \lambda\sigma$, следовательно, $|\xi - M| > \lambda\sigma$. В силу неравенства Чебышёва, вероятность последнего соотношения меньше, чем $D\xi/(\lambda\sigma)^2 = \sigma^2/(\lambda^2\sigma^2) = 1/\lambda^2$. Итак, *вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее ее оценки $M - \lambda\sigma$, не превосходит $1/\lambda^2$.*

Так, если $\lambda = 3$, то вероятность того, что случайная величина «не опустится» ниже оценки $M - 3\sigma$, будет не менее $1 - 1/9$, т.е. почти 90%. Такую степень риска можно считать невысокой, т.е. значение $\lambda = 3$ соответствует «достаточно большой степени осторожности» (или «достаточно высокой несклонности к риску»).

Выясним теперь, как устанавливается предпочтение альтернатив по обобщенному критерию (9.1). Будем считать, что принимающий решение не склонен к риску ($\lambda > 0$). Как установлено выше, в этом случае он стремится увеличить ожидаемый выигрыш и уменьшить риск, т.е. критерий M будет здесь позитивным, а критерий σ — негативным. Пусть (a_i) — некоторое множество альтернатив, каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Зафиксируем какие-то две альтернативы $a_{i_1} = (M_{i_1}, \sigma_{i_1})$ и $a_{i_2} = (M_{i_2}, \sigma_{i_2})$. Находим: $q(a_{i_1}) = M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1}$, $q(a_{i_2}) = M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$. Возможны два случая.

α) *Альтернативы a_{i_1} и a_{i_2} сравнимы по Парето.* Пусть, например, $a_{i_1} \overset{\mathrm{Par}}{>} a_{i_2}$. Тогда $M_{i_1} \geq M_{i_2}$ и $\sigma_{i_1} \leq \sigma_{i_2}$ (причем хотя бы одно неравенство строгое), значит, $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$, т.е. $q(a_{i_1}) > q(a_{i_2})$. Таким образом, в этом случае независимо от меры несклонности принимающего решение к риску (т.е. от значения показателя $\lambda > 0$) альтернатива a_{i_1} более предпочтительна, чем альтернатива a_{i_2} (этот факт записывается в виде $a_{i_1} \succ a_{i_2}$).

β) *Альтернативы a_{i_1} и a_{i_2} несравнимы по Парето.* Пусть, например, $M_{i_1} > M_{i_2}$, тогда $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$ (т.е. больший ожидаемый выигрыш здесь всегда сопровождается бóльшим риском). Условие $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$ равносильно тому, что $\lambda < \dfrac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}$. Таким образом, в этом случае

$$a_{i_1} \succ a_{i_2}, \quad \text{если} \quad \lambda < (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}), \tag{9.2}$$

$$a_{i_2} \succ a_{i_1}, \quad \text{если} \quad \lambda > (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}). \tag{9.3}$$

В многокритериальной ЗПР основная проблема при определении оптимальной альтернативы состоит в выборе одной альтернативы из множества оптимальных по Парето альтернатив. Эта проблема легко решается (в случае конечного Парето-оптимального множества), если произведено полное ранжирование Парето-оптимальных альтернатив по предпочтению. Так как любые две Парето-оптимальные альтернативы не сравнимы по Парето, то для них выполнено условие β). В этом случае предпочтение между альтернативами a_{i_1} и a_{i_2} зависит от того, выполнено ли условие (9.2) или условие (9.3). В то же время, предпочтения между Парето-оптимальными альтернативами носят «единообразный» характер, когда условие (9.2) или (9.3) выполнено для всех i_1, i_2, при которых альтернативы a_{i_1} и a_{i_2} оптимальны по Парето. Формально это обстоятельство можно выразить следующим образом. Положим

$$\lambda^0 = \min\left\{\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}\right\}, \quad \lambda^* = \max\left\{\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}\right\},$$

где операторы min и max распространяются на такие пары индексов (i_1, i_2), для которых альтернативы a_{i_1}, a_{i_2} оптимальны по Парето и $M_{i_1} > M_{i_2}$ (следовательно, $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$). Назовем λ^0 ***нижней границей*** несклонности к риску, λ^* — ***верхней границей*** несклонности к риску (всегда выполняется неравенство $\lambda^0 < \lambda^*$). На основании β), для человека, не склонного к риску, получаем следующее правило.

Правило 9.1. а) *Если у принимающего решение его субъективный показатель несклонности к риску меньше нижней границы* ($\lambda < \lambda^0$), *то для него ранжирование множества Парето-оптимальных альтернатив по обобщенному критерию q совпадает с ранжированием по показателю ожидаемого выигрыша M (т. е. более предпочтительной будет альтернатива, для которой больше ожидаемый выигрыш)*;

б) *Если у принимающего решение его субъективный показатель несклонности к риску больше верхней границы* ($\lambda > \lambda^*$), *то для него ранжирование множества Парето-оптимальных альтернатив по обобщенному критерию q совпадает с ранжированием по показателю риска σ (более предпочтительной будет та альтернатива, для которой меньше риск).*

Таким образом, для ЗПР в условиях риска применение обобщенного критерия (9.1) сводит проблему нахождения оптимального решения к проблеме установления для принимающего решение его меры несклонности (или склонности) к риску. В связи с этим возникает законный вопрос: существует ли эта мера вообще? Заметим, что этот вопрос относится не к математике, а к психологии, так как склонность (или несклонность) к риску является субъективно-психологическим качеством человека. Многие психологи отвечают на этот вопрос утвердительно; при этом предлагается определять показатель склонности (или несклонности) индивидуума к риску из наблюдений за тем, как этот индивидуум принимает решения в рискованных ситуациях — как естественных, так и искусственных. В заключение сделаем несколько замечаний.

Замечания 1. Согласно α) максимальное значение обобщенного критерия q всегда достигается на Парето-оптимальной альтернативе. Это позволяет найти одну (или несколько) оптимальных по Парето альтернатив по значениям критерия q. Конечно, если число альтернатив невелико, то задача нахождения какой-то Парето-оптимальной альтернативы может быть легко решена непосредственно. Однако дело существенно осложняется, когда имеется большое число альтернатив (несколько сотен и более). В этом случае удобством характеризации каждой альтернативы *одним* числом — величиной обобщенного критерия — не следует пренебрегать.

2. Основной недостаток критерия (9.1) состоит в том, что он базируется на предположении постоянства меры несклонности к риску для данного лица, принимающего решение (что означает постоянство локального коэффициента замещения между критериями M и σ, см. лекцию 6). Вместе с тем, для большинства людей их мера склонности (или несклонности) к риску меняется в зависимости от величины ожидаемого выигрыша и степени риска. Долю оптимизма здесь привносит то обстоятельство, что для установления ранжирования альтернатив достаточно знать не точное значение показателя λ, а некоторый содержащий его интервал.

3. Типичным примером проявления несклонности к риску является участие во всякого рода страхованиях. Обратный пример — проявление склонности к риску — покупка лотерейного билета, стоимость которого больше ожидаемого (т.е. среднего) выигрыша в этой лотерее.

4. Следует отметить, что, как правило, бизнесмены при решении серьезных деловых вопросов предпочитают не рисковать (т.е. проявляют несклонность к риску). Хотя среди них нередко встречается и противоположный тип. Так, в книге Грейсона [Decisions under Uncertainty] исследовано поведение предпринимателей, связанных с нефтяным бизнесом. Некоторые из бизнесменов охотно соглашались участвовать в рискованных мероприятиях, где ожидаемый доход был значительно меньше их доли вложенного капитала, но при условии, что сами доходы весьма велики. Объяснение здесь кроется в смене целевых установок, когда цель максимизации прибыли заменяется целью «пробиться к более высокому уровню жизни», а последняя цель может быть достигнута только при большой степени риска.

(B) Рассмотрим теперь для ЗПР в условиях риска методы нахождения оптимального решения, основанные на отношении доминирования по Парето (см. лекцию 5). Будем считать, что принимающий решение не склонен к риску; тогда критерий ожидаемого выигрыша будет позитивным, а критерий риска — негативным. Предположим, что требуется выбрать одну (оптимальную) альтер-

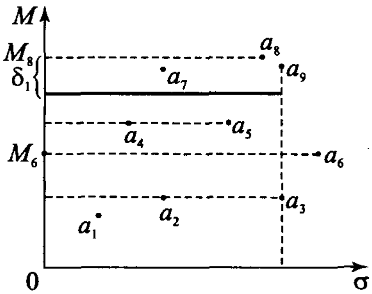


Рис. 9.1

нативу из заданного множества допустимых альтернатив (a_i), каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Изобразив на координатной плоскости точки с координатами (M_i, σ_i), получим картинку типа изображенной на рис. 9.1. Содержательно условие доминирования по Парето $a_{i_1} \overset{\text{Par}}{>} a_{i_2}$ означает, что для альтернативы a_{i_1} получается такой же (или больший) ожидаемый выигрыш, что и для альтернативы a_{i_2}, но с меньшим (или таким же) риском. Например, $a_2 \overset{\text{Par}}{>} a_3$, $a_9 \overset{\text{Par}}{>} a_3$, $a_4 \overset{\text{Par}}{>} a_5$, $a_8 \overset{\text{Par}}{>} a_9$ и т.д. В данном примере множество Парето-оптимальных альтернатив есть $\{a_1, a_4, a_7, a_8\}$; окончательный выбор оптимальной альтернативы должен производится из этого множества. Как указывалось в лекции 5, здесь возможны два подхода: первый подход заключается в том, что рациональный анализ заканчивается указанием множества Парето-оптимальных альтернатив и окончательный выбор оптимальной альтернативы из этого множества производит принимающий решение на основе неформальных дополнительных соображений. Рассмотрим теперь кратко второй подход, когда производятся некоторые процедуры сужения множества Парето-оптимальных альтернатив.

а) *Субоптимизация* связана с выбором одного критерия и назначением нижних границ по остальным критериям. Для рассматриваемой задачи более «осязаем» критерий ожидаемого выигрыша, поэтому логичным является проведение субоптимизации следующим образом: назначить нижнюю границу по критерию M и оптимизировать (в данном случае минимизировать) оставшийся критерий σ. Например, если взять в качестве нижней границы критерия ожидаемого выигрыша значение M_6 (см. рис. 9.1), то оптимальной будет альтернатива a_4, так как среди альтернатив, удовлетворяющих условию $M_i \geq M_6$, она наименее рискованна.

б) *Лексикографическая оптимизация* предполагает упорядочение критериев по относительной важности. Пусть, например, M — важнейший критерий. Так как максимальное значение по критерию M имеет единственная альтернатива a_8, то она и является оптимальной. Здесь наглядно проявляется недостаток метода лексикографической оптимизации: учет фактически одного (важнейшего) критерия. Этот недостаток связан с необходимостью введения жесткого приоритета критериев и может быть снят за счет ослабления «жесткости» приоритетов следующим образом. Назначим некоторую «уступку» δ_1 по важнейшему критерию и на первом шаге отберем альтернативы, для которых оценка по первому (важнейшему) критерию отличается от максимальной оценки не более, чем на δ_1. После этого назначаем «уступку» δ_2 для второго по важности критерия и среди отобранных на первом шаге альтернатив выбираем те, для которых оценка по второму критерию отличается от максимальной не более, чем на δ_2 и т.д.

Например, в рассматриваемом случае возьмем в качестве «уступки» по критерию ожидаемого выигрыша величину δ_1, указанную на рис. 9.1. Тогда результатом выбора на первом шаге будут альтернативы $\{a_7, a_8, a_9\}$. Среди них наилучшей по второму критерию является альтернатива a_7 — она и является оптимальной. Таким образом, несколько снизив требования по критерию M, мы значительно улучшили оценку по критерию σ (т.е. некоторое уменьшение ожидаемого выигрыша привело к существенному снижению риска).

Замечание. Недостаток изложенного метода «последовательных уступок» состоит в необходимости получения дополнительной информации от принимающего решение о величине «уступки» по каждому критерию (кроме последнего).

4. В качестве иллюстрации рассмотренных в п. 3 методов нахождения решения ЗПР в условиях риска рассмотрим следующую задачу.

Задача 12. *Выбор варианта производимого товара.*

Фирма может выпускать продукцию одного из следующих шести видов: зонтики (*З*), куртки (*К*), плащи (*П*), сумки (*С*), туфли (*Т*), шляпы (*Ш*). Глава фирмы должен принять решение, какой из этих видов продукции выпускать в течение предстоящего летнего сезона. Прибыль фирмы зависит от того, каким будет лето — дождливым, жарким или умеренным, и определяется табл. 9.5. Выбор какого варианта производства будет оптимальным?

При отсутствии дополнительной информации о состояниях среды это задача выбора решения в условиях неопределенности, и ее решение возможно при принятии какой-либо гипотезы о поведении среды (см. лекцию 8). Если принимающий решение имеет информацию о вероятностях наступления дождливого, жаркого и умеренного лета, то указанная задача становится задачей принятия решения в условиях риска. В рассматриваемом случае необходимая дополнитнльная информация может быть взята из статистических данных (наблюдений за погодой в данной местности). Предположим, что вероятность дождливого, жаркого и умеренного лета равна соответственно 0, 2; 0, 5; 0, 3. Тогда получаем ЗПР в условиях риска, заданную табл. 9.6.

Таблица 9.5

	Д	*Ж*	*У*
З	80	60	40
К	70	40	80
П	70	50	60
С	50	50	70
Т	75	50	50
Ш	35	75	60

Таблица 9.6

	0,2	0,5	0,3
З	80	60	40
К	70	40	80
П	70	50	60
С	50	50	70
Т	75	50	50
Ш	35	75	60

Найдем ожидаемые выигрыши, соответствующие альтернативам *З, К, П, С, Т, Ш*. Имеем:

$$M_З = 80 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,3 = 58;$$
$$M_К = 70 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,3 = 58;$$
$$M_П = 70 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 57;$$
$$M_С = 50 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,3 = 56;$$
$$M_Т = 75 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,3 = 55;$$
$$M_Ш = 35 \cdot 0,2 + 75 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 62,5.$$

Далее, определим дисперсии случайных величин $\xi_З$, $\xi_К$, $\xi_П$, $\xi_С$, $\xi_Т$, $\xi_Ш$ (здесь удобно использовать следующее свойство дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2).$$

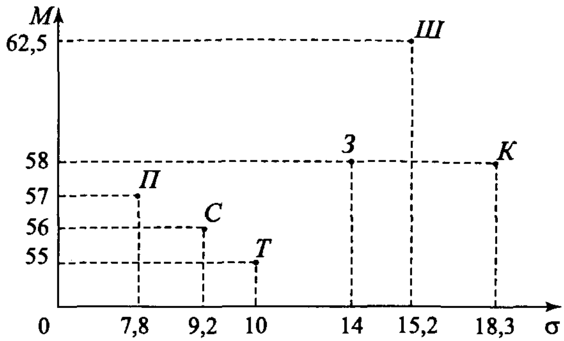


Рис. 9.2

$$D\xi_З = 6400 \cdot 0,2 + 3600 \cdot 0,5 + 1600 \cdot 0,3 - (58)^2 = 196;$$
$$D\xi_К = 4900 \cdot 0,2 + 1600 \cdot 0,5 + 6400 \cdot 0,3 - (58)^2 = 336;$$
$$D\xi_П = 4900 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 3600 \cdot 0,3 - (57)^2 = 61;$$
$$D\xi_С = 2500 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 4900 \cdot 0,3 - (56)^2 = 84;$$
$$D\xi_Т = 5625 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 2500 \cdot 0,3 - (55)^2 = 100;$$
$$D\xi_Ш = 1225 \cdot 0,2 + 5625 \cdot 0,5 + 3600 \cdot 0,3 - (62,5)^2 = 231,5.$$

Среднеквадратичные отклонения рассматриваемых случайных величин таковы:

$\sigma_З = \sqrt{196} = 14,0;$ $\sigma_К = \sqrt{336} \approx 18,3;$ $\sigma_П = \sqrt{61} \approx 7,8;$

$\sigma_С = \sqrt{84} \approx 9,2;$ $\sigma_Т = \sqrt{100} = 10,0;$ $\sigma_Ш = \sqrt{231.5} \approx 15,2.$

Составим таблицу значений критериев M и σ для каждой альтернативы (табл. 9.7).

Таблица 9.7

	M	σ
З	58	14,0
К	58	18,3
П	57	7,8
С	56	9,2
Т	55	10,0
Ш	62,5	15,2

Представив рассматриваемые альтернативы точками на координатной плоскости переменных (M, σ), получим рис. 9.2, из которого находим Парето-оптимальное множество $\{З,\ П,\ Ш\}$. Окончательный выбор оптимальной альтернативы должен производиться из этого множества. Сужение Парето-оптимального множества (в идеале — до одного элемента) может быть произведено только при наличии дополнительной информации о соотношении критериев M и σ; в частности, такое сужение может быть произведено методом субоптимизации или методом лексикографической оптимизации (см. п. 3). Предоставляя эту часть задачи читателю в качестве упражнения, попробуем найти оптимальное решение с помощью обобщенного критерия q вида (9.1). Здесь

$$q(З) = 58 - 14\lambda, \qquad q(C) = 56 - 9,2\lambda, \qquad q(K) = 58 - 18,3\lambda,$$
$$q(T) = 55 - 10\lambda, \qquad q(П) = 57 - 7,8\lambda, \qquad q(Ш) = 62,5 - 15,2\lambda.$$

Для установления ранжирования Парето-оптимального множества $З,\ П,\ Ш$ по обобщенному критерию q найдем вначале нижнюю и верхнюю границы меры несклонности к риску. В обозначениях п. 3 имеем:

$$\frac{M_З - M_П}{\sigma_З - \sigma_П} = \frac{58 - 57}{14 - 7,8} = 0,16; \qquad \frac{M_Ш - M_З}{\sigma_Ш - \sigma_З} = \frac{62,5 - 58}{15,2 - 14,0} \approx 3,8;$$
$$\frac{M_Ш - M_П}{\sigma_Ш - \sigma_П} = \frac{62,5 - 57}{15,2 - 7,8} = 0,74.$$

Отсюда

$$\lambda^0 = \min(0,16; 3,8; 0,74) = 0,16, \quad \lambda^* = \max(0,16; 3,8; 0,74) = 3,8.$$

Таким образом, интервал $(0, +\infty)$ разбивается на три интервала: $(0;\ 0,16)$ — зона малой несклонности к риску (зона малой осторожности); $(3,8;\ +\infty)$ — зона большой несклонности к риску (зона большой осторожности); $[0,16;\ 3,8]$ — зона неопределенности (рис. 9.3).

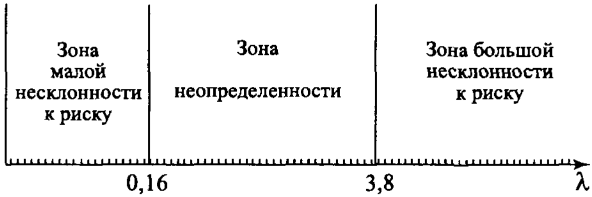


Рис. 9.3

Согласно правилу 9.1, получаем:

1) Если для принимающего решение его мера несклонности к риску $0 \leq \lambda < 0,16$, то для него ранжирование множества Парето-оптимальных альтернатив совпадет с их ранжированием по величине ожидаемого выигрыша: $\text{\textit{Ш}} \succ \text{\textit{З}} \succ \text{\textit{П}}$ (знаком $\succ$ обозначаем предпочтение по величине обобщенного критерия q); при этом оптимальной будет альтернатива *Ш*;

2) Если для принимающего решение его мера несклонности к риску $\lambda > 3,8$, то для него ранжирование множества Парето-оптимальных альтернатив совпадет с их ранжированием по показателю риска: $\text{\textit{П}} \succ \text{\textit{З}} \succ \text{\textit{Ш}}$; при этом оптимальной будет альтернатива *П*.

Рассмотрим теперь случай, когда мера несклонности принимающего решение к риску попадает в зону неопределенности. Возьмем, например, $\lambda = 2$. Тогда $q(\text{\textit{З}}) = 58 - 14 \cdot 2 = 30$; $q(\text{\textit{П}}) = 57 - 7,8 \cdot 2 = 41,4$; $q(\text{\textit{Ш}}) = 62,5 - 15,2 \cdot 2 = 32,1$. Получаем ранжирование $\text{\textit{П}} \succ \text{\textit{Ш}} \succ \text{\textit{З}}$. Таким образом, в этом случае предпочтение для пары (*З*, *Ш*) определяется по величине ожидаемого выигрыша, а для пары (*П*, *Ш*) — по величине риска.

Лекция 10. *Критерий ожидаемой полезности*

• *Недостатки метода сравнения случайных величин по паре показателей (M, σ). Лотереи. Детерминированный денежный эквивалент лотереи.* • *Кривая денежных эквивалентов лотерей, ее построение по пяти точкам. Функция полезности денег.* • *Нахождение детерминированного денежного эквивалента произвольной лотереи. Сравнение лотерей по их денежным эквивалентам (по ожидаемым полезностям).* • *Функция полезности лотерей (эмпирический и аксиоматический подходы).* • *Функции полезности произвольных (неденежных) критериев.* Задача 13. *Сравнение качества работы станций скорой помощи.*

1. В ЗПР в условиях риска исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы является некоторая случайная величина и сравнение альтернатив сводится к сравнению соответствующих им случайных величин (см. лекцию 9). Использованный в лекции 9 метод сравнения по предпочтению случайных величин содержит два шага. Первый шаг — характеризация случайной величины ξ векторной оценкой (M, σ), где $M = M\xi$ — МО и $\sigma = \sigma_\xi$ — СКО случайной величины ξ. Второй шаг — введение некоторого способа сравнения векторных оценок. Наиболее удобным здесь является построение обобщенного критерия, который «превращает» векторную оценку (M, σ) в некоторую скалярную оценку q. В результате выполнения этих двух шагов получаем соответствие $\xi \to q(\xi)$, при котором случайная величина ξ характеризуется единственным числом $q(\xi)$, выражающим ее полезность для принимающего решение. Тогда сравнение по предпочтительности двух случайных величин ξ_1 и ξ_2 сводится к сравнению чисел $q(\xi_1)$ и $q(\xi_2)$, что дает для ЗПР в условиях риска возможность сравнения по предпочтению любых двух альтернатив и нахождения наиболее предпочтительной (оптимальной) альтернативы.

Указанный способ сравнения случайных величин не лишен недостатков. Во-первых, характеризация эффективности с помощью ожидаемого выигрыша $M\xi$ и риска с помощью среднеквадратичного отклонения σ_ξ не является единственно возможной. Во-вторых, построение обобщенного критерия, сводящего пару оценок (M, σ) в единую числовую оценку, требует, как было показано в лекции 6, большой дополнительной информации о соотношении этих критериев между собой. Поэтому в теории принятия решений разрабатывались и другие методы. Наиболее важным из них является метод, основанный на построении ***функции полезности***. Цель данной лекции — краткое изложение способов анализа ЗПР в условиях риска на базе понятия функции полезности.

Вначале сделаем одно терминологическое замечание. Случайную величину $\xi = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ p_1 & \dots & p_k \end{bmatrix}$, где $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, будем иногда интерпретировать как ***лотерею*** с выигрышами $x_1, \dots, x_k$, в которой p_i — доля билетов с выигрышами x_i $(i = \overline{1, k})$. При этом любые две лотереи, выигрыши в которых содержатся в одинаковой пропорции, считаются равноценными (эквивалентными). Например, лотерея (A), в которой имеется 90 билетов с выигрышами \$1 и 10 билетов с выигрышами \$100 считается равноценной лотерее (B), в которой 90 000 билетов с выигрышем \$1 и 10 000 билетов с выигрышем \$100. Участие в лотерее есть случайный выбор одного лотерейного билета. При этом, если выбран билет, на котором обозначено x_i, то при $x_i > 0$ будет получен выигрыш в x_i денежных ед., а при $x_i < 0$ проиграна указанная денежная сумма.

Замечание. Вообще, выигрыши в лотерее не обязательно имеют денежный характер. С точки зрения общего подхода к ЗПР в условиях риска выигрыш в лотерее должен рассматриваться как исход, не обязанный иметь численную (в частности, денежную) оценку. Однако, поскольку анализ денежных лотерей наиболее удобен, на первом этапе ограничимся рассмотрением лотерей с денежными выигрышами.

При введении критерия ожидаемой полезности основным является следующее понятие.

Определение. ***Детерминированным денежным эквивалентом лотереи*** ξ *(ДДЭ ξ) называется денежная сумма x, которая для принимающего решение эквивалентна (равноценна) его участию в этой лотерее.*

Другими словами, если ДДЭ лотереи ξ равен x, то принимающему решение безразлично — получить денежную сумму, равную x, или участвовать в лотерее ξ.

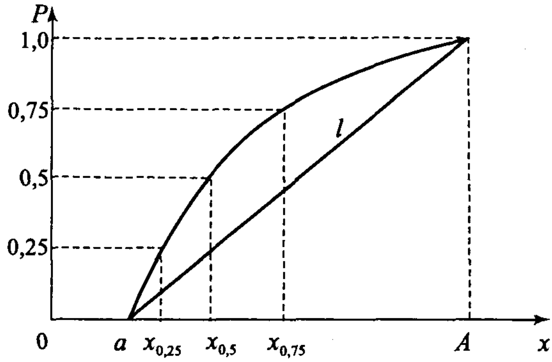


Рис. 10.1

2. Для того чтобы найти ДДЭ произвольной денежной лотереи, достаточно уметь находить ДДЭ *простых лотерей*, т. е. лотерей с двумя выигрышами. Всякую простую лотерею с выигрышами a и A (где $a < A$), будем записывать в виде $\xi_p = \begin{bmatrix} a & A \\ 1-p & p \end{bmatrix}$, $0 \le p \le 1$. Здесь число p называется ***параметром простой лотереи***. Кривая, которая устанавливает соответствие между параметрами простых лотерей и ДДЭ этих лотерей, называется ***кривой денежных эквивалентов***. Опишем здесь одну методику построения кривой денежных эквивалентов — она базируется на предположении, что принимающий решение может указать свой (субъективный) детерминированный денежный эквивалент для некоторых простых лотерей. Для построения кривой денежных эквивалентов обратимся к рис. 10.1. Будем по оси абсцисс откладывать деньги (в некоторых денежных единицах), а по оси ординат — параметр простой лотереи p $(0 \le p \le 1)$. Кривая денежных эквивалентов состоит из точек с координатами $(x_p; p)$, где p — параметр простой лотереи ξ_p, а x_p — ДДЭ простой лотереи ξ_p.

При $p = 0$ получаем простую лотерею $\xi_0 = \begin{bmatrix} a & A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, т.е. лотерея, в которой доля денежных выигрышей a составляет 100%; ДДЭ такой лотереи, очевидно, должен быть равен a. Аналогично, ДДЭ простой лотереи с параметром $p = 1$ равен A. Итак, кривая денежных эквивалентов всегда проходит через точки $(a; 0)$ и $(A; 1)$.

Отвлечемся от построения кривой денежных эквивалентов и вспомним про оценку лотереи по критерию математического ожидания выигрыша. Математическое ожидание выигрыша в простой лотерее ξ_p равно $M\xi_p = M\begin{bmatrix} a & A \\ 1-p & p \end{bmatrix} = a(1-p) + Ap$. Таким образом, $M\xi_p$ — линейная функция переменной p, следовательно, графиком этой функции будет прямая; так как при $p = 0$ выполняется равенство $M\xi_0 = a$, а при $p = 1$ имеем $M\xi_1 = A$, то эта прямая проходит через точки $(a; 0)$ и $(A; 1)$, как и любая кривая денежных эквивалентов.

Рассмотрим теперь вопрос нахождения ДДЭ простой лотереи с параметром $p = 0,5$, т.е. лотереи $\xi_{0,5} = \begin{bmatrix} a & A \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ (в лотерее $\xi_{0,5}$ выигрыши a и A равновероятны; такие лотереи называют иногда лотереями 50–50). Согласно приведенному выше определению, ДДЭ лотереи $\xi_{0,5}$ есть денежная сумма $x_{0,5}$, которая для принимающего решение равноценна его участию в этой лотерее. Что можно сказать о величине $x_{0,5}$? Возьмем, например, простую лотерею с выигрышами в 10 денежных ед. и в 100 денежных ед. Участие в такой лотерее обычно оценивается суммой 20–30 денежных ед., т.е. суммой, существенно меньшей, чем математическое ожидание выигрыша в такой лотерее (равной здесь 55 денежных ед.). С другой стороны, ДДЭ этой лотереи по смыслу не может быть ниже 10. Итак, $10 < x_{0,5} < 55$. Аналогично, примем, что в общем случае $a < x_{0,5} < M\xi_{0,5}$. Таким образом, точка $(x_{0,5}; 0,5)$ лежит на горизонтальной прямой $p = 0,5$ между точками ее пересечения с прямой $x = a$ и прямой l, соединяющей точки $(a; 0)$ и $(A; 1)$ (рис. 10.2).

Далее, принимающий решение должен указать ДДЭ простых лотерей $\xi_{0,25} = \begin{bmatrix} a & A \\ 0,75 & 0,25 \end{bmatrix}$ и $\xi_{0,75} = \begin{bmatrix} a & A \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$, т.е. $x_{0,25}$ и $x_{0,75}$.

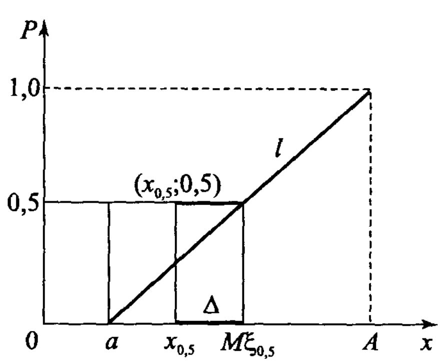


Рис. 10.2

Те же соображения, которые были высказаны при нахождении точки $x_{0,5}$, приводят к неравенствам: $a < x_{0,25} < x_{0,5}$, $x_{0,5} < x_{0,75} < A$.

Итак, на кривой денежных эквивалентов найдено пять точек: $(a;0)$, $(A;1)$, $(x_{0,25};0,25)$, $(x_{0,5};0,5)$, $(x_{0,75};0,75)$, причем последние три — путем опроса принимающего решение. Проведя через эти пять точек гладкую кривую, получаем в результате *эмпирическую кривую денежных эквивалентов* (см. рис. 10.1). Рассмотренный способ построения кривой денежных эквивалентов будем называть ***способом пяти точек***.

Замечания. **1.** Предположим, что ДДЭ простой лотереи с параметром $p = 0,5$ уже установлен (т.е. указана точка $x_{0,5}$). Так как точка $p = 0,25$ является серединой отрезка с концами $p = 0$ и $p = 0,5$, то ДДЭ лотереи с параметром $p = 0,25$ должен быть равен ДДЭ лотереи 50–50 с выигрышами a и $x_{0,5}$, т.е. $x_{0,25} = \text{ДДЭ}\begin{bmatrix} a & x_{0,5} \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$. (Отметим, что последенее равенство может быть использовано также для проверки согласованности ответов принимающего решение.) Аналогично, $x_{0,75} = \text{ДДЭ}\begin{bmatrix} x_{0,5} & A \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Таким образом, для построения кривой денежных эквивалентов достаточно уметь находить ДДЭ некоторых лотерей 50–50, выигрыши которых заключены между a и A. При необходимости число эмпирических точек на кривой денежных эквивалентов может быть увеличено.

2. Характерным свойством построенной на рис. 10.1 кривой денежных эквивалентов является то, что при любом значении параметра p простой лотереи ξ_p

$$\text{ДДЭ}\,\xi_p < M\xi_p. \tag{10.1}$$

Неравенство (10.1) отражает несклонность принимающего решение к риску: участие в лотерее ξ_p оценивается им суммой, меньшей, чем ожидаемый выигрыш в этой лотерее.

• **Пример.** В [29] описан следующий способ построения кривой денежных эквивалентов. Владельцу компании задается вопрос: согласен ли он вложить 20 тыс. долларов в рискованное предприятие (нефтяную скважину) с ожидаемым доходом в 100 тыс. долларов, если вероятность успеха равна 0,47? Если ответ положителен, то вероятность успеха понижается до тех пор, пока опрашиваемому не становится безразлично, выбрать предложение или отказаться от него; если же ответ отрицателен, то вероятность успеха повышается до того уровня, при котором наступает безразличие. Допустим, безразличие наступило при вероятности успеха 0,35. Так как здесь величина прибыли в случае успеха составляет $100 - 20 = 80$, а величина потерь в случае неуспеха равна -20, то имеет место следующее соотношение: $0 = \text{ДДЭ}\begin{bmatrix} -20 & 80 \\ 0,65 & 0,35 \end{bmatrix}$, откуда находят одну точку на кривой денежных эквивалентов. Учитывая, что точки $(-20; 0)$ и $(80; 1)$ находятся на ней автоматически, можно указать ее примерный вид. Для более точного построения кривой денежных эквивалентов необходимо увеличить число эмпирических точек.

Определим теперь *функции полезности денежного критерия*. Предположим, что построена кривая денежных эквивалентов простых лотерей с выигрышами a и A. Пусть x есть ДДЭ простой лотереи с параметром p. Тогда величина $u(x) = p$ называется ***полезностью денежной суммы*** x. Таким образом, по определению выполняется следующая равносильность:

$$u(x) = p \iff \text{ДДЭ}\,\xi_p = x. \tag{10.2}$$

Функция $u(x)$ называется ***эмпирической функцией полезности денежного критерия*** (***функцией полезности денег***). Имеем следующее правило.

Правило 10.1. *Функция полезности денежного критерия есть функция $u(x)$, графиком которой служит кривая денежных эквивалентов.*

Замечание. Существование функции полезности $u(x)$ может быть доказано формально математически при выполнении некоторых условий, относящихся к ДДЭ. А именно, будем предполагать, что выполнены следующие два условия.

(1) При небольшом изменении параметра p простой лотереи ее ДДЭ меняется незначительно.

(2) Если $p_1 < p_2$, то ДДЭ $\xi_{p_1} <$ ДДЭ $\xi_{p_2}c$.

Условие (1) содержательно ясно и не вызывает возражений. Содержательный смысл условия (2) состоит в том, что увеличение доли «удачных» билетов увеличивает ценность лотереи.

Формально условие (1) означает, что функция $p \to \text{ДДЭ}\,\xi_p$ является непрерывной, а условие (2) — что эта функция является монотонно возрастающей (в строгом смысле). Как известно из математического анализа, при указанных предположениях существует обратная функция, причем она также является непрерывной и строго монотонной. В рассматриваемом случае в качестве обратной функции выступает функция полезности $u(x)$. Таким образом, при выполнении условий (1) и (2) функция полезности $u(x)$ существует, является непрерывной и строго монотонно возрастающей.

Для выяснения содержательного смысла полезности вспомним, что для лотереи ξ_p число p указывает долю содержащихся в ней

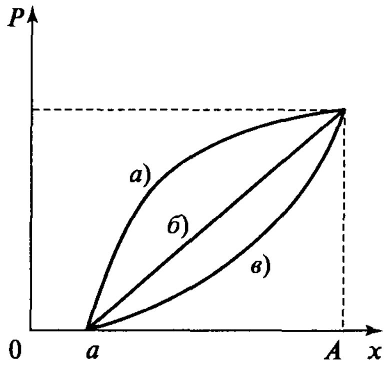


Рис. 10.3

«удачных» билетов (имеющих выигрыш A). Отсюда получаем следующее правило.

Правило 10.2. *Полезность денежной суммы x, где $a \leq x \leq A$, совпадает с долей «удачных» билетов в простой лотерее с выигрышами a и A, участие в которой эквивалентно для принимающего решение получению денежной суммы x.*

Сделаем несколько замечаний, относящихся к функции полезности денежного критерия.

1) Поскольку функция полезности $u(x)$ строится на основе нахождения ДДЭ лотерей, она носит субъективный характер.

2) Бессмысленным является вопрос типа: «Чему равна полезность тысячи долларов?» Для правильной постановки вопроса вначале надо зафиксировать границы денежных выигрышей a и A; после этого для $x \in [a, A]$ можно решать вопрос нахождения полезности $u(x)$.

3) Функция полезности $u(x)$ определена для всех x, заключенных между a и A, т.е. областью определения функции $u(x)$ является интервал $[a, A]$.

4) Значения функции полезности заключены между 0 и 1, причем $u(a) = 0$, $u(A) = 1$.

5) Функция полезности денежного критерия является монотонно возрастающей в строгом смысле, т.е. условие $x_1 < x_2$ влечет $u(x_1) < u(x_2)$.

6) Если принимающий решение не склонен к риску, то его функция полезности является вогнутой (график функции изображен на рис. 10.3, a).

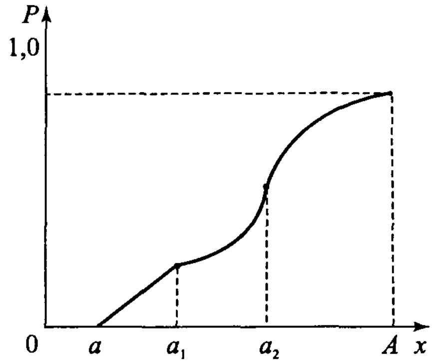


Рис. 10.4

Пояснение. Как уже отмечалось, несклонность к риску для принимающего решение проявляется в том, что он оценивает свое участие в лотерее суммой, которая меньше, чем ожидаемый выигрыш в этой лотерее, т. е. ДДЭ $\xi < M\xi$. Разность $\Delta = M\xi -$ДДЭ ξ в этом случае положительна и называется «надбавка за риск». Если принимающий решение не склонен к риску, то он отказывается от возможной надбавки Δ, предпочитая уверенно получить сумму, равную ДДЭ ξ.

7) Если принимающий решение склонен к риску, то его функция полезности является выпуклой (график этой функции имеет вид, представленный на рис. 10.3, *б*). Склонность к риску характеризуется тем, что принимающий решение оценивает свое участие в лотерее суммой, которая больше, чем ожидаемый выигрыш в этой лотерее: ДДЭ $\xi > M\xi$.

Наконец, если принимающий решение безразличен к риску, то он оценивает лотерею суммой, которая равна ожидаемому выигрышу в этой лотерее; в этом случае графиком его функции полезности будет прямая, соединяющая точки $(a; 0)$ и $(A; 1)$ (рис. 10.3, *в*). Отметим, что «степень» склонности или несклонности к риску проявляется в степени выпуклости (вогнутости) графика функции полезности.

Замечание. Следует иметь в виду, что для одного и того же принимающего решение его отношение к риску может меняться в зависимости от интервала денежных сумм; например, на интервале (a, a_1) он проявляет безразличие к риску, на интервале (a_1, a_2) — склонность к риску и на интервале (a_2, A) — несклонность к риску. Соответственно этому меняется характер выпуклости графика его функции полезности (рис. 10.4).

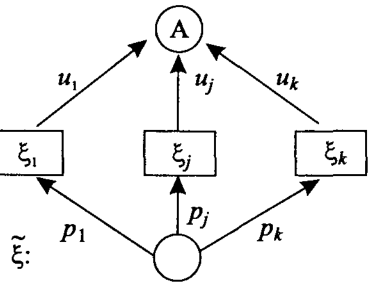


Рис. 10.5

3. Решим следующую задачу: найти ДДЭ произвольной лотереи, выигрыши которой заключены между a и A. Будем считать, что уже построена кривая ДДЭ простых лотерей с выигрышами a и A, т.е. на интервале $[a, A]$ задана функция полезности $u(x)$. Пусть ξ — лотерея вида

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_j & \dots & x_k \\ p_1 & \dots & p_j & \dots & p_k \end{bmatrix}, \tag{10.3}$$

где $p_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$, $x_j \in [a, A]$ $(j = \overline{1,k})$. Для произвольного $j = \overline{1,k}$ положим $u(x_j) = u_j$, тогда $x_j = \text{ДДЭ} \begin{bmatrix} a & A \\ 1 - u_j & u_j \end{bmatrix}$. Попробуем вместо детерминированного денежного эквивалента лотереи ξ найти его полезность, т.е. $u(\text{ДДЭ}\,\xi)$.

Так как для принимающего решение денежная сумма x_j равноценна его участию в лотерее $\xi_j = \begin{bmatrix} a & A \\ 1 - u_j & u_j \end{bmatrix}$, то первоначальная лотерея ξ для него должна быть эквивалентна лотерее $\tilde{\xi}$, которая получается из лотереи ξ заменой каждого денежного выигрыша x_j на участие в лотерее ξ_j, $j = \overline{1,k}$. (Наглядно переход от ξ к $\tilde{\xi}$ можно представить следующим образом: принимающий решение вместо денежного выигрыша x_j получает в качестве приза лотерейный билет, дающий ему право участвовать в лотерее ξ_j; рис. 10.5 схематически представляет лотерею $\tilde{\xi}$. Каждая лотерея ξ_j характеризуется тем, что содержит билеты только с выигрышами a и A, причем доля «удачных» билетов (имеющих выигрыш A), равна в ней u_j. Лотерея $\tilde{\xi}$ может быть снова приведена к простой лотерее с выигрышами a и A следующим образом: надо взять урну, p_j-я часть которой заполнена билетами, случайно выбранными из урны, реализующей лотерею ξ_j $(j = \overline{1,k})$. В этой новой урне доля «удачных» билетов составляет $p_1u_1 + \dots + p_ku_k$.

Замечание. Поскольку последнее утверждение представляет собой центральный момент рассуждения, приведем для него обоснование с помощью формулы полной вероятности. Участие в лотерее $\tilde{\xi}$ можно представить как опыт со случайными исходами, в ходе которого обязательно наступает одно из событий $\xi_1, \dots, \xi_k$, причем p_j — вероятность события ξ_j $(j = \overline{1,k})$. Далее, u_j есть условная вероятность получения «удачного» билета при условии, что произошло событие ξ_j. По формуле полной вероятности получаем, что вероятность выбора «удачного» билета в лотерее $\tilde{\xi}$ равна $p_1u_1 + \dots + p_ku_k$, т.е. приходим к указанному выше результату.

Пусть ДДЭ $\xi = x$. Для принимающего решение получение денежной суммы x эквивалентно участию в лотерее ξ, что, в свою очередь, эквивалентно его участию в простой лотерее $\tilde{\xi}$ с выигрышами a и A, в которой доля «удачных» билетов (с выигрышами A) составляет, как показано выше, $p_1u_1 + \dots + p_ku_k$. Таким образом, полезность денежного эквивалента лотереи ξ определяется равенством

$$u(\text{ДДЭ}\,\xi) = p_1u_1 + \dots + p_ku_k = p_1u(x_1) + \dots + p_ku(x_k). \tag{10.4}$$

Введем краткое обозначение для правой части (10.4). Через $u[\xi]$ будем обозначать лотерею, которая получается из лотереи ξ заменой каждого денежного выигрыша x_j на его полезность $u(x_j)$: $u[\xi] = \begin{bmatrix} u(x_1) & \dots & u(x_j) & \dots & u(x_k) \\ p_1 & \dots & p_j & \dots & p_k \end{bmatrix}$. Лотерея $u[\xi]$ называется ***лотереей в полезностях.***

Определение. ***Ожидаемой полезностью*** *лотереи ξ называется математическое ожидание соответствующей ей лотереи в полезностях $u[\xi]$, т. е. величина*

$$M(u[\xi]) = \sum_{j=1}^{k} p_ju(x_j). \tag{10.5}$$

В этих обозначениях соотношение (10.4) можно переписать в виде

$$u(\text{ДДЭ}\,\xi) = M(u[\xi]), \tag{10.6}$$

что приводит к следующему правилу.

Правило 10.3. *Полезность* ДДЭ *произвольной лотереи* ξ *совпадает с ожидаемой полезностью этой лотереи.*

Из (10.6) находим интересующую нас величину ДДЭ ξ:

$$ДДЭ\,\xi = u^{-1}(M(u[\xi])). \qquad (10.7)$$

Равенство (10.7) дает алгоритм нахождения ДДЭ произвольной лотереи ξ, выигрыши которой заключены между a и A (при условии, что построена кривая денежных эквивалентов простых лотерей с выигрышами a и A).

Правило 10.4. *Чтобы найти* ДДЭ *лотереи* ξ, *необходимо реализовать следующие шаги.*

Шаг 1. Построить по заданной лотерее ξ лотерею в полезностях $u[\xi]$; для этого надо в лотерее ξ заменить каждый денежный выигрыш x_j на его полезность $u(x_j)$.

Шаг 2. Найти ожидаемую полезность $M(u[\xi])$ лотереи ξ по формуле (10.5).

Шаг 3. От точки $M(u[\xi])$, лежащей на оси ординат, «перейти» через кривую денежных эквивалентов на ось абсцисс. Полученная точка $u^{-1}(M(u[\xi]))$ и будет ДДЭ лотереи ξ.

Рассмотрим пример сравнения лотерей по их детерминированным денежным эквивалентам.

Возьмем две лотереи: $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$. Вначале методом, указанным в п. 2, построим кривую денежных эквивалентов простых лотерей, выигрыши которых заключены между 1 и 10 (рис. 10.6).

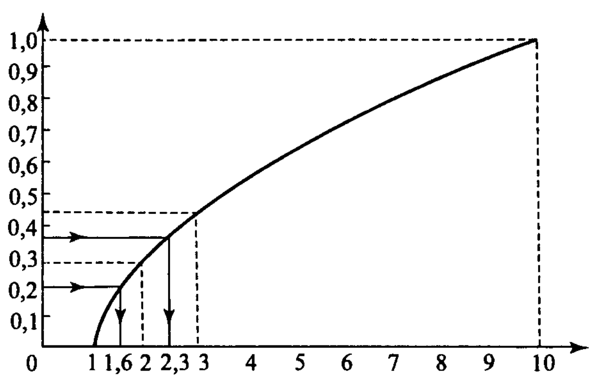


Рис. 10.6

По правилу 10.4 находим ДДЭ лотерей ξ_1 и ξ_2.

Для лотереи ξ_1.

Шаг 1. $u[\xi_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$.

Шаг 2. $M(u[\xi_1]) = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 0,2$.

Шаг 3. ДДЭ $\xi_1 = u^{-1}(M(u[\xi_1])) = u^{-1}(0,2) \approx 1.6$.

Для лотереи ξ_2.

Шаг 1. $u[\xi_2] \approx \begin{bmatrix} 0,3 & 0,46 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Шаг 2. $M(u[\xi_2]) \approx 0,3 \cdot 0,5 + 0,46 \cdot 0,5 = 0,38$.

Шаг 3. ДДЭ $\xi_2 = u^{-1}(M(u[\xi_2])) \approx u^{-1}(0,38) \approx 2,3$.

Так как ДДЭ $\xi_2 >$ ДДЭ ξ_1, то по критерию ДДЭ более предпочтительной оказывается лотерея ξ_2.

В то же время по критерию ожидаемого выигрыша более предпочтительной будет лотерея ξ_1, так как $M\xi_1 = 1 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,2 = 2,8$; $M\xi_2 = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 2,5$. Наблюдаемое противоречие между этими критериями объясняется тем, что критерий МО не учитывает отношения принимающего решение к риску, а критерий ДДЭ — учитывает (вид кривой денежных эквивалентов показывает, что в данном случае принимающий решение не склонен к риску).

Интересно сопоставить способ сравнения лотерей по ДДЭ и рассмотренный в лекции 9 способ сравнения лотерей по обобщенному критерию q (см. формулу (9.1)). Проведем это сопоставление для рассматриваемого примера. Для нахождения $q(\xi_1)$ и $q(\xi_2)$ вычислим вначале дисперсии этих лотерей. Имеем:

$$D\xi_1 = M\xi_1^2 - (M\xi_1)^2 = 1 \cdot 0,8 + 100 \cdot 0,2 - (2,8)^2 = 12,96,$$

откуда $\sigma_{\xi_1} = 3,6$. Далее,

$$D\xi_2 = M\xi_2^2 - (M\xi_2)^2 = 4 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,5 - (2,5)^2 = 0,25,$$

откуда $\sigma_{\xi_2} = 0,5$. Имеем: $q(\xi_1) = 2,8 - 3,6\lambda$; $q(\xi_2) = 2,5 - 0,5\lambda$, откуда

$$q(\xi_1) > q(\xi_2) \iff 2.8 - 3.6\lambda > 2.5 - 0,5\lambda \iff \lambda < \frac{3}{31}.$$

Таким образом, ξ_1 будет предпочтительней, чем ξ_2 по обобщенному критерию q для принимающего решение, у которого показатель несклонности к риску $\lambda < 3/31$; это весьма низкая «степень осторожности».

Так как функция полезности денежного критерия является монотонно возрастающей (свойство 5), то для любых двух лотерей ξ_1 и ξ_2 условие ДДЭ $\xi_1 \geq$ ДДЭ ξ_2 равносильно тому, что

$u(\text{ДДЭ}\,\xi_1) \geq u(\text{ДДЭ}\,\xi_2)$; согласно (10.6) имеем $u(\text{ДДЭ}\,\xi_1) = M(u[\xi_1])$, $u(\text{ДДЭ}\,\xi_2) = M(u[\xi_2])$, откуда получаем

$$\text{ДДЭ}\,\xi_1 \geq \text{ДДЭ}\,\xi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M(u[\xi_1]) \geq M(u[\xi_2]). \tag{10.8}$$

Равносильность (10.8) показывает, что сравнение лотерей по их ДДЭ сводится фактически к сравнению ожидаемых полезностей этих лотерей.

Правило 10.5 (критерий ожидаемой полезности). *Для любых двух лотерей ξ_1 и ξ_2 с денежными выигрышами, заключенными между a и A, лотерея ξ_1 считается более предпочтительной, чем лотерея ξ_2 тогда и только тогда, когда ожидаемая полезность лотереи ξ_1 больше, чем ожидаемая полезность лотереи ξ_2.*

4. Пусть $\tilde{u}$ — функция, которая каждой лотерее ξ ставит в соответствие ожидаемую полезность этой лотереи: $\tilde{u}(\xi) = M(u[\xi])$. Функция $\tilde{u}$ называется *эмпирической функцией полезности лотерей*. Областью определения функции $\tilde{u}$ является множество всевозможных лотерей, выигрыши которых заключены между a и A (это множество обозначается далее через $L[a, A]$); значением функции $\tilde{u}(\xi)$ является некоторое число — ожидаемая полезность лотереи ξ. Напомним, что функция $\tilde{u}$ строится в два этапа: первый этап состоит в построении эмпирической функции полезности $u(x)$ рассматриваемого критерия на интервале $[a, A]$; второй этап представляет собой линейное продолжение функции u на множество лотерей $L[a, A]$.

Основным алгебраическим свойством функции $\tilde{u}$ является ее *линейность*. Для формулировки этого свойства потребуется следующее понятие.

Пусть ξ_1, ξ_2 — две лотереи, выигрыши которых находятся в интервале $[a, A]$. Тогда можно построить новую лотерею

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1),$$

выигрышами которой являются билеты на право участия в лотереях ξ_1 и ξ_2. При этом лотерея $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ может быть приведена к лотерее с выигрышами из интервала $[a, A]$ — тем же способом, который был использован в п. 3 при решении задачи нахождения ДДЭ произвольной лотереи. Таким образом, множество лотерей $L[a, A]$ образует *выпуклое пространство*. Формально это означает, что в этом множестве можно производить операцию «смешивания» — по любой паре лотерей ξ_1 и ξ_2 строить новую лотерею $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$; при этом для операции «смешивания» выполняются обычные правила, которые справедливы для операций сложения и умножения в линейном пространстве.

Линейность функции $\tilde{u}$ состоит в том, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in \in L[a, A]$, $\alpha_1\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ выполняется равенство

$$\tilde{u}(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2) = \alpha_1\tilde{u}(\xi_1) + \alpha_2\tilde{u}(\xi_2). \tag{10.9}$$

(Формальное доказательство (10.9) может быть получено с помощью формулы полной вероятности, см. замечание в п. 3).

В силу правила 10.5 предпочтение между двумя лотереями ξ_1 и ξ_2 может быть выражено с помощью функции $\tilde{u}$:

$$\xi_1 \succsim \xi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{u}(\xi_1) \geq \tilde{u}(\xi_2). \tag{10.10}$$

Итак, на множестве лотерей $L[a, A]$ построена некоторая функция $\tilde{u}$, по величине которой устанавливается предпочтение между произвольными двумя лотереями; при этом основным алгебраическим свойством функции $\tilde{u}$ является ее линейность. Величину $\tilde{u}(\xi)$ можно рассматривать как численную оценку лотереи ξ, а саму функцию $\tilde{u}$ — как обобщенный критерий на множестве лотерей.

Возникает законный вопрос, — можно ли «придумать» другой способ сравнения лотерей? С логической точки зрения здесь наиболее естественным является аксиоматический путь, впервые примененный для решения указанной проблемы Нейманом и Моргенштерном [41].

В схематическом виде подход Неймана и Моргенштерна состоит в следующем. Пусть на множестве лотерей $L[a, A]$ задано некоторое отношение предпочтения $\overset{*}{\succsim}$, устанавливающее полное ранжирование этого множества (т.е. для $\overset{*}{\succsim}$ выполняются аксиомы линейности и транзитивности). Справедлив следующий результат.

Теорема 10.1. *Предположим, что отношение $\overset{*}{\succsim}$ удовлетворяет аксиомам:*

(*A*1) *При любых лотереях $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L[a, A]$ множества $\{\alpha \in [0, 1] : \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2 \overset{*}{\succsim} \xi_3\}$ и $\{\alpha \in [0, 1] : \xi_3 \overset{*}{\succsim} \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2\}$ являются замкнутыми;*

(*A*2) *Если $\xi_1 \overset{*}{\sim} \xi_2$, то при любой лотерее $\xi \in L[a, A]$*

$$\alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi \overset{*}{\sim} \alpha\xi_2 + (1 - \alpha)\xi.$$

Тогда:

1) *существует заданная на множестве лотерей числовая функция* V, *обладающая следующими свойствами*:

а) V *представляет отношение* $\overset{*}{\succsim}$, *т. е.*

$$\xi_1 \overset{*}{\succsim} \xi_2 \iff V(\xi_1) \geq V(\xi_2);$$

б) *функция* V *является линейной.*

2) *Если* V_1 *— некоторая числовая функция, заданная на множестве лотерей, удовлетворяющая условию линейности и представляющая отношение* $\overset{*}{\succsim}$, *то найдутся такие постоянные* k, l, *где* $k > 0$, *что*

$$V_1(\xi) = kV(\xi) + l.$$

Поясним содержательный смысл утверждений 1) и 2). Отождествляя исход $x \in [a, A]$ с лотереей $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$, можно считать, что $[a, A] \subset L[a, A]$. Пусть v — ограничение функции V на множестве $[a, A]$, а $\tilde{v}$ — линейное продолжение функции v на множество лотерей. Так как функции $\tilde{v}$ и V обе линейны и совпадают на $[a, A]$, то $\tilde{v} = V$. Назовем v ***функцией полезности исходов***, а ее *линейное продолжение* $\tilde{v}$ — ***функцией полезности лотерей***. Согласно а)

$$\xi_1 \overset{*}{\succsim} \xi_2 \iff \tilde{v}(\xi_1) \geq \tilde{v}(\xi_2). \qquad (10.11)$$

Таким образом, утверждение 1) теоремы 10.1 означает, что *всякое предпочтение* $\overset{*}{\succsim}$, *задающее полное ранжирование множества лотерей и удовлетворяющее аксиомам* (A1) *и* (A2), *совпадает с предпочтением, которое устанавливается по величине ожидаемой полезности лотерей для некоторой функции полезности исходов* v.

Утверждение 2) теоремы 10.1 означает, что *измерение предпочтения* $\overset{*}{\succsim}$ *выполняется в интервальной шкале: оно определяется однозначно фиксированием масштаба и начала отсчета.*

5. Рассмотренный в предыдущих пунктах данной лекции способ сравнения денежных лотерей может быть с небольшими модификациями перенесен на лотереи, выигрыши в которых не имеют денежного выражения. Рассмотрим в качестве примера неденежного показателя такой показатель, как *время*. Для использования критерия ожидаемой полезности основным является введение понятия детерминированного временно́го эквивалента лотереи.

Определение. *Пусть* $\xi = \begin{bmatrix} t_1 & \dots & t_k \\ p_1 & \dots & p_k \end{bmatrix}$ — *лотерея с временны́ми исходами, где* $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. ***Детерминированным временны́м эквивалентом*** *лотереи* ξ (*обозначение*: ДВЭ ξ) *называется промежуток времени* t, *который для принимающего решение эквивалентен его участию в этой лотерее.*

Как и в случае лотерей с денежными исходами, нахождение ДВЭ произвольной лотереи с временны́ми исходами может быть сведено к нахождению ДВЭ некоторых простых лотерей, причем «связующим звеном» здесь является построение кривой временны́х эквивалентов, являющейся графиком функции временно́й полезности.

Замечание. Так как принимающий решение обычно стремится уменьшить временно́й показатель, то для того, чтобы кривая временны́х эквивалентов имела такой же вид, как и кривая денежных эквивалентов, надо от переменной t перейти к новой переменной t' по формуле $t' = -t$ или $t' = c - t$, где c — некоторая константа. В этом случае целью принимающего решение будет увеличение показателя t'.

Задача 13. *Сравнение качества обслуживания станции скорой помощи.*

Оценкой качества (быстроты) обслуживания для станции скорой помощи будем считать время реагирования на вызов, т.е. время, проходящее с момента получения вызова до момента выезда бригады скорой помощи. На основании статистических данных, относящихся к определенному периоду времени (например, месяцу), время реагирования может быть представлено в виде дискретной случайной величины (лотереи) $\xi = \begin{bmatrix} t_j \\ p_j \end{bmatrix}$ $(j = \overline{1,k})$, где t_j — фактическое время реагирования (в минутах), p_j — доля случаев, в которых наблюдалось время реагирования t_j. Сравнение качества обслуживания двух станций скорой помощи сводится к сравнению соответствующих им случайных величин. Рассмотрим в качестве упрощенного примера две станции, характеризуемые случайными величинами $\xi_1 = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 25 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}$ и $\xi_2 = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 18 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}$. Какая из этих станций быстрее реагирует на вызовы?

Воспользуемся вначале критерием математического ожидания. Для первой станции $M\xi_1 = 5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,2 = 11,5$; для второй станции $M\xi_2 = 8 \cdot 0,1 + 13 \cdot 0,8 + 18 \cdot 0,1 = 13$. Итак, согласно критерию математического ожидания, первая станция работает лучше второй. Заметим, что здесь математическое ожидание фактически дает среднее время реагирования; таким образом, у первой станции среднее время реагирования на 1,5 мин меньше, чем у второй. Однако, можно ли считать среднее время реагирования адекватной характеристикой качества (быстроты) работы станции скорой помощи? По-видимому, ответ на этот вопрос должен быть отрицательным. Дело в том, что при подсчете среднего времени реагирования может наблюдаться эффект компенсации «плохих» показателей «хорошими». Например, для первой станции среднее время реагирования составляет 11,5 мин, однако в 20% случаев фактическое время реагирования превышает этот показатель более чем вдвое (компенсация 20% «плохих» показателей произошла за счет 30% «хороших»). Однако в реальности такая компенсация не происходит: для тех 20% больных, для которых время реагирования составило 25 мин, исход мог оказаться трагическим. С точки зрения контролирующего органа, оценивающего работу станций скорой помощи, превышение некоторого стандарта (пороговой величины) является крайне нежелательным.

Допустим, пороговое время реагирования составляет 15 мин; тогда, чтобы оценить ДВЭ простых лотерей, перейдем к новой временно́й переменной $t' = 15 - t$. Величина t' указывает в каждом конкретном случае — насколько этот случай улучшает пороговое время реагирования (если $t' > 0$) или насколько он ухудшает его (если $t' < 0$). Составим таблицу пересчета временно́й переменной (табл. 10.1) и перейдем от случайных величин ξ_1 и ξ_2 к случайным величинам $\xi_1' = 15 - \xi_1$ и $\xi_2' = 15 - \xi_2$:

$$\xi_1' = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}, \qquad \xi_2' = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Таблица 10.1

t	5	8	10	13	18	25
$t' = 15 - t$	10	7	5	2	-3	-10

Далее, принимающий решение должен указать ДВЭ некоторых простых лотерей на временно́м интервале $[-10, 10]$. С учетом нежелательности ухудшения порогового времени реагирования (т.е. нежелательности отрицательных значений переменной t'), зададим ДВЭ простых лотерей при значениях параметра $p = 0,5; 0,25; 0,75$ следующим образом:

$$\text{ДВЭ}\begin{bmatrix}-10 & 10\\ 0,5 & 0,5\end{bmatrix} = -6, \quad \text{ДВЭ}\begin{bmatrix}-10 & 10\\ 0,75 & 0,25\end{bmatrix} = -9,$$

$$\text{ДВЭ}\begin{bmatrix}-10 & 10\\ 0,25 & 0,75\end{bmatrix} = -2.$$

Теперь строим кривую временны́х эквивалентов по пяти точкам (рис. 10.7). Используя правило 10.4 (с заменой ДДЭ на ДВЭ), находим ожидаемые полезности лотерей ξ_1' и ξ_2':

$$M(u[\xi_1']) = M\begin{bmatrix}u(10) & u(5) & u(-10)\\ 0,3 & 0,5 & 0,2\end{bmatrix} \approx M\begin{bmatrix}1 & 0,9 & 0\\ 0,3 & 0,5 & 0,2\end{bmatrix} = 0,75;$$

$$M(u[\xi_2']) = M\begin{bmatrix}u(7) & u(2) & u(-3)\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{bmatrix} \approx M\begin{bmatrix}0,94 & 0,82 & 0,68\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{bmatrix} \approx 0,82.$$

Таким образом, $M(u[\xi_2']) > M(u[\xi_1'])$, т.е. по критерию ожидаемой полезности лучшей должна быть признана вторая станция. Содержательно этот факт может быть объяснен следующим образом: хотя вторая станция имеет худшее среднее время реагирования, у нее меньший процент нежелательных отклонений от порогового времени реагирования, причем сами эти отклонения меньше по величине.

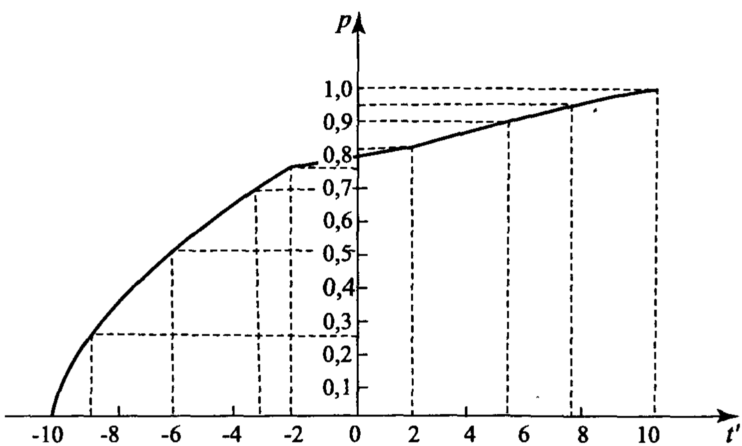


Рис. 10.7

Лекция 11. *Использование смешанных стратегий как способ уменьшения риска*

• *Понятие смешанной стратегии. Стандартный симплекс. Способы реализации смешанной стратегии.* • *Снижение риска при использовании смешанных стратегий. Задача условной минимизации риска.* • *Портфель ценных бумаг (портфель инвестора), его структура и эффективность. Способы снижения риска при формировании портфеля ценных бумаг.* • Задача 14. *Задача об оптимальном портфеле.*

1. Один из способов уменьшения риска состоит в использовании смешанных стратегий. Рассмотрим задачу принятия решения, в которой имеется n альтернатив $\overline{1,n}$, называемых также ***чистыми стратегиями*** или просто ***стратегиями***.

Определение. ***Смешанной стратегией*** *называется n-компонентный вероятностный вектор, т. е. вектор*

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.

При этом чистая стратегия $i = \overline{1,n}$ отождествляется со смешанной стратегией $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стои́т на i-м месте. Множество всех n-компонентных вероятностных векторов образует $(n-1)$-*мерный стандартный симплекс*, который обозначается далее через S_n.

Одномерный стандартный симплекс геометрически может быть представлен в виде отрезка (рис. 11.1, *а*)): любая точка M отрезка M_1M_2 единственным образом записывается в виде:

$$M = x_1M_1 + x_2M_2,$$

где $x_1, x_2 \geq 0$ и $x_1 + x_2 = 1$. Аналогично, двумерный симплекс геометрически может быть представлен в виде треугольника

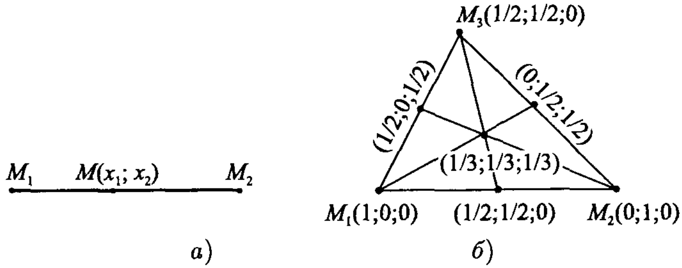


Рис. 11.1

(рис. 11.1, *б*)), так как любая точка M треугольника записывается в виде:

$$M = x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3,$$

где $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. При этом числа (x_1, x_2, x_3) называются ***барицентрическими координатами*** точки M в симплексе $M_1 M_2 M_3$. Например, центр треугольника (точка пересечения медиан) имеет барицентрические координаты $(1/3, 1/3, 1/3)$; барицентрические координаты некоторых точек треугольника $M_1 M_2 M_3$ приведены на рис. 11.1, *б*).

В задачах принятия решений смешанная стратегия $x = (x_1, \ldots, x_n)$ может быть реализована одним из следующих способов.

1) *Вероятностный способ* состоит в том, что принимающий решение выбирает одну из альтернатив $\overline{1, n}$ не путем явного указания, а случайно, причем так, что x_i есть вероятность выбора альтернативы i.

2) ***Физическая смесь стратегий*** получается тогда, когда возможно «смешивание» альтернатив (эта возможность определяется физической природой альтернатив). В этом случае вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ соответствует физической смеси чистых стратегий, в которой x_i — доля i-х чистых стратегий.

3) *Статистический способ* может быть реализован в том случае, когда решение принимается многократно. Тогда i-я компонента вектора x указывает частоту использования i-й чистой стратегии.

2. Рассмотрим применение смешанных стратегий для задачи принятия решения в условиях риска. Как было показано выше (см. лекцию 9, п. 1), в таких задачах исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы $i = \overline{1, n}$ является случайная величина вида $\xi_i = \begin{bmatrix} a_i^1 \ldots a_i^m \\ y_1 \ldots y_m \end{bmatrix}$. По-прежнему ее математическое ожидание (ожидаемое значение) обозначаем через M_i, дисперсию через D_i, среднеквадратичное отклонение — через σ_i. Если принимающий решение использует смешанную стратегию $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то исходом, соответствующим этой смешанной стратегии, будет случайная величина $\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$.

Найдем математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$ случайной величины ξ. Используя простейшие свойства математического ожидания, получаем:

$$M\xi = M\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i M\xi_i = \sum_{i=1}^{n} x_i M_i. \tag{11.1}$$

Для отклонения случайной величины ξ от ее ожидаемого значения выполняется условие

$$\xi - M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i - \sum_{i=1}^{n} x_i M_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (\xi_i - M_i),$$

откуда получаем выражение для дисперсии

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i(\xi_i - M_i)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j(\xi_j - M_j)\Big)\Big] =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j M[(\xi_i - M_i)(\xi_j - M_j)].$$

Вводя обозначения $V_{ij} = M[(\xi_i - M_i)(\xi_j - M_j)]$, окончательно получаем

$$D\xi = \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \tag{11.2}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j}. \tag{11.3}$$

Числа V_{ij} называются ***показателями ковариации*** для случайных величин ξ_i и ξ_j. Итак, имеем следующее правило.

Правило 11.1. *Дисперсия случайной величины* $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\xi_i$ *может быть представлена в виде квадратичной формы* (11.2), *коэффициентами которой являются показатели ковариации* V_{ij}, *а переменными — компоненты вероятностного вектора* $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Формулу (11.2) можно сделать более «прозрачной», если перейти от показателей ковариации к коэффициентам корреляции. Напомним, что ***коэффициентом корреляции*** между случайными величинами ξ_i и ξ_j называется число

$$r_{ij} = \frac{M[(\xi_i - M_i)(\xi_j - M_j)]}{\sigma_i\sigma_j}.$$

Так как $V_{ij} = r_{ij}\sigma_i\sigma_j$, то подставляя это выражение в (11.2), получаем

$$D\xi = \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j). \tag{11.4}$$

Как известно, коэффициент корреляции r_{ij} показывает степень связи случайных величин ξ_i и ξ_j. Рассмотрим частный случай формулы (11.4), когда случайные величины ξ_i $(i = \overline{1,n})$ попарно независимы. В этом случае они не коррелированны, т. е. при $i \neq j$ имеем $r_{ij} = 0$, а при $i = j$ получаем

$$r_{ii} = \frac{M[(\xi_i - M_i)(\xi_i - M_i)]}{\sigma_i\sigma_i} = \frac{M(\xi_i - M_i)^2}{\sigma_i^2} = \frac{D\xi_i}{D\xi_i} = 1,$$

откуда

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i x_i)^2. \tag{11.5}$$

Примéним теперь полученные выше формулы для выяснения целесообразности использования смешанных стратегий в ЗПР в условиях риска. Как показывает формула (11.1), использование смешанных стратегий с целью повышения ожидаемого выигрыша бесполезно. В самом деле, пусть i^* — та чистая стратегия, на которой величина $M_i = M\xi_i$ достигает максимума. Согласно (11.1),

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i M_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i M_{i^*} = M_{i^*}\sum_{i=1}^{n} x_i = M_{i^*}.$$

Таким образом, *при применении любой смешанной стратегии ожидаемый выигрыш будет не больше, чем ожидаемый выигрыш при применении чистой стратегии i^*.*

Оценим теперь величину показателя риска σ_ξ при использовании смешанной стартегии x. Так как величина показателя риска зависит от степени корреляции между случайными величинами (ξ_i) $(i = \overline{1,n})$ (см. формулу (11.4)), то далее мы рассмотрим три характерных случая.

1) *Случайные величины (ξ_i) попарно некоррелированны ($r_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$, где $i, j = \overline{1,n}$).* Возьмем, например, в качестве смешанной стратегии x равномерно распределенную стратегию (т.е. $x_i = 1/n$ для $i = 1, \ldots, n$). Тогда, согласно (11.5),

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sigma_i}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}. \qquad (11.6)$$

Отсюда, полагая $\overline{\sigma} = \max\limits_i \sigma_i$, имеем

$$\sigma_\xi \leq \frac{1}{n}\sqrt{n\overline{\sigma}^2} = \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}. \qquad (11.7)$$

Так как с ростом n дробь $\overline{\sigma}/\sqrt{n}$ неограниченно уменьшается, приходим к следующему важному выводу.

Правило 11.2. *Для* ЗПР *в условиях риска, в которой случайные величины (ξ_i) не коррелированны, применение смешанных стратегий ведет к уменьшению риска. В частности, если все дисперсии (σ_i) $i = \overline{1,n}$ ограничены в совокупности некоторой константой, то при $n \to \infty$ риск стремится к нулю.*

Поясним сформулированное правило на следующем примере.

• **Пример 11.1.** Рассмотрим ЗПР в условиях риска, заданную табл. 11.1.

Таблица 11.1

	M	σ
1	20	4
2	18	3
3	16	2,8
4	10	2,3
5	9	2

Таблица 11.2

	M	σ
x^1	20	4
x^2	19	2,5
x^3	17	1,91
x^4	16	1,55
x^5	14,6	1,3

Пусть x^k $(k \leq n)$ — смешанная стратегия, в которой первые k стратегий из $\overline{1,n}$ выбираются равновероятно, а остальные стратегии входят с нулевыми вероятностями (т.е. отбрасываются). Согласно (11.1) и (11.5), математическое ожидание и СКО случайной величины, возникающей при использовании смешанной стратегии x^k, определяются равенствами

$$M = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} M_i, \qquad \sigma = \frac{1}{k}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2}.$$

Так, для примера 11.1 при смешанной стратегии $x^2 = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)$ математическое ожидание равно $(20+18)/2 = 19$, а среднее квадратичное отклонение есть $\sqrt{4^2+3^2}/2 = 2,5$. В табл. 11.2 представлены показатели M и σ для смешанных стратегий x^k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Из нее наглядно видно, что *при увеличении числа «смешиваемых» стратегий незначительное уменьшение ожидаемого выигрыша сопровождается устойчивым снижением риска.*

2) *Случай полной прямой корреляции* ($r_{ij} = 1$ для всех $i, j = \overline{1,n}$). Тогда, согласно (11.4),

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i x_i)\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i\right)^2,$$

откуда

$$\sigma_\xi = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i. \tag{11.8}$$

Пусть $\min\limits_{1\leq i\leq n}\sigma_i$ достигается при $i = i_0$, а $\max\limits_{1\leq i\leq n}\sigma_i$ — при $i = i^*$. Тогда, на основании (11.8),

$$\sigma_\xi = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sigma_{i^*} x_i = \sigma_{i^*}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sigma_{i^*},$$

$$\sigma_\xi = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n}\sigma_{i_0} x_i = \sigma_{i_0}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sigma_{i_0},$$

откуда

$$\sigma_{i_0} \leq \sigma_\xi \leq \sigma_{i^*}. \tag{11.9}$$

Итак, *в случае полной прямой корреляции использование смешанных стратегий с целью снижения риска бесполезно.* Действительно, согласно (11.8), получающийся при смешивании стратегий показатель риска есть взвешенная сумма показателей риска σ_i; риск при применении любой смешанной стратегии будет не меньше, чем наименьший из рисков, соответствующих чистым стратегиям, и поэтому при $n \to \infty$ он не будет стремиться к нулю.

3) *Случай полной обратной корреляции* ($r_{ij} = -1$ *при* $i \neq j$). Рассмотрим для простоты пример, когда имеются всего две альтернативы, т.е. $n = 2$. Тогда, согласно (11.4),

$$
\begin{aligned}
D\xi &= \sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \\
&= (\sigma_1 x_1)(\sigma_1 x_1) - (\sigma_1 x_1)(\sigma_2 x_2) - (\sigma_2 x_2)(\sigma_1 x_1) + (\sigma_2 x_2)(\sigma_2 x_2) = \\
&= (\sigma_1 x_1)^2 - 2(\sigma_1 x_1)(\sigma_2 x_2) + (\sigma_2 x_2)^2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем $\sigma_\xi = 0 \iff D\xi = 0 \iff \frac{x_1}{x_2} = \sigma_2/\sigma_1$.

Таким образом, в этом случае риск может быть полностью исключен при использовании смешанной стратегии $x = (x_1, x_2)$, *компоненты которой обратно пропорциональны показателям риска для случайных величин* ξ_1 *и* ξ_2.

Вернемся теперь к рассмотрению общего случая — когда между случайными величинами (ξ_i), $i = \overline{1,n}$, имеется корреляция, но она не является полной. Тогда при применении смешанной стратегии $x = (x_1, \ldots, x_n)$ величина показателя риска σ_ξ находится по общей формуле (11.3), использование которой предполагает знание показателей ковариации V_{ij} (или коэффициентов корреляции r_{ij}). Если матрица ковариаций $(V_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ известна, то возникает следующая **задача**: *при какой смешанной стратегии риск минимален?*

Математически эта задача разрешима (так как целевая функция (11.3) определена на замкнутом ограниченном множестве S_n и непрерывна на нем, ее минимум достигается на S_n по теореме Вейерштрасса, см. лекцию 3). Однако с экономической точки зрения ее решение не представляет интереса, так как стратегия, минимизирующая риск, может привести к очень маленькому ожидаемому выигрышу. Помня о том, что осторожный экономист стремится к увеличению ожидаемого выигрыша и одновременному снижению риска, необходимо рассматривать ЗПР в условиях риска как двухкритериальную задачу и использовать методы многокритериальной оптимизации (см. лекцию 9). Естественным здесь является такой подход, когда по критерию ожидаемого выигрыша — как более «осязаемому» — назначается нижняя граница M_0 и ищется стратегия, которая обеспечивает ожидаемый выигрыш M_0 с минимальным возможным риском. Таким образом, решается задача *условной минимизации риска* при дополнительном условии, наложенном на величину ожидаемого выигрыша.

При возможности использования смешанных стратегий получаем следующую **математическую задачу**: *найти минимум функции* (11.3) *при ограничениях* $\left\{x \in S_n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_i x_i = M_0\right\}$.

Сформулированная задача является *задачей квадратичного программирования*, для решения которых имеются специальные методы.

3. Важным примером экономической реализации принципа «смешивания» стратегий является способ распределения капитала на рынке ценных бумаг. Обычно на рынке обращается множество видов ценных бумаг. Курсовая стоимость ценных бумаг каждого вида зависит от большого числа разнообразных факторов и может рассматриваться как случайная величина.

Предположим, что на рынке имеется n видов ценных бумаг $\overline{1,n}$. Если инвестор вложит весь инвестиционный капитал в ценные бумаги *одного вида* $i = \overline{1,n}$, то исходом для инвестора будет некоторая случайная величина ξ_i, значения которой определяются курсовой стоимостью ценных бумаг i-го вида и величиной вложенного капитала. Эта случайная величина может быть охарактеризована парой показателей (M_i, σ_i), где M_i — ее математическое ожидание (т.е. ожидаемый доход) и σ_i — среднеквадратичное отклонение (показатель риска). Но обычно инвестор вкладывает наличный капитал *не в один, а в несколько видов ценных бумаг*, составляющих ***портфель инвестора***. Предположим, что инвестор распределил свой капитал между ценными бумагами видов $\overline{1,n}$, причем доля капитала, вложенного в ценные бумаги i-го вида, равна x_i (по смыслу $x_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$). В терминах п. 1 это означает, что инвестор использует смешанную стратегию $x = (x_1, \ldots, x_n)$; тогда исход для него может быть представлен в виде случайной величины $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \xi_i$, для которой ее характеристики M и σ находятся по формулам (11.1) и (11.3).

Итак, *структура портфеля* инвестора определяется вектором $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а *эффективность портфеля* характеризуется векторной оценкой (M, σ), где $M = M(x)$ — ожидаемый доход (*доход портфеля*) и $\sigma = \sigma(x)$ — показатель риска (*риск портфеля*). В результате получаем двухкритериальную ЗПР, для которой множество ее альтернатив может быть отождествлено с множеством точек стандартного симплекса S_n, а критерии $M(x)$ и $\sigma(x)$ определены следующими равенствами:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i; \tag{11.10}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j}. \tag{11.11}$$

Здесь множество векторных оценок есть $\{(M(x), \sigma(x)) : x \in S_n\}$ — оно является непрерывным, т. е. «заполняет» некоторую область на плоскости переменных (M, σ). Таким образом, получаем в данном случае *непрерывную задачу двухкритериальной оптимизации* с критериями $M(x)$ и $\sigma(x)$.

Нашей целью является нахождение способов снижения риска при формировании портфеля ценных бумаг. Как было показано выше (см. п. 2), в задаче принятия решения в условиях риска применение смешанных стратегий может привести к уменьшению риска; эта возможность определяется характером корреляции между случайными величинами (ξ_i). Выясним структуру ЗПР, возникающей в данном случае. В качестве альтернатив инвестора (множества чистых стратегий) здесь выступают виды ценных бумаг $\overline{1, n}$. Что выступает здесь в качестве состояний среды? Так как при фиксированном капитале инвестора его доход при выборе им i-й альтернативы (т. е. при вложении всего капитала в ценные бумаги i-го вида) будет определяться курсовой стоимостью ценных бумаг i-го вида, то в качестве состояний среды здесь можно рассматривать будущие значения курсовых стоимостей ценных бумаг всех видов.

Разумеется, на момент принятия решения будущие значения курсовых стоимостей ценных бумаг инвестору неизвестны. Существенным здесь является то, что их можно трактовать как некоторые случайные величины. Именно это обстоятельство позволяет считать рассматриваемую задачу задачей принятия решения *в условиях риска.*

Найдем теперь в явной форме исход, который имеет место при выборе инвестором i-й чистой стратегии. Пусть η_i — курсовая стоимость ценных бумаг i-го вида, η_i^0 — начальная курсовая стоимость ценных бумаг i-го вида (на момент принятия решения). Разность $\Delta\eta_i = \eta_i - \eta_i^0$ представляет собой изменение курсовой стоимости ценных бумаг i-го вида, причем условие $\Delta\eta_i > 0$ соответствует повышению курсовой стоимости, условие $\Delta\eta_i < 0$ — понижению курсовой стоимости, $\Delta\eta_i = 0$ — сохранению курсовой стоимости.

В качестве исхода для инвестора при выборе им чистой стратегии $i = \overline{1,n}$ можно рассматривать $\xi_i = \Delta\eta_i/\eta_i^0$, т. е. величину изменения курсовой стоимости ценных бумаг i-го вида, отнесенную к ее начальной курсовой стоимости.

Проанализируем характер корреляции между случайными величинами η_i и η_j. Говорят, что между случайными величинами η_i и η_j имеется *положительная корреляция*, если всякое увеличение курсовой стоимости ценных бумаг i-го вида сопровождается увеличением курсовой стоимости ценных бумаг j-го вида; *отрицательная корреляция*, если всякое увеличение курсовой стоимости ценных бумаг i-го вида сопровождается уменьшением курсовой стоимости ценных бумаг j-го вида.

З а м е ч а н и е. Отметим, что изменение курсовой стоимости ценных бумаг одного вида само по себе не является причиной изменения курсовой стоимости ценных бумаг другого вида. Истинной причиной изменения курсовых стоимостей ценных бумаг служат внешние события макроэкономического и политического характера (такие,. как изменения законодательства, изменения цен на энергоносители, внедрение новых технологий, договора между крупными корпорациями, наступление «крупномасштабных» несчастных случаев, стихийные бедствия и т. п.). Однако, экономическая реальность такова, что подобные изменения внешних факторов приводят, как правило, к синхронному изменению курсов ценных бумаг.

Правило 11.3. *Предположим, что курсовые стоимости ценных бумаг видов i и j связаны таким образом, что всякое приращение курсовой стоимости ценных бумаг вида i сопровождается пропорциональным приращением курсовой стоимости ценных бумаг вида j (с некоторым коэффициентом пропорциональности $k \neq 0$). Тогда:*

а) *при $k > 0$ для ξ_i и ξ_j имеет место полная прямая корреляция;*

б) *при $k < 0$ для ξ_i и ξ_j имеет место полная обратная корреляция.*

Доказательство. В данном случае выполняется равенство $\Delta\eta_j = k\Delta\eta_i$. Так как $\xi_i = \Delta\eta_i/\eta_i^0$, $\xi_j = \Delta\eta_j/\eta_j^0$, то получаем

$$\frac{\xi_j}{\xi_i} = \frac{\Delta\eta_j/\eta_j^0}{\Delta\eta_i/\eta_i^0} = \frac{\Delta\eta_j}{\Delta\eta_i}\cdot\frac{\eta_i^0}{\eta_j^0} = k\frac{\eta_i^0}{\eta_j^0}.$$

Последняя дробь есть некоторая постоянная c, откуда $\xi_j = c\xi_i$. Получаем, что случайные величины ξ_i и ξ_j связаны линейной зависимостью; это эквивалентно условию, что корреляция является полной. Для завершения доказательства остается заметить, что знак c совпадает со знаком k.

На основании результатов, изложенных в п. 2, получаем:

А) При выполнении условия $\Delta\eta_j = k\Delta\eta_i$, где $k > 0$ (случай полной прямой корреляции) «смешивание» ценных бумаг видов i и j не приводит к уменьшению риска;

Б) При выполнении условия $\Delta\eta_j = k\Delta\eta_i$, где $k < 0$ (случай полной обратной корреляции) «смешивание» ценных бумаг видов i и j в отношении обратной пропорциональности показателям рисков σ_i и σ_j сводит риск до нуля.

В заключение следует отметить, что в экономической реальности наличие полной корреляции, так же как и полное отсутствие корреляции — явления достаточно редкие. Типичной является ситуация, когда между курсами ценных бумаг существует корреляция, выражаемая в виде пропорциональности приращений курсовых стоимостей с некоторым *переменным* коэффициентом пропорциональности k.

Приближенные значения коэффициентов корреляции между курсами ценных бумаг могут быть получены на основании свéдений о биржевом курсе ценных бумаг (такие свéдения регулярно публикуются в странах с развитой рыночной экономикой).

4. Задача 14. *Задача об оптимальном портфеле.*

При какой структуре портфеля следует считать его оптимальным? В силу наличия двух критериев оценки — ожидаемого дохода и риска, — которые не сведены в один обобщенный критерий, однозначный ответ на этот вопрос невозможен (см. лекцию 5). Необходимым условием оптимальности портфеля является условие оптимальности по Парето. Содержательно оптимальность некоторого портфеля по Парето означает, что не существует другого портфеля, который имеет такой же (или больший) ожидаемый доход при меньшем (или таком же) риске.

Однако обоснованный выбор *одной* (оптимальной) альтернативы из множества альтернатив, оптимальных по Парето — представляет собой сложную проблему, для решения которой требуется дополнительная информация о соотношении между собой критериев M и σ. Более простая задача — сужение Парето-оптимального множества — может быть решена, например, на базе субоптимизации (см. лекцию 5, п. 3), которая принимает здесь следующий вид. Зададим некоторое пороговое значение M_0 для ожидаемого дохода и среди всех альтернатив x будем искать такую, которая обеспечивает ожидаемый доход M_0 с наименьшим возможным риском.

Формально такая постановка сводится к следующей математической задаче: *найти минимум функции* $\sigma(x)$ *вида* (11.11) *при ограничениях* $M(x) = M_0$ *и* $x \in S_n$. Итак, получается задача нахождения экстремума функции n переменных при наличии ограничений. Решение такой задачи существенно упрощается, если ограничения принимают вид равенств — тогда получается задача нахождения условного экстремума функции (см. лекцию 3, п. 3). В рассматриваемом случае этого можно добиться, если отбросить условие неотрицательности переменных x_i, $i = \overline{1,n}$ — тогда система ограничений принимает вид: $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} M_i x_i = M_0, \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$ и решение такой задачи может быть найдено методом множителей Лагранжа.

Предположим, что вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ является решением указанной задачи. Выясним содержательный смысл компонент вектора x^*. Возможны три случая.

1) $x_i^* = 0$. Тогда в ценные бумаги i-го вида капитал вкладывать не надо.

2) $x_i^* > 0$. Тогда в ценные бумаги i-го вида следует вложить x_i^*-ю долю наличного капитала инвестора.

3) $x_i^* < 0$. Тогда инвестору следует взять в долг дополнительный капитал в размере $|x_i^*|$-й доли капитала инвестора.

Замечание. Для практического решения задачи об оптимальном портфеле требуются данные в виде вектора $(M_i)_{i=\overline{1,n}}$ — вектора ожидаемых доходов от ценных бумаг каждого вида, а также матрицы $(V_{ij})_{(i,j=\overline{1,n})}$ — матрицы ковариаций. Приближенно эти данные могут быть получены на основании све́дений о биржевом курсе ценных бумаг.

Лекция 12. *Принятие решения в условиях риска с возможностью проведения эксперимента*

• *Эксперимент как средство уточнения истинного состояния среды.* • *Идеальный эксперимент; нахождение максимально допустимой стоимости идеального эксперимента.* • *Байесовский подход к принятию решения в условиях риска.* • Задача 15. *Бурение нефтяной скважины.*

1. При принятии решения в условиях неопределенности (или в условиях риска) принципиальная сложность выбора решения возникает из-за незнания принимающим решение истинного состояния среды. В лекциях 8–11 рассмотрено несколько типов критериев, каждый из которых по-своему «борется» с неопределенностью: с помощью выдвижения гипотезы о поведении среды (критерии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа); с помощью усреднения получаемых выигрышей (критерий ожидаемого выигрыша); с помощью учета как ожидаемого выигрыша, так и меры отклонения от него (обобщенный критерий $q(M, \sigma)$); на базе субъективного отношения принимающего решение к риску (критерий ожидаемой полезности). Однако, *каждый из этих подходов дает лишь способ рационального анализа неопределенности, не «уничтожая» самой неопределенности.* «Уничтожение» (или хотя бы уменьшение) неопределенности может быть произведено только на основе уточнения истинного состояния среды.

На практике такое уточнение осуществляется, как правило, с помощью сбора дополнительной информации, а также с помощью проведения экспериментов, по результатам которых судят об имеющемся состоянии среды. Например, прежде, чем приступить к лечению больного при неясном диагнозе, врач проводит дополнительные анализы; прежде, чем бурить дорогостоящую нефтяную скважину, геолог производит сейсморазведку; прежде, чем наладить производство какого-либо товара, предприниматель изготавливает пробную партию этого товара и т.д. В рамках теории принятия решений все эти действия означают не что иное, как проведение эксперимента с целью уточнения состояния среды.

Эксперимент называется ***идеальным***, если по его результату принимающий решение узнает истинное состояние среды. На практике наличие идеального эксперимента — явление достаточно редкое. Чаще всего результат эксперимента дает некоторую информацию, на основе которой может быть произведено уточнение состояния среды. Например, в ситуации с неясным диагнозом о наличии болезни (А), ответ — после проведения дополнительного анализа — будет не «у больного заболевание (А)», а например, «у больного повышенный лейкоцитоз». При желании врач может воспользоваться статистическими данными, из которых он узна́ет, например, что повышенный лейкоцитоз у людей с заболеванием (А) наблюдается в 70% случаев, но его повышение может вызываться и другими заболеваниями.

Как использовать результаты эксперимента и имеющиеся статистические данные при принятии решений наиболее эффективно? В п. 3 данной лекции рассматривается одна из методик, позволяющая решить эту проблему. Она основана на формуле Байеса — формуле переоценки вероятностей событий с учетом результата проведенного эксперимента.

Отметим, что не для всякой задачи принятия решения эксперимент является возможным. Если для некоторой ЗПР эксперимент возможен, то возникает задача оценки целесообразности его проведения. Дело в том, что проведение эксперимента всегда требует затрат (материальных, организационных, временны́х и пр.). Соотнесение дополнительной выгоды, которую мы ожидаем получить от дополнительной информации, приобретаемой в результате эксперимента, и затрат на его проведение — в этом и состоит суть проблемы целесообразности проведения эксперимента.

Следует иметь в виду, что особенно существенной является возможность проведения эксперимента для «уникальных» задач принятия решений, т.е. таких, в которых решение принимается только один раз и связано с большими материальными затратами.

2. Рассмотрим задачу нахождения максимально допустимой стоимости идеального эксперимента. Пусть задача принятия решения в условиях риска задана матрицей выигрышей $\|a_i^j\|$ ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$), причем принимающему решение известен вероятностный вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где y_j — вероятность наступления состояния j (табл. 12.1).

Таблица 12.1

	y_1 $1 \ldots$	y_j j	y_m $\ldots m$
1 $\vdots$			
i		a_i^j	
$\vdots$ n			
max		β^j	

Возьмем здесь в качестве оценки альтернативы i соответствующий ей ожидаемый выигрыш, т.е. число $\sum\limits_{j=1}^{m} a_i^j y_j \quad (i = \overline{1,n})$. Максимальный ожидаемый выигрыш есть

$$\max_i \sum_{j=1}^{m} a_i^j y_j. \tag{12.1}$$

Предположим, что принимающий решение может провести идеальный эксперимент, т.е. такой эксперимент, по результату которого он узнáет истинное состояние среды. Обозначим через C стоимость идеального эксперимента. Пусть в результате проведения эксперимента принимающий решение узнал, что среда находится в состоянии j. Тогда, естественно, он выберет альтернативу, которая дает максимальный выигрыш в состоянии j, т.е. выигрыш $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$. Так как вероятность того, что среда окажется в состоянии j, равна y_j, а выигрыш в этом случае равен β^j, то получаем,что результатом идеального эксперимента (до его проведения) для принимающего решение является случайная величина $\xi = \begin{bmatrix} \beta^j \\ y_j \end{bmatrix}_{(j=\overline{1,m})}$, которой соответствует ожидаемый выигрыш $M\xi = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta^j y_j$. Вычитая отсюда стоимость эксперимента, находим итоговый выигрыш при проведении эксперимента: $\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \beta^j y_j - C\Big)$.

Таким образом, идеальный эксперимент будет выгодным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{m} \beta^j y_j - C > \max_i \sum_{j=1}^{m} a_i^j y_j. \qquad (12.2)$$

Перенося член, из правой части неравенства (12.2) в левую его часть и используя тождество $-\max X = \min(-X)$, получаем $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} (\beta^j - a_i^j) y_j > C$. Вспоминая, что $\beta^j - a_i^j = r_i^j$ — риск в ситуации (i, j) (см. лекцию 8, п. 3), приходим к неравенству $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} r_i^j y_j > C$.

Итак, *идеальный эксперимент является выгодным тогда и только тогда, когда его стоимость меньше минимального ожидаемого риска.*

Величина $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} r_i^j y_j$ является максимально допустимой стоимостью идеального эксперимента.

3. Для изложения байесовского подхода к переоценке вероятностей событий напомним некоторые понятия из элементарной теории вероятностей.

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, обозначается через $P_B(A)$ и вычисляется по формуле

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (12.3)$$

Рассмотрим следующую теоретико-вероятностную схему. Пусть $\{A_1, \ldots, A_m\}$ — полная группа событий (иногда их называют ***гипотезами***) и для каждой гипотезы A_j, $j = \overline{1, m}$ известна ее вероятность $P(A_j)$. Пусть произведен опыт, в результате которого произошло событие B. Если известны условные вероятности $P_{A_j}(B)$ для всех $j = \overline{1, m}$, тогда условная (послеопытная) вероятность события A_j $(j = \overline{1, m})$ может быть найдена по формуле Байеса

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) P_{A_j}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{m} P(A_k) P_{A_k}(B)}. \qquad (12.4)$$

Рассмотрим теперь в схематической форме задачу принятия решения в условиях риска, заданную с помощью матрицы выигрышей, которая имеет вид табл. 12.2.

Таблица 12.2

	A_1	...	A_j	...	A_m
1					
$\vdots$					
i			a_i^j		
$\vdots$					
n					

Здесь $\{1, \ldots, n\}$ — стратегии принимающего решение (игрока), $\{A_1, \ldots, A_m\}$ — состояния среды, a_i^j — выигрыш игрока в ситуации, когда он выбирает стратегию i, а среда принимает состояние A_j. Принимающему решение (игроку) для каждого $j = \overline{1, m}$ известна вероятность $P(A_j)$ наступления состояния A_j, причем $P(A_j) \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} P(A_j) = 1$. Предполагается, что среда может находиться в одном и только одном из состояний $\{A_1, \ldots, A_m\}$; другими словами, случайные события $\{A_1, \ldots, A_m\}$ образуют полную группу событий, поэтому их можно взять в качестве гипотез в рамках рассмотренной выше теоретико-вероятностной схемы. Известные игроку вероятности состояний среды $P(A_1), \ldots, P(A_m)$ являются безусловными (доопытными) вероятностями.

Предположим,что проводится некоторый эксперимент, результат которого как-то зависит от имеющегося состояния среды. Если в результате эксперимента наблюдается событие B и, кроме того, известны условные вероятности $P_{A_j}(B)$ при всех $j = \overline{1, m}$, то используя формулу Байеса (12.4), можно найти уточненные (послеопытные) вероятности каждого состояния среды. Знание уточненных вероятностей состояний среды позволяет более точно указать оптимальную стратегию игрока.

Описанный подход к принятию решений в условиях риска называется ***байесовским***, так как он основан на формуле Байеса. Этот подход иллюстрируется примером, рассмотренным в следующем пункте.

4. Задача 15. *Бурение нефтяной скважины.*

Руководитель поисковой группы должен принять решение: бурить нефтяную скважину или нет. Скважина может оказаться «сухой» (C), т.е. без нефти, «маломощной» (M), т.е. с малым содержанием нефти, и «богатой» ($Б$), т.е. с большим содержанием нефти. Альтернативами руководителя группы являются: x_1 — бурить и x_2 — не бурить. Чистая прибыль (в тыс. долларов) при выборе одной из этих альтернатив в зависимости от возможного типа скважины приведена в таблице прибылей (табл. 12.3).

Таблица 12.3

	C	M	$Б$
x_1	−70	50	200
x_2	0	0	0

Кроме того, руководителю поисковой группы известно, что в данной местности вероятности сухой, маломощной или богатой скважины таковы: $P(C) = 0,5$; $P(M) = 0,3$; $P(Б) = 0,2$.

Руководитель поисковой группы может провести эксперимент с целью уточнения состояния среды. Этот эксперимент представляет собой *сейсморазведку*, результатом которой будет ответ — какова *структура грунта* в данной местности (но не ответ на вопрос о типе скважины!) В принципе структура грунта может быть либо открытой (O), либо замкнутой ($З$). Руководитель группы имеет таблицу результатов экспериментов, проведенных в этой местности (табл. 12.4).

Таблица 12.4

Тип скважины	Структура грунта		Всего
	открытая (O)	замкнутая ($З$)	
C (сухая)	45	5	50
M (маломощная)	11	19	30
$Б$ (богатая)	4	16	20
Всего	60	40	100

Эта таблица показывает, сколько раз на грунтах открытой и грунтах замкнутой структуры встречались скважины типа C, M, $Б$ (т.е. она дает *совместную статистику* структуры грунта и типов скважин для данной местности).

Итак, руководитель группы должен принять решение:

а) *проводить ли эксперимент (его стоимость составляет* 10 *тыс. долларов)*;

б) *если проводить, то как поступать в дальнейшем в зависимости от результата эксперимента.*

Таким образом, получена многошаговая задача принятия решений в условиях риска. Опишем методику нахождения оптимального решения по шагам.

Шаг 1. Построим дерево (рис. 12.1), на котором указаны все этапы процесса принятия решений — *дерево решений*. Ветви дерева соответствуют возможным альтернативам, а вершины — возникающим ситуациям. Альтернативами руководителя поисковой группы являются: α — отказ от эксперимента, β — проведение эксперимента, x_1 — бурить, x_2 — не бурить. Альтернативы природы: выбор типа скважины (*С, М, Б*), а также выбор структуры грунта (*О* или *З*).

Построенное дерево определяет игру руководителя группы (игрок *1*) с природой (игрок *2*). Позициями данной игры служат вершины дерева, а ходами игроков — выбираемые ими альтернативы. Позиции, в которых ход делает руководитель группы, изображены прямоугольником; позиции, в которых ход делает природа, — кружком.

Пояснение. Игра протекает следующим образом. В начальной позиции ход делает игрок *1* (руководитель группы). Он должен принять решение — отказаться от эксперимента (выбрать альтернативу α) или проводить эксперимент (выбрать альтернативу β). Если он отказался от проведения эксперимента, то игра переходит в следующую позицию, в которой руководитель группы должен принять решение: бурить (выбрать альтернативу x_1) или не бурить (выбрать альтернативу x_2). Если же он решает проводить эксперимент, то игра переходит в позицию, в которой ход делает природа, выбирая одну из альтернатив *О* или *З*, соответствующих возможным результатам эксперимента, и т. д. Игра заканчивается тогда, когда она переходит в окончательную позицию (т. е. в вершину дерева, для которой нет исходящих из нее ветвей).

Шаг 2. Для каждой альтернативы, которая является ходом природы (т.е. исходит из позиции, изображенной кружком), надо найти вероятность этого хода. Для этого поступаем следующим образом. Для каждой позиции дерева существует единственный путь, соединяющий эту позицию с начальной позицией. Если для позиции природы путь, соединяющий ее с начальной позицией, не проходит через позицию (*Э*), означающую проведение эксперимента, то вероятности состояний $P(С)$, $P(М)$ и $P(Б)$ являются безусловными (доопытными) и находятся из табл. 12.4:

$$P(С) = \frac{50}{100} = 0,5; \quad P(М) = \frac{30}{100} = 0,3; \quad P(Б) = \frac{20}{100} = 0,2.$$

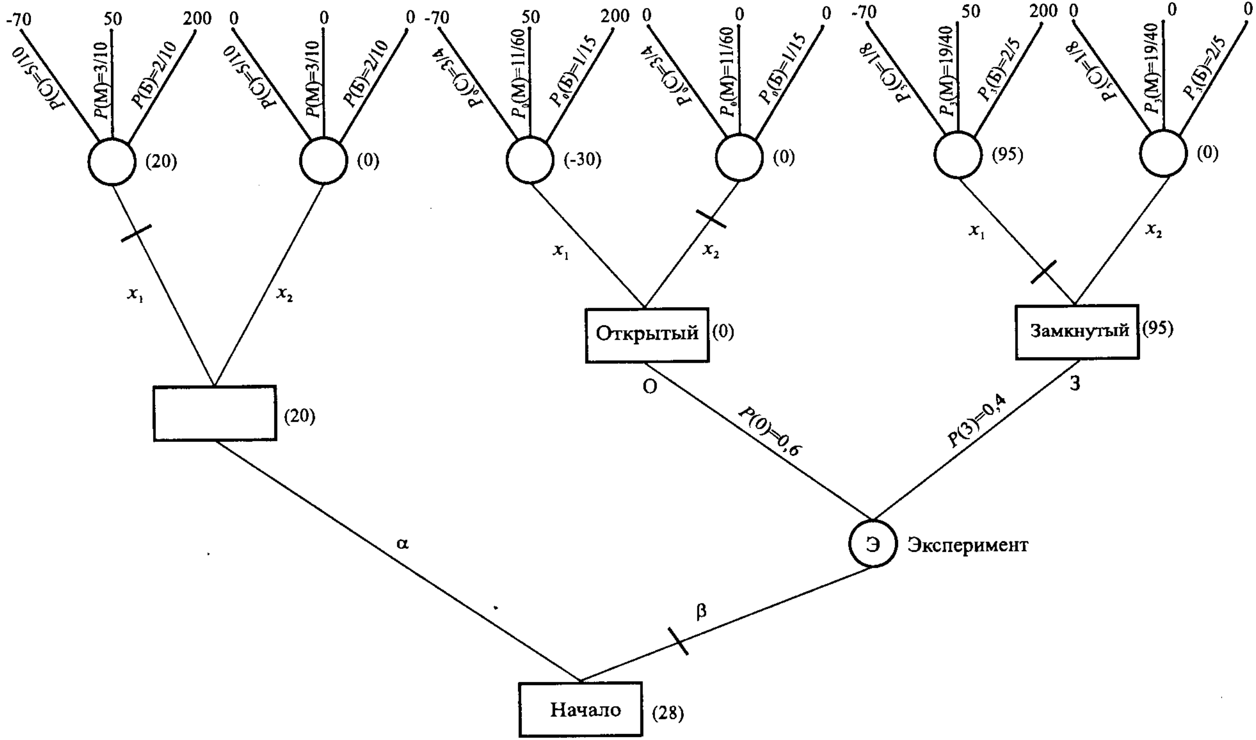
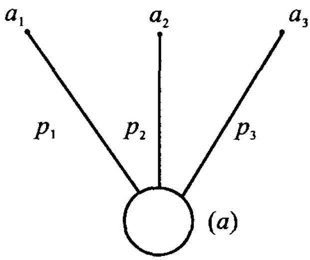
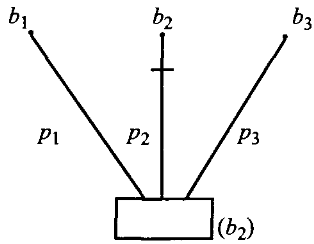

-70
50
200
0
0
0
-70
50
200
0
0
0
-70
50
200
0
0
0
P(C)=5/10
P(M)=3/10
P(Б)=2/10
P(C)=5/10
P(M)=3/10
P(Б)=2/10
P_0(C)=3/4
P_0(M)=11/60
P_0(Б)=1/15
P_0(C)=3/4
P_0(M)=11/60
P_0(Б)=1/15
P_3(C)=1/8
P_3(M)=19/40
P_3(Б)=2/5
P_3(C)=1/8
P_3(M)=19/40
P_3(Б)=2/5
(20)
(0)
(-30)
(0)
(95)
(0)
x_1
x_2
x_1
x_2
x_1
x_2
Открытый
(0)
Замкнутый
(95)
(20)
О
З
P(0)=0,6
P(3)=0,4
Э
Эксперимент
α
β
Начало
(28)

Рис. 12.1



$a = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3$

Рис. 12.2



$b_2 = \max\{b_1, b_2, b_3\}$

Рис. 12.3

Если же для позиции природы путь, соединяющий ее с начальной позицией, проходит через позицию ($Э$), то вероятности состояний среды становятся условными вероятностями и находятся по формуле (12.4):

$$P_О(С) = \frac{P(С \cap О)}{P(О)} = \frac{0,45}{0,60} = \frac{3}{4}, \qquad P_З(С) = \frac{P(С \cap З)}{P(З)} = \frac{0,05}{0,40} = \frac{1}{8},$$

$$P_О(М) = \frac{P(М \cap О)}{P(О)} = \frac{0,11}{0,60} = \frac{11}{60}, \qquad P_З(М) = \frac{P(М \cap З)}{P(З)} = \frac{0,19}{0,40} = \frac{19}{40},$$

$$P_О(Б) = \frac{P(Б \cap О)}{P(О)} = \frac{0,04}{0,60} = \frac{1}{15}, \qquad P_З(Б) = \frac{P(Б \cap З)}{P(З)} = \frac{0,16}{0,40} = \frac{2}{5}.$$

В позиции ($Э$) вероятности ходов, приводящих к позициям ($О$) и ($З$), находятся из табл. 12.4: $P(О) = 60/100 = 0,6$; $P(З) = 40/100 = 0,4$.

Шаг 3. Произведем оценку всех позиций дерева игры, «спускаясь» от конечных позиций к начальной. Оценкой позиции служит ожидаемый выигрыш в этой позиции. Оценки конечных позиций находим из табл. 12.3. Укажем теперь способ нахождения оценки произвольной позиции дерева игры в предположении, что уже найдены оценки всех следующих за ней позиций.

а) *Для позиции природы* ее оценка находится как сумма попарных произведений оценок следующих за ней позиций на вероятности этих позиций (см. рис. 12.2). Другими словами, для позиции природы ее оценка представляет собой ожидаемый выигрыш в соответствующей лотерее.

б) *Для позиции игрока 1* оценкой служит максимум всех оценок следующих за ней позиций (рис. 12.3). Мотивировка: в «своей» позиции игрок может сделать любой ход, поэтому он выберет тот, который приводит к наибольшему возможному выигрышу. В каждой позиции игрока *1* помечаем черточкой ту ветвь дерева, которая приводит к позиции, имеющей максимальную оценку.

При оценке позиции (*Э*), соответствующей проведению эксперимента, вычитаем его стоимость.

Обратимся к рис. 12.1. Получаем, что в начальной позиции ожидаемая прибыль без проведения эксперимента (альтернатива α) — 20 тыс. долларов; ожидаемая прибыль с проведением эксперимента (альтернатива β) — 28 тыс. долларов. Таким образом, целесообразным является решение — проводить эксперимент (сейсморазведку). Далее, если эксперимент покажет, что грунт открытый, то бурение производить не следует, а если замкнутый, то нужно бурить.

В игре с природой произвольная стратегия игрока *1* задается указанием альтернативы, выбираемой в каждой его позиции. В данной игре оптимальной будет та стратегия игрока *1*, которая предписывает в каждой позиции выбор хода, соответствующего помеченной альтернативе.

Замечания. **1.** В рассмотренном примере в качестве оценок позиций природы использовалось математическое ожидание выигрыша. Это означает, что была принята гипотеза безразличия к риску. Если мы хотим учесть отношение принимающего решения к риску, то необходимо иметь дополнительно кривую денежных эквивалентов, заданную на интервале возможных выигрышей. Тогда для любой позиции природы ее оценка находится как ДДЭ соответствующей лотереи (см. лекцию 10, п. 3). При этом, чтобы учесть стоимость проведения эксперимента, удобно ее сразу вычесть из оценок всех окончательных позиций, пути в которые проходят через позицию (*Э*).

2. Можно также дать оценку всех позиций рассматриваемой игры не в денежных единицах, а в единицах полезности. Для этого надо построить на интервале возможных денежных выигрышей функцию полезности принимающего решение. В этом случае оценки всех окончательных позиций следует указывать не в деньгах, а в полезностях. Оценка позиции природы находится здесь как ожидаемая полезность лотереи в полезностях, т. е. по формуле (10.5), а оценка позиции игрока *1* — как максимум оценок следующих за ней позиций.

РЕЗЮМЕ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I. Реализационная структура задачи принятия решения состоит из множества альтернатив (стратегий) X, множества состояний среды Y, множества исходов A и функции реализации $F: X \times Y \to A$. Принятие решения в условиях неопределенности характеризуется тем, что принимающий решение не имеет никакой дополнительной информации о появлении того или иного состояния среды, поэтому при выборе альтернативы $x \in X$ он знает лишь, что будет реализован один из исходов $F(x, y)$, где $y \in Y$.

Если оценочная структура задачи принятия решения задана в форме оценочной функции φ: $A \to \mathbb{R}$, то такая ЗПР в условиях неопределенности может быть представлена в виде $\langle X, Y, f \rangle$, где $f = \varphi \circ F$ — целевая функция. Число $f(x, y)$ выражает полезность (ценность) для принимающего решение того исхода, который возникает в ситуации, когда он выбирает альтернативу $x \in X$, а среда принимает состояние $y \in Y$.

Задача принятия решения в условиях неопределенности, в которой множества X и Y конечны, может быть представлена в виде матрицы выигрышей (платежной матрицы) $\|a_i^j\|$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$; здесь $\{1, \ldots, n\}$ — множество стратегий (альтернатив) принимающего решение, $\{1, \ldots, m\}$ — множество состояний среды, a_i^j — выигрыш принимающего решение в ситуации (i, j).

Единого принципа оптимальности для задач принятия решений в условиях неопределенности не существует. Сужение множества стратегий в такой задаче может быть произведено за счет отбрасывания доминируемых стратегий. Доминирование $i_1 \geq i_2$ означает, что при любом состоянии среды $j = \overline{1, m}$ выполняется $a_{i_1}^j \geq a_{i_2}^j$, при этом стратегия i_1 называется ***доминирующей***, а стратегия i_2 — *доминируемой*. Однако недоминируемых стратегий обычно бывает много, поэтому возникает проблема сравнения по предпочтительности недоминируемых стратегий.

II. Для сравнения между собой стратегий по их предпочтительности в ЗПР в условиях неопределенности используется ряд критериев, каждый из которых основан на некоторой гипотезе о поведении среды.

(1) *Критерий Лапласа* базируется на гипотезе равновозможности (равновероятности) состояний среды. Этот критерий приводит к оценке стратегии i в виде среднего арифметического выигрышей, возможных при выборе стратегии i:

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j.$$

Оптимальной при этом считается стратегия, максимизирующая оценку $L(i)$.

(2) *Критерий Вальда* основан на гипотезе антагонизма; при этом оценкой стратегии i является $\underline{W}(i) = \min\limits_j a_i^j$. Стратегия, максимизирующая оценку $\underline{W}(i)$, называется ***максиминной*** стратегией, а принцип оптимальности, заключающийся в максимизации оценки $\underline{W}(i)$, — ***принципом максимина***. Если элементы платежной матрицы рассматриваются как потери, то при гипотезе антагонизма оценкой стратегии i

$$\overline{W}(i) = \max_j a_i^j.$$

Стратегия, минимизирующая оценку $\overline{W}(i)$, называется ***минимаксной***, а соответствующий ей принцип оптимальности — ***принципом минимакса***.

(3) *Критерий Гурвица* предполагает, что при любом выборе стратегии принимающим решение наихудший для него вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший — с вероятностью $1-\alpha$, где $0 \le \alpha \le 1$ — некоторое фиксированное число (показатель пессимизма). По Гурвицу оценкой стратегии i является число

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha)\max_j a_i^j.$$

Оптимальной по Гурвицу считается стратегия, максимизирующая оценку $H_\alpha(i)$.

(4) По *критерию Сэвиджа* оптимальной считается стратегия, минимизирующая максимальный риск. (Риском в ситуации (i,j) называется величина $r_i^j = \beta^j - a_i^j$, где $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$.)

В общем случае оптимальные стратегии, полученные по указанным критериям, могут не совпадать. Это объясняется тем, что данные критерии основываются на *разных* гипотезах, а всякая гипотеза есть предположение, а не знание.

III. Принятие решения в условиях риска характеризуется тем, что существует некоторая вероятностная мера, в соответствии с которой возникают те или иные состояния среды. Построение математической модели принятия решения в условиях риска предполагает наличие у принимающего решение некоторой информации об этой вероятностной мере. Далее мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда множества X и Y конечны и вероятностная мера на множестве состояний среды задана вероятностным вектором $y = (y_1, \ldots, y_m)$, который предполагается известным принимающему решение (здесь y_j есть вероятность наступления состояния j, $y_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$).

В ЗПР в условиях риска исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы i является некоторая случайная величина ξ_i; поэтому сравнение альтернатив сводится к сравнению соответствующих им случайных величин. Наиболее естественной характеристикой случайной величины ξ_i служит ее математическое ожидание (ожидаемое значение) $M\xi_i$, которое в математических моделях принятия решений интерпретируется как ожидаемый выигрыш. Показано, что в ЗПР в условиях риска критерий ожидаемого выигрыша не является адекватным и должен быть трансформирован с учетом возможных отклонений случайной величины от ее ожидаемого значения. В качестве меры отклонения произвольной случайной величины ξ от ее ожидаемого значения обычно берется среднеквадратичное отклонение (СКО) σ_ξ, где $\sigma_\xi^2 = M(\xi - M\xi)^2$. Характеризуя случайную величину ξ_i парой показателей (M_i, σ_i), где $M_i = M\xi_i$ — ожидаемый выигрыш, $\sigma_i = \sigma_{\xi_i}$ — показатель риска, приходим в результате к двухкритериальной ЗПР, для нахождения оптимального решения которой можно использовать методы многокритериальной оптимизации (см. лекции 5–7).

Наиболее простой метод «превращения» многокритериальной ЗПР в однокритериальную состоит в построении обобщенного критерия. В лекции 9 рассмотрен обобщенный критерий

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma,$$

который (при $\lambda > 0$) отражает стремление принимающего решение к увеличению ожидаемого выигрыша и уменьшению риска отклонения от него; при этом λ можно рассматривать как субъективный показатель меры несклонности принимающего решение к риску (субъективный показатель осторожности). Показано, что существуют «пороговые значения» показателя осторожности λ^0, λ^* такие, что если для принимающего решение выполняется условие $0 \leq \lambda < \lambda^0$, то для него ранжирование Парето-оптимальных альтернатив по обобщенному критерию $q(M, \sigma)$ совпадает с ранжированием по величине ожидаемого выигрыша; если $\lambda > \lambda^*$, то ранжирование по критерию $q(M, \sigma)$ совппадает с ранжированием по величине показателя риска.

Нахождение оптимального решения без построения обобщенного критерия основано на отношении доминирования по Парето (см. лекцию 5). Первый шаг — выделение Парето-оптимальных исходов. Второй шаг — выбор оптимального исхода из множества Парето-оптимальных — производится либо непосредственно принимающим решение, либо с предварительным сужением Парето-оптимального множества. При втором подходе требуется дополнительная информация от принимающего решение об относительной важности критериев M и σ. Здесь можно использовать, например, метод выделения главного критерия (*субоптимизация*) или метод упорядочения критериев по их относительной важности (*лексикографическая оптимизация*).

IV. Оценка случайной величины (лотереи) ξ парой показателей (M, σ), где $M = M\xi$ — ожидаемый выигрыш и $\sigma = \sigma_\xi$ — показатель риска, не является единственно возможной. Существует общий метод нахождения субъективной оценки лотерей, состоящий в построении ***функции полезности*** принимающего решение. При построении этой функции основным является понятие *детерминированного эквивалента* (ДЭ) лотереи.

Под детерминированным денежным эквивалентом (ДДЭ) денежной лотереи ξ понимается денежная сумма x, которая для принимающего решение эквивалентна его участию в этой лотерее.

Для нахождения ДЭ произвольной лотереи, выигрыши которой заключены между a и A, достаточно уметь находить ДЭ некоторых простых лотерей (т.е. лотерей с двумя выигрышами: a и A).

Сравнение лотерей по их ДЭ дает способ сравнения альтернатив в ЗПР в условиях риска, учитывающий как величину возможных выигрышей, так и субъективное отношение принимающего решение к риску. При этом для принимающего решение его несклонность к риску заключается в том, что указываемый им ДЭ произвольной лотереи меньше ожидаемого выигрыша; склонность к риску заключается в том, что ДЭ лотереи больше ожидаемого выигрыша; безразличие к риску состоит в том, что ДЭ лотереи совпадает с ожидаемым выигрышем.

Остановимся теперь на понятии функции полезности. Пусть q — некоторый критерий (например, денежный или временной), значения которого заключены между a и A. *Эмпирическая функция полезности* критерия q есть функция u, которая каждому $x \in [a, A]$ ставит в соответствие число $u(x) = p \in [0, 1]$ так, что x является детерминированным эквивалентом простой лотереи $\begin{bmatrix} a & A \\ 1-p & p \end{bmatrix}$. Линейное продолжение $\tilde{u}$ функции u на множество лотерей с выигрышами из интервала $[a, A]$ есть *функция полезности лотерей.* При этом для лотереи ξ величина $\tilde{u}(\xi)$ называется ***ожидаемой полезностью лотереи*** ξ. Важным свойством функции $\tilde{u}$ является ее линейность (относительно операции «смешивания» лотерей). Если критерий q является монотонным (т. е. принимающий решение всегда стремится либо к его увеличению, либо к уменьшению), то сравнение лотерей по их детерминированным эквивалентам равносильно сравнению ожидаемых полезностей этих лотерей.

Аксиоматический подход к вопросу сравнения лотерей по предпочтению впервые был предпринят Нейманом и Моргенштерном [41]. Основной их результат, полученный в этом направлении, может быть описан следующим образом.

Пусть $\overset{*}{\succsim}$ — отношение нестрогого предпочтения лотерей (которое представляет собой объединение строгого предпочтения $\overset{*}{\succ}$ и отношения безразличия $\overset{*}{\sim}$). Для отношения $\overset{*}{\succsim}$ вводятся две аксиомы $(A1)$ и $(A2)$, где аксиома $(A1)$ носит чисто математический характер и выражает непрерывность отношения $\overset{*}{\succsim}$, а смысл аксиомы $(A2)$ состоит в том, что при «смешивании» двух безразличных лотерей с любой третьей получающиеся лотереи будут безразличными. Результат Неймана и Моргенштерна состоит в следующем.

Всякое отношение предпочтения $\overset{*}{\succsim}$, устанавливающее полное ранжирование множества лотерей и удовлетворяющее аксиомам $(A1)$ и $(A2)$, совпадает с предпочтением, которое устанавливается по величине ожидаемой полезности лотерей для неко-

торой функции полезности u рассматриваемого критерия. При этом функция u единственна с точностью до фиксирования масштаба и начала отсчета.

Замечание. Полезно сравнить этот результат с правилом 7.2, характеризующим способы установления полного ранжирования векторных оценок.

V. В лекциях 11 и 12 для ЗПР в условиях риска рассматриваются способы уменьшения риска. В лекции 11 излагается способ уменьшения риска, осуществляемый за счет перехода к смешанным стратегиям. Пусть $\{\overline{1,n}\}$ — множество альтернатив (чистых стратегий) в задаче принятия решения в условиях риска. ***Смешанной стратегией*** называется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Смешанная стратегия может быть реализована одним из следующих трех способов: (а) введением механизма случайного выбора; (б) как «физическая смесь» чистых стратегий; (в) как доля соответствующих чистых стратегий при многократном принятии решения.

В ЗПР в условиях риска использование смешанных стратегий с целью повышения ожидаемого выигрыша бесполезно. Однако «смешивание» стратегий может привести к снижению риска; эта возможность определяется характером корреляции случайных величин $(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$, являющихся результатом выбора чистых стратегий. В частности, если случайные величины (ξ_i) попарно не коррелированны, применение смешанных стратегий снижает риск. При этом, если все дисперсии $(\sigma_i)_{i=\overline{1,n}}$ ограничены в совокупности, то использование равномерно распределенной смешанной стратегии снижает риск до нуля, когда $n \to \infty$.

В случае, когда имеется полная прямая корреляция, применение смешанных стратегий не приводит к снижению риска. Напротив, при полной обратной корреляции использование смешанной стратегии может полностью исключить риск.

Важным примером реализации принципа «смешивания стратегий» в экономике является распределение капитала на рынке ценных бумаг. Если инвестор распределяет свой капитал между ценными бумагами n видов так, что x_i есть доля капитала, вложенного в ценные бумаги i-го вида, то вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (определяющий *структуру портфеля инвестора*), представляет собой с математической точки зрения смешанную стратегию инвестора. В возникающей здесь задаче принятия решения в условиях риска в качестве состояний среды выступают будущие значения курсовых стоимостей ценных бумаг всех видов, обращающихся на рынке. Предположим, что курсовые стоимости ценных бумаг видов i и j связаны таким образом, что всякое приращение курсовой стоимости ценных бумаг вида i сопровождается пропорциональным приращением курсовой стоимости ценных бумаг вида j (с некоторым постоянным коэффициентом пропорциональности k). Тогда при $k > 0$ имеет место полная прямая корреляция, а при $k < 0$ — полная обратная корреляция.

Остановимся на задаче оптимизации портфеля инвестора. Эффективность портфеля инвестора, имеющего структуру $x = (x_1, \ldots, x_n)$, характеризуется векторной оценкой $(M(x), \sigma(x))$, где $M(x)$ — ожидаемый доход (доход портфеля), $\sigma(x)$ — показатель риска (риск портфеля). Поэтому задача оптимизации портфеля является непрерывной задачей двухкритериальной оптимизации. Один из методов, который может быть использован для решения задачи оптимизации портфеля инвестора, — метод субоптимизации; здесь он реализуется следующим образом. Задается некоторое пороговое значение M_0 ожидаемого дохода и среди всех смешанных стратегий x ищется такая, которая обеспечивает ожидаемый доход M_0 с наименьшим возможным риском. Для практического решения этой задачи требуются данные в форме вектора ожидаемых доходов ценных бумаг каждого вида, а также матрицы показателей ковариации (приближенно эти данные могут быть получены на основе свéдений о биржевом курсе ценных бумаг).

VI. Важный для практики способ уменьшения риска при принятии решения состоит в проведении эксперимента. Поскольку проведение эксперимента связано с материальными затратами, возникает проблема соотнесения выгоды от дополнительной информации, получаемой в результате проведения эксперимента, и затрат на его проведение. Одна из методик, предназначенных для решения этой проблемы, основана на известной в теории вероятностей формуле Байеса. В схематичном виде она состоит в следующем. Рассмотрим ЗПР в условиях риска, в которой $\{1, \ldots, n\}$ — множество альтернатив принимающего решение, $\{A_1, \ldots, A_m\}$ — множество состояний среды, $\|a_i^j\|$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$ — матрица выигрышей. Предполагается, что события $\{A_1, \ldots, A_m\}$ образуют полную группу событий, причем для каждого $j = \overline{1, m}$ принимающему решение известна вероятность $P(A_j)$ наступления события A_j. Если проводится эксперимент, в результате которого наблюдается событие B, и, кроме того, известны условные вероятности $P_{A_j}(B)$, $(j = \overline{1,m})$, то уточненные (послеопытные) вероятности каждого состояния среды могут быть найдены по формуле Байеса. Знание уточненных вероятностей состояний среды позволяет уточнить оптимальную стратегию принимающего решение. На практике условные вероятности $P_{A_j}(B)$ могут быть приближенно получены на основании статистических данных.

VII. Кратко охарактеризуем задачи части II. ***Задача* 11** демонстрирует применение критериев Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа при принятии решения в условиях неопределенности (формулировка задачи взята из [11]). ***Задача* 12** иллюстрирует способы принятия решений в условиях риска по паре критериев (M, σ). ***Задача* 13** представляет собой схематический пример задачи принятия решения, в которой сравнение альтернатив по предпочтению производится с помощью построения эмпирической функции полезности. ***Задача* 14** — это классическая задача распределения инвестиций, постановка которой принадлежит американскому математику Г. Марковицу (за решение этой задачи он был удостоен Нобелевской премии по экономике). Подробный разбор решения этой задачи содержится в книге [15]. ***Задача* 15** является упрощенным примером, демонстрирующим применение байесовского подхода к ЗПР в условиях риска с возможностью проведения эксперимента (формулировка задачи заимствована из [47]).

VIII. Упражнения.

1. Для задачи аренды отеля (пример 8.1) постройте матрицу выигрышей, взяв в качестве множества Y состояний среды следующие значения среднегодового спроса: $\{5, 10, 15, \ldots, 50\}$. В полученной ЗПР в условиях неопределенности найдите оптимальные решения по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

2. Для задачи выбора проекта электростанции (задача 11) найдите оптимальное решение по критерию Гурвица с показателем пессимизма $\alpha = 0,3$ и $\alpha = 0,9$.

3. Покажите, что если альтернатива i_1 является оптимальной по одному из критериев: Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа и i_2 доминирует i_1, то альтернатива i_2 также будет оптимальной по соответствующему критерию.

4. Для задачи выбора продаваемого товара (пример 9.1) найдите оптимальную альтернативу по обобщенному критерию $q = M - \lambda\sigma$, взяв в качестве λ свой (субъективный) показатель несклонности к риску.

5. Найдите оптимальное решение для задачи 12, используя:

а) метод субоптимизации;

б) метод лексикографической оптимизации.

6. Сравните по предпочтительности лотереи $\xi_1 = \begin{bmatrix} 10 & 100 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$ и $\xi_2 = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ (выигрыши указаны в рублях):

а) по критерию ДДЭ (предварительно построить по пяти точкам свою кривую денежных эквивалентов);

б) по обобщенному критерию $q = M - \lambda\sigma$, взяв в качестве λ свой показатель несклонности к риску.

7. Для задачи выбора продаваемого товара (пример 9.1) найдите оптимальную альтернативу по критерию ожидаемой полезности (предварительно построить по пяти точкам график эмпирической функции полезности денежного критерия).

8. Для задачи 12 найдите ожидаемый выигрыш и показатель риска при использовании смешанной стратегии x^k, в которой первые k чистых стратегий выбираются равновероятно, а остальные стратегии отбрасываются ($k = \overline{1,6}$). Предполагается, что случайные величины, являющиеся результатом выбора чистых стратегий, попарно не коррелируют.

9. Для задачи выбора продаваемого товара (пример 9.1) найдите максимально допустимую стоимость идеального эксперимента.

10. Для задачи о бурении нефтяной скважины (задача 15) найдите оптимальную стратегию, используя в качестве оценки позиции природы критерий ожидаемой полезности (предварительно постройте на заданном интервале денежных выигрышей эмпирическую функцию полезности денежного критерия).

ЛИТЕРАТУРА: [2, 3, 11, 12, 15, 22, 27, 29, 30, 41, 47].

Часть III
ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лекция 13. *Антагонистические игры*

• *Антагонистическая игра как математическая модель принятия решения в условиях противоположности интересов.* • *Матричные игры. Нижняя и верхняя цена игры. Устойчивое поведение и седловые точки. Теорема о связи седловой точки с ценой игры.* • *Смешанное расширение матричной игры. Основные правила для функции выигрыша в смешанном расширении.* • *Теорема фон Неймана и ее следствия.* • Задача 16. *Профилактика нежелательного события.*

1. Продолжим системное описание задачи принятия решения (лекция 1): рассматривается некоторый объект управления, на который воздействует управляющая подсистема и среда. Управляющая подсистема всегда является целенаправленной, т.е. имеет определенную цель и ее управление направлено на достижение этой цели. Поведение среды может носить как целенаправленный, так и случайный характер. Если среда ведет себя как целенаправленная система, то такая ситуация принятия решения называется ***теоретико-игровой***, а ее математическая модель ***игрой***.

Неопределенность, существующая при выборе решения управляющей подсистемой, возникает за счет воздействия среды на объект управления. Однако следует различать неопределенность, имеющую случайный (или стохастический) характер, и неопределенность, имеющую целенаправленный характер. В первом случае получаем ЗПР в условиях неопределенности (или в условиях риска), а во втором — в теоретико-игровых условиях. Если в ЗПР в условиях неопределенности (а также в условиях риска) принятие решения рассматривается как *индивидуальный* выбор альтернативы управляющей подсистемой, то в теоретико-игровой модели принятие решения рассматривается как *совместный выбор* допустимых альтернатив (стратегий), который производится управляющей подсистемой и подсистемой, «олицетворяющей» среду. Поскольку при таком подходе различие между управляющей подсистемой и средой — в плане их воздействия на объект управления — стирается, удобно говорить о двух управляющих подсистемах; в теоретико-игровой терминологии эти управляющие подсистемы называются ***игроками***.

В случае, когда цели управляющей подсистемы и среды противоположны, получающаяся игра называется ***антагонистической***. Антагонистическая игра, для которой ее оценочная структура задается с помощью оценочной функции, может быть представлена в виде $\langle X, Y, f\rangle$, где X — множество стратегий игрока *1*, Y — множество стратегий игрока *2*, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — целевая функция. При этом для игрока *1* функция f рассматривается как *функция выигрыша*, а для игрока *2* — как *функция потерь*.

2. Если в антагонистической игре множества стратегий игроков конечны, то такая игра называется ***матричной***. Матричная игра обычно задается в виде матрицы $A = \|a_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, которая называется ***матрицей выигрышей*** или ***платежной матрицей***. В этом случае стратегии игрока *1* могут быть отождествлены с номерами строк, а стратегии игрока *2* — с номерами столбцов платежной матрицы. Число a_i^j рассматривается одновременно как выигрыш игрока *1* и проигрыш игрока *2* в ситуации (i, j).

Проанализируем, какие стратегии игроков в матричной игре можно рассматривать в качестве обоснованных. Если принять за основу гипотезу крайней осторожности — *гипотезу антагонизма* (см. лекцию 8), то в качестве оценки стратегии i игрока *1* выступает его минимальный возможный выигрыш при использовании им i-й стратегии, т.е. $\alpha_i = \min\limits_j a_i^j$. Число α_i представляет собой с содержательной точки зрения гарантированный уровень стратегии i (т.е. выбрав стратегию i, игрок *1* имеет полную гарантию, что его выигрыш, независимо от того, какую стратегию выберет игрок *2*, будет не меньше, чем α_i). Наибольший гарантированный выигрыш игрока *1* в данной игре таков:

$$v_1 = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_i^j. \tag{13.1}$$

Число v_1 называется ***нижней ценой игры*** (или ***максимином***), а стратегия, максимизирующая минимальный возможный выигрыш игрока *1*, т. е. стратегия i^*, для которой $\alpha_{i^*} = v_1$, — ***максиминной стратегией*** игрока *1*.

Теперь обратимся к игроку *2*. Поскольку для него матрица A представляет собой матрицу потерь, то оценкой стратегии j при принятии гипотезы антагонизма является максимум возможных при этой стратегии потерь, т.е. $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$. Стратегия j^*, которая минимизирует максимальные возможные потери игрока *2*, называется его *минимаксной стратегией*, а число

$$v_2 = \min_j \beta^j = \min_j \max_i a_i^j \tag{13.2}$$

— ***верхней ценой игры*** (или ***минимаксом***). Имеет место следующее правило.

Правило 13.1. *В матричной игре нижняя цена не превосходит верхней цены: $v_1 \leq v_2$. Если нижняя и верхняя цена игры совпадают, то число $v = v_1 = v_2$ называется* ***ценой игры.***

Действительно, при любых $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ выполняется условие $\alpha_i \leq a_i^j$ и $\beta^j \geq a_i^j$, откуда $\alpha_i \leq \beta^j$. Пусть i^* — максиминная стратегия игрока *1*, j^* — минимаксная стратегия игрока *2*. Тогда $v_1 = \alpha_{i^*} \leq \beta^{j^*} = v_2$.

Практическое правило для нахождения нижней и верхней цены матричной игры состоит в следующем. Добавим к платежной матрице A столбец $(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}}$ строчных минимумов и строку $(\beta^j)_{j=\overline{1,m}}$ столбцовых максимумов. Наибольшее из чисел α_i будет нижней ценой, а наименьшее из чисел β^j — верхней ценой. Этот способ продемонстрирован на примерах, приведенных ниже. В примере 13.1 игра не имеет цены ($v_1 < v_2$), в примере 13.2 $v_1 = v_2 = v$ — игра имеет цену.

Пример 13.1

	1	2	3	α_i
1	1	9	3	1
2	5	3	4	3
3	4	2	8	2
β^j	5	9	8	$v_1 = 3$ $v_2 = 5$

Пример 13.2

	1	2	3	4	α_i
1	4	5	9	3	3
2	7	6	8	9	6
3	8	2	9	6	2
β^j	8	6	9	9	$v_1 = 6$ $v_2 = 6$

Следующая наша задача — проанализировать «на устойчивость» ситуацию, в которой игрок *1* использует максиминную стратегию, а игрок *2* — минимаксную стратегию. Например, в примере 13.1 такой ситуацией будет $(2,1)$. Эта ситуация является неустойчивой, так как в ней игроку *2* выгодно отклонение от нее заменой стратегии 1 на стратегию 2: в этом случае его потери уменьшатся с 5 до 3. При этом ситуация $(2,1)$ перейдет в ситуацию $(2,2)$. Однако ситуация $(2,2)$ также неустойчива, так как в ней игроку *1* выгодно заменить стратегию 2 на стратегию 1, в результате чего игра переходит в ситуацию $(1,2)$. В этой ситуации выгодным является одностороннее отклонение игроку *2*, которое приводит к ситуации $(1,1)$. Наконец, в последней ситуации одностороннее отклонение от нее выгодно игроку *1*, которое осуществляется заменой стратегии 1 на стратегию 2. В итоге игра возвращается в первоначальную ситуацию $(2,1)$ и т. д. до бесконечности. Таким образом, в игре примера 13.1 выбор ситуации $(2,1)$ приводит к «бесконечному блужданию»: $(2,1) \to (2,2) \to (1,2) \to (1,1) \to (2,1) \to \ldots$, что является свидетельством «неудачных» совместных решений игроков.

Напротив, в игре примера 13.2 выбор ситуации $(2,2)$ (первой компонентой которой является максиминная стратегия игрока *1*, а второй — минимаксная стратегия игрока *2*) — устойчив, так как в этой ситуации ни одному из игроков невыгодно одностороннее отклонение от нее. Учитывая, что игра примера 13.2 имеет цену, а игра примера 13.1 не имеет цены, можно связать наличие устойчивых ситуаций в матричной игре с наличием у нее цены. Теперь дадим формальное доказательство этого важного факта. Приведем следующее определение.

Определение. *Пусть* Γ_A *— матричная игра с платежной матрицей* $A = \|a_i^j\|$. *Ситуация* (i_0, j_0) *называется* ***седловой точкой*** *в игре* Γ_A, *если при всех* $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ *выполняется двойное неравенство*:

$$a_i^{j_0} \le a_{i_0}^{j_0} \le a_{i_0}^{j}. \tag{13.3}$$

Соотношение 13.3 можно пояснить следующим образом.

Правило 13.2. *Ситуация* (i_0, j_0) *— седловая точка игры* Γ_A *тогда и только тогда, когда элемент* $a_{i_0}^{j_0}$ *является одновременно наименьшим элементом своей строки и наибольшим элементом своего столбца.*

Ясно, что устойчивые в матричной игре ситуации — это и есть ее седловые точки: одностороннее отклонение от седловой точки не выгодно ни одному из игроков.

Теорема 13.1 (связь седловой точки с ценой игры).

1) *Пусть* (i_0, j_0) *— седловая точка игры* Γ_A. *Тогда*:

а) i_0 *является максиминной стратегией игрока 1*;

б) j_0 *является минимаксной стратегией игрока 2*;

в) *игра* Γ_A *имеет цену, причем исход в седловой точке совпадает с ценой игры*: $a_{i_0}^{j_0} = v$.

2) *Пусть игра* Γ_A *имеет цену* v. *Тогда любая ситуация* (i_0, j_0), *где* i_0 *— максиминная стратегия игрока 1, а* j_0 *— минимаксная стратегия игрока 2, — является седловой точкой игры* Γ_A.

Доказательство. Для доказательства 1) рассмотрим фрагмент платежной матрицы A (табл. 13.1), к которой добавлен столбец строчных минимумов $(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}}$ и строка столбцовых максимумов $(\beta^j)_{j=\overline{1,m}}$. Учитывая правило 13.2, получаем следующие равенства: $\alpha_{i_0} = a_{i_0}^{j_0}$, $\beta^{j_0} = a_{i_0}^{j_0}$. Имеют место следующие очевидные соотношения (см. табл. 13.1):

$$\alpha_i \le a_i^{j_0} \le \beta^{j_0} = a_{i_0}^{j_0} = \alpha_{i_0}, \qquad (*)$$

$$\beta^j \ge a_{i_0}^j \ge \alpha_{i_0} = a_{i_0}^{j_0} = \beta^{j_0}. \qquad (**)$$

Таблица 13.1

	j_0	$\ldots$	j	min
i_0	$a_{i_0}^{j_0}$		$a_{i_0}^{j}$	$\alpha_{i_0} = a_{i_0}^{j_0}$
$\vdots$				.
i	$a_i^{j_0}$		a_i^j	α_i
max	$\beta^{j_0} = a_{i_0}^{j_0}$		β^j	

Из $(*)$ следует, что i_0 — максиминная стратегия игрока *1*, а из $(**)$ следует, что j_0 — минимаксная стратегия игрока *2*. Утверждения а) и б) установлены. Далее, используя $(*)$ и $(**)$, имеем

$$v_1 = \max_i \alpha_i = \alpha_{i_0} = a_{i_0}^{j_0}, \qquad v_2 = \min_j \beta^j = \beta^{j_0} = a_{i_0}^{j_0},$$

откуда $v_1 = v_2 = a_{i_0}^{j_0}$, что и заканчивает доказательство утверждения 1).

Докажем 2). Пусть игра имеет цену: $v_1 = v_2 = v$. Обозначая через i_0 максиминную стратегию игрока *1* и через j_0 — минимаксную стратегию игрока *2*, изобразим фрагмент платежной матрицы игры Γ_A с добавленными столбцом строчных минимумов и строкой столбцовых максимумов (табл. 13.2).

Таблица 13.2

	j_0	...	j	min
i_0	$a_{i_0}^{j_0}$		$a_{i_0}^{j}$	$\alpha_{i_0} = v_1$
$\vdots$				
i	$a_i^{j_0}$		a_i^j	α_i
max	$\beta^{j_0} = v_2$		β^j	

При этом нижняя цена игры $v_1 = \alpha_{i_0}$, верхняя цена игры $v_2 = \beta^{j_0}$. Покажем, что (i_0, j_0) — седловая точка игры Γ_A. Имеем

$$a_i^{j_0} \leq \beta^{j_0} = v_2 = v_1 = \alpha_{i_0} \leq a_{i_0}^{j_0}, \quad a_{i_0}^{j} \geq \alpha_{i_0} = v_1 = v_2 = \beta^{j_0} \geq a_{i_0}^{j_0}.$$

Итак, соотношение (13.3) установлено, что и завершает доказательство теоремы 13.1.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. *В матричной игре наличие седловой точки эквивалентно наличию цены игры.*

Следствие 2. *Исходы в седловых точках матричной игры совпадают между собой и совпадают с ценой игры.*

Положим X^* — множество максиминных стратегий игрока *1*, Y^* — множество минимаксных стратегий игрока *2*, E — множество седловых точек в матричной игре Γ_A.

Следствие 3. *Если игра Γ_A имеет цену, то*

$$E = X^* \times Y^*. \tag{13.4}$$

Свойство 13.4 иногда называют ***свойством прямоугольности*** множества седловых точек.

Сформулируем теперь основные выводы, получающиеся на основании теоремы 13.1 и указанных из нее следствий.

Если матричная игра имеет цену, то в ней реализуются два принципа оптимальности: принцип оптимальности стратегий (в качестве оптимальных выступают максиминные стратегии игрока 1 и минимаксные стратегии игрока 2), и принцип оптимальности ситуаций (в качестве оптимальных ситуаций выступают седловые точки). При этом оба принципа оптимальности *оказываются согласованными между собой: если игроки выбирают оптимальные стратегии, то возникающая ситуация является оптимальной (т. е. седловой точкой); обратно — компонентами любой седловой точки служат оптимальные стратегии игроков. Кроме того, исход в любой седловой точке равен цене игры.*

К сожалению, не всякая матричная игра имеет цену. При отсутствии цены в матричной игре нет ни оптимальных стратегий, ни оптимальных ситуаций, и это обстоятельство является главным препятствием для рекомендации указанных принципов оптимальности в приложениях теории игр.

Замечание. Хотя в любой матричной игре максиминная стратегия игрока *1* и минимаксная стратегия игрока *2* всегда существуют, их можно считать оптимальными только при наличии цены игры. Дело в том, что только в этом случае исход, гарантированный максиминной стратегией игроку *1*, совпадает с исходом, гарантированным минимаксной стратегией игроку *2* (этот общий гарантированный обоим игрокам исход и есть цена игры). Если же в матричной игре нет цены, то всякий исход c, удовлетворяющий условию $v_1 < c < v_2$, не является гарантированным исходом ни одного из игроков; тем самым игра становится неопределенной.

Однако существует общий метод, который позволяет для всякой матричной игры обеспечить наличие в ней цены в некотором обобщенном смысле. Этот метод, состоящий в переходе к смешанным стратегиям, впервые был обоснован в теории игр фон Нейманом и Моргенштерном. Краткое изложение основных результатов, связанных с построением смешанного расширения матричной игры, содержится в следующем пункте.

3. По-прежнему будем обозначать через Γ_A матричную игру с платежной матрицей $A = \|a_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. Множество смешанных стратегий игрока *1* (напомним, что смешанные стратегии рассматривались в лекции 11), есть

$$S_n = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\},$$

а множество смешанных стратегий игрока *2* таково:

$$S_m = \left\{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m :\ y_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1\right\}.$$

Применение в игре Γ_A игроком *1* смешанной стратегии $x \in S_n$ может быть интерпретировано как проведение опыта, случайными исходами котрого являются элементы $\{1,\ldots,n\}$, причем x_i — вероятность выбора стратегии i. Аналогично интерпретируется применение в игре Γ_A смешанной стратегии $y \in S_m$ игроком *2*. Предположим теперь, что игрок *1* использует смешанную стратегию x, а игрок *2* — смешанную стратегию y. Тогда вероятность возникновения ситуации (i,j) (т.е. вероятность того, что исходом первого опыта будет i, а исходом второго опыта является j) по теореме умножения вероятностей равна произведению $x_i y_j$. (Заметим, что здесь предполагается *независимость* выборов игроками *1* и *2* своих смешанных стратегий, т.е. каждый игрок производит выбор своего вероятностного вектора, не имея информации о выборе другого игрока.) Так как в ситуации (i,j) выигрыш игрока *1* равен a_i^j, получаем, что при использовании игроками *1* и *2* смешанных стратегий x и y соответственно выигрыш игрока *1* становится случайной величиной вида $\xi = \begin{bmatrix} a_i^j \\ x_i y_j \end{bmatrix}_{(i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m})}$. Будем считать математическое ожидание $M\xi$ этой случайной величины выигрышем игрока *1* в ситуации в смешанных стратегиях (x,y).

Итак, по матричной игре Γ_A построена новая игра $\overline{\Gamma}_A$, в которой множеством стратегий игрока *1* является множество вероятностных векторов S_n, множеством стратегий игрока *2* — множество вероятностных векторов S_m, а функция выигрыша определяется равенством

$$F_A(x,y) = M\xi = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} (x_i y_j) a_i^j. \tag{13.5}$$

Заметим, что стратегия $i = \overline{1,n}$ игрока *1* в игре Γ_A может быть отождествлена с вероятностным вектором $(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0) \in S_n$, а стратегия $j = \overline{1,m}$ игрока *2* — с вероятностным вектором $(0,\ldots,\underset{j}{1},\ldots,0) \in S_m$. Таким образом, игра $\overline{\Gamma}_A$ является расширением игры Γ_A, которое получается расширением множеств стратегий игроков и продолжением их функций выигрыша. При этом первоначальные стратегии игроков в игре Γ_A, рассматриваемые как стратегии в игре $\overline{\Gamma}_A$, называются ***чистыми***. Ситуация $(x,y) \in S_n \times S_m$ называется ***ситуацией в смешанных стратегиях*** в игре Γ_A.

Построенная игра $\overline{\Gamma}_A$ называется *смешанным расширением* игры Γ_A.

Рассмотрим основные правила для функции выигрыша в смешанном расширении матричной игры.

Правило 13.3 а) *Если игрок 1 использует смешанную стратегию $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S_n$, а игрок 2 — чистую стратегию $j = \overline{1, m}$, то значение функции выигрыша в полученной ситуации (x, j) равно взвешенной сумме элементов j-го столбца платежной матрицы с весами $x_1, \ldots, x_n$ соответственно:*

$$F_A(x, j) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^j. \tag{13.6}$$

б) *Если игрок 1 использует чистую стратегию $i = \overline{1, n}$, а игрок 2 — смешанную стратегию $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S_m$, то значение функции выигрыша в полученной ситуации (i, y) равно взвешенной сумме элементов i-й строки платежной матрицы с весами $y_1, \ldots, y_m$:*

$$F_A(i, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j a_i^j. \tag{13.7}$$

Доказательство. а) В ситуации (x, j) исходом будет случайная величина $\eta_j = \begin{bmatrix} a_i^j \\ x_i \end{bmatrix}$ $(i = \overline{1, n})$; ее математическое ожидание равно правой части формулы (13.6).

Правило 13.4 (*разложение функции выигрыша по чистым стратегиям*).

а) *Значение функции выигрыша $F_A(x, y)$ есть взвешенная сумма величин $F_A(x, j)$ с весами y_j $(j = \overline{1, m})$: $F_A(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j F_A(x, j)$.*

б) *Значение функции выигрыша $F_A(x, y)$ есть взвешенная сумма величин $F_A(i, y)$ с весами x_i $(i = \overline{1, n})$: $F_A(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i F_A(i, y)$.*

Доказательство. а) Используя правило 13.3 а), имеем

$$F_A(x, y) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} (x_i y_j) a_i^j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j a_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_i^j = \sum_{j=1}^{m} y_j F_A(x, j).$$

Правило 13.5 (*правило гарантирующей стратегии*). Зафиксируем некоторое число C.

а) *Пусть $x^0 \in S_n$ — смешанная стратегия игрока 1, для которой при любой чистой стратегии $j = \overline{1,m}$ игрока 2 выполняется неравенство $F_A(x^0, j) \geq C$. Тогда и при любой смешанной стратегии $y \in S_m$ будет выполняться неравенство $F_A(x^0, y) \geq C$.*

б) *Пусть $y^0 \in S_m$ — смешанная стратегия игрока 2, для которой при любой чистой стратегии $i = \overline{1,n}$ игрока 1 выполняется неравенство $F_A(i, y^0) \leq C$. Тогда и при любой смешанной стратегии $x \in S_n$ игрока 1 будет выполняться неравенство $F_A(x, y^0) \leq C$.*

Теоретико-игровой смысл утверждения а) состоит в следующем. Если стратегия x^0 гарантирует игроку *1* исход C против любой чистой стратегии игрока *2*, то она гарантирует ему исход C также и против любой смешанной стартегии игрока *2*. Аналогично интерпретируется утверждение б).

Доказательство. а) Пусть $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S_m$. Умножая неравенство $F_A(x^0, j) \geq C$ на $y_j \geq 0$ и суммируя по $j = \overline{1,m}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} y_j F_A(x^0, j) \geq \sum_{j=1}^{m} C y_j.$$

По правилу 13.4, а) левая часть этого неравенства равна $F_A(x^0, y)$, а правая его часть равна C.

Правило 13.6 (правило наименьшего и наибольшего значения). *Рассмотрим при произвольном фиксированном $y^0 \in S_m$ функцию $F_A(x, y^0)$ как функцию переменной x, определенную на множестве S_n.*

Если функция $F_A(x, y^0)$ достигает наибольшего (наименьшего) значения при $x = x^0$, то при любой чистой стратегии $i \in \operatorname{Sp} x^0$ выполняется условие $F_A(i, y^0) = F_A(x^0, y^0)$.

Замечание. Через $\operatorname{Sp} x$ здесь и далее обозначается *спектр смешанной стратегии* x, т.е. множество номеров $i = \overline{1,n}$, для которых $x_i > 0$. Спектр смешанной стратегии составляют те чистые стратегии, которые «используются» в ней с ненулевой вероятностью.

Доказательство. Установим справедливость правила 13.6 для наибольшего значения. Тогда для любого $i = \overline{1,n}$ выполняется неравенство

$$F_A(i, y^0) \leq F_A(x^0, y^0). \tag{13.8}$$

Предположим, что для некоторого $i' \in \operatorname{Sp} x^0$ имеет место строгое неравенство $F_A(i', y^0) < F_A(x^0, y^0)$. Умножая обе части (13.8) на x_i^0, суммируя по $i = 1, \ldots, n$ и учитывая, что $x_{i'}^0 F_A(i', y^0) < x_{i'}^0 F_A(x^0, y^0)$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 F_A(i, y^0) < \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^0 F_A(x^0, y^0)$. Левая часть этого неравенства по правилу 13.4б) равна $F_A(x^0, y^0)$, правая его часть также равна $F_A(x^0, y^0)$, и мы приходим к противоречию.

Аналогично формулируется правило наименьшего и наибольшего значения функции $F_A(x^0, y)$ при произвольном фиксированном $x^0 \in S_n$.

4. Рассмотрим теперь основной результат теории матричных игр — теорему фон Неймана, положившую начало современной теории игр.

Теорема 13.2 (теорема фон Неймана). *Для любой матричной игры* Γ_A

$$\max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} F_A(x, y) = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} F_A(x, y). \tag{13.9}$$

Другими словами, в смешанном расширении любой матричной игры нижняя и верхняя цена игры совпадают. Общее значение левой и правой части (13.9) называется ***ценой игры*** Γ_A ***в смешанных стратегиях*** и обозначается через v_A.

Укажем основную идею доказательства теоремы 13.2. В игре с платежной матрицей A исход $C \in \mathbb{R}$ называется *гарантированным исходом игрока 1*, если у игрока *1* существует такая смешанная стратегия x^0, что при любой смешанной стратегии y игрока *2* выполняется неравенство $F_A(x^0, y) \geq C$. Исход C называется *гарантированным исходом игрока 2*, если у игрока *2* существует такая смешанная стратегия y^0, что при любой смешанной стратегии x игрока *1* выполняется неравенство $F_A(x, y^0) \leq C$. Если одно из этих неравенств выполняется как строгое, то говорят, что исход C *строго гарантируется* игроку.

Очевидно, что ни один исход $C \in \mathbb{R}$ не может одновременно строго гарантироваться игроку *1* и гарантироваться игроку *2* (тогда выполнялись бы неравенства $F_A(x^0, y^0) > C$ и $F_A(x^0, y^0) \leq C$, что невозможно). Таким образом, множество строго гарантированных исходов игрока *1* и множество гарантированных исходов игрока *2* не пересекаются. Утверждение теоремы фон Неймана эквивалентно тому, что эти множества образуют покрытие действительной прямой, т.е. каждый исход $C \in \mathbb{R}$ либо строго гарантируется игроку *1*, либо гарантируется игроку *2*. В самом деле, ясно, что произвольный исход $C \in \mathbb{R}$ строго гарантируется игроку *1* тогда и только тогда, когда $C < \max\limits_{x \in S_n} \min\limits_{y \in S_m} F_A(x, y)$; гарантируется игроку *2* тогда и только тогда, когда $C \geq \min\limits_{y \in S_m} \max\limits_{x \in S_n} F_A(x, y)$. Если бы выполнялось неравенство $\max\limits_{x \in S_n} \min\limits_{y \in S_m} F_A(x, y) < \min\limits_{y \in S_m} \max\limits_{x \in S_n} F_A(x, y)$, то любой исход C, заключенный между ними, не являлся бы ни строго гарантированным исходом игрока *1*, ни гарантированным исходом игрока *2*.

Для доказательства теоремы фон Неймана достаточно доказать, что в произвольной матричной игре нулевой исход либо строго гарантируется игроку *1*, либо гарантируется игроку *2* (так как переход от нулевого исхода к исходу C осуществляется прибавлением константы C ко всем элементам платежной матрицы). Далее, в силу правила 13.5, гарантированность исхода игрока против произвольной смешанной стратегии другого игрока равносильна гарантированности этого исхода против любой чистой стратегии другого игрока. Таким образом, утверждение теоремы фон Неймана сводится к тому, что для произвольной матрицы A имеет место одна из следующих двух альтернатив:

(α) Существует такой вероятностный вектор $x^0 \in S_n$, что для всех $j = \overline{1, m}$ выполняется неравенство $F_A(x^0, j) > 0$;

(β) Существует такой вероятностный вектор $y^0 \in S_m$, что для всех $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство $F_A(i, y^0) \leq 0$.

Это так называемая лемма о двух альтернативах. Доказательство леммы основано на теореме об отделяющей гиперплоскости. Несложно проверить (см., например, [4]), что первая альтернатива реализуется, если выпуклая оболочка системы векторов $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n, \mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m)$, где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — единичные векторы пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^m$ — векторы-столбцы матрицы A, не содержат нулевой точки; в противном случае реализуется вторая альтернатива.

Замечание. Цена v_A игры Γ_A в смешанных стратегиях удовлетворяет двойному неравенству

$$v_1 \leq v_A \leq v_2, \tag{13.10}$$

где v_1 — нижняя цена, v_2 — верхняя цена матричной игры Γ_A.

Действительно, пусть i^* — максиминная (чистая) стратегия игрока *1* в игре Γ_A. Тогда при любом $j = \overline{1, m}$ выполняется неравенство $F_A(i^*, j) \geq v_1$. По правилу гарантирующей стратегии 13.5,а) отсюда следует, что при любой смешанной стратегии $y \in S_m$ выполняется неравенство $F_A(i^*, y) \geq v_1$, откуда $\min\limits_{y \in S_m} F_A(i^*, y) \geq v_1$, значит, $\max\limits_{x \in S_n} \min\limits_{y \in S_m} F_A(x, y) \geq v_1$, т.е. $v_A \geq v_1$. Аналогично проверяется неравенство $v_A \leq v_2$. Таким образом, если матричная игра Γ_A имеет цену в чистых стратегиях, то, согласно (13.10), цена игры Γ_A в чистых стратегиях и цена игры Γ_A в смешанных стратегиях совпадают.

Из теоремы 13.2 вытекает ряд важных следствий, касающихся оптимальных стратегий игроков и седловых точек в смешанном решении матричной игры. Понятие седловой точки в смешанном расширении игры Γ_A вводится аналогично понятию седловой точки матричной игры. А именно, она определяется как ситуация (x^0, y^0) в смешанных стратегиях, одностороннее отклонение от которой уменьшает (точнее, не увеличивает) выигрыш отклонившегося игрока $F_A(x, y^0) \le F_A(x^0, y^0) \le F_A(x^0, y)$ $(x \in S_n,\ y \in S_m)$.

Далее, максиминные (минимаксные) стратегии игроков в смешанном расширении матричной игры определяют тем же способом, что и для матричной игры, — при замене оценочной функции $\alpha_i = \min\limits_j a_i^j$ на оценочную функцию $\overline{\alpha}(x) = \min\limits_{y \in S_m} F_A(x, y)$ и оценочной функции $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$ на оценочную функцию $\overline{\beta}(y) = \max\limits_{x \in S_n} F_A(x, y)$. Максиминная смешанная стратегия x^0 игрока *1* характеризуется равенством

$$\overline{\alpha}(x^0) = \max_{x \in S_n} \overline{\alpha}(x) = \max_{x \in S_n} \min_{y \in S_m} F_A(x, y) = v_A, \tag{13.11}$$

а минимаксная смешанная стратегия y^0 игрока *2* — равенством

$$\overline{\beta}(y^0) = \min_{y \in S_m} \overline{\beta}(y) = \min_{y \in S_m} \max_{x \in S_n} F_A(x, y) = v_A. \tag{13.12}$$

Доказательство теоремы 13.1 переносится на случай смешанного расширения матричной игры практически без изменений (с заменой оценочных функций α_i и β^j на $\overline{\alpha}(x)$ и $\overline{\beta}(y)$). Учитывая теорему фон Неймана, имеем следующий результат.

Теорема 13.3. (*связь седловой точки с ценой игры в смешанном расширении матричной игры*).

1) *Пусть* $(x^0; y^0)$ — *седловая точка в смешанном расширении матричной игры* Γ_A. *Тогда*:

а) x^0 — *максиминная стратегия игрока 1*;

б) y^0 — *минимаксная стратегия игрока 2*;

в) *исход в седловой точке равен цене игры*.

2) *Любая ситуация в смешанных стратегиях* (x^0, y^0), *где* x^0 — *максиминная стратегия игрока 1 и* y^0 — *минимаксная стартегия игрока 2, является седловой точкой в смешанном расширении игры* Γ_A.

Следствие 1. Для любой матричной игры Γ_A существует седловая точка в смешанных стратегиях.

Следствие 2. В смешанном расширении матричной игры исходы во всех седловых точках совпадают и равны цене игры в смешанных стратегиях.

Следствие 3. Пусть $\overline{X}^*$ — множество максиминных стратегий игрока *1*, $\overline{Y}^*$ — множество минимаксных стратегий игрока *2*, $\overline{E}$ — множество седловых точек в смешанным расширении игры Γ_A. Тогда

$$\overline{E} = \overline{X}^* \times \overline{Y}^*. \tag{13.13}$$

Для антагонистических игр, имеющих цену, можно ввести принципы оптимальности стратегий игроков и принцип оптимальности ситуаций следующим образом.

а) Под *оптимальной стратегией игрока 1* будем понимать его максиминную стратегию;

б) под *оптимальной стратегией игрока 2* будем понимать его минимаксную стратегию;

в) под *оптимальной ситуацией* будем понимать седловую точку.

В этих терминах теорема 13.2 означает, что *для класса матричных игр введенные принципы оптимальности реализуются в смешанных расширениях этих игр.* Следствие 3 показывает, что *данные принципы оптимальности согласованы между собой*, а следствие 2 — что *они согласованы с принципом оптимальности исходов, согласно которому оптимальным исходом матричной игры является ее цена в смешанных стратегиях.*

5. Задача 16. *Профилактика нежелательного события.*

Принимающий решение ожидает наступление одного из m нежелательных событий, не располагая никакими данными о вероятностях их наступления. В качестве нежелательных событий могут выступать, например, стихийные бедствия, неисправности в функционировании технической или организационной системы, проверки со стороны контролирующего органа и т.п. Величина ущерба при наступлении события j равна $q_j > 0 \quad (j = \overline{1,m})$ и известна принимающему решение.

Имеется n профилактических действий, направленных на уменьшение ущерба от нежелательных событий; пусть $p_i > 0$ — стоимость i-го профилактического действия $(i = \overline{1,n})$. Если принимающий решение выбирает профилактическое действие i, а «природа» осуществляет событие j, то итоговые потери для принимающего решение будут выражаться некоторой величиной b_i^j $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. Для простоты будем считать что всякое профилактическое действие либо сводит ущерб от нежелательного события до нуля (защищает от последствий этого события), либо не оказывает никакого влияния на величину ущерба (не защищает от последствий нежелательного события). Тогда потери в ситуации (i, j) составляют

$$b_i^j = \begin{cases} p_i, & \text{если действие } i \text{ защищает от последствий события } j, \\ p_i + q_j & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

В результате получаем матричную игру принимающего решение (игрок *1*) с природой (игрок *2*), причем матрица $\|b_i^j\|$ является матрицей потерь для принимающего решение.

Рассмотрим конкретный пример такой игры. Пусть ожидаемое нежелательное событие — наводнение, которое может иметь категорию с первой по пятую; профилактическое действие состоит в строительстве дамбы. Будем считать, что имеется пять вариантов выбора высоты дамбы $h_1 < h_2 < h_3 < h_4 < h_5$, причем дамба высоты h_i защищает от наводнения, имеющего категорию не выше i-й и не защищает от наводнения, имеющего категорию выше i-й. В табл. 13.3 приведены затраты на строительство дамбы, а в табл. 13.4 — величины ущерба от наводнения (в некоторых денежных ед.).

Таблица 13.3

Высота дамбы	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
Затраты	2	4	6	8	10

Таблица 13.4

Категория наводнения	1	2	3	4	5
Ущерб	5	10	13	16	20

В данной матричной игре принимающий решение имеет шесть стратегий (не строить дамбу вообще или строить дамбу высоты h_i, $i = \overline{1,5}$); природа также имеет шесть стратегий (не осуществлять наводнение или осуществить наводнение j-й категории, $j = \overline{1,5}$).

Получающаяся матрица потерь задается табл. 13.5.

Таблица 13.5

	Игрок *2*					
Игрок *1*	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	13	16	20
h_1	2	2	12	15	18	22
h_2	4	4	4	17	20	24
h_3	6	6	6	6	22	26
h_4	8	8	8	8	8	28
h_5	10	10	10	10	10	10

Чтобы получить из табл. 13.5 матрицу выигрышей, достаточно у всех элементов поменять знак или ввести выигрыши по формуле

$$a_i^j = C - b_i^j,$$

где C — любая константа (в данном случае константа C может интерпретироваться как сумма, выделенная на строительство дамбы, тогда выигрыш a_i^j представляет собой сэкономленную сумму). Взяв, например, $C = 30$, получаем матрицу выигрышей, заданную табл. 13.6.

Таблица 13.6

	Игрок *2*						
Игрок *1*	0	1	2	3	4	5	min
0	30	25	20	17	14	10	10
h_1	28	28	18	15	12	8	8
h_2	26	26	26	13	10	6	6
h_3	24	24	24	24	8	4	4
h_4	22	22	22	22	22	2	2
h_5	20	20	20	20	20	20	20
max	30	28	26	24	22	20	

В полученной матричной игре имеется единственная седловая точка $(h_5; 5)$.

Итак, рассматриваемая матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях; стратегия $i^* = h_5$ является оптимальной (максиминной) стратегией игрока *1*, а стратегия $j^* = 5$ — оптимальной (минимаксной) стратегией игрока *2*. Цена игры в чистых стратегиях существует и равна 10 денежным ед.

Лекция 14. *Методы нахождения решения матричной игры в смешанных стратегиях*

• *Определение решения матричной игры. Некоторые правила, связанные с нахождением решения игры:* а) *переход к эквивалентной игре;* б) *правило дополняющей нежесткости;* в) *отбрасывание доминируемых стратегий.* • *Аналитический и графоаналитический метод нахождения решения матричной игры.* • *Нахождение решения матричной игры с помощью системы линейных неравенств. Сведе́ние задачи нахождения решения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.* • *Примеры экономических задач, моделируемых матричными играми.* • Задача 17. *Выбор момента поступления товара на рынок в условиях антагонистической конкуренции.* • Задача 18. *Планирование посева в неопределенных погодных условиях.* • Задача 19. *Инспекция предприятий торговли.*

1. Формально решение матричной игры Γ_A в смешанных стратегиях определяется как тройка (x^0, y^0, v_A), где x^0 — оптимальная стратегия игрока *1*, y^0 — оптимальная стратегия игрока *2*, v_A — цена игры Γ_A в смешанных стратегиях. Фактически нахождение решения матричной игры Γ_A сводится к нахождению седловой точки $(x^0; y^0)$, так как тогда x^0 — оптимальная стратегия игрока *1*, y^0 — оптимальная стратегия игрока *2*, $F_A(x^0, y^0) = v_A$ — цена игры Γ_A (см. лекцию 13, п. 4).

З а м е ч а н и е. Если матричная игра Γ_A имеет цену в чистых стратегиях, то тройка (i_0, j_0, v), где i_0 — максиминная (чистая) стратегия игрока *1*, j_0 — минимаксная (чистая) стратегия игрока *2*, $v = a_{i_0}^{j_0}$, является решением игры. Случай, когда матричная игра имеет цену в чистых стратегиях, мы не рассматриваем, считая его тривиальным.

Приведем несколько простых правил, позволяющих упростить задачу нахождения решения матричной игры.

Правило 14.1 (*переход к эквивалентной игре*). *Пусть* Γ_A — *матричная игра с платежной матрицей* $A = \|a_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. *Построим матрицу* $B = \|b_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, *где* $b_i^j = ka_i^j + c$ $(k > 0)$. *Тогда функции выигрыша* F_B *и* F_A *в смешанных расширениях этих игр связаны равенством*

$$F_B(x, y) = kF_A(x, y) + c. \tag{14.1}$$

Из (14.1) *сразу следует, что нахождение решеня игры* Γ_A *эквивалентно нахождению решения игры* Γ_B: *если* (x^0, y^0, v_B) — *решение игры* Γ_B, *то* $(x^0, y^0, (v_B - c)/k)$ — *решение игры* Γ_A.

Практическое использование правила 14.1 состоит в том, что от заданной платежной матрицы A можно перейти к более простой платежной матрице B, подбирая подходящие константы $k > 0$ и c.

Правило 14.2 (*правило дополняющей нежесткости*). *Пусть* $(x^0; y^0)$ — *седловая точка в смешанных стратегиях в игре* Γ_A. *Тогда*:

а) *в любой ситуации* (i, y^0), *где* $i \in \operatorname{Sp} x^0$, *исход равен цене игры*:

$$F_A(i, y^0) = v_A;$$

б) *в любой ситуации* (x^0, j), *где* $j \in \operatorname{Sp} y^0$, *исход равен цене игры*: $F_A(x^0, j) = v_A$. (Напомним, что через Sp обозначается спектр смешанной стратегии, см. лекцию 13, п. 3.)

Утверждения а) и б) сразу следуют из правила 13.6: если $(x^0; y^0)$ — седловая точка, то функция $F_A(x, y^0)$ достигает наибольшего значения при $x = x^0$, а функция $F_A(x^0, y)$ достигает наименьшего значения при $y = y^0$. Остается заметить, что согласно утверждению 1, в) теоремы 13.3, исход в седловой точке равен цене игры.

Правило 14.3 (*правило отбрасывания доминируемых стратегий*). *При нахождении решения матричной игры в смешанных стратегиях доминируемые стратегии игроков могут быть отброшены.*

Напомним, что отношение доминирования стратегий вводилось для ЗПР в условиях неопределенности (лекция 8, п. 2). При переходе к матричным играм, следует учитывать, что для них возможно рассмотрение доминирования стратегий как для игрока *1*, так и для игрока *2*. А именно, в игре с платежной матрицей $A = \|a_i^j\|$

($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$) для стратегий i_1, i_2 игрока *1* условие доминирования $i_1 \geq^{(1)} i_2$ означает, что при всех $j = \overline{1,m}$ выполняется $a^j_{i_1} \geq a^j_{i_2}$; для стратегий j_1, j_2 игрока *2* условие доминирования $j_1 \geq^{(2)} j_2$ означает, что при всех $i = \overline{1,n}$ имеет место $a^{j_1}_i \leq a^{j_2}_i$.

При использовании метода доминирования стратегий необходимо учитывать следующие два замечания.

Замечания. **1.** Можно рассматривать не только доминирование одной чистой стратегии игрока другой чистой стратегией, но также доминирование чистой стратегии игрока некоторой выпуклой комбинацией других чистых стратегий этого игрока. Например, в матричной игре Γ_A стратегия 3 доминируется выпуклой комбинацией стратегий 1 и 2, если существуют такие неотрицательные числа α_1, α_2, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, что при всех j имеет место неравенство $a^j_3 \leq \alpha_1 a^j_1 + \alpha_2 a^j_2$.

При этом, согласно правилу 13.3, а), правая часть последнего неравенства может быть представлена в виде значения функции выигрыша F_A в ситуации (α, j), где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Таким образом, условие доминирования чистой стартегии игрока выпуклой комбинацией других чистых стратегий означает доминирование этой чистой стратегии некоторой смешанной стратегией, спектр которой не содержит данной чистой стратегии.

2. Задача нахождения решения матричной игры в смешанных стратегиях может ставиться в одном из двух видов: (а) найти хотя бы одно решение и (б) найти *все* решения. При отбрасывании доминируемых стратегий игрока может происходить потеря некотрых его оптимальных стратегий в первоначальной игре (такая потеря является несущественной при постановке (а) и может оказаться существенной при постановке (б)). Однако, если отбрасываемая стратегия является *строго доминируемой* (т.е. все неравенства, входящие в условие доминирования, — строгие), то такой потери не происходит. Это обстоятельство может быть уточнено следующим образом.

Правило 14.4. *Пусть чистая стратегия i_0 игрока 1 строго доминируется выпуклой комбинацией чистых стратегий $\{i_1, \ldots, i_k\}$, где $i_0 \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Тогда стратегия i_0 не может входить в спектр какой-либо оптимальной смешанной стратегии игрока 1.*

Действительно, в силу замечания 1, при всех $j = 1, m$ справедливы строгие неравенства $F_A(i_0, j) < F_A(\alpha, j)$, где $\alpha \in S_n$. Пусть $y^0 = (y^0_1, \ldots, y^0_m)$ — оптимальная стратегия игрока *2*. Умножая обе части написанного неравенства на y^0_j и суммируя по $j = \overline{1,m}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^0 F_A(i_0, j) < \sum_{j=1}^{m} y_j^0 F_A(\alpha, j),$$

что, согласно правилу 13.4, а), дает $F_A(i_0, y^0) < F_A(\alpha, y^0)$. С другой стороны, по определению седловой точки $F_A(\alpha, y^0) \le v_A$, где v_A — цена игры Γ_A; получаем $F_A(i_0, y^0) < v_A$. В силу условия дополняющей нежесткости (правило 14.2), чистая стратегия i_0 не может принадлежать спектру никакой оптимальной стратегии игрока *1*.

Примеры использования правил 14.1–14.4 приведены ниже.

2. Рассмотрим вначале нахождение решения матричной игры, в которой игроки *1* и *2* имеют по две стратегии (игры формата 2×2). Такая игра задается платежной матрицей вида $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$. Пусть (x_1, x_2) — компоненты оптимальной стратегии игрока *1*, (y_1, y_2) — компоненты оптимальной стратегии игрока *2*. Тогда, исключая тривиальный случай (т. е. случай наличия решения в чистых стратегиях), имеем

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0; \qquad y_1 + y_2 = 1, \quad y_1 > 0,\ y_2 > 0.$$

По условию дополняющей нежесткости (правило 14.2)

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 = v_A, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 = v_A. \end{cases} \tag{14.2}$$

Приравнивая левые части уравнений (14.2) и подставляя $x_2 = 1 - x_1$, получаем

$$x_1 = \frac{a_2^2 - a_2^1}{\Delta_A}, \qquad x_2 = 1 - x_1, \tag{14.3}$$

где $\Delta_A = (a_1^1 + a_2^2) - (a_1^2 + a_2^1)$.

Аналогично находим

$$y_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{\Delta_A}, \qquad y_2 = 1 - y_1. \tag{14.4}$$

Цена игры находится подстановкой найденных значений x_1, x_2 в любое из уравнений системы (14.2).

Рассмотрим теперь более общий — графоаналитический метод, с помощью которого можно находить решение матричной игры, где один из игроков имеет две чистые стратегии. Для игры формата $2 \times m$ платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^j & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & \dots & a_2^j & \dots & a_2^m \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае смешанная стратегия игрока *1* может быть отождествлена с точкой x отрезка $[0,1]$ (компоненты такой смешанной стратегии: x и $1-x$). При любом фиксированном $j = \overline{1,m}$ выигрыш игрока *1* становится функцией одной переменной x; по правилу 13.3, а) явное выражение этой функции имеет вид

$$F_A(x,j) = a_1^j x + a_2^j (1-x).$$

Построим графики этих функций (рис. 14.1) в декартовой системе координат, где $0 \le x \le 1$ (графиком функции $F_A(x,j)$ будет прямая (j)). Далее, построим график функции

$$\alpha(x) = \min_{1 \le j \le m} F_A(x,j)$$

— им служит нижняя огибающая данного семейства прямых (жирная ломаная). Пусть M^* — верхняя точка нижней огибающей и x^* — ее первая координата (другими словами, x^* — точка отрезка $[0,1]$, в которой функция $\alpha(x)$ принимает наибольшее значение:

$$\alpha(x^*) = \max_{0 \le x \le 1} \alpha(x).$$

Заметим теперь, что в произвольной матричной игре Γ_A оценочные функции $\alpha(x) = \min\limits_{1 \le j \le m} F_A(x,j)$ и $\overline{\alpha}(x) = \min\limits_{y \in S_m} F_A(x,y)$ совпадают между собой. В самом деле, используя разложение функции выигрыша $F_A(x,y)$ по чистым стратегиям игрока *2* (правило 13.4, а)), можем записать равенство

$$F_A(x,y) = \sum_{j=1}^{m} y_j F_A(x,j),$$

откуда следует, что $\min\limits_{y \in S_m} F_A(x,y)$ совпадает с $\min\limits_{1 \le j \le m} F_A(x,j)$ при любом фиксированном $x \in S_n$, т.е. $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$.

Переходя к нашему случаю, получаем

$$\alpha(x^*) = \overline{\alpha}(x^*) = \max_{0 \le x \le 1} \overline{\alpha}(x) = \max_{0 \le x \le 1} \min_{y \in S_m} F_A(x,y) = v_A. \quad (14.5)$$

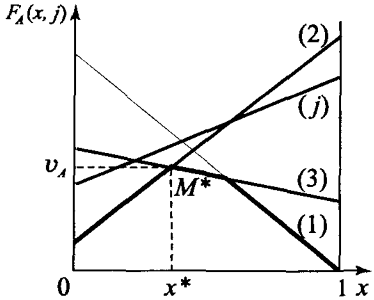


Рис. 14.1

Из (14.5) следует, что x^* — оптимальная смешанная стратегия игрока *1*, а вторая координата точки M^* есть v_A — цена игры Γ_A в смешанных стратегиях. Итак, значения компонент оптимальной смешанной стратегии игрока *1* и цена игры v_A могут быть приближенно найдены по графику.

Укажем теперь способ нахождение точных значений компонент оптимальных стратегий обоих игроков и цены игры. Для этого надо воспользоваться правилом дополняющей нежесткости (правило 14.2), согласно которому, если один из игроков использует оптимальную смешанную стратегию, а другой — чистую, принадлежащую спектру какой-нибудь его оптимальной стратегии, то исход равен цене игры. Геометрически это означает, что чистая стратегия $j = \overline{1, m}$ может входить в спектр какой-нибудь оптимальной смешанной стратегии игрока *2* лишь тогда, когда прямая (j) проходит через точку M^* (см. рис. 14.1). Выбирая две прямые, проходящие через точку M^* (в рассматриваемом случае это прямые (2) и (3)) и оставляя в платежной матрице A соответствующие столбцы, получаем в результате игру формата 2×2, для которой находим точное аналитическое решение по формулам (14.3) и (14.4). Для переноса этих решений в первоначальную матричную игру с платежной матрицей A достаточно компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *2*, соответствующие номерам выброшенных столбцов, положить равными нулю.

Замечание. Графоаналитический способ применим также к играм, в которых игрок *2* имеет ровно две чистые стратегии (т.е. к играм формата $n \times 2$). В этом случае смешанная стратегия игрока *2* может быть представлена точкой y отрезка $[0, 1]$ (в качестве оси абсцисс здесь берется ось y-ов). Если игрок *1* использует чистую стратегию i, то исход в ситуации (i, y) есть $F_A(i, y) = a_i^1 y + a_i^2(1-y)$. Построив для каждого $i = \overline{1, n}$ соответствующую прямую, находим далее верхнюю огибающую данного семейства прямых, которая является графиком функции

$$\beta(y) = \max_{1 \leq i \leq n} F_A(i, y).$$

Нижняя точка верхней огибающей является искомой — ее первая координата приближенно определяет оптимальную смешанную стратегию игрока *2*, а вторая координата — цену игры Γ_A в смешанных стратегиях. Точное решение получается здесь переходом к игре формата 2×2, как в предыдущем случае.

3. Нахождение решения матричной игры Γ_A с помощью системы линейных неравенств основано на следующем простом факте.

Теорема 14.1. *Для того чтобы ситуация $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$ была седловой точкой в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы при всех $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$ выполнялось неравенство*

$$F_A(i, y^0) \leq F_A(x^0, y^0) \leq F_A(x^0, j). \qquad (14.6)$$

Теоретико-игровой смысл условия (14.6) состоит в следующем: ситуация (x^0, y^0) является седловой точкой тогда и только тогда, когда она устойчива относительно всех чистых односторонних отклонений игроков.

Доказательство. Необходимость условия (14.6) очевидна, так как чистая стратегия является частным случаем смешанной. Докажем достаточность. Пусть двойное неравенство (14.6) выполнено. Правая часть неравенства (14.6) означает, что стратегия x^0 гарантирует игроку *1* исход, равный $F_A(x^0, y^0)$, против любой чистой стратегии игрока *2*. Тогда по правилу 13.5,а) стратегия x^0 гарантирует игроку *1* указанный исход также против любой смешанной стратегиии игрока *2*, т.е.

$$(\forall\, y \in S_m) \quad F_A(x^0, y) \geq F_A(x^0; y^0).$$

Аналогично, используя правило 13.5,б), получаем, что

$$(\forall\, x \in S_n) \quad F_A(x, y^0) \leq F_A(x^0, y^0).$$

Таким образом, (x^0, y^0) — седловая точка игры Γ_A.

Следствие. *Для того чтобы вектор $x^0 \in S_n$ был оптимальной смешанной стратегией игрока 1, вектор $y^0 \in S_m$ — оптимальной смешанной стратегией игрока 2 и число $v \in \mathbb{R}$ — ценой игры Γ_A, необходимо и досточно, чтобы выполнялась следующая система линейных неравенств*:

$$\begin{cases} F_A(x^0, j) \geq v & (j = \overline{1, m}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ F_A(i, y^0) \leq v & (i = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{14.7}$$

На теоретико-игровом языке условие (14.7) означает, что стратегия x^0 должна гарантировать игроку *1* исход v против любой чистой стратегии игрока *2*, а стратегия y^0 должна гарантировать игроку *2* исход v против любой чистой стратегии игрока *1*.

Доказательство. Необходимость сразу следует из теоремы 14.1 с учетом того, что $F_A(x^0, y^0) = v$ — цена игры Γ_A (см. теорему 13.3). Обратно, предположим, что система неравенств (14.7) выполнена. Тогда по правилу гарантирующей стратегии (правило 13.5) при произвольных $x \in S_n$, $y \in S_m$ получаем

$$F_A(x, y^0) \leq v, \qquad F_A(x^0, y) \geq v. \tag{14.8}$$

Полагая в (14.8) $x = x^0$, $y = y^0$, имеем $F_A(x^0, y^0) = v$; таким образом, (14.8) означает, что $(x^0; y^0)$ — седловая точка. Так как $v = F_A(x^0, y^0)$, то v — цена игры Γ_A в смешанных стратегиях.

Замечание. Система условий (14.7) представляет собой систему $(n+m)$ линейных неравенств; явное выражение левых частей этих неравенств легко получить по правилу 13.3. При практическом использовании системы (14.7) для нахождения решения матричной игры необходимо к неравенствам (14.7) добавить условия неотрицательности переменных x_i, y_j $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$ и условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad \sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

Рассмотрим теперь способ нахождения решения матричной игры методом линейного программирования. Он основан на утверждении, которое следует из правила гарантирующей стратегии (правило 13.5).

Теорема 14.3. *Смешанная стратегия $x = (x_1, \ldots, x_n)$ является оптимальной стратегией игрока 1 тогда и только тогда, когда она гарантирует игроку 1 исход v, равный цене игры, против любой чистой стратегии другого игрока:*

$$\begin{cases} F_A(x, 1) \geq v, \\ \dotfill \\ F_A(x, m) \geq v. \end{cases} \tag{14.9}$$

В силу теоремы фон Неймана, цена игры является наибольшим из гарантированных исходов игрока *1*, поэтому компоненты $(x_1, \ldots, x_n)$ оптимальной смешанной стратегии игрока *1* являются решением следующей **задачи 1**:

найти неотрицательное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n \geq v, \\ \dotfill \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n \geq v \end{cases} \tag{14.10}$$

при наибольшем возможном значении параметра v, удовлетворяющее дополнительному условию $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

Будем здесь предполагать, что цена игры Γ_A строго положительна. (Это предположение не уменьшает общности рассуждения, так как прибавляя ко всем элементам платежной матрицы некоторую положительную константу, мы всегда можем перейти к эквивалентной игре с положительными выигрышами, тогда ее цена также будет положительна.) Разделив каждое из неравенств системы (14.10) на $v > 0$ и полагая $x_i' = \frac{x_i}{v}$ $(i = \overline{1, n})$, приходим к эквивалентной системе линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1^1 x_1' + a_2^1 x_2' + \cdots + a_n^1 x_n' \geq 1, \\ \dotfill \\ a_1^m x_1' + a_2^m x_2' + \cdots + a_n^m x_n' \geq 1. \end{cases} \tag{14.11}$$

При этом

$$x_1' + \cdots + x_n' = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{v} = \frac{1}{v}.$$

Так как максимизация параметра v эквивалентна минимизации суммы $x_1' + \cdots + x_n'$, то получаем, что сформулированная выше задача 1 эквивалентна следующей **задаче 2**:

найти $\min f(x_1', \ldots, x_n') = x_1' + \cdots + x_n'$ *при неотрицательных переменных* $x_1' \geq 0, \ldots, x_n' \geq 0$, *удовлетворяющих ограничениям* (14.11).

Это стандартная задача линейного программирования (см. лекцию 4, п. 1). Решив ее, находим цену игры $v = 1/(x'_1 + \cdots + x'_n)$ и компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *1*:

$$x_1 = vx'_1, \ldots, x_n = vx'_n.$$

Двойственным образом, задача нахождения оптимальной смешанной стратегиии игрока *2* эквивалентна следующей **задаче линейного программирования**:

найти $\max g(y'_1, \ldots, y'_m) = y'_1 + \cdots + y'_m$ *при неотрицательных переменных* $y'_1 \geq 0, \ldots, y'_m \geq 0$, *удовлетворяющих ограничениям*

$$\begin{cases} a_1^1 y'_1 + a_1^2 y'_2 + \cdots + a_1^m y'_m \leq \ 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 y'_1 + a_n^2 y'_2 + \cdots + a_n^m y'_m \leq \ 1. \end{cases} \tag{14.12}$$

Решив последнюю задачу, находим компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *2* по формулам

$$y_1 = vy'_1, \ldots, y_m = vy'_m,$$

где $v = 1/(y'_1 + \cdots + y'_m)$.

Заметим, что эти задачи являются двойственными друг другу (см. лекцию 4, п. 3). Таким образом, справедлив следующий важный вывод.

Вывод. *Нахождение решения матричной игры в смешанных стратегиях может быть сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования.*

Задача 17. *Выбор момента поступления товара на рынок в условиях антагонистической конкуренции.*

Фирма A производит некоторый сезонный товар, имеющий спрос в течение n ед. времени. Аналогичный товар производит конкурирующая фирма B. Цель фирмы B состоит в разорении фирмы A (после чего она целиком захватывает рынок и «с лихвой» окупает свои затраты); цели фирмы A прямо противоположны (избежать разорения). Таким образом, здесь имеет место конфликт антагонистического характера, математической моделью которого является матричная игра.

Для фирмы B простейший способ достижения своей цели состоит в продаже товара по низким (демпинговым) ценам. Считаем, что действует антидемпинговый закон, запрещающий такую продажу. Тогда единственным законным инструментом для фирмы B является выбор момента поступления товара на рынок.

Предполагается, что как только одна из фирм выставляет товар на продажу, конкурирующая фирма создает на его основе более совершенную модель, которая и пользуется спросом (затратами на создание новой модели пренебрегаем).

Пусть фирма A выставляет товар на продажу в момент времени $i = \overline{1, n}$, а фирма B — в момент $j = \overline{1, n}$. Возможны три случая.

1) $i < j$. Тогда фирма A получает доход в течение $(j - i)$ ед. времени. В момент j на рынок поступает более совершенная модель фирмы B, и фирма A с этого момента теряет рынок. Обозначая через C доход фирмы от продажи товара за единицу времени, получаем, что в этом случае доход фирмы A составляет $C(j - i)$ денежных ед.

2) $i > j$. Тогда фирма A имеет доход в течение оставшихся $(n-i+1)$ ед. времени, т.е. ее доход равен $C(n-i+1)$ денежных ед.

3) $i = j$. В этом случае считаем, что товары обеих фирм имеют одинаковый спрос, следовательно, доход каждой из них составляет $C(n - i + 1)/2$ денежных ед.

Итак, получаем матричную игру фирмы A и фирмы B, стартегиями которых являются дискретные моменты поступления товара на рынок. Функция выигрыша этой игры задается следующим образом:

$$F_A(i,j) = \begin{cases} C(j-i), & \text{если} \quad i < j, \\ \dfrac{1}{2}C(n-i+1), & \text{если} \quad i = j, \\ C(n-i+1), & \text{если} \quad i > j. \end{cases}$$

Рассмотрим более подробно случай $n = 4$. Матрица выигрышей представлена табл. 14.1.

Таблица 14.1

	1	2	3	4
1	$2C$	C	$2C$	$3C$
2	$3C$	$3C/2$	C	$2C$
3	$2C$	$2C$	C	C
4	C	C	C	$C/2$

Таблица 14.2

	1	2	3	4
1	2	1	2	3
2	3	3/2	1	2
3	2	2	1	1
4	1	1	1	1/2

Разделив все элементы этой матрицы на $C > 0$, перейдем к эквивалентной игре (табл. 14.2), имеющей те же оптимальные стратегии игроков (см. правило 14.1).

Для упрощения этой игры можно использовать правило отбрасывания доминируемых стратегий (правило 14.3). Здесь $3 \geq^{(1)} 4$ и $2 \geq^{(2)} 1$. Отбрасывая доминируемую стратегию 4 игрока *1* и доминируемую стратегию 1 игрока *2* (т.е. вычеркивая в матрице выигрышей 4-ю строку и 1-й столбец), получаем игру с матрицей A_1 (номера стратегий первоначальной игры сохраняются):

A_1	2	3	4
1	1	2	3
2	3/2	1	2
3	2	1	1

A_2	2	3
1	1	2
2	3/2	1
3	2	1

A_3	2	3
1	1	2
3	2	1

В игре с матрицей A_1 имеется доминирование стратегий игрока *2*: $3 \geq^{(2)} 4$; вычеркивая доминируемый 4-й столбец, приходим к игре с матрицей A_2. В матрице A_2 2-я строка доминируется полусуммой 1-й и 3-й строки, т.е. в игре с матрицей выигрышей A_2 вторая чистая стратегия игрока *1* доминируется смешанной стратегией $(1/2, 0, 1/2)$ игрока *1*. Отбрасывая доминируемую стратегию 2, получаем игру с матрицей A_3, в которой нет ни доминируемых строк, ни доминируемых столбцов. Решение последней игры находим аналитическим методом (см. п. 2). По формулам (14.3) и (14.4) имеем: $x_1^* = 1/2, x_3^* = 1/2, y_2^* = 1/2, y_3^* = 1/2$; цена игры с матрицей выигрышей A_3 равна 3/2. Чтобы получить решение первоначальной игры, надо компоненты оптимальных стратегий, соответствующие вычеркнутым строчкам и столбцам, положить равными нулю, а цену игры умножить на C. В результате получаем решение первоначальной игры в виде: $x^* = (1/2, 0, 1/2, 0)$, $y^* = (0, 1/2, 1/2, 0)$, $v = 3C/2$.

Задача 18. *Планирование посева в неопределенных погодных условиях.*

У фермера имеется поле, которое он может засеять культурами A_1, A_2, A_3 в любой пропорции. Урожайность этих культур зависит от сочетания погодных факторов, главными из которых являются осадки и тепло в летний сезон. Будем считать, что по признаку «осадки» лето имеет три градации: *Н* — нормальное, *З* — засушливое, *Д* — дождливое; по признаку «тепло» — две градации: *Н* — нормальное и *Ж* — жаркое.

Известна урожайность культур A_1, A_2, A_3 (в центнерах) в зависимости от сочетания типов погодных условий (табл. 14.3), а также рыночная цена этих культур (табл. 14.4).

Таблица 14.3

	Н, Н	*Н, Ж*	*З, Н*	*З, Ж*	*Д, Н*	*Д, Ж*
A_1	133	133	100	33	233	233
A_2	125	150	200	250	75	100
A_3	80	100	60	20	120	140

Примечание. Расходы, связанные с выращиванием культур A_1, A_2, A_3, считаем одинаковыми.

Как нужно действовать фермеру, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение. Умножая урожайность культур на цены, получаем прибыль (без учета постоянной величины всех расходов), см. табл. 14.5.

Таблица 14.4

Культура	Цена
A_1	90
A_2	120
A_3	150

Таблица 14.5

	1	2	3	4	5	6
A_1	12	12	9	3	21	21
A_2	15	18	24	30	9	12
A_3	12	15	9	3	18	21

Рассматриваем табл. 14.5 как матричную игру фермера (игрок *1*) против природы (игрок *2*); при этом всевозможные стратегии природы перенумерованы по порядку. Нахождение решения полученной игры осуществляется по следующей схеме.

1. Убеждаемся, что в данной игре нет седловой точки в чистых стратегиях.

2. Упрощаем игру, исключая доминируемые стратегии игроков. В данном случае $1 \geq^{(2)} 2$, $5 \geq^{(2)} 6$. Отбрасываем 2-й и 6-й столбцы, соответствующие доминируемым стратегиям игрока *2*, после чего появляется пара стратегий игрока *1*, находящаяся в отношении доминирования: $A_1 \geq^{(1)} A_3$. Отбрасывая строку A_3, соответствующую доминируемой стратегии игрока *1*, получаем в итоге матричную игру формата 2×4, представленную табл. 14.6.

Таблица 14.6

	1	3	4	5
A_1	12	9	3	21
A_2	15	24	30	9

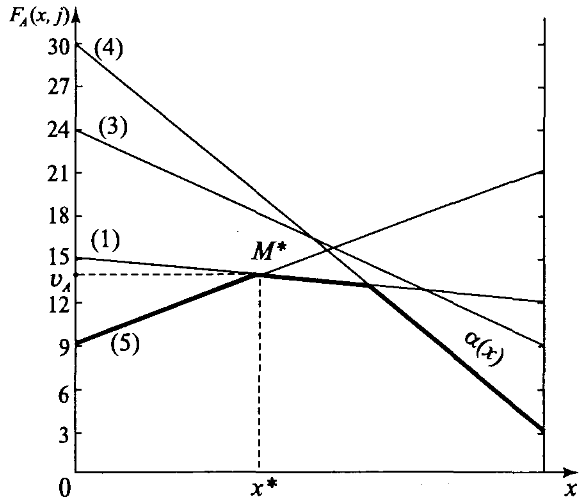


Рис. 14.2

Решение данной матричной игры находим графоаналитическим методом (см. п. 2), приняв за x вероятность выбора стратегии A_1 и за $(1-x)$ вероятность выбора стратегии A_2.

В декартовой системе координат (рис. 14.2) строим графики функций

$$F_A(x,1) = 12x + 15(1-x), \qquad F_A(x,4) = 3x + 30(1-x),$$
$$F_A(x,3) = 9x + 24(1-x), \qquad F_A(x,5) = 21x + 9(1-x).$$

По графику находим приближенно координаты точки M^* — верхней точки нижней огибающей данного семейства прямых: $x^* \approx 0,4$, $v_A \approx 14$. Таким образом, компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *1* приближенно равны $(0,4;\ 0,6)$, а цена игры в смешанных стратегиях $v_A \approx 14$. Чтобы найти точные значения этих величин, а также компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *2*, переходим к игре формата 2×2, оставляя из чистых стратегий игрока *2* только 1-ю и 5-ю (так как только прямые (1) и (5) проходят через точку M^*). Получаем в итоге матричную игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$, для которой по формулам (14.3) и (14.4) находим

$$x_1^* = \frac{9-15}{-15} = 0,4; \qquad x_2^* = 1 - x_1^* = 0,6;$$
$$y_1^* = \frac{9-21}{-15} = 0,8; \qquad y_2^* = 1 - y_1^* = 0,2;$$
$$v_A = 12x_1^* + 15(1 - x_1^*) = 13,8.$$

Перенося эти результаты в первоначальную игру, получаем ее решение в виде:

$$x^* = (0,4;\ 0,6;\ 0), \quad y^* = (0,8;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0,2;\ 0), \quad v_A = 13,8.$$

Результат здесь может быть интерпретирован следующим образом: оптимальная стратегия фермера состоит в том, чтобы 40% поля засеять культурой A_1, 60% — культурой A_2, а культуру A_3 не сеять совсем. При этом гарантированная прибыль фермера (т.е. прибыль, которая получается при наименее благоприятном сочетании погодных факторов), составляет 13, 8 денежных ед.

Замечание. Отметим, что в данной задаче компоненты смешанной стратегии игрока *1* (фермера) могут быть интерпретированы не как вероятности использования чистых стратегий, а как *доли*, в которых засевается общая площадь поля имеющимися культурами. Таким образом, здесь смешанная стратегия игрока *1* имеет характер физической смеси, принимая вид пропорции сочетания культур A_1, A_2, A_3. В этом случае оптимальная стратегия игрока максимизирует не ожидаемую, а гарантированную прибыль.

В заключение рассмотрим интересный пример экономической задачи, которая моделируется матричной игрой, причем ее оптимальное решение в смешанных стратегиях может быть найдено в явном виде.

Задача 19. *Инспекция предприятий торговли.*

Фирма располагает сетью из n магазинов. В инспекцию поступили сведения о том, что в этих магазинах продается бракованый товар, причем его объем в магазине j равен q_j $(j = \overline{1,n})$. Инспектирующий орган намерен провести инспекцию с целью обнаружения брака, однако, так как эти магазины территориально разбросаны, инспекции может быть подвергнут только один из них.

Фирма узнаёт о готовящейся инспекции и для того чтобы обезопасить себя, решает изъять бракованый товар; по техническим причинам такое изъятие может быть проведено только в одном магазине. Какие действия инспектора и фирмы будут оптимальными?

Для решения этой задачи построим вначале математическую модель описанной конфликтной ситуации. Считаем, что магазины пронумерованы по убыванию количества бракованого товара, т. е. $q_1 > q_2 > \dots > q_n > 0$. Чистой стратегией инспектора является выбор магазина $i = \overline{1,n}$, который будет подвергнут инспекции, а чистой стратегией фирмы является выбор магазина $j = \overline{1,n}$, из которого изымается бракованый товар. В результате получается матричная игра Г инспектора (игрок *1*) с фирмой (игрок *2*). Выигрышем инспектора будем считать объем обнаруженного им бракованого товара (если бракованый товар не обнаружен, то выигрыш равен нулю); выигрыш игрока *1* одновременно является также проигрышем игрока *2*. В результате получаем матричную игру с платежной матрицей, заданной табл. 14.7.

Таблица 14.7

	1	2	3	...	n
1	0	q_1	q_1	...	q_1
2	q_2	0	q_2	...	q_2
3	q_3	q_3	0	...	q_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	q_n	q_n	q_n	...	0

Для нахождения решения этой игры введем убывающую последовательность положительных чисел $(c_k)_{k=\overline{1,n}}$, где $c_k = \left(\sum_{s=1}^{k} 1/q_s\right)^{-1}$. Для дальнейшего анализа существенным является выполнение следующего неравенства:

$$\frac{q_k}{c_{k-1}} > k-2, \quad \text{где} \quad k \geq 2. \tag{14.13}$$

Неравенство (14.13) всегда выполнено при $k = 2$. Предположим, что оно выполняется не при всех $k \geq 3$ и пусть $(r+1)$ — первый номер, при котором неравенство (14.13) нарушено ($3 \leq r+1 \leq n$). Тогда

$$\frac{q_k}{c_{k-1}} > k-2 \quad (k = 2, \dots, r); \tag{14.14}$$

$$\frac{q_{r+1}}{c_r} \le r - 1. \qquad (14.15)$$

Убедимся, что при всех $k = \overline{1,r}$ имеет место неравенство

$$\frac{q_k}{c_r} > r - 1. \qquad (14.16)$$

Действительно, при $k = 1$ это неравенство выполняется в силу того, что числа $(q_s)_{s=\overline{1,r}}$ убывают. Проверим его справедливость для $k = \overline{2,r}$. Имеем

$$\frac{q_k}{c_r} = q_k \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s} = q_k \Big(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{q_s} + \sum_{s=k}^{r} \frac{1}{q_s} \Big) =$$
$$= q_k \sum_{s=1}^{k-1} \frac{1}{q_s} + \sum_{s=k}^{r} \frac{q_k}{q_s} = \frac{q_k}{c_{k-1}} + \sum_{s=k}^{r} \frac{q_k}{q_s}.$$

Согласно (14.14), $q_k/c_{k-1} > k - 2$. Оценим второе слагаемое. Так как последовательность (q_s) убывающая, то при всех $s = \overline{k,r}$ выполнено условие $q_k/q_s \ge 1$, откуда

$$\sum_{s=k}^{r} q_k/q_s \ge r - k + 1;$$

получаем

$$\frac{q_k}{c_r} > (k-2) + (r-k+1) = r - 1$$

и неравенство (14.16) установлено.

В силу (14.16), все числа

$$y_j^* = 1 - \frac{c_r}{q_j}(r-1),$$

где $j = \overline{1,r}$, строго положительны. Легко проверить, что их сумма равна 1. Таким образом, n-компонентный вектор $y^* = (y_1^*, \ldots, y_r^*, 0, \ldots, 0)$ является смешанной стратегией игрока *2*. Найдем исход игры Γ в ситуации (i, y^*), где $i = \overline{1,n}$ — чистая стратегия игрока *1*. Используя правило 13.3, б), для функции выигрыша F при $i = \overline{1,r}$ имеем:

$$F(i, y^*) = q_i \sum_{j \ne i} y_j^* = q_i(1 - y_i^*) = q_i \cdot \frac{c_r}{q_i}(r-1) = (r-1)c_r,$$

а для $i \geq r+1$, учитывая убывание чисел q_i и формулу (14.15), получаем

$$F(i, y^*) = q_i \sum_{j=1}^{r} y_j^* = q_i \leq q_{r+1} \leq (r-1)c_r.$$

Рассмотрим теперь n-компонентый вероятностный вектор

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_r^*, 0, \ldots, 0),$$

где $x_i^* = c_r/q_i \quad (i = \overline{1, r})$. По правилу 13.3,а) для $j = \overline{1, r}$ получаем

$$F(x^*, j) = \sum_{i \neq j} q_i x_i^* = \sum_{i \neq j} q_i \cdot \frac{c_r}{q_i} = (r-1)c_r,$$

а для $j \geq r+1$ имеем

$$F(x^*, j) = \sum_{i=1}^{r} q_i x_i^* = \sum_{i=1}^{r} c_r = rc_r > (r-1)c_r.$$

Полагая $v = (r-1)c_r$, получаем, что для всех $i, j = \overline{1, n}$ выполнено неравенство $F(i, y^*) \leq v$, $F(x^*, j) \geq v$. Согласно следствию теоремы 14.1, окончательно имеем: x^* есть оптимальная смешанная стратегия игрока *1*, y^* — оптимальная смешанная стратегия игрока *2*, $v = (r-1)c_r$ — цена игры Г.

Замечание. В ходе доказательства мы предполагали, что неравенство (14.13) выполнено не при всех $k > 2$. Случай, когда в игре Г это неравенство выполнено при всех $k = \overline{2, n}$, легко сводится к уже рассмотренному следующим способом. Добавим к системе чисел $q_1, \ldots, q_n$ число $0 < q_{n+1} < q_n$ так, чтобы $q_{n+1}/c_n \leq n-1$. Тогда в расширенной игре Γ' по доказанному выше смешанная стратегия $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, 0)$, где $x_i^* = c_n/q_i \quad (i = \overline{1, n})$, является оптимальной стратегией игрока *1*; смешанная стратегия $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*, 0)$, где $y_j^* = 1 - c_n(n-1)/q_j$ $(j = \overline{1, n})$, — оптимальной стратегией игрока *2*; число $v = (n-1)c_n$ — ценой игры. Вычеркнув последние (нулевые) компоненты в x^* и y^*, получим оптимальные стратегии игроков *1* и *2* в игре Г.

Лекция 15. *Игры n лиц в нормальной форме*

• *Игра n лиц как математическая модель совместного принятия решения в условиях несовпадения интересов. Бескоалиционные игры. Примеры экономических задач, моделируемых бескоалиционными играми.* • *Принцип оптимальности в форме равновесия по Нэшу. Некоторые особенности принципа равновесия по Нэшу.* • *Теорема Нэша о реализуемости принципа равновесия в смешанных стратегиях.* • *K-устойчивость. Формулировка условия K-устойчивости в рамках системного описания и на языке стратегий.* • Задача 20. *Задача распределения ресурсов.*

1. Системное описание задачи принятия решения в общем случае отражает воздействие на объект управления со стороны n управляющих подсистем, где $n \geq 2$. Пусть X_i — множество альтернативных управляющих воздействий i-й управляющей подсистемы, A — множество исходов (в качестве которых выступают состояния управляемой подсистемы). Функция реализации F в этом случае задается в виде отображения множества ситуаций $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ во множество исходов A. Таким образом, функция реализации каждой ситуации $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ ставит в соответствие определяемый ею исход $F(x) \in A$. В теоретико-игровой терминологии управляющие подсистемы называются ***игроками***, а множество X_i — ***множеством стратегий*** игрока i ($i = \overline{1,n}$).

Для задания целевой структуры рассматриваемой задачи принятия решения необходимо задать оценочную функцию $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$ для каждого игрока i. Композиция $f_i = \varphi_i \circ F$ называется ***функцией выигрыша*** игрока i, а число $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ есть оценка полезности ситуации $(x_1, \ldots, x_n)$ с точки зрения игрока i.

Итак, математическая модель данной задачи принятия решения имеет вид

$$\Gamma = \langle I,\ (X_i)_{i \in I},\ (f_i)_{i \in I} \rangle, \tag{15.1}$$

где $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, X_i — множество стратегий игрока i, $f_i : X \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша игрока i. Такая математическая модель называется ***игрой n лиц в нормальной форме***.

Формирование ситуации в игре Γ состоит в выборе каждым игроком $i \in I$ некоторой стратегии $x_i \in X_i$, при этом возникает ситуация $x = (x_i)_{i \in I}$. Полученную ситуацию каждый игрок $i = \overline{1, n}$ оценивает со своей точки зрения с помощью функции f_i; удобно считать, что $f_i(x)$ есть величина выигрыша, получаемого игроком i в ситуации x. Таким образом, *игра n лиц может рассматриваться как математическая модель совместного принятия решения несколькими сторонами, имеющими несовпадающие интересы.*

Следует отметить, что при содержательном анализе процедуры совместного принятия решения в игре n лиц возникают весьма сложные проблемы, связанные с возможной кооперацией игроков, т.е. объединением их в коалиции. Формальный анализ кооперативного аспекта игры требует дополнительных данных, касающихся возможных действий коалиций, их предпочтений, способов обмена ими информацией о принимаемых решениях и т.п. Если в игре создание коалиций запрещается, то она называется ***бескоалиционной***. Бескоалиционная игра является математической моделью децентрализованной системы управления, для которой информационные связи между управляющими подсистемами настолько незначительны, что ими можно пренебречь.

Игра Γ вида (15.1), в которой $n = 2$ и множества стратегий игроков конечны, называется ***биматричной игрой***; такая игра может быть задана парой матриц $A = \|a_i^j\|$, $B = \|b_i^j\|$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$, где A — матрица выигрышей игрока *1* и B — матрица выигрышей игрока *2*. Указанная биматричная игра далее обозначается через $\Gamma_{(A,B)}$. Иногда биматричная игра задается одной матрицей формата $n \times m$, причем элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце этой матрицы должен представлять собой пару вида (a_i^j, b_i^j), первая компонента которой есть выигрыш игрока *1*, а вторая — выигрыш игрока *2* в ситуации (i, j).

Отметим, что в биматричной игре выигрыш игрока *1* может не совпадать с проигрышем игрока *2*. В случае, когда это обстоятельство имеет место, т.е. когда $a_i^j = -b_i^j$ при всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, получается матричная игра с платежной матрицей A. Задание матрицы B становится здесь излишним.

Замечание. Если в биматричной игре $\Gamma_{(A,B)}$ при всех $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$ выполняется равенство $a_i^j + b_i^j = c$, где c — некоторая постоянная, то, переходя к биматричной игре $\Gamma_{(\tilde{A},\tilde{B})}$ по формулам $\tilde{a}_i^j = a_i^j - c/2$ и $\tilde{b}_i^j = b_i^j - c/2$, получаем игру, эквивалентную первоначальной, которая будет антагонистической.

Приведем ряд примеров задач принятия экономических решений, которые моделируются бескоалиционными играми.

• **Пример 15.1** (*производство конкурирующей продукции*). Два небольших предприятия общественного питания производят однотипную продукцию, которую затем продают на одном рынке. Каждое предприятие может использовать большую или малую поточную линию. Если оба они используют большую линию, то имеет место перепроизводство продукции, и в результате оба предприятия несут убытки в 9 денежных ед. Если одно из предприятий использует большую линию, а другое — малую, то первое предприятие получает прибыль в 5 денежных ед., а второе только покрывает убытки. Наконец, если оба предприятия используют малую линию, то оба они получают одинаковую прибыль в 1 денежную ед.

Так как в данной задаче исход определяется совместными действиями обоих предприятий, каждое из которых оценивает его со своей точки зрения, налицо конфликт интересов. Математической моделью этого конфликта будет биматричная игра, в которой в качестве игроков выступают предприятия *1* и *2*; стратегии игроков: использование малой поточной линии ($М$) и большой поточной линии ($Б$); выигрыш — прибыль предприятия в соответствующей ситуации (отрицательное значение выигрыша, указывает на то, что в данной ситуации имеет место не прибыль, а убытки). В результате получаем биматричную игру $\Gamma_{(A,B)}$, заданную табл. 15.1.

Таблица 15.1

	М	*Б*
М	(1,1)	(0,5)
Б	(5,0)	(−9, −9)

Эта игра также может быть задана парой матриц (A, B), где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

• **Пример 15.2** (*неантагонистическая конкуренция фирм-производителей*). Рассмотрим ситуацию, описанную в задаче 17, считая, что теперь целью фирмы B является не разорение фирмы A, а максимизация собственной прибыли. Тогда функция выигрыша F_B фирмы B будет связана с функцией выигрыша F_A фирмы A равенством $F_B(j,i) = F_A(i,j)$. При этом $F_A(i,j) + F_B(i,j) \neq \text{const}$, т.е. такая игра не будет антагонистической.

Ряд ситуаций совместного принятия экономических решений, математическими моделями которых служат бескоалиционные игры, базируется на следующей общей схеме. Пусть имеется несколько предприятий, которые производят некоторый продукт. Выигрыш (доход) каждого предприятия определяется следующими двумя параметрами: количеством произведенного им продукта и суммарным количеством продукта, произведенного всеми этими предприятиями. (Можно рассматривать двойственную ситуацию, когда предприятия не производят, а *потребляют* некоторый ресурс.) Рассмотрим два примера таких задач.

• **Пример 15.3** (*конкуренция производителей на однотоварном рынке*). Имеется n фермеров, производящих одинаковый продукт (например, зерно). Пусть a_i — максимальное количество зерна, которое может произвести фермер i, а x_i — количество зерна, которое он произвел фактически ($0 \leq x_i \leq a_i$). Доход фермера i может быть представлен в виде cx_i, где c — рыночная цена единицы продукта. Как известно, рыночная цена продукта является монотонно убывающей функцией от его общего количества; можно считать, например, что при фиксировании всех остальных параметров, определяющих цену, $c = k/\sqrt{x_1 + \cdots + x_n}$ (см. [18]). Тогда доход фермера i будет выражаться функцией $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{kx_i}{\sqrt{x_1+\cdots+x_n}}$.

В результате получаем бескоалиционную игру n игроков (фермеров), в которой множеством стратегий игрока i является интервал $[0, a_i]$, а функция выигрыша в ситуации $(x_1, \ldots, x_n)$ есть $f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

В этом примере наглядно проявляется отличие теоретико-игровой задачи от оптимизационной. Так, если бы фермеры сдавали зерно по фиксированной цене c, то решение оптимизационной задачи — задачи максимизации дохода всех фермеров — было бы тривиальным: $x_i^* = a_i$. Однако в уловиях рыночного ценообразования необходим теоретико-игровой подход, учитывающий не только действия данного игрока, но также и действия всех остальных игроков. Ясно, что оптимальное решение оптимизационной задачи $x_i^* = a_i$ не будет оптимальным при теоретико-игровом подходе: перепроизводство продуктов снизит цену, и доход фермеров упадет.

• **Пример 15.4** (*штраф за загрязнение окружающей среды*). В районе имеется n промышленных предприятий, каждое из которых является источником загрязнения атмосферы. Пусть x_i — величина выброса для i-го предприятия. Концентрация вредных примесей может быть рассчитана по формуле $q = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, где $c_1, \ldots, c_n$ — некоторые постоянные. За загрязнение окружающей среды каждое предприятие платит штраф, величина которого для i-го предприятия пропорциональна доле, которую оно «вкладывает» в показатель q, т. е. величина штрафа находится по формуле $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{kx_i}{x_1 + \cdots + x_n} q$, где k — константа. В результате получаем бескоалиционную игру n игроков, в которой функция выигрыша (здесь — функция потерь) есть $f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Можно рассматривать также различные видоизменения функции штрафа (см. [44]), учитывающие дополнительные факторы (например, резкое увеличение штрафа, если показатель q превышает некоторое пороговое значение — величину предельно допустимой концентрации).

2. Важнейшим принципом оптимальности для класса бескоалиционных игр n лиц является *принцип равновесия*. Он вводится следующим образом.

Определение. *Пусть $\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$ — игра n лиц, заданная в нормальной форме. Ситуация $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$ называется **ситуацией равновесия** в игре Γ (равновесием в смысле Нэша), если для всех $i \in I$, $x_i \in X_i$ выполняется условие*

$$f_i(x^0 \| x_i) \leq f_i(x^0). \tag{15.2}$$

Пояснение. Через $x^0 \| x_i$ обозначается ситуация, полученная из ситуации x^0 заменой ее i-й компоненты x_i^0 на стратегию x_i. Таким образом, $x^0 \| x_i$ есть ситуация, возникающая при одностороннем отклонении игрока i от ситуации x^0.

В бескоалиционной игре всякая ситуация равновесия является устойчивой: если такая ситуация сложилась, то она не будет иметь оснований для разрушения, так как ни один из игроков не заинтересован в одностороннем отклонении от нее. И обратно, если ситуация не является равновесной, то, как следует из определения, найдется хотя бы один игрок, заинтересованный в одностороннем отклонении от этой ситуации, поэтому такая ситуация имеет тенденцию к разрушению.

Если игроки заключают между собой договор — придерживаться равновесной ситуации, — то такой договор будет устойчивым, причем его устойчивость базируется не на административных запретах или этических правилах, а исключительно на собственных интересах каждого игрока.

В примере 15.1 имеются две равновесные ситуации: (*М*, *Б*) и (*Б*, *М*). Из табл. 15.1 видно, что при одностороннем отклонении от этих ситуаций отклонившийся игрок проигрывает. Например, если в ситуации (*М*, *Б*) игрок *1* заменит свою стратегию *М* на *Б*, то возникнет ситуация (*Б*, *Б*), в которой он терпит убытки в 9 денежных ед.; если же от ситуации (*М*, *Б*) отклоняется игрок *2*, то его выигрыш уменьшается с 5 до 1 денежных ед.

Замечания. **1.** Ситуация равновесия по Нэшу является устойчивой относительно односторонних отклонений игроков (так как отклонившийся игрок «наказывается» уменьшением своего выигрыша). Однако, если, например, в биматричной игре от ситуации равновесия отклонятся *оба игрока*, то может возникнуть ситуация, в которой их выигрыши увеличатся. Еще больше картина усложняется при переходе к игре n лиц, где $n > 2$. В такой игре существуют нетривиальные коалиции, т.е. коалиции, содержащие более одного игрока и отличные от коалиции всех игроков. В игре n лиц может иметься нетривиальная коалиция $S \subset I$ такая, что при переходе от ситуации равновесия x^0 к некоторой ситуации x^1 выигрыши всех игроков из S увеличиваются, причем игроки коалиции S могут «своими силами» преобразовать ситуацию x^0 в ситуацию x^1. В этом случае ситуация x^0, будучи устойчивой относительно отклонений отдельных игроков, имеет реальные основания быть «разрушенной» коалицией S, заинтересованной в переходе от x^0 к x^1 и имеющей возможность этот переход осуществить.

Однако следует иметь в виду, что для преобразования ситуации x^0 в ситуацию x^1 игроки коалиции S должны об этом договориться, что возможно лишь при обмене информацией между ними. Если такая возможность отсутствует (или запрещена), то угрозы разрушения ситуации x^0 со стороны коалиции S не возникает. Поэтому принцип равновесия по Нэшу является особенно важным для бескоалиционных игр, в которых решения о выборе стратегий принимаются игроками независимо без взаимной договоренности.

2. Для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ ситуация (i_0, j_0) является ситуацией равновесия по Нэшу тогда и только тогда, когда при всех $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ выполняеются неравенства

$$a_i^{j_0} \leq a_{i_0}^{j_0}, \qquad b_{i_0}^{j} \leq b_{i_0}^{j_0}. \tag{15.3}$$

В частном случае, когда биматричная игра является матричной (т.е.

когда $b_i^j = -a_i^j$), второе из неравенств (15.3) принимает вид $a_{i_0}^{j_0} \leq a_{i_0}^j$ и в результате приходим к двойному неравенству $a_i^{j_0} \leq a_{i_0}^{j_0} \leq a_{i_0}^j$, которое означает, что ситуация (i_0, j_0) есть седловая точка в игре с платежной матрицей A. Таким образом, *принцип равновесия можно рассматривать как обобщение принципа седловой точки при переходе от класса матричных игр к более широкому классу биматричных игр.*

Укажем некоторые особенности ситуаций равновесия в биматричных играх по сравнению с седловыии точками в матричных играх (см. лекцию 13, п. 2).

(1) В матричной игре исход в седловой точке равен цене игры, поэтому во всех седловых точках выигрыши игрока одни и те же. В биматричных играх аналогичное свойство для ситуаций равновесия не имеет места. Так, в примере 15.1 для игрока *1* его выигрыши в ситуациях равновесия (*М, Б*) и (*Б, М*) различны.

(2) В матричной игре множество седловых точек является прямоугольным. В биматричной игре множество ситуаций равновесия может не быть прямоугольным. Так, в примере (15.1) ситуации (*Б, М*) и (*М, Б*) являются ситуациями равновесия, однако ситуация (*Б, Б*), составленная из первой компоненнты одной из них и второй компоненты другой, не будет ситуацией равновесия.

(3) В матричной игре стратегия, являющаяся компонентой седловой точки, гарантирует соответствующему игроку его наибольший гарантированный исход. В биматричных играх это условие может не выполняться. В примере 15.1 стратегия *Б*, являющаяся первой компонентой ситуации равновесия (*Б, М*), не гарантируют игроку *1* его наибольшего гарантированного результата (т.е. его максимина), равного здесь нулю.

Указанные негативные свойства ситуаций равновесия по сравненнию с седловыми точками обусловлены тем, что в биматричных играх нельзя ввести «хорошего» понятия оптимальной стратегии игрока, т.е. такого, которое было бы согласовано с понятием оптимальной ситуации (если оптимальность понимать в форме равновесия). Таким образом, в биматричных играх есть понятие оптимального *совместного* решения игроков (в форме ситуации равновесия), но нет понятия оптимального *индивидуального* решения игрока.

3. Перейдем теперь к вопросу реализуемости принципа равновесия для класса биматричных игр, т.е. к вопросу *существования* в них ситуаций равновесия. Так как матричная игра является частным случаем биматричной, причем ситуации равновесия в этом случае «превращаются» в седловые точки, то вопрос существования в любой биматричной игре ситуации равновесия в чистых стратегиях решается сразу отрицательным образом (так как даже не всякая матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях).

Однако при переходе к *смешанным стратегиям* данный вопрос решается положительно, и это обстоятельно является одним из важнейших результатов теории игр n лиц. Построение смешанного расширения биматричной игры в принципе не отличается от соответствующей конструкции для матричных игр и проводится следующим образом.

Пусть $\Gamma_{(A,B)}$ — биматричная игра с матрицами выигрышей A и B формата $n \times m$; будем считать, что множеством чистых стратегий игрока *1* является $\{1, \ldots, n\}$ и множеством чистых стратегий игрока *2* является $\{1, \ldots, m\}$. Под *смешанной стратегией игрока 1* в игре $\Gamma_{(A,B)}$ понимается любой вероятностный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S_n$, а под *смешанной стратегией игрока 2* — любой вероятностный вектор $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S_m$. Если игрок *1* использует смешанную стратегию x, а игрок *2* — смешанную стратегию y, то в силу независимости соответствующих распределений, вероятность появления ситуации (i, j) равна произведению $x_i y_j$ и в этой ситуации игрок *1* получает выигрыш a_i^j, а игрок *2* — выигрыш b_i^j. Таким образом, в ситуации в смешанных стратегиях (x, y) исходом для первого игрока будет случайная величина $\xi_1 = \begin{pmatrix} a_i^j \\ x_i y_j \end{pmatrix}$, а для игрока *2* — случайная величина $\xi_2 = \begin{pmatrix} b_i^j \\ x_i y_j \end{pmatrix}$.

При построении смешанного расширения игры $\Gamma_{(A,B)}$ в качестве выигрышей игроков *1* и *2* берутся математические ожидания этих случайных величин:

$$F_A(x, y) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} (x_i y_j) a_i^j, \quad F_B(x, y) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} (x_i y_j) b_i^j. \tag{15.4}$$

В результате получается новая игра игроков *1* и *2*, в которой множествами их стратегий будут множества вероятностных векторов S_n и S_m соответственно, а функции выигрыша игроков определяются равенствами (15.4). Построенная игра называется ***смешанным расширением игры*** $\Gamma_{(A,B)}$ и обозначается через $\overline{\Gamma}_{(A,B)}$. Поскольку стратегии и ситуации игры $\overline{\Gamma}_{(A,B)}$ имеют естественную интерпретацию в игре $\Gamma_{(A,B)}$, обычно говорят, что векторы $x \in S_n$ и $y \in S_m$ являются смешанными стратегиями *в игре* $\Gamma_{(A,B)}$, (x, y) — ситуацией в смешанных стратегиях *в игре* $\Gamma_{(A,B)}$, а значения функций выигрыша $F_A(x, y)$ и $F_B(x, y)$ — выигрышами игроков *1* и *2* в ситуации (x, y) в смешанных стратегиях *в игре* $\Gamma_{(A,B)}$.

Сформулируем теперь теорему, обеспечивающую реализуемость принципа равновесия в смешанных стратегиях для класса биматричных игр.

Теорема 15.1 (теорема Нэша). *Всякая биматричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.*

Заметим, прежде всего, что ситуация $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$ является ситуацией равновесия в смешанных стратегиях тогда и только тогда, когда при любых $x \in S_n$, $y \in S_m$ выполняется

$$F_A(x, y^0) \le F_A(x^0, y^0), \qquad F_B(x^0, y) \le F_B(x^0, y^0). \tag{15.5}$$

Доказательство того, что в любой биматричной игре имеется ситуация равновесия в смешанных стратегиях, впервые дал американский математик Джон Нэш в 1951 г. Идея доказательства чрезвычайно проста и состоит в применении теоремы Брауэра о неподвижной точке. Воспроизведем кратко метод доказательства. Пусть $S_{(n,m)} = S_n \times S_m$ — множество ситуаций в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{(A,B)}$. Определим отображение $T : S_{(n,m)} \to S_{(n,m)}$ следующим образом. Для произвольной ситуации $(x, y) \in S_{(n,m)}$ рассмотрим числа δ_i, σ_j $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$, где

$$\begin{aligned} \delta_i &= \max\{F_A(i, y) - F_A(x, y), 0\}, \\ \sigma_j &= \max\{F_B(x, j) - F_B(x, y), 0\}. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Числа δ_i и σ_j имеют прозрачный теоретико-игровой смысл: δ_i есть выгода, которую получает в ситуации (x, y) игрок *1* при замене смешанной стратегии x чистой стратегией i в случае, когда эта выгода имеется (т. е. когда $F_A(i, y) - F_A(x, y) > 0$), и 0 — в противном случае. Аналогично интерпретируются числа σ_j. Далее положим

$$x'_i = \frac{x_i + \delta_i}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_i}, \qquad y'_j = \frac{y_j + \sigma_j}{1 + \sum\limits_{s=1}^{m} \sigma_j}.$$

Ясно, что векторы $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ и $y' = (y'_1, \ldots, y'_m)$ являются вероятностными векторами, т. е. $x' \in S_n$ и $y' \in S_m$. Полагаем $T(x, y) = (x', y')$; T есть преобразование множества $S_{(n,m)}$ в себя. Легко проверить, что это преобразование непрерывно. Замечая, что $S_{(n,m)}$ является выпуклым компактным подмножеством арифметического пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, получаем, что выполнены все предположения теоремы Брауэра о неподвижной точке. Следовательно, согласно теореме Брауэра, у преобразования T существует хотя бы одна неподвижная точка. Нетрудно убедиться, что неподвижными точками преобразования T являются ситуации равновесия в смешанных стратегиях игры $\Gamma_{(A,B)}$ и только они.

Замечание. Так как доказательство теоремы Нэша основано на теореме Брауэра, оно является чистым доказательством существования и не дает метода нахождения ситуаций равновесия. Несмотря на это, установленный в теореме Нэша результат имеет принципиальное значение, так как он «подводит фундамент» под важнейший принцип оптимальности — принцип равновесия.

4. Равновесие по Нэшу базируется на идее устойчивости ситуации относительно отклонений от нее отдельных игроков. Однако, ситуация равновесия по Нэшу может не обладать устойчивостью относительно возможных отклонений от нее со стороны некоторых коалиций игроков (см. п. 2, замечание 1). Сформулируем общее понятие устойчивости ситуации в игре n лиц, которое основано на отсутствии угрозы отклонений как со стороны отдельных игроков, так и со стороны коалиций.

Рассмотрим вначале формулировку общего понятия устойчивости для задачи принятия решения в рамках системного описания. Пусть I — множество управляющих подсистем (игроков), воздействующих на некоторую управляемую систему, и A — множество ее состояний. Всякое непустое подмножество $S \subseteq I$ называется ***коалицией***. Будем предполагать, что для каждой коалиции $S \subseteq I$ задано *отношение достижимости* δ_S, характеризующее возможности коалиции S по изменению состояний системы, и *отношение предпочтения* ω_S, указывающее предпочтения коалиции S на множестве состояний системы.

Формально **отношение достижимости** δ_S коалиции S есть бинарное отношение на множестве состояний системы A, причем условие $(a_1, a_2) \in \delta_S$ означает, что коалиция S может собственными силами (без участия игроков, не входящих в коалицию S), перевести систему из состояния a_1 в состояние a_2. Через $\delta_S\langle a\rangle$ обозначим множество всех $a' \in A$, для которых $(a, a') \in \delta_S$.

Отношение предпочтения коалиции S есть бинарное отношение ω_S на множестве состояний A, причем условие $a' \succ^{\omega_S} a$ означает, что состояние a' является для коалиции S более предпочтительным (в строгом смысле), чем состояние a.

Набор объекта вида

$$G = \langle I, A, (\delta_S)_{S \subseteq I}, (\omega_S)_{S \subseteq I} \rangle \tag{15.7}$$

будем называть ***коалиционной структурой*** над множеством игроков I. Сформулируем теперь основное понятие. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторое фиксированное семейство коалиций игроков I.

Определение. *Состояние $a^* \in A$ называется* ***$\mathcal{K}$-устойчивым****, если для любой коалиции $S \in \mathcal{K}$ в множестве $\delta_S\langle a^* \rangle$ не существует состояния, которое является более предпочтительным для коалиции S, чем состояние a^*.*

Формально: состояние a^* является $\mathcal{K}$-устойчивым, если не существует такого состояния $a' \in A$, что $a' \succ^{\omega_S} a^*$ и $(a^*, a') \in \delta_S$, где $S \in \mathcal{K}$.

Поясним содержание понятия $\mathcal{K}$-устойчивости. Пусть система находится в состоянии a^*. Рассмотрим произвольную коалицию $S \subseteq I$. Коалиция S будет стремиться перевести систему из состояния a^* в некоторое другое состояние $a' \in A$ в том случае, если, во-первых, состояние a' для коалиции S более предпочтительно, чем состояние a^* (т.е. $a' \succ^{\omega_S} a^*$), и, во-вторых, коалиция S может собственными силами осуществить переход из состояния a^* в состояние a' (т.е. $(a^*, a') \in \delta_S$). На содержательном уровне соединение условий $a' \succ^{\omega_S} a^*$ и $(a^*, a') \in \delta_S$ соответствует соединению «желаний и возможностей» коалиции S. $\mathcal{K}$-устойчивость состояния a^* означает, что в этом состоянии ни для одной коалиции $S \in \mathcal{K}$ такое соединение «желаний и возможностей» по переходу из a^* в a' не имеет места. Таким образом, если система находится в состоянии a^*, то ни одна из коалиций $S \in \mathcal{K}$ не будет стремиться перевести систему в некоторое другое состояние. Другими словами, *в $\mathcal{K}$-устойчивом состоянии a^* не возникает угрозы со стороны коалиций $S \in \mathcal{K}$ по разрушению этого состояния.*

Рассмотрим теперь три наиболее важных конкретизации понятия $\mathcal{K}$-устойчивости.

1) *Семейство $\mathcal{K}$ состоит из всех одноэлементных коалиций*: $\mathcal{K} = \{\{i\} : i \in I\}$. Тогда $\mathcal{K}$-устойчивость состояния a^* означает его устойчивость относительно отклонений отдельных игроков и представляет собой равновесие в смысле Нэша.

2) *Семейство коалиций $\mathcal{K}$ состоит из единственной коалиций всех игроков*: $\mathcal{K} = \{I\}$. В этом случае $\mathcal{K}$-устойчивость состояния a^* означает отсутствие такого состояния $a' \in A$, которое было бы

более предпочтительным, чем состояние a^* для коалиции I всех игроков; это есть оптимальность по Парето.

3) *Семейство $\mathcal{K}$ состоит из всех непустых коалиций*: $\mathcal{K} = \{S : \emptyset \neq S \subseteq I\}$. В этом случае $\mathcal{K}$-устойчивость называется ***сильным равновесием.***

В состоянии сильного равновесия «баланс интересов и возможностей» реализуется сразу для всех коалиций игры. Поэтому ни от одной коалиции не будет исходить угрозы разрушения этого состояния. Сильное равновесие является наиболее бесспорным принципом оптимальности для класса игр n лиц, но, к сожалению, реализуется оно весьма редко.

Переформулируем теперь рассмотренные выше понятия $\mathcal{K}$-устойчивости для игры Γ, заданной в нормальной форме (15.1). В этом случае множество $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ ситуаций игры Γ рассматривается как множество состояний системы. Посмотрим, какой вид в данной модели приобретает отношение достижимости и отношение предпочтения коалиций.

а) Отношение достижимости δ_S коалиции S характеризует возможности коалиции S по «преобразованию» одних ситуаций игры в другие. Если игроки коалиции S действуют совместно, то они могут договориться о выборе любого набора стратегий $(x_i)_{i \in S}$, где $x_i \in X_i$. Будем обозначать такие наборы через x_S, а множество всех таких наборов (т.е. $\prod\limits_{i \in S} X_i$) рассматривать как ***множество стратегий коалиции*** S. Через $x^0 \| x_S$ обозначим ситуацию игры (15.1), которая получается из ситуации x^0 заменой тех ее компонент, которые соответствуют игрокам из S, на соответствующие компоненты стратегии x_S. Итак, если игроки коалиции S действуют совместно, то они в состоянии преобразовать произвольную ситуацию $x^0 \in X$ в ситуацию вида $x^0 \| x_S$, где $x_S \in \prod\limits_{i \in S} X_i$. Получаем, что в рассматриваемом случае

$$\delta_S \langle x^0 \rangle = \left\{ x^0 \| x_S : x_S \in \prod_{i \in S} X_i \right\}. \tag{15.8}$$

б) Отношение предпочтения ω_S коалиции S в данном случае может быть «построено» из отношений предпочтения игроков, составляющих коалицию S. Наиболее естественный способ такого построения основан на отношении доминирования по Парето (см. лекцию 5). Будем считать, что ситуация x^1 является более предпочтительной для коалиции S, чем ситуация x^2, если для каждого

$i \in S$ выполнено неравенство $f_i(x^1) \geq f_i(x^2)$, причем хотя бы для одного $i \in S$ неравенство должно выполняться как строгое:

$$x^1 \succ^{\omega_S} x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad f_i(x^1) \geq f_i(x^2) \qquad (i \in S). \tag{15.9}$$

Рассмотрим теперь некоторые конкретизации понятия $\mathcal{K}$-устойчивости для случая игры Γ вида (15.1).

1) *Пусть $\mathcal{K}$ состоит из всех одноэлементных коалиций.* Тогда $\mathcal{K}$-устойчивость ситуации x^0 в игре Γ означает, что для каждого $i \in I$ ни в одной ситуации $x^0\|x_i$, где $x_i \in X_i$, не имеет места неравенство $f_i(x^0\|x_i) > f_i(x^0)$, т.е. $f_i(x^0\|x_i) \leq f_i(x^0)$. Это условие есть, в точности, равновесие по Нэшу для игры Γ (см. п. 2).

2) *Пусть $\mathcal{K}$ состоит из единственной коалиции всех игроков.* Тогда условие $\mathcal{K}$-устойчивости ситуации x^0 сводится к тому, что не существует такой ситуации $x^1 \in X$, для которой при всех $i \in I$ выполняется неравенство $f_i(x^1) \geq f_i(x^0)$, причем хотя бы одно неравенство является строгим. Указанное условие есть условие Парето-оптимальности (см. лекцию 5) ситуации x^0 в множестве X всех ситуаций игры Γ (в качестве оценочной функции критерия $i = \overline{1,n}$ здесь выступает функция выигрыша игрока i).

3) *Пусть $\mathcal{K}$ состоит из всех коалиций игры* Γ. Тогда условие $\mathcal{K}$-устойчивости ситуации x^0 состоит в том, что для любой коалиции $S \subseteq I$ не существует такой стратегии $x_S \in \prod\limits_{i \in S} X_i$, при которой для всех $i \in S$ имеет место неравенство $f_i(x^0\|x_S) \geq f_i(x^0)$, причем хотя бы для одного индекса $i \in S$ неравенство должно быть строгим. Таким образом, сильная устойчивость ситуации x^0 в игре Γ означает отсутствие такой коалиции $S \subseteq I$, которая могла бы преобразовать ситуацию x^0 в какую-либо другую при единогласной заинтересованности в этом всех своих членов.

5. Задача 20. *Задача распределения ресурсов.*

Предположим, что имеется n предприятий, каждое из которых потребляет m видов ресурсов. Вектор с неотрицательными компонентами $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^m)$ рассматривается как вектор ресурсов, потребляемых i-м предприятием ($i = \overline{1,n}$). Предполагаем далее, что для каждого $i = \overline{1,n}$ задана функция $f_i(x_i)$, которая оценивает эффективность i-го предприятия при условии, что оно потребляет ресурсный вектор x_i (например, в качестве f_i можно рассматривать производственную функцию, см. задачу 2).

Имеется два варианта задачи распределения ресурсов, соответствующих централизованному и децентрализованному распределению. Рассмотрим оба эти варианта.

Вариант 1 (*задача централизованного распределения ресурсов*). Здесь предполагается, что управляющий орган (центр) обладает некоторым запасом ресурсов, который задается вектором $b = (b^1, \ldots, b^m)$, где b^j — запас ресурса типа j. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех наборов ресурсных векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqq b$ (неравенство $\leqq$ понимается как покомпонентное). Вектор x_i интепретируется как ресурсный вектор, выделенный центром i-му предприятию. Каждому набору $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$ соответствует вектор эффективностей $(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$. В результате получаем задачу многокритериальной оптимизации (см. лекцию 5), в которой $\mathcal{D}$ — множество альтернатив, f_i — оценочная функция по критерию $i = \overline{1, n}$. Оптимальное решение такой задачи ищется в множестве ее Парето-оптимальных альтернатив. При некоторых ограничениях на область допустимых альтернатив $\mathcal{D}$ задача нахождения Парето-оптимальных альтернатив может быть сведена к задаче нахождения максимума обобщенного критерия $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, где $\alpha_i \geq 0$ (см. лекцию 5).

Рассмотрим более подробно вариант децентрализованного распределения ресурсов.

Вариант 2 (*задача перераспределения ресурсов*). В этом случае предполагается, что каждое предприятие $i = \overline{1, n}$ обладает начальным запасом ресурсов, задаваемым вектором $\hat{x}_i = (\hat{x}_i^1, \ldots, \hat{x}_i^m)$. Предприятие может продавать принадлежащие ему ресурсы, а также покупать любые ресурсы по установленным ценам при единственном ограничении: общая стоимость покупаемых ресурсов не должна превышать общей стоимости начального запаса ресурсов этого предприятия. Пусть $p = (p^1, \ldots, p^m)$ — вектор цен, где p^j — стоимость единицы ресурса j-го типа ($j = \overline{1, m}$). Если предприятие i покупает ресурсный вектор $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^m)$, то общая стоимость покупки есть $p^1 x_i^1 + \cdots + p^m x_i^m$; она представляется в виде скалярного произведения (p, x_i). Аналогично, стоимость начального запаса ресурсов предприятия i равна $(p, \hat{x}_i)$ и указанное выше ограничение принимает вид

$$(p, x_i) \leq (p, \hat{x}_i). \qquad (15.10)$$

Условие (15.10) называется условием ***платежеспособности спроса при векторе цен*** p.

Определение. *Набор* $(x_1^*, \ldots, x_n^*, p^*)$, *где* x_i^* — *ресурсный вектор предприятия* $i = \overline{1,n}$, *а* p^* — *вектор цен, называется* ***состоянием экономического равновесия****, если выполняются следующие два условия.*

1) *При каждом* $i = \overline{1,n}$ *ресурсный вектор* x_i^* *максимизирует функцию эффективности предприятия* i *по множеству всех ресурсных векторов этого предприятия, находящихся в пределах его платежеспособного спроса по ценам* p^*:

$$f_i(x_i^*) = \max\{f_i(x_i) : (p^*, x_i) \leq (p^*, \hat{x}_i)\}. \tag{15.11}$$

2) *Общий объем потребляемых ресурсов каждого типа не превосходит его первоначального запаса*:

$$x^* \leqq \hat{x}, \tag{15.12}$$

где $x^* = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*$, $\hat{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{x}_i$ (*неравенство* (15.12) *понимается как покомпонентное*).

Рассмотрим теперь игру Γ_{n+1} игроков $1, \ldots, n, n+1$, в которой первыми n игроками являются предприятия, а в качестве $(n+1)$-го игрока выступает ценообразующий орган. В этой игре стратегиями каждого предприятия являются его ресурсные векторы, а стратегиями ценообразующего органа — векторы цен. Ситуациями игры Γ_{n+1} считаются такие наборы $(x_1, \ldots, x_n, p)$, в которых каждый вектор x_i является ресурсным вектором предприятия i, удовлетворяющим условию платежеспособности спроса при векторе цен p. Цель игрока i состоит в максимизации функции эффективности f_i $(i = \overline{1,n})$, а цель игрока $(n+1)$ — в минимизации взвешенного дисбаланса, т.е. в минимизации функции

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, p) = \left(p, \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = (p, \hat{x} - x).$$

Покажем, что экономическое равновесие можно представить как равновесие по Нэшу в игре Γ_{n+1}. Действительно, пусть $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{p})$ — ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ_{n+1}. Тогда при каждом $i = \overline{1,n}$ для всех ресурсных векторов x_i, удовлетворяющих условию $(\tilde{p}, x_i) \leq (\tilde{p}, \hat{x}_i)$, выполняется неравенство

$$f_i(x_i) \leq f_i(\tilde{x}_i), \tag{15.13}$$

а для игрока $n+1$ при произвольном векторе цен p имеет место неравенство

$$(p, \hat{x} - \tilde{x}) \geq (\tilde{p}, \hat{x} - \tilde{x}). \tag{15.14}$$

Убедимся, что набор $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{p})$ является состоянием экономического равновесия. Неравенства (15.13) означают, что при каждом $i = \overline{1,n}$ ресурсный вектор $\tilde{x}_i$ максимизирует функцию эффективности предприятия i по множеству всех ресурсных векторов, находящихся в пределах его платежеспособного спроса по ценам $\tilde{p}$. Таким образом, условие 1) выполнено. Проверим условие 2). Так как набор $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{p})$ является ситуацией в игре Γ_{n+1}, то при всех $i = \overline{1,n}$ выполнено условие платежеспособности: $(\tilde{p}, \tilde{x}_i) \leq (\tilde{p}, \hat{x}_i)$. Суммируя эти неравенства по $i = \overline{1,n}$ и используя линейность скалярного произведения, получаем $\left(\tilde{p}, \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{x}_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{x}_i\right) \leq 0$, т.е. $(\tilde{p}, \tilde{x} - \hat{x}) \leq 0$. Учитывая неравенство (15.14), имеем $(p, \tilde{x} - \hat{x}) \leq 0$. Так как вектор цен p произволен, то отсюда следует, что $\tilde{x} \leqq \hat{x}$, и условие 2) проверено. Итак, всякая ситуация равновесия по Нэшу игры Γ_{n+1} является экономическим равновесием.

Обратно, пусть $(x_1^*, \ldots, x_n^*, p^*)$ — состояние экономического равновесия. В силу (15.11), получаем, что в состоянии экономического равновесия отклонение игрока $i = \overline{1,n}$ от стратегии x_i^* приводит к уменьшению его выигрыша. Остается установить уменьшение (точнее, неувеличение) выигрыша игрока $n+1$ при его одностороннем отклонении от стратегии p^*. Будем предполагать, что функции эффективности f_i $(i = \overline{1,n})$ являются строго монотонно возрастающими (т.е. из $y_i >^{\mathrm{Par}} x_i$ следует $f_i(y_i) > f_i(x_i)$). Тогда в состоянии экономического равновесия не может быть «недопотребления ресурсов», откуда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{x}_i$, т.е. $x^* = \hat{x}$. В этом случае по каждому виду ресурсов дисбаланс равен нулю, поэтому и взвешенный дисбаланс также будет равен нулю при любом выборе вектора цен. Отсюда следует, что в ситуации $(x_1^*, \ldots, x_n^*, p^*)$ замена вектора цен p^* другим вектором цен не изменит (значит, и не уменьшит) взвешенный дисбаланс.

Итак, в предположении строгой монотонности функций эффективности f_i $(i = \overline{1,n})$ справедлив следующий результат. *Множество состояний экономического равновесия совпадает с множеством ситуаций равновесия по Нэшу в игре с добавленным участником, минимизирующим взвешенный дисбаланс.*

Лекция 16. *Нахождение оптимальных решений биматричных игр в смешанных стратегиях*

• *Условия равновесности ситуации в смешанных стратегиях в биматричной игре. Описание множества ситуаций равновесия биматричной игры.* • *Ситуации равновесия в биматричных играх формата* 2×2. Задача 21. *Борьба за рынки сбыта.* • *Кооперативный подход к анализу биматричной игры. Противоречие между выгодностью и устойчивостью.* • *Кооперативное решение биматричной игры как задача двухкритериальной оптимизации.* • *Арбитражное решение Нэша для биматричных игр.* Задача 22. *Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры без разделения полезности).*

1. В предыдущей лекции было отмечено, что теорема Нэша не дает способа нахождения ситуаций равновесия. Опишем множества ситуаций равновесия биматричной игры в смешанных стратегиях, которое может быть применено для практического нахождения ситуаций равновесия биматричных игр небольших форматов. Установим вначале две леммы, являющиеся аналогом соответствующих утверждений для матричных игр (см. лекцию 14).

Лемма 16.1. *Пусть* $\Gamma_{(A,B)}$ *— биматричная игра формата* $n \times m$. *Для того чтобы ситуация в смешанных стратегиях* $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$ *была ситуацией равновесия в игре* $\Gamma_{(A,B)}$, *необходимо и достаточно, чтобы она была устойчивой относительно всех чистых отклонений игроков, т. е. чтобы при всех* $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ *выполнялись неравенства*

$$F_A(i, y^0) \leq F_A(x^0, y^0), \qquad F_B(x^0, j) \leq F_B(x^0, y^0). \tag{16.1}$$

Действительно, необходимость очевидна по определению ситуации равновесия. Докажем достаточность. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S_n$ — произвольная смешанная стратегия игрока *1*. Умножим обе части первого из неравенств (16.1) на $x_i \geq 0$ и просуммируем по $i = \overline{1,n}$. Тогда левая часть полученного неравенства по правилу 13.4 будет равна $F_A(x, y^0)$, а правая (с учетом того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$), равна $F_A(x^0, y^0)$. В результате имеем $F_A(x, y^0) \leq F_A(x^0, y^0)$. Аналогично доказывается, что при произвольной смешанной стратегии $y \in S_m$ выполняется неравенство $F_B(x^0, y) \leq F_B(x^0, y^0)$. Получаем, что (x^0, y^0) — ситуация равновесия.

Лемма 16.2. (правило дополняющей нежесткости). *Пусть (x^0, y^0) — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{(A,B)}$. Тогда для любых $i \in \operatorname{Sp} x^0$, $j \in \operatorname{Sp} y^0$ имеют место следующие равенства*:

$$F_A(i, y^0) = F_A(x^0, y^0), \tag{16.2}$$

$$F_B(x^0, j) = F_B(x^0, y^0). \tag{16.3}$$

Доказательство. Произвольная ситуация $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$ является ситуацией равновесия в игре $\Gamma_{(A,B)}$ тогда и только тогда, когда функция $F_A(x, y^0)$, рассматриваемая как функция одной пременной $x \in S_n$, принимает наибольшее значение при $x = x^0$, а функция $F_B(x^0, y)$, рассматриваемая как функция одной переменной $y \in S_m$, принимает наибольшее значение при $y = y^0$. Для доказательства утверждений леммы 16.2 остается воспользоваться правилом 13.6.

Опишем теперь множество ситуаций равновесия биматричной игры. Рассмотрим вначале вспомогательную задачу нахождения ситуаций равновесия биматричной игры, имеющих заданный набор спектров. Пусть $\Gamma_{(A,B)}$ — биматричная игра с матрицами выигрышей игроков $A = \|a_i^j\|$, $B = \|b_i^j\|$ $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. Зафиксируем пару непустых подмножеств $T_1 \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $T_2 \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Наша ближайшая задача — найти такие ситуации равновесия (x^0, y^0) игры $\Gamma_{(A,B)}$, для которых $\operatorname{Sp} x^0 = T_1$, $\operatorname{Sp} y^0 = T_2$.

Пусть A_i — i-я строка матрицы A и B^j — j-й столбец матрицы B. Обозначим через A_{T_1} матрицу, строками которой являются разности строк $A_i - A_{i_1}$, где i_1 — первый (наименьший) номер в T_1, $i \in T_1$, $i \neq i_1$; через B_{T_2} — матрицу, столбцами которой являются разности столбцов $B^j - B^{j_1}$, где j_1 — первый (наименьший) номер в T_2, $j \in T_2$, $j \neq j_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 16.3. *Если* (x, y) *— ситуация равновесия в игре* $\Gamma_{(A,B)}$ *и* $\operatorname{Sp} x = T_1$, $\operatorname{Sp} y = T_2$, *то вектор-строка* x *является решением однородной системы линейных уравнений*

$$x \cdot B_{T_2} = 0, \tag{16.4}$$

а вектор-столбец y *— решением однородной системы линейных уравнений*

$$A_{T_1} \cdot y = 0. \tag{16.5}$$

Доказательство. Положим $T_1 = \{\overline{1,k}\}$, $T_2 = \{\overline{1,l}\}$. По правилу дополняющей нежесткости (лемма 16.2) для всех $j = \overline{1,l}$ выполняется $F_B(x,j) = F_B(x,y)$, отсюда $F_B(x,j) - F_B(x,1) = 0$ $(j = \overline{2,l})$. Используя разложение функции выигрыша по чистым стратегиям (правило 13.4), получаем

$$F_B(x,j) - F_B(x,1) = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i^j - \sum_{i=1}^{n} x_i b_i^1 = \sum_{i=1}^{n} x_i (b_i^j - b_i^1).$$

Замечая, что последняя сумма может быть представлена в матричной записи в виде произведения вектора-строки x на вектор-столбец $(B^j - B^1)$, приходим к равенству $x \cdot (B^j - B^1) = 0$ $(j = \overline{2,l})$, откуда следует, что x удовлетворяет системе уравнений (16.4). Аналогично проверяется, что вектор y удовлетворяет системе уравнений (16.5).

Итак, ситуации равновесия игры $\Gamma_{(A,B)}$ следует искать среди пар векторов (x, y), где x — решение уравнения (16.4), а y — решение уравнения (16.5).

Для формулировки необходимого и достаточного условия ситуации равновесия с заданными спектрами (T_1, T_2) введем матрицу A'_{T_1}, строками которой являются разности строк $A_{i'} - A_{i_1}$, где $i' \notin T_1$; также матрицу B'_{T_2}, столбцами которой являются разности столбцов $B_{j'} - B_{j_1}$, где $j' \notin T_2$.

Теорема 16.1. *Для того чтобы ситуация в смешанных стратегиях* (x^0, y^0), *где* $\operatorname{Sp} x^0 = T_1$ *и* $\operatorname{Sp} y^0 = T_2$, *являлась ситуацией равновесия в биматричной игре* $\Gamma_{(A,B)}$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *вектор* x^0 *был решением системы линейных уравнений* (16.4);

б) *вектор* y^0 *был решением системы линейных уравнений* (16.5);

в) *вектор* x^0 *был решением системы линейных неравенств*

$$x \cdot B'_{T_2} \leqq 0; \tag{16.6}$$

г) *вектор* y^0 *был решением системы линейных неравенств*

$$A'_{T_1} \cdot y \leqq 0. \tag{16.7}$$

(*Неравенство* $\leqq$ *понимается как покомпонентное.*)

Доказательство. *Необходимость* условий а) и б) показана в лемме 16.3. Необходимость условий б) и в) проверяется аналогично.

Достаточность. Рассмотрим ситуацию $(x^0, y^0) \in S_n \times S_m$, удовлетворяющую условиям а)–г). На основании а) $F_B(x^0, j) = F_B(x^0, 1)$ для $j = \overline{1, l}$, а на основании в) $F_B(x^0, j) \leq F_B(x^0, 1)$ для $j = l+1, \ldots, m$. Умножая равенство $F_B(x^0, j) = F_B(x^0, 1)$ на y_j^0, суммируя по $j = \overline{1, m}$ и используя правило 13.4, получаем $F_B(x^0, y^0) = F_B(x^0, 1)$, откуда для всех $j = \overline{1, m}$ имеем неравенство

$$F_B(x^0, j) \leq F_B(x^0, y^0).$$

Аналогично устанавливается, что $F_A(i, y^0) \leq F_A(x^0, y^0)$ для всех $i = \overline{1, n}$. По лемме 16.1 ситуация (x^0, y^0) является ситуацией равновесия в игре $\Gamma_{(A,B)}$, что и заканчивает доказательство.

Рассмотрим два частных случая, в которых процедура нахождения ситуаций равновесия с заданными спектрами может быть упрощена.

Случай 1. Обозначим через $A_{[T_1, T_2]}$ подматрицу матрицы A, состоящую из тех элементов a_i^j, для которых $i \in T_1$ и $j \in T_2$. Аналогично определяем подматрицу $B_{[T_1, T_2]}$ матрицы B.

Если матрицы $A_{[T_1, T_2]}$ и $B_{[T_1, T_2]}$ обе оказываются невырожденными, то все решения системы (16.4) и все решения системы (16.5) пропорциональны между собой. В этом случае может быть только одна ситуация $(x, y) \in S_n \times S_m$, для которой x является решением системы (16.4), а y — решением системы (16.5). Тогда неравенства (16.6) и (16.7) должны быть проверены для компонент этой единственной ситуации.

Случай 2. Ситуация (x^0, y^0) в игре $\Gamma_{(A,B)}$ называется ***вполне смешанной***, если спектр x^0 состоит из *всех* чистых стратегий игрока *1* и спектр y^0 из *всех* чистых стратегий игрока *2*. При установлении того, что вполне смешанная ситуация (x^0, y^0) является ситуацией равновесия, условия в) и г) проверять не надо, так как они выполнены автоматически. Из теоремы 16.1 следует, что биматричная игра $\Gamma_{(A,B)}$ имеет вполне смешанную ситуацию равновесия тогда и только тогда, когда системы однородных уравнений (16.4) и (16.5) имеют положительные решения.

Итак, множество всех ситуаций равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ может быть описано следующим образом.

Зафиксируем два непустых подмножества $T_1 \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $T_2 \subseteq \{1,\ldots,m\}$. Пусть $P_1(T_1,T_2)$ — множество всех векторов $x \in S_n$ таких, что:

(1) $\operatorname{Sp} x = T_1$.

(2) x является решением системы уравнений (16.4).

(3) x является решением системы неравенств (16.6).

Пусть $P_2(T_1,T_2)$ — множество всех векторов $y \in S_m$ таких, что:

(1′) $\operatorname{Sp} y = T_2$.

(2′) y является решением системы уравнений (16.5).

(3′) y является решением системы неравенств (16.7).

Согласно теореме 16.1, множество всех ситуаций равновесия игры $\Gamma_{(A,B)}$, имеющих спектр (T_1,T_2), есть $P_1(T_1,T_2) \times P_2(T_1,T_2)$. Следовательно, множество $E(\Gamma_{(A,B)})$ всех ситуаций равновесия игры $\Gamma_{(A,B)}$ может быть представлено в виде

$$E(\Gamma_{(A,B)}) = \bigcup_{\substack{\emptyset \neq T_1 \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \emptyset \neq T_2 \subseteq \{1,\ldots,m\}}} P_1(T_1,T_2) \times P_2(T_1,T_2). \tag{16.8}$$

Таким образом, нахождение всех ситуаций равновесия игры $\Gamma_{(A,B)}$ в смешанных стратегиях сводится к перебору пар непустых подмножеств (T_1,T_2) и нахождению при фиксировнных T_1 и T_2 множеств $P_1(T_1,T_2)$ и $P_2(T_1,T_2)$. Практически это осуществимо лишь для биматричных игр небольших форматов.

2. Опишем ситуации равновесия в биматричных играх формата 2×2. Такая игра задается парой матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

где A — матрица выигрышей игрока *1*, B — матрица выигрышей игрока *2*. Установим следующее правило.

Правило 16.1. *Если в биматричной игре формата* 2×2 *элементы, стоящие в одном столбце матрицы* A, *и элементы, стоящие в одной строке матрицы* B, *попарно различны, то в такой игре ситуации равновесия могут быть либо чистыми, либо вполне смешанными.*

Действительно, предположим, что имеется ситуация равновесия, в которой стратегия одного игрока, например, игрока *1*, является чистой, а стратегия игрока *2* — смешанной. Тогда, по условию дополняющей нежесткости (лемма 16.2), $F_B(1,1) = F_B(1,2)$, т.е. $b_1^1 = b_1^2$, что противоречит сделанному предположению.

Найдем теперь условия, при которых вполне смешанная ситуация (x, y) будет ситуацией равновесия в игре 2×2. Согласно теореме 16.1, вектор $x = (x_1, x_2)$ должен быть положительным решением системы уравнений (16.4); добавляя условия нормировки, приходим к системе

$$\begin{cases} (b_1^2 - b_1^1)x_1 + (b_2^2 - b_2^1)x_2 = 0, \\ x_1, x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{16.9}$$

Эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} b_1^1 x_1 + b_2^1(1 - x_1) = b_1^2 x_1 + b_2^2(1 - x_1), \\ 0 < x_1 < 1, \\ x_2 = 1 - x_1. \end{cases} \tag{16.10}$$

Полагая $\beta = \dfrac{b_2^2 - b_2^1}{(b_1^1 + b_2^2) - (b_1^2 + b_2^1)}$, получаем, что система (16.9) имеет (единственное) решение тогда и только тогда, когда $0 < \beta < 1$, причем в этом случае решение системы (16.9) есть $x_1 = \beta$, $x_2 = 1 - \beta$.

Для компонент вектора $y = (y_1, y_2)$ имеем систему условий

$$\begin{cases} a_1^1 y_1 + a_1^2 y_2 = a_2^1 y_1 + a_2^2 y_2, \\ y_1, y_2 > 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \tag{16.11}$$

Полагая $\alpha = \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{(a_1^1 + a_2^2) - (a_1^2 + a_2^1)}$, получаем аналогичным образом, что система (16.11) имеет (единственное) решение тогда и только тогда, когда $0 < \alpha < 1$, и в этом случае решение системы (16.11) есть $y_1 = \alpha$, $y_2 = 1 - \alpha$.

Итак, если $0 < \alpha, \beta < 1$, то игра $\Gamma_{(A,B)}$ имеет, причем только одну вполне смешанную ситуацию равновесия (x^0, y^0), где $x^0 = (\beta, 1-\beta)$, $y^0 = (\alpha, 1-\alpha)$.

Замечание. Сравнивая полученные выражения стратегий x^0 и y^0 во вполне смешанной ситуации равновесия с формулами (14.3) и (14.4), видим, что x^0 совпадает с оптимальной смешанной стратегией игрока *1* в матричной игре Γ_B, а y^0 — с оптимальной стратегией игрока *2* в матричной игре Γ_A. Таким образом, во вполне смешанной ситуации равновесия игрок *1* минимизирует ожидаемый выигрыш игрока *2*, а игрок *2* минимизирует ожидаемый выигрыш игрока *1*. Здесь наблюдается «антагонизм поведения» при отсутствии прямого «антагонизма интересов».

Задача 21. *Борьба за рынки сбыта.*

Фирма A намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, которые контролируются более крупной фирмой B. С этой целью она проводит подготовительную работу, связанную с определенными затратами. Если фирма B разгадает, на каком рынке фирма A будет продавать свой товар, то она примет контрмеры и воспрепятствует «захвату» рынка (этот вариант означает поражение фирмы A); если нет, то фирма A одерживает победу. Предположим, что для фирмы A проникновение на первый рынок более выгодно, чем проникновение на второй, но и борьба за первый рынок требует от нее бóльших средств. Например, победа фирмы A на первом рынке приносит ей вдвое бóльшую прибыль, чем победа на втором, но зато поражение на первом рынке полностью ее разоряет.

Составим математическую модель этого конфликта, считая фирму A игроком *1*, а фирму B — игроком *2*. Стратегии игрока *1*: первая — проникновение на первый рынок, вторая — проникновение на второй рынок; стратегии игрока *2*: первая — контрмеры на первом рынке, вторая — контрмеры на втором рынке. Пусть для фирмы A ее победа на первом рынке оценивается в 2 ед., а победа на втором рынке — в 1 ед.; поражение фирмы A на первом рынке оценивается в -10 ед., а на втором — в -1 ед. Для фирмы B ее победа составляет соответственно 5 и 1 ед., а поражение -2 и -1 ед.

В результате получаем биматричную игру $\Gamma_{(A,B)}$ с матрицами выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По правилу 16.1 эта игра может иметь либо чистые, либо вполне смешанные ситуации равновесия. Ситуаций равновесия в чистых стратегиях здесь нет. (Содержательно этот факт можно объяснить следующим рассуждением: если стратегия фирмы A была разгадана фирмой B, то в этой ситуации отклонение выгодно для фирмы A; в противном случае отклонение выгодно для фирмы B.) Убедимся теперь, что данная игра имеет вполне смешанную ситуацию равновесия. Находим:

$$\alpha = \frac{-1-2}{-11-3} = \frac{3}{14}; \qquad \beta = \frac{1+1}{6+3} = \frac{2}{9}.$$

Итак, рассматриваемая игра имеет единственную ситуацию равновесия (x^0, y^0), где $x^0 = (2/9, 7/9)$, $y^0 = (3/14, 11/14)$. В данной игре ситуация равновесия не может быть реализована в виде физической смеси чистых стратегий, однако она может быть реализована при многократном разыгрывании этой игры (т.е. при многократном воспроизведении описанной ситуации) следующим образом. Фирма A должна использовать чистые стратегии 1 и 2 с частотами 2/9 и 7/9, а фирма B — чистые стратегии 1 и 2 с частотами 3/14 и 11/14. При отклонении одной из фирм от указанной смешанной стратегии отклонившаяся фирма уменьшает свой ожидаемый выигрыш.

3. Как отмечалось в лекции 15, равновесие является важнейшим принципом оптимальности в бескоалиционных играх, т.е. играх, в которых не рассматривается образование коалиций. Коалиция является формой кооперации, направленной на увеличение первональных возможностей игроков, или, в теоретико-игровых терминах, на увеличение их выигрышей. Отметим, что в антагонистической (в частности, в матричной) игре кооперация игроков лишена смысла, так как в такой игре улучшение положения одного из них приводит к ухудшению положения другого. При переходе от матричной игры к биматричной картина меняется: в биматричной игре кооперация игроков может улучшить положение их обоих. В биматричной игре имеется только одна нетривиальная коалиция (коалиция, состоящая более, чем из одного игрока) — коалиция обоих игроков. Для пояснения отличий между индивидуальным выбором решений обоими игроками и совместным принятием решения коалицией этих игроков рассмотрим следующий пример.

• **Пример 16.1.** *Конкурс на реализацию проекта.*

Две фирмы участвуют в конкурсе на реализацию некоторого проекта, причем доход от реализации проекта составляет 10 денежных ед. Каждая фирма может либо подать простую заявку на участие в конкурсе (затраты равны 1 денежной ед.), либо представить программу реализации проекта (затраты равны 3 денежным ед.). Условия конкурса таковы, что в случае, когда обе фирмы выбирают одинаковый способ действий, заказ на реализацию проекта, а также доход, делится между ними пополам; если же фирмы выбирают различные способы действий, то предпочтение отдается той, которая представила программу.

Представим описанную конфликтную ситуацию в виде биматричной игры. Игроками здесь выступают фирмы *1* и *2*; стратегии игроков: *З* — подача заявки, *П* — подача программы. В ситуации (*З, З*) прибыль каждой фирмы равна $5 - 1 = 4$; в ситуации (*П, П*) каждая фирма имеет прибыль $5 - 3 = 2$. Если же одна фирма подает программу, а другая — заявку, то первая получает прибыль в $10 - 3 = 7$ денежных ед., а вторая несет убытки в 1 денежную ед. Итак, приходим к биматричной игре, заданной табл. 16.1.

Таблица 16.1

	З	*П*
З	$(4,4)$	$(-1,7)$
П	$(7,-1)$	$(2,2)$

Здесь имеется единственная ситуация равновесия по Нэшу — ситуация (*П, П*), в которой каждая из фирм получает прибыль в 2 денежных ед. Если игра находится в ситуации (*П, П*), то ни одному из игроков не выгодно одностороннее отклонение от этой ситуации (так как отклонившийся игрок уменьшает свой выигрыш). Но если игроки *1* и *2 оба* отклоняются от ситуации (*П, П*), то возникает ситуация (*З, З*), которая является более выгодной для них обоих. Однако переход от ситуации (*П, П*) к ситуации (*З, З*) может произойти только как результат договора между игроками, что осуществимо лишь при создании коалиции $\{1,2\}$ этих игроков. Объединение игроков *1* и *2* в коалицию требует, как минимум, возможности обмена информацией между ними. Если же игроки не могут обмениваться информацией, то каждый из них будет опасаться менять выбранную им стратегию *П* на стратегию *З*, так как это приводит к уменьшению выигрыша отклонившегося игрока.

Рассмотренный пример демонстрирует важную особенность биматричных игр — возможность наличия противоречия между выгодностью и устойчивостью. Действительно, ситуация (*II*, *II*) является устойчивой (равновесной), но невыгодной; ситуация (*3*, *3*) является выгодной для обоих игроков, но неустойчивой. Поэтому, если игроки *1* и *2* заключают между собой договор — обоим придерживаться стратегии *3*, то этот договор будет находиться под угрозой нарушения, так как каждому игроку выгодно одностороннее отклонение от него.

4. При изучении кооперативного аспекта игры в теории игр внимание обращается, как правило, не на ситуации игры, а на ее исходы. В соответствии с этим в основе оптимальности лежит идея выгодности.

Проанализируем, как может быть реализована идея выгодности в рамках неантагонистической игры двух лиц. Пусть X — множество стратегий игрока *1* и Y — множество стратегий игрока *2*. Если игроки *1* и *2* образуют коалицию $\{1, 2\}$, то эта коалиция может создать любую ситуацию $(x, y) \in X \times Y$ и, следовательно, реализовать любой исход игры. Возникает вопрос, какой исход игры в этом случае следует считать наиболее выгодным для коалиции $\{1, 2\}$, т.е. оптимальным для нее?

Так, в рамках примера 16.1, игроки *1* и *2*, объединившись в коалицию, очевидно, предпочтут исход $(4, 4)$ исходу $(2, 2)$, однако исходы $(7, -1)$ и $(-1, 7)$ также являются «кандидатами» на оптимальный исход.

В общем случае для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ рассмотрение вопроса об ее оптимальном исходе с точки зрения коалиции $\{1, 2\}$ удобно представить в геометрической форме следующим образом. На координатной плоскости (u_1, u_2) изобразим точки, координатами которых являются выигрыши игроков (a_i^j, b_i^j) в каждой возможной ситуации (i, j), где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ (по оси u_1 откладываем выигрыши игрока *1* и по оси u_2 — выигрыши игрока *2*). При этом возникает «картинка», похожая на изображенную на рис. 16.1. Поскольку коалиция $\{1, 2\}$ может выбрать любой из представленных исходов, то получается фактически задача двухкритериальной оптимизации, где игрок *1* стремится максимизировать критерий u_1, а игрок *2* — максимизировать критерий u_2.

Как указывалось в лекции 5, анализ задачи многокритериальной оптимизации содержит два этапа. *Первый этап* базируется на отношении доминирования по Парето. Отбрасывая исходы, домини-

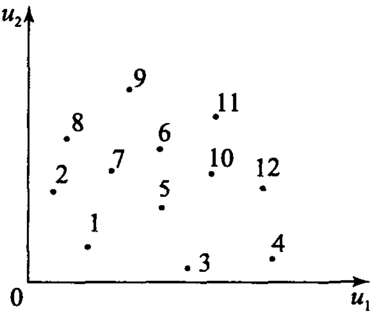


Рис. 16.1

руемые по Парето, получаем множество Парето-оптимальных исходов (в примере, представленном на рис. 16.1, Парето-оптимальными являются исходы $\{4, 9, 11, 12\}$). Выбор оптимального исхода следует производить из множества Парето-оптимальных исходов. *Второй этап* — решение вопроса: какой исход из множества Парето-оптимальных исходов следует рассматривать в качестве оптимального исхода игры?

Отметим, что отбрасывая доминируемые по Парето исходы, игроки выступают как союзники, так как этот шаг выгоден им обоим. Однако при сравнении любых двух Парето-оптимальных исходов игроки из союзников превращаются в противников: любые два Парето-оптимальных исхода несравнимы по Парето, следовательно, увеличение выигрыша одного игрока влечет уменьшение выигрыша другого игрока.

Для решения задачи нахождения оптимального исхода коалиции игроков в биматричной игре сделаем еще одно допущение: для коалиции $\{1, 2\}$ допу́стим использование не только чистых, но и смешанных стратегий.

Определение. ***Смешанной стратегией коалиции*** $\{1, 2\}$ *в биматричной игре* $\Gamma_{(A,B)}$ *будем называть всякий вероятностный вектор* $z = z_{i,j}$ *на множестве чистых ситуаций этой игры (предполагается, что* $z_{i,j} \geq 0$, $\sum z_{i,j} = 1$).

Замечание. Предположим, что игрок *1* использует смешанную стратегию $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S_n$, а игрок *2* — смешанную стратегию $y = (y_1, \ldots, y_m) \in S_m$. Тогда на множестве ситуаций игры возникает вероятностный вектор $z = z_{i,j}$, где $z_{i,j} = x_i \cdot y_j$ $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$; он будет, по определению, смешанной стратегией коалиции $\{1, 2\}$. Однако векторы

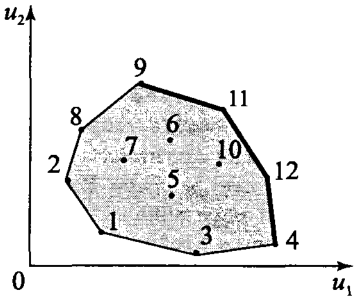


Рис. 16.2

указанного вида реализуют лишь *независимые вероятностные распределения* на множестве чистых ситуаций игры. Возможность реализации произвольного, а не только независимого распределения на множестве чистых ситуаций игры — есть проявление «эффекта кооперации» применительно к смешиванию стратегий игроков.

Допущение смешанных стратегий коалиции $\{1, 2\}$ приводит к тому, что вместе с двумя исходами (u_1, u_2), (u_1', u_2') коалиция $\{1, 2\}$ может реализовать также исход

$$\lambda(u_1, u_2) + (1 - \lambda)(u_1', u_2') = (\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_1', \lambda u_2 + (1 - \lambda)u_2'),$$

где $0 \le \lambda \le 1$. С геометрической точки зрения это означает, что множество исходов биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ превращается в многоугольник, вершинами которого будут точки (a_i^j, b_i^j) $(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m})$. При этом исходы, оптимальные по Парето, составляют «северо-восточную границу» этого многоугольника (рис. 16.2). Задача нахождения кооперативного решения биматричной игры сводится теперь к построению правила, которое для каждого такого многоугольника исходов указывает единственный оптимальный исход, принадлежащий его «северо-восточной границе». Рассмотрим решение этой задачи, известное в теории игр как ***арбитражное решение Нэша***.

5. Арбитражное решение представляет собой некоторую систему требований (аксиом), с помощью которых для любой игры выделяется ее единственное решение — оптимальный исход этой игры.

Для биматричной игры $\Gamma_{(A,B)}$ обозначим через $\mathcal{D}$ область на плоскости (u_1, u_2), которая совпадает с множеством исходов этой игры в смешанных стратегиях; пусть v_A — цена матричной игры Γ_A, v_B — цена матричной игры Γ_B в смешанных стратегиях. При этом точка $M_0(v_A; v_B)$ называется **точкой status quo**. Арбитражное решение Нэша для каждой области $\mathcal{D}$ с выделенной точкой M_0 указывает единственную точку $M^*(u_1^*; u_2^*)$ области $\mathcal{D}$, которая интерпретируется как оптимальный исход.

Математически арбитражное решение Нэша определяется как отображение Φ, которое каждой паре вида $(\mathcal{D}, (v_A, v_B))$ ставит в соответствие точку $(u_1^*; u_2^*) \in \mathcal{D}$, причем отображение Φ удовлетворяет следующим аксиомам.

(1) *Коллективная рациональность.* Если для $(u_1, u_2) \in \mathcal{D}$ имеет место $(u_1, u_2) \geqq^{\mathrm{Par}} (u_1^*, u_2^*)$, то $(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$.

Требование коллективной рациональности есть не что иное, как оптимальность исхода (u_1^*, u_2^*) по Парето.

(2) *Индивидуальная рациональность.* $u_1^* \geq v_A$, $u_2^* \geq v_B$.

Требование индивидуальной рациональности означает, что при оптимальном исходе каждый игрок должен получить не меньше, чем его максимальный гарантированный выигрыш (не меньше «своего» максимина, совпадающего с ценой соответствующей игры).

(3) *Линейность.* Пусть область $\mathcal{D}'$ получается из $\mathcal{D}$ с помощью линейного преобразования вида $u_1' = \alpha_1 u_1 + \beta_1$, $u_2' = \alpha_2 u_2 + \beta_2$, где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Положим

$$v_A' = \alpha_1 v_A + \beta_1, \qquad v_B' = \alpha_2 v_B + \beta_2.$$

Тогда

$$\Phi(\mathcal{D}', (v_A', v_B')) = (\alpha_1 u_1^* + \beta_1, \alpha_2 u_2^* + \beta_2).$$

Смысл аксиомы линейности состоит в том, что оптимальное решение не должно зависеть от выбора начала отсчета и масштаба измерения выигрышей.

(4) *Симметрия.* Если множество исходов $\mathcal{D}$ симметрично относительно биссектрисы I координатного угла и $v_A = v_B$, то $u_1^* = u_2^*$.

Эта аксиома постулирует равноправие игроков.

(5) *Независимость от посторонних альтернатив.* Пусть $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}$ и $\Phi(\mathcal{D}, (v_A, v_B)) \in \mathcal{D}_1$. Тогда $\Phi(\mathcal{D}_1, (v_A, v_B)) = \Phi(\mathcal{D}, (v_A, v_B))$.

Эта аксиома требует, чтобы арбитражное решение для данного множества исходов являлось также арбитражным решением для любого своего подмножества, в которое оно попадает. Другими словами, добавление новых исходов не должно менять предпочтения старых.

Результат, доказанный Нэшем, состоит в следующем: *отображение, удовлетворяющее аксиомам* (1)–(5), *существует и единственно.*

В явном виде арбитражное решение Нэша для пары $(\mathcal{D}, (v_A, v_B))$ это точка $(u_1^*; u_2^*) \in \mathcal{D}$, для которой произведение

$$(u_1 - v_A)(u_2 - v_B)$$

достигает наибольшего значения в той части области $\mathcal{D}$, которая выделяется условием: $u_1 \geq v_A$, $u_2 \geq v_B$.

В качестве иллюстрации нахождения кооперативного решения биматричной игры с помощью арбитражной схемы Нэша рассмотрим следующую задачу.

Задача 22. *Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры без разделения полезности).*

Имеется две фирмы: первая может выпускать одно из изделий a_1 или a_2, вторая — одно из изделий b_1, b_2 или b_3, которые затем продаются на одном рынке. Если первая фирма выпускает изделие a_i $(i = 1, 2)$, а вторая — изделие b_j $(j = 1, 2, 3)$, то прибыль этих фирм (зависящая от того, являются эти изделия взаимодополнительными или конкурирующими), определяется табл. 16.2. Считая, что фирмы заключают между собой договор, найти справедливое распределение прибыли, используя арбитражное решение Нэша.

Таблица 16.2

	b_1	b_2	b_3
a_1	(3,3)	(0,0)	(4,1)
a_2	(2,0)	(1,5)	(2,2)

Метод решения.

1. В декартовой системе координат строим многоугольник исходов $\mathcal{D}$, вершинами которого являются точки, координаты которых заданы в табл. 16.2 (рис. 16.3).

2. Выделяем в этом многоугольнике множество Парето-оптимальных исходов (северо-восточную границу).

3. Находим цену в смешанных стратегиях игры $\Gamma_A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и игры $\Gamma_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Замечание. Так как игра Γ_A имеет седловую точку в чистых стратегиях, ее цена совпадает с исходом в седловой точке, откуда $v_A = 1$. Цена игры Γ_B может быть найдена графоаналитическим методом (см. лекцию 14, п.2); $v_B = 15/8$.

4. Вводим новую систему координат, перенося начало в точку $O'(v_A; v_B)$. Арбитражное решение Нэша есть точка $M^*(u_1^*; u_2^*)$ построенного многоугольника, которая лежит в I координатной четверти новой системы координат и обращает в максимум произведение координат.

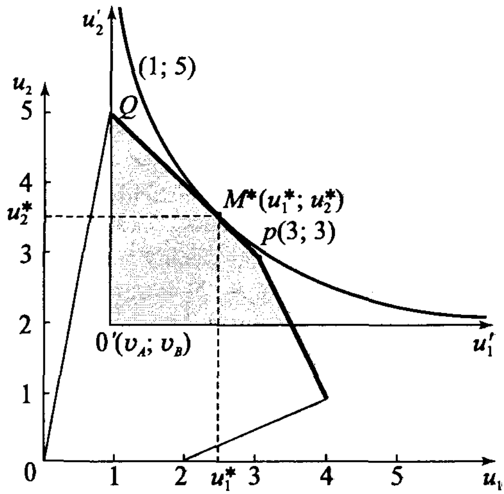


Рис. 16.3

Для нахождения точки M^* заметим, что линия, для которой произведение координат имеет постоянное значение, определяется уравнением $u_1' \cdot u_2' = c$ и, следовательно, является равнобочной гиперболой, асимптотами которой служат оси новой декартовой системы координат. Таким образом, M^* — та точка, в которой гипербола данного семейства касается прямой PQ. Приближенно точку M^* можно найти с помощью рис. 16.3. Координаты точки M^* (в старой системе координат) дают арбитражное решение Нэша для поставленной задачи; в рассматриваемом случае $u_1^* \approx 2,6$, $u_2^* \approx 3,4$. Для нахождения точных значений координат точки M^* надо составить систему из уравнения прямой PQ и уравнения гиперболы нашего семейства; параметр c находится из условия единственности решения такой системы (дискриминант квадратного трехчлена, полученного при подстановке одного уравнения в другое, должен быть равен нулю).

В рассматриваемом случае указанная система уравнений (в новой системе координат) имеет вид

$$\begin{cases} u_1' + u_2' = \dfrac{25}{8}, \\ u_1' u_2' = c. \end{cases}$$

Подставляя $u_2' = 25/8 - u_1'$ из первого уравнения во второе, получаем квадратное уравнение

$$8(u_1')^2 - 25u_1' + 8c = 0.$$

Решение этого уравнения, получающееся при обращении дискриминанта в нуль, есть $u_1' = 25/16$; из первого уравнения системы получаем $u_2' = 25/16$. Переходя к старой системе координат, находим координаты точки M^*: $u_1^* = u_1' + v_A = 41/16$, $u_2^* = u_2' + v_B = 55/16$.

Итак, «правильное» распределение прибыли (оптимальное решение), диктуемое арбитражным решением Нэша, таково: игрок *1* получает 41/16 денежных ед., а игрок *2* получает 55/16 денежных ед.

Реализация оптимального решения осуществляется некоторой смешанной стратегией коалиции $\{1, 2\}$. Чтобы найти смешанную стратегию коалиции $\{1, 2\}$, реализующую исход (u_1^*, u_2^*), надо «смешать» ситуации (a_1, b_1) и (a_2, b_2), приводящие к исходам $(3, 3)$ и $(1, 5)$, в некоторой пропорции так, чтобы выполнялось равенство: $\lambda(3,3)+(1-\lambda)(1,5) = (41/16, 55/16)$, откуда $\lambda = 25/32$, $1-\lambda = 7/32$. Итак, для получения «справедливой» доли фирмы *1* и *2* должны воспроизводить ситуацию (a_1, b_1) с частотой 25/32, ситуацию (a_2, b_2) с частотой 7/32, а остальные ситуации не воспроизводить совсем.

Замечания. **1.** Рассматриваемое здесь кооперативное решение биматричной игры предполагает «неделимость» выигрышей игроков (в частности, невозможность передачи *части* выигрыша от одного игрока к другому). В теории игр такое решение называется ***кооперативным решением без разделения полезности***.

2. Арбитражное решение Нэша может быть использовано для решения задачи многокритериальной оптимизации для случая, когда критерии являются несравнимыми между собой (в частности, когда невозможно нахождение локального коэффициента замещения). В этом случае в качестве точки status quo выступает точка, координатами которой являются минимально допустимые значения критериев.

Лекция 17. *Кооперативные игры*

• *Коалиции. Характеристическая функция игры n лиц. Свойство супераддитивности.* • *Эквивалентность кооперативных игр. Величина кооперативного эффекта коалиции.* • *Существенные и несущественные игры. $0-1$ редуцированная форма игры.* • *Дележи. Условия существенности и несущественности игры в терминах дележей.* • Задача 23. *Рынок трех лиц.*

1. Кооперативный аспект игры связан с возможностью образования в ней коалиций игроков. Частично этот вопрос уже затрагивался при рассмотрении кооперативного решения биматричной игры (лекция 16). Однако наиболее существенные проблемы, связанные с образованием коалиций, возникают для игр с числом игроков больше двух.

Рассмотрим игру n лиц в нормальной форме (см. лекцию 15)

$$\Gamma = \langle I, (X_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}\rangle. \qquad (17.1)$$

Определение. ***Коалицией*** *в игре Γ называется произвольное подмножество игроков $S \subseteq I = \{1, \ldots, n\}$. В частности, одноэлементное множество $\{i\}$, состоящее из единственного игрока i, по определению считается коалицией. Допускается также пустая коалиция $\varnothing$ и коалиция I, содержащая всех игроков.*

Сформулируем основные предположения, касающиеся возможностей кооперативного поведения игроков в игре Γ.

(1) *Возможно образование любых коалиций.*

(2) *Игроки, вступившие в коалицию, имеют возможность применения любых совместных действий составляющих ее игроков.*

Формально это условие означает, что множеством стратегий коалиции S является декартово произведение $X_S = \prod\limits_{i\in S} X_i$.

(3) *Суммарный выигрыш, полученный всеми игроками коалиции S, может быть распределен между ее членами любым способом.*

Это условие включает, во-первых, «безграничную делимость» полезностей игроков и, во-вторых, возможность «передачи полезности» от одного игрока к другому (как говорят в теории игр — возможность «побочных платежей»).

Если для игры Γ предположения (1)–(3) приняты, Γ становится *кооперативной игрой* (точнее, *кооперативной игрой с разрешенными побочными платежами*). Основная проблема, возникающая в кооперативных играх, — введение для них понятия оптимального исхода, а также выяснение условий существования оптимальных исходов и разработка способов их нахождения.

В кооперативной игре возможности коалиции S можно охарактеризовать одним числом $v(S)$, представляющим собой максимальный гарантированный суммарный выигрыш игроков коалиции S в наиболее неблагоприятных для нее условиях, когда все остальные игроки также объединяются в коалицию с противоположными интересами. Формально $v(S)$ есть цена антагонистической игры коалиции S против коалиции остальных игроков $I \setminus S$. Так как множеством стратегий коалиции S является $\prod_{i \in S} X_i$, множеством стратегий коалиции $I \setminus S$ является $\prod_{i \in I \setminus S} X_i$ и функция выигрыша коалиции S есть $f_S = \sum_{i \in S} f_i$, то цена построенной антагонистической игры определяется равенством

$$v(S) = \sup_{x \in X_S} \inf_{y \in X_{I \setminus S}} f_S(x, y), \tag{17.2}$$

где

$$f_S(x, y) = \sum_{i \in S} f_i(x, y).$$

Замечания 1. В случае, когда множества стратегий игроков конечны, операторы sup и inf превращаются соответственно в max и min; равенство (17.2) дает тогда нижнюю цену получающейся матричной игры.

2. Суммирование выигрышей разных игроков имеет смысл лишь тогда, когда они измеряют свои полезности в одной шкале. Поэтому, если первоначально это условие не выполнено, то при переходе к кооперативному варианту игры необходимо «пересчитать» функции выигрыша игроков, приведя их к единой шкале.

Определение. *Функция, которая каждой коалиции $S \subseteq I$ ставит в соответствие число $v(S)$, определенное равенством* (17.2), *называется* ***характеристической функцией*** *игры* Γ. *Пара* $\langle I, v \rangle$, *где* I — *множество игроков и* v — *характеристическая функция игры* Γ, *называется* ***кооперативной игрой, построенной для игры*** Γ.

Кооперативная игра $\langle I, v \rangle$ является уже нестратегической (в ней не отражены возможности игроков по формированию ситуаций игры с помощью выбора стратегий), однако последствия, связанные с возникновением тех или иных ситуаций игры Γ и касающиеся не только отдельных игроков, но и их коалиций, отражены в характеристической функции v.

Установим основные свойства характеристической функции игры n лиц.

Теорема 17.1. *Характеристическая функция v обладает следующими основными свойствами*:

(1) $v(\varnothing) = 0$ (*персональность*);

(2) *Если* $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, *то* $v(S_1) + v(S_2) \leq v(S_1 \cup S_2)$ (*супераддитивность*).

Доказательство. Свойство (1) очевидно из определения. Докажем (2). Пусть $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. По определению супремума для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие стратегии $x_{S_1} \in X_{S_1}$ и $x_{S_2} \in X_{S_2}$, что в любой ситуации $y \in X_I$ выполняются неравенства: $f_{S_1}(y \| x_{S_1}) \geq v(S_1) - \varepsilon$, $f_{S_2}(y \| x_{S_2}) \geq v(S_2) - \varepsilon$. Определим стратегию $x_{S_1} \sqcup x_{S_2}$ коалиции $S_1 \cup S_2$, для которой ее i-я компонента совпадает с i-й компонентой стратегии x_{S_1}, если $i \in S_1$ и с i-й компонентой стратегии x_{S_2}, если $i \in S_2$ (такая стратегия существует в силу условия $S_1 \cap S_2 = \varnothing$). Замечая, что $y \| (x_{S_1} \sqcup x_{S_2}) = (y \| x_{S_2}) \| x_{S_1} = (y \| x_{S_1}) \| x_{S_2}$, получаем при произвольной ситуации $y \in X_I$:

$$f_{S_1}(y \| (x_{S_1} \sqcup x_{S_2})) \geq v(S_1) - \varepsilon, \tag{$*$}$$

$$f_{S_2}(y \| (x_{S_1} \sqcup x_{S_2})) \geq v(S_2) - \varepsilon. \tag{$**$}$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $f_{S_1} + f_{S_2} = f_{S_1 \cup S_2}$, получаем

$$f_{S_1 \cup S_2}(y \| (x_{S_1} \sqcup x_{S_2})) \geq v(S_1) + v(S_2) - 2\varepsilon,$$

откуда

$$\inf_{y \in X_I} f_{S_1 \cup S_2}(y \| (x_{S_1} \sqcup x_{S_2})) \geq v(S_1) + v(S_2),$$

следовательно,

$$\sup_{x\in X_{S_1\cup S_2}} \inf_{y\in X_I} f_{S_1\cup S_2}(y\|x) \geq v(S_1)+v(S_2),$$

т.е. $v(S_1\cup S_2)\geq v(S_1)+v(S_2)$.

Свойство супераддитивности по индукции распространяется на любое число коалиций, а именно, для произвольного семейства $(S_k)_{k=\overline{1,r}}$ попарно непересекающихся коалиций имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{r} v(S_k) \leq v\Big(\bigcup_{k=1}^{r} S_k\Big). \qquad (17.3)$$

В частности, представляя произвольную коалицию S в виде семейства одноэлементных коалиций $\{i\}$, где $i\in S$, получаем

$$\sum_{i\in S} v(i) \leq v(S). \qquad (17.4)$$

Свойство супераддитивности характеристической функции имеет следующий содержательный смысл. Соединяя свои возможности, коалиции S_1 и S_2 получат во всяком случае не менее того, что они получили бы в сумме, действуя порознь. Для непересекающихся коалиций S_1 и S_2 разность $v(S_1\cup S_2)-(v(S_1)+v(S_2))$ есть неотрицательное число, показывающее дополнительную выгоду, которую получают коалиции S_1 и S_2 от объединения в «единое целое». В частности, если эта разность равна нулю, то объединение коалиций S_1 и S_2 в одну коалицию $S_1\cup S_2$ не приносит этим коалициям никакой дополнительной выгоды.

Замечание. В теории игр рассматриваются также характеристические функции, не связанные непосредственно с игрой n лиц. А именно, под *абстрактной характеристической функцией* над множеством игроков $I=\{\overline{1,n}\}$ понимается произвольное отображение v, которое каждой коалиции $S\subseteq I$ ставит в соответствие определенное число $v(S)$. Если абстрактная характеристическая функция обладает указанными в теореме 17.1 свойствами персональности и супераддитивности, то пара $\langle I,v\rangle$ называется ***кооперативной игрой***. В конкретных случаях число $v(S)$ имеет разный содержательный смысл, например, оно может характеризовать силу коалиции; ее гарантированные возможности; «вклад» в некоторое предприятие (как положительный, так и отрицательный); «уровень притязаний» и т.п. Примеры характристических функций, не связанных непосредственно с игрой Г общего вида, приведены ниже.

2. Введем отношение эквивалентности кооперативных игр, рассматриваемых над одним и тем же множеством игроков. Рассмотрим кооперативную игру $\langle I, v\rangle$. Зафиксируем положительное число $k > 0$ и n чисел c_i $(i = \overline{1,n})$. Положим

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i. \tag{17.5}$$

Убедимся, что v' — также харктеристическая функция, т.е. что она удовлетворяет условиям теоремы 17.1.

(1) $v'(\varnothing) = kv(\varnothing) + \sum\limits_{i\in\varnothing} c_i = 0 + 0 = 0$ (персональность).

(2) Установим супераддитивность функции v'. Для любых двух непересекающихся коалиций $S_1, S_2 \subseteq I$ имеем

$$v'(S_1 \cup S_2) - (v'(S_1) + v'(S_2)) = \Big(kv(S_1 \cup S_2) + \sum_{i \in S_1 \cup S_2} c_i\Big) -$$
$$- \Big(kv(S_1) + \sum_{i\in S_1} c_i + kv(S_2) + \sum_{i \in S_2} c_i\Big) =$$
$$= k(v(S_1 \cup S_2) - v(S_1) - v(S_2)) \geq 0.$$

Определение. *Две коопертивные игры $\langle I, v\rangle$ и $\langle I, v'\rangle$ называются* ***эквивалентными****, если существует положительное число $k > 0$ и n чисел c_i $(i = \overline{1,n})$, при которых выполняется равенство* (17.5).

Нетрудно проверить, что отношение эквивалентности кооперативных игр является отношением эквивалентности в теоретико-множественном смысле, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

За счет подбора констант $k > 0$ и c_i $(i = \overline{1,n})$ можно от заданной кооперативной игры $\langle I, v\rangle$ перейти к эквивалентной ей кооперативной игре с теми или иными дополнительными свойствами. В частности, полагая $k = 1$ и $c_i = -v(i)$, получаем эквивалентную игру с характеристической функцией v^0, имеющей следующий вид:

$$v^0(S) = v(S) - \sum_{i\in S} v(i). \tag{17.6}$$

Согласно (17.4), функция v^0 неотрицательна, т.е. $v^0(S) \geq 0$ для любой коалиции $S \subseteq I$. С другой стороны, любая неотрицательная супераддитивная функция множества $u(S)$ является изотонной, так как условие $S_2 \supseteq S_1$ влечет $S_2 = S_1 \cup (S_2 \setminus S_1)$, откуда $u(S_2) \geq u(S_1) + u(S_2 \setminus S_1) \geq u(S_1)$. Таким образом, для характеристической функции v^0

$$S_1 \subseteq S_2 \implies v^0(S_1) \leq v^0(S_2). \tag{17.7}$$

Для фиксированной коалиции $S \subseteq I$ неотрицательное число $v^0(S) = v(S) - \sum\limits_{i \in S} v(i)$ будем называть ***величиной кооперативного эффекта*** коалиции S в игре $\langle I, v \rangle$. Число $v^0(S)$ показывает тот дополнительный выигрыш, который получают игроки $i \in S$ при объединении их в коалицию. В терминах кооперативного эффекта условие (17.7) формулируется следующим образом: *при увеличении коалиции величина кооперативного эффекта возрастает* (не уменьшается).

3. Охарактеризуем кооперативные игры, в которых не возникает кооперативного эффекта.

Теорема 17.2. *Для кооперативной игры $\langle I, v \rangle$ следующие условия эквивалентны между собой*:

(а) *Характеристическая функция v аддитивна (т. е. для любых двух непересекающихся коалиций S_1, S_2 выполняется условие $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2)$)*;

(б) $v(S) = \sum\limits_{i \in S} v(i)$ *для любой коалиции* $S \subseteq I$;

(в) $v(I) = \sum\limits_{i \in I} v(i)$.

Доказательство. Из (а) следует (б), так как в предположении (а) имеем

$$v(S) = v\Big(\bigcup_{i \in S} \{i\}\Big) = \sum_{i \in S} v(i).$$

Далее, так как (в) есть частный случай (б), то из (б) следует (в). Остается проверить, что из (в) следует (а). Докажем равносильную импликацию: из отрицания условия (а) следует отрицание условия (в). Отрицание условия (а) означает, с учетом супераддитивности функции v, что для некоторых непересекающихся коалиций S_1 и S_2 выполняется неравенство $v(S_1 \cup S_2) > v(S_1) + v(S_2)$.

Используя это неравенство и (17.4), получаем

$$\begin{aligned} v^0(S_1 \cup S_2) &= v(S_1 \cup S_2) - \sum_{i \in S_1 \cup S_2} v(i) = \\ &= v(S_1 \cup S_2) - \Big(\sum_{i \in S_1} v(i) + \sum_{i \in S_2} v(i)\Big) \geq \\ &\geq v(S_1 \cup S_2) - (v(S_1) + v(S_2)) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для коалиции $S_1 \cup S_2$ величина кооперативного эффекта оказывается строго положительной, тогда в силу его изотонности тем более $v^0(I) > 0$, т.е. $v(I) > \sum_{i \in I} v(i)$. Последнее неравенство есть отрицание условия (в).

Кооперативная игра $\langle I, v \rangle$, удовлетворяющая одному из эквивалентных между собой условий (а), (б), (в) теоремы 17.2, называются ***несущественной***. Наиболее простым для проверки является условие (в). Условие (а) имеет чисто математический характер. Условие (б) с помощью функции v^0 может быть переписано в виде $v^0(S) = 0$; оно означает, что *для любой коалиции S величина ее кооперативного эффекта равна нулю.*

Поскольку множество кооперативных игр, рассматриваемых над фиксированным множеством игроков, разбито на классы эквивалентности, возникает задача выбора в каждом таком классе наиболее простой в некотором смысле игры. С этой целью введем следующее определение.

Определение. *Говорят, что кооперативная игра $\langle I, v \rangle$ имеет* **$0-1$*-редуцированную форму,*** *если:*

(1) $v(i) = 0$ *для всех* $i \in I$;

(2) $v(I) = 1$.

Теорема 17.3. *Каждая существенная кооперативная игра эквивалентна некотрой кооперативной игре, имеющей $0-1$-редуцированную форму.*

Доказательство. В силу условия существенности игры, выполняется неравенство

$$v(I) - \sum_{i \in I} v(i) > 0.$$

Положим

$$v^*(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i > 0,$$

где $k = 1/\left(v(I) - \sum\limits_{i\in I} v(i)\right)$, $c_i = -kv(i)$. Тогда игра $\langle I, v^*\rangle$ эквивалентна игре $\langle I, v\rangle$, причем

$$v^*(i) = kv(i) + c_i = 0;$$

$$v^*(I) = kv(I) + \sum_{i\in I} c_i = kv(I) - k\sum_{i\in I} v(i) = k\Big(v(I) - \sum_{i\in I} v(i)\Big) = 1.$$

Замечание. В явном виде характеристическая функция v^* может быть представлена в виде

$$v^*(S) = \frac{v(S) - \sum\limits_{i\in S} v(i)}{v(I) - \sum\limits_{i\in I} v(i)}. \tag{17.8}$$

Правая часть равенства (17.8) имеет следующий содержательный смысл: она показывает отношение величины кооперативного эффекта для коалиции S к величине кооперативного эффекта для коалиции I всех игроков. Так как при увеличении коалиции коопертивный эффект возрастает, это отношение не превосходит единицы.

4. Рассмотрим кооперативную игру $\langle I, v\rangle$. Будем интерпретировать число $v(S)$ как сумму, гарантированно получаемую коалицией S. Тогда коалиция I всех игроков может гарантированно получить сумму $v(I)$ и затем распределить ее любым способом между всеми игроками. Всякое такое распределение будем трактовать как возможный исход игры $\langle I, v\rangle$. Формально указанное распределение есть вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, i-я компонента которого понимается как сумма, которая достается игроку $i \in I$. Вопрос, какой исход кооперативной игры $\langle I, v\rangle$ следует считать оптимальным («правильным», «справедливым»), будет рассмотрен в следующей лекции, а сейчас укажем некоторые предварительные условия оптимальности исхода. Как уже было показано при изучении кооперативного решения биматричной игры (см. лекцию 16), безусловными требованиями, предъявляемыми к оптимальному исходу, являются требования индивидуальной и коллективной рациональности. В рассматриваемом случае эти требования принимают следующий вид.

$(A1)$ $x_i \geq v(i)$ для всех $i \in I$ (*индивидуальная рациональность*);

$(A2)$ $\sum\limits_{i\in I} x_i = v(I)$ (*коллективная рациональность*).

Замечание. Требование индивидуальной рациональности означает, что игрок i получает при распределении x не меньше той величины, которую он может получить гарантированно, действуя в одиночку. Поясним требование коллективной рациональности. Предположим, что $\sum\limits_{i \in I} x_i < v(I)$. Тогда разность $a = v(I) - \sum\limits_{i \in I} x_i$ будет положительной. Рассмотрим n положительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, для которых $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = a$. Распределение $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = x_i + \varepsilon_i$, более выгодно, чем распределение x, для всех игроков $i \in I$; тем самым распределение x не будет удовлетворять условию оптимальности по Парето. Если же $\sum\limits_{i \in I} x_i > v(I)$, то такой вектор x не достижим для коалиции I. Таким образом, в этом случае игроки «делят больше, чем имеют».

Определение. *Вектор $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется* ***дележом*** *в кооперативной игре $\langle I, v \rangle$.*

Итак, *при поиске оптимального исхода кооперативной игры $\langle I, v \rangle$ мы должны ограничиться только теми распределениями, которые являются дележами.* Рассмотрим вначале некоторые формальные свойства дележей. Из условий $(A1)$ и $(A2)$ следует такое правило.

Правило 17.1. *Для того чтобы вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ был дележом в кооперативной игре $\langle I, v \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы он был представи́м в виде*

$$x_i = v(i) + \alpha_i, \quad \text{где} \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(I) - \sum_{i \in I} v(i). \qquad (17.9)$$

Пояснение. Числа α_i имеют прозрачную интерпретацию: α_i — это добавка игроку *1* к его гарантированной сумме $v(i)$ при разделе «дополнительной прибыли», возникающей в результате кооперативного эффекта.

Приведем несколько следствий, вытекающих из правила 17.1.

Следствие 1. *Всякая несущественная кооперативная игра имеет единственный дележ*: $x = (v(1), \ldots, v(n))$.

Таким образом, для несущественной игры проблема нахождения ее оптимального исхода решается тривиально: это ее единственный дележ. При этом каждый из игроков получает сумму, которую он может обеспечить себе самостоятельно. Содержательно такой вывод очевиден: раз коалиция всех игроков не имеет дополнительной прибыли, то делить нечего.

Следствие 2. *Всякая существенная кооперативная игра имеет бесчисленное множество дележей.*

Следствие 3. *Для кооперативной игры в $0-1$-редуцированной форме вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ является дележом тогда и только тогда, когда $x_i \geq 0$ $(i = \overline{1,n})$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.*

Таким образом, для игры в $0-1$-редуцированной форме множество ее дележей совпадает с множеством S_n n-компонентных вероятностных векторов. В этом случае содержательный смысл i-й компоненты вектора x — это доля i-го игрока при распределении общей полезности, принятой за единицу.

5. Задача 23. *Рынок трех лиц.*

Рассмотрим классическую модель рынка, в которой участвует один продавец и два покупателя. Предположим, что у продавца имеется неделимый товар (например, компьютер), который он оценивает в p денежных ед., а первый и второй покупатели оценивают этот товар в q и r денежных ед. соответственно (считаем $q \leq r$). Необходимое условие участия всех троих в сделке — выполнение неравенств $p < q$ и $p < r$.

Итак, $p < q \leq r$. Проанализируем эту ситуацию как игру, считая продавца игроком *1*, первого покупателя — игроком *2* и второго покупателя — игроком *3*. Характерной особенностью этой игры является возможность совместных действий игроков, т.е. возможность образования в ней коалиции (коалиция продавца с покупателем интерпретируется как сделка между ними).

Построим характеристическую функцию этой игры, рассматривая $v(S)$ как гарантированную прибыль коалиции S; при этом прибыль коалиции считается равной сумме прибылей всех ее участников. Очевидно, что прибыль возможна лишь для коалиции, содержащей продавца, поэтому $v(2) = v(3) = v(\{2,3\}) = 0$. Далее, $v(1) = 0$, так как продавец, действуя в одиночку, не может обеспечить себе никакой прибыли. Найдем теперь $v(\{1,2\})$. Создание коалиции $\{1,2\}$ означает, что игроки *1* и *2* вступают в сделку, т.е. продавец (игрок *1*) продает товар первому покупателю (игроку *2*). Сделка «устраивает» обоих игроков только в том случае, когда цена продажи s заключена между p и q, т.е. $p \leq s \leq q$. В этом случае прибыль продавца равна $s - p$ (так как он оценивал свой товар в p денежных ед., а получил s денежных ед.); прибыль первого покупателя равна $q - s$ (так как он оценивал товар в q денежных ед., а потратил на его покупку s денежных ед.). Общая прибыль коалиции $\{1, 2\}$ равна $(s-p)+(q-s) = q-p$. Аналогично получаем, что общая прибыль коалиции $\{1, 3\}$ равна $r - p$.

Коалиция всех трех игроков $\{1, 2, 3\}$ может интерпретироваться здесь как сделка всех троих, осуществляемая следующим образом: игрок *3* покупает товар игрока *1* по цене s', где $p < s' \leq r$ и разность $(r - s')$ игроки *2* и *3* делят между собой (т.е. игрок *3* отдает часть своей прибыли игроку *2* за его «неучастие в покупке», что способствует снижению цены продажи товара). В этом случае общая прибыль коалиции $\{1, 2, 3\}$ равна $r-p$. Окончательно получаем

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(\{2,3\}) = 0, \quad v(\{1,2\}) = q-p,$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = r-p.$$

Приведем эту игру к $0-1$-редуцированной форме. Имеем

$$v^*(1) = v^*(2) = v^*(3) = 0, \quad v^*(\{1,2,3\}) = 1,$$
$$v^*(\{1,2\}) = \frac{v(\{1,2\})}{v(\{1,2,3\})} = \frac{q-p}{r-p}, \quad v^*(\{1,3\}) = \frac{v(\{1,3\})}{v(\{1,2,3\})} = 1,$$
$$v^*(\{2,3\}) = \frac{v(\{2,3\})}{v(\{1,2,3\})} = 0.$$

Содержательно число $v^*(S)$ представляет собой отношение величины кооперативного эффекта для коалиции S к величине кооперативного эффекта для коалиции $\{1, 2, 3\}$ всех игроков.

Лекция 18. *Оптимальные исходы в кооперативных играх*

• *Отношение доминирования дележей и его простейшие свойства.* • *С-ядро. Критерий принадлежности дележа к С-ядру.* Задача 24. *Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры с разделением полезности).* • *Вектор Шепли, его аксиоматическое обоснование и явное выражение.* • *Вектор Шепли для простых игр.* Задача 25. *Оценка «силы» держателей акций.*

1. Основной задачей данной лекции является обсуждение вопроса — какие исходы кооперативной игры следует рассматривать в качестве ее оптимальных исходов? Для кооперативной игры $\langle I, v\rangle$ будем интерпретировать число $v(S)$ как некоторую полезность (например, денежную сумму), которую коалиция S может гарантированно получить и затем распределить любым способом среди своих членов. Под исходом игры $\langle I, v\rangle$ понимается распределение между всеми ее игроками полезности $v(I)$. Предварительные условия, накладываемые на такое распределение, состоят в том, что оно должно удовлетворять условиям индивидуальной и коллективной рациональности, т.е. должно быть дележом (см. лекцию 17, п. 4). Однако в существенной кооперативной игре имеется бесконечное множество дележей, поэтому следующий этап определения оптимального исхода кооперативной игры состоит в сужении множества дележей (ср. с определением оптимального исхода в задаче многокритериальной оптимизации, лекция 5).

Сравнение дележей кооперативной игры проводится на основе введения отношения доминирования дележей. Введем вначале следующее обозначение: для произвольной коалиции $S \subseteq I$ и дележа $x = (x_1, \dots, x_n)$ через $x(S)$ будем обозначать общую сумму, получаемую коалицией S в дележе x, т.е. $x(S) = \sum\limits_{i\in S} x_i$.

Определение. *Говорят, что* ***дележ*** y ***доминирует дележ*** x ***по коалиции*** S *(записывается* $y \succ^S x$*), если:*

(а) $y_i > x_i$ *для всех* $i \in S$;

(б) $y(S) \le v(S)$.

Пояснение. Условие (а) означает, что для всех членов коалиции S дележ y лучше, чем дележ x. Условие (б) выражает достижимость (реализуемость) дележа y для коалиции S.

Определение. *Говорят, что* ***дележ*** y ***доминирует дележ*** x *(записывается* $y \succ x$*), если существует непустая коалиция* $S \subseteq I$*, для которой* $y \succ^S x$*. Формально отношение* $\succ$ *есть объединение отношений* $\succ^S$ *по всем непустым коалициям* $S \subseteq I$*.*

Замечание. Отношение доминирования дележей, вообще говоря, не является транзитивным: из того, что $x \succ y$ и $y \succ z$, не следует, что $x \succ z$. В то же время, может выполняться одновременно $x \succ y$ и $y \succ x$. Дело здесь в том, что соотношения $x \succ y$ и $y \succ z$ могут осуществляться по *разным* коалициям.

Установим теперь несколько простых свойств отношения доминирования дележей.

1°. *Доминирование дележей по одноэлементной коалиции невозможно.*

2°. *Доминирование дележей по коалиции* I *всех игроков невозможно.*

3°. *В игре двух лиц доминирование дележей невозможно.*

Доказательство. 1) Предположим, что $y \succ^i x$. Тогда по условию доминирования (а) $y_i > x_i$; в то же время, согласно условию (б) должно быть $y_i \le v(i)$, откуда $x_i < v(i)$ в противоречие с тем, что вектор x является дележом.

2) Предположим, что $y \succ^I x$. Тогда по условию (а) $y_i > x_i$ для всех $i \in I$, откуда $y(I) = \sum\limits_{i \in I} y_i > \sum\limits_{i \in I} x_i = x(I)$. Согласно условию коллективной рациональности, для дележа $y(I) = v(I)$, $x(I) = v(I)$ и получаем $v(I) > v(I)$ — противоречие.

Свойство 3° непосредственно следует из свойств 1° и 2°.

Важным свойством эквивалентных кооперативных игр является наличие изоморфизма между их отношениями доминирования. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 18.1. Пусть v и v' — характеристические функции над множеством игроков I, причем

$$v'(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} c_i,$$

где $S \subseteq I$, $k > 0$. Тогда отображение $x'_i = kx_i + c_i \quad (i = \overline{1,n})$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством дележей игры $\langle I, v\rangle$ и множеством дележей игры $\langle I, v'\rangle$, при котором из $y \succ^S x$ следует $y' \succ^S x'$.

Замечание 1. Таким образом, для любой фиксированной коалиции S указанное отображение осуществляет изоморфизм отношений доминирования по коалиции S. Следовательно, данное отображение является также изоморфизмом отношений доминирования дележей.

Доказательство. Убедимся вначале, что вектор $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ является дележом. Используя, что x — дележ в игре $\langle I, v\rangle$, получаем

$$x'_i = kx_i + c_i \geq kv(i) + c_i = v'(i);$$

$$\sum_{i \in I} x'_i = \sum_{i \in I}(kx_i + c_i) = k\sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} c_i = kv(I) + \sum_{i \in I} c_i = v'(I).$$

Итак, x' — дележ в игре $\langle I, v'\rangle$. Предположим теперь, что имеет место $y \succ^S x$, т.е. выполнены соотношения: $y_i > x_i \ (i \in S)$, $y(S) \leq v(S)$. Проверим условия доминирования по коалиции S для пары (y', x').

$$\text{(а)} \quad y'_i = ky_i + c_i > kx_i + c_i = x'_i \quad (i \in S);$$

$$\text{(б)} \quad \sum_{i \in S} y'_i = \sum_{i \in S}(ky_i + c_i) = k\sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in S} c_i =$$

$$= ky(S) + \sum_{i \in S} c_i \leq kv(S) + \sum_{i \in S} c_i = v'(S).$$

Итак, $y' \succ^S x'$. Взаимная однозначность отображения $x \to x'$ вытекает из существования обратного отображения (обратным будет отображение $x_i = \dfrac{x'_i}{k} - \dfrac{c_i}{k}$).

Замечание 2. Утверждение 18.1 позволяет при рассмотрении отношения доминирования дележей переходить от заданной кооперативной игры к любой эквивалентной ей игре, в частности, для существенной игры — к ее $0-1$-редуцированной форме.

2. Естественный путь сужения множества дележей основан на их сравнении, которое осуществляется на базе отношения доминирования. Предположим, что игрокам I предлагается дележ x и в то же время существует такой дележ y, что $y \succ x$. Последнее означает существование такой непустой коалиции $S \subseteq I$, что, во-первых, дележ y является более предпочтительным для всех членов коалиции S, чем дележ x, и, во-вторых, что дележ y может быть реализован коалицией S независимо от действий остальных игроков. Поэтому попытка введения дележа x должна встретить противодействие со стороны коалиции S, имеющей «желание» получить y вместо x, а также возможность это желание осуществить. Из этих рассуждений можно сделать следующий вывод: *предложение дележа x может быть принято всеми коалициями игры только тогда, когда этот дележ не является доминируемым.*

Определение. *Множество недоминируемых дележей кооперативной игры называется ее **С-ядром**.*

Следующая теорема характеризует дележи кооперативной игры, попадающие в ее C-ядро.

Теорема 18.1. *Для того чтобы дележ x кооперативной игры $\langle I, v\rangle$ принадлежал ее C-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S \subseteq I$ выполнялось равенство*

$$x(S) \geq v(S). \tag{18.1}$$

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что дележ x не принадлежит C-ядру. Тогда существует такой дележ y, что $y \succ^S x$ для некоторой коалиции $S \subseteq I$. Согласно условию доминирования (а),

$$y(S) = \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i = x(S),$$

а согласно условию доминирования (б),

$$y(S) \leq v(S).$$

Получаем $x(S) < v(S)$, что противоречит (18.1). Таким образом, достаточность установлена.

Необходимость. Проведем вначале доказательство при дополнительном предположении: $v(i) = 0$ для всех $i \in I$. Если для какой-либо коалиции $S \subseteq I$ неравенство (18.1) не выполнено, то для нее имеет место неравенство $x(S) < v(S)$.

Построим дележ $y = (y_1, \ldots, y_n)$, полагая

$$y_i = \begin{cases} x_i + \alpha, & \text{где} \quad \alpha = \dfrac{v(S) - x(S)}{|S|} \quad (i \in S), \\ \beta, & \text{где} \quad \beta = \dfrac{v(I) - v(S)}{|I \setminus S|} \quad (i \notin S). \end{cases} \tag{18.2}$$

(Смысл формулы (18.2) ясен. Положительная величина $v(S) - x(S)$ делится игроками коалиции S поровну и добавляется к компонентам «старого» дележа x, в результате чего коалиция S имеет в сумме $v(S)$; оставшаяся часть $v(I) - v(S)$ делится поровну между игроками, не принадлежащими коалиции S.) Заметим, что построенный вектор y действительно является дележом, так как все его компоненты неотрицательны и их сумма равна $v(I)$. Кроме того, выполняется $y \succ^S x$, так как $y_i > x_i$ для всех $i \in S$ и $y(S) \le v(S)$. Итак, дележ x не принадлежит C-ядру, что доказывает необходимость.

Наконец, заметим, что дополнительное условие, наложенное на характеристическую функцию v, не нарушает общности рассуждения. Действительно, для выполнимости указанного условия достаточно перейти к эквивалентной кооперативной игре с характеристической функцией

$$v^0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$$

и воспользоваться замечанием 2 к утверждению 18.1. При этом надо учесть, что неравенства (18.1) инвариантны относительно преобразования, переводящего игру $\langle I, v \rangle$ в эквивалентную игру $\langle I, v^0 \rangle$.

Система неравенств (18.1), определяющая C-ядро, задает некоторый многогранник в множестве всех дележей (который иногда может вырождаться в пустое множество). Рассмотрим подробней, что представляет собой C-ядро кооперативной игры с малым числом игроков. Напомним, что в игре двух лиц отношение доминирования дележей пусто (см. свойство 3° в данной лекции), поэтому принцип C-ядра имеет смысл для игр с числом игроков $n \ge 3$. Рассмотрим кооперативную игру трех лиц, заданную в

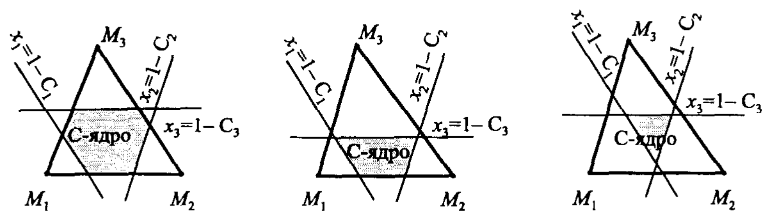


Рис. 18.1

$0-1$-редуцированной форме. В этом случае достаточно задать значения характеристической функции для двухэлементных коалиций. Положим: $v(\{1,2\}) = c_3$, $v(\{1,3\}) = c_2$, $v(\{2,3\}) = c_1$. Так как для игры трех лиц в $0-1$-редуцированной форме множество дележей есть множество вероятностных векторов вида (x_1, x_2, x_3), где $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и $x_1+x_2+x_3 = 1$, оно геометрически может быть представлено в виде треугольника $M_1M_2M_3$, причем дележ (x_1, x_2, x_3) отождествляется с точкой $M = x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3$ этого треугольника. По теореме 18.1 дележ (x_1, x_2, x_3) принадлежит C-ядру тогда и только тогда, когда выполняется система линейных неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq c_3, \\ x_1 + x_3 \geq c_2, \\ x_2 + x_3 \geq c_1. \end{cases} \tag{18.3}$$

Так как $x_1 = 1 - (x_2 + x_3)$, то на основании (18.3) $x_1 \leq 1 - c_1$; аналогично, $x_2 \leq 1 - c_2$, $x_3 \leq 1 - c_3$. Построив прямые $x_1 = 1 - c_1$, $x_2 = 1 - c_2$, $x_3 = 1 - c_3$, получим искомое C-ядро, имеющее вид многоугольника, содержащегося в треугольнике $M_1M_2M_3$ (некоторые варианты такого многоугольника представлены на рис. 18.1).

Рассмотрим теперь задачу экономического содержания, решение которой может быть получено с помощью нахождения C-ядра кооперативной игры.

Задача 24. *Оптимальное распределение прибыли (кооперативное решение игры с разделением полезности).*

Имеются три предприятия, специализирующиеся на выпуске комплектующих деталей A или B одинаковой стоимости, причем изделие собирается из одной детали A и одной детали B. Возможности предприятий по выпуску этих деталей приведены в табл. 18.1. Так как ни одно из предприятий не в состоянии самостоятельно производить данное изделие, то они заключают между собой договор с последующим распределением прибыли. Какое распределение прибыли между этими тремя предприятиями будет оптимальным?

Таблица 18.1

	A	B
1	900	0
2	600	0
3	0	1000

Рассмотрим описанный «производственный конфликт» как игру трех предприятий $\{1, 2, 3\}$. Составим характеристическую функцию этой игры, значения которой интерпретируются как число изделий, которое в состоянии произвести соответствующая коалиция. Так как ни одно из предприятий в отдельности, а также коалиция предприятий *1* и *2* не в состоянии производить изделие, то $v(1) = v(2) = v(3) = v(\{1, 2\}) = 0$. Далее, предприятия *1* и *3* вместе могут произвести 900 изделий, следовательно, $v(\{1, 3\}) = 900$; аналогично $v(\{2, 3\}) = 600$. Коалиция всех трех предприятий обеспечивает выпуск 1000 изделий, откуда $v(\{1, 2, 3\}) = 1000$.

Перейдем к $0 - 1$-редуцированной форме игры; здесь

$$v^*(S) = \frac{v(S)}{v(\{1, 2, 3\})} = \frac{v(S)}{1000}.$$

Находим: $v^*(\{1, 2\}) = 0$, $v^*(\{2, 3\}) = 0,6$, $v^*(\{1, 3\}) = 0,9$.

Согласно приведенному выше описанию C-ядра игры трех лиц, получаем, что в рассматриваемом случае C-ядро определяется системой неравенств:

$$x_1 \le 0,4, \quad x_2 \le 0,1, \quad x_3 \le 1. \tag{18.4}$$

Итак, оптимальным решением данной задачи, полученным на основе понятия C-ядра, будет любое распределение прибыли, при котором предприятие *1* получает не более 40% общей прибыли, предприятие *2* — не более 10% и предприятие *3* — все остальное. Всякое такое распределение будет устойчивым: никакая коалиция предприятий не сможет ему ему эффективно противодействовать.

И обратно, всякое распределение прибыли, не удовлетворяющее условиям (18.4), не будет устойчивым. Возьмем в качестве примера такое распределение прибыли, при котором прибыль делится пропорционально числу деталий, которое предприятия в состоянии произвести. Соответствующий дележ задается вектором

$(0,36,\ 0,24,\ 0,4)$, который не принадлежит C-ядру. Если будет предложено указанное распределение прибыли, то предприятия *1* и *3* смогут ему эффективно противодействовать с помощью объединения своих возможностей (т.е. создавая коалицию $\{1,3\}$). Действительно, так как $v^*(\{1,3\}) = 0,9$, то в этом случае коалиция $\{1,3\}$ получает 90% всей прибыли против 76% прибыли, имеющейся при дележе $(0,36,\ 0,24,\ 0,4)$.

Используя содержательную терминологию, можно сказать, что решение кооперативной игры, принадлежащее ее C-ядру, предохраняет от «экономического сепаратизма», т.е. от возникновения коалиции, разрушающей предложенный исход игры.

Сделаем еще два замечания, относящихся к задаче 24.

Замечания. **1.** Построенную в задаче 24 математическую модель конфликта в виде кооперативной игры можно считаться адекватной только в случае наличия возможности «разделения полезности» между предприятиями; например, такое разделение возможно, если полезность имеет денежный характер, но невозможно, если полезность представляет собой некоторый неделимый продукт. (Рекомендуем сравнить рассматриваемую задачу с задачей 22 оптимального распределения прибыли без ее разделения.)

2. Вопрос о выборе конкретного дележа из C-ядра (в случае его непустоты) остается открытым. Выбор единственного оптимального дележа из C-ядра требует дополнительной информации о свойствах оптимального дележа. Здесь ситуация аналогична выбору оптимального исхода из множества Парето-оптимальных исходов для задачи многокритериальной оптимизации (см. лекции 5–7).

3. Концепция оптимальности решения кооперативной игры, воплощенная в понятии C-ядра, обладает, при всей своей естественности, рядом недостатков, одним из которых является то, что в некоторых играх C-ядро оказывается пустым. Поэтому в теории игр изучаются и другие принципы оптимальности исходов кооперативных игр. Важнейшим из них является принцип, предложенный американским математиком Л. Шепли; он основан на построении так называемого ***вектора Шепли***.

Концепция оптимальности, предложенная Шепли, базируется на следующем подходе. Каждой кооперативной игре $\langle I, v\rangle$ ставится в соответствие n-компонентный вектор $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v))$, i-я компонента которого понимается как справедливый выигрыш, назначаемый игроку i в соответствии с его «вкладом» в игру. Таким образом, вектор Шепли можно рассматривать как «справедливое» распределение общей прибыли, полученной коалицией всех игроков в результате кооперативного эффекта (см. лекцию 17). Далее Шепли формулирует ряд аксиом, заключающих в себе определенное понимание «справедливого распределения полезности». Эти аксиомы (в эквивалентной формулировке) состоят в следующих требованиях.

(А1) Аксиома симметрии. $\Phi_{\pi i}(v) = \Phi_i(v)$ *для любого автоморфизма* π *игры* $\langle I, v\rangle$.

Пояснение. Под *автоморфизмом* игры $\langle I, v\rangle$ понимается такая перестановка π множества I, что $v(\pi S) = v(S)$ для любой коалиции $S \subseteq I$. Аксиома симметрии выражает тот факт, что игроки, входящие в игру симметрично, должны получить одинаковые выигрыши.

(А2) Аксиома эффективности. $\sum\limits_{i\in I} \Phi_i(v) = v(I)$.

Эта аксиома означает, что распределению подлежит вся сумма $v(I)$; формально она выражает условие групповой рациональности исхода, т.е. его оптимальности по Парето.

(А3) Аксиома болвана. *Если игрок* $i_0 \in I$ *таков, что для любой коалиции* $S \subseteq I$ *выполнено равенство* $v(S \cup \{i_0\}) = v(S)$, *то* $\Phi_{i_0}(v) = 0$.

Пояснение. Игрок i_0, участвующий в формулировке аксиомы (А3), в теоретико-игровой терминологии называется ***болваном***. Из свойства супераддитивности функции v сразу же следует, что $v(\{i_0\}) = 0$. Таким образом, игрок i_0 не может обеспечить себе никакого выигрыша и не влияет на выигрыши коалиций, к которым он присоединяется. Аксиома (А3) требует, чтобы игрок, являющийся болваном, ничего не получал при распределении.

(А4) Аксиома агрегации (линейности). *Если* u *и* v — *характеристические функции над множеством* I, *то для характеристической функции* $w = u + v$ *выполняется равенство*

$$\Phi_i(w) = \Phi_i(u) + \Phi_i(v).$$

Смысл аксиомы агрегации состоит в том, что при участии игрока в двух играх (что соответствует сложению характеристических функций), его выигрыши должны складываться.

Отметим, что условия «справедливости» дележа, выражаемые аксиомами (А1)-(А3), являются вполне приемлемыми с содержательной точки зрения. Аксиома (А4) не столь естественна, как предыдущие три аксиомы. Тем не менее, справедлив следующий результат, установленный Шепли в 1953 г.

Теорема 18.2. *Существует и притом только одна функция* Φ, *удовлетворяющая аксиомам* $(A1)$–$(A4)$.

Вектор $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v))$ называется ***вектором Шепли для игры*** $\langle I, v\rangle$. Вектор Шепли является дележом игры $\langle I, v\rangle$ и в явном виде определяется равенством

$$\Phi(v) = \sum_{\substack{S\subseteq I\\ i\in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S\setminus\{i\})) \quad (i \in I). \qquad (18.5)$$

Приведем одну интерпретацию компонент вектора Шепли. Предварительно рассмотрим следующую комбинаторную задачу. Зафиксируем игрока $i \in I$ и коалицию $S \subseteq I$, содержащую этого игрока. Найдем вероятность того, что в случайной перестановке элементов множества I все элементы множества $S \setminus \{i\}$ окажутся *до* i, а все элементы множества $I \setminus S$ — *после* i (считаем все перестановки равновероятными). Число интересующих нас перестановок по комбинаторному правилу произведения равно $(|S|-1)!(n-|S|)!$, а так как общее число всех перестановок есть $n!$, то искомая вероятность равна $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$. Далее, будем считать, что «вклад» игрока i в содержащую его коалицию S равен $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, а вероятность присоединения игрока i к коалиции $S \setminus \{i\}$ совпадает с найденной выше вероятностью того, что в случайной перестановке множества $\{\overline{1,n}\}$ игроками, оказавшимися в этой перестановке до i, будут точно все игроки из $S \setminus \{i\}$. Тогда правая часть (18.5) представляет собой математическое ожидание выигрыша игрока i в условиях данной рандомизационной схемы.

Наглядно указанную схему рандомизации можно представить следующим образом. Предположим, что игроки $\overline{1,n}$ прибывают к определенному месту друг за другом случайным образом. Если игрок i, прибыв к указанному месту, застанет там игроков $S \setminus \{i\}$, то он считается присоединившимся к коалиции $S \setminus \{i\}$, причем его «вклад» в эту коалицию будет равен тому дополнительному выигрышу, который он вносит в нее, т.е. $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Тогда $\Phi_i(v)$ совпадает с математическим ожиданием (средним значением) выигрыша игрока i в условиях данной теоретико-вероятностной схемы.

Таким образом, получаем следующее правило подсчета компонент вектора Шепли.

Правило 18.1. *i-я компонента вектора Шепли $\Phi_i(v)$ есть среднее арифметическое разностей $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ по всевозможным перестановкам множества $\{\overline{1,n}\}$, причем в каждой перестановке в качестве коалиции S выступает множество игроков, расположенных в ней до индекса i.*

• **Пример 18.1.** Найдем с помощью правила 18.1 компоненты вектора Шепли для произвольной кооперативной игры трех лиц $\{1,2,3\}$ с характеристической функцией v, которая задана в $0-1$-редуцированной форме. Полагаем $v(\{1,2\}) = c_3$, $v(\{1,3\}) = c_2$, $v(\{2,3\}) = c_1$. Для любой перестановки π множества $\{1,2,3\}$ и фиксированного индекса $i = 1,2,3$ положим

$$\Delta_\pi(i) = v(S) - v(S \setminus \{i\}),$$

где S — коалиция игроков, расположенных в перестановке π до индекса i включительно. Составим табл. 18.2, в которой указаны все перестановки π игроков $\{1,2,3\}$ и соответствующие им значения разностей $\Delta_\pi(1)$. По правилу 18.1 получаем

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{6}(2 - 2c_1 + c_2 + c_3). \qquad (*)$$

Циклируя в равенстве $(*)$ индексы $1,2,3$, приходим к следующей общей формуле:

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{6}(2 - 2c_i + c_j + c_k), \qquad (18.6)$$

где i,j,k — попарно различные индексы из $\{1,2,3\}$.

Таблица 18.2

π	123	132	213	231	312	321
$\Delta_\pi(1)$	0	0	c_3	$1-c_1$	c_2	$1-c_1$

Например, для игры рынка трех лиц (см. задачу 23) согласно (18.6) находим

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{6}(2 - 2c_1 + c_2 + c_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{q-p}{r-p};$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{6}(2 - 2c_2 + c_1 + c_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{q-p}{r-p};$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{6}(2 - 2c_3 + c_1 + c_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{q-p}{r-p}.$$

Итак, «справедливая» доля продавца составляет более половины общей прибыли (что может быть объяснено его монопольным положением). С другой стороны, как нетрудно подсчитать,

$$\Phi_3(v) - \Phi_2(v) = \frac{r-q}{2(r-p)}.$$

Так как по условию $p < q \leq r$, то $\Phi_3(v) > \Phi_2(v)$, что согласуется со здравым смыслом: покупатель *2* обладает большей «конкурентноспособностью», поэтому его доля общей прибыли должна быть большей, чем доля покупателя *1*.

Замечание. Рассмотренные в данной лекции два принципа оптимальности для кооперативных игр — C-ядро и вектор Шепли — имеют разные «идейные основания». А именно, оптимальность, заключенная в понятии C-ядра, основана на идее *устойчивости* дележа, а оптимальность в форме вектора Шепли — на идее *справедливости* дележа. При этом устойчивость дележа определяется внутренним образом — на языке отношения доминирования дележей; справедливость дележа постулируется внешним образом в форме некоторой системы требований (аксиом). В общем случае вектор Шепли может не принадлежать C-ядру, т.е. указанные принципы оптимальности приводят к *разным* решениям.

4. В заключение рассмотрим полезный способ нахождения вектора Шепли для кооперативных игр, характеристическая функция которых принимает только два значения: 0 и 1 (такие игры называются ***простыми***). Для простой игры $\langle I, v\rangle$ все ее коалиции $S \subseteq I$, для которых $v(s) = 1$, называются ***выигрывающими***. Ясно, что характеристическая функция простой игры полностью определяется перечислением ее выигрывающих коалиций. Будем предполагать здесь, что коалиция, содержащая выигрывающую коалицию, также является выигрывающей. Для простой игры разность $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ будет равна 1 тогда и только тогда, когда S — выигрывающая коалиция, а $S \setminus \{i\}$ — еще не выигрывающая; во всех остальных случаях эта разность будет равна нулю.

Определение. *Пусть π — некоторая перестановка игроков $\{\overline{1,n}\}$. Назовем игрока i* ***ведущим в данной перестановке****, если коалиция игроков $S \setminus \{i\}$, расположенных до него в этой перестановке, не выигрывающая, а коалиция S — выигрывающая.*

На основании правила 18.1 получаем следующее правило.

Правило 18.2. *Для простой игры с характеристической функцией v ее i-я компонента вектора Шепли $\Phi_i(v)$ есть отношение* *числа перестановок, в которых игрок i является ведущим, к общему числу всех перестановок.*

При небольших значениях n подсчет компонент вектора Шепли, основанный на правиле 18.2, удобно осуществлять следующим образом. Выпишем все перестановки множества $\{\overline{1,n}\}$ и в каждой из них отметим ведущего игрока (единственного игрока, который «превращает» невыигрывающую коалицию игроков, стоящих в этой перестановке *до него*, в выигрывающую). Подсчитывая для каждого фиксированного i число перестановок, в которых игрок i является ведущим, определяем i-ю компоненту вектора Шепли $\Phi_i(v)$. Используем указанный прием для решения следующей задачи.

Задача 25. *Оценка «силы» держателей акций.*

Акции некоторой акционерной компании распределены между четырьмя акционерами, причем акционер *1* обладает 10% всех акций, акционер *2* — 20%, акционер *3* — 30% и акционер *4* — 40%. На общем собрании акционеров решение принимается по правилу простого большинства (одна акция равна одному голосу). Найти оценку «силы» акционеров при данной схеме голосования.

Решение. Выпишем все перестановки игроков $\{1, 2, 3, 4\}$ и в каждой из них отметим ведущего игрока (т.е. игрока, присоединение которого ко всем предыдущим «создает» более половины голосов, см. табл. 18.3).

Таблица 18.3

$12\underline{3}4$	$124\underline{3}$	$13\underline{4}2$	$23\underline{4}1$
$23\underline{1}4$	$2\underline{4}13$	$3\underline{4}12$	$3\underline{4}21$
$31\underline{2}4$	$41\underline{2}3$	$41\underline{3}2$	$4\underline{2}31$
$32\underline{1}4$	$4\underline{2}13$	$4\underline{3}12$	$4\underline{3}21$
$21\underline{3}4$	$21\underline{4}3$	$31\underline{4}2$	$32\underline{4}1$
$13\underline{2}4$	$14\underline{2}3$	$14\underline{3}2$	$2\underline{4}31$

Находим:

игрок *1* является ведущим в двух перестановках;

игрок *2* является ведущим в шести перестановках;

игрок *3* является ведущим в шести перестановках;

игрок *4* является ведущим в десяти перестановках.

По правилу 18.2 получаем:

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{12}, \quad \Phi_2(v) = \frac{1}{4}, \quad \Phi_3(v) = \frac{1}{4}, \quad \Phi_4(v) = \frac{5}{12}.$$

Заметим, что вектор Шепли здесь не совпадает с вектором процентного соотношения акций (т. е. «вес Шепли» для игрока не пропорционален числу его акций). Например, игрок *4* имеет вдвое больше акций, чем игрок *2*, однако соотношение их весов Шепли равно $\frac{5}{12} : \frac{1}{4} = 5 : 3$. Еще более примечательным является совпадение «сил» игроков *2* и *3*. Хотя игрок *3* имеет в полтора раза больше акций, чем игрок *2*, у игрока *3* нет никаких преимуществ перед игроком *2*: оба являются ведущими в шести перестановках. Впрочем, совпадение «сил» игроков *2* и *3* видно уже из того факта, что они симметрично входят в выигрывающие коалиции данной игры. В самом деле, выигрывающими коалициями здесь являются: $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$. Перестановка π, меняющая местами игроков *2* и *3*, а всех остальных оставляющая на месте, сохраняет множество выигрывающих коалиций и, следовательно, является автоморфизмом построенной игры.

РЕЗЮМЕ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I. Игра представляет собой математическую модель совместного принятия решения несколькими сторонами (называемых ***игроками*** или ***лицами***), имеющими несовпадающие интересы. Игра общего вида может быть задана в виде следующего набора объектов: $\Gamma = \langle I, (X_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$, где I — множество игроков, X_i — множество стратегий игрока i, f_i — функция выигрыша игрока i. Полагаем далее $I = \{\overline{1, n}\}$. Если каждый игрок $i \in I$ выбрал стратегию $x_i \in X_i$, то складывается ситуация $x = (x_1, \ldots, x_n)$; число $f_i(x)$ представляет собой оценку полезности ситуации x с точки зрения игрока i и в теоретико-игровых терминах называется ***выигрышем игрока i в ситуации*** x. Считается, что целью каждого игрока является максимизация своей функции выигрыша. Так как цели игроков различны, игра представляет собой принятие решения в условиях конфликта.

II. Игра Γ называется ***антагонистической***, если в ней число игроков равно двум и их интересы прямо противоположны. В случае, когда множества стратегий игроков конечны, антагонистическая игра может быть задана матрицей вида $A = \|a_i^j\|$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$), называемой ***матрицей выигрышей*** или ***платежной матрицей***; такая игра обозначается далее через Γ_A. В игре с платежной матрицей A стратегии игрока *1* отождествляются с номерами строк, стратегии игрока *2* — с номерами столбцов, число a_i^j рассматривается как выигрыш игрока *1* и одновременно проигрыш игрока *2* в ситуации (i, j).

Ситуация (i_0, j_0) называется *седловой точкой* в игре Γ_A, если при всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ выполнено двойное неравенство

$$a_i^{j_0} \leq a_{i_0}^{j_0} \leq a_{i_0}^j.$$

Седловая точка может рассматриваться как оптимальное совместное решение в игре Γ_A, где оптимальность ситуации выражается в ее устойчивости: ни один из игроков не заинтересован в одностороннем отклонении от седловой точки, так как при таком отклонении его выигрыш уменьшается. Необходимым и достаточным условием существования в матричной игре Γ_A седловой точки является наличие у нее цены, т. е. выполнение равенства $v_1 = v_2$, где $v_1 = \max_i \min_j a_i^j$, $v_2 = \min_j \max_i a_i^j$.

К сожалению, не всякая матричная игра имеет цену. Этот недостаток можно преодолеть с помощью перехода к смешанным стратегиям, когда каждая чистая стратегия выбирается с некоторой наперед заданной вероятностью. Основным результатом теории матричных игр является теорема фон Неймана, утверждающая, что *всякая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях.*

Под решением матричной игры Γ_A в смешанных стратегиях понимается тройка (x^0, y^0, v_A), где (x^0, y^0) — седловая точка и v_A — цена игры Γ_A в смешанных стратегиях (при этом стратегия x^0 является оптимальной (максиминной) стратегией игрока *1* и y^0 — оптимальной (минимаксной) стратегией игрока *2*). Аналитическое (формульное) решение существует только для игр формата 2×2. Если один из игроков имеет ровно две стратегии, то решение матричной игры может быть найдено графоаналитическим методом. В общем случае нахождение решения матричной игры может быть сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования.

III. Игра Г общего вида называется ***бескоалиционной***, если в ней запрещено образование коалиций игроков. В бескоалиционных играх основным принципом оптимальности является ***принцип равновесия*** (*равновесия в смысле Нэша*), состоящий в следующем. Ситуация игры называется ***ситуацией равновесия***, если при одностороннем отклонении от нее отклонившийся игрок уменьшает (точнее, не увеличивает) свой выигрыш.

Игра, в которой участвуют два игрока и множества их стратегий конечны, называется ***биматричной игрой***. Такая игра может быть задана парой матриц (A, B), где $A = \|a_i^j\|$, $B = \|b_i^j\|$ — матрицы одного формата $n \times m$. При этом в ситуации (i, j) выигрыш игрока *1* равен a_i^j и выигрыш игрока *2* равен b_i^j. Матричную игру можно рассматривать как частный случай биматричной игры, когда $B = -A$. Принцип равновесия является обобщением принципа седловой точки при переходе от класса матричных игр к более широкому классу биматричных игр.

В классе биматричных игр принцип равновесия реализуется в смешанных стратегиях — это важное утверждение есть теорема Нэша, доказанная им в 1951 г.

Задача нахождения ситуаций равновесия биматричной игры в общем случае является достаточно сложной. Для игр небольших форматов нахождение их ситуаций равновесия основано на *свойстве дополняющей нежесткости*, которое позволяет свести нахождение ситуаций равновесия с заданной парой спектров к решению двух систем однородных линейных уравнений.

IV. Если в игре Г общего вида допускается образование коалиций, то ее ситуации равновесия могут не обладать устойчивостью относительно отклонений коалиций игроков. В связи с этим в теории игр рассматриваются различные усиления понятия равновесия, одним из которых является понятие $\mathcal{K}$-устойчивости, где $\mathcal{K}$ — некоторый фиксированный набор коалиций. Содержательно $\mathcal{K}$-устойчивость ситуации означает, что в ней реализуется «баланс интересов и возможностей» для всех коалиций $S \in \mathcal{K}$. При этом, если $\mathcal{K}$ состоит из всех 1-элементных коалиций игры, то ее $\mathcal{K}$-устойчивость «превращается» в равновесие по Нэшу; если $\mathcal{K}$ состоит из единственной коалиции всех игроков, то $\mathcal{K}$-устойчивость ситуации эквивалентна ее оптимальности по Парето.

Для биматричной игры существует единственная нетривиальная коалиция — коалиция обоих игроков $\{1, 2\}$. В такой игре $\mathcal{K}$-устойчивость ситуации для $\mathcal{K} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ означает, что эта ситуация является одновременно ситуацией равновесия по Нэшу и оптимальной по Парето. Однако в биматричной игре может иметься ситуация равновесия по Нэшу, которая не является оптимальной по Парето — это обстоятельство называется ***противоречием между выгодностью и устойчивостью***.

Если руководствоваться только идеей выгодности ситуации для коалиции $\{1, 2\}$, то игра теряет свой стратегический смысл и превращается в разновидность задачи двухкритериальной оптимизации, где критериями служат функции выигрыша игроков. В этом случае нахождение оптимального решения биматричной игры сводится к выбору исхода из множества Парето-оптимальных исходов. Нэшем была предложена система аксиом, которая для любой биматричной игры определяет единственный оптимальный исход в множестве ее оптимальных по Парето исходов; это решение называется ***арбитражным решением Нэша.*** Арбитражное решение Нэша может быть реализовано некоторым вероятностным распределением на множестве чистых стратегий коалиции $\{1, 2\}$.

V. Кооперативный аспект игры связан с возможностью образования в ней коалиций. Формально ***коалиция*** в игре Γ общего вида с множеством игроков I определяется как произвольное подмножество $S \subseteq I$. Если допустить для игры Γ возможность образования в ней любых коалиций, возможность выбора членами коалиции любых совместных действий, а также возможность любого распределения суммарного выигрыша коалиции между составляющими ее игроками, то получается ***классическая кооперативная игра.***

Зафиксируем в игре Γ некоторую коалицию $S \subseteq I$. Пусть $v_\Gamma(S)$ — наибольший гарантированный суммарный выигрыш игроков коалиции S, который она в состоянии получить в самых неблагоприятных для нее условиях, когда остальные игроки объединяются в коалицию $I \setminus S$ с противоположными интересами. Число $v_\Gamma(S)$ является простой, но весьма важной характеристикой возможностей коалиции S в игре Γ. Отображение, которое каждой коалиции $S \subseteq I$ ставит в соответствие число $v_\Gamma(S)$, называется ***характеристической функцией игры*** Γ. Основные свойства характеристической функции v_Γ:

1) $v_\Gamma(\varnothing) = 0$ (*персональность*);

2) $v_\Gamma(S_1 \cup S_2) \geq v_\Gamma(S_1) + v_\Gamma(S_2)$ для $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ (*супераддитивность*).

Всякая функция v, определенная на всех подмножествах множества I и обладающая свойствами персональности и супераддитивности, называется (абстрактной) ***характеристической функцией*** над множеством I. Некоторые задачи теории игр приводят к построению характеристической функции безотносительно игры Γ. Пара $\langle I, v\rangle$, где I — произвольное множество и v — характеристическая функция над множеством I, называется ***кооперативной игрой.***

VI. Свойство супераддитивности характеристической функции имеет ясный экономический смысл — оно отражает эффект кооперации, состоящий в том, что суммарные возможности коалиции превосходят сумму возможностей составляющих ее членов.

В частности, для коалиции всех игроков I выполняется неравенство $v(I) \geq \sum_{i \in I} v(i)$ (случай равенства означает отсутствие кооперативного эффекта и приводит к ***несущественной*** кооперативной игре).

Для существенной кооперативной игры положительная величина $v(I) - \sum_{i \in I} v(i)$ может быть интерпретирована в экономических терминах как дополнительная прибыль, полученная участниками игры за счет их кооперации. При этом возникает важная задача оптимального («правильного») распределения этой дополнительной прибыли между игроками. В данном курсе рассматриваются два подхода к решению этой задачи: первый подход основан на идее *устойчивости* распределения и формализуется в понятии C-ядра; в основу второго подхода положена идея *справедливости* распределения, которая формализуется в понятии *вектора Шепли.*

Первый шаг при определении оптимального распределения состоит в формулировке бесспорных требований к такому распределению; эти требования включают в себя *индивидуальную рациональность* (состоящую в том, что каждый игрок должен получить не меньше того, что он может получить самостоятельно), и *коллективную рациональность* (сводящуюся к оптимальности по Парето). Распределение, удовлетворяющее условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется ***дележом***. Однако для существенной кооперативной игры имеется бесконечное множество дележей (для игры n лиц оно может быть отождествлено с симплексом n-компонентных вероятностных векторов). Поэтому второй шаг при определении оптимального распределения должен состоять в сужении множества дележей (в идеале — до одного дележа). Разные методы осуществляют указанный шаг по-разному.

Сформулируем два принципа выбора дележа — принцип C-ядра и принцип Шепли.

VII. ***Принцип С-ядра*** основан на введении отношения доминирования дележей. Доминирование дележа x дележом y по коалиции S содержательно означает, что, во-первых, для каждого члена коалиции S дележ y лучше, чем дележ x, и, во-вторых, что коалиция S может обеспечить дележ y своими силами, независимо от действий других игроков. Предположим, что реализуется (или предлагается к реализации) дележ x и вместе с тем дележ y доминирует дележ x по коалиции S. Тогда коалиция S, будучи заинтересованной в замене дележа x дележом y и имеющая возможность обеспечить дележ y, выступает в качестве потенциальной угрозы осуществлению дележа x. Если мы хотим найти такое распределение, которому не угрожает ни одна коалиция, то следует ограничиться ***недоминируемыми*** дележами, которые и составляют C-ядро кооперативной игры. В экономических терминах выбор дележа из C-ядра можно интерпретировать как «предостережение от экономического сепаратизма».

К сожалению, принцип C-ядра обладает рядом недостатков. Основные из них: а) для некоторых кооперативных игр C-ядро оказывается пустым; б) в случае непустоты C-ядро содержит, как правило, множество дележей.

VIII. ***Принцип Шепли*** является аксиоматическим принципом оптимальности. Решение определяется здесь как отображение, которое каждой кооперативной игре вида $\langle I, v\rangle$ ставит в соответствие n-компонентный вектор $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v))$ (где $n = |I|$), причем на это отображение накладывается ряд условий (аксиом), совокупность которых формализует понятие «справедливого» дележа. Приведем эти аксиомы в их содержательной трактовке.

(A1) *Аксиома симметрии* требует, чтобы игроки, входящие в игру симметрично (являющиеся взаимозаменяемыми), получали одинаковые выигрыши.

(A2) *Аксиома эффективности* означает, что распределению подлежит *вся* сумма (полезность), находящаяся в распоряжении коалиции I всех игроков.

(A3) *Аксиома болвана* постулирует, что игрок, который ничего не вносит ни в одну коалицию, ничего не получает при распределении.

(A4) *Аксиома агрегации* (*линейности*) сводится к тому, что при участии игрока в двух играх его выигрыши должны складываться.

Следует отметить, что аксиомы (A1)–(A3) являются естественными требованиями, возникающими при формализации понятия справедливости дележа. Менее естественным является требование, выражаемое аксиомой (A4). В настоящее время в теории игр разрабатываются различные модификации системы аксиом (A1)–(A4) [45].

Теорема, доказанная Шепли в 1953 г., утверждает, что *существует, и притом только одна, функция Φ, определенная на классе всех кооперативных игр и удовлетворяющая системе аксиом* (A1)–(A4). Эта функция называется ***функцией Шепли***, а вектор

$\Phi(v) = (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ — ***вектором Шепли*** для кооперативной игры с характеристической функцией v. При этом вектор $\Phi(v)$ всегда является дележом в игре $\langle I, v\rangle$.

Явное описание компонент вектора Шепли имеет следующий вид: i-я компонента вектора Шепли есть среднее арифметическое всех «вкладов», которые игрок i вносит в коалиции, к которым он присоединяется. (При этом вероятность присоединения игрока i к коалиции S совпадает с вероятностью того, что в случайной перестановке всех игроков множество тех, которые окажутся в этой перестановке *до* игрока i, есть, в точности, множество S.)

В общем случае вектор Шепли может не принадлежать C-ядру, даже если последнее не пусто; таким образом концепция *устойчивости* дележа (на которой основан принцип C-ядра) и концепция *справедливости* дележа (на которой основан принцип Шепли) расходятся между собой.

IX. Кратко охарактеризуем задачи, приведенные в части III.

***Задачи* 16 *и* 19** служат иллюстрацией конфликтов определенного типа между принимающим решение и природой; подробный анализ задач такого рода содержится в [7]. Постановка ***Задачи* 17** взята из [7]; там же содержится обобщение данной задачи на неантагонистический случай. ***Задача* 18** имеет иллюстративный характер и рассмотрена во многих учебниках по теории игр. ***Задача* 20** связана с моделями перераспределения ресурсов, которые нашли широкое применение в анализе «локальных» и «глобальных» характеристик экономической системы. Понятие экономического равновесия введено франко-швейцарским экономистом Леоном Вальрасом. ***Задача* 21** заимствована из учебника [4]. ***Задача* 22** иллюстрирует арбитражное решение Нэша, впервые рассмотренное им при решении так называемой *задачи о торге* [12]. ***Задача* 23** является одной из простейших задач, относящихся к «играм рынка», которые описаны во многих учебных пособиях по приложениям теории игр, см., например, [19]. ***Задача* 24** дает способ нахождения C-ядра кооперативной игры трех лиц. ***Задача* 25** иллюстрирует правило нахождения вектора Шепли для простой игры.

X. Упражнения.

1. Две конкурирующие фирмы могут выставить на продажу по одному из трех видов товаров $\{K, M, H\}$. При этом имеют место следующие доминирования: $M \succ K$, $K \succ H$, $H \succ M$. Если фирмы выставляют на продажу товары *разных* видов, то фирма, которая выставила доминирующий товар, получает прибыль в 1 денежную ед., а другая имеет убыток в 1 денежную ед. Если же обе фирмы выставляют на продажу товар *одного* вида, то они лишь покрывают убытки (прибыль равна нулю).

Составьте платежную матрицу игры. (Найдите ее нижнюю и верхнюю цену; убедитесь, что игра не имеет седловой точки).

Примечание. Описанная ситуация представляет собой разновидность известной игры «камень–мешок–ножницы» (мешок «побеждает» камень, камень «побеждает» ножницы, ножницы «побеждают» мешок).

2. Конкурирующие фирмы A и B имеют возможность производить изделия одного из пяти видов, которые затем продаются на одном рынке. Доход фирмы A, зависящий от сочетания типов изделий, произведенных обеими фирмами, задан табл. 1. Целью фирмы A является максимизация своего дохода, а целью фирмы B — минимизация дохода конкурирующей фирмы A. В полученной матричной игре найдите все седловые точки и оптимальные стратегии игроков (в чистых стратегиях). Проверьте для полученной игры свойство прямоугольности множества седловых точек (см. следствие 3 теоремы 13.1).

Таблица 1

	1	2	3	4	5
1	0	6	15	6	10
2	13	6	5	3	8
3	11	7	8	7	9
4	4	5	16	6	14
5	8	7	17	7	7

3. Фирмы A и B продают на одном рынке изделия одного из видов $\overline{1,n}$, где $n \geq 2$. Если обе фирмы продают изделия *разных* видов, то фирма A имеет доход в 1 денежную ед., а если изделия оказываются *одного* вида, то фирма A несет убытки в 1 денежную ед. Считая, что целью фирмы A является максимизация дохода, а целью фирмы B является разорение конкурента, составьте платежную матрицу игры.

Проверьте, что:

а) равномерно распределнные стратегии игроков являются их оптимальными смешанными стратегиями;

б) цена игры в смешанных стратегиях равна $(n-2)/n$.

4. Фирмы A и B могут вложить свой капитал в производство товаров различных видов (в любой пропорции). Прибыль фирмы A, зависящая от сочетания типов произведенных товаров, определяется табл. 2. Считаем, что цель фирмы A состоит в максимизации своей прибыли, а цель фирмы B — в разорении конкурирующей фирмы A.

Найдите оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры. Дайте истолкование оптимальных стратегий в терминах распределения капиталов обеих фирм.

Таблица 2

	1	2	3	4
1	3	2	4	0
2	3	4	2	4
3	4	2	4	2
4	0	4	0	8

Указание. Используйте правило удаления доминируемых стратегий (правило 14.3) и аналитический метод нахождения решения матричной игры.

5. Фермер может засеять поле культурами K_1 и K_2. Доход фермера, зависящий от сочетания погодных факторов, определяется табл. 3.

Таблица 3

	1	2	3
K_1	6	4	2
K_2	1	3	7

Рассматривая табл. 3 как игру фермера с природой, найдите ее решение в смешанных стратегиях и дайте истолкование полученного решения в терминах физической смеси стратегий.

Указание. Используйте графоаналитический метод (см. лекцию 14, п. 2).

6. Найдите решение задачи выбора момента поступления товара на рынок для случая $n = 5$ (задача 17).

Указание. Исключите доминируемые стратегии.

7. Найдите решение задачи инспекции предприятий торговли (задача 19) при следующих значениях величин q_i: $q_1 = 9$, $q_2 = 8$, $q_3 = 6$, $q_4 = 4$, $q_5 = 2$.

8. Две фирмы A и B могут продавать товары различных типов. Прибыль каждой фирмы при любом сочетании представленных на продажу товаров зависит от того, являются ли эти товары конкурирующими или взаимнодополнительными, и определяется табл. 4 и табл. 5:

Таблица 4

A	b_1	b_2
a_1	1	5
a_2	3	2

Таблица 5

B	b_1	b_2
a_1	6	1
a_2	2	3

В полученной биматричной игре найдите ситуации равновесия по Нэшу. Дайте истолкование полученного решения.

9. Два предприятия по обслуживанию населения предлагают жителям некоторого населенного пункта, имеющего N потенциальных клиентов, набор услуг $\overline{1, n}$. Если первое предприятие предлагает i-ю услугу, а второе предприятие — j-ю услугу, то доля клиентов, пользующихся услугой i, равна p_{ij}, а остальные клиенты выбирают услугу j. Выигрышем предприятия считается число его клиентов.

а) Покажите, что полученная биматричная игра эквивалентна некоторой матричной игре.

б) Составьте математическую модель описанного конфликта для матрицы $P = \|p_{ij}\|$, заданной табл. 6, считая, что $N = 1000$.

Таблица 6

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 & 0,6 & 0,5 \\ 0,4 & 0,5 & 0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

в) Найдите решение полученной матричной игры в смешанных стратегиях, комбинируя аналитический метод с отбрасыванием доминируемых стратегий.

10. Организация состоит из председателя 1 и $n-1$ рядовых членов $\overline{2,n}$. По уставу организации решение принимается, если *за* голосует председатель плюс (по крайней мере) один голос, либо если *за* голосуют все рядовые члены.

Опишите все выигрывающие коалиции получающейся кооперативной игры $\langle I, v\rangle$. Покажите, что компоненты вектора Шепли для указанного правила голосования таковы:

$$\Phi_1(v) = \frac{n-2}{n}, \quad \Phi_i(v) = \frac{2}{n(n-1)} \quad \text{для} \quad i = \overline{2,n}.$$

11. Оцените «силу» держателей акций в задаче 25, если решение будет приниматься квалифицированным большинством (не менее 2/3 голосов).

12. Имеется одно «большое» предприятие и $n-1$ «малых» предприятий, которые сбрасывают в бассейн загрязненную воду. Если воду сбрасывают только «малые» предприятия (в любом числе), либо одно «большое», то вода в бассейне самоочищается и загрязнения не происходит. Если же воду сбрасывает «большое» предприятие и k «малых» предприятий, то концентрация вредных примесей будет пропорциональна $k/(k+1)$, где $1 \le k \le n-1$.

Считая, что штраф за загрязнение бассейна пропорционален концентрации вредных примесей, найдите «справедливое» распределение штрафа между всеми предприятиями, взяв в качестве вектора «справедливого» распределения вектор Шепли.

ЛИТЕРАТУРА: [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 43, 44, 45, 48].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Произошедшее за последние десятилетия бурное развитие ряда математических теорий, относящихся к математической кибернетике (прежде всего — исследования операций и теории игр), наложило отпечаток и на дисциплины экономического характера. Без освоения понятий, методов и результатов этих теорий невозможно понимание современных подходов к экономике. Вместе с тем, существует весьма ощутимый разрыв между уровнем изложения современных экономических концепций в научной литературе и уровнем их освещения в учебной литературе, предназначенной для студентов экономических специальностей. Преодоление указанного разрыва — исключительно важная задача экономического образования.

В данном учебном пособии представлен раздел математической экономики, который связан с построением и исследованием математических моделей принятия экономических решений. Автор ограничивается рассмотрением задач принятия решений, возникающих в микроэкономических ситуациях, главным образом, на уровне фирмы.

2. Дадим краткое описание типов рассматриваемых здесь задач принятия экономических решений и соответствующего математического аппарата.

А) В экономике часто возникает ситуация, когда имеется множество планов, позволяющих выполнить определенное задание; такие планы называются ***допустимыми.*** В этом случае возникает задача выбора из всех допустимых планов наилучшего в некотором смысле (оптимального) плана. С математической точки зрения эта задача может быть сведена к нахождению экстремума некоторой функции, заданной на множестве допустимых планов. В результате получается *задача оптимизации при наличии ограничений*, причем с экономической точки зрения эти ограничения выражают условия ограниченности ресурсов.

Б) При оценке окончательного результата, как правило, приходится учитывать несколько показателей (критериев), которые невозможно свести к одному показателю. Это явление, называемое ***многокритериальностью***, является характерным для большинства экономических задач, возникающих как на микро- так и на макроуровне. Математический аппарат, с помощью которого анализируются задачи многокритериальной оптимизации, находится в стадии становления. Некоторые важные подходы, разработанные в теории многокритериальной оптимизации: доминирование по Парето, способы учета дополнительной информации о соотношении критериев между собой, аксиоматические методы, нашли отражение в данном пособии.

В) Бóльшая часть курса отведена рассмотрению математических моделей принятия решений при неопределенности или риске. При управлении предприятием в условиях рыночной экономики наличие множества неопределенных факторов является характерным (действия конкурентов, изменение цен на ресурсы, поведение потребителей, колебания спроса на рабочую силу и т.п.); в кибернетических терминах сочетания этих факторов образуют «среду», состояния которой необходимо учитывать при принятии экономических решений.

Крайний случай при принятии решения в условиях неопределенности — полное отсутствие информации о состоянии среды — является для экономических задач нехарактерным. Более типичной при принятии экономических решений является ситуация, когда имеется информация стохастического типа о возможностях наступления тех или иных состояний среды. Соответствующий класс задач принятия решений называется *задачами принятия решений в условиях риска*; их исследование базируется на теории вероятностей.

Г) Частным случаем неопределенности является целенаправленная неопределенность, вызванная действиями других сторон, преследующих собственные цели (например, действия конкурирующей фирмы). Математические модели таких конфликтов называются *играми*; они изучаются средствами теории игр.

3. Современная теория принятия решений (разрабатываемая, главным образом, в рамках исследования операций и теории игр), является математической дисциплиной, активно использующей математические методы и соответствующий математический аппарат. Это обстоятельство служит надежным «барьером», препятствующим «проникновению» в эту теорию тех, кто не владеет современными математическими знаниями. Чтобы сделать пособие доступным лицам, не имеющим специальной математической подготовки, автору пришлось, во-первых, ограничить класс рассматриваемых моделей принятия решений; во-вторых, «сместить акценты» с проблем математических на содержательное истолкование результатов; в-третьих, привести значительное число примеров иллюстративного характера. Этим же обусловлена и структура книги: лекционная форма изложения, когда материал излагается «с начала и до конца», — является наиболее апробированной и удобной для начинающих.

4. Важность умения принимать «правильные» решения при управлении предприятием, особенно в условиях рыночной экономики, не требует доказательств. Вопрос не в том, нужно ли уметь принимать правильные решения, а в том, *нужна ли для этого математическая теория* и нельзя ли принимать хорошие решения, полагаясь только на опыт, интуицию и здравый смысл?

Ответ на этот вопрос не столь прост, как это может показаться с первого взгляда. Дело в том, что при использовании для принятия решений метода математического моделирования необходимо реализовать несколько этапов. Первый этап — построение самой математической модели, которая всегда является некоторым упрощением, огрублением реальной ситуации. Следующий этап — выбор определенного принципа оптимальности. Наконец, даже при фиксированном принципе оптимальности оптимальных решений может быть несколько; поэтому приходится выбирать одно из них, основываясь на некоторых дополнительных соображениях содержательного характера, не отраженных в построенной математической модели.

Так не проще ли сразу выбрать «хорошее» решение, основываясь на здравом смысле? Немного по-другому этот вопрос может быть переформулирован в виде: «Что дает теория принятия решений для практики принятия решений (в частности, в области экономики)?»

Безусловно, следует сразу отвергнуть ответ, что «теория дает самое лучшее решение» — такого решения в большинстве сложных ситуаций просто не существует. Однако, теория, по меньшей мере, указывает, *чего не надо делать*, т.е. «отсеивает» заведомо худшие варианты, предохраняя тем самым от грубых ошибок. Далее, теория выявляет характер дополнительной информации, на базе которой может быть произведено дальнейшее сужение множества альтернатив и нахождение в нем оптимальной альтернативы. Наконец, освоение аппарата логико–математического анализа задач принятия решений позволяет принимающему решение глубже проникнуть в существо проблемы, которая стоит перед ним.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Браверман Э. М.* Математические модели планирования и управления в экономических системах. — М.: Наука, 1976.
2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972.
3. *Вилкас Э. Й., Майминас Е. З.* Решения: теория, информация, моделирование. — М.: Радио и связь, 1981.
4. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985.
5. *Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И.* Микроэкономика, т. 1. — СПб.: Изд-во Экономическая школа, 1998.
6. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: ИЛ, 1963.
7. *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр (серия экономико-математическая библиотека). — М.: Наука, 1981.
8. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975.
9. *Канторович Л. В., Горстко А. Б.* Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972.
10. *Карр Ч., Хоув Ч.* Количественные методы принятия решений в управлении и экономике. — М.: Мир, 1966.
11. *Ланге О.* Оптимальные решения. — М.: Прогресс, 1967.
12. *Льюс Р.Д. , Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. — М.: ИЛ, 1961.
13. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985.
14. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972.
15. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: ИНФРА, 1994.

16. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А.* Теория игр. — М.: Книжный дом «Университет», 1998.

17. *Экланд И.* Элементы математической экономики. — М.: Мир, 1983.

Дополнительная

18. *Боков О. Г.* Введение в теорию рыночного ценообразования. — Саратов: Изд-во сельхоз. академии, 1995.

19. *Бондарева О. Н.* О теоретико-игровых моделях в экономике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.

20. *Брахман Т. Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. — М.: Радио и связь, 1984.

21. *Варшавский В. И., Поспелов Д. А.* Оркестр играет без дирижера. — М.: Наука, 1984.

22. *Вилкас Э. Й.* Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990.

23. Вопросы анализа и процедуры принятия решений// ред. *И. Ф. Шахнов.* — М.: Мир, 1976.

24. *Воробьев Н. Н.* Приложения теории игр. — Тр. II Всес. конференции по теории игр. Вильнюс: Изд-во ин-та физики и матем., 1971.

25. *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экономике. — М.: Наука, 1986.

26. *Горелик В. А., Кононенко А. Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого–экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982.

27. *Гроот М.* Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.

28. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.

29. *Кини Р., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.

30. *Кирута А. Я., Рубинов А. М., Яновская Е. Б.* Оптимальный выбор распределений в сложных социально–экономических задачах. — Л.: Наука ЛО, 1980.

31. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 1998.

32. *Крушевский А. В.* Теория игр. — Киев: Вища школа, 1977.

33. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. — М.: Изд-во МГУ, 1984.

34. *Лamперт Х.* Социальная рыночная экономика. — М.: Изд. Дело, 1993.

35. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.

36. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973.

37. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. — М.: Экономика, 1975.

38. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974.

39. Многокритериальные задачи принятия решений // ред. *Д. М. Гвишиани и С. В. Емельянов.* — М.: Изд-во Машиностроение, 1978.

40. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979.

41. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

42. *Одинец В. П., Тарасевич В. М., Цацулин А. Н.* Рынок, спрос, цены: стратификация, анализ, прогноз. — СПб.: Изд-во ун-та экономики и финансов, 1993.

43. *Оуэн Г.* Теория игр. — М.: Мир, 1971.

44. *Петросян Л. А., Захаров В. В.* Введение в математическую экологию. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.

45. *Печерский С. Л., Соболев А. И.* Проблема оптимального распределения в социально-экономических задачах и кооперативные игры. — Л.: Наука ЛО, 1983.

46. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982.

47. *Райфа Г.* Анализ решений. — М.: Наука, 1977.

48. *Розен В. В.* Цель — оптимальность — решение. — М.: Радио и связь, 1982.

49. *Юдин Д. Б., Юдин А. Д.* Экстремальные модели в экономике. — М.: Экономика, 1979.

Учебное издание

Розен Виктор Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Редактор *Яковлева Ж. И.*
Художник *Макух Т. А.*
Компьютерная верстка *Шишкова М. А.*

Сдано в набор 20.06.99. Подписано в печать 22.03.2002
Формат 84x108/32. 9 печ. л.
Печать офсетная. Бумага офсетная
Тираж 5000 экз. Заказ № 2231

ООО «Книжный дом «Университет»
119234, Москва, а/я 587
Тел/факс: (095) 939-40-36, 939-40-51
E-mail: kdu@kdu.ru. Http://www.kdu.ru

ФГУП «Издательство «Высшая школа»
127994, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14
Факс: (095) 200-03-01, 200-06-87
E-mail: info@v-shkola.ru. Http://www.v-shkola.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП ИПК
«Ульяновский Дом печати». 432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14