

УРСС

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М.Л.Краснов

А.И.Киселев

Г.И.Макаренко

Е.В.Шикин

В.И.Заляпин

С.К.Соболев

4

ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**М.Л.Краснов
А.И.Киселев
Г.И.Макаренко
Е.В.Шикин
В.И.Заляпин
С.К.Соболев**

4

**Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений**



Эдиториал УРСС • Москва • 2001

ББК 22.1я73

**Краснов Михаил Леонтьевич, Киселев Александр Иванович,
Макаренко Григорий Иванович, Шижив Евгений Викторович,
Заляпин Владимир Ильич, Соболев Сергей Константинович**

Все высшая математика: Учебник. Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 352 с.

ISBN 5-8360-0154-5

Предлагаемый учебник впервые вышел в свет в виде двухтомника сначала на английском и испанском языках в 1990 году, а затем на французском. Он пользуется большим спросом за рубежом.

В 1999 году книга стала лауреатом конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России.

Этот учебник адресован студентам высших учебных заведений (в первую очередь будущим инженерам и экономистам) и охватывает практически все разделы математики, но при этом представляет собой не набор разрозненных глав, а единое целое.

Четвертый том включает в себя материал по векторному анализу, теории функций комплексного переменного, дифференциальным уравнениям с частными производными и некоторым разделам математического анализа (кратные и криволинейные интегралы, интегралы, зависящие от параметра).

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Администратор — Леонид Иосилевич
Главный редактор — Елена Кудряшова
Компьютерный дизайн — Виктор Романов, Василий Подобед
Верстка — Василий Подобед, Наталия Бекетова
Редакция — Василий Подобед
Корректурные работы — Лариса Кирляшкина, Марина Косарева
Указатель — Василий Подобед, Андрей Стулов
Обработка графики — Василий Подобед
Дизайн обложки — Ирина Макеева
Техническая поддержка — Наталья Аринчева
Набор — Анна Тюрина, Марина Круцко
Менеджер по продажам — Алексей Петяев

Издательство «Эдиториал УРСС». 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. п.
Лицензия ИД № 03216 от 10.11.2000 г. Гигиенический сертификат на выпуск книжной
продукции № 77.ФЦ.8.953.П.270.3.99 от 30.03.99 г. Подписано к печати 21.12.2000 г.
Формат 70×100/16. Тираж 2500 экз. Печ. л. 22. Зак. № 178.

Отпечатано в АОТ «Политех-4». 129110, г. Москва, ул. Б. Переяславская, 46.



ISBN 5-8360-0150-2 (Полное произведение)
ISBN 5-8360-0154-5 (Том 4)

© Эдиториал УРСС, 2000

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на то нет письменного разрешения Издательства.



Эдиториал УРСС
научная и учебная литература

Тел./факс: 7(095)135-44-23
Тел./факс: 7(095)135-42-46
E-mail: urss@urss.ru
Каталог изданий в Internet: <http://urss.ru>

Оглавление

Глава XXVI. Кратные интегралы. Двойной интеграл	3
Глава XXVII. Криволинейные интегралы	44
Глава XXVIII. Векторный анализ	62
Глава XXIX. Интегралы, зависящие от параметра	125
Глава XXX. Функции комплексного переменного	140
Глава XXXI. Преобразование Фурье	205
Глава XXXII. Преобразование Лапласа	222
Глава XXXIII. Общие сведения о дифференциальных уравнениях с частными производными	245
Глава XXXIV. Уравнения гиперболического типа	253
Глава XXXV. Уравнения параболического типа	291
Глава XXXVI. Уравнения эллиптического типа	306
Приложение. Конформные отображения	321

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла.

Определение двойного интеграла

К понятию двойного интеграла мы приходим, решая конкретную задачу вычисления объема цилиндрического тела.

Цилиндрическим телом называется тело, ограниченное плоскостью xOy , некоторой поверхностью

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси (см. рис. 1). Область D изменения переменных x и y называется *основанием* цилиндрического тела.

При определении объема тела будем исходить из двух принципов:

1) если разбить тело на части, то его объем равен сумме объемов всех частей (свойство *аддитивности*);

2) объем прямого цилиндра, ограниченного плоскостью $z = \text{const}$, параллельной плоскости xOy , равен площади основания, умноженной на *высоту*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что область D является *связной* (состоящей из одного куска), *квадрируемой* (т. е. имеющей площадь) и *ограниченной* (т. е. расположенной внутри некоторого круга с центром в начале координат).

Пусть

$$z = f(x, y)$$

— непрерывная функция точки $P(x, y)$ в области D и $f(x, y) \geq 0$ всюду в области D , т. е. что рассматриваемая цилиндрическая поверхность целиком лежит над плоскостью xOy . Обозначим объем цилиндрического тела через V .

Разобьем область D — основание цилиндрического тела — на некоторое число n непересекающихся квадрируемых областей произвольной формы; будем называть их *частичными областями*. Пронумеровав частичные области в каком-нибудь порядке,

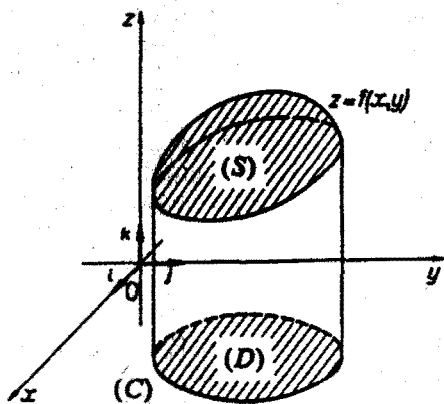


Рис. 1

обозначим их через

$$D_1, D_2, \dots, D_n,$$

а их площади — через

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$$

соответственно. Назовем *диаметром* частичной области D_k величину

$$\text{diam } D_k = \sup_{P, Q \in D_k} \rho(P, Q),$$

где символ $\rho(P, Q)$ означает расстояние между точками P и Q . Обозначим через d наибольший из диаметров частичных областей D_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Проведем через границу каждой частичной области цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . В результате цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел. Заменяем k -ое частичное тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной аппликате какой-нибудь точки заменяемой поверхности (рис. 2). Объем такого цилиндра равен

$$\Delta V_k = f(P_k) \Delta S_k,$$

где точка $P_k(x_k, y_k) \in D_k$, а ΔS_k — площадь области D_k .

Проделав описанные построения для каждого частичного цилиндрического тела, получим n -ступенчатое тело, объем которого

$$V_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k. \quad (1)$$

Интуитивно ясно, что V_n тем точнее выражает искомый объем V , чем меньше размеры частичных областей D_k .

Принимаем объем V цилиндрического тела равным пределу, к которому стремится объем (1) n -ступенчатого тела при $n \rightarrow \infty$ и стремлении к нулю наибольшего диаметра d частичных областей D_k . Естественно, предел не должен зависеть от вида разбиения области D на частичные области D_k и от выбора точек P_k в частичных областях.

Пусть $f(x, y)$ — произвольная функция, заданная в области D . Сумма

$$\sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k \quad (1)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D , соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей и данному выбору точек $P_k(x_k, y_k)$ на частичных областях D_k .

Определение. Если при $d \rightarrow 0$ существует предел интегральных сумм

$$\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k,$$

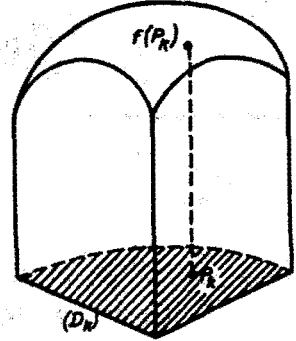


Рис. 2

не зависящий ни от способа разбиения области D на частичные области, ни от выбора точек P_k в частичных областях, то он называется *двойным интегралом от функции $f(P)$ (или $f(x, y)$) по области D* и обозначается символом

$$\iint_D f(P) dS,$$

или

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Итак,

$$\boxed{\iint_D f(P) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k.} \quad (2)$$

Сама функция $f(x, y)$ при этом называется *интегрируемой в области D* ($f(P)$ — *подынтегральная функция*, $f(P) dS$ — *подынтегральное выражение*, dS — *дифференциал (или элемент) площади*, область D — *область интегрирования*; точка $P(x, y)$ — *переменная точка интегрирования*).

Возвращаясь к цилиндрическому телу, заключаем: объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью xOy , поверхностью $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$), $(x, y) \in D$, и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D , являющейся основанием цилиндрического тела

$$V = \iint_D f(P) dS,$$

или

$$\boxed{V = \iint_D f(x, y) dx dy.}$$

Здесь $dx dy$ — элемент площади в декартовых координатах. Таков геометрический смысл двойного интеграла от неотрицательной функции.

Если $F(P) \leq 0$ в D , то объем

$$\boxed{V = - \iint_D f(P) dS.}$$

Если в области D функции $f(P)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то интеграл

$$\iint_D f(P) dS$$

представляет алгебраическую сумму объемов тех частей тела, которые расположены над плоскостью xOy (берутся со знаком «+»), и тех частей тела, которые расположены под плоскостью xOy (берутся со знаком «-»).

К составлению сумм вида (1) для функции двух независимых переменных и к последующему предельному переходу приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме цилиндрического тела.

Сформулируем достаточные условия интегрируемости.

Теорема 1. *Всякая функция $f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области D , интегрируема в этой области.*

Требование непрерывности подынтегральной функции часто оказывается слишком стеснительным. Для приложений важна следующая теорема, гарантирующая существование двойного интеграла для некоторого класса разрывных функций.

Будем говорить, что некоторое множество точек плоскости, имеет *площадь нуль*, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области D и непрерывна всюду в D , кроме некоторого множества точек площади нуль, то эта функция интегрируема в области D .*

§2. Основные свойства двойного интеграла

Двойные интегралы обладают рядом свойств, аналогичных свойствам определенного интеграла для функций одной независимой переменной.

2.1. Линейное свойство

Если функции $f(P)$ и $\varphi(P)$ интегрируемы в области D , а α и β — любые вещественные числа, то функция $\alpha f(P) + \beta \varphi(P)$ также интегрируема в области D , причем

$$\iint_D [\alpha f(P) + \beta \varphi(P)] dS. \quad (1)$$

2.2. Интегрирование неравенств

Если функции $f(P)$ и $\varphi(P)$ интегрируемы в области D и всюду в этой области

$$f(P) \leq \varphi(P),$$

то

$$\iint_D f(P) dS \leq \iint_D \varphi(P) dS, \quad (2)$$

т. е. неравенства можно интегрировать. В частности, интегрируя очевидные неравенства

$$-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)|,$$

получим

$$-\iint_D |f(P)| dS \leq \iint_D f(P) dS \leq \iint_D |f(P)| dS,$$

или, что то же,

$$\left| \iint_D f(P) dS \right| \leq \iint_D |f(P)| dS.$$

2.3. Площадь плоской области

Площадь плоской области D равна двойному интегралу по этой области от функции, тождественно равной единице. Действительно, интегральная сумма для функции $f(P) \equiv 1$ в области D имеет вид

$$\sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta S_k$$

и при любом разбиении области D на частичные области D_k равна ее площади S . Но тогда и предел этой суммы, т. е. двойной интеграл, равен площади S области D :

$$S = \iint_D dS. \quad (3)$$

2.4. Оценка интеграла

Пусть функция $f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D , пусть M и m — наибольшее и наименьшее значения $f(P)$ в области D и S — ее площадь. Тогда

$$mS \leq \iint_D f(P) dS \leq MS. \quad (4)$$

2.5. Аддитивность

Если функция $f(P)$ интегрируема в области D и область D разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то $f(P)$ интегрируема на каждой из областей D_1 и D_2 , причем

$$\iint_D f(P) dS = \iint_{D_1} f(P) dS + \iint_{D_2} f(P) dS. \quad (5)$$

2.6. Теорема о среднем значении

Теорема 3 (о среднем значении). Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D , то найдется по крайней мере одна точка P_c области D такая, что будет справедлива формула

$$\iint_D f(P) dS = f(P_c) S, \quad (6)$$

где S — площадь области D .

◀ В самом деле, так как $f(P)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D , то она принимает в D свое наибольшее значение M и свое наименьшее значение m . По свойству 4 об оценке интеграла имеем

$$mS \leq \iint_D f(P) dS \leq MS,$$

откуда

$$m \leq \frac{1}{S} \iint_D f(P) dS \leq M.$$

Таким образом, число

$$\frac{1}{S} \iint_D f(P) dS$$

заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(P)$ в области D . В силу непрерывности функции $f(P)$ в области D она принимает в некоторой точке $P_c \in D$ значение, равное этому числу,

$$f(P_c) = \frac{1}{S} \iint_D f(P) dS, \quad (7)$$

откуда

$$\iint_D f(P) dS = f(P_c) \int dS. \blacktriangleright$$

Значение $f(P_c)$, определяемое по формуле (7), называется *средним значением функции $f(P)$ в области D* .

Геометрический смысл теоремы о среднем значении

Если в области D функция $f(P) \geq 0$, то формула (6) означает, что существует прямой цилиндр с основанием D (площадь которого равна S) и высотой $H = f(P_c)$, объем которого равен объему цилиндрического тела (рис. 3).

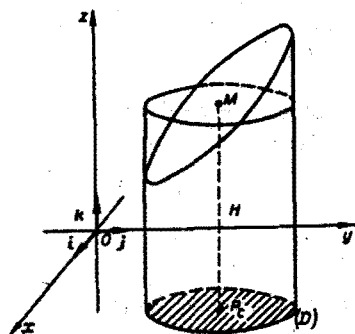


Рис. 3

§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному

Одним из эффективных способов вычисления двойного интеграла является сведение его к повторному.

3.1. Случай прямоугольника

Пусть область D — замкнутый прямоугольник Π со сторонами, параллельными осям координат

$$\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π . Двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

можно интерпретировать как (алгебраический) объем цилиндрического тела с основанием Π , ограниченного поверхностью

$$z = f(x, y).$$

Рассмотрим соответствующее цилиндрическое тело. Проведем плоскость

$$y = y_0, \quad c \leq y_0 \leq d,$$

перпендикулярную оси Oy (рис. 4). Эта плоскость рассечет цилиндрическое тело по криволинейной трапеции ABB_1A_1 , ограниченной сверху плоской линией z , описываемой уравнениями

$$z = f(x, y_0), \quad y = y_0.$$

Площадь трапеции ABB_1A_1 выражается интегралом

$$\int_a^b f(x, y_0) dx, \quad (1)$$

где интегрирование производится по x , а y_0 — второй аргумент подынтегральной функции — рассматривается при этом как постоянный ($c \leq y_0 \leq d$). Величина интеграла (1) зависит от выбора значения y_0 . Положим

$$S(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2)$$

Выражение (2) дает площадь поперечного сечения цилиндрического тела как функции от y . Поэтому объем цилиндрического тела можно вычислить по формуле

$$V = \int_c^d S(y) dy.$$

С другой стороны, этот объем выражается двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику Π . Значит,

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d S(y) dy.$$

Заменяя $S(y)$ его выражением (2), получим

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Последнее соотношение обычно записывается так

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (3)$$

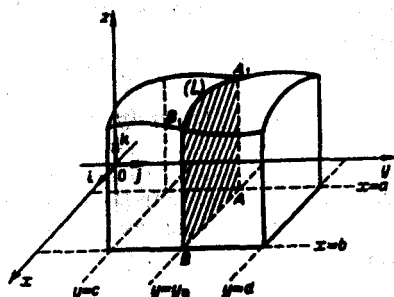


Рис. 4

Объем цилиндрического тела можно отыскать также по площадям сечений плоскостями $x = x_0$. Это приводит к формуле

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (4)$$

Каждое из выражений, стоящих в правых частях формул (3) и (4), содержит две последовательные операции обыкновенного интегрирования функции $f(x, y)$. Они называются *повторными интегралами от функции $f(x, y)$ по области Π* .

Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Π , то переход к повторным интегралам всегда возможен и

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx, \quad (5)$$

т. е. значения повторных интегралов от непрерывной функции $f(x, y)$ не зависят от порядка интегрирования.

Пример 1. Найти двойной интеграл от функции

$$z = x^2 + y^2$$

по области

$$\Pi = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

◀ Имеем (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3.2. Случай произвольной области

Предположим теперь, что областью интегрирования является произвольная ограниченная квадрируемая замкнутая область D на плоскости xOy , удовлетворяющая следующему условию: любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу области D не более чем в двух точках или по целому отрезку (рис. 6а).

Заклучим область D внутри прямоугольника

$$\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

так, как показано на рис. 6б. Отрезок $[a, b]$ является ортогональной проекцией области D на ось Ox , а отрезок $[c, d]$ — ортогональной проекцией области D на ось Oy . Точками A и C граница области D разбивается на две кривые ABC и AEC . Каждая из этих кривых пересекается с произвольной прямой, параллельной оси Oy , не более чем в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в форме, разрешенной относительно y :

$$\begin{aligned} (ABC) : \quad y &= \varphi_1(x), \\ (AEC) : \quad y &= \varphi_2(x), \end{aligned} \quad a \leq x \leq b. \quad (6)$$

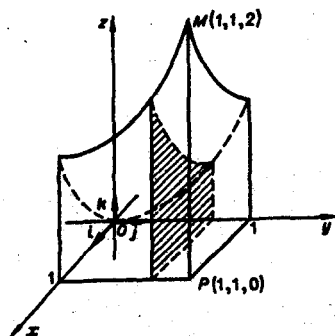


Рис. 5

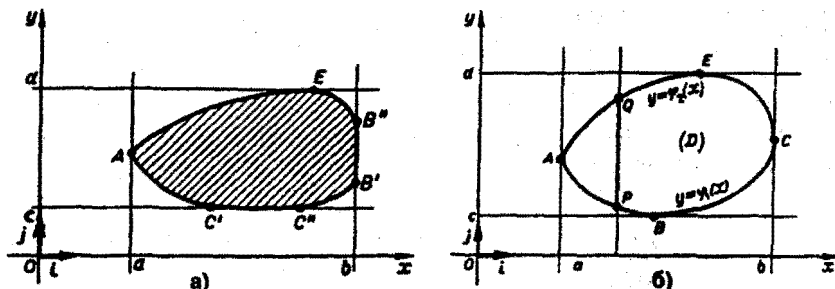


Рис. 6

Пусть $f(x, y)$ — некоторая функция, непрерывная в области D . Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело плоскостью

$$x = \text{const} \quad (a < x < b).$$

В сечении получим криволинейную трапецию $PQMN$ (рис. 7), площадь которой выражается обыкновенным интегралом от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y . При этом переменная y изменяется от ординаты $\varphi_1(x)$ точки P до ординаты $\varphi_2(x)$ точки Q ; точка P есть точка «входа» прямой $x = \text{const}$ (в плоскости xOy) в область D , а Q — точка ее «выхода» из этой области. Так как уравнение кривой ABC есть $y = \varphi_1(x)$, а кривой AEC — $y = \varphi_2(x)$, то эти ординаты при взятом x соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Следовательно, интеграл

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = S(x) \quad (7)$$

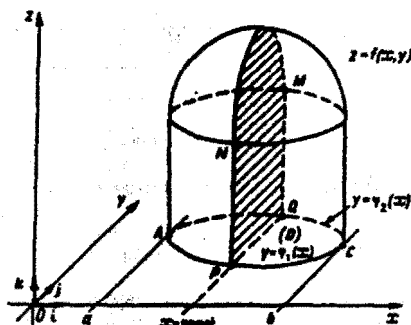


Рис. 7

дает нам выражение для площади плоского сечения цилиндрического тела как функции положения секущей плоскости $x = \text{const}$.

Объем всего тела будет равен интегралу от этого выражения по x в промежутке изменения x ($a \leq x \leq b$).

Таким образом,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8)$$

В частности, для площади S области D получим

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy. \quad (9)$$

Предположим теперь, что каждая прямая

$$y = \text{const} \quad (c \leq y \leq d)$$

пересекает границу области D не более чем в двух точках P и Q , абсциссы которых равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ соответственно (или по целому отрезку) (рис. 8). Проводя аналогичные рассуждения, приходим к формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (10)$$

также сводящей вычисление двойного интеграла к повторному.

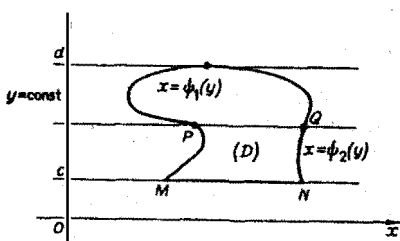


Рис. 8

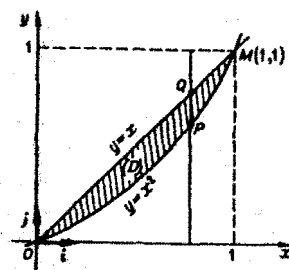


Рис. 9

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции

$$f(x, y) = 2x - y + 3$$

по области D , ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2$ (рис. 9).

◀ **Первый способ.** Изобразим область интегрирования D . Прямая $y = x$ и парабола $y = x^2$ пересекаются в точках $O(0, 0)$ и $M(1, 1)$. Значит, x изменяется в пределах от 0 до 1, а $\psi_1(x) = x^2$ и $\psi_2(x) = x$. Любая прямая $x = \text{const}$ ($0 \leq x \leq 1$) пересекает границу области не более чем в двух точках. Поэтому применима формула (8):

$$\begin{aligned} \iint_D (2x - y + 3) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2x - y + 3) dy = \int_0^1 \left(2xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{x^2}{2} + 3x - 2x^3 + \frac{x^4}{2} - 3x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Второй способ (рис. 10). Применяя формулу (10), получим тот же результат:

$$\iint_D (2x - y + 3) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2x - y + 3) dx = \int_0^1 \left(x^2 - xy + 3x \right) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (3\sqrt{y} - 2y + y^{3/2}) dy = \frac{3}{5}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$z = 1 - 4x^2 - y^2$$

и плоскостью xOy .

◀ **Эллиптический параболоид**

$$z = 1 - 4x^2 - y^2$$

пересекается с плоскостью xOy по линии

$$L: \begin{cases} z = 0, \\ z = 1 - 4x^2 - y^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{1} = 1, \quad z = 0.$$

Это — эллипс с полуосями $a = \frac{1}{2}$ и $b = 1$ (рис. 11).

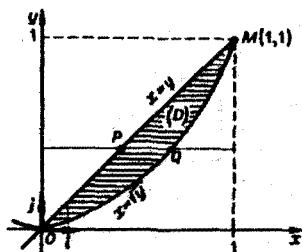


Рис. 10

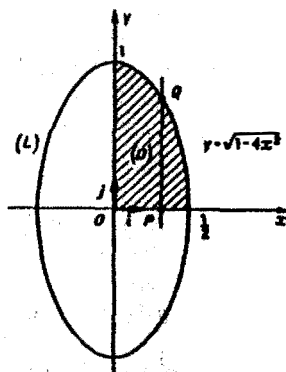


Рис. 11

В силу симметрии данного тела относительно координатных плоскостей xOx и yOz получаем:

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D (1 - 4x^2 - y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1 - 4x^2 - y^2) dy = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1 - 4x^2)y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} 2x = \sin t, & 2 dx = \cos t dt \\ 1 - 4x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \\ x_1 = 0, & t_1 = 0, \\ x_2 = \frac{1}{2}, & t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t}{4} dt = \\ &= \frac{1}{3} (t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \left(t + \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Замечание. Если область D такова, что некоторые прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках, то для вычисления двойного интеграла по области D следует разбить ее подходящим образом на части, свести к повторному какому-либо из интегралов по этим частям и полученные результаты сложить.

Пример 4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D e^{x+y} dx dy$$

по области D , заключенной между двумя квадратами с центрами в начале координат и сторонами, параллельными осям координат, если сторона внутреннего квадрата равна 2, а внешнего — 4.

◀ Функция

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

непрерывна как в большом квадрате Q , сторона которого равна 4, так и в малом квадрате P , сторона которого равна 2 (рис. 12). Согласно теореме 1, интегралы от функции e^{x+y} по указанным квадратам существуют, так что величина искомого интеграла

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \iint_Q e^{x+y} dx dy - \iint_P e^{x+y} dx dy,$$

так как

$$\begin{aligned} \iint_Q e^{x+y} dx dy &= \int_{-2}^2 \left(\int_{-2}^2 e^{x+y} dy \right) dx = \\ &= \int_{-2}^2 e^x dy \int_{-2}^2 e^y dy = e^x \Big|_{-2}^2 \cdot e^y \Big|_{-2}^2 = (e^2 - e^{-2})^2, \end{aligned}$$

$$\iint_P e^{x+y} dx dy = \int_{-1}^1 e^x dx \int_{-1}^1 e^y dy = (e - e^{-1})^2,$$

то

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x+y} dx dy &= (e^2 - e^{-2})^2 - (e - e^{-1})^2 = \\ &= e^4 - 2 + e^{-4} - e^2 + 2 - e^{-2} = 2 \operatorname{ch} 4 - 2 \operatorname{ch} 2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

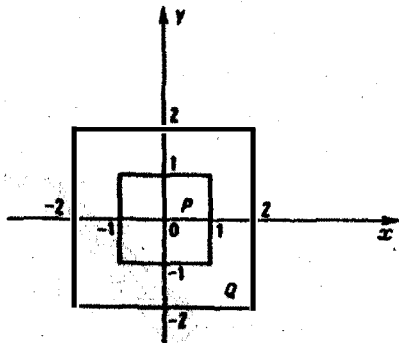


Рис. 12

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле

4.1. Понятие криволинейных координат точки

Пусть в области D^* плоскости uOv задана пара функций

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (1)$$

которые мы будем считать непрерывными в этой области и имеющими непрерывные частные производные. В силу уравнения (1) каждой точке $M^*(u, v)$ области D^* отвечает одна определенная точка $M(x, y)$ в плоскости xOy и тем самым точкам области D^* отвечает некоторое множество D точек (x, y) в плоскости xOy (рис. 13). При этом говорят, что функции (1) осуществляют *отображение* области D^* на множество D .

Предположим, что различным точкам (u, v) отвечают различные точки (x, y) . Это равносильно однозначной разрешимости уравнений (1) относительно u, v :

$$\begin{cases} u = g(x, y), \\ v = h(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

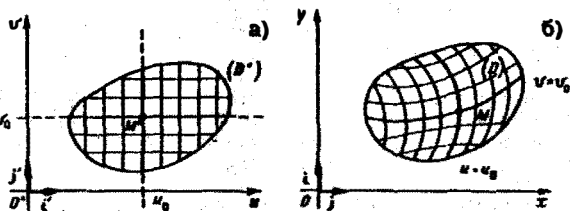


Рис. 13

В этом случае отображение называется *взаимно однозначным* отображением области D^* на область D . При таком преобразовании любая непрерывная кривая L^* , лежащая в области D^* , перейдет в непрерывную кривую L , лежащую в области D . Если функции $g(x, y)$ и $h(x, y)$ также непрерывны, то любая непрерывная линия $L \subset D$ с помощью преобразования (2) перейдет в непрерывную линию $L^* \subset D^*$.

По заданной паре u_0, v_0 значений переменных u, v из области D^* можно однозначно определить не только положение точки $M^*(u_0, v_0)$ в самой области D^* , но и положение соответствующей точки $M(x_0, y_0)$ в области D , $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Это дает основание рассматривать числа u, v как некоторые новые координаты точки D области M на плоскости xOy . Их называют **криволинейными координатами** точки M .

Множество точек области D , у которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называют **координатной линией**. Полагая в формуле (1) $u = v_0$, получим параметрические уравнения координатной линии,

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0). \quad (3)$$

Здесь роль параметра играет переменная u . Придавая координате v различные (возможные для нее) постоянные значения, получим **семейство** координатных линий ($v = \text{const}$) на плоскости xOy . Аналогично получаем и другое семейство координатных линий ($u = \text{const}$).

При наличии взаимно однозначного соответствия между областями D^* и D различные координатные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой, и через любую точку области D проходит по одной линии из каждого семейства. Сетка криволинейных координатных линий на плоскости xOy является образом прямоугольной сетки на плоскости uOv (см. рис. 13).

4.2. Элемент площади в криволинейных координатах.

Якобиан и его геометрический смысл

Выделим в области D^* на плоскости UO^*V малый прямоугольник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$ со сторонами, параллельными осям координат O^*u и O^*v и длинами сторон Δu и Δv (для определенности считаем, что $\Delta u > 0, \Delta v > 0$) соответственно (рис. 14 а). Его площадь

$$\Delta S^* = \Delta u \cdot \Delta v. \quad (4)$$

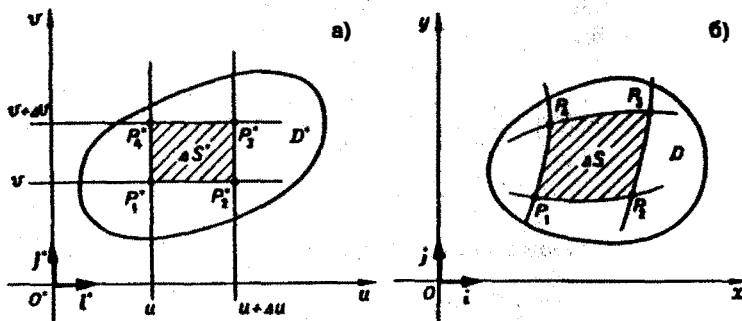


Рис. 14

Прямоугольник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$ переходит в криволинейный четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ в области D (рис. 14 б). Если вершины P_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$) имеют координаты

$$P_1^*(u, v), \quad P_2^*(u + \Delta u, v), \quad P_3^*(u + \Delta u, v + \Delta v), \quad P_4^*(u, v + \Delta v),$$

то, согласно формулам (1), соответствующие им вершины P_i имеют координаты

$$\begin{aligned} P_1(\varphi(u, v), \psi(u, v)), & \quad P_2(\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v)), \\ P_3(\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v)), & \quad P_4(\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v)). \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Тейлора для функции двух переменных и ограничиваясь членами первого порядка относительно Δu и Δv , получим следующие приближенные значения координат для вершин четырехугольника $P_1 P_2 P_3 P_4$:

$$\begin{aligned} P_1(\varphi, \psi), \\ P_2\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u\right), \\ P_3\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v\right), \\ P_4\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v, \psi + \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где функции φ, ψ и все их производные вычислены в точке (u, v) . Найденные выражения для координат точек показывают, что с точностью до малых высшего порядка четырехугольник $P_1 P_2 P_3 P_4$ есть параллелограмм. Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_4 P_3} &= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u, \\ \overrightarrow{P_1 P_4} = \overrightarrow{P_2 P_3} &= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v. \end{aligned}$$

Тогда площадь ΔS четырехугольника $P_1 P_2 P_3 P_4$ можно приближенно выразить через длину векторного произведения $[\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_4}]$,

$$\Delta S \simeq \left| [\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_4}] \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta u \cdot \Delta v.$$

Определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \Delta u \cdot \Delta v$$

называется функциональным определителем функций $\varphi(u, v), \psi(u, v)$, или якобианом.

Итак,

$$\Delta S \simeq |J| \cdot \Delta u \cdot \Delta v. \quad (6)$$

Выражение в правой части (6) называется элементом площади в криволинейных координатах. Так как $\Delta u \cdot \Delta v$, то из формулы (6) получаем, что

$$\frac{\Delta S}{\Delta S^*} \simeq |J|. \quad (7)$$

Равенство (7) является приближенным. Однако в пределе, когда диаметры площадок ΔS^* и ΔS стремятся к нулю, оно переходит в точное:

$$|J(u, v)| = \lim_{\text{diam}(\Delta S^*) \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*}.$$

Из формул (7) и (8) видно, что абсолютная величина якобиана играет роль локального коэффициента растяжения области D^* (в данной точке (u, v)) при отображении ее на область D при помощи формул преобразования (1).

4.3. Формула замены переменных в двойном интеграле

Пусть непрерывные функции

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

осуществляют взаимнооднозначное отображение области D^* на D и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Пусть в области D на плоскости xOy задана непрерывная функция

$$z = f(x, y).$$

Каждому значению функции $z = f(x, y)$ в области D соответствует равное значение функции $z = F(u, v)$ в области D^* , где

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Разобьем область D^* на частичные области и построим соответствующее разбиение области D . Выберем в соответствующих частичных областях точки (u, v) и (x, y) так, чтобы значения функций $F(u, v)$ и $f(x, y)$ в них совпадали, и составим интегральные суммы для функций $z = f(x, y)$ и $F(u, v)$ по областям D и D^* . Получим

$$\sum_D f(x, y) \Delta S \approx \sum_{D^*} F(u, v) |J| \Delta S^*, \quad (9)$$

где

$$\Delta S \approx |J| \cdot \Delta S^*$$

и $J(u, v)$ — якобиан функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$. Переходя в равенстве (9) к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра d^* частичных областей D_k^* (в силу непрерывности отображения (1) будет стремиться к нулю и наибольший из диаметров d частичных областей в D), будем иметь

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_{D^*} F(u, v) |J(u, v)| dS^*,$$

или

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] |J(u, v)| du dv,} \quad (10)$$

где

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Условие $J \neq 0$ является условием локальной взаимнооднозначности отображения, осуществляемого функциями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Теорема 4. Для того чтобы преобразовать двойной интеграл, заданный в декартовых координатах, в двойной интеграл в криволинейных координатах, нужно заменить в подынтегральной функции $f(x, y)$ переменные x и y соответственно через $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$,

а элемент площади $dx dy$ — его выражением в криволинейных координатах:

$$dx dy = |J| du dv.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой

$$xy = a^2 \quad \text{и} \quad xy = b^2,$$

где $x > 0, y > 0, 0 < a < b$, и прямыми

$$y = \alpha x, \quad y = \beta x,$$

где $0 < \alpha < \beta$ (рис. 15а).

« Отыскание площади указанной фигуры сводится к вычислению двойного интеграла

$$\iint_D dx dy$$

по области D . Введем новые, криволинейные координаты u и v формулами

$$xy = u, \quad \frac{y}{x} = v. \quad (11)$$

Из условия задачи ясно, что $a^2 \leq u \leq b^2, \alpha \leq v \leq \beta$. Значит, в плоскости uv мы получили прямоугольник (рис. 15б)

$$D^* = \{a^2 \leq u \leq b^2; \alpha \leq v \leq \beta\}$$

— фигуру более простую, чем заданная фигура D .

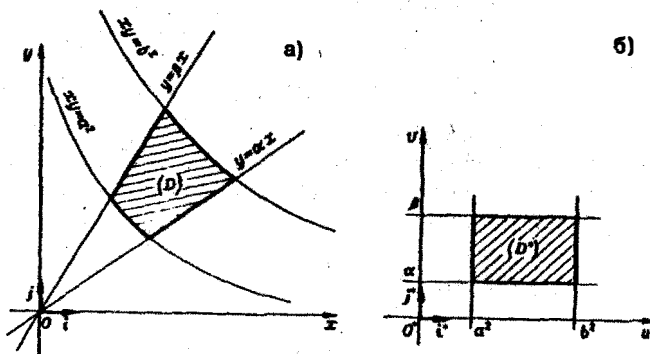


Рис. 15

Выразим x и y из соотношений (11) через u и v :

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Тогда

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

По формуле (10) при $f(x, y) = 1$ получим

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} |J| du dv = \int_{a^2}^{b^2} du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{2v} = u \Big|_{a^2}^{b^2} \cdot \frac{1}{2} \ln v \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{b^2 - a^2}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

4.4. Двойной интеграл в полярных координатах

Вычисление двойного интеграла часто упрощается заменой прямоугольных координат x и y полярными координатами ρ и φ по формулам

$$x = \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \text{где } \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (12)$$

В этом случае

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Элемент площади в полярных координатах имеет вид

$$dS = \rho \, d\rho \, d\varphi, \quad (13)$$

и формулу перехода от интеграла в декартовых координатах к интегралу в полярных координатах можно записать так:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f[\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi] \rho \, d\rho \, d\varphi. \quad (14)$$

Элемент площади в полярных координатах можно получить и из геометрических соображений (см. рис. 16). Площадь заштрихованной на рисунке области

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{пл. сектора } ODC - \text{пл. сектора } OAB = \\ &= \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\varphi - \frac{1}{2}\rho^2 \Delta\varphi = \rho \Delta\rho \Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi. \end{aligned}$$

Отбрасывая бесконечно малую величину высшего порядка, получаем

$$\Delta S \simeq \rho \Delta\rho \Delta\varphi$$

и принимаем

$$dS = \rho \, d\rho \, d\varphi$$

за элемент площади в полярных координатах.

Итак, чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно через $\rho \cos \varphi$ и $\rho \sin \varphi$, а элемент площади в декартовых координатах $dx \, dy$ заменить элементом площади в полярных координатах $\rho \, d\rho \, d\varphi$.

Займемся теперь вычислением двойного интеграла в полярных координатах. Как и в случае прямоугольных декартовых координат, вычисление интеграла в полярных координатах осуществляется путем сведения его к повторному интегралу.

Рассмотрим сначала случай, когда полюс O лежит вне заданной области D . Пусть область D обладает тем свойством, что любой луч, исходящий из полюса (координатная линия $\varphi = \text{const}$) пересекает ее границу не более чем в двух точках или по целому отрезку (рис. 17). Отметим крайние значения φ_1 и φ_2 полярного угла φ , $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Числа φ_1 и φ_2 являются пределами внешнего интегрирования.

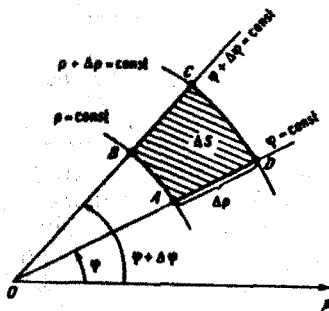


Рис. 16

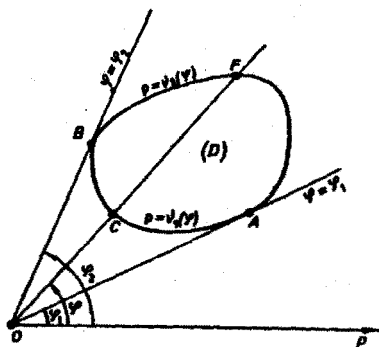


Рис. 17

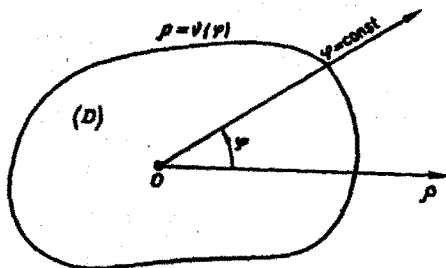


Рис. 18

Луч $\varphi = \varphi_1$ проходит через точку A контура области D , а луч $\varphi = \varphi_2$ — через точку B . Точки A и B разбивают контур области D на две части: ACB и AFB . Пусть $\rho = \nu_1(\varphi)$ и $\rho = \nu_2(\varphi)$ — их полярные уравнения, причем $\nu_1(\varphi)$ и $\nu_2(\varphi)$ — однозначные непрерывные функции φ , удовлетворяющие условию

$$\nu_1(\varphi) \leq \nu_2(\varphi) \quad \text{для всех } \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2).$$

Функции $\nu_1(\varphi)$ и $\nu_2(\varphi)$ являются пределами внутреннего интегрирования. Переходя к повторным интегралам, получаем следующую формулу

$$\iint_D F(\rho, \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho \, d\rho. \quad (15)$$

В частности, для площади S области D при $F(\rho, \varphi) \equiv 1$ получаем

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\nu_1(\varphi)}^{\nu_2(\varphi)} \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\nu_2^2(\varphi) - \nu_1^2(\varphi)] \, d\varphi.$$

Пусть теперь полюс O расположен внутри области D . Предположим, что область D является звездной относительно полюса, т. е. любой луч $\varphi = \text{const}$ пересекает границу области только в одной точке или по целому отрезку (рис. 18). Пусть $\rho = \nu(\varphi)$ — уравнение границы области в полярных координатах. Тогда

$$\iint_D F(\rho, \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\nu(\varphi)} F(\rho, \varphi) \rho \, d\rho. \quad (16)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$Z = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \, dx \, dy,$$

где область

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

— четверть единичного круга, расположенная в первом квадранте.

◀ Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Тогда областью интегрирования будет прямоугольник

$$D^* = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Преобразованный интеграл I легко вычисляется:

$$I = \iint_{D^*} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{1+\rho^2} \Big|_{\rho=0}^1 = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Замечание. Если якобиан отличен от нуля в области D , то отображение в некоторой окрестности каждой точки этой области является взаимнооднозначным. При этом может, однако, случиться, что отображение *всей* области не будет взаимнооднозначным.

Рассмотрим отображение, определяемое функциями

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v, \quad -\infty < u, v < +\infty.$$

Якобиан этих функций равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^{2u}$$

и, следовательно, везде отличен от нуля. Несмотря на это, для $u = 0, v = 0$ и для $u = 0, v = 2\pi$ мы получим $x = 1, y = 0$, так что это отображение не является взаимнооднозначным.

С другой стороны, если якобиан отображения обращается в нуль в какой-нибудь точке, то, тем не менее, отображение в окрестности этой точки может оказаться взаимно однозначным. Например, для отображения, определяемого функциями

$$x = u^3, \quad y = v^3, \quad -\infty < u, v < +\infty,$$

якобиан

$$J = 9u^2v^2,$$

равен нулю и при $u = 0$, и при $v = 0$, но отображение является взаимнооднозначным. Обратное отображение определяется функциями

$$u = \sqrt[3]{x}, \quad v = \sqrt[3]{y}, \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

§ 5. Площадь поверхности.

Интеграл по площади поверхности

5.1. Вычисление площади поверхности

Пусть задана поверхность π , однозначно проектирующаяся на область D плоскости xOy . Это означает, что данная поверхность задается уравнением

$$z = f(x, y),$$

где $P(x, y) \in D$.

Будем считать поверхность *гладкой*; это означает, что в области D функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Разобьем область D на квадратируемые подобласти

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

без общих внутренних точек, площади которых обозначим соответственно через

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n.$$

Пусть d — наибольший из диаметров частичных областей D_k ($k = 1, 2, \dots, n$). В каждой подобласти D_k выберем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$. На поверхности π точке P_k будет соответствовать точка $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, где $\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$ (рис. 19). Проведем в точке M_k касательную плоскость к поверхности π . Ее уравнение имеет следующий вид

$$z - \zeta_k = f'_x(\xi_k, \eta_k)(x - \xi_k) + f'_y(\xi_k, \eta_k)(y - \eta_k). \quad (1)$$

Построим на границе частичной области d_k , как на направляющей, цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Эта цилиндрическая поверхность вырежет из касательной плоскости, проведенной через точку M_k , область π_k площади $\Delta\sigma_k$. Площадка π_k проектируется на элементарную область D_k плоскости xOy взаимнооднозначно.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k. \quad (2)$$

Определение. Если при $d \rightarrow 0$ сумма (2) имеет конечный предел S ,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k = S, \quad (3)$$

то число S называется *площадью* поверхности π .

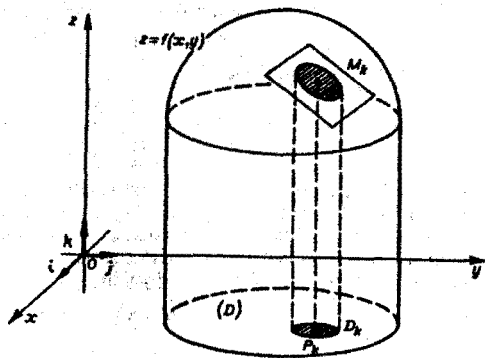


Рис. 19

Таким образом, мы заменяем данную поверхность «чешуйчатой», затем подсчитываем площадь этой «чешуйчатой» поверхности и переходим к пределу при стремлении диаметра «чешуек» к нулю (диаметры чешуек стремятся к нулю при $d \rightarrow 0$).

Перейдем теперь к выводу формулы, по которой вычисляют площадь поверхности. Известно, что площадь проекции плоской фигуры на какую-нибудь плоскость равна произведению площади проектируемой фигуры на косинус острого угла между плоскостью проекции и плоскостью, в которой лежит проектируемая фигура. Обозначим через γ_k угол между касательной плоскостью к поверхности π в точке M_k и плоскостью xOy (рис. 20). Тогда

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \cdot |\cos \gamma_k|,$$

откуда

$$\Delta\sigma_k = \frac{\Delta S_k}{|\cos \gamma_k|}. \quad (4)$$

Но угол γ_k есть в то же время угол между осью Oz и нормалью касательной плоскости к поверхности (1). Обозначим

вектор нормали к касательной плоскости к поверхности в точке M_k через

$$\mathbf{n}_1 = \{f'_x(\xi_k, \eta_k), f'_y(\xi_k, \eta_k), -1\},$$

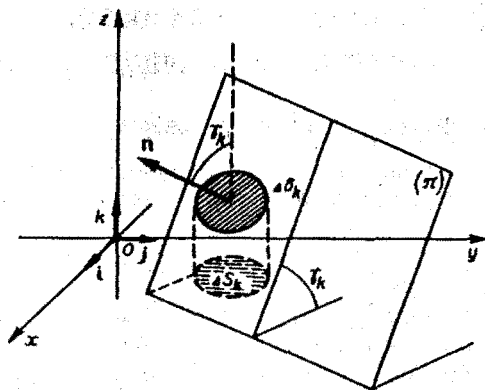


Рис. 20

а через $\mathbf{n}_2 = \{0, 0, 1\}$ — единичный вектор оси Oz . Тогда получим

$$\cos \gamma_k = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'_x(\xi_k, \eta_k)]^2 + [f'_y(\xi_k, \eta_k)]^2}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'_x(\xi_k, \eta_k)]^2 + [f'_y(\xi_k, \eta_k)]^2} \cdot \Delta S_k. \quad (5)$$

По условию функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в области D . Следовательно, функция

$$\sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2}$$

непрерывна, а, значит, и интегрируема в области D . Поэтому при $d \rightarrow 0$ сумма (5) имеет конечный предел,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta \sigma_k = \iint_D \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} dS.$$

Учитывая равенство (3), определяющее площадь S поверхности π , заключаем, что

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (6)$$

где D_{xy} — проекция поверхности π на плоскость xOy .

Выражение

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (7)$$

называется элементом площади поверхности.

Если спроектировать участок поверхности π на плоскость xOy , то получим

$$S = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz, \quad (8)$$

где D_{xz} — проекция участка поверхности на плоскость xOz . Соответственно, при проектировании на плоскость yOz имеем

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \quad (9)$$

где D_{yz} — проекция участка поверхности на плоскость yOz .

Пример 1. Найти площадь сферы радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

◀ Уравнение верхней полусферы —

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Следовательно,

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Область интегрирования

$$D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_{J=\rho} \left| \begin{matrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{matrix} \right| = 2R \iint_{D^*} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 4\pi R \left(-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right) \Big|_{\rho=0}^R = 4\pi R^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Отметим следующие полезные формулы:

1) для элемента площади цилиндрической поверхности радиуса R

$$d\sigma = R d\varphi dz; \quad (10)$$

2) для элемента площади сферической поверхности радиуса R

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (11)$$

Используя формулу (11) для элемента площади сферической поверхности получим площадь сферы:

$$S = 2 \iint_{\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 2R^2 \cdot 2\pi (-\cos \theta) \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = 4\pi R^2.$$

5.2. Интеграл по площади поверхности (интеграл по поверхности 1-го рода)

Пусть на гладкой поверхности π задана непрерывная функция $f(M)$. Разобьем поверхность π на части

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$$

с площадями

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$$

соответственно, выделим на каждой из частичных поверхностей по произвольной точке $M_1, M_2, \dots, M_n$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(m_k) \Delta\sigma_k, \quad (12)$$

которую будем называть *интегральной суммой* для функции $f(M)$ по площади поверхности π .

Определение. Если при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных поверхностей π_k интегральная сумма (12) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения поверхности π на части, ни от выбора точек M_k , то этот предел называется *интегралом от функции $f(M)$ по площади поверхности π* (интегралом по поверхности 1-го рода) и обозначается символом

$$\iint_{\pi} f(M) d\sigma,$$

или

$$\iint_{\pi} f(x, y, z) d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности.

Общие свойства двойных интегралов легко переносятся на интегралы по площади поверхности. В частности, если поверхность π разбита на неперекрывающиеся части $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, то

$$\iint_{\pi} f(M) d\sigma = \sum_{k=1}^n \iint_{\pi_k} f(M) d\sigma. \quad (13)$$

Теорема 5. Пусть π — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = \varphi(x, y)$, где $(x, y) \in D$, причем функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в некоторой области D_1 , $D \subset D_1$. Пусть, далее, $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, определенная на поверхности π . Тогда справедливо равенство

$$\iint_{\pi} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (14)$$

Интеграл

$$\iint_P \mu(P) d\sigma,$$

где $\mu(P) \geq 0$ на π , можно истолковать как массу m оболочки, представляющей собой поверхность π , на которой масса распределена с поверхностной плотностью $\mu = \mu(P)$.

Пример 2. Найти массу параболической оболочки

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (0 \leq z \leq 1),$$

плотность которой меняется по закону $\mu = z$ (рис. 21).

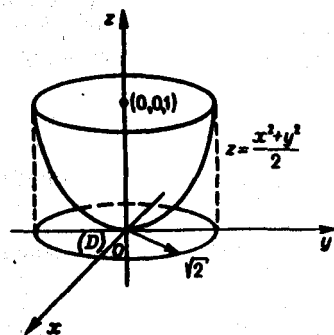


Рис. 21

◀ Имеем

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\pi} \mu(P) d\sigma = \iint_D z(x, y) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho^3 d\rho = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1 + \rho^2} = t, & \rho = \sqrt{t^2 - 1}, \quad d\rho = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \\ \rho_1 = 0, & t_1 = 1 \\ \rho_2 = \sqrt{2}, & t_2 = \sqrt{3} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \pi \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{t^2 - 1} \right)^3 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \pi \int_1^{\sqrt{3}} (t^2 - 1)t^2 dt = \pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1). \blacktriangleright$$

§ 6. Тройной интеграл.

Задача, приводящая к тройному интегралу

Пусть дано материальное тело, представляющее собой пространственную область Ω , заполненную массой. Требуется найти массу m этого тела при условии, что в каждой точке $P \in \Omega$ известна плотность

$$\mu = \mu(P) = \mu(x, y, z), \quad P(x, y) \in \Omega,$$

распределения масс.

Разобьем область Ω на неперекрывающиеся кубируемые (т. е. имеющие объем) части

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$$

с объемами

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$$

соответственно. В каждой из частичных областей Ω_k выберем произвольную точку P_k . Примем приближенно, что в пределах частичной области Ω_k плотность постоянна и равна $\mu(P_k)$. Тогда масса Δm_k этой части тела выразится приближенным равенством

$$\Delta m_k \approx \mu(P_k) \Delta v_k,$$

а масса всего тела будет приближенно равна

$$m \approx \sum_{k=1}^n \mu(P_k) \Delta v_k. \quad (1)$$

Пусть d — наибольший из диаметров частичных областей Ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Если при $d \rightarrow 0$ сумма (1) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения области Ω на частичные подобласти, ни от выбора точек $P_k \in \Omega_k$, то этот предел принимается за массу m заданного тела,

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(P_k) \Delta v_k. \quad (2)$$

Пусть в замкнутой кубируемой области Ω определена ограниченная функция

$$f(P), \quad P \in \Omega.$$

Разобьем Ω на n непересекающихся кубируемых частей

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n,$$

а их объемы обозначим через

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$$

соответственно. В каждой частичной подобласти Ω_k произвольным образом выбираем точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$ и составляем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta v_k.$$

Пусть d — наибольший из диаметров частичных областей Ω_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Определение. Если при $d \rightarrow 0$ интегральные суммы σ имеют предел, не зависящий ни от способа разбиения области Ω на частичные подобласти Ω_k , ни от выбора точек $P_k \in \Omega_k$, то этот предел называется *тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области Ω* и обозначается символом

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv, \quad \text{или} \quad \iiint_{\Omega} f(P) dv.$$

При этом функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой в области Ω* .

Таким образом, по определению имеем

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta v_k.$$

Возвращаясь к задаче о вычислении массы тела, замечаем, что предел (2) есть *тройной интеграл от функции $\mu(P)$ по области Ω* . Значит,

$$m = \iiint_{\Omega} \mu(P) dv = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Здесь $dx dy dz$ — элемент объема dv в прямоугольных координатах.

Теорема 6. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой кубируемой области Ω , то она интегрируема в этой области.

Свойства тройных интегралов

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов. Перечислим основные из них.

Пусть функции $f(P)$ и $\varphi(P)$ интегрируемы в кубируемой области Ω .

1. Линейность.

$$\iiint_{\Omega} (\alpha f(P) + \beta \varphi(P)) dv = \alpha \iiint_{\Omega} f(P) dv + \beta \iiint_{\Omega} \varphi(P) dv,$$

где α и β — произвольные вещественные постоянные.

2. $f(P) \leq \varphi(P)$ всюду в области Ω , то

$$\iiint_{\Omega} f(P) dv \leq \iiint_{\Omega} \varphi(P) dv.$$

3. Если $f(P) \equiv 1$ в области Ω , то

$$\iiint_{\Omega} dv = V,$$

где V — объем области Ω .

4. Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой кубируемой области Ω и M и m — ее наибольшее и наименьшее значения в Ω , то

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(P) dv \leq MV,$$

где V — объем области Ω .

5. **Аддитивность.** Если область Ω разбита на кубируемые области Ω_1 и Ω_2 без общих внутренних точек и $f(P)$ интегрируема в области Ω , то $f(P)$ интегрируема на каждой из областей Ω_1 и Ω_2 , причем

$$\iiint_{\Omega} f(P) dv = \iiint_{\Omega_1} f(P) dv + \iiint_{\Omega_2} f(P) dv.$$

6. **Теорема о среднем значении.**

Теорема 7 (о среднем значении). Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой кубируемой области Ω , то найдется точка $P_c \in \Omega$, такая, что будет справедлива формула

$$\iiint_{\Omega} f(P) dv = f(P_c)V,$$

где V — объем области Ω (напомним, что область — связное множество).

§ 7. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Как и при вычислении двойных интегралов, дело сводится к вычислению повторных интегралов. Предположим, что функция $f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области Ω .

1-й случай. Область Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$\Omega = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\},$$

проектирующийся на плоскость yoz в прямоугольник R ;

$$R = \{c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}.$$

Тогда получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \iint_R f(x, y, z) dS. \quad (1)$$

Заменяя двойной интеграл через повторный, окончательно получим

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_l^m f(x, y, z) dz. \quad (2)$$

Таким образом, в случае, когда область Ω — прямоугольный параллелепипед, мы свели вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех обыкновенных интегралов.

Формулу (2) можно переписать в виде

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D \left(\int_1^m f(x, y, z) dz \right) dx dy, \quad (3)$$

где прямоугольник

$$D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

есть ортогональная проекция параллелепипеда Ω на плоскость xOy .

2-й случай. Рассмотрим теперь область Ω такую, что ограничивающая ее поверхность S пересекается любой прямой, параллельной оси Oz , не более чем в двух точках или по целому отрезку (рис. 22). Пусть $z = \varphi_1(x, y)$ уравнение поверхности S_1 , ограничивающей область Ω снизу, а поверхность S_2 , ограничивающая область Ω сверху, имеет уравнение $z = \varphi_2(x, y)$.

Пусть обе поверхности S_1 и S_2 проектируются на одну и ту же область плоскости xOy . Обозначим ее через D , а ограничивающую ее кривую через L . Остальная часть границы S тела Ω лежит на цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz , и с кривой L в роли направляющей. Тогда по аналогии с формулой (3) получим

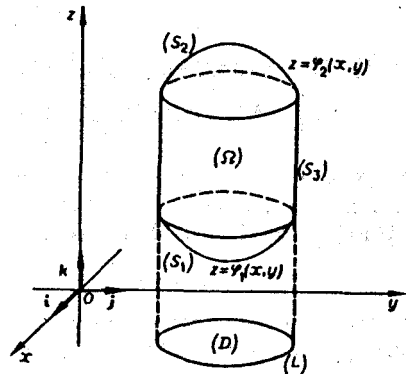


Рис. 22

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy. \quad (4)$$

Если область D плоскости xOy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$ ($a \leq x \leq b$), то двойной интеграл в формуле (4) можно свести к повторному, и мы получим окончательно

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} dz. \quad (5)$$

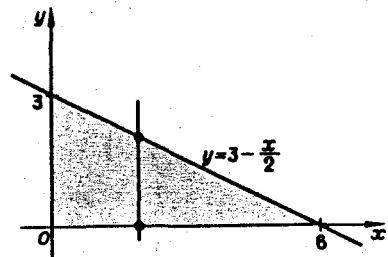


Рис. 23

Эта формула является обобщением формулы (2).

Пример. Вычислить объем тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y + z - 6 = 0.$$

◀ Проекцией тетраэдра на плоскость xOy служит треугольник, образованный прямыми

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y = 6,$$

так что x изменяется от 0 до 6, а при фиксированном x ($0 \leq x \leq 6$) y изменяется от 0 до $3 - \frac{x}{2}$ (рис. 23). Если же фиксированы x и y , то точка может перемещаться по вертикали от плоскости

$$z = 0$$

до плоскости

$$x + 2y + z - 6 = 0,$$

т. е. z меняется в пределах от 0 до $6 - x - 2y$.

По формуле (5) при $f(x, y, z) \equiv 1$ получаем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{6-x-2y} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} (6-x-2y) dy = \int_0^6 \left[(6-x)y - y^2 \right]_{y=0}^{3-\frac{x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^6 (6-x)^2 dx = -\frac{1}{2} \int_0^6 (6-x)^2 d(6-x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(6-x)^3}{3} \Big|_0^6 = 36. \blacktriangleright \end{aligned}$$

§ 8. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах

Вопрос о замене переменных в тройном интеграле решается таким же путем, как и в случае двойного интеграла. Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой кубируемой области Ω , а функции

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой кубируемой области Ω^* . Предположим, что функции (1) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между всеми точками (ξ, η, ζ) области Ω^* , с одной стороны, и всеми точками (x, y, z) области Ω — с другой. Тогда справедлива формула замены переменных в тройном интеграле —

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f[x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)] |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

— якобиан системы функций (1).

На практике при вычислении тройных интегралов часто пользуются заменой прямоугольных координат цилиндрическими и сферическими координатами.

8.1. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

В цилиндрической системе координат положение точки P в пространстве определяется тремя числами ρ, φ, z , где ρ и φ — полярные координаты проекции P' точки P на плоскость xOy , а z — аппликата точки P (рис. 24). Числа ρ, φ, z называются цилиндрическими координатами точки P .

Ясно, что

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

В системе цилиндрических координат координатные поверхности

$$\rho = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}, \quad z = \text{const}$$

соответственно описывают: круговой цилиндр, ось которого совпадает с осью Oz , полуплоскость, примыкающую к оси Oz , и плоскость, параллельную плоскости xOy .

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми следующими формулами

$$\boxed{x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z} \quad (3)$$

(см. рис. 24). Для системы (3), отображающей область Ω на область Ω^* , имеем

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Так как $\rho \geq 0$, то

$$\boxed{|J| = \rho}$$

и формула (2) перехода от тройного интеграла в прямоугольных координатах к интегралу в цилиндрических координатах принимает вид

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.} \quad (4)$$

Выражение

$$\boxed{dv = \rho d\rho d\varphi dz}$$

называется элементом объема в цилиндрических координатах.

Это выражение для элемента объема может быть получено и из геометрических соображений. Разобьем область Ω на элементарные подобласти координатными поверхностями

$$\rho = \text{const}, \quad \varphi = \text{const}, \quad z = \text{const}$$

и вычислим объемы полученных криволинейных призм (рис. 25). Видно, что

$$\Delta V = \frac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2 \Delta\varphi \Delta z - \frac{1}{2} \rho^2 \Delta\varphi \Delta z = \rho \Delta\rho \Delta\varphi \Delta z + \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \Delta\varphi \Delta z.$$

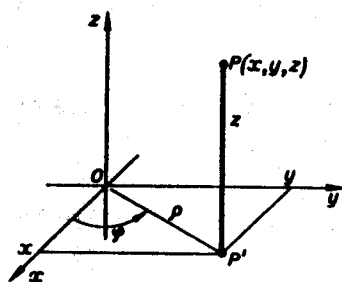


Рис. 24

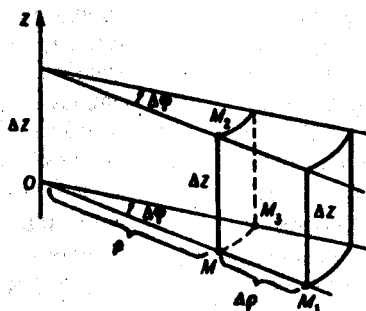


Рис. 25

Отбрасывая бесконечно малую величину более высокого порядка, получаем

$$\Delta V \simeq \rho \Delta \rho \Delta \varphi \Delta z.$$

Это позволяет принять за элемент объема в цилиндрических координатах следующую величину

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Пример 1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2$$

и

$$z = 2 - x^2 - y^2$$

(рис. 26).

◀ В цилиндрических координатах заданные поверхности будут иметь уравнения

$$z = \rho^2$$

и

$$z = 2 - \rho^2$$

(см. формулы (3)). Эти поверхности пересекаются по линии z , которая описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \rho = 1 & (\text{цилиндр}), \\ z = 1 & (\text{плоскость}), \end{cases}$$

а ее проекция на плоскость xOy системой

$$\rho = 1, \quad z = 0.$$

Таким образом,

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{и} \quad \rho^2 \leq z \leq 2 - \rho^2.$$

Искомый объем вычисляется по формуле (4), в которой $f \equiv 1$.

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{2-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^1 (2-2\rho^2) \rho d\rho = 4\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^1 = \pi. \quad \blacktriangleright$$

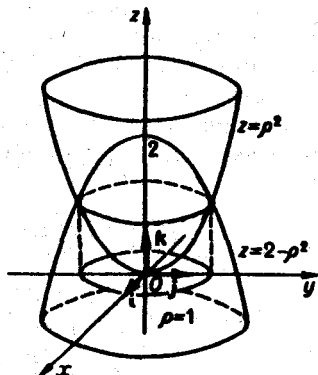


Рис. 26

8.2. Тройной интеграл в сферических координатах

В сферической системе координат положение точки $P(x, y, z)$ в пространстве определяется тремя числами r , φ , θ , где r — расстояние от начала координат до точки P , φ — угол между осью Ox и проекцией радиуса-вектора OP точки P на плоскость xOy , а θ — угол между осью Oz и радиусом-вектором OP точки P , отсчитываемый от оси Oz (рис. 27).

Ясно, что $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Координатные поверхности в этой системе координат:

$r = \text{const}$ — сферы с центром в начале координат;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, исходящие из оси Oz ;

$\theta = \text{const}$ — круговые конусы с осью Oz .

Из рисунка видно, что сферические и декартовы координаты связаны следующими соотношениями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

(5)

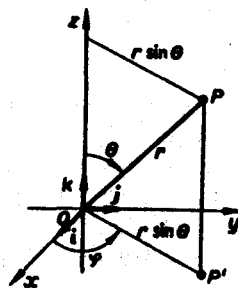


Рис. 27

Вычислим якобиан функций (5). Имеем

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Следовательно,

$$|J| = r^2 \sin \theta,$$

и формула (2) принимает вид

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Элемент объема в сферических координатах —

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Выражение для элемента объема можно получить и из геометрических соображений. Рассмотрим элементарную область в пространстве, ограниченную сферами радиусов r и $r + dr$, конусами θ и $\theta + d\theta$ и полуплоскостями φ и $\varphi + d\varphi$. Приблизительно эту область можно считать прямоугольным параллелепипедом с измерениями $DB = dr$, $DC = r \sin \theta d\varphi$, $AD = r d\theta$ (рис. 28). Тогда

$$dv = DB \cdot DC \cdot AB = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Пример 2. Найти объем выпуклого тела Ω , вырезаемого из конуса

$$x^2 + y^2 = z^2$$

концентрическими сферами

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad (a < b).$$

◀ Переходим к сферической системе координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Из первых двух уравнений видно, что $a \leq r \leq b$. Из третьего уравнения находим пределы изменения угла θ :

$$r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = 1,$$

т. е.

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

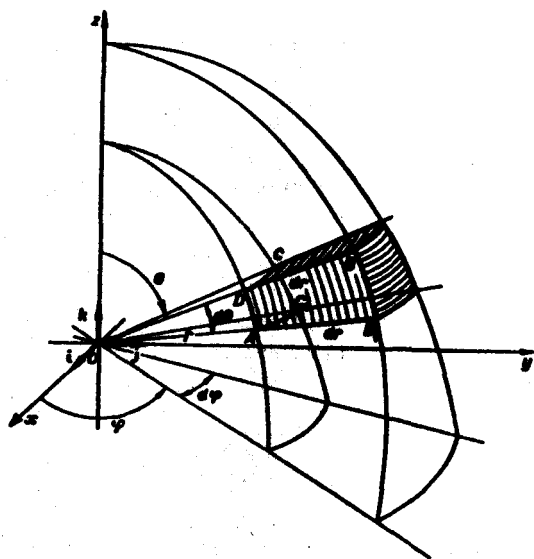


Рис. 28

Тем самым, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Полагая в формуле (6) $f(x, y, z) \equiv 1$, получим

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega^*} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta \, d\theta \int_a^b r^2 \, dr = \\ &= 2\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_a^b = 2\pi \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3). \blacktriangleright \end{aligned}$$

§ 9. Приложения двойных и тройных интегралов

9.1. Масса плоской фигуры

Пусть задана плоская ограниченная фигура D , по которой непрерывным образом распределена масса с поверхностной плотностью $\mu(P) = \mu(x, y) \geq 0$, где $\mu(x, y)$ — функция, непрерывная в D . Разобьем фигуру D на n частей

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

без общих внутренних точек, площади которых соответственно равны

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n.$$

В каждой части D_k ($k = 1, 2, \dots, n$) произвольно выберем точку $P_k(x_k, y_k)$ и вычислим в ней плотность $\mu(x_k, y_k)$. В силу непрерывности $\mu(x, y)$ можно считать, что масса m_k части D_k фигуры D приближенно равна $\mu(x_k, y_k) \Delta S_k$, а масса всей фигуры — сумме

$$m \approx \sum_{k=1}^n \mu(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

Последняя является интегральной суммой для непрерывной функции $\mu(x, y)$ в области D . Переходя к пределу при $d \rightarrow 0$ (здесь d — наибольший из диаметров частичных областей D_k ($k = 1, \dots, n$)), получим точное равенство

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(x_k, y_k) \Delta S_k = \iint_D \mu(x, y) \, dx \, dy. \quad (1)$$

Если масса распределена равномерно по всей фигуре, $\mu = \text{const}$, то формула (1) принимает вид

$$m = \mu \iint_D dx \, dy = \mu \cdot S,$$

где S — площадь фигуры D .

Пример 1. Найти массу кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов r и R , где $r < R$, если плотность кольца в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра окружности и равна 1 на окружности внутреннего круга.

◀ Фигура D задается условиями

$$r \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

а плотность

$$\mu = \frac{r}{\rho}.$$

Значит, масса кольца

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \frac{r\rho}{\rho} d\rho = 2\pi r\rho \Big|_{\rho=r}^R = 2\pi r(R-r). \blacktriangleright$$

9.2. Статические моменты плоской фигуры относительно осей координат. Координаты центра тяжести

Статическим моментом M_x материальной точки массы m относительно оси Ox называется произведение my , где y — ордината материальной точки, т. е.

$$M_x = my.$$

Здесь y может быть как положительным, так и отрицательным числом.

Разбивая фигуру D на части $D_1, \dots, D_n$, выбирая в каждой части D_k произвольно точку $P_k(x_k, y_k)$ и считая, что масса этой k -й части приближенно равна $\mu(x_k, y_k)\Delta S_k$ и сосредоточена в точке $P_k(x_k, y_k)$, запишем приближенно величину статического момента фигуры D относительно оси Ox . Имеем

$$M_x \approx \sum_{k=1}^n y_k \mu(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

где ΔS_k — площадь части D_k , а $\mu(x, y)$ — поверхностная плотность. Переходя к пределу при $d \rightarrow 0$, получаем

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Статический момент фигуры D относительно оси Oy находится по аналогичной формуле

$$M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Если известны статические моменты M_x и M_y и масса m плоской фигуры, то координаты центра тяжести этой фигуры находятся по следующим формулам

$$x_c = \frac{\iint_D x \mu(x, y) dx dy}{m} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \mu(x, y) dx dy}{m} = \frac{M_x}{m}. \quad (5)$$

Если $\mu = \text{const}$, то $m = \mu S$, где S — площадь фигуры D , и формулы (5) принимают вид:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{S}. \quad (6)$$

Пример 2. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной косинусоидой

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

осью Ox и осью Oy .

◀ Так как фигура — однородная, то координаты центра тяжести будем искать по формулам (6). Найдем сначала площадь S заданной фигуры. Имеем

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Затем найдем статические моменты M_x и M_y :

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{4} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$M_y = \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx \int_0^{\cos x} y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Теперь по формулам (6) получаем

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\pi}{8}.$$

9.3. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат

Рассуждая аналогично изложенному выше, легко установить, что элементарные моменты инерции относительно осей Ox и Oy будут соответственно равны

$$\begin{aligned} dI_x &= y^2 dm = y^2 \mu(x, y) \, ds = y^2 \mu(x, y) \, dx \, dy, \\ dI_y &= x^2 dm = x^2 \mu(x, y) \, ds = x^2 \mu(x, y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Интегрируя по плоской фигуре D , получим формулы для самих моментов инерции

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) \, dx \, dy, \quad (7)$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) \, dx \, dy. \quad (8)$$

где, как и ранее, $\mu(x, y)$ — поверхностная плотность распределения масс.

9.4. Вычисление массы тела

Рассматривая задачу, приводящую к тройному интегралу, мы показали, что если известна плотность распределения масс $\mu(x, y, z)$ в каждой точке некоторого тела Ω , то масса этого тела вычисляется по формуле

$$m = \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (9)$$

Мы предполагаем, что функция $\mu(x, y, z)$ непрерывна в области Ω .

Пример 3. Вычислить массу m тела, ограниченного полусферами

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{и} \quad z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2} \quad (a < b)$$

и плоскостью xOy , если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат.

◀ По условию задачи плотность μ в точке (x, y, z) выражается формулой

$$\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Тогда

$$m = \iiint_D k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

Переходя к сферическим координатам, получим, что

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

и

$$m = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_a^b r^3 dr = k \cdot 2\pi \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_a^b = \frac{k\pi}{2} (b^4 - a^4). \blacktriangleright$$

9.5. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей. Центр тяжести

Напомним, что задача о вычислении статических моментов и центра тяжести плоской фигуры решалась при помощи двойных интегралов (см. формулы (3), (4) и (5)). Задачи о вычислении статических моментов тела Ω относительно координатных плоскостей и отыскания центра тяжести тела Ω решаются аналогичным способом при помощи тройных интегралов. Например, элементарный статический момент относительно плоскости xOy равен

$$dK_{xy} = z dm = z\mu(x, y, z) dv = z\mu(x, y, z) dx dy dz,$$

где $\mu(x, y, z)$ — плотность. Отсюда статический момент

$$K_{xy} = \iiint_{\Omega} z\mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (10)$$

Аналогично выписываются статические моменты относительно плоскостей xOy и Yz :

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \iiint_{\Omega} y\mu(x, y, z) dx dy dz, \\ K_{yz} &= \iiint_{\Omega} x\mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Вычислив массу m тела Ω и его статические моменты, легко найти координаты центра тяжести тела:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dx dy dz}{m}, \\
 y_c &= \frac{\iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dx dy dz}{m}, \\
 z_c &= \frac{\iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) dx dy dz}{m}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если тело однородно, то плотность $\mu = \text{const}$ и формулы (11) упрощаются — постоянный множитель μ в числителе можно вынести за знак интеграла и сократить на него числитель и знаменатель (ибо $m = \mu V$). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\iiint_{\Omega} x dx dy dz}{V}, \\
 y_c &= \frac{\iiint_{\Omega} y dx dy dz}{V}, \\
 z_c &= \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{V},
 \end{aligned} \tag{12}$$

где V — объем тела Ω .

Пример 4. Найти координаты центра тяжести однородного полушара радиуса R .

◀ Считаем, что центр шара находится в начале координат, а рассматриваемая фигура — полушар — расположена над плоскостью xOy . Тогда в силу симметрии имеем

$$x_c = 0, \quad y_c = 0.$$

Объем полушара равен

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Найдем статический момент относительно плоскости xOy :

$$K_{xy} = \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} R^4.$$

Значит,

$$z_c = \frac{K_{xy}}{V} = \frac{\pi R^4}{4} : \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{3}{8} R,$$

и $C(0, 0, \frac{3}{8} R)$ — центр тяжести. ►

§ 10. Понятие о несобственном кратном интеграле по неограниченной области

При необходимости интегрирования функций нескольких переменных по неограниченной области D поступают так. Выбирают последовательность ограниченных областей интегрирования

$$D_1, D_2, D_3, \dots,$$

монотонно исчерпывающих область D , т. е.

$$D_n \subset D_{n+1} \quad \forall n$$

и

$$D_n \rightarrow D \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Например, если область интегрирования $\{D_n\}$ совпадает со всей плоскостью xOy , то за последовательность $\{D_n\}$ можно принять совокупность concentрических кругов

$$x^2 + y^2 \leq a_n^2, \quad a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Определение. Несобственным интегралом от функции $f(x, y)$ по неограниченной области интегрирования D называется предел последовательности интегралов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy, \quad (1)$$

не зависящий от выбора последовательности D_n .

Итак, по определению

$$\boxed{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy.} \quad (2)$$

Если предел (1) существует и конечен, то несобственный интеграл по неограниченной области называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad (3)$$

где область интегрирования

$$D = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$$

— вся плоскость.

◀ В качестве областей интегрирования $\{D_n\}$ выберем круги

$$x^2 + y^2 \leq n^2$$

радиуса n ($n = 1, 2, \dots$). Переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + 1)^2} = \\ &= 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2(\rho^2 + 1)} \right) \bigg|_{\rho=0}^{\rho=n} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 + n^2)} \right) = \pi. \end{aligned}$$

Итак, интеграл (3) сходится и равен π . ►

Для интеграла по неограниченной области D справедлив следующий

Признак сравнения. Если $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y) \forall (x, y) \in D$, и интеграл

$$\iint_D g(x, y) dx dy$$

сходится, то сходится и интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если же интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

расходится, то расходится и интеграл

$$\iint_D g(x, y) dx dy.$$

Интегралы, сходящиеся на всей плоскости, можно вычислять с помощью повторного интегрирования:

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.} \quad (4)$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

◀ Так как

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy,$$

то, согласно соотношению (4),

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получим новую область интегрирования

$$G = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho < +\infty\}.$$

Следовательно,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right) \Big|_0^\infty = \pi,$$

откуда

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \blacktriangleright$$

Несобственные интегралы от функции трех, четырех и большего числа переменных по неограниченным областям определяются аналогично.

Упражнения

Вычислите двойные интегралы:

$$1. \int_1^3 dy \int_2^5 x^2 y dx. \quad 2. \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy. \quad 3. \int_{\frac{\pi}{2}}^b \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta. \quad 4. \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy.$$

Измените порядок интегрирования (предварительно нарисовав область интегрирования):

$$5. \int_3^4 dy \int_1^2 f(x, y) dx. \quad 6. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy. \quad 7. \int_0^3 dy \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} f(x, y) dy. \\ 8. \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx. \quad 9. \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 dx. \quad 10. \int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dy. \\ 11. \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx. \\ 12. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

Нарисуйте область интегрирования и вычислите повторные интегралы

$$13. \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x+y} dy \quad 14. \int_{-1}^1 dy \int_y^{y^2+y} xy dx.$$

Вычислите площади фигур, ограниченных кривыми

$$15. y^2 = 4ax, \quad y = 0, \quad x + y = 3a. \quad 16. y = x, \quad x^2 - 2ax = ay. \\ 17. x = 4, \quad y = x, \quad xy = 4. \quad 18. x - y = 1, \quad y = -1, \quad y = \ln x. \\ 19. y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0. \quad 20. x = -6, \quad x = -2, \quad y = \frac{1}{x}.$$

21. Вычислите площадь петли кривой $\rho = a \sin 2\varphi$.

22. Вычислите площадь петли кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{2xy}{c^2}.$$

Указание. Сделайте замену переменных $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$.

Путем перехода к полярным координатам вычислите следующие интегралы:

$$23. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ если область } D \text{ ограничена окружностью } x^2 + y^2 = 2ax, a > 0.$$

$$24. \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ где } D \text{ — кольцо между окружностями радиусов } r = 1 \text{ и } R = e \\ \text{с центром в начале координат.}$$

$$25. \int_0^{2a} \int_a^{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx. \quad 26. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

27. $\iint_D y \, dx \, dy$, где D — полукруг диаметра d с центром в точке $C\left(\frac{d}{2}, 0\right)$, лежащий выше оси Ox .

Найдите массу пластинки D с заданной поверхностной плотностью $\mu = \mu(x, y)$:

28. $D = \{x = 1, y = 0, y^2 = x (y \geq 0)\}$, $\mu = 3x + 6y^2$.

29. $D = \{x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25, x = 0, y = 0 (x \leq 0, y \geq 0)\}$, $\mu = \frac{2y-x}{x^2+y^2}$.

30. $D = \{x = 2, y = 0, y^2 = \frac{x}{2} (y \geq 0)\}$, $\mu = 2x + 3y^2$.

Определите центры тяжести:

31. Полусегмента параболы $y^2 = ax, x = a, y = 0 (y \geq 0)$.

32. Полуэллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, отсеченного осью Ox .

33. Фигуры, ограниченной кривыми $x + y = 2a, x^2 = ay (a > 0)$.

Вычислите площади:

34. Той части плоскости $x + y + z = 2a$, которая лежит в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

35. Той части поверхности конуса $x^2 + y^2 = z^2$, которая высекается цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

36. Поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, расположенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3a^2$.

Вычислите интегралы по площади поверхности:

37. $\iint_{\pi} xyz \, d\sigma$, где π — часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

38. $\iint_{\pi} x \, d\sigma$, где π — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащая в первом октанте.

39. $\iint_{\pi} \frac{1}{r^2} \, d\sigma$, где π — цилиндр $x^2 + y^2 = R$, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = H$,

а $r = r(x, y, z)$ — расстояние от точки (x, y, z) поверхности π до начала координат.

Определение. Моментом инерции плоской фигуры относительно начала координат называется величина

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

Вычислите моменты инерции относительно начала координат:

40. Треугольника, ограниченного линиями $2y - x = 0, x = a, y = a$, относительно оси Ox .

41. Треугольника с вершинами в точках $A(0, 2a), B(a, 0), C(a, a)$ относительно оси Oy .

42. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно оси Oy .

43. Области, ограниченной параболой $y^2 = 4ax$, прямой $y = 2a$ и осью $Oy (a > 0)$.

Вычислите тройные интегралы:

44. $\iiint_{\Omega} \frac{dx \, dy \, dz}{(x + y + z + 1)^3}$, где Ω — область, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

45. $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, где Ω — область, ограниченная конусом $x^2 + y^2 = \frac{R^2 z^2}{H^2}$ и плоскостью $z = H$.

46. $\iiint_{\Omega} (2x + 3y - z) \, dx \, dy \, dz$, где Ω — трехгранная призма, ограниченная плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = b (a > 0, b > 0)$.

Вычислите интегралы 47–50, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам:

$$47. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz.$$

$$48. \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2+y^2} dz.$$

$$49. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz.$$

$$50. \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}, \quad \text{где } \Omega - \text{шар } x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

Вычислите объем тела, ограниченного данными поверхностями:

$$51. x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=z-6. \quad 52. az = x^2+y^2, z^2 = x^2+y^2 (a > 0).$$

$$53. (x^2+y^2+z^2)^2 = axyz (a > 0). \quad \text{Указание: перейдите к сферическим координатам.}$$

Вычислите массу тела:

54. Ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=H$, если плотность μ в каждой точке тела равна аппликате этой точки.

55. Ограниченного поверхностями $x+z=a$, $y=0$, ($y \geq 0$), $y^2=ax$, $2x+z=2a$, если плотность μ в каждой точке равна ординате y этой точки.

Найдите статические моменты однородного тела ($\mu=1$):

56. Прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b , c , относительно его граней.

57. Тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и плоскостью xOy , относительно плоскости xOy .

Найдите координаты центра тяжести однородного тела ($\mu=1$), ограниченного данными поверхностями:

58. Плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$ и $x+y+z=8$.

59. Цилиндром $y^2=2z$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $2x+3y=12$.

60. Параболоидом $x^2+y^2=2az$ и полусферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$ ($z \geq 0$).

Ответы

1. 156. 2. $\ln \frac{25}{24}$. 3. $\frac{3\pi b^2}{16}$. 4. $\frac{2}{3}$. 5. $\int_1^2 dx \int_3^4 f(x,y) dy$. 6. $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx$. 7. $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{3y} f(x,y) dx + \int_1^6 dy \int_{y/2}^3 f(x,y) dx$. 8. $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{4x+4}} f(x,y) dy + \int_0^8 dx \int_{-\sqrt{4x+4}}^{2-x} f(x,y) dy$. 9. $\int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{x+4}}^0 dy$. 10. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y) dx$. 11. $\int_{-1}^0 dx \int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y) dy$. 12. $\int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x,y) dy$. 13. $\frac{4(2\sqrt{2}-1)}{15}$. 14. $\frac{2}{5}$. 15. $\frac{10}{3}a^2$. 16. $\frac{9}{2}a^2$. 17. $6-4 \ln 2$. 18. $\frac{e-2}{2e}$. 19. $\sqrt{2}-1$. 20. $\ln 3$. 21. $\frac{\pi a^3}{8}$. 22. $\left(\frac{ab}{c}\right)^2$. 23. $\frac{3\pi a^4}{2}$. 24. 2π . 25. $\frac{\pi a^2}{2}$. 26. $\frac{\pi a^3}{6}$. 27. $\frac{a^3}{12}$. 28. 2. 29. 6. 30. 4. 31. $x_c = \frac{3}{5}a$, $y_c = \frac{3}{8}a$. 32. $x_c = 0$, $y_c = \frac{4b}{3\pi}$. 33. $x_c = -\frac{a}{2}$, $y_c = \frac{8}{5}a$. 34. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi a^2$. 35. $8a^2$. 36. $\frac{14}{3}\pi a^2$. 37. $\frac{\sqrt{3}}{120}$. 38. $\frac{\pi R^3}{4}$. 39. $2\pi \arctg \frac{H}{R}$. 40. $\frac{17a^4}{96}$. 41. $\frac{a^4}{4}$. 42. $\frac{\pi a^3 b}{4}$. 43. $\frac{178a^4}{165}$. 44. $\frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right)$. 45. $\frac{\pi H^2 R^2}{4}$. 46. $\frac{5}{6}ab^3 - \frac{1}{4}a^2b^2$. 47. $\frac{\pi a}{2}$. 48. $\frac{8}{9}a^2$. 49. $\frac{\pi}{8}$. 50. $\frac{2\pi}{3}$. 51. $\frac{32}{3}\pi$. 52. $\frac{\pi a^3}{6}$. 53. $\frac{a^3}{360}$. 54. $\frac{\pi H^4}{4}$. 55. $\frac{a^4}{12}$. 56. $\frac{a^2bc}{2}$, $\frac{ab^2c}{2}$, $\frac{abc^2}{2}$. 57. $\frac{\pi abc^2}{4}$. 58. $x_c = \frac{14}{15}$, $y_c = \frac{26}{15}$, $z_c = \frac{8}{3}$. 59. $x_c = \frac{6}{5}$, $y_c = \frac{12}{5}$, $z_c = \frac{8}{5}$. 60. $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Криволинейные интегралы первого рода

Кривая AB , заданная параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, причем

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0.$$

Если в конечном числе точек отрезка $[t_0, t_1]$ эти производные не существуют или одновременно обращаются в нуль, то кривая называется *кусочно-гладкой*.

Пусть AB — плоская кривая, гладкая или кусочно-гладкая. Пусть $f(M)$ — функция, заданная на кривой AB или в некоторой области D , содержащей эту кривую. Рассмотрим разбиение кривой AB на части точками

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

(рис. 1). Выберем на каждой из дуг $A_k A_{k+1}$ произвольную точку M_k и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k, \quad (1)$$

где Δl_k — длина дуги $A_k A_{k+1}$, и назовем ее *интегральной суммой для функции $f(M)$ по длине дуги кривой*. Пусть Δl — наибольшая из длин частичных дуг, т. е.

$$\Delta l = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta l_k.$$

Определение. Если при $\Delta l \rightarrow 0$ интегральная сумма (1) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB на части, ни от выбора точек на каждой из дуг разбиения, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода от функции $f(M)$ по кривой AB (интеграл по длине дуги кривой)* и обозначается символом

$$\int_{AB} f(M) dl,$$

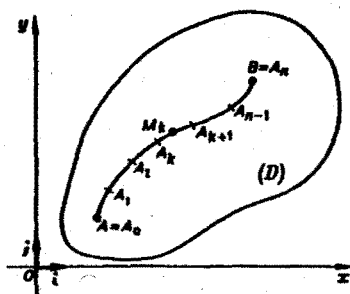


Рис. 1

или

$$\int_{AB} f(x, y) dl$$

(точка $M(x, y)$ лежит на кривой AB).

В этом случае функция $f(M)$ называется *интегрируемой вдоль кривой AB* , кривая AB называется *контуром интегрирования*, A — *начальной*, B — *конечной точками интегрирования*. Таким образом, по определению,

$$\int_{AB} f(M) dl = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k. \quad (2)$$

Пример 1. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой L распределена масса с *переменной* линейной плотностью $f(M)$. Найти массу m кривой L .

◀ Разобьем кривую L на n произвольных частей $M_k M_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и вычислим приближенно массу каждой части, предполагая, что на каждой из частей $M_k M_{k+1}$ плотность постоянна и равна плотности в какой-нибудь из ее точек, например, в крайней левой точке $f(M_k)$. Тогда сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k,$$

где Δl_k — длина k -ой части, будет приближенным значением массы m . Ясно, что погрешность будет тем меньше, чем мельче разбиение кривой L . В пределе при $\Delta l \rightarrow 0$ ($\Delta l = \max_k \Delta l_k$) получим точное значение массы всей кривой L , т. е.

$$m = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k.$$

Но предел справа есть криволинейный интеграл 1-го рода. Значит,

$$m = \int_{AB} f(M) dl. \quad \blacktriangleright$$

1.1. Существование криволинейного интеграла 1-го рода

Примем на кривой AB за параметр длину дуги l , отсчитываемую от начальной точки A (рис. 2). Тогда кривую AB можно описать уравнениями

$$\begin{cases} x = x(l), \\ y = y(l), \end{cases} \quad 0 \leq l \leq L, \quad (3)$$

где L — длина кривой AB .

Уравнения (3) называются *натуральными уравнениями* кривой AB . При переходе к натуральным уравнениям функция $f(x, y)$, заданная на кривой AB , сведется к функции переменной l : $f(x(l), y(l))$. Обозначив через l_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) значение параметра l , отвечающее точке M_k , перепишем интегральную сумму (1) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x(l_k), y(l_k)) \Delta l_k. \quad (4)$$

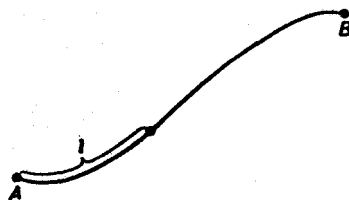


Рис. 2

Это — интегральная сумма, отвечающая определенному интегралу

$$\int_0^L f(x(l), y(l)) dl.$$

Поскольку интегральные суммы (1) и (4) равны между собой, то равны и отвечающие им интегралы. Таким образом,

$$\boxed{\int_{AB} f(M) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl.} \quad (5)$$

Теорема 1. Если функция $f(M)$ непрерывна вдоль гладкой кривой AB , то существует криволинейный интеграл

$$\int_{AB} f(M) dl$$

(поскольку при этих условиях существует определенный интеграл, стоящий в равенстве (5) справа).

1.2. Свойства криволинейных интегралов 1-го рода

1. Из вида интегральной суммы (1) следует, что

$$\boxed{\int_{AB} f(M) dl = \int_{BA} f(M) dl,}$$

т. е. величина криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от направления интегрирования.

2. Линейность. Если для каждой из функций $f(M)$ и $g(M)$ существует криволинейный интеграл по кривой AB , то для функции $\alpha f(M) + \beta g(M)$, где α и β — любые постоянные, также существует криволинейный интеграл по кривой AB , причем

$$\boxed{\int_{AB} [\alpha f(M) + \beta g(M)] dl = \alpha \int_{AB} f(M) dl + \beta \int_{AB} g(M) dl.}$$

3. Аддитивность. Если кривая AB состоит из двух кусков AC и CB и для функции $f(M)$ существует криволинейный интеграл по AB , то существуют интегралы

$$\int_{AC} f(M) dl$$

и

$$\int_{CB} f(M) dl,$$

причем

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AC} f(M) dl + \int_{CB} f(M) dl.$$

4. Если $f(M) \geq 0$ на кривой AB , то

$$\int_{AB} f(M) dl \geq 0.$$

5. Если функция $f(M)$ интегрируема на кривой AB , то функция $|f(M)|$ также интегрируема на AB , и при этом

$$\left| \int_{AB} f(M) dl \right| \leq \int_{AB} |f(M)| dl.$$

6. **Формула среднего значения.** Если функция $f(M)$ непрерывна вдоль кривой AB , то на этой кривой найдется точка M_c такая, что

$$\int_{AB} f(M) dl = f(M_c) \cdot L,$$

где L — длина кривой AB .

1.3. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

причем точке A соответствует значение $t = t_0$, а точке B — значение $t = t_1$. Будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$ вместе со своими производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ и выполнено неравенство

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0.$$

Тогда дифференциал дуги кривой вычисляется по формуле

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

и

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

В частности, если кривая AB задана явным уравнением

$$y = g(x), \quad a \leq x \leq b,$$

причем функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и точке A соответствует значение $x = a$, а точке B — значение $x = b$, то, принимая x за параметр, получаем

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx.$$

1.4. Криволинейные интегралы 1-го рода для пространственных кривых

Определение криволинейного интеграла 1-го рода, сформулированное выше для плоской кривой, дословно переносится на случай, когда функция $f(M)$ задана вдоль некоторой пространственной кривой AB .

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \xi(t), \\ y = \eta(t), \\ z = \zeta(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Тогда криволинейный интеграл 1-го рода от функции f , взятый вдоль этой кривой, можно свести к определенному интегралу при помощи следующей формулы:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \cdot \sqrt{[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2 + [\zeta'(t)]^2} dt.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x + y) dl,$$

где L — контур треугольника с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ (рис. 3).

◀ По свойству аддитивности имеем

$$\int_L (x + y) dl = \int_{OA} (x + y) dl + \int_{AB} (x + y) dl + \int_{BO} (x + y) dl.$$

Вычислим каждый из интегралов в отдельности. Так как на отрезке OA имеем: $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ и $dl = dx$, то

$$\int_{OA} (x + y) dl = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

На отрезке AB имеем $x + y = 1$, откуда $y = 1 - x$, т. е.

$$y' = -1$$

и

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{2} dx,$$

причем $0 \leq x \leq 1$, тогда

$$\int_{AB} (x + y) dl = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

Наконец,

$$\int_{BO} (x + y) dl = \int_{OB} (x + y) dl = \int_0^1 y dy = \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_L (x + y) dl = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}. \blacktriangleright$$

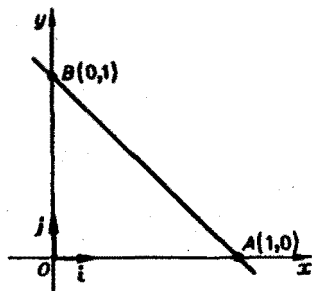


Рис. 3

Замечание. При вычислении интегралов

$$\int_{AB} (x+y) dl \quad \text{и} \quad \int_{BO} (x+y) dl$$

мы воспользовались свойством 1, согласно которому

$$\int_{AB} (x+y) dl = \int_{BA} (x+y) dl \quad \text{и} \quad \int_{BO} (x+y) dl = \int_{OB} (x+y) dl.$$

§ 2. Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть AB — гладкая или кусочно-гладкая ориентированная кривая на плоскости xOy и пусть

$$F(M) = P(M)i + Q(M)j$$

— вектор-функция, определенная в некоторой области D , содержащей кривую AB . Разобьем кривую AB на части точками

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B,$$

координаты которых обозначим соответственно через

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

(рис. 4). На каждой из элементарных дуг $A_k A_{k+1}$ возьмем произвольно точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k], \quad (1)$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Пусть Δl — длина наибольшей из дуг $A_k A_{k+1}$.

Определение. Если при $\Delta l \rightarrow 0$ сумма (1) имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB , ни от выбора точек (ξ_k, η_k) на элементарных дугах, то этот предел называется *криволинейным интегралом 2-го рода от вектор-функции $F(M)$ по кривой AB* и обозначается символом

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Так что по определению

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \quad (2)$$

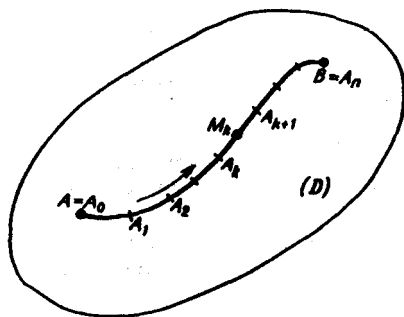


Рис. 4

Теорема 2. Если в некоторой области D , содержащей кривую AB , функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, то криволинейный интеграл 2-го рода

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

существует.

Пусть

$$\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

— радиус-вектор точки $M(x, y)$. Тогда

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy,$$

и подынтегральное выражение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

в формуле (2) можно представить в виде скалярного произведения векторов $\mathbf{F}(M)$ и $d\mathbf{r}$. Так что интеграл 2-го рода от вектор-функции

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j}$$

по кривой AB можно записать коротко так:

$$\int_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}).$$

2.1. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе с производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, причем изменению параметра t от t_0 до t_1 соответствует движение точки $M(x, y)$ по кривой AB от точки A к точке B .

Если в некоторой области D , содержащей кривую AB , функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, то криволинейный интеграл 2-го рода

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

сводится к следующему определенному интегралу:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt. \quad (3)$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла 2-го рода также может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{AB} x dy - y dx$$

- 1) вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$;
- 2) вдоль параболы $y = x^2$, соединяющей те же точки (рис. 5).

◀ 1) Уравнение линии AB : $y = x$ (x — параметр, $0 \leq x \leq 1$), откуда $dy = dx$. Так что

$$\int_{AB} x dy - y dx = \int_0^1 (x dx - x dx) = 0.$$

2) Уравнение линии AB :

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Отсюда

$$dy = 2x dx,$$

поэтому

$$x dy = 2x^2 dx$$

и

$$\int_{AB} x dy - y dx = \int_0^1 2x^2 dx - x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

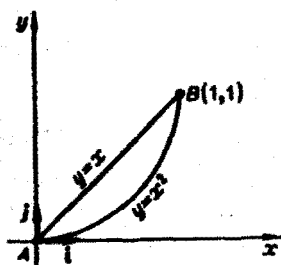


Рис. 5

Рассмотренный пример показывает, что величина криволинейного интеграла 2-го рода, вообще говоря, зависит от формы пути интегрирования.

2.2. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. **Линейность.** Если существуют криволинейные интегралы

$$\int_{AB} (F_1, d\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \int_{AB} (F_2, d\mathbf{r}),$$

то при любых действительных α и β существует и интеграл

$$\int_{AB} (\alpha F_1 + \beta F_2, d\mathbf{r}),$$

причем

$$\int_{AB} (\alpha F_1 + \beta F_2, d\mathbf{r}) = \alpha \int_{AB} (F_1, d\mathbf{r}) + \beta \int_{AB} (F_2, d\mathbf{r}).$$

2. **Аддитивность.** Если кривая AB разбита на части AC и CB и криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (F, d\mathbf{r})$$

существует, то существуют интегралы

$$\int_{AC} (F, d\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \int_{CB} (F, d\mathbf{r}),$$

причем

$$\int_{AB} (F, d\mathbf{r}) = \int_{AC} (F, d\mathbf{r}) + \int_{CB} (F, d\mathbf{r}).$$

3. Криволинейный интеграл второго рода (в отличие от криволинейного интеграла 1-го рода) зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) проходит кривая AB , и меняет знак при изменении направления движения по кривой, т. е.

$$\int_{BA} P dx + Q dy = - \int_{AB} P dx + Q dy.$$

Замечание. Последнее свойство соответствует физической интерпретации криволинейного интеграла 2-го рода как работы силового поля $\mathbf{F}$ вдоль некоторого пути: при изменении направления движения по кривой работа силового поля вдоль этой кривой меняет знак на противоположный.

2.3. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода

$$\int_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}),$$

где ориентированная кривая AB (A — начальная точка, B — конечная точка) задана векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$$

(здесь l — длина кривой, отсчитываемая в том направлении, в котором ориентирована кривая AB) (рис. 6). Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}, \quad \text{или} \quad d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} dl,$$

где $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(l)$ — единичный вектор касательной к кривой AB в точке $M(l)$. Тогда

$$\int_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{AB} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} dl) = \int_{AB} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) dl.$$

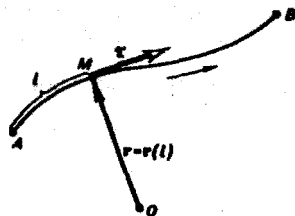


Рис. 6

Заметим, что последний интеграл в этой формуле — криволинейный интеграл 1-го рода. При изменении ориентации кривой AB единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}$ заменяется на противоположный вектор $(-\boldsymbol{\tau})$, что влечет изменение знака его подынтегрального выражения и, значит, знака самого интеграла.

§ 3. Формула Грина

Выведем формулу Грина, связывающую криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

по границе L некоторой плоской области D с двойным интегралом по этой области.

Теорема 3. Если в замкнутой области D , ограниченной кусочно-гладким контуром L , функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, то справедливо равенство (формула Грина):

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

Здесь символ $\oint_L$ означает интегрирование по границе L области D , причем граница L проходит так, что область D остается слева (рис. 7).

Граница L плоской области D может состоять из одной или нескольких простых замкнутых кривых (компонент). В первом случае она называется *односвязной*, а во втором — *многосвязной*. Если граница L состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых L_i , то кривые L_i называются *связными компонентами* границы. На рис. 8 изображена трехсвязная область.

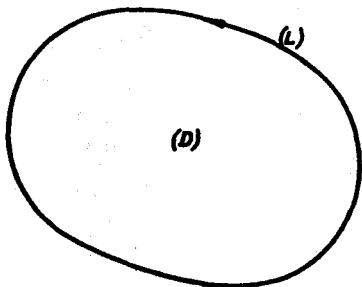


Рис. 7

Односвязная область D (область «без дырок») обладает тем свойством, что любая лежащая в ней замкнутая кривая может быть стянута в точку $P \in D$, оставаясь в процессе стягивания в области D .

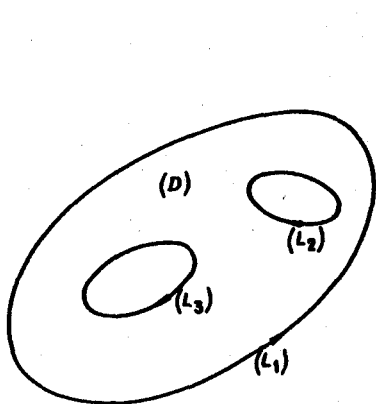


Рис. 8

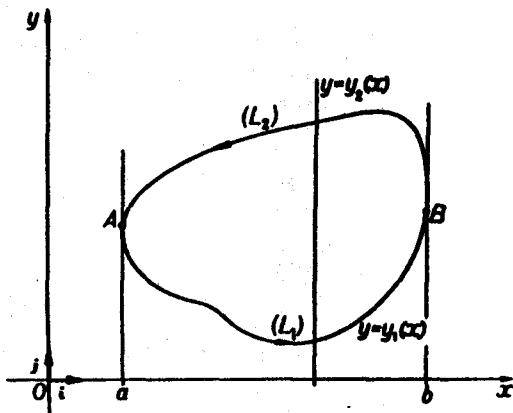


Рис. 9

Доказательство теоремы проведем для односвязной области.

◀ В силу свойства линейности достаточно доказать, что

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad (2)$$

$$\oint_L Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (3)$$

Докажем первую из этих формул.

Предположим сначала, что кривая L пересекается каждой прямой, параллельной оси Oy , не более чем в двух точках или по целому отрезку (рис. 9). Если каждая такая прямая пересекает кривую L не более чем в двух точках, то кривую L можно разбить на две части L_1 и L_2 (верхнюю и нижнюю), каждая из которых проектируется взаимно однозначно на некоторый отрезок $[a, b]$ оси Ox . В силу аддитивности криволинейного

интеграла имеем

$$\oint_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx.$$

На каждой из кривых L_1 и L_2 возьмем в качестве параметра абсциссу x и запишем уравнения этих кривых соответственно в виде

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y) dx &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx = \\ &= - \int_a^b \{P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

По предположению производная $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна в D , и значит, в силу известной формулы интегрального исчисления, приращение функции можно записать через интеграл от производной этой функции:

$$P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) получаем

$$\oint_L P(x, y) dx = - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Повторный интеграл в правой части последнего соотношения равен двойному интегралу от функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ по области D , так что окончательно имеем

$$\oint_L P(x, y) dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Формула (2) доказана.

Соотношение (3) доказывается аналогично.

Складывая почленно соотношения (2) и (3), получаем формулу Грина (1). ►

Отметим, что формула Грина имеет место и для более сложных контуров L , и для неодносвязных областей D . Рассмотрим, например, случай двухсвязной области (рис. 10). Сделаем разрез AB этой области, превращающий ее в односвязную. Тогда

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L_1 + BA + L_2 + AB} P dx + Q dy.$$

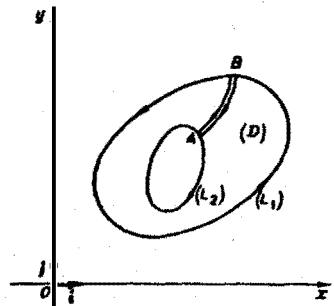


Рис. 10

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{BA+AB} P dx + Q dy = 0,$$

получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L_1+L_2=L} P dx + Q dy, \quad (6)$$

где интегрирование по кривой L_1 ведется в направлении против движения часовой стрелки, а по кривой L_2 — в направлении движения часовой стрелки. Отметим, что при этом кривые L_1 и L_2 проходятся так, что область D остается слева. Такое направление обхода контура принимается за положительное.

Площадь плоской области

Возьмем

$$P(x, y) = -y \quad \text{и} \quad Q(x, y) = x.$$

Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

и по формуле Грина (1) получаем

$$\oint_L -y dx + x dy = \iint_D 2 dx dy = 2S,$$

где S — площадь области D .

Отсюда получаем формулу для вычисления площади S плоской области D с помощью криволинейного интеграла по границе L этой области:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (7)$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом L :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

◀ Запишем уравнение эллипса в параметрической форме

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Искомая площадь находится по формуле (7), где криволинейный интеграл берется по эллипсу при обходе контура в положительном направлении, что соответствует изменению параметра t от 0 до 2π . Так как

$$dx = -a \sin t dt, \quad dy = b \cos t dt,$$

то отсюда получаем, что

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Пусть в пространстве задана ориентированная кусочно-гладкая кривая AB и пусть, кроме того, в некоторой области Ω , содержащей кривую AB , задана вектор-функция

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где P, Q, R — непрерывные в Ω функции. Аналогично плоскому случаю криволинейный интеграл от вектор-функции $\mathbf{F}$ по ориентированной кривой AB определим выражением

$$\int_{AB} (F, dr) = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Это — криволинейный интеграл 2-го рода в пространстве.

§ 4. Приложения криволинейных интегралов

4.1. Масса кривой

В примере 1 из § 1 было показано, что масса кривой L вычисляется с помощью интеграла 1-го рода

$$m = \int_L f(M) dl, \quad (1)$$

где $f(M)$ — переменная линейная плотность на кривой L . (Мы предполагаем, что $f(M)$ — непрерывная функция на AB .)

4.2. Площадь цилиндрической поверхности

Пусть в плоскости xOy задана некоторая спрямляемая (т. е. имеющая длину) кривая AB и на этой кривой определена непрерывная функция $f(M) \geq 0$. Тогда совокупность точек $(x, y, f(x, y))$, или $(M, f(M))$, составит некоторую кривую, лежащую на цилиндрической поверхности, для которой кривая AB является направляющей, а ее образующая параллельна оси Oz . Требуется определить площадь цилиндрической поверхности $ABDC$, ограниченной снизу кривой AB , сверху — кривой $z = f(M)$, где $M \in AB$, и вертикальными прямыми AC и BD (рис. 11).

Для решения этой задачи поступим так:

- 1) разобьем кривую AB на n частей точками

$$A = M_0, M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$$

так, как показано на рис. 11;

- 2) из каждой точки M_k проведем перпендикуляр к плоскости xOy высотой $f(M_k)$ (при этом цилиндрическая поверхность $ABDC$ разобьется на n полосок);

- 3) каждую полоску заменим прямоугольником с основанием Δl_k , где Δl_k — длина дуги $M_k M_{k+1}$, и высотой, равной значению функции $f(M)$ в какой-нибудь точке этой дуги, например, в точке M_k .

Тогда площадь k -ой полоски будет приближенно равна $f(M_k) \Delta l_k$, а площадь всей поверхности $ABDC$

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k.$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем мельче будут частичные дуги $M_k M_{k+1}$, на которые разбита кривая AB . Пусть Δl — наибольшая из длин Δl_k частичных дуг $M_k M_{k+1}$. Тогда при $\Delta l \rightarrow 0$ в пределе получим точное значение искомой

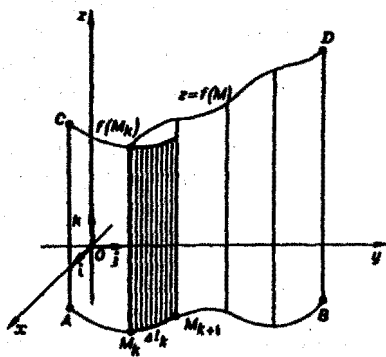


Рис. 11

площади

$$S = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta l_k.$$

Предел справа по определению есть криволинейный интеграл первого рода от функции $f(M)$ по кривой AB . Итак,

$$S = \int_{AB} f(M) dl. \quad (2)$$

Пример 1. Вычислить площадь части боковой поверхности цилиндра

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

срезанного сверху поверхностью

$$xy = 2Rz.$$

◀ Сведем задачу к вычислению криволинейного интеграла 1-го рода от функции

$$z = \frac{xy}{2R}$$

вдоль дуги окружности, расположенной в первой четверти. Будем иметь

$$S = \int_{AB} \frac{xy}{2R} dl.$$

Параметрические уравнения линии AB —

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = R dt$$

и

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos t \cdot R \sin t \cdot R dt}{2R} = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{4}.$$

4.3. Площадь плоской фигуры

Ранее мы установили, что площадь S плоской фигуры D , ограниченной линией L , вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (3)$$

Правая часть есть криволинейный интеграл 2-го рода.

4.4. Работа силы

Пусть в некоторой плоской области D , содержащей кривую AB , задана сила

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j}, \quad (4)$$

где функции $P(M)$ и $Q(M)$, а следовательно, и $\mathbf{F}(M)$ предполагаются непрерывными функциями точки M . Требуется найти работу силы $\mathbf{F}$, если под действием этой силы материальная точка M , имеющая единичную массу, переместилась из точки A в точку B по кривой AB .

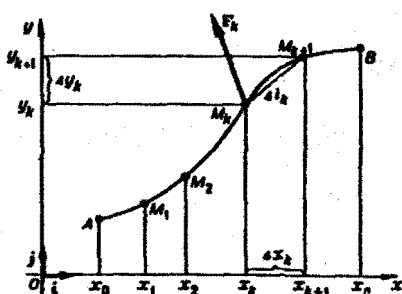


Рис. 12

Для решения этой задачи разделим кривую AB на n частей точками

$$A = M_0, M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, \dots, M_n = B$$

(рис. 12), заменим каждую дугу $\sim M_k M_{k+1}$ хордой $M_k M_{k+1}$ и, предполагая для простоты, что на участке $\sim M_k M_{k+1}$ кривой (а значит, и на хорде $M_k M_{k+1}$) сила F_k имеет постоянное значение, например, равное ее значению в точке M_k ,

$$F_k = F(M_k), \quad (5)$$

получим приближенное выражение работы силы на участке пути $\sim M_k M_{k+1}$:

$$W_k \approx |F_k| \cdot |\Delta l_k| \cdot \cos(\widehat{F_k, \Delta l_k}), \quad (6)$$

где $|F_k|$ — длина вектора F_k , $|\Delta l_k|$ — длина вектора Δl_k

$$\Delta l_k = M_k M_{k+1} = \Delta x_k \mathbf{i} + \Delta y_k \mathbf{j}. \quad (7)$$

Из формулы (4) с учетом (5) получим

$$F_k = P(M_k) \mathbf{i} + Q(M_k) \mathbf{j},$$

или

$$F_k = P(x_k, y_k) \mathbf{i} + Q(x_k, y_k) \mathbf{j}. \quad (8)$$

Так как правая часть формулы (6) есть скалярное произведение векторов F_k и Δl_k , то, учитывая (7) и (8), будем иметь

$$W_k \approx (F_k, \Delta l_k) = P(x_k, y_k) \Delta x_k + Q(x_k, y_k) \Delta y_k.$$

Суммируя по всем значениям k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), получим величину

$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k, y_k) \Delta x_k + Q(x_k, y_k) \Delta y_k,$$

приближенно выражающую работу силы $F(M)$ на всем пути от A до B . Предел этой суммы при $\Delta x_k \rightarrow 0$ и $\Delta y_k \rightarrow 0$ принимают за точное значение работы. Но с другой стороны, предел этой суммы есть криволинейный интеграл 2-го рода от вектор-функции $F(M)$ по кривой AB . Итак, работа силы вычисляется по формуле

$$W = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (9)$$

Пример 2. Найти работу силы

$$F = x^2 \mathbf{j}$$

при перемещении единичной массы по параболе

$$y^2 = 1 - x$$

от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 1)$ (рис. 13).

◀ Применим формулу (9), положив в ней

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = x^2.$$

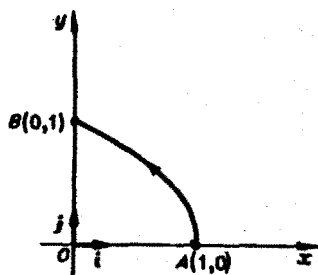


Рис. 13

Так как

$$x = 1 - y^2,$$

то искомую работу можно вычислить так:

$$W = \int_{AB} x^2 dy = \int_0^1 (1 - y^2)^2 dy = \int_0^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy = \frac{8}{15}. \blacktriangleright$$

Обобщение на случай пространственной кривой
(рис. 14).

Если в некоторой пространственной области Ω , содержащей пространственную кривую AB , задана сила

$$F(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k},$$

где $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ — непрерывные функции в области Ω , то работа, совершаемая силой $F(M)$ по перемещению материальной точки M с единичной массой из точки A в точку B по пространственной кривой AB , равна

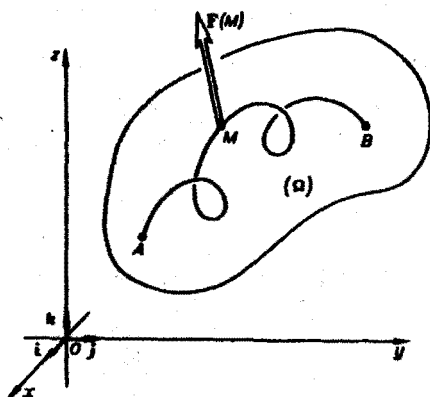


Рис. 14

$$W = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Упражнения

Вычислите криволинейные интегралы 1-го рода:

1. $\int_L xy \, dl$, где L — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.
2. $\int_L (x - y) \, dl$, где L — окружность $x^2 + y^2 = 2ax$.
3. $\int_L \frac{dl}{x - y}$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $(0, -2)$ и $(4, 0)$.
4. $\int_L x \, dl$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$.
5. $\int_L y \, dl$, где L — дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, \sqrt{2})$.
6. $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, где L — первый виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

7. Найдите длину дуги конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, a)$. **Указание:** точке A соответствует значение параметра $t_1 = -\infty$, а точке B — значение $t_2 = 0$.

8. Найдите площадь боковой поверхности кругового цилиндра, находящейся под первым витком винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ и выше плоскости $z = 0$.

9. Найдите координаты центра тяжести однородной полуарки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Вычислите криволинейные интегралы 2-го рода:

10. $\int_L y \, dx + x \, dy$, где L — дуга кривой $y = x^3$ от точки $(0, 0)$ до точки $(2, 8)$.

11. $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, где L — верхняя половина эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

12. $\int_{AB} \sqrt{y} dx + \frac{x dy}{2\sqrt{y}}$, где точки $A(0, 0)$ и $B(2, 1)$ соединены кривой

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

13. $\int_L (2a - y) dx + x dy$, где L — дуга первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

14. $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, где L — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Указание. Используйте параметрические уравнения окружности.

15. $\int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где L — виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

16. $\int_L y dx + z dy + x dz$, где L — ломаная $OABC$ с вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$, $C(a, a, a)$.

17. Найдите массу дуги AB кривой $y = \ln x$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки, причем $A(1, 0)$, $B(3, \ln 3)$.

18. Найдите длину дуги кривой $x = 2 - \frac{t^2}{4}$, $y = \frac{t^3}{6}$ между ее точками пересечения с осями координат.

19. Найдите площадь, ограниченную астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

20. Найдите работу силового поля $F = (x + y)i - xj$, когда точка массы m описывает окружность $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, двигаясь по ходу часовой стрелки.

21. Поле образовано силой $F = (x, y)i + xj$. Вычислите работу при перемещении единицы массы по контуру квадрата со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm a$.

Применив формулу Грина, вычислите интегралы в задачах 22–24:

22. $\int_C y^2 dx + (x + y)^2 dy$ по контуру $\triangle ABC$ с вершинами $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$.

23. $\oint_C 2x(y - 1) dx + x^2 dy$ по контуру фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 9$.

24. $\oint_C (2x - 3y) dx + (x - y) dy$ вдоль единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ в положительном направлении.

25. Вычислите интеграл $\int_C \frac{dx - dy}{x + y}$ вдоль контура квадрата с вершинами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ при положительном направлении обхода.

Ответы

1. $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}$. 2. $2\pi a^2$. **Указание.** Перейдите к полярным координатам. 3. $\sqrt{5} \ln 2$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$.
6. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctg \frac{2\pi b}{a}$. 7. $a\sqrt{3}$. 8. $2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}$. 9. $x_c = \frac{4a}{3}$, $y_c = \frac{4a}{3}$. **Указание.** Воспользуйтесь

формулами $x_c = \frac{1}{|z|} \int_0^{\pi} x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$, $y_c = \frac{1}{|z|} \int_0^{\pi} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$, где $|z| = \int_0^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 4a$. 10. 16.

11. $-\frac{4}{3}ab^2$. 12. 3. 13. $-2\pi a^2$. 14. -2π . 15. $-2\pi a(a+b)$. 16. a^2 . 17. $\frac{4}{3}(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$. 18. $\frac{13}{3}$.

19. $\frac{3\pi a^2}{8}$. 20. $2\pi ta^2$. 21. $\pm 8a^2$ (в зависимости от направления обхода). 22. $\frac{2}{3}a^3$. 23. 0. 24. 4π .

25. -4 . **Указание.** Данный интеграл несобственный, так как в точках пересечения контура интегрирования с прямой $x + y = 0$ подынтегральное выражение принимает вид $\frac{0}{0}$. Формулу Грина применять нельзя.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению

Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины. Поле называется *скалярным*, если рассматриваемая величина скалярна, т. е. вполне характеризуется своим числовым значением. Например, поле температур.

Скалярное поле задается скалярной функцией точки $u = f(M)$. Если в пространстве введена декартова система координат, то u есть функция трех переменных x, y, z — координат точки M :

$$u = f(x, y, z). \quad (1)$$

Определение. Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в которых функция $f(M)$ принимает одно и то же значение. Уравнение поверхности уровня

$$f(x, y, z) = c = \text{const}. \quad (2)$$

Пример 1. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

◀ Согласно определению уравнением поверхности уровня будет

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \quad (c > 0).$$

Это уравнение сферы ($c \neq 0$) с центром в начале координат. ▶

Скалярное поле называется *плоским*, если во всех плоскостях, параллельных некоторой плоскости, поле одно и то же. Если указанную плоскость принять за плоскость xOy , то функция поля не будет зависеть от координаты z , т. е. будет функцией только аргументов x и y ,

$$u = f(x, y). \quad (3)$$

Плоское поле можно характеризовать с помощью линий уровня — множества точек плоскости, в которых функция $f(x, y)$ имеет одно и то же значение. Уравнение линии уровня —

$$f(x, y) = c = \text{const}. \quad (4)$$

Пример 2. Найти линии уровня скалярного поля

$$u = x^2 - y^2.$$

◀ Линии уровня задаются уравнениями

$$x^2 - y^2 = c.$$

При $c = 0$ получаем пару прямых $y = x$, $y = -x$.

При $c \neq 0$ получаем семейство гипербол (рис. 1). ▶

1.1. Производная по направлению

Пусть имеется скалярное поле, определяемое скалярной функцией $u = f(M)$. Возьмем точку M_0 и выберем направление, определяемое вектором l . Возьмем другую точку M так, чтобы вектор M_0M был параллелен вектору l (рис. 2). Обозначим длину вектора M_0M через Δl , а приращение функции $f(M) - f(M_0)$, соответствующее перемещению Δl , через Δu . Отношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l} \quad (5)$$

определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению l .

Пусть теперь Δl стремится к нулю так, чтобы вектор M_0M все время оставался параллельным вектору l .

Определение. Если при $\Delta l \rightarrow 0$ существует конечный предел отношения (5), то его называют *производной функции $u = f(M)$ в данной точке M_0 по данному направлению l* и обозначают символом $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$.

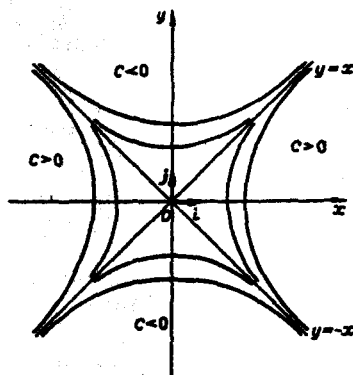


Рис. 1

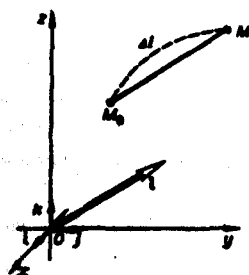


Рис. 2

Так что, по определению,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}, \quad M_0M \parallel l. \quad (6)$$

Это определение не связано с выбором системы координат, т. е. носит *инвариантный* характер.

Найдем выражение для производной по направлению в декартовой системе координат. Пусть функция $f(M) = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим значение $f(M)$ в точке $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$. Тогда полное приращение функции можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \Delta y + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \Delta z + \epsilon \cdot \Delta l, \end{aligned}$$

где $\epsilon \rightarrow 0$ при $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \rightarrow 0$, а символы $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0}$ означают, что частные производные вычислены в точке M_0 . Отсюда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}. \quad (7)$$

Здесь величины $\frac{\Delta x}{\Delta l}$, $\frac{\Delta y}{\Delta l}$, $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ суть направляющие косинусы вектора $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$. Так как векторы $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ и $\mathbf{l}$ сонаправлены ($\mathbf{M}_0\mathbf{M} \parallel \mathbf{l}$), то их направляющие косинусы одинаковы:

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos \beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos \gamma,$$

где

$$\mathbf{l}^0 = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}.$$

Так как $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_0$, оставаясь все время на прямой, параллельной вектору $\mathbf{l}$, то углы α , β , γ постоянны, а потому

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos \alpha, \quad \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos \beta, \quad \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos \gamma. \quad (8)$$

Окончательно из равенств (7) и (8) получаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cdot \cos \gamma. \quad (9)$$

Замечание 1. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ являются производными функции u по направлениям координатных осей Ox , Oy , Oz соответственно.

Пример 3. Найти производную функции

$$u = xe^y + ye^z - z^2$$

в точке $M_0(3, 0, 2)$ по направлению к точке $M_1(4, 1, 3)$.

◀ Имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (e^y + ye^z)|_{M_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (xe^y + e^z)|_{M_0} = 3 + e^3, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = -2z|_{M_0} = -4.$$

Вектор $\mathbf{M}_0\mathbf{M} = \{1, 1, 1\}$ имеет длину $|\mathbf{M}_0\mathbf{M}| = \sqrt{3}$. Его направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По формуле (9) будем иметь

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (3 + e^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^3}{\sqrt{3}}.$$

Тот факт, что $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$, означает, что скалярное поле в точке M_0 в данном направлении возрастает. ▶

Для плоского поля $U = f(x, y)$ производная по направлению $\mathbf{l}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cdot \sin \alpha,} \quad (10)$$

где α — угол, образованный вектором $\mathbf{l}$ с осью Ox .

Замечание 2. Формула (9) для вычисления производной по направлению $\mathbf{l}$ в данной точке M_0 остается в силе и тогда, когда точка $\mathbf{M}$ стремится к точке M_0 по кривой, для которой вектор $\mathbf{l}$ является касательным в точке M_0 .

Пример 4. Вычислить производную скалярного поля

$$u = \operatorname{arctg}(xy)$$

в точке $M_0(1, 1)$, принадлежащей параболе $y = x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания абсциссы).

◀ Направлением l параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1, 1)$ считается направление касательной к параболе в этой точке (рис. 3).

Пусть касательная к параболе в точке M_0 образует с осью Ox угол α . Тогда $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)|_{x=1} = 2$, откуда направляющие косинусы касательной

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Вычислим значения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точке $M_0(1, 1)$. Имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \left. \frac{y}{1 + x^2 y^2} \right|_{M_0} = \frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \left. \frac{x}{1 + x^2 y^2} \right|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

Теперь по формуле (10) получаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}. \blacktriangleright$$

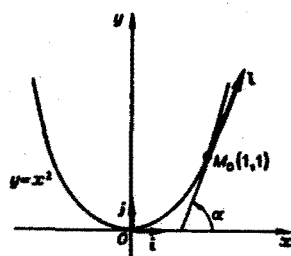


Рис. 3

Пример 5. Найти производную скалярного поля $u = \ln(xy + yz + zx)$ в точке $M_0(0, 1, 1)$ по направлению окружности

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

◀ Векторное уравнение окружности имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}.$$

Находим единичный вектор τ касательной к окружности

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cdot \mathbf{i} + \cos t \cdot \mathbf{j}.$$

Точке $M_0(0, 1, 1)$ соответствует значение параметра $t = \frac{\pi}{2}$. Значение τ в точке M_0 будет равно

$$\tau|_{M_0} = -\sin \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{i} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{j} = -1 \cdot \mathbf{i}.$$

Отсюда получаем направляющие косинусы касательной к окружности в точке M_0 : $\cos \alpha = -1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$.

Вычислим значения частных производных данного скалярного поля в точке $M_0(0, 1, 1)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = \left. \frac{y + z}{xy + yz + zx} \right|_{M_0} = 2,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = \left. \frac{x + z}{xy + yz + zx} \right|_{M_0} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = \left. \frac{y + x}{xy + yz + zx} \right|_{M_0} = 1.$$

Значит, искомая производная

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{M_0} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -2. \blacktriangleright$$

§ 2. Градиент скалярного поля

Пусть скалярное поле определяется скалярной функцией

$$u = f(x, y, z),$$

которая предполагается дифференцируемой.

Определение. Градиентом скалярного поля u в данной точке M называется вектор, обозначаемый символом $\text{grad } u$ и определяемый равенством

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1)$$

Ясно, что этот вектор зависит как от функции f , так и от точки M , в которой вычисляется ее производная.

Пусть $\mathbf{l}^0$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{l}$, т. е.

$$\mathbf{l}^0 = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}. \quad (2)$$

Тогда формулу для производной по направлению можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \mathbf{l}^0), \quad (3)$$

тем самым производная от функ ии u по направлению $\mathbf{l}$ равна скалярному произведению градиента функ ии $u(M)$ на орт $\mathbf{l}^0$ направления $\mathbf{l}$.

2.1. Основные свойства градиента

Теорема 1. Градиент скалярного поля перпендикулярен к поверхности уровня (или к линии уровня, если поле плоское).

◀ Проведем через произвольную точку M поверхность уровня $u = \text{const}$ и выберем на этой поверхности гладкую кривую L , проходящую через точку M (рис. 4). Пусть $\mathbf{l}$ — вектор, касательный к кривой L в точке M .

Так как на поверхности уровня $u(M) = u(M_1)$ для любой точки $M_1 \in L$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ (M_1 \rightarrow M \text{ по } L)}} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l} = 0.$$

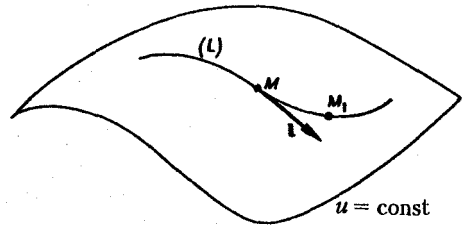


Рис. 4

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \mathbf{l}^0)$. Поэтому $(\text{grad } u, \mathbf{l}^0) = 0$. Это означает, что векторы $\text{grad } u$ и $\mathbf{l}^0$ ортогональны, $\text{grad } u \perp \mathbf{l}^0$.

Итак, вектор $\text{grad } u$ ортогонален к любой касательной к поверхности уровня в точке M . Тем самым он ортогонален к самой поверхности уровня в точке M . ▶

Теорема 2. Градиент направлен в сторону возрастания функции поля.

◀ Ранее мы доказали, что градиент скалярного поля направлен по нормали к поверхности уровня, которая может быть ориентирована либо в сторону возрастания функции $u(M)$, либо в сторону ее убывания.

Обозначим через $\mathbf{n}$ нормаль к поверхности уровня, ориентированную в сторону возрастания функции $u(M)$, и найдем производную функции u в направлении этой нормали (рис. 5). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ (M_1 \rightarrow M \text{ по } \mathbf{n})}} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}.$$

Так как по условию $u(M_1) > u(M)$, то $u(M_1) - u(M) > 0$, и поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, \mathbf{n}^0) \geq 0,$$

т. е. $(\text{grad } u, \mathbf{n}^0) \geq 0$.

Отсюда следует, что $\text{grad } u$ направлен в ту же сторону, что и выбранная нами нормаль $\mathbf{n}$, т. е. в сторону возрастания функции $u(M)$. ▶

Теорема 3. Длина градиента равна наибольшей производной по направлению в данной точке поля,

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (4)$$

(здесь $\max \frac{\partial u}{\partial l}$ берется по всевозможным направлениям в данной точке M поля).

◀ Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u, \mathbf{l}^0) = |\text{grad } u| \cdot 1 \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{l}$ и $\text{grad } u$. Так как наибольшее значение $\cos \varphi$ равно 1, то наибольшим значением производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ как раз и является $|\text{grad } u|$. ▶

Пример 1. Найти направление наибольшего изменения скалярного поля

$$u = xy + yz + zx$$

в точке $M_0(1, 1, 1)$, а также величину этого наибольшего изменения в указанной точке.

◀ Направление наибольшего изменения скалярного поля указывается вектором $\text{grad } u(M)$. Имеем

$$\text{grad } u(M) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k},$$

так что

$$\text{grad } u(M_0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Этот вектор определяет направление наибольшего возрастания поля в точке $M_0(1, 1, 1)$. Величина наибольшего изменения поля в этой точке равна

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = \|\text{grad } u(M_0)\| = 2\sqrt{3}. \quad \blacktriangleright$$

2.2. Инвариантное определение градиента

Величины, характеризующие свойства изучаемого объекта и не зависящие от выбора системы координат, называются *инвариантами* данного объекта. Например, длина кривой — инвариант этой кривой, а угол касательной к кривой с осью Ox — не инвариант.

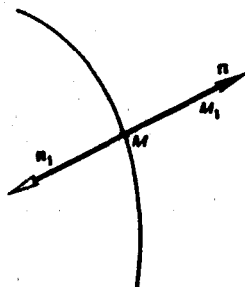


Рис. 5

Основываясь на доказанных выше трех свойствах градиента скалярного поля, можно дать следующее инвариантное определение градиента.

Определение. Градиент скалярного поля есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции поля и имеющий длину, равную наибольшей производной по направлению (в данной точке).

Пусть $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор нормали, направленный в сторону возрастания поля. Тогда

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \mathbf{n}^0. \quad (5)$$

Пример 2. Найти градиент расстояния

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка, а $M(x, y, z)$ — текущая.

◀ Имеем

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \mathbf{r}^0,$$

где $\mathbf{r}^0$ — единичный вектор направления M_0M . ▶

2.3. Правила вычисления градиента

1. $\text{grad } cu(M) = c \text{ grad } u(M)$, где c — постоянное число.

2. $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$.

Приведенные формулы получаются непосредственно из определения градиента и свойств производных.

3. $\text{grad}(u \cdot v) = v \text{ grad } u + u \text{ grad } v$.

◀ По правилу дифференцирования произведения

$$\begin{aligned} \text{grad}(u \cdot v) &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} \mathbf{k} = \\ &= \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{k} = \\ &= v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= v \text{ grad } u + u \text{ grad } v. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

4. $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}$, $v \neq 0$.

◀ Доказательство аналогично доказательству свойства 3. ▶

5. Пусть $F(u)$ — дифференцируемая скалярная функция. Тогда

$$\text{grad } F(u) = F'(u) \text{ grad } u.$$

◀ По определению градиента имеем

$$\text{grad } F(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F(u)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F(u)}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Применим ко всем слагаемым правой части правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$\operatorname{grad} F(u) = F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + F'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = F'(u) \operatorname{grad} u.$$

В частности,

$$\operatorname{grad} F(\mathbf{r}) = F'(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}^0. \quad (6)$$

Формула (6) следует из формулы $\operatorname{grad} r = \mathbf{r}^0$. ►

Пример 3. Найти производную по направлению радиус-вектора $\mathbf{r}$ от функции $u = \sin r$, где $r = |\mathbf{r}|$.

◀ По формуле (3)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = (\operatorname{grad} \sin r, \mathbf{r}^0),$$

а по формуле (6) $\operatorname{grad} \sin r = \cos r \cdot \mathbf{r}^0$. В результате получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = (\cos r \cdot \mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0) = \cos r. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4. Пусть дано плоское скалярное поле

$$u = r_1 + r_2, \quad (7)$$

где r_1, r_2 — расстояния от некоторой точки $P(x, y)$ плоскости до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, $F_1 \neq F_2$.

Рассмотрим произвольный эллипс с фокусами F_1 и F_2 и докажем, что всякий луч света, вышедший из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса попадает в другой его фокус.

◀ Линии уровня функции (7) суть

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad a > 0. \quad (8)$$

Уравнения (8) описывают семейство эллипсов с фокусами в точках F_1 и F_2 .

Согласно результату примера 2 имеем

$$\operatorname{grad}(r_1 + r_2) = \mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0.$$

Тем самым градиент заданного поля равен вектору PQ диагонали ромба, построенного на ортах $\mathbf{r}_1^0$ и $\mathbf{r}_2^0$ радиус-векторов, проведенных к точке $P(x, y)$ из фокусов F_1 и F_2 , и значит, лежит на биссектрисе угла между этими радиус-векторами (рис. 6). По теореме 1 градиент PQ перпендикулярен к эллипсу (8) в точке $P(x, y)$. Следовательно, нормаль к эллипсу (8) в любой его точке делит пополам угол между радиус-векторами, проведенными в эту точку. Отсюда и из того, что угол падения равен углу отражения, получаем: луч света, вышедший из одного фокуса эллипса, отразившись от него, непременно попадает в другой фокус этого эллипса. ►

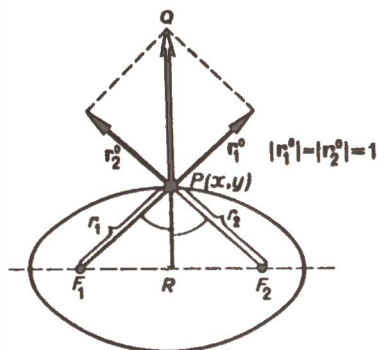


Рис. 6

§ 3. Векторное поле. Векторные линии и их дифференциальные уравнения

Определение. Если в каждой точке $M(x, y, z)$ пространства или части пространства определена векторная величина

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}, \quad (1)$$

то говорят, что там задано *векторное поле* $\mathbf{a}$.

Задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных функций от трех переменных $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Примерами векторных полей могут служить: силовое поле — поле некоторой силы $\mathbf{F}$, поле скоростей $\mathbf{v}$ течения некоторой жидкости и др.

Для геометрической характеристики векторного поля служат векторные линии. *Векторной линией* векторного поля $\mathbf{a}$ называется кривая, касательная к которой в любой точке M имеет то же направление, что и вектор поля $\mathbf{a}$ в этой точке (рис. 7).

В силовом поле векторные линии называются *силовыми линиями*; в поле скоростей движения жидкости векторные линии называются *линиями тока*.

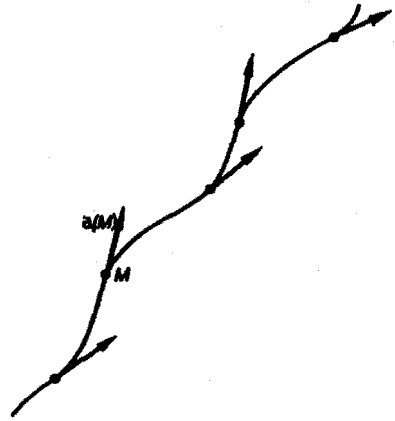


Рис. 7

3.1. Дифференциальные уравнения векторных линий

Пусть векторное поле определяется вектор-функцией

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции переменных x, y, z , имеющие ограниченные частные производные первого порядка.

Пусть

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

— есть радиус-вектор текущей точки векторной линии векторного поля $\mathbf{a}$ (t — параметр). Из определения векторной линии следует, что вектор

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

и вектор касательной к этой кривой

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

должны быть коллинеарны в каждой точке векторной линии. Условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (2)$$

Таким образом, мы получили для векторных линий систему дифференциальных уравнений в симметричной форме.

Допустим, что нам удалось найти два независимых интеграла системы (2):

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = c_1, \\ \varphi_2(x, y, z) = c_2. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) определяет векторную линию как линию пересечения двух поверхностей. Произвольно меняя параметры c_1 и c_2 , мы получаем семейство векторных линий как семейство с двумя степенями свободы.

Пример 1. Найти векторные линии векторного поля

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

◀ Выписываем дифференциальные уравнения векторных линий,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z},$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z}.$$

Интегрируя эту систему, получим два уравнения

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x^2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пересечение плоскостей $y = c_1 x$ с параболическими цилиндрами $z = c_2 x^2$ дает двухпараметрическое семейство векторных линий поля (рис.8). ▶

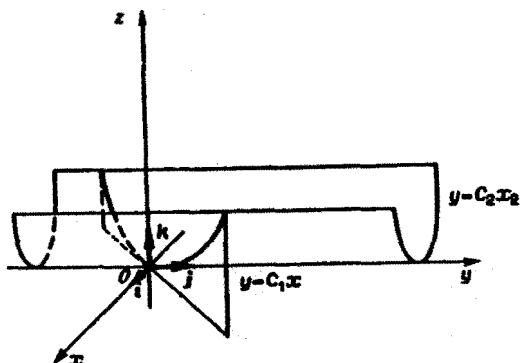


Рис. 8

Определение. Векторное поле называется *плоским*, если все векторы $\mathbf{a}$ параллельны одной и той же плоскости и в каждой плоскости, параллельной указанной, векторное поле одно и то же.

Посмотрим, как плоское векторное поле описывается в координатах. Если указанную в определении плоскость (или любую ей параллельную) принять за плоскость xOy , то векторы плоского поля не будут содержать компоненты по оси Oz и координаты векторов не будут зависеть от z :

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения векторных линий плоского поля можно записать в следующем виде

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} = \frac{dz}{0},$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \\ z = \text{const}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Отсюда видно, что векторные линии плоского поля являются плоскими кривыми, лежащими в плоскостях, параллельных плоскости xOy .

Пример 2. Найти векторные линии магнитного поля бесконечно длинного прямого провода.

◀ Предположим, что проводник направлен вдоль оси Oz и по нему течет ток силы J , т. е. вектор тока $\mathbf{J} = J \cdot \mathbf{k}$.

Тогда вектор напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля определяется по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\rho^2} [J, \mathbf{r}], \quad (6)$$

где

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

— радиус-вектор точки M , ρ — расстояние от оси провода до точки M . Раскрывая векторное произведение (6), получим

$$\mathbf{H} = -\frac{2Jy}{\rho^2} \mathbf{i} + \frac{2Jx}{\rho^2} \mathbf{j}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{-\frac{2Jy}{\rho^2}} = \frac{dy}{\frac{2Jx}{\rho^2}} = \frac{dz}{0}.$$

Отсюда $z = \text{const}$, $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, или $x dx + y dy = 0$. Окончательно имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ z = C_2, \end{cases}$$

т. е. векторные линии являются окружностями с центрами на оси Oz (рис. 9). ►

Пример 3. Найти векторные линии поля сил тяготения, образованного притягивающей материальной точкой массы m , расположенной в начале координат.

◀ В данном случае сила $\mathbf{F}$ определяется так:

$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{\gamma m x \mathbf{i}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\gamma m y \mathbf{j}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\gamma m z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Дифференциальные уравнения векторных линий:

$$\frac{dx}{-\frac{\gamma m x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}} = \frac{dy}{-\frac{\gamma m y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}} = \frac{dz}{-\frac{\gamma m z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}},$$

откуда, умножая каждую из дробей на $-\frac{\gamma m}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Чтобы получить уравнения векторных линий в параметрической форме, приравняем каждую из дробей величине $\frac{dt}{t}$. Имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t},$$

$$x = C_1 t, \quad y = C_2 t, \quad z = C_3 t.$$

Это — полупрямые, выходящие из начала координат.

Чтобы из семейства векторных линий выделить одну, надо задать точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую эта векторная линия должна проходить, и по координатам заданной точки определить величины C_1, C_2, C_3 .

Пусть, например, точка M_0 имеет координаты $x_0 = 3, y_0 = 5, z_0 = 7$. Уравнение векторной линии, проходящей через точку $M_0(3, 5, 7)$, можно записать так:

$$x = 3t, \quad y = 5t, \quad z = 7t.$$

Сама точка M_0 получается при значении параметра $t = 1$. ►

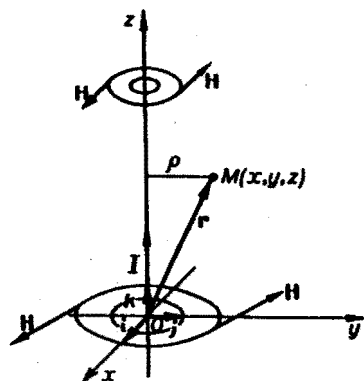


Рис. 9

§ 4. Поток вектора через поверхность и его свойства

Рассмотрим сначала частный случай поля скоростей $\mathbf{v}$ течения жидкости. Выделим в поле некоторую поверхность Σ . *Потоком* жидкости через поверхность Σ называется количество жидкости, протекающее через поверхность Σ за единицу времени.

Этот поток легко вычислить, если скорость течения постоянна ($\mathbf{v} = \text{const}$), а поверхность Σ — плоская. В этом случае поток жидкости равен объему цилиндрического тела с параллельными основаниями и образующими длины $|\mathbf{v}|$, так как за единицу времени каждая частица перемещается на величину $\mathbf{v}$ (рис. 10),

$$\Pi = Sh,$$

где S — площадь основания, $h = \text{pr}_{\mathbf{n}} \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{n}^0)$ — высота цилиндра и $\mathbf{n}$ — нормаль к его основанию, $|\mathbf{n}^0| = 1$.

Итак, при постоянной скорости $\mathbf{v}$ поток жидкости через плоскую поверхность Σ равен

$$\Pi = (\mathbf{v}, \mathbf{n}^0) \cdot S. \quad (1)$$

Если скорость $\mathbf{v}$ изменяется непрерывно, а поверхность Σ — гладкая, то можно разбить поверхность Σ на столь малые части Σ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), чтобы каждую часть Σ_k можно было приближенно считать плоской и вектор $\mathbf{v}$ на ней постоянным.

Так как поток жидкости через поверхность Σ равен сумме потоков жидкости через все ее части Σ_k , то мы получаем для вычисления потока приближенную формулу

$$\Pi \simeq \sum_{k=1}^n (\mathbf{v}, \mathbf{n}^0)_{P_k} \cdot \Delta\sigma_k, \quad (2)$$

где n — общее число частей Σ_k , на которые разбита поверхность Σ , P_k — точка, лежащая на k -ой части, $\Delta\sigma_k$ — площадь части Σ_k поверхности, $(\mathbf{v}, \mathbf{n}^0)_{P_k}$ означает скалярное произведение векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}^0$ в точке $P_k \in \Sigma_k$ (рис. 11).

Назовем *поток жидкости через поверхность Σ* предел суммы (2) при стремлении к нулю наибольшего из диаметров площадок Σ_k ,

$$\begin{aligned} \Pi &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\mathbf{v}, \mathbf{n}^0)_{P_k} \cdot \Delta\sigma_k = \\ &= \iint_{\Sigma} (\mathbf{v}, \mathbf{n}^0) d\sigma, \end{aligned} \quad (3)$$

где d — наибольший из диаметров частей Σ_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Интеграл (3), определяющий поток жидкости, берется от скалярной функции $(\mathbf{v}, \mathbf{n}^0)$ по площади поверхности Σ .

Понятие потока произвольного вектора $\mathbf{a}$ через поверхность Σ вводится по аналогии с введенным выше понятием потока жидкости через поверхность.

Определение. *Поток вектора (векторного поля) $\mathbf{a}$ через поверхность Σ называется интеграл по поверхности Σ от проекции вектора $\mathbf{a}$ на нормаль к поверхности*

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma \quad (4)$$

(или $\iint_{\Sigma} a_n d\sigma$, или $\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, d\sigma)$, где $a_n = (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)$ и $d\sigma = \mathbf{n}^0 d\sigma$). Ясно, что интеграл (4) существует, если вектор $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ непрерывен, т. е. непрерывны его координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, и поверхность Σ — гладкая, т. е. имеет непрерывно меняющуюся касательную плоскость.

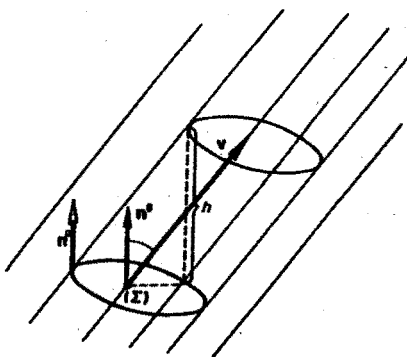


Рис. 10

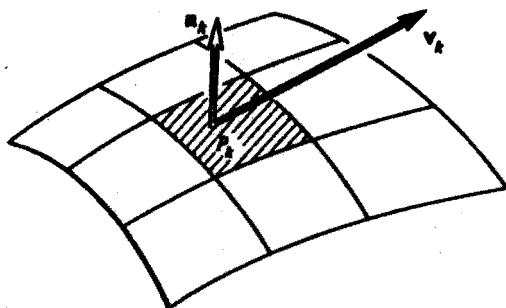


Рис. 11

Пример 1. Поле создается точечным зарядом (электрическое поле) или точечной массой (поле тяготения), помещенными в начале координат. Тогда вектор напряженности поля в любой точке P будет равен

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

где q — величина заряда (массы), $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ — радиус-вектор точки P . Требуется найти поток вектора напряженности $\mathbf{E}$ через S_R — сферу радиуса R с центром в начале координат.

◀ Так как направление нормали к сфере совпадает с направлением радиус-вектора $\mathbf{r}$, то $\mathbf{n}^0 = \mathbf{r}^0$ и поэтому

$$(\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) = (\mathbf{E}, \mathbf{r}^0) = \frac{q}{r^2}.$$

На сфере S_R радиуса R имеем $r = R$, так что $(\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) = \frac{q}{R^2} = \text{const}$. Поэтому поток вектора через S_R равен

$$\Pi = \iint_{S_R} (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \frac{q}{R^2} \iint_{S_R} d\sigma = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \blacktriangleright$$

4.1. Свойства потока вектора через поверхность

1. Линейность.

$$\iint_{\Sigma} (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \lambda \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma + \mu \iint_{\Sigma} (\mathbf{b}, \mathbf{n}^0) d\sigma, \quad (5)$$

где λ и μ — постоянные числа.

2. Аддитивность. Если поверхность Σ разбита кусочно-гладкой кривой на две части Σ_1 и Σ_2 , то поток через поверхность Σ равен сумме потоков через поверхности Σ_1 и Σ_2 ,

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma. \quad (6)$$

Это свойство позволяет распространить понятие потока на кусочно-гладкие поверхности Σ .

Понятие ориентации поверхности

Взяв, к примеру, цилиндрическую поверхность, замечаем, что если в некоторой ее точке M выбрать определенный (один из двух) единичный вектор нормали и непрерывно перемещаться затем по поверхности вместе с соответствующим вектором нормали по любому пути, не переходящему через край поверхности, то при возвращении в точку M единичный вектор нормали совпадает с исходным (рис. 12).

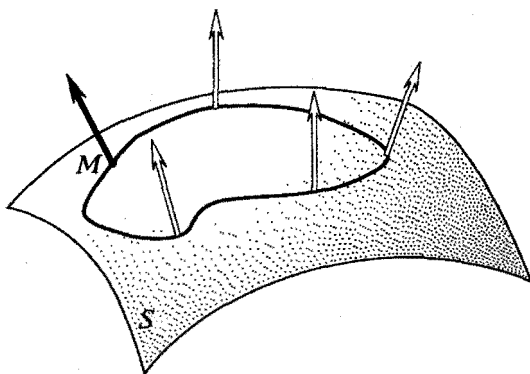


Рис. 12

Вместе с тем, существуют поверхности, для которых это не так. Примером такой поверхности может служить лист Мёбиуса (рис. 13). Существует путь (отмеченная на рисунке пунктиром средняя линия листа), перемещаясь по которому, мы возвратимся в начальную точку с единичным вектором нормали, противоположным исходному.

Описанное свойство разбивает все поверхности на два класса — *двусторонние*, или *ориентируемые* (плоскость, сфера, поверхность куба и т. п.), и *односторонние*, или *неориентируемые* (лист Мёбиуса).

3. Зависимость потока от ориентации поверхности (от ориентации вектора нормали к поверхности).

Понятие потока вводится только для двусторонних поверхностей. Будем считать, что если в одной точке такой поверхности направление вектора нормали уже выбрано, то в любой другой ее точке берется тот вектор нормали, который получается из выбранного при непрерывном перемещении точки по поверхности (без перехода через границу).

В частности, на замкнутой поверхности во всех точках берется либо внешняя нормаль, либо внутренняя (внутренняя нормаль направлена внутрь тела, ограниченного замкнутой поверхностью).

Обозначим через Σ^+ ту сторону поверхности Σ , на которой выбран вектор нормали $\mathbf{n}_+ = \mathbf{n}$, а через Σ^- — сторону поверхности Σ , на которой берется вектор нормали ($\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}$). Тогда получим

$$\iint_{\Sigma^-} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_-) d\sigma = - \iint_{\Sigma^+} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_+) d\sigma, \quad (7)$$

где $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+$. Таким образом, при изменении ориентации поверхности (при изменении направления вектора нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности Σ) поток вектора меняет знак на противоположный.

Пример 2. Вычислить поток радиус-вектора

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через поверхность прямого кругового цилиндра высоты H с радиусом основания R и осью Oz .

« Поверхность Σ состоит из трех частей: боковой поверхности Σ_1 , верхнего основания Σ_2 и нижнего основания Σ_3 цилиндра. Искомый поток Π в силу свойства аддитивности равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

где Π_1, Π_2, Π_3 — потоки данного поля через Σ_1, Σ_2 и Σ_3 соответственно.

На боковой поверхности цилиндра вектор внешней нормали $\mathbf{n}_1^0$ параллелен плоскости xOy , и поэтому

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1^0) = \text{pr}_{\mathbf{n}_1^0} \mathbf{r} = R$$

(см. рис. 14). Следовательно,

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = R \iint_{\Sigma_1} d\sigma = R \cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H.$$

На верхнем основании Σ_2 вектор нормали $\mathbf{n}_2^0$ параллелен оси Oz , и поэтому можно положить $\mathbf{n}_2^0 = \mathbf{k}$. Тогда имеем

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2^0) = (\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \text{pr}_{\mathbf{k}} \mathbf{r} = H,$$

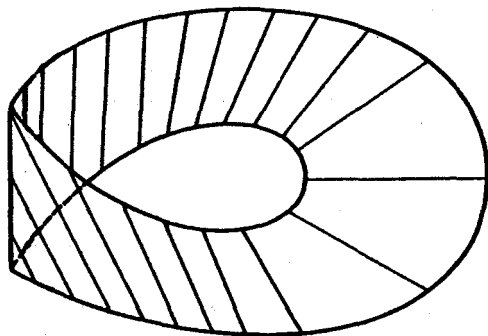


Рис. 13

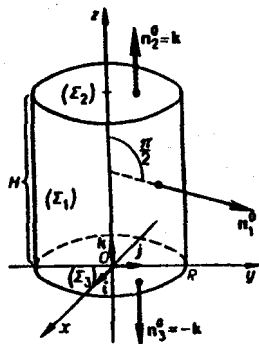


Рис. 14

так что

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma = H \iint_{\Sigma_2} d\sigma = \pi R^2 H.$$

На нижнем основании Σ_3 вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен к вектору нормали $\mathbf{n}_3^0 = -\mathbf{k}$. Поэтому $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3^0) = (\mathbf{r}, -\mathbf{k}) = 0$ и

$$\Pi_3 = \iint_{\Sigma_3} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_3^0) d\sigma = 0.$$

Значит, искомый поток

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 3\pi R^2 H.$$

Здесь символ $\oiint_{\Sigma}$ означает двойной интеграл по замкнутой поверхности. ►

§ 5. Поток вектора через незамкнутую поверхность

Укажем некоторые способы вычисления потока вектора через незамкнутые поверхности.

1. Метод проектирования на одну из координатных плоскостей. Пусть поверхность S однозначно проектируется на область D_{xy} плоскости xOy . В этом случае поверхность S можно задать уравнением вида

$$z = f(x, y).$$

Орт $\mathbf{n}^0$ нормали к поверхности S находится по формуле

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}. \quad (1)$$

Если в формуле (1) берется знак «-», то угол γ между осью Oz и нормалью $\mathbf{n}^0$ — острый; если же знак «+», то угол γ — тупой.

Так как элемент площади $d\sigma$ этой поверхности равен

$$d\sigma = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (2)$$

то вычисление потока Π через выбранную сторону поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dx dy. \quad (3)$$

Символ

$$\left. \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)}$$

означает, что при вычислении в подынтегральной функции надо вместо z всюду поставить $f(x, y)$.

Пример 1. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = y^2 \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

через часть поверхности параболоида

$$z = x^2 + y^2,$$

отсеченной плоскостью $z = 2$. По отношению к области, ограниченной параболоидом, берется внешняя нормаль (рис. 15).

« Данная поверхность проектируется на круг D_{xy} плоскости xOy с центром в начале координат радиуса $R = \sqrt{2}$. Находим орт $\mathbf{n}^0$ нормали к параболоиду:

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{2xi + 2yj - k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Согласно условию задачи вектор $\mathbf{n}^0$ образует с осью Oz тупой угол γ , поэтому перед дробью следует взять знак минус. Таким образом,

$$\mathbf{n}^0 = \frac{2xi + 2yj - k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}. \quad (4)$$

Находим скалярное произведение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Так как

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

и, значит, $\frac{1}{|\cos \gamma|} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$, то

$$\left. \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} = \left(\frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \right) \Big|_{z=x^2+y^2} = 2y^3 - x^2 - y^2.$$

Согласно формуле (3)

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (2y^3 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Вводя полярные координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, получаем

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^4 \sin^3 \varphi - \rho^3) d\rho = -2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \blacktriangleright$$

Если поверхность S проектируется однозначно на область D_{yz} плоскости yOz , то ее можно задать уравнением $x = \varphi(y, z)$. В этом случае имеем

$$d\sigma = \frac{dy dz}{|\cos \alpha|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2} dy dz, \quad (5)$$

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \alpha|} \right|_{x=\varphi(y,z)} dy dz, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{i - \frac{\partial \varphi}{\partial y} j - \frac{\partial \varphi}{\partial z} k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2}}. \quad (7)$$

Знак «+» в последней формуле соответствует тому, что угол α между осью Ox и вектором нормали $\mathbf{n}^0$ острый, и знак «-», если указанный угол тупой.

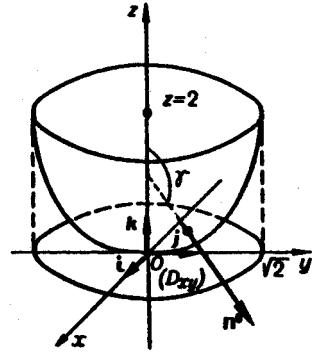


Рис. 15

Наконец, если поверхность S проектируется однозначно на область D_{xz} плоскости xOz , то ее можно задать уравнением $y = \psi(x, z)$ и тогда

$$d\sigma = \frac{dx dz}{|\cos \beta|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} dx dz, \quad (8)$$

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)}{|\cos \beta|} \Big|_{y=\psi(x,z)} dx dz, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \pm \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}. \quad (10)$$

Знак «+» перед дробью в формуле (10) означает, что угол β между осью Oy и вектором нормали $\mathbf{n}^0$ — острый, а знак «-», что угол β — тупой.

Замечание. Для нахождения потока потока вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

через поверхность S , заданную уравнением $z = f(x, y)$, методом проектирования на координатную плоскость xOy , не обязательно находить орт $\mathbf{n}^0$ нормали, а можно брать вектор

$$\mathbf{n} = \pm \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right).$$

Тогда формула (2) для вычисления потока Π примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{z=f(x,y)} \cdot dx dy = \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} \left\{ -P[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial x} - Q[x, y, f(x, y)] \frac{\partial f}{\partial y} + R[x, y, f(x, y)] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичные формулы получаются для потоков через поверхности, заданные уравнениями $x = \varphi(y, z)$ или $y = \psi(x, z)$.

Пример 2. Вычислить поток вектора

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i}$$

через внешнюю сторону параболоида

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad (z \geq 0),$$

ограниченного плоскостью $z = 0$ (рис. 16).

«Имеем

$$\mathbf{n} = \pm(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Так как угол γ — острый, следует выбрать знак «+». Отсюда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n})|_{z=f(x,y)} = 2x^2(1 - x^2 - y^2).$$

Искомый поток вычисляется так:

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} 2x^2(1 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, получим

$$\Pi = \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3(1 - \rho^2) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_{\rho=0}^1 (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{6}. \blacktriangleright$$

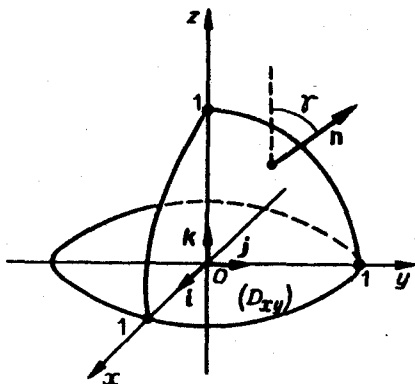


Рис. 16

2. Метод проектирования на все координатные плоскости. Пусть поверхность S однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Обозначим через D_{xy} , D_{xz} , D_{yz} проекции S на плоскости xOy , xOz , yOz соответственно. В этом случае уравнение $F(x, y, z) = 0$ поверхности S однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов, т. е.

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y). \quad (12)$$

Тогда поток вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

через поверхность S , единичный вектор нормали к которой равен

$$\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k},$$

можно записать так:

$$\Pi = \iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma. \quad (13)$$

Известно, что

$$\begin{cases} d\sigma \cdot \cos \alpha = \pm dy dz, \\ d\sigma \cdot \cos \beta = \pm dx dz, \\ d\sigma \cdot \cos \gamma = \pm dx dy, \end{cases} \quad (14)$$

причем знак в каждой из формул (14) выбирается таким, каков знак $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ на поверхности S . Подставляя соотношения (12) и (14) в формулу (13), получаем, что

$$\begin{aligned} \Pi = & \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz \pm \\ & \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z] dx dz \pm \\ & \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy. \end{aligned} \quad (15)$$

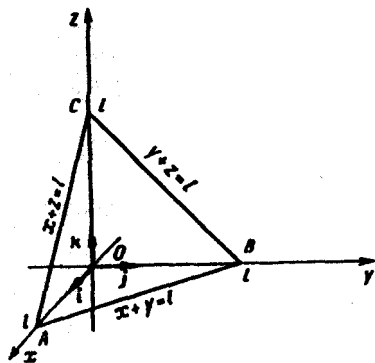


Рис. 17

Пример 3. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

через треугольник, ограниченный плоскостями $x + y + z = l$ ($l > 0$), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (угол γ — острый) (рис. 17).

◀ Имеем

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}},$$

так что

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Значит, перед всеми интегралами в формуле (15) следует взять знак «+». Полагая $P = y$, $Q = z$, $R = x$, получим

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} y dy dz + \iint_{D_{xz}} z dx dz + \iint_{D_{xy}} x dx dy. \quad (16)$$

Вычислим первый интеграл в правой части формулы (16). Область D_{yz} — треугольник BOC в плоскости yOz , уравнение стороны BC : $y + z = l$, $0 \leq y \leq l$. Имеем

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} y \, dy \, dz = \int_0^l y \, dy \int_0^{l-y} dz = \int_0^l (l-y)y \, dy = \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^l = \frac{l^3}{6}.$$

Аналогично получим

$$I_2 = \iint_{D_{xz}} z \, dx \, dz = \frac{l^3}{6}, \quad I_3 = \iint_{D_{xy}} x \, dx \, dy = \frac{l^3}{6}.$$

Значит, искомый поток равен

$$\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{l^3}{2}.$$

3. Метод введения криволинейных координат на поверхности. Если поверхность S является частью кругового цилиндра или сферы, при вычислении потока удобно, не применяя проектирования на координатные плоскости, ввести на поверхности криволинейные координаты.

А. Поверхность S является частью кругового цилиндра

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (17)$$

ограниченного поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ (рис. 18). Полагая $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$, будем иметь

$$f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi) \leq z \leq f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi),$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Элемент площади поверхности выражается так:

$$d\sigma = R d\varphi \, dz,$$

и поток вектора $\mathbf{a}$ через внешнюю сторону поверхности S вычисляется по формуле:

$$\Pi = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R \cos \varphi, R \sin \varphi)}^{f_2(R \cos \varphi, R \sin \varphi)} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \, dz, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{2xi + 2yj}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{xi + yj}{R}. \quad (19)$$

Пример 4. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = yi + xj - e^{xyz} \mathbf{k}$$

через внешнюю сторону поверхности цилиндра

$$x^2 + y^2 = 4,$$

ограниченной плоскостями

$$z = 0 \quad \text{и} \quad x + y + z = 4.$$

◀ Имеем

$$R = 2, \quad f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 4 - x - y.$$

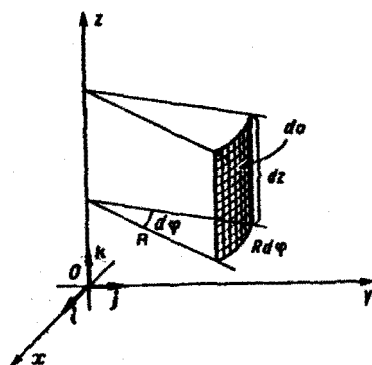


Рис. 18

Так как

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{R} = \frac{x}{2}\mathbf{i} + \frac{y}{2}\mathbf{j},$$

то скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)$ на цилиндре ($x = 2 \cos \varphi$, $y = 2 \sin \varphi$, $z = z$) равно:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = xy = 4 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Тогда по формуле (18) получим

$$\begin{aligned} \Pi &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) dz = 8 \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{4-2\cos\varphi-2\sin\varphi} dz = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} (4 \cos \varphi \sin \varphi - 2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

В. Поверхность S является частью сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (20)$$

ограниченной коническими поверхностями, уравнения которых в сферических координатах имеют вид $\theta = \theta_1(\varphi)$ и $\theta = \theta_2(\varphi)$, и полуплоскостями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ (рис. 19).

Точки данной сферы описываются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \sin \theta, & y &= R \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= R \cos \theta, \end{aligned}$$

где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Поэтому элемент площади

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В этом случае поток векторного поля $\mathbf{a}$ через внешнюю часть поверхности S вычисляется по формуле

$$\Pi = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\theta, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}. \quad (22)$$

Пример 5. Найти поток вектора

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

через внешнюю часть сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad (z \geq 2),$$

отсеченную плоскостью $z = 2$ (рис. 20).

◀ В данном случае имеем

$$R = 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{2}{3};$$

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3};$$

$$d\sigma = 9 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

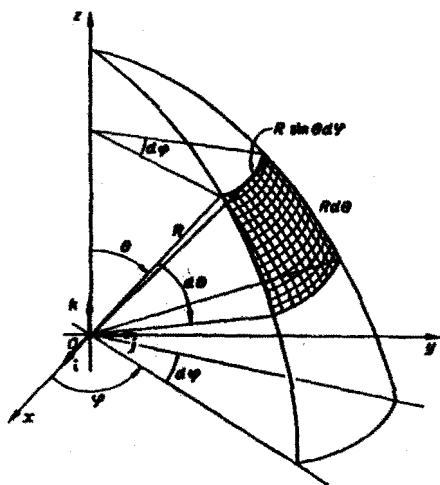


Рис. 19

Положим

$$x = 3 \sin \theta \cos \varphi, \quad y = 3 \sin \theta \sin \varphi, \quad z = 3 \cos \theta.$$

Тогда скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0)$ выразится так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = \frac{x^2 z + y^2 z + z^3}{3} = \frac{z(x^2 + y^2 + z^2)}{3} = 9 \cos \theta.$$

По формуле (21) получим

$$\Pi = 9 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos \frac{2}{3}} 9 \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta = 18 \cdot \pi \cdot 9 \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_{\theta=0}^{\theta=\arccos \frac{2}{3}} = 45\pi. \blacktriangleright$$

Замечание. Здесь мы воспользовались формулой

$$\sin^2(\arccos \alpha) = 1 - \cos^2(\arccos \alpha) = 1 - \alpha^2.$$

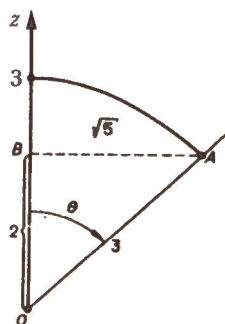


Рис. 20

§ 6. Поток вектора через замкнутую поверхность. Теорема Гаусса—Остроградского

Теорема 4. Если в некоторой области G пространства $\mathbb{R}^3$ координаты вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, то поток вектора $\mathbf{a}$ через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность S , лежащую в области G , равен тройному интегралу от

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

по области V , ограниченной поверхностью S :

$$\Pi = \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{n}^0$ — орт внешней нормали к поверхности, а символ $\oiint_S$ означает поток через замкнутую поверхность S . Эта формула называется **формулой Гаусса—Остроградского**.

◀ Рассмотрим сначала вектор $\mathbf{a}$, имеющий только одну компоненту $\mathbf{a} = R(x, y, z)\mathbf{k}$, и предположим, что гладкая поверхность S пересекается каждой прямой, параллельной оси Oz , не более чем в двух точках. Тогда поверхность S разбивается на две части S_1 и S_2 , однозначно проектирующиеся на некоторую область D плоскости xOy (рис. 21).

Внешняя нормаль к поверхности S_2 образует острый угол γ с осью Oz , а внешняя нормаль к поверхности S_1 образует тупой угол с осью Oz . Поэтому $\cos \gamma = (\mathbf{n}^0, \mathbf{k}) > 0$ на S_2 и $\cos \gamma < 0$ на S_1 , так что на S_2 имеем $\cos \gamma = |\cos \gamma|$, а на S_1 $\cos \gamma = -|\cos \gamma|$. В силу аддитивности потока имеем

$$\Pi = \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \oiint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \oiint_S R \cos \gamma d\sigma = \iint_{S_2} R \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_1} R \cos \gamma d\sigma =$$

$$= \iint_{S_2} R(x, y, z) |\cos \gamma| d\sigma - \iint_{S_1} R(x, y, z) |\cos \gamma| d\sigma. \quad (2)$$

Пусть $d\sigma$ — элемент площади на поверхности S . Тогда

$$|\cos \gamma| d\sigma = dS,$$

где dS — элемент площади области D . Сведем интегралы по поверхности к двойным интегралам по области D плоскости xOy , на которую проектируются поверхности S_1 и S_2 . Пусть S_2 описывается уравнением $z = z_2(x, y)$, а S_1 — уравнением $z = z_1(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dS - \\ &\quad - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dS = \\ &= \iint_D \{R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\} dS. \end{aligned} \quad (3)$$

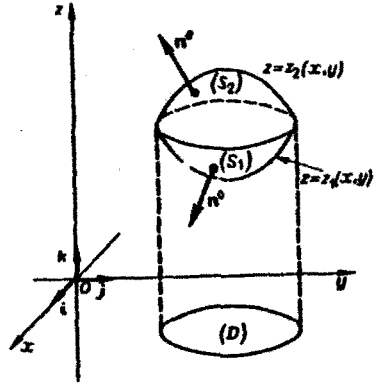


Рис. 21

Так как приращение непрерывно дифференцируемой функции можно представить как интеграл от ее производной

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} F'(z) dz,$$

то для функции $R(x, y, z)$ будем иметь

$$R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Пользуясь этим, получаем из формулы (3)

$$\iint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_D \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz,$$

т. е.

$$\iint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv. \quad (4)$$

Если поверхность S содержит часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz (рис. 22), то на этой части поверхности $(R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) = 0$ и интеграл $\iint (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma$ по ней равен нулю. Поэтому формула (4) остается справедливой и для поверхностей, содержащих указанные цилиндрические части.

Формула (4) переносится и на случай, когда поверхность S пересекается вертикальной прямой более, чем в двух точках (рис. 23). Разрежем область V на части,

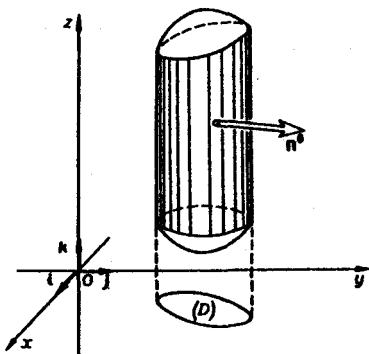


Рис. 22

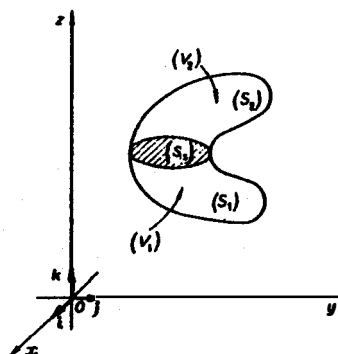


Рис. 23

поверхность каждой из которых пересекается вертикальной прямой не более чем в двух точках, и обозначим через S_p поверхность разреза. Пусть S_1 и S_2 — те части поверхности S , на которые она разбивается разрезом S_p , а V_1 и V_2 — соответствующие части области V , ограниченные поверхностями $S_1 \cup S_p^+$ и $S_2 \cup S_p^-$. Здесь S_p^+ означает, что вектор нормали к разрезу S_p направлен вверх (образует с осью Oz острый угол), а S_p^- — что этот вектор нормали направлен вниз (образует с осью Oz тупой угол). Имеем:

$$\iint_{S_1 \cup S_p^+} (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{V_1} \frac{\partial R}{\partial z} dv, \quad \iint_{S_2 \cup S_p^-} (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{V_2} \frac{\partial R}{\partial z} dv.$$

Складывая полученные равенства и пользуясь аддитивностью потока и тройного интеграла, получим

$$\iint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

(интегралы по разрезу S_p взаимно уничтожаются).

Рассмотрим, наконец, вектор

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Для каждой компоненты $P\mathbf{i}$, $Q\mathbf{j}$, $R\mathbf{k}$ мы можем написать формулу, аналогичную формуле (4) (все компоненты равноправны). Получим

$$\begin{aligned} \iint_S (P\mathbf{i}, \mathbf{n}^0) d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dv, & \iint_S (Q\mathbf{j}, \mathbf{n}^0) d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dv, \\ \iint_S (R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dv. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и пользуясь линейностью потока и тройного интеграла, получаем формулу Гаусса—Остроградского

$$\iint_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv. \blacktriangleright$$

Пример 1. Вычислить поток вектора

$$\mathbf{a} = 2xi - (z-1)k$$

через замкнутую поверхность

$$S = \{x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1\} :$$

1) по определению, 2) по формуле Остроградского.

◀ 1) Поток вектора $\mathbf{a}$ равен сумме

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

(рис. 24), где

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = \iint_{S_1} (z-1) d\sigma = - \iint_{S_1} d\sigma = -4\pi$$

($z = 0$ на поверхности S_1),

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma = - \iint_{S_2} (z-1) d\sigma = 0$$

($z = 1$ на поверхности S_2),

$$\Pi_3 = \iint_{S_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_3^0) d\sigma = - \iint_{S_3} x^2 d\sigma,$$

так как

$$\mathbf{n}_3^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2}.$$

Перейдем на цилиндре к криволинейным координатам

$$x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad z = z, \quad d\sigma = 2 d\varphi dz.$$

Тогда

$$\Pi_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 4 \cos^2 \varphi \cdot 2 dz = 4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 8\pi.$$

Следовательно, $\Pi = -4\pi + 0 + 8\pi = 4\pi$.

2) По формуле Гаусса—Остроградского имеем

$$\Pi = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_V (2 + 0 - 1) dv = \iiint_V dv = 4\pi. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить поток радиус-вектора

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

через сферу радиуса R с центром в начале координат: 1) по определению; 2) по формуле Остроградского.

◀ 1) Так как для сферы

$$\mathbf{n}^0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R},$$

то

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R,$$

и поэтому

$$\Pi = \iint_{S_R} (\mathbf{r}, \mathbf{n}^0) d\sigma = R \iint_{S_R} d\sigma = 4\pi R^2.$$

2) Сначала находим

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3.$$

Отсюда

$$\Pi = \iiint_V 3 dv = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3. \blacktriangleright$$

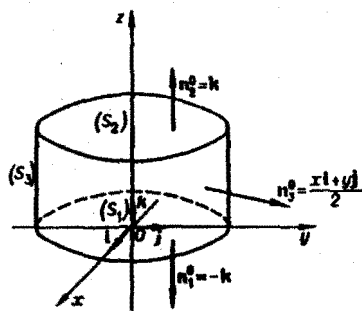


Рис. 24

Пример 3. Вычислить поток вектора

$$\mathbf{a} = 3xi - yj - zk$$

через замкнутую поверхность S , заданную условиями:

$$\begin{cases} 9 - z = x^2 + y^2, \\ z = 0 \quad (z > 0), \end{cases}$$

1) по определению; 2) по формуле Остроградского (рис. 25).

◀ 1) Имеем

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = \iint_{S_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = \iint_{S_1} z d\sigma = 0$$

(на S_1 имеем $z = 0$),

$$\Pi_2 = \iint_{D_{xy}} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) \Big|_{z=f(x,y)} dx dy,$$

где

$$\mathbf{n}_2^0 = 2xi + 2yj + k,$$

а D_{xy} — круг: $x^2 + y^2 \leq 9$. Значит,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) \Big|_{z=9-x^2-y^2} = (6x^2 - 2y^2 - z) \Big|_{z=9-x^2-y^2} = 7x^2 - y^2 - 9.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{D_{xy}} (7x^2 - y^2 - 9) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (7\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi - 9) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8 \cdot \frac{\rho^4}{4} \cos^2 \varphi - \frac{\rho^4}{4} - 9 \cdot \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(162 \cos^2 \varphi - \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(81 + 81 \cos 2\varphi - \frac{243}{4} \right) d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

Итак, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{81}{2} \pi$.

2) Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

Поэтому

$$\Pi = \iiint_V 1 dv.$$

Переходя к цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

и замечая, что $z = 9 - \rho$ на поверхности S , имеем

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{9-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^3 (9 - \rho^2) \rho d\rho = 2\pi \left(9 \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{81}{2} \pi. \blacktriangleright$$

Замечание. При вычислении потока через незамкнутую поверхность часто бывает удобно подходящим образом дополнить ее до замкнутой и воспользоваться формулой Гаусса—Остроградского.

Пример 4. Вычислить поток вектора

$$\mathbf{a} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

через поверхность S :

$$x^2 + z^2 = y^2 \quad (0 \leq y \leq 1).$$

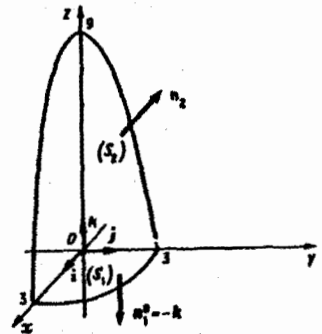


Рис. 25

◀ Заданная поверхность S есть конус с осью Oy (рис. 26). Замкнем этот конус куском Σ плоскости $y = 1$. Тогда, обозначая через Π_1 искомый поток, а через Π_2 поток по поверхности Σ , будем иметь

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv,$$

где V — объем конуса, ограниченного поверхностями S и Σ .

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 - 2y + 2y = 0,$$

то $\Pi_1 = -\Pi_2$, где

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{j}) d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} (-y^2) d\sigma = - \iint_{\Sigma} d\sigma = -\pi, \end{aligned}$$

т. к. на поверхности Σ выполняется равенство $y = 1$. Следовательно, $\Pi_1 = \pi$. ▶

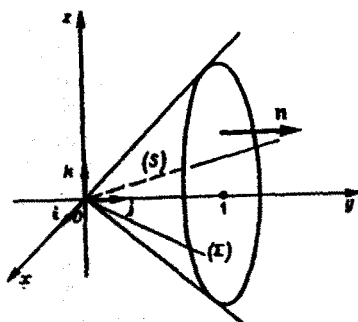


Рис. 26

§ 7. Дивергенция векторного поля. Соленоидальные (трубчатые) поля

Пусть S — замкнутая поверхность. Рассмотрим поле скоростей $\mathbf{v}$ течения жидкости и вычислим поток жидкости через поверхность S . Если он положителен, то это означает, что из той части пространства, которая ограничена поверхностью S , вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. В этом случае говорят, что внутри S имеются *источники* (выделяющие жидкость). Напротив, если поток отрицателен, то внутрь S втекает больше жидкости, чем вытекает из нее. В этом случае говорят, что внутри S имеются *стоки* (поглощающие жидкость).

Тем самым, величина

$$\Pi = \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma$$

позволяет судить о природе части векторного поля, заключенного внутри поверхности S , а именно, о наличии источников или стоков внутри нее и их производительности (мощности).

Понятие о потоке вектора через замкнутую поверхность приводит к понятию дивергенции, или расходимости поля, которое дает некоторую количественную характеристику поля в каждой его точке.

Пусть M — изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью S произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченную поверхностью S , обозначим через (V) , а ее объем через V .

Вычислим поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S . Имеем

$$\Pi = \oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma.$$

Составим отношение этого потока Π к величине объема V ,

$$\frac{\oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{V}. \quad (1)$$

Так как числитель представляет собой производительность источников (стоков) внутри области (V) , то отношение (1) дает среднюю производительность единицы объема.

Определение. Если отношение (1) имеет конечный предел, когда область (V) стягивается в точку M , то этот предел называют *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора $\mathbf{a}$) в точке M и обозначают $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$. То есть по определению

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma}{V}. \quad (2)$$

Дивергенция векторного поля есть скалярная величина (числитель и знаменатель дроби (2) суть скалярные величины).

Если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) > 0$, то в точке M расположен источник, если $\operatorname{div} \mathbf{a}(M) < 0$, то в точке M — сток.

Формула (2) позволяет сделать следующее заключение: дивергенция поля $\mathbf{a}$ в точке M есть объемная плотность потока вектора $\mathbf{a}$ в этой точке. Эта формула дает инвариантное определение дивергенции, не связанное с выбором систем координат — все величины, входящие в формулу (2), определяются непосредственно самим полем и от координатной системы не зависят.

Покажем, как вычисляется дивергенция в декартовых координатах при условии, что координаты вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки M . Тогда к потоку вектора $\mathbf{a}$ через любую замкнутую поверхность S , расположенную в окрестности точки M , можно применить формулу Гаусса—Остроградского

$$\oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

Пользуясь теоремой о среднем для тройного интеграла, получим

$$\oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_{\text{ср}}} V.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), определяющую дивергенцию, найдем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{(V) \rightarrow M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_{\text{ср}}}.$$

Когда область (V) стягивается в точку M , то и точка $M_{\text{ср}}$ стремится к точке M и, в силу предположенной непрерывности частных производных, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M,$$

или, короче,

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}} \quad (3)$$

(все величины в формуле (3) вычисляются в одной и той же точке).

Формула (3) дает выражение дивергенции в декартовых координатах. Попутно доказано само существование дивергенции вектора $\mathbf{a}$ при условии, что производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны.

Используя формулу (3) для дивергенции, запишем формулу Гаусса—Остроградского в векторной форме. Имеем

$$\oiint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{a} dv \quad (4)$$

— поток вектора $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от дивергенции вектора $\mathbf{a}$ по области (V) , ограниченной поверхностью S .

7.1. Правила вычисления дивергенции

1. Дивергенция обладает свойством линейности

$$\operatorname{div}(c_1 \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \mathbf{a}_n) = c_1 \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \dots + c_n \operatorname{div} \mathbf{a}_n, \quad (5)$$

где $c_1, \dots, c_n$ — постоянные числа.

◀ Пусть

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

и C — постоянное число. Тогда

$$\operatorname{div} C\mathbf{a} = \operatorname{div}(CP\mathbf{i} + CQ\mathbf{j} + CR\mathbf{k}) = C \frac{\partial P}{\partial x} + C \frac{\partial Q}{\partial y} + C \frac{\partial R}{\partial z} = C \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Если

$$\mathbf{a}_1 = P_1\mathbf{i} + Q_1\mathbf{j} + R_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}_2 = P_2\mathbf{i} + Q_2\mathbf{j} + R_2\mathbf{k},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) &= \operatorname{div}[(P_1 + P_2)\mathbf{i} + (Q_1 + Q_2)\mathbf{j} + (R_1 + R_2)\mathbf{k}] = \\ &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \right) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

2. Дивергенция постоянного вектора $\mathbf{c}$ равна нулю

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0. \quad (6)$$

3. Дивергенция произведения скалярной функции $u(M)$ на вектор $\mathbf{a}(M)$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}). \quad (7)$$

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= \operatorname{div}[uP\mathbf{i} + uQ\mathbf{j} + uR\mathbf{k}] = \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z} = \\ &= u \frac{\partial P}{\partial x} + u \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} P + \frac{\partial u}{\partial y} Q + \frac{\partial u}{\partial z} R = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 1. Найти дивергенцию вектора

$$\mathbf{a} = \varphi(r) \cdot \mathbf{r}^0 = \varphi(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние от начала координат до переменной точки $M(x, y, z)$,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

◀ По формуле (7) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r}, \mathbf{r} \right).$$

Так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Далее,

$$\operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r} = \left(\frac{\varphi(r)}{r} \right)'_{\mathbf{r}} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{r} = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2} \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2} \cdot \mathbf{r}^0;$$

поэтому

$$\left(\operatorname{grad} \frac{\varphi(r)}{r}, \mathbf{r} \right) \left(\frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r^2} \mathbf{r}^0, \mathbf{r} \right) = \frac{r\varphi'(r) - \varphi(r)}{r} = \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r}.$$

Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \cdot 3 + \varphi'(r) - \frac{\varphi(r)}{r} = 2 \frac{\varphi(r)}{r} + \varphi'(r). \blacktriangleright$$

7.2. Трубочатое (соленоидальное) поле

Если во всех точках некоторой области G дивергенция векторного поля, заданного в этой области, равна нулю

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0,} \quad (8)$$

то говорят, что в этой области *поле соленоидальное* (или *трубочатое*).

Из формулы Гаусса—Остроградского вытекает, что в трубчатом поле поток вектора через любую замкнутую поверхность S , лежащую в этом поле, равен нулю

$$\boxed{\oint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0.} \quad (9)$$

7.3. Свойства трубчатого поля

Рассмотрим в области, где задано поле вектора $\mathbf{a}$, какую-нибудь площадку Σ (рис. 27). Назовем *векторной трубкой* совокупность векторных линий, проходящих через границу $\gamma = \partial\Sigma$ этой площадки. Пусть Σ_1 — некоторое сечение векторной трубки. Выберем векторнормали $\mathbf{n}_1$ к сечению Σ_1 так, чтобы он был направлен в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{a}$ поля.

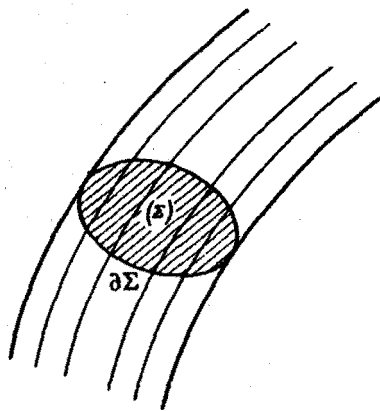


Рис. 27

Теорема 5. В трубчатом поле поток вектора $\mathbf{a}$ через любое сечение векторной трубки один и тот же.

◀ Пусть Σ_1 и Σ_2 — непересекающиеся сечения одной и той же векторной трубки. Надо доказать, что

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma.$$

Обозначим через Σ_3 часть поверхности векторной трубки, заключенную между сечениями Σ_1 и Σ_2 . Поверхности Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 вместе образуют замкнутую поверхность Σ (рис. 28).

Так как по условию поле вектора $\mathbf{a}$ — трубчатое, то

$$\iiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0. \quad (10)$$

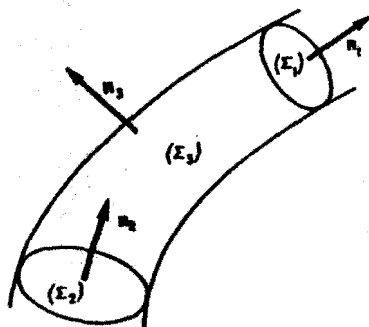


Рис. 28

В силу аддитивности потока соотношение (10) можно переписать так:

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma + \iint_{\Sigma_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_3^0) d\sigma = 0. \quad (11)$$

В точках поверхности Σ_3 , составленной из векторных линий, имеем $\mathbf{n}_3^0 \perp \mathbf{a}$, так что $(\mathbf{a}, \mathbf{n}_3^0) = 0$ на Σ_3 , и значит, последний интеграл в левой части (11) равен нулю.

Таким образом, из (11) находим

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma. \quad \blacktriangleright$$

Пусть поверхность Σ имеет ориентированный замкнутый контур L своей границей. Будем говорить, что поверхность Σ *натянута на контур L* . Вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ будем ориентировать так, чтобы из конца нормали обход контура L был виден против часовой стрелки (рис. 29).

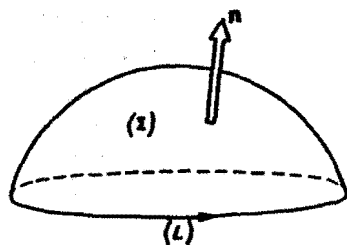


Рис. 29

Теорема 6. В трубчатом поле поток вектора $\mathbf{a}$ через любую поверхность, натянутую на данный контур, один и тот же:

$$\iint_{\Sigma_1} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_1^0) d\sigma = \iint_{\Sigma_2} (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2^0) d\sigma. \quad (12)$$

Замечание. В трубчатом поле векторные линии могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе области, где поле задано.

Пример 2. Рассмотрим силовое поле, создаваемое точечным зарядом q , помещенным в начале координат. Вычислим дивергенцию вектора $\mathbf{E}$ напряженности

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0. \quad (13)$$

◀ Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 = \operatorname{div} \left(\frac{q}{r^3} \mathbf{r} \right),$$

где

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пользуясь формулой (7), получим

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{q}{r^3} \mathbf{r} \right) &= \frac{q}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \left(\operatorname{grad} \frac{q}{r^3}, \mathbf{r} \right) = \\ &= \frac{3q}{r^3} + \left(-\frac{3q}{r^4} \mathbf{r}^0, \mathbf{r} \mathbf{r}^0 \right) = \frac{3q}{r^3} - \frac{3q}{r^3} = 0\end{aligned}$$

для $r \neq 0$. Таким образом, поле вектора $\mathbf{E}$, заданного формулой (13), будет трубчатым в любой области G , не содержащей точки $O(0, 0, 0)$.

Вычислим поток вектора $\mathbf{E}$ через сферу S_R радиуса R с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ (рис. 30). Имеем

$$\begin{aligned}\Pi &= \iint_{S_R} (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iint_{S_R} \left(\frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0, \mathbf{r}^0 \right) d\sigma = \\ &= \frac{q}{R^2} \iint_{S_R} d\sigma = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \blacktriangleright\end{aligned}$$

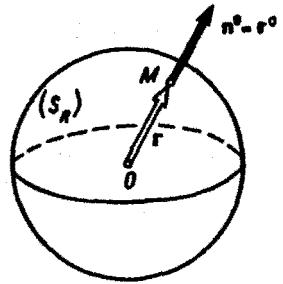


Рис. 30

Замечание. Можно показать, что поток вектора (13) через любую замкнутую поверхность Σ , охватывающую точку $O(0, 0, 0)$, всегда равен $4\pi q$.

§ 8. Циркуляция векторного поля. Ротор вектора. Теорема Стокса

Пусть в некоторой области G задано непрерывное векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

и замкнутый ориентированный контур L .

Определение 1. Циркуляцией вектора $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл 2-го рода от вектора $\mathbf{a}$ по контуру L

$$\Pi = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_L (P dx + Q dy + R dz). \quad (1)$$

Здесь $d\mathbf{r}$ — вектор, длина которого равна дифференциалу дуги L , а направление совпадает с направлением касательной к L , определяемым ориентацией контура (рис. 31); символ $\oint$ означает, что интеграл берется по замкнутому контуру L .

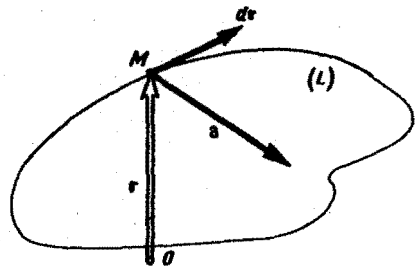


Рис. 31

Пример 1. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{a} = -y^3 \mathbf{i} + x^3 \mathbf{j}$$

вдоль эллипса L :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

◀ По определению циркуляции имеем

$$\Pi = \oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_L -y^3 dx + x^3 dy. \quad (2)$$

Параметрические уравнения данного эллипса имеют вид:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и, значит, $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$. Подставляя эти выражения в формулу (2), найдем

$$\Pi = ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^4 t + a^2 \cos^4 t) dt = \frac{3\pi ab}{4} \cdot (a^2 + b^2). \blacktriangleright$$

8.1. Ротор (вихрь) векторного поля

Рассмотрим поле вектора

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

P , Q , R которого непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Определение 2. *Ротором* вектора $\mathbf{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый символом $\text{rot } \mathbf{a}$ и определяемый равенством

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \quad (3)$$

или, в символической, удобной для запоминания форме,

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Этот определитель раскрывают по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \cdot R - \frac{\partial}{\partial z} \cdot Q \right) = \mathbf{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right).$$

Определение 3. Если в некоторой области G имеем $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, то поле вектора $\mathbf{a}$ в области G называется *безвихревым*.

Пример 2. Найти ротор вектора

$$\mathbf{a} = -\frac{y^2}{2} \mathbf{i} + \frac{x^2}{2} \mathbf{j}.$$

◀ Согласно формуле (3) имеем

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y^2}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + (x + y) \cdot \mathbf{k}. \blacktriangleright$$

Так как $\text{rot } \mathbf{a}$ — вектор, то мы можем рассматривать векторное поле — поле ротора вектора $\mathbf{a}$. Предполагая, что координаты вектора $\mathbf{a}$ имеют непрерывные частные производные второго порядка, вычислим дивергенцию вектора $\text{rot } \mathbf{a}$. Получим

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{\text{div rot } \mathbf{a} = 0.} \quad (3')$$

Таким образом, поле вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ соленоидально.

Теорема 7 (Стокса). Циркуляция вектора $\mathbf{a}$ вдоль ориентированного замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность Σ , натянутую на контур L ,

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma. \quad (4)$$

При этом предполагается, что координаты вектора $\mathbf{a}$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области G пространства, содержащей поверхность Σ , и что ориентация орта нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности $\Sigma \subset G$ согласована с ориентацией контура L так, что из конца нормали обход контура в заданном направлении виден совершающимся против часовой стрелки.

◀ Учитывая, что $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, $\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$, и пользуясь определением ротора (3), перепишем формулу (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда гладкая поверхность Σ и ее контур L однозначно проектируются на область D плоскости xOy и ее границу — контур λ соответственно (рис. 32). Ориентация контура L порождает определенную ориентацию контура λ . Для определенности будем считать, что контур L ориентирован так, что поверхность Σ остается слева, так что вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности Σ составляет с осью Oz острый угол γ ($\cos \gamma > 0$).

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — уравнение поверхности Σ и функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в замкнутой области D .

Рассмотрим интеграл

$$\oint_L P(x, y, z) dx.$$

Линия L лежит на поверхности Σ . Поэтому, пользуясь уравнением этой поверхности $z = \varphi(x, y)$, мы можем заменить z под знаком интеграла на $\varphi(x, y)$. Координаты (x, y)

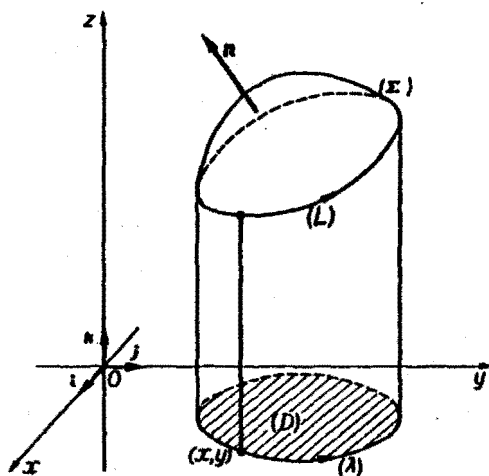


Рис. 32

переменной точки кривой λ равны координатам соответствующей точки на кривой L , а потому интегрирование по L можно заменить интегрированием по λ ,

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_\lambda P(x, y, \varphi(x, y)) dx. \quad (7)$$

Применим к интегралу, стоящему справа, формулу Грина. Имеем

$$\oint_\lambda P(x, y, \varphi(x, y)) dx = - \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dS. \quad (8)$$

Перейдем теперь от интеграла по области D к интегралу по поверхности Σ . Так как $dS = \cos \gamma \cdot d\sigma$, то из формулы (8) получим, что

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma. \quad (9)$$

Вектор нормали $\mathbf{n}^0$ к поверхности Σ определяется выражением

$$\mathbf{n}^0 = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

или $\mathbf{n}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$. Отсюда видно, что $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \cos \gamma = -\cos \beta$. Поэтому равенство (9) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \oint_L P(x, y, z) dx &= - \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) d\sigma = \\ &= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Считая Σ гладкой поверхностью, однозначно проектирующей на все три координатные плоскости, аналогично убеждаемся в справедливости формул

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \quad (11)$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma. \quad (12)$$

Складывая равенства (10), (11) и (12) почленно, получим формулу Стокса (5), или, короче,

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma. \blacktriangleright$$

Замечание 1. Мы показали, что поле вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ — соленоидальное, и потому поток вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ не зависит от вида поверхности Σ , натянутой на контур L .

Замечание 2. Формула (4) выведена в предположении, что поверхность Σ однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Если это условие не выполнено, то разбиваем Σ на части так, чтобы каждая часть указанному условию удовлетворяла, а затем пользуемся аддитивностью интегралов.

Пример 3. Вычислить циркуляцию вектора

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

по линии L :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = H \quad (H > 0) \end{cases}$$

1) пользуясь определением; 2) по теореме Стокса.

◀ 1) Зададим линию L параметрически:

$$L = \{x = R \cos t, y = R \sin t, z = H, 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Тогда $dx = -R \sin t dt$, $dy = R \cos t dt$, $H dz = 0$, так что

$$\Pi = \oint_L y dx - x dy + dz = \int_0^{2\pi} (-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t) dt = -2\pi R^2.$$

2) Найдем $\operatorname{rot} \mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} - 2 \cdot \mathbf{k} = -2\mathbf{k}.$$

Натянем на контур L кусок плоскости $z = H$, так что $\mathbf{n}^0 = \mathbf{k}$. Тогда

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = -2 \iint_{\Sigma} d\sigma = -2\pi R^2. \blacktriangleright$$

8.2. Инвариантное определение ротора поля

Из теоремы Стокса можно получить инвариантное определение ротора поля, не связанное с выбором системы координат.

Теорема 8. Проекция ротора $\mathbf{a}$ на любое направление не зависит от выбора системы координат и равна поверхностной плотности циркуляции вектора $\mathbf{a}$ по контуру площадки, перпендикулярной этому направлению,

$$\operatorname{pr}_{\mathbf{n}} \operatorname{rot} \mathbf{a}|_M = (\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)|_M = \lim_{(\Sigma) \rightarrow M} \frac{\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{S}. \quad (13)$$

Здесь (Σ) — плоская площадка, перпендикулярная вектору $\mathbf{n}$; S — площадь этой площадки; L — контур площадки, ориентированный так, чтобы обход контура был виден из конца вектора $\mathbf{n}$ против хода часовой стрелки; $(\Sigma) \rightarrow M$ означает, что площадка (Σ) стягивается к точке M , в которой рассматривается вектор $\text{rot } \mathbf{a}$, причем вектор нормали $\mathbf{n}$ к этой площадке остается все время одним и тем же (рис. 33).

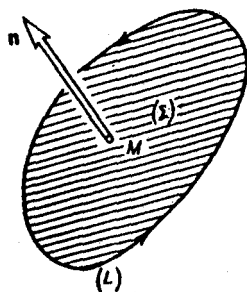


Рис. 33

◀ Применим сначала к циркуляции

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

вектора $\mathbf{a}$ теорему Стокса, а затем к полученному двойному интегралу — теорему о среднем значении:

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{M_{\text{cp}}} \cdot S,$$

откуда

$$\frac{\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{S} = (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{M_{\text{cp}}}$$

(скалярное произведение $(\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0)$ берется в некоторой средней точке M_{cp} площадки (Σ)).

При стягивании площадки (Σ) к точке M средняя точка M_{cp} тоже стремится к точке M и, в силу предполагаемой непрерывности частных производных от координат вектора $\mathbf{a}$ (а значит, и непрерывности $\text{rot } \mathbf{a}$), мы получаем

$$\lim_{(\Sigma) \rightarrow M} \frac{\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{S} = \lim_{(\Sigma) \rightarrow M} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_{M_{\text{cp}}} = (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) \Big|_M. \blacktriangleright$$

Поскольку проекция вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ на произвольное направление не зависит от выбора системы координат, то и сам вектор $\text{rot } \mathbf{a}$ инвариантен относительно этого выбора. Отсюда получаем следующее инвариантное определение ротора поля: **ротор поля** есть вектор, длина которого равна наибольшей поверхностной плотности циркуляции в данной точке, направленный перпендикулярно той площадке, на которой эта наибольшая плотность циркуляции достигается; при этом ориентация вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ согласуется с ориентацией контура, при которой циркуляция положительна, по правилу правого винта.

8.3. Физический смысл ротора поля

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси l с угловой скоростью ω . Не нарушая общности, можно считать, что ось l совпадает с осью Oz (рис. 34).

Пусть $M(\mathbf{r})$ — изучаемая точка тела, где

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Вектор угловой скорости в нашем случае равен $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, вычислим вектор $\mathbf{v}$ линейной скорости точки M ,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\mathbf{i} + x\omega\mathbf{j}.$$

Отсюда

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Итак, вихрь поля скоростей вращающегося твердого тела одинаков во всех точках поля, параллелен оси вращения и равен удвоенной угловой скорости вращения.

8.4. Правила вычисления ротора

1. Ротор постоянного вектора $\mathbf{e}$ равен нулевому вектору,
 $\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0$.

2. Ротор обладает свойством линейности

$$\operatorname{rot}(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n) = c_1 \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 + c_2 \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \operatorname{rot} \mathbf{a}_n,$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — постоянные числа.

3. Ротор произведения скалярной функции $u(M)$ на векторную $\mathbf{a}(M)$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}].$$

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(u\mathbf{a}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ uP & uQ & uR \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(uR)}{\partial y} - \frac{\partial(uQ)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial(uP)}{\partial z} - \frac{\partial(uR)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial(uQ)}{\partial x} - \frac{\partial(uP)}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= u \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] + \\ &+ \left[\left(R \frac{\partial u}{\partial y} - Q \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(P \frac{\partial u}{\partial z} - R \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(Q \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] = \\ &= u \operatorname{rot} \mathbf{a} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = u \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

§ 9. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Определение. Область G трехмерного пространства называется *поверхностно односвязной*, если на любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно натянуть поверхность, целиком лежащую в области G .

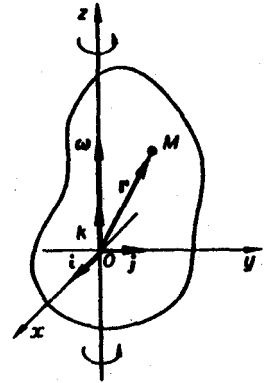


Рис. 34

Например, внутренность сферы или все трехмерное пространство являются поверхностью односвязными областями; внутренность тора или трехмерное пространство, из которого исключена прямая, поверхностью односвязными областями не являются.

Пусть в поверхности односвязной области G задано непрерывное векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 9. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

в поле вектора $\mathbf{a}$ не зависел от пути интегрирования, а зависел только от начальной и конечной точек пути (A и B), необходимо и достаточно, чтобы циркуляция вектора $\mathbf{a}$ вдоль любого замкнутого контура L , расположенного в области G , была равна нулю.

◀ **Необходимость.** Пусть интеграл

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

не зависит от пути интегрирования. Покажем, что тогда

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

по любому замкнутому контуру L равен нулю.

Рассмотрим произвольный замкнутый контур L в поле вектора $\mathbf{a}$ и возьмем на нем произвольно точки A и B (рис. 35). По условию имеем

$$\int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = - \int_{L_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

где L_1 и L_2 — различные пути, соединяющие точки A и B ; откуда

$$\int_{L_1 \cup L_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

Но $L_1 \cup L_2^-$ как раз и есть выбранный замкнутый контур L .

Достаточность. Пусть

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0$$

для любого замкнутого контура L . Покажем, что в этом случае интеграл

$$\int_{AB} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

не зависит от пути интегрирования.

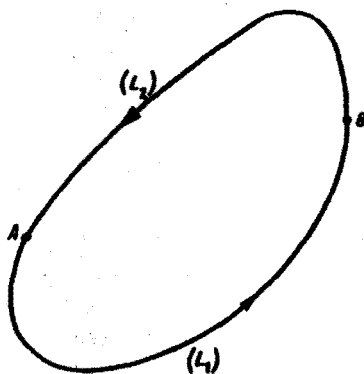


Рис. 35

Возьмем в поле вектора $\mathbf{a}$ две точки A и B , соединим их произвольными линиями L_1 и L_2 и покажем, что

$$\int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{L_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \quad (2)$$

Для простоты ограничимся случаем, когда линии L_1 и L_2 не пересекаются. В этом случае объединение $L_1 \cup L_2^-$ образует простой замкнутый контур L (рис. 36).

По условию

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0,$$

а по свойству аддитивности

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{L_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

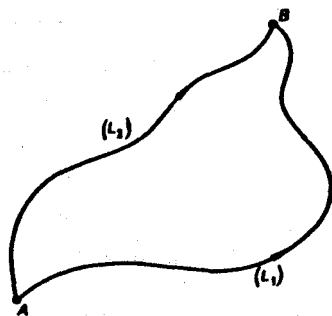


Рис. 36

Следовательно,

$$\int_{L_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{L_2^-} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = 0,$$

откуда справедливость равенства (2) и вытекает. ►

Теорема 9 выражает необходимое и достаточное условия независимости криволинейного интеграла от формы пути, однако эти условия трудно проверяемы.

Приведем более эффективный критерий.

Теорема 10. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

не зависел от пути интегрирования L , необходимо и достаточно, чтобы векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

было безвихревым,

$$\text{rot } \mathbf{a}(M) \equiv 0. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что координаты $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ вектора $\mathbf{a}(M)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка и область определения вектора $\mathbf{a}(M)$ поверхностно односвязна.

Замечание. В силу теоремы 9 независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования равносильна равенству нулю циркуляции вектора $\mathbf{a}$ вдоль любого замкнутого контура. Это обстоятельство мы используем при доказательстве теоремы.

◀ **Необходимость.** Пусть криволинейный интеграл не зависит от формы пути, или, что то же, циркуляция вектора $\mathbf{a}$ по любому замкнутому контуру L равна нулю. Тогда

$$\text{пр}_n \text{rot } \mathbf{a}|_M = \lim_{(\Sigma) \rightarrow M} \frac{\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r})}{S} = 0,$$

т. е. в каждой точке поля проекция вектора $\text{rot } \mathbf{a}$ на любое направление равна нулю.

Это означает, что сам вектор $\text{rot } \mathbf{a}$ равен нулю во всех точках поля,

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv 0.$$

Достаточность. Достаточность условия (3) вытекает из формулы Стокса, так как если $\text{rot } \mathbf{a} \equiv 0$, то и циркуляция вектора по любому замкнутому контуру L равна нулю:

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = 0. \blacktriangleright$$

Ротор плоского поля $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ равен

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

что позволяет сформулировать для плоского поля следующую теорему.

Теорема 11. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (4)$$

в односвязном плоском поле не зависел от формы линии L , необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

выполнялось тождественно во всей рассматриваемой области.

Если область не односвязна, то выполнение условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

вообще говоря, не обеспечивает независимости криволинейного интеграла от формы линии.

Пример. Пусть

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \oint_L -\frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}. \quad (6)$$

Ясно, что подынтегральное выражение не имеет смысла в точке $O(0, 0)$. Поэтому исключим эту точку. В остальной части плоскости (это будет уже не односвязная область!) координаты вектора $\mathbf{a}$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные и

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Рассмотрим интеграл (6) вдоль замкнутой кривой L — окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда $dx = -R \sin t \, dt$, $dy = R \cos t \, dt$ и

$$\oint_L \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Отличие циркуляции от нуля показывает, что интеграл (6) зависит от формы пути интегрирования.

§ 10. Потенциальное поле

Определение. Поле вектора $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным*, если существует скалярная функция $u(M)$ такая, что

$$\text{grad } u = \mathbf{a}. \quad (1)$$

При этом функция $u(M)$ называется *потенциалом поля*; ее поверхности уровня называются *эквипотенциальными поверхностями*.

Пусть

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Так как

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k},$$

то соотношение (1) равносильно следующим трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Заметим, что потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого: если $\text{grad } u = \mathbf{a}$ и $\text{grad } v = \mathbf{a}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

и, следовательно, $u = v + c$, где c — постоянное число.

Пример 1. Поле радиус-вектора $\mathbf{r}$ является потенциальным, так как

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \text{grad} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) = \text{grad} \frac{r^2}{2}$$

(напомним, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Потенциалом поля радиус-вектора является, следовательно,

$$\frac{1}{2} r^2 + c.$$

Пример 2. Поле вектора

$$\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$$

является потенциальным.

◀ Пусть функция $\varphi(r)$ такая, что

$$f(r)\mathbf{r} = \text{grad } \varphi(r),$$

найдена. Тогда

$$\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \mathbf{r}^0$$

и

$$\varphi'(r)\mathbf{r}^0 = f(r) \cdot \mathbf{r}\mathbf{r}^0,$$

откуда

$$\varphi'(r) = f(r) \cdot r.$$

Значит,

$$\varphi(r) = \int f(r)r \, dr$$

— потенциал поля. ►

Теорема 12. Для того чтобы поле вектора $\mathbf{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым,

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0, \quad (2)$$

т. е. чтобы его ротор равнялся нулю во всех точках поля. При этом предполагается непрерывность всех частных производных от координат вектора $\mathbf{a}$ и поверхностная односвязность области, в которой задан вектор $\mathbf{a}$.

◀ **Необходимость.** Необходимость условия (2) устанавливается непосредственным подсчетом: если поле потенциально, т. е. $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) &= \operatorname{rot} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

в силу независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.

Достаточность. Пусть поле вектора безвихревое (2). Для того чтобы доказать потенциальность этого поля, построим его потенциал $u(M)$.

Из условия (2) следует, что криволинейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) \quad (3)$$

не зависит от формы линии L , а зависит только от ее начальной и конечной точек. Зафиксируем начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а конечную точку $M(x, y, z)$ будем менять. Тогда интеграл (3) будет функцией точки $M(x, y, z)$. Обозначим эту функцию через $u(M)$ и докажем, что

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{a}.$$

В дальнейшем будем записывать интеграл (3), указывая лишь начальную и конечную точку пути интегрирования,

$$u(M) = \int_{M_0}^M (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P dx + Q dy + R dz. \quad (4)$$

Равенство $\operatorname{grad} u = \mathbf{a}$ равносильно трем скалярным равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Докажем первое из них,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z),$$

второе и третье равенства доказываются аналогично.

По определению частной производной имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (5)$$

Рассмотрим точку $M_1(x + \Delta x, y, z)$, близкую к точке $M(x, y, z)$. Так как функция $u(M)$ определяется соотношением (4), в котором криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то выберем путь интегрирования так, как указано на рис. 37. Тогда

$$u(M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{M_0}^M (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_M^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(M) + \int_M^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \\ &= u(M_1) - u(M) = \int_M^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Последний интеграл берется вдоль отрезка прямой MM_1 , параллельной оси Ox . На этом отрезке в качестве параметра можно принять координату x :

$$x = x, \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const}.$$

Тогда $dx = dx$, $dy = 0$, $dz = 0$, так что

$$\Delta_x u = u(M_1) - u(M) = \int_{M(x,y,z)}^{M_1(x+\Delta x,y,z)} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y, z) dx. \quad (6)$$

Применяя к интегралу в правой части (6) теорему о среднем, получаем

$$\Delta_x u = P(\xi, y, z) \Delta x, \quad (7)$$

где величина ξ заключена между x и $x + \Delta x$.

Из формулы (7) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y, z).$$

Так как $\xi \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то в силу непрерывности функции $P(x, y, z)$ получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z).$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z). \blacktriangleright$$

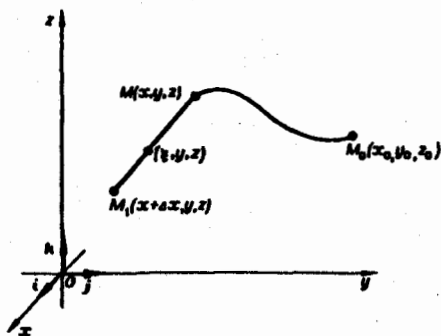


Рис. 37

Следствие. Векторное поле является потенциальным тогда и только тогда, когда криволинейный интеграл в нем не зависит от пути.

10.1. Вычисление криволинейного интеграла в потенциальном поле

Теорема 13. Интеграл $\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$ в потенциальном поле $\mathbf{a}(M)$ равен разности значений потенциала $u(M)$ поля в конечной и начальной точках пути интегрирования,

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(M_2) - u(M_1).$$

◀ Ранее было доказано, что функция

$$u(M) = \int_{M_0}^M (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) \quad (8)$$

является потенциалом поля.

В потенциальном поле криволинейный интеграл

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r})$$

не зависит от пути интегрирования. Поэтому, выбирая путь от точки M_1 к точке M_2 так, чтобы он прошел через точку M_0 (рис. 38), получаем

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{M_1}^{M_0} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{M_0}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}),$$

Рис. 38

или, меняя ориентацию пути в первом интеграле справа,

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{M_0}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) - \int_{M_0}^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = u(M_2) - u(M_1). \quad (9)$$

Так как потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого, то любой потенциал рассматриваемого поля может быть записан в виде

$$v(M) = u(M) + c, \quad (10)$$

где c — постоянная.

Делая в формуле (10) замену $u(M_2) = v(M_2) - c$, $u(M_1) = v(M_1) - c$, получим для произвольного потенциала $v(M)$ требуемую формулу

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = v(M_2) - v(M_1). \blacktriangleright$$

Пример 3. В примере 1 было показано, что потенциалом поля радиус-вектора $\mathbf{r}$ является функция $u(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{2}$. Поэтому

$$\int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2),$$

где r_i ($i = 1, 2$) — расстояние от точки M_i ($i = 1, 2$) до начала координат.

10.2. Вычисление потенциала в декартовых координатах

Пусть задано потенциальное поле

$$\mathbf{a}(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ранее было показано, что потенциальная функция $u(M)$ может быть найдена по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{M_0}^M P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (11)$$

Интеграл (11) удобнее всего вычислять так: зафиксируем начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и соединим ее с достаточно близкой текущей точкой $M(x, y, z)$ ломаной $M_0M_1M_2M$, звенья которой параллельны координатным осям, $M_0M_1 \parallel Ox$, $M_1M_2 \parallel Oy$, $M_2M \parallel Oz$ (рис. 39). При этом на каждом звене ломаной изменяется только одна координата, что позволяет существенно упростить вычисления. В самом деле, на отрезке M_0M_1 имеем:

$$\begin{aligned} x &= x, & dx &= dx, \\ y &= y_0, & dy &= 0, \\ z &= z_0, & dz &= 0. \end{aligned}$$

На отрезке M_1M_2 :

$$x = \text{const}, \quad dx = 0, \quad y = y, \quad dy = dy, \quad z = z_0 \quad \text{и} \quad dz = 0.$$

На отрезке M_2M :

$$x = \text{const}, \quad dx = 0, \quad y = \text{const}, \quad dy = 0, \quad z = z, \quad dz = dz.$$

Следовательно, потенциал $u(M)$ равен

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_{M_0}^M (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_{M_0}^{M_1} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) + \int_{M_2}^M (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz, \end{aligned} \quad (12)$$

где x, y, z — координаты текущей точки на звеньях ломаной, вдоль которых ведется интегрирование.

Пример 4. Доказать, что векторное поле

$$\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

является потенциальным, и найти его потенциал.

◀ Проверим, будет ли поле вектора $\mathbf{a}(M)$ потенциально. С этой целью вычислим ротор поля. Имеем

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = 0.$$

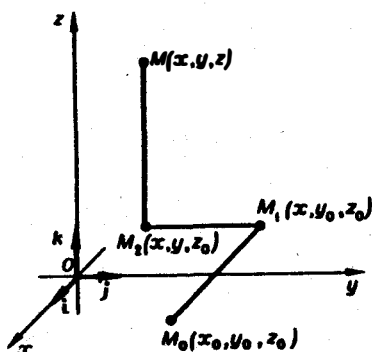


Рис. 39

Поле является потенциальным. Потенциал этого поля найдем с помощью формулы (12). Возьмем за начальную точку M_0 начало координат O (так обычно поступают, если поле $\mathbf{a}(M)$ определено в начале координат). Тогда получим

$$u(x, y, z) = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x+0) dy + \int_0^z (x+y) dz + c = xy + (x+y)z + c.$$

Итак,

$$u(x, y, z) = xy + xz + yz + c,$$

где c — произвольная постоянная.

Потенциал этого поля можно найти и по-иному. По определению потенциал $u(x, y, z)$ есть скалярная функция, для которой $\text{grad } u = \mathbf{a}$. Это векторное равенство равносильно трем скалярным равенствам:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + y. \quad (15)$$

Интегрируя (13) по x , получим

$$u(x, y, z) = \int_0^x (y+z) dx = xy + xz + f(y, z), \quad (16)$$

где $f(y, z)$ — произвольная дифференцируемая функция от y и z .

Продифференцируем (16) по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y},$$

откуда, учитывая (14), будем иметь

$$x + z = x + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = z. \quad (17)$$

Проинтегрировав (17) по y , найдем

$$f(y, z) = \int_0^y z dy = yz + F(z), \quad (18)$$

где $F(z)$ — некоторая функция z .

Подставив (18) в (16), получим

$$u(x, y, z) = xy + xz + yz + F(z).$$

Дифференцируя последнее равенство по z и учитывая соотношение (15), получим уравнение для $F(z)$,

$$x + y = x + y + \frac{dF(z)}{dz},$$

откуда $\frac{dF}{dz} = 0$, так что $F(z) = c = \text{const}$. Итак,

$$u(x, y, z) = xy + yz + xz + c. \blacktriangleright$$

§ 11. Оператор Гамильтона

Мы рассмотрели три основные операции векторного анализа: вычисление $\text{grad } u$ для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ и $\text{div } \mathbf{a}$ и $\text{rot } \mathbf{a}$ для векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$. Эти операции могут быть записаны в более простом виде с помощью символического оператора ∇ («набла»):

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1)$$

Оператор ∇ (оператор Гамильтона) обладает как дифференциальными, так и векторными свойствами. Формальное умножение, например, умножение $\frac{\partial}{\partial x}$ на функцию $u(x, y)$, будем понимать как частное дифференцирование:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

В рамках векторной алгебры формальные операции над оператором ∇ будем проводить так, как если бы он был вектором. Используя этот формализм, получим следующие основные формулы:

1. Если $u = u(x, y, z)$ — скалярная дифференцируемая функция, то по правилу умножения вектора на скаляр получим

$$\nabla u = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } u,$$

т. е.

$$\nabla u = \text{grad } u. \quad (2)$$

2. Если

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где P, Q, R — дифференцируемые функции, то по формуле для нахождения скалярного произведения получим

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \mathbf{a},$$

т. е.

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \text{div } \mathbf{a}.$$

3. Вычисляя векторное произведение $[\nabla, \mathbf{a}]$, получим

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a},$$

т. е.

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \text{rot } \mathbf{a}.$$

Для постоянной функции $u = c$ получим

$$\nabla c = 0,$$

а для постоянного вектора $\mathbf{c}$ будем иметь

$$(\nabla, \mathbf{c}) = 0 \quad \text{и} \quad [\nabla, \mathbf{c}] = 0.$$

Из распределительного свойства для скалярного и векторного произведений получаем

$$(\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\nabla, \mathbf{a}) + (\nabla, \mathbf{b}),$$

т. е.

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}}, \quad (5)$$

$$[\nabla, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = [\nabla, \mathbf{a}] + [\nabla, \mathbf{b}],$$

т. е.

$$\boxed{\operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}}. \quad (6)$$

Замечание 1. Формулы (5) и (6) можно трактовать также как проявление дифференциальных свойств оператора «набла» (∇ — линейный дифференциальный оператор). Условились считать, что оператор ∇ действует на все величины, написанные за ним. В этом смысле, например,

$$(\nabla, \mathbf{a}) \neq (\mathbf{a}, \nabla),$$

ибо $(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{a}$ есть функция $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, в то время как

$$(\mathbf{a}, \nabla) = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$$

— скалярный дифференциальный оператор.

Применяя оператор ∇ к произведению каких-либо величин, надо иметь в виду обычное правило дифференцирования произведения.

Пример 1. Доказать, что

$$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \quad (7)$$

◀ По формуле (2) с учетом замечания 1 получаем

$$\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v,$$

или

$$\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \blacktriangleright$$

Чтобы отметить тот факт, что «набла» не действует на какую-либо величину, входящую в состав сложной формулы, эту величину отмечают индексом c («const»), который в окончательном результате опускается.

Пример 2. Пусть $u(x, y, z)$ — скалярная дифференцируемая функция, $\mathbf{a}(x, y, z)$ — векторная дифференцируемая функция. Доказать, что

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \quad (8)$$

◀ Перепишем левую часть (8) в символическом виде

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\nabla, u\mathbf{a}).$$

Учитывая дифференциальный характер оператора ∇ , получаем

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, u_c \mathbf{a}) + (\nabla, u \mathbf{a}_c).$$

Так как u_c — постоянный скаляр, то его можно вынести за знак скалярного произведения, так что

$$(\nabla, u_c \mathbf{a}) = u_c (\nabla, \mathbf{a}) = u_c \cdot \operatorname{div} \mathbf{a} = u \operatorname{div} \mathbf{a}$$

(на последнем шаге мы опустили индекс c).

В выражении $(\nabla, u \mathbf{a}_c)$ оператор ∇ действует только на скалярную функцию u , поэтому

$$(\nabla, u \mathbf{a}_c) = (\nabla u, \mathbf{a}_c) = (\mathbf{a}_c, \nabla u) = (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u).$$

В итоге получаем

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \operatorname{grad} u). \blacktriangleright$$

Замечание 2. Используя формализм действий с оператором ∇ как с вектором, надо помнить, что ∇ не является обычным вектором — он не имеет ни длины, ни направления, так что, например, вектор $[\nabla, \mathbf{a}]$ не будет, вообще говоря, перпендикулярным вектору $\mathbf{a}$ (впрочем, для плоского поля $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ вектор

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

перпендикулярен плоскости xOy , а значит, и вектору $\mathbf{a}$).

Не имеет смысла и понятие коллинеарности по отношению к символическому вектору ∇ . Например, выражение $[\nabla\varphi, \nabla\psi]$, где φ и ψ — скалярные функции, формально напоминает векторное произведение двух коллинеарных векторов, которое всегда равно нулю. Однако в общем случае это не имеет места. В самом деле, вектор $\nabla\varphi = \text{grad } \varphi$ направлен по нормали к поверхности уровня $\varphi = \text{const}$, а вектор $\nabla\psi = \text{grad } \psi$ определяет нормаль к поверхности уровня $\psi = \text{const}$. В общем случае эти нормали не обязаны быть коллинеарными (рис. 40). С другой стороны, в любом дифференцируемом скалярном поле $\varphi(x, y, z)$ имеем $[\nabla\varphi, \nabla\psi] = 0$.

Эти примеры показывают, что с оператором «набла» нужно обращаться с большой осторожностью и при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить аналитическими методами.

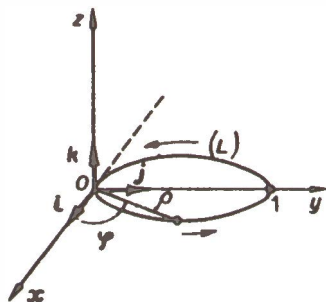


Рис. 40

§ 12. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

Дифференциальные операции второго порядка получаются в результате двукратного применения оператора ∇ .

1. Пусть имеем скалярное поле $u = u(x, y, z)$. В этом поле оператор ∇ порождает векторное поле

$$\nabla u = \text{grad } u.$$

В векторном поле $\text{grad } u$ можно определить две операции:

$$(\nabla, \nabla u) = \text{div grad } u, \quad (1)$$

что приводит к скалярному полю, и

$$[\nabla, \nabla u] = \text{rot grad } u, \quad (2)$$

что приводит к векторному полю.

2. Пусть задано векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Тогда оператор ∇ порождает в нем скалярное поле

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \text{div } \mathbf{a}.$$

В скалярном поле $\text{div } \mathbf{a}$ оператор ∇ порождает векторное поле

$$\nabla (\nabla, \mathbf{a}) = \text{grad div } \mathbf{a}. \quad (3)$$

3. В векторном поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ оператор ∇ порождает также векторное поле

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \text{rot } \mathbf{a}.$$

Применяя к этому полю снова оператор ∇ , получим:

а) скалярное поле

$$(\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = \text{div rot } \mathbf{a}, \quad (4)$$

б) векторное поле

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \text{rot rot } \mathbf{a}. \quad (5)$$

Формулы (1)–(5) определяют так называемые *дифференциальные операции второго порядка*.

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим каждую из формул (1)–(5) более подробно.

1. Предполагая, что функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные вторые частные производные по x , y и z , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= (\nabla, \nabla u) = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Символ

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа, или лапласианом*. Его можно представить как скалярное произведение оператора Гамильтона ∇ на самого себя, т. е.

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Оператор Δ (дельта) играет важную роль в математической физике. Уравнение

$$\Delta u = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. С его помощью описывается, например, стационарное распределение тепла.

Скалярное поле $u(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta u = 0$, называется *лапласовым* или *гармоническим полем*.

Например, скалярное поле $u = 2x^2 + 3y - 2z^2$ является гармоническим во всем трехмерном пространстве: из того, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -4z, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4,$$

получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4 + 0 - 4 = 0.$$

2. Пусть функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка включительно. Тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u \equiv 0. \quad (7)$$

В самом деле, действуя формально, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0,$$

ибо $[\nabla, \nabla] = 0$ как векторное произведение двух одинаковых «векторов».

Тот же результат можно получить, используя выражения градиента и ротора в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

3. Пусть задано векторное поле

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

координаты которого P , Q , R имеют непрерывные частные производные второго порядка. Тогда получим

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla (\nabla, \mathbf{a}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{i} + \quad (8) \\ &+ \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

4. При тех же условиях, что и в пункте 3, имеем

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0.} \quad (9)$$

Это соотношение уже было доказано ранее путем непосредственных вычислений. Здесь мы приведем его формальное доказательство, используя известную формулу из векторной алгебры

$$(\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]) = (\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = (\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]).$$

Имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, [\nabla, \nabla]) = 0,$$

так как $[\nabla, \nabla] = 0$ как векторное произведение двух одинаковых «векторов».

5. Покажем, наконец, что при тех же условиях, что и ранее,

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.} \quad (10)$$

Так как

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]],$$

то, полагая в формуле для двойного векторного произведения $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - (\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C}$,

$$\mathbf{A} = \nabla, \quad \mathbf{B} = \nabla, \quad \mathbf{C} = \mathbf{a},$$

получим

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla (\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{a}.$$

Но $(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div} \mathbf{a}$ и $(\nabla, \nabla) = \Delta$. Поэтому окончательно будем иметь

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

где $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$ выражается по формуле (8), а $\Delta \mathbf{a}$ для вектора $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ надо понимать так:

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta P \cdot \mathbf{i} + \Delta Q \cdot \mathbf{j} + \Delta R \cdot \mathbf{k}.$$

В заключение приведем таблицу дифференциальных операций второго порядка.

	Скалярное поле $u = u(x, y, z)$	Векторное поле $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$	
	grad	div	rot
grad		grad div $\mathbf{a}$	
div	div grad $u = \Delta u$		div rot $\mathbf{a} = 0$
rot	rot grad $u = 0$		rot rot $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$

Заштрихованные прямоугольники означают, что соответствующая операция не имеет смысла (например, градиент от $\operatorname{rot} \mathbf{a}$).

§ 13. Понятие о криволинейных координатах

Во многих задачах бывает удобно определять положение точки пространства не декартовыми координатами (x, y, z) , а тремя другими числами (q_1, q_2, q_3) , более естественно связанными с рассматриваемой частной задачей.

Если задано правило, согласно которому каждой точке M пространства отвечает определенная тройка чисел (q_1, q_2, q_3) и, наоборот, каждой такой тройке чисел отвечает единственная точка M , то говорят, что в пространстве задана криволинейная координатная система. В этом случае величины q_1, q_2, q_3 называют *криволинейными координатами* точки M .

Координатными поверхностями в системе криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называются поверхности

$$q_1 = c_1 = \text{const}, \quad q_2 = c_2 = \text{const}, \quad q_3 = c_3 = \text{const}.$$

На координатных поверхностях одна из координат сохраняет постоянное значение. Линии пересечения двух координатных поверхностей называются *координатными линиями*.

В качестве примеров криволинейных координат рассмотрим цилиндрические и сферические координаты.

13.1. Цилиндрические координаты

В цилиндрических координатах положение точки M в пространстве определяется тремя координатами:

$$\begin{aligned} q_1 &= \rho, & 0 &\leq \rho < +\infty, \\ q_2 &= \varphi, & 0 &\leq \varphi < 2\pi, \\ q_3 &= z, & -\infty &< z < +\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Координатные поверхности:

$\rho = \text{const}$ — круговые цилиндры с осью Oz ;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz ;

$z = \text{const}$ — плоскости, перпендикулярные оси Oz (рис. 41).

Координатные линии:

1) линии (ρ) — лучи, перпендикулярные оси Oz и имеющие начало на этой оси, т. е. линии пересечения координатных поверхностей $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$;

2) линии (φ) — окружности с центрами на оси Oz , лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси Oz ;

3) линии (z) — прямые, параллельные оси Oz .

Связь декартовых координат точки (x, y, z) с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) задается формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2)$$

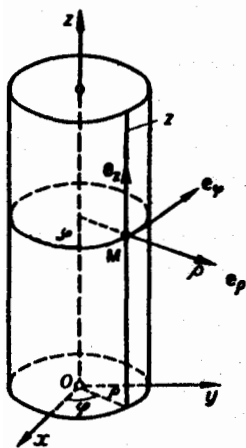


Рис. 41

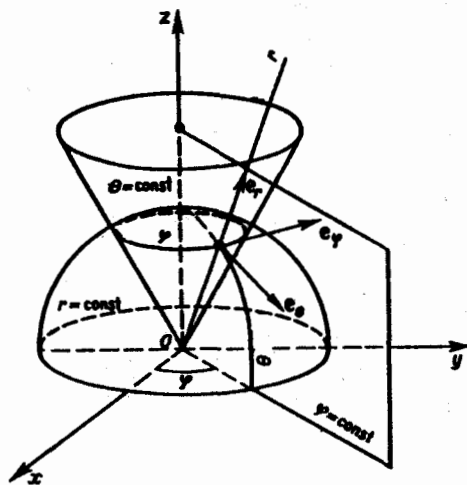


Рис. 42

13.2. Сферические координаты

В сферических координатах положение точки M в пространстве определяется следующими координатами:

$$\begin{aligned} q_1 &= r, & 0 &\leq r < +\infty, \\ q_2 &= \theta, & 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ q_3 &= \varphi, & 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Координатные поверхности (рис. 42):

$r = \text{const}$ — сферы с центром в точке O ;

$\theta = \text{const}$ — круговые полуконусы с осью Oz ;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, примыкающие к оси Oz .

Координатные линии:

1) линии (r) — лучи, выходящие из точки O ;

2) линии (θ) — меридианы на сфере;

3) линии (φ) — параллели на сфере.

Связь декартовых координат (x, y, z) точки M с ее сферическими координатами (r, θ, φ) задается формулами

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\quad (4)$$

Введем единичные векторы e_1, e_2, e_3 (орты), направленные по касательным к координатным линиям $(q_1), (q_2), (q_3)$ в точке M в сторону возрастания переменных q_1, q_2, q_3 соответственно.

Определение. Система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в каждой точке M орты e_1, e_2, e_3 попарно ортогональны.

В такой системе ортогональны и координатные линии, и координатные поверхности.

Примерами ортогональных криволинейных координат служат системы цилиндрических и сферических координат. Мы ограничимся рассмотрением только ортогональных систем координат.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ — радиус-вектор точки M . Тогда можно показать, что

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \cdot \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \cdot \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (5)$$

где

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

— коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат.

Вычислим коэффициенты Ламэ для цилиндрических координат

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z.$$

Так как $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, то

$$\begin{aligned}H_1 &= H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1, \\H_2 &= H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho, \\H_3 &= H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.\end{aligned}\quad (6)$$

Аналогично для сферических координат имеем

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \sin \theta. \quad (7)$$

Величины

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3 \quad (8)$$

являются дифференциалами длин дуго соответствующих координатных линий.

§ 14. Основные операции векторного анализа в криволинейных координатах

14.1. Дифференциальные уравнения векторных линий

Рассмотрим поле вектора

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3.$$

Уравнения векторных линий в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 имеют вид

$$\frac{H_1 dq_1}{a_1(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_2 dq_2}{a_2(q_1, q_2, q_3)} = \frac{H_3 dq_3}{a_3(q_1, q_2, q_3)}.$$

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$)

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho, \varphi, z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_2(\rho, \varphi, z)} = \frac{dz}{a_3(\rho, \varphi, z)}, \quad (1)$$

в сферических координатах ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$)

$$\frac{dr}{a_1(r, \theta, \varphi)} = \frac{r d\theta}{a_2(r, \theta, \varphi)} = \frac{r \sin \theta d\varphi}{a_3(r, \theta, \varphi)}. \quad (2)$$

14.2. Градиент в ортогональных координатах

Пусть $u = u(q_1, q_2, q_3)$ — скалярное поле. Тогда

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3.$$

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$)

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

в сферических координатах ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$)

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (4)$$

14.3. Ротор в ортогональных координатах

Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$$

и вычислим $\text{rot } \mathbf{a}$. Имеем

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{H_2 H_3}{\partial} & \frac{H_1 H_3}{\partial} & \frac{H_1 H_2}{\partial} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 \rho & a_3 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2 \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \theta} & \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & a_2 \cdot r & a_3 \cdot r \sin \theta \end{vmatrix}. \quad (6)$$

14.4. Дивергенция в ортогональных координатах

Дивергенция $\operatorname{div} \mathbf{a}$ векторного поля

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_3$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (7)$$

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(a_1 \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(a_2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(a_3 \rho)}{\partial z} \right],$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(a_1 \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z},$$

в сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(a_1 r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_2 \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_3}{\partial \varphi}.$$

Применяя формулу (7) к единичным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial q_3}. \end{aligned}$$

14.5. Вычисление потока в криволинейных координатах

Пусть S — часть координатной поверхности $q_1 = c = \text{const}$, ограниченная координатными линиями

$$\begin{aligned} q_2 &= \alpha_1, & q_2 &= \alpha_2 & (\alpha_1 < \alpha_2), \\ q_3 &= \beta_1, & q_3 &= \beta_2 & (\beta_1 < \beta_2). \end{aligned}$$

Тогда поток вектора

$$\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$$

через поверхность S в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ вычисляется по формуле

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(c, q_2, q_3) H_2(c, q_2, q_3) H_3(c, q_2, q_3) dq_3 dq_2. \quad (8)$$

Аналогично вычисляется поток через часть поверхности $q_2 = c$, а также через часть поверхности $q_3 = c$, где $c = \text{const}$.

Пример 1. Найти поток Π векторного поля

$$\mathbf{a} = r^2 \theta \mathbf{e}_r + r e^{2\theta} \mathbf{e}_\theta$$

через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

« Полусфера S есть часть координатной поверхности $r = \text{const}$, а именно $r = R$. На полусфере S имеем

$$q_1 = r = R,$$

$$q_2 = \theta, \text{ причем } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}),$$

$$q_3 = \varphi, \text{ причем } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\beta_1 = 0, \beta_2 = 2\pi).$$

Учитывая, что в сферических координатах

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\theta = r, \quad H_3 = H_\varphi = r \sin \theta,$$

по формуле (8) найдем

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} R^2 \theta \sin \theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^4. \quad \blacktriangleright$$

14.6. Вычисление потенциала в криволинейных координатах

Пусть в некоторой области Ω задано потенциальное векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3,$$

т. е. $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ в области Ω .

Для нахождения потенциала $u = u(q_1, q_2, q_3)$ этого векторного поля запишем равенство $\mathbf{a}(M) = \text{grad } u(M)$ в следующем виде:

$$a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = H_1 a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial q_2} = H_2 a_2, \quad \frac{\partial u}{\partial q_3} = H_3 a_3. \quad (9)$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений с частными производными (9), найдем искомым потенциал

$$u = u(q_1, q_2, q_3) + c,$$

где c — произвольная постоянная.

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$) система (9) принимает вид

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = a_2 \rho, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_3,} \quad (10)$$

где

$$\mathbf{a} = a_1(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + a_2(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + a_3(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z.$$

В сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$) система (9) имеет вид

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = a_2 r, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = a_3 r \sin \theta,}$$

где

$$\mathbf{a}(M) = a_1(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + a_2(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + a_3(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi.$$

Пример 2. Найти потенциал векторного поля, заданного в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\arctg z}{\rho} + \cos \varphi \right) \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + \frac{\ln \rho}{1 + z^2} \mathbf{e}_z.$$

◀ Убедимся, что $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. По формуле (5) получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\arctg z}{\rho} + \cos \varphi & -\sin \varphi & \frac{\ln \rho}{1 + z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. данное поле потенциально.

Искомый потенциал $u = u(\rho, \varphi, z)$ является решением следующей системы дифференциальных уравнений с частными производными (см. формулу (10)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\arctg z}{\rho} + \cos \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln \rho}{1 + z^2}. \end{cases}$$

Интегрированием по ρ из первого уравнения находим

$$u = \arctg z \cdot \ln \rho + \rho \cos \varphi + c(\varphi, z). \quad (11)$$

Дифференцируя соотношение (11) по φ и используя второе уравнение, получим

$$-\rho \sin \varphi + \frac{\partial c(\varphi, z)}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi,$$

или $\frac{\partial c(\varphi, z)}{\partial \varphi} = 0$, откуда $c = c_1(z)$. Таким образом,

$$u = \arctg z \cdot \ln \rho + \rho \cos \varphi + c_1(z).$$

Дифференцируя это соотношение по z и используя третье уравнение, получим

$$\frac{\ln \rho}{1 + z^2} + c_1'(z) = \frac{\ln \rho}{1 + z^2},$$

или $c_1'(z) = 0$, откуда $c_1(z) = c$. Итак, потенциал данного поля

$$u(\rho, \varphi, z) = \arctg z \cdot \ln \rho + \rho \cos \varphi + c. \quad \blacktriangleright$$

14.7. Линейный интеграл и циркуляция в ортогональных криволинейных координатах

Пусть векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$$

определено и непрерывно в области Ω изменения ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3 . Так как дифференциал радиус-вектора $\mathbf{r}$ любой точки $M(q_1, q_2, q_3) \in \Omega$ выражается формулой

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3, \quad (12)$$

то криволинейный интеграл вектора $\mathbf{a}(M)$ по ориентированной гладкой или кусочно-гладкой кривой $L \subset \Omega$ будет равен

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_1 H_1 dq_1 + a_2 H_2 dq_2 + a_3 H_3 dq_3. \quad (13)$$

В частности, для цилиндрических координат ($q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z, H_1 = 1, H_2 = \rho, H_3 = 1$) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + a_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{r} &= d\rho \mathbf{e}_\rho + d\varphi \mathbf{e}_\varphi \rho + dz \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (13) получим

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_\rho d\rho + \rho a_\varphi d\varphi + a_z dz. \quad (14)$$

Аналогично для сферических координат ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi, H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \theta$) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_r(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi, \\ d\mathbf{r} &= dr \cdot \mathbf{e}_r + r d\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (13) получим

$$\int_L (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_L a_r dr + r a_\theta d\theta + r \sin \theta a_\varphi d\varphi. \quad (15)$$

Если кривая L замкнута (начальная и конечная точки кривой L совпадают), то циркуляция $\oint$ векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 вычисляется по формуле (13), а в случае цилиндрических или сферических координат — по формулам (14) или (15) соответственно.

Пример 3. Вычислить циркуляцию векторного поля, заданного в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = \rho \sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \rho z \mathbf{e}_\varphi + \rho^3 \mathbf{e}_z,$$

по замкнутой кривой L ,

$$\rho = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad z = 0.$$

◀ Координаты данного вектора равны соответственно

$$a_\rho = \rho \sin \varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

Контур L представляет собой замкнутую кривую, расположенную в плоскости $z = 0$ (рис. 43). Подставляя координаты данного вектора в формулу (14), получим

$$\Pi = \oint_L \rho \sin \varphi d\rho + \rho^2 z d\varphi + \rho^3 dz.$$

На кривой L имеем

$$z = 0, \quad dz = 0; \quad \rho = \sin \varphi, \quad d\rho = \cos \varphi d\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Искомая циркуляция будет равна

$$\Pi = \oint_L \rho \sin \varphi d\rho = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \left. \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right|_0^\pi = 0. \quad \blacktriangleright$$

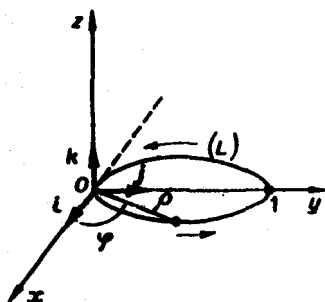


Рис. 43

14.8. Оператор Лапласа в ортогональных координатах

Если $u = u(q_1, q_2, q_3)$ — скалярная функция, то

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \quad (16)$$

Если $\mathbf{a} = a_1(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_1 + a_2(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_2 + a_3(q_1, q_2, q_3)\mathbf{e}_3$, то

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right]. \quad (17)$$

Используя формулы (16) и (17), для оператора Лапласа Δ получим следующее выражение:

$$\Delta u = \text{div grad } u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

В цилиндрических координатах ($q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$) получим

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах ($q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$) будем иметь

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Пример 4. Найти все решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящие только от расстояния r .

◀ Так как искомое решение u должно зависеть только от расстояния точки M от начала координат r , т. е. $u = u(r)$, то уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах будет иметь вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

Отсюда $r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = C_1$, так что

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. ►

Упражнения

Найдите производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению к точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

1. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$, $M_0(2, 4, 4)$, $M_1(6, -4, 8)$.
2. $u = 4 \ln(x^2 + 3) - 8xyz$, $M_0(1, 1, 1)$, $M_1(3, -3, 5)$.
3. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $M_0(1, -3, 4)$, $M_1(1, -2, 3)$.

Найдите производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz :

4. $u = \arctg \frac{y}{x} + xz$, $M_0(2, 2, -1)$, $S: x^2 + y^2 - 2z = 10$.
5. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$, $M_0(1, 1, 0)$, $S: x^2 - y^2 = z$.

6. Найдите производную скалярного поля $u = 2xy + y^2$ в точке $M_0(\sqrt{2}, 1)$ эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

7. Найдите производную скалярного поля $u = z \ln(x^2 + y^2 - z)$ в точке $M_0(1, -\sqrt{3}, 3)$ по направлению окружности $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 3$.

8. Найдите угол между градиентами функции $u = \arctg \frac{z}{y}$ в точках $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, -1)$.

9. Найдите производную плоского поля $u = x^3 + xy + 3y^4$ в точке $M(-2, 1, 0)$ по направлению, задаваемому вектором, лежащим в плоскости xy и наклоненным под углом $\frac{\pi}{6}$ к оси Ox .

Найдите векторные линии следующих векторных полей:

10. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.
11. $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$.
12. $\mathbf{a} = 2xz\mathbf{j} + 3yk$.

13. Найдите векторную линию поля $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, проходящую через точку $M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

14. Найдите векторную линию поля $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, проходящую через точку $M(3, 4, -1)$.

15. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $x^2 + y^2 = z^2$ из плоскости $z = h$ ($h > 0$).

16. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - 2z)\mathbf{i} + (x + 3y + z)\mathbf{j} + (5x + y)\mathbf{k}$ через треугольник ABC с вершинами в точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ (нормаль образует с осью Oz острый угол).

17. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченную плоскостями $z = 0$, $z = h$ ($h > 0$).

18. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - yk$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, ограниченную плоскостью $z = 1$ ($0 \leq z \leq 1$).

Методом введения криволинейных координат на поверхности вычислите поток заданного вектора $\mathbf{a}$ через заданную поверхность S :

19. $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + xz^3\mathbf{k}$, S — внешняя сторона цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

20. $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезанная конической поверхностью $x^2 + y^2 = z^2$ (где $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$).

Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя). Проверьте результат с помощью формулы Гаусса—Остроградского:

21. $\mathbf{a} = yz\mathbf{j}$, $S = \{x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0, y \geq 0\}$.
22. $\mathbf{a} = y^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, $S = \{x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = z, z = 0\}$.
23. $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0 (z > 0)\}$.
24. $\mathbf{a} = yzi - xj + yk$, $S = \{x^2 + z^2 = y^2, y = 1 (0 \leq y \leq 1)\}$.

Достраивая подходящим образом заданные незамкнутые поверхности до замкнутых и пользуясь теоремой Гаусса—Остроградского, вычислите потоки векторных полей через указанные поверхности (к замкнутой поверхности берем внешнюю нормаль):

$$25. \mathbf{a} = (1 - 2x)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad S = \{x^2 + y^2 = z^2 \ (0 \leq z \leq 4)\}.$$

$$26. \mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \quad S = \{x^2 + y^2 = 4 - z \ (z \geq 0)\}.$$

$$27. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - z\mathbf{k}, \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ (z \leq 0)\}.$$

Найдите работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N :

$$28. \mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}, \quad L = \{\text{отрезок } MN, M(-4, 0), N(0, 2)\}.$$

$$29. \mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}, \quad L = \{x^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0), M(2, 0), N(-2, 0)\}.$$

$$30. \mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}, \quad L = \{x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0), M(1, 0), N(0, 3)\}.$$

$$31. \mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \quad L = \{y = x^3, M(0, 0), N(2, 8)\}.$$

Найдите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль замкнутого контура L (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t):

$$32. \mathbf{a} = x\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + y\mathbf{k}, \quad L = \{x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4 \cos t - 3 \sin t - 3\}.$$

$$33. \mathbf{a} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}, \quad L = \{x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, z = 1 - \cos t\}.$$

$$34. \mathbf{a} = -x^2y^3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}, \quad L = \{x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, z = 1\}.$$

Вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}$ по замкнутому контуру L . Проверьте результат при помощи формулы Стокса:

$$35. \mathbf{a} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + x\mathbf{k}, \quad L = \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 4\}.$$

$$36. \mathbf{a} = xyz\mathbf{i} + (x + y + z)\mathbf{j} - x^2y^2\mathbf{k}, \quad L = \{x + y = a, x - y = a, x + y = -a, x - y = -a\}.$$

37. $\mathbf{a} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, где L — линия пересечения плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$.

38. Найдите дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = [\mathbf{e}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{e}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

39. При какой функции $\psi(z)$ дивергенция векторного поля $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \psi(z)\mathbf{k}$ будет равна z ?

$$40. \text{Найдите } \operatorname{div}(\mathbf{r}^4\mathbf{r}), \text{ где } \mathbf{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ а } \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

41. Найдите функцию $\psi(\mathbf{r})$, для которой выполняется равенство

$$\operatorname{div}(\psi(\mathbf{r})\mathbf{r}) = 2\psi(\mathbf{r}).$$

42. Какова должна быть функция $f(x, z)$, чтобы ротор векторного поля

$$\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + f(x, z)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

совпал с вектором $\mathbf{k} - \mathbf{i}$?

Найдите ротор следующих векторов:

$$43. \mathbf{a} = y^2z\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

$$44. \mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

$$45. \mathbf{a} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Докажите, что следующие векторные поля являются потенциальными, и найдите их потенциалы:

$$46. \mathbf{a} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}.$$

$$47. \mathbf{a} = (yz + 1)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

$$48. \mathbf{a} = \frac{1 + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{x + y + z}.$$

Ответы

1. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. -2 . 3. $-0,7\sqrt{2}$. 4. $\frac{4}{3}$. 5. 0. 6. $\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{2}+3)}{3}$. 7. 0. 8. π . 9. $\frac{13\sqrt{3}}{2} + 5$. 10. $y = c_1x^4, x = c_2$.
11. $x + y + z = c_1, x^2 + y^2 + z^2 = c_2$. 12. $3y^2 - 2z^2 = c_1, x = c_2$. 13. $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 1, \frac{1}{z} + \frac{1}{2y} = 4$.

14. $x^2 + y^2 = 5^2 z = -1$. 15. πh^3 . 16. $\frac{5}{3}$. 17. $\pi h R^2$. 18. 0. 19. 0. 20. $\frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. 21. $\frac{\pi}{12}$. 22. 16π .
23. $\frac{\pi R^4}{2}$. 24. 0. 25. -64π . 26. 0. 27. $-\frac{16\pi}{3}$. 28. 24. 29. 2π . 30. -5 . 31. 8. 32. 60π . 33. -40π .
34. π . 35. -2π . 36. $2a^2$. 37. $\frac{4}{3}$. 38. 0. 39. $\psi(z) = c - z$, $c = \text{const}$. 40. $7r^4$. 41. $\psi(r) = \frac{c}{r}$, $c = \text{const}$. 42. $f(x, z) = (1 + z)x + z + c$, $c = \text{const}$. 43. $(x^2 - 2xz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (z^2 - 2yz)\mathbf{k}$. 44. $-2\mathbf{k}$. 45. $2x\mathbf{j}$. 46. $\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + c$, $c = \text{const}$. 47. $x(1 + yz) + c$, $c = \text{const}$.
48. $\ln |x + y + z| + c$, $c = \text{const}$.

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1. Понятие интеграла, зависящего от параметра, и его непрерывность

Пусть в прямоугольнике

$$\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

определена функция двух переменных $f(x, y)$ (рис. 1). Предположим, что при любом фиксированном значении $y \in [c, d]$ существует интеграл

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

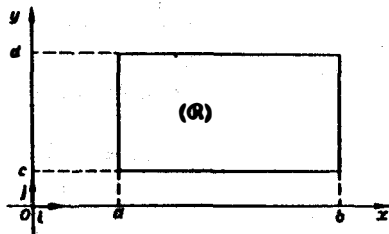


Рис. 1

Ясно, что этот интеграл является функцией переменного y ,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (1)$$

Интеграл (1) называется *интегралом, зависящим от параметра y* .

Имеет место следующая теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , то функция $I(y)$, определенная соотношением (1), непрерывна на отрезке $[c, d]$.

◀ Из формулы (1) вытекает, что приращение $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y)$ функции $I(y)$, соответствующее приращению аргумента Δy , можно оценить так:

$$\begin{aligned} |I(y + \Delta y) - I(y)| &= \left| \int_a^b f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx. \end{aligned} \quad (2)$$

По условию теоремы функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Π , а значит, $f(x, y)$ равномерно непрерывна в этом прямоугольнике. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех x из $[a, b]$ и всех y и $y + \Delta y$ из $[c, d]$ таких, что $|\Delta y| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Отсюда и из оценки (2) получаем, что

$$|I(y + \Delta y) - I(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

при $|\Delta y| < \delta$. Это означает, что функция $I(y)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[c, d]$. ►

Следствие (переход к пределу под знаком интеграла). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx, \quad (3)$$

где y_0 — любое фиксированное число, принадлежащее отрезку $[c, d]$.

◄ Так как функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$, то имеют место равенства

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I\left(\lim_{y \rightarrow y_0} y\right) = I(y_0),$$

равносильные равенствам (3). ►

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_1^2 (2x - 1) \cos(xy) dx.$$

◄ Функция

$$f(x, y) = (2x - 1) \cos(xy)$$

непрерывна в любом прямоугольнике

$$\Pi = \{1 \leq x \leq 2, c \leq y \leq d\},$$

где $c < 0 < d$. Отсюда по формуле (3) получаем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_1^2 (2x - 1) \cos(xy) dx = \int_1^2 (2x - 1) dx = 2. \quad \blacktriangleright$$

1.2. Дифференцирование интеграла по параметру

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, то для любого $y \in [c, d]$ справедлива формула Лейбница дифференцирования по параметру под знаком интеграла

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (4)$$

◀ Предполагая, что $y + \Delta y \in [c, d]$, составим разностное отношение

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta y \rightarrow 0$ и пользуясь непрерывностью частной производной $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ и формулой (3), получим

$$I'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \blacktriangleright$$

Замечание. Пусть пределы интегрирования зависят от параметра y . Тогда

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx, \quad (5)$$

где $a(y) \leq x \leq b(y)$ и функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы на отрезке $c \leq y \leq d$. При условии, что функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в области

$$D = \{a(y) \leq x \leq b(y), c \leq y \leq d\}$$

(рис. 2), получаем, что функция $F(y)$ дифференцируема на $[c, d]$, причем

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f[b(y), y] \cdot b'(y) - f[a(y), y] \cdot a'(y). \quad (6)$$

◀ Формула (6) доказывается с помощью дифференцирования сложной функции.

Так как $F(y) = F(y, a(y), b(y))$, то полная производная

$$F'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \cdot \frac{da}{dy} + \frac{\partial F}{\partial b} \cdot \frac{db}{dy}, \quad (7)$$

где

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = f[b(y), y],$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = -f[a(y), y].$$

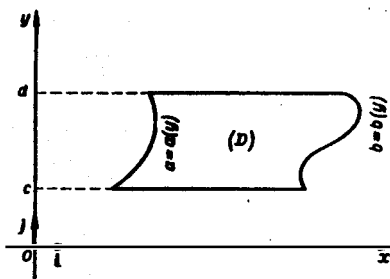


Рис. 2

Подставляя выражения для производных $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$ и $\frac{\partial F}{\partial a}$ в формулу (7), получим требуемую формулу (6). ▶

Пример 2. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x},$$

где $|a| < 1$.

◀ Функция

$$f(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} & \text{при } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 2a & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

а также ее производная по параметру

$$f'_a(x, a) = \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике

$$\Pi = \left\{ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1 - \varepsilon < 1 \right\}.$$

Поэтому применима теорема 2 о дифференцировании интеграла по параметру при $|a| \leq 1 - \varepsilon < 1$.
Имеем

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\cos x} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a^2 \cos^2 x}.$$

Положим $\operatorname{tg} x = t$, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Интегрируя по t от 0 до $+\infty$, получим

$$I'(a) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2-a^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(\sqrt{1-a^2})^2 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1-a^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Отсюда $I(a) = \pi \arcsin a + C$. Устремляя a к нулю и замечая, что $I(0) = 0$, имеем $C = 0$. Следовательно, $I(a) = \pi \arcsin a$. ▶

Пример 3. Найти производную $F'(y)$ для функции

$$F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx.$$

◀ Здесь $f(x, y) = e^{-x^2 y}$, $a(y) = y$, $b(y) = y^2$. Применяя формулу (6), получим:

$$F'(y) = - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y} dx + e^{-y^5} \cdot 2y - e^{-y^3}. \quad \blacktriangleright$$

1.3. Интегрирование интеграла по параметру

Теорема 3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, то функция

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

интегрируема на отрезке $[c, d]$, причем справедливы равенства

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (8)$$

Другими словами, если $f(x, y)$ непрерывна в Π , то интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать по параметру под знаком интеграла.

◀ Согласно теореме 1, функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$ и поэтому интегрируема на нем. Справедливость формулы (8) следует из равенства повторных интегралов,

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy. \blacktriangleright$$

Пример 4. Проинтегрировать по параметру y интеграл

$$I(y) = \int_a^b y^x dx \quad (0 < a < b)$$

в пределах от 0 до 1.

◀ Так как функция $f(x, y) = y^x$ непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq 1\}, \quad a > 0,$$

то применима теорема 3 об интегрировании интеграла по параметру. Имеем

$$\int_0^1 I(y) dy = \int_0^1 dy \int_a^b y^x dx = \int_a^b dx \int_0^1 y^x dy = \int_a^b \left(\frac{y^{x+1}}{x+1} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \blacktriangleright$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

2.1. Понятие несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в полуполосе

$$\Pi_{\infty} = \{a \leq x < +\infty, \quad c \leq y \leq d\}$$

(рис. 3) и при каждом фиксированном $y \in [c, d]$ существует несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, являющийся функцией от y . Тогда функция

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d], \quad (1)$$

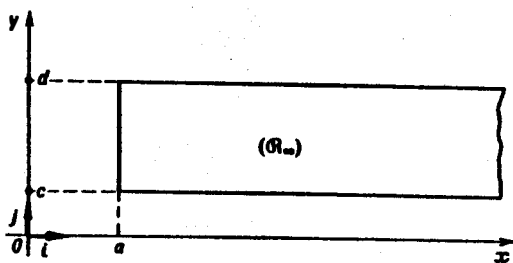


Рис. 3

называется *несобственным интегралом первого рода*, зависящим от параметра y . Интервал (c, d) может быть и бесконечным.

Определение 1. Несобственный интеграл (1) называется *сходящимся в точке* $y \in [c, d]$, если существует конечный предел

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x, y) dx = I(y),$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует число B_0 такое, что для всех $B \geq B_0$ выполняется неравенство

$$\left| I(y) - \int_a^B f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Если несобственный интеграл (1) сходится в каждой точке y отрезка $[c, d]$, то он называется *сходящимся на этом отрезке*. Интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся* на отрезке $[c, d]$, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty |f(x, y)| dx.$$

2.2. Равномерная сходимость несобственного интеграла. Критерий Коши

Определение 2. Несобственный интеграл (1) называется *равномерно сходящимся* по параметру y на отрезке $[c, d]$, если он сходится на этом отрезке и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $A \geq a$, зависящее только от ε , что для всех $B > A$ и для всех y из отрезка $[c, d]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_B^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad B > A. \quad (2)$$

Имеет место следующий критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 4. Для того, чтобы несобственный интеграл (1) равномерно сходил по параметру y на отрезке $[c, d]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать число $A \geq a$, зависящее только от ε и такое, что для любых B и C , больших A , и для всех y из отрезка $[c, d]$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_B^C f(x, y) dx \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Справедливость этого критерия вытекает непосредственно из определения равномерной сходимости.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 5 (признак Вейерштрасса). Пусть функция $f(x, y)$ определена в полуполосе Π_∞ и для каждого $y \in [c, d]$ интегрируема по x на любом отрезке $[a, A]$. Пусть, кроме того, для всех точек полуполосы Π_∞ выполняется неравенство

$$|f(x, y)| \leq g(x). \quad (4)$$

Тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x) dx$ вытекает равномерная сходимость по y на отрезке $[c, d]$ несобственного интеграла $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$.

◀ В силу критерия Коши сходимости интеграла от функции $g(x)$, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $A \geq a$ такое, что при всех $C > B \geq A$ выполняется неравенство

$$\int_B^C g(x) dx < \varepsilon.$$

Используя неравенство (4), откуда получим, что

$$\left| \int_B^C f(x, y) dx \right| \leq \int_B^C g(x) dx < \varepsilon$$

для всех y из отрезка $[c, d]$. Тем самым, критерий Коши равномерной сходимости интеграла

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

выполнен. ▶

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-x} \sin(sx) dx, \quad (5)$$

где s — параметр, $s \in [\alpha, \beta]$.

◀ Так как при любом $s \in [\alpha, \beta]$, где α и β — произвольные вещественные числа, выполняется неравенство

$$|e^{-x} \sin(sx)| \leq e^{-x}$$

и интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл (5) равномерно сходится для всех $s \in [\alpha, \beta]$. ▶

2.3. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра

Свойство 1. Непрерывность несобственного интеграла по параметру. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области Π_∞ и интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx \quad (6)$$

сходится равномерно по y на отрезке $[c, d]$, то функция $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$.

Свойство 2. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области Π_∞ и интеграл (6) сходится равномерно по y на $[c, d]$, то

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^\infty f(x, y) dx \right] dy = \int_a^\infty \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (7)$$

Свойство 3. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру. Пусть функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в области Π_∞ , несобственный интеграл (6) сходится, а интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

сходится равномерно по y на $[c, d]$. Тогда

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (8)$$

Пример 2. Вычислить интеграл, зависящий от параметра s ,

$$K(s) = \int_0^\infty x e^{-x} \cos(sx) dx. \quad (9)$$

◀ В примере 1 мы доказали равномерную сходимость интеграла

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-x} \sin(sx) dx \quad (10)$$

по параметру s на любом отрезке $[\alpha, \beta]$. Покажем, что интеграл (9) также равномерно сходится по параметру s на любом отрезке $[\alpha, \beta]$. В самом деле,

$$|x e^{-x} \cos(sx)| \leq x e^{-x}$$

при любом s , и

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1,$$

откуда по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла (9).

Обозначая подынтегральную функцию интеграла (5) через $f(x, s)$,

$$f(x, s) = e^{-x} \sin(sx),$$

замечаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial s} = x e^{-x} \cos(sx)$$

— подынтегральная функция равномерно сходящегося интеграла (9). Используя свойство дифференцируемости несобственного интеграла по параметру, получим

$$K(s) = I'(s).$$

Так как $I(s) = \frac{s}{1+s^2}$ (в этом легко убедиться путем интегрирования по частям), то

$$K(s) = \left(\frac{s}{1+s^2} \right)' = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty x e^{-x} \cos(sx) dx = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Интегрируя равенство

$$\int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$$

по y , $y > 0$, найти интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

◀ Покажем сначала, что несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dx, \quad 0 < a \leq y \leq b,$$

зависящий от параметра y , сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Это вытекает из признака Вейерштрасса, так как

$$|f(x, y)| = e^{-xy} \leq e^{-ax} \quad (a > 0)$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Проинтегрируем

$$I(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dx$$

по параметру y в пределах от a до b . Имеем

$$\int_a^b \left(\int_0^{\infty} e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^{\infty} \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-xy}}{x} \right) \Big|_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

Но

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$$

и

$$\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a},$$

так что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. До сих пор мы рассматривали несобственные интегралы вида

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

Это несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра y . *Несобственным интегралом второго рода*, зависящим от параметра y , называется интеграл вида

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

где $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x, y) = \pm\infty$, $a \leq \xi \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Теория несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра, аналогична рассмотренной нами теории для несобственных интегралов первого рода, зависящих от параметра.

§3. Интегралы Эйлера. Гамма-функция и ее свойства

Гамма-функцией называется интеграл

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(1)

3.1. Область определения гамма-функции $\Gamma(x)$

В интеграле (1) имеются особенности двух типов:

- 1) интегрирование по полупрямой $0 \leq t < +\infty$;
- 2) в точке $t = 0$ подынтегральная функция обращается в бесконечность (при $x < 1$).

Чтобы разделить эти особенности, представим функцию $\Gamma(x)$ в виде суммы двух интегралов

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = I_1(x) + I_2(x)$$

и рассмотрим каждый из них отдельно.

Так как $|e^{-t} t^{x-1}| \leq t^{x-1}$ при $t > 0$, то интеграл $I_1(x)$ сходится при $x > 0$ (по признаку сравнения).

Интеграл $I_2(x)$ сходится при любом x . В самом деле, взяв произвольное $\lambda > 1$, получим, что при любом x

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{\frac{1}{t^\lambda}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\lambda+x-1}}{e^t} = 0.$$

При $\lambda > 1$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\lambda}$ сходится, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ сходится при любом x .

Тем самым, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ сходится при $x > 0$, и мы доказали, что областью определения гамма-функции $\Gamma(x)$ является полупрямая $x > 0$.

Покажем, что интеграл (1) сходится равномерно по x на любом отрезке $[c, d]$, где $0 < c < d < +\infty$. Пусть $c \leq x \leq d$. Тогда при $0 \leq t \leq 1$ имеем

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{c-1} e^{-t} dt, \quad (2)$$

а при $t \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{d-1} e^{-t} dt. \quad (3)$$

Интегралы в правых частях формул (2) и (3) сходятся, а по признаку Вейерштрасса равномерно сходятся интегралы, стоящие в левых частях неравенств (2) и (3). Следовательно, в силу равенства

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (1')$$

получаем равномерную сходимость $\Gamma(x)$ на любом отрезке $[c, d]$, где $0 < c < d < +\infty$. Из равномерной сходимости $\Gamma(x)$ вытекает непрерывность этой функции при $x > 0$.

3.2. Некоторые свойства гамма-функции

1. $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$ (гамма-функция при $x > 0$ не имеет нулей).
2. При любом $x > 0$ имеет место формула приведения для гамма-функции

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}. \quad (4)$$

◀

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^x, \quad du = x t^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt, \quad v = -e^{-t} \end{array} \right| = \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3. При $x = n$ имеет место формула

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad (5)$$

◀ При $x = 1$ имеем

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Пользуясь формулой (4), получим

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1). \quad \blacktriangleright$$

Применяя формулу (4) n раз, при $x > 0$ получаем

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \dots (x+1)x \cdot \Gamma(x). \quad (6)$$

4. Кривая $y = \Gamma(x)$ выпукла вниз.

◀ В самом деле,

$$\Gamma'(x) = \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)'_x = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt$$

и

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^2 t \cdot e^{-t} dt > 0.$$

Отсюда следует, что производная $\Gamma'(x)$ на полупрямой $(0, +\infty)$ может иметь только один нуль. А так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля этот нуль x_0 производной $\Gamma'(x)$ существует и лежит в интервале $(1, 2)$. Поскольку $\Gamma''(x) > 0$, то в точке x_0 функция $\Gamma(x)$ имеет минимум. ▶

Можно показать, что на $(0, +\infty)$ функция $\Gamma(x)$ дифференцируема любое число раз.

5. Из формулы $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ следует, что

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +0$$

(ибо $\Gamma(x)$ непрерывна и $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ при $x \rightarrow +0$).

6. Формула дополнения.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1.$$

График гамма-функции имеет вид, изображенный на рис. 4.

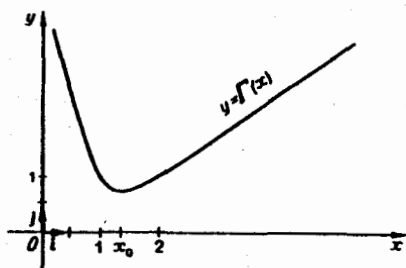


Рис. 4

§ 4. Бета-функция и ее свойства

Бета-функцией называется интеграл

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (7)$$

зависящий от параметров x и y .

4.1. Область определения бета-функции $B(x)$

Подынтегральная функция при $x < 1$ и $y < 1$ имеет две особые точки $t = 0$ и $t = 1$.

Для отыскания области определения $B(x, y)$ представим интеграл (7) в виде суммы двух интегралов

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (8)$$

первый из которых (при $x < 1$) имеет особую точку $t = 0$, а второй (при $y < 1$) — особую точку $t = 1$.

Интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t)^{y-1}}{t^{1-x}} dt$$

— несобственный интеграл 2-го рода. Он сходится при условии, что $1-x < 1$, т. е. при $x > 0$, а интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} dt$$

сходится при $y > 0$. Тем самым, бета-функция $B(x, y)$ определена для всех положительных значений x и y .

Можно доказать, что интеграл (7) равномерно сходится в каждой области $x \geq a > 0$, $y \geq b > 0$, так что бета-функция непрерывна при $x > 0$, $y > 0$.

4.2. Некоторые свойства бета-функции

1. При $x > 0$ и $y > 0$ справедлива формула

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (9)$$

2. Бета-функция является симметричной относительно x и y , т. е.

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Это следует из формулы (9).

§ 5. Применение интегралов Эйлера в вычислении определенных интегралов

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

◀ Введем замену $\frac{1}{x} = e^t$, или $x = e^{-t}$. Тогда $dx = -e^{-t} dt$, при $x_1 = 0$ имеем $t_1 = +\infty$, а при $x_2 = 1$ получаем $t_2 = 0$. Поэтому

$$\int_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1). \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx, \quad \text{где } p, q, m > 0.$$

◀ Положим $x^m = t$, тогда $x = t^{\frac{1}{m}}$, $dx = \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt$, пределы интегрирования остаются прежними, так что заданный интеграл сводится к бета-функции:

$$I = \int_0^1 t^{\frac{p-1}{m}} (1-t)^{q-1} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right). \blacktriangleright$$

Пример 3. Исходя из равенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}, \quad (10)$$

вычислить интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{t-t^2} dt.$$

◀ Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{t-t^2} dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1} dt = \\ &= B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением бета-функции и формулами (9), (4), (5) и (10). $\blacktriangleright$

Упражнения

Вычислите пределы:

$$1. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2} dx. \quad 2. \lim_{y \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^2 x^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dx. \quad 3. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx.$$

Найдите производные $F'(y)$ для следующих функций:

$$4. F(y) = \int_{y^2}^y \sin(x^2 + y^2) dx. \quad 5. F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\sin(xy)}{x} dx.$$

6. Исходя из равенства $\int_0^b \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (a > 0)$, вычислите интеграл

$$\int_0^b \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}.$$

7. Используя равенство $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab) \quad (a > 0)$, путем дифференцирования по параметру получите следующую формулу:

$$\int_0^b \frac{x dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

8. Докажите, что интеграл $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ равномерно сходится по y на всей вещественной оси.

9. Докажите, что интеграл $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + s^2}$ сходится равномерно по параметру s на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, если $1 \leq \alpha \leq \beta$.

10. Используя равенство $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0)$, вычислите путем дифференцирования по параметру интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

С помощью Эйлеровых интегралов вычислите следующие интегралы:

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}. \quad 12. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0). \quad \text{Указание: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad 13. \int_0^1 x \sqrt[3]{1-x^3} dx.$$

Выразите через Эйлеровы интегралы:

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x dx. \quad 15. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx.$$

$$16. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n - \text{целое положительное}). \quad 17. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Ответы

1. $\frac{3}{7}$. 2. $-\frac{15}{4}$. 3. 1. 4. $F'(y) = 2 \int_y^y \cos(x^2 + y^2) dx + \sin(2y^2) - 2y \sin(y^2 + y^4)$. 5. $F'(y) = \frac{(2y+1) \sin(y^2+y)}{y^2+y} - \frac{(2y-1) \sin(y^2-y)}{y^2-y}$. 6. $\frac{1}{2} \left[\frac{b}{a^2(a^2+b^2)} + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right]$. 8. Докажем, что интеграл $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx$ равномерно сходится на всей вещественной оси: 1) имеет место соотношение $\int \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2+y^2}$, 2) для всякого $\varepsilon > 0$ в качестве $A(\varepsilon)$, упоминаемого в определении несобственного интеграла, равномерно сходящегося по параметру y , можно взять $A(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$. При $B > A$ будем иметь $\left| \int_B^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \int_B^N \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=B}^N \right| = \left| -\frac{B}{B^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{B} < \frac{1}{A} = \varepsilon$. 9. Докажем, что интеграл $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+s^2}$ равномерно сходится при $\alpha \leq s \leq \beta$, где $\alpha \geq 1$. Так как $\frac{1}{x^2+s^2} \leq \frac{1}{x^2+1}$ при $s \geq 1$ и интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} N = \frac{\pi}{2}$ сходится, то по достаточному признаку Вейерштрасса заключаем, что данный интеграл равномерно сходится. 10. Имеем $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$ ($\alpha > 0$). Дифференцируя n раз по параметру α , получим $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$, откуда при $\alpha = 1$ будем иметь $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. 11. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \left| x^3 = t, x = \sqrt[3]{t}, dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt; x_1 = 0, t_1 = 0; x_2 = \infty, t_2 = \infty \right| = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}} dt}{1+t} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{3}-1} dt}{(1+t)^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 12. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| x = a\sqrt{t}, dx = \frac{a}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \right| = \int_0^1 a^2 t \sqrt{1-t} \cdot \frac{a}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{a^3}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^3}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}$. Так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, то $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^4}{16}$. 13. $\int_0^1 x \sqrt{1-x^3} dx = (\text{замена } x^3 = t) = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{m+1}{2}-1} x \cdot \cos^{\frac{n+1}{2}-1} x dx \right] = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+1}{2})}$. 15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{n+1}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}+(1-\frac{n+1}{2})}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, 1 - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin(\frac{n+1}{2}\pi)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2})} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}}$. 16. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$. 17. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)^n} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{2}+(n-\frac{1}{2})}} dt = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{(n-1)!}$.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Понятие функции комплексного переменного. Производная. Условия Коши—Римана

1.1. Множества на комплексной плоскости

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а z_0 — произвольное комплексное число. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

является *открытым кругом* радиуса ε с центром в точке z_0 (рис. 1).

В самом деле, полагая $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$, получим

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon,$$

или, возводя в квадрат,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

Совокупность точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

будем называть ε -*окрестностью* точки z_0 .

Точка z называется *внутренней* точкой множества на комплексной плоскости, если существует ε -окрестность этой точки, целиком принадлежащая данному множеству.

Областью на комплексной плоскости называется множество D точек, обладающих следующими свойствами:

- 1) каждая точка множества D является внутренней точкой этого множества (*открытость*);
- 2) любые две точки множества D можно соединить ломаной, состоящей из точек этого множества (*связность*).

Граничной точкой области D называется всякая точка z , в любой ε -окрестности которой содержатся как точки, принадлежащие области D , так и точки, не принадлежащие области D . Совокупность граничных точек называется *границей* области D . Обозначение: ∂D .

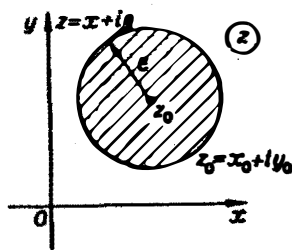


Рис. 1

Область D с присоединенной к ней границей ∂D называется *замкнутой областью* и обозначается символом $\bar{D}$.

Пример. Множество точек z , удовлетворяющих неравенствам

$$1 < |z| < 2,$$

является (открытой) областью, а неравенствам

$$1 \leq |z| \leq 2,$$

— замкнутой областью. Граница состоит из двух окружностей $|z| = 1$ и $|z| = 2$ (рис. 2).

Замкнутую кривую без самопересечений будем называть *контуром*. Всякий контур разбивает плоскость на две различные области и является границей каждой из них. Одна из этих областей — *внутренность контура* — ограничена, а другая — *внешность контура* — неограничена.

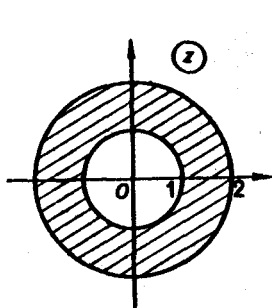


Рис. 2

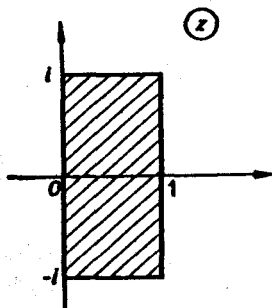


Рис. 3

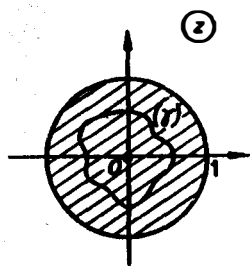


Рис. 4

Область D будем называть *односвязной*, если внутренность любого контура, принадлежащего D , также принадлежит D . Область, не являющуюся односвязной, назовем *многосвязной*.

Пример 1. Множество комплексных чисел $z = x + iy$, подчиненных условию

$$0 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$$

— односвязная область (рис. 3).

Пример 2. Множество комплексных чисел z , подчиненных условию

$$0 < |z| < 1,$$

— многосвязная (двусвязная) область (рис. 4): точка $z = 0$, лежащая внутри контура γ , не принадлежит рассматриваемому множеству.

Рассмотрим последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ существует натуральное число N такое, что все члены z_n последовательности $\{z_n\}$ с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|z_n| > M$, то говорят, что *последовательность $\{z_n\}$ сходится к бесконечно удаленной точке*, или просто к бесконечности, и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

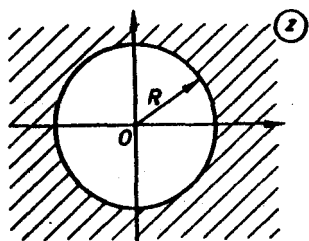


Рис. 5

Пополняя плоскость комплексного переменного так введенной бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, получаем *расширенную плоскость комплексного переменного*.

Окрестностью бесконечно удаленной точки (R — окрестностью) называется совокупность всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z| > R$ (с присоединением бесконечно удаленной точки), т. е. совокупность всех точек z , лежащих вне круга достаточно большого радиуса R с центром в начале координат (рис. 5).

1.2. Функция комплексного переменного

Будем говорить, что на множестве S комплексной плоскости z определена функция

$$w = f(z),$$

если указано правило, по которому каждому комплексному числу z из S ставится в соответствие комплексное число w .

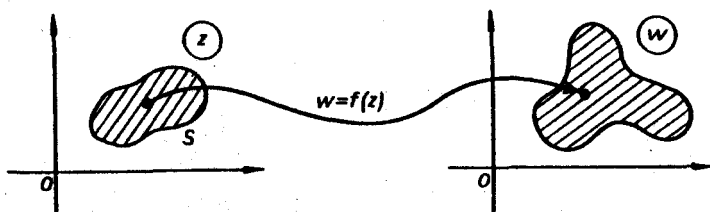


Рис. 6

Таким образом, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w (рис. 6)

Положим

$$z = x + iy, \quad w = u + iv.$$

Тогда задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ будет равносильно заданию двух действительных функций двух действительных переменных

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

где

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ называется *действительной частью* функции $w = f(z)$ ($\operatorname{Re} w$), а $v(x, y)$ — *ее мнимой частью* ($\operatorname{Im} w$).

Пример 3. Пусть $w = z^2$. Полагая $z = x + iy$, $w = u + iv$, получим

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Следовательно, равенство $w = z^2$ равносильно двум равенствам

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* функцией на множестве S , если в разных точках этого множества она принимает разные значения. Функция, не являющаяся однолистной, называется *многолистной*.

Пример 4. Функция $w = z^2$ однолистка в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и многолистка на всей плоскости. Например, $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Часто рассматривают *многозначные* функции комплексного переменного, когда каждому значению z из S ставится в соответствие несколько комплексных чисел.

Пример 5. Функция $w = \sqrt{z}$ двузначна на всей плоскости z , исключая нулевую точку (и бесконечно удаленную).

1.3. Предел функции

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ кроме, может быть, самой точки z_0 .

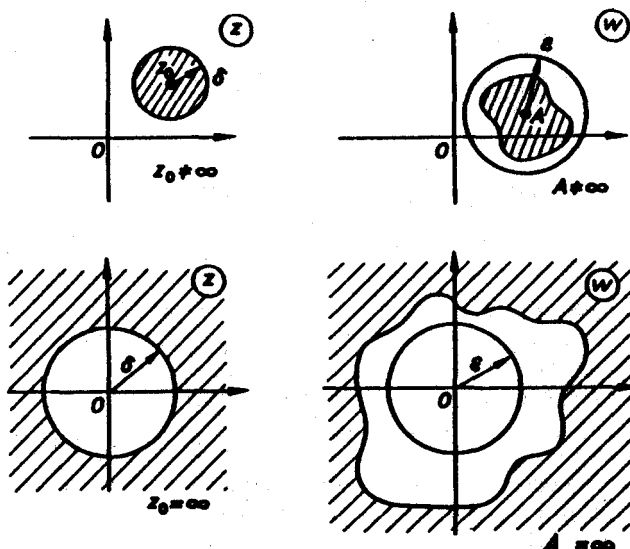


Рис. 7

Комплексное число A называется *пределом* функции $f(z)$ при z , стремящейся к z_0 , если для любого положительного числа ϵ можно указать δ -окрестность точки z_0 такую, что для всех точек z из этой δ -окрестности, исключая, может быть, саму точку z_0 , соответствующие точки $w = f(z)$ лежат в ϵ -окрестности точки A (рис. 7). Обозначение: $A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Если z_0 и A — конечные точки комплексной плоскости, то определение предела можно сформулировать и по-другому:

$$A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (1)$$

если для любого $\epsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех z , удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \epsilon$.

Подчеркнем, что согласно данному определению функция $f(z)$ стремится к своему пределу A независимо от способа приближения точки z к точке z_0 .

Существование предела (1) равносильно одновременному существованию пределов действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = B, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = C,$$

где $A = B + iC$.

Ввиду того, что данное определение предела (1) сводится к определению предела для действительных функций двух действительных переменных, для функции

комплексного переменного остаются справедливыми основные предельные соотношения:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z), \\ \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} \quad \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \right).\end{aligned}\tag{2}$$

1.4. Непрерывность

Функция $w = f(z)$, заданная на множестве S , называется *непрерывной в точке* $z_0 \in S$, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in S.$$

Иными словами, функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек $z \in S$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Для непрерывности функции комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части — функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — были непрерывны в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y .

Это позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных: непрерывность суммы, произведения и частного двух функций, непрерывность сложной функции.

Если функция $f(z)$ непрерывна в каждой точке множества S , то говорят, что функция $f(z)$ *непрерывна на множестве* S .

1.5. Дифференцируемость и аналитичность функции комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z .

Говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Этот предел называют *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначают символом $f'(z)$, или $\frac{df(z)}{dz}$:

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.\tag{3}$$

Из определения производной (3) и свойств пределов (2) вытекает, что для функций комплексного переменного сохраняются основные правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции и обратной функции:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} [f(z) + g(z)] &= \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}, \\ \frac{d}{dz} [f(z) \cdot g(z)] &= \frac{df(z)}{dz} \cdot g(z) + f(z) \cdot \frac{dg(z)}{dz},\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\frac{df(z)}{dz} \cdot g(z) - f(z) \cdot \frac{dg(z)}{dz}}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0),$$

$$\frac{d}{dz} [f(g(z))] = \frac{df(w)}{dw} \cdot \frac{dg(z)}{dz} \quad (\text{здесь } w = g(z)),$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{\frac{d\varphi(w)}{dw}}, \quad \frac{d\varphi(w)}{dw} \neq 0 \quad (\text{здесь } z = \varphi(w) \text{ — функция, обратная к } w = f(z)).$$

Пример 6. Покажем, что функция $w = f(z) = \operatorname{Re} z$ не дифференцируема ни в одной точке.

◀ Пусть $z = x + iy$. Тогда $w = x$. Напомним, что по определению дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке z предел разностного отношения

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

не должен зависеть от способа приближения к точке z . Рассмотрим два случая.

Пусть $h = s$ — действительно. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(z+s) - f(z)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(x+s) - x}{s} = 1.$$

Положим $h = it$, где t — действительно. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - x}{it} = 0.$$

Таким образом, способ приближения к точке z существенно влияет на предельное значение разностного отношения. Значит, функция $w = \operatorname{Re} z$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости. ▶

Требование дифференцируемости функции $f(z)$ в точке $z = x + iy$ накладывает определенные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки (x, y) .

Теорема 1. Пусть функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

дифференцируема в точке $z = x + iy$. Тогда в точке (x, y) существуют частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по переменным x и y , причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

Соотношения (4) называют условиями Коши—Римана.

◀ По условию теоремы существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z), \quad (5)$$

не зависящий от способа приближения к точке z .

Предположим сначала, что h стремится к нулю, оставаясь действительным ($h = s$) (рис. 8).

В этом случае

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) + iv(x+s, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s}. \end{aligned}$$

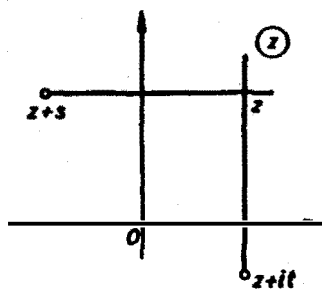


Рис. 8

Последнее преобразование возможно вследствие того, что существование предела функции равносильно одновременному существованию пределов ее действительной и мнимой частей.

Тем самым,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Полагая теперь в формуле (5) $h = it$, где t — действительно, получим

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = \\ &= -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Правые части в последних двух выражениях для $f'(z)$ равны,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда вытекают равенства (4). ►

Налагая определенные условия на действительную и мнимую части функции комплексного переменного, можно гарантировать ее дифференцируемость.

Теорема 2. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) как функции действительных переменных и в этой точке выполнены условия (4). Тогда функция комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

дифференцируема в точке $z = x + iy$.

◄ По определению дифференцируемости действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по переменным x и y их приращения в точке (x, y) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x+s, y+t) - u(x, y) &= u_x(x, y)s + u_y(x, y)t + \alpha|h|, \\ v(x+s, y+t) - v(x, y) &= v_x(x, y)s + v_y(x, y)t + \beta|h| \end{aligned}$$

(здесь α и β стремятся к нулю вместе с $|h| = \sqrt{s^2 + t^2}$).

Умножая второе из равенств на i и складывая с первым, получим

$$f(z+h) - f(z) = (u_x + iv_x)s + (u_y + iv_y)t + \gamma|h|,$$

где $\gamma = \alpha + i\beta$ стремится к нулю при $|h| \rightarrow 0$. Исключим из этой формулы u_y и v_y , пользуясь соотношениями (4). Тогда приращение функции можно будет записать в следующем виде:

$$f(z+h) - f(z) = (u_x + iv_x)(s + it) + \gamma|h|.$$

Поделив обе части последнего равенства на $h = s + it$, убеждаемся в том, что предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

существует и равен $u_x + iv_x$. ►

Пример 7. Функция $w = \bar{z} = x - iy$ не дифференцируема ни в одной точке, т. к.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в точке z* , если она дифференцируема как в самой точке z , так и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D , называется *аналитической функцией* в этой области.

Для любой аналитической функции $f(z)$ выполняются равенства

$$f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y = u_x - i u_y = v_y + i v_x. \quad (6)$$

Пример 8. Является ли функция

$$w = z\bar{z}$$

аналитической хотя бы в одной точке?

◀ Имеем:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

так что

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

Условия Коши—Римана в этом случае имеют вид

$$2x = 0, \quad 2y = 0$$

и выполняются только в точке $(0, 0)$.

Следовательно, функция $w = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична. ▶

Пример 9. Показать, что функция

$$w = f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

является аналитической на всей комплексной плоскости z .

◀ Функции

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$

как функции действительных переменных x и y дифференцируемы в любой точке (x, y) . Нетрудно проверить, что их первые производные удовлетворяют условиям (4). Пользуясь формулой (6), $f'(z) = u_x + i v_x$, вычислим производную данной функции $f(z)$. Имеем

$$f'(z) = (e^x(\cos y + i \sin y))' = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z). \quad \blacktriangleright$$

При помощи условий Коши—Римана аналитическую функцию можно восстановить с точностью до постоянной, если известна ее действительная часть $u(x, y)$ или ее мнимая часть $v(x, y)$.

Пример 10. Найти аналитическую функцию

$$w = f(z)$$

по ее действительной части

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

при дополнительном условии $f(0) = 1$.

◀ **1-й способ.** Так как $u_x = e^x \cos y$, то в силу равенства $u_x = v_y$ получаем, что $v_y = e^x \cos y$. Отсюда

$$v(x, y) = \int e^x \cos y \, dy = e^x \sin y + \varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя v по x и используя равенство $v_x = -u_y$, получим, что

$$e^x \sin y + \varphi'(x) = e^x \sin y,$$

откуда $\varphi'(x) = 0$, и значит, $\varphi(x) = C$, где $C = \text{const}$. Итак, $v(x, y) = e^x \sin y + C$, и следовательно,

$$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C).$$

Из условия $f(0) = 1$, полагая в последнем равенстве $x = 0$ и $y = 0$, получаем, что $1 = 1 + iC$, и значит, $C = 0$.

2-й способ. Отыскание мнимой части проще провести при помощи криволинейного интеграла. Имеем

$$v_x = -u_y = e^x \sin y, \quad v_y = u_x = e^x \cos y.$$

Поэтому

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy + C = \int_{(0,0)}^{(x,y)} d(e^x \sin y) + C = e^x \sin y + C.$$

Так как $v(0, 0) = 0$, то окончательно получаем

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

и

$$f(z) = e^z (\cos y + i \sin y). \blacktriangleright$$

Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической* в области D , если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D , то и ее действительная часть $u(x, y)$, и ее мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими функциями в соответствующей области плоскости xOy .

В самом деле, дифференцируя первое из равенств (4) по x , а второе — по y , получим

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy},$$

откуда в силу равенства $v_{xy} = v_{yx}$ приходим к соотношению $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Аналогичное соотношение получаем и для мнимой части: $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Замечание. Возможность проведения указанных дифференцирований нуждается в обосновании. Далее, в § 3, будет доказано, что функция, аналитическая в некоторой области, имеет в ней производные всех порядков. Разумеется, это относится и к ее действительной и мнимой частям.

1.6. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ — функция, аналитическая в области D . Зафиксируем в области D точку z_0 и проведем через z_0 гладкую кривую γ .

Пусть функция $w = f(z)$ отображает область D комплексной плоскости $z = x + iy$ на некоторую область G комплексной плоскости $w = u + iv$; при этом точка z_0 переходит в точку w_0 , а кривая γ в кривую Γ . По условию в каждой точке области D существует производная $f'(z)$. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$, и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \rho e^{i\alpha}.$$

Если точка $z = z_0 + \Delta z$ лежит на кривой γ , то соответствующая ей точка $w = w_0 + \Delta w$ лежит на кривой Γ (рис. 9).

Угол, который вектор Δz (вектор Δw) секущей кривой γ (кривой Γ) образует с положительным направлением действительной оси x (оси u), равен $\arg \Delta z$ ($\arg \Delta w$). Так как в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$ секущие переходят в касательные к соответствующим кривым, то

$$\arg \Delta z \rightarrow \varphi, \quad \arg \Delta w \rightarrow \Phi,$$

где φ (соответственно Φ) — угол, образуемый касательной к кривой γ (кривой Γ) в точке z_0 (точке w_0) с осью x (осью u).

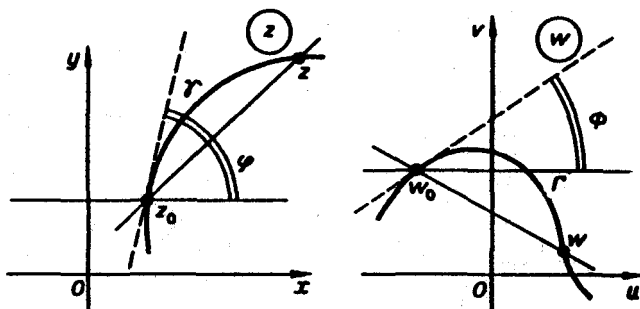


Рис. 9

При делении комплексных чисел аргументы вычитаются

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z.$$

Поэтому

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \Phi - \varphi.$$

Так как величина производной не зависит от того, по какому закону Δz стремится к нулю, то полученная разность будет той же самой и для любой другой гладкой кривой, проходящей через точку z_0 (при этом сами углы Φ и φ могут, конечно, измениться). Отсюда вытекает, что при отображении посредством аналитической функции $w = f(z)$, у которой производная $f'(z_0) \neq 0$, угол

$$\psi = \tilde{\varphi} - \varphi$$

между любыми гладкими кривыми γ и $\tilde{\gamma}$, исходящими из точки z_0 , равен углу между их образами Γ и $\tilde{\Gamma}$, исходящими из точки w_0 :

$$\psi = \tilde{\Phi} - \Phi.$$

При этом сохраняются как абсолютные величины углов, так и их направления. Это свойство называется *свойством сохранения углов*.

Так как

$$\rho = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$$

то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка имеет место равенство

$$|\Delta w| = \rho |\Delta z|,$$

не зависящее от выбора кривой γ .

Геометрический смысл этого равенства состоит в том, что бесконечно малые окружности с центром в точке z_0 с точностью до бесконечно малых высших порядков преобразуются в бесконечно малые окружности с центром в точке w_0 (рис. 10). Это свойство называется *свойством постоянства растяжений*.

Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ области D плоскости z на область G плоскости w называется *конформным*, если это отображение в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и свойством постоянства растяжений.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что отображение посредством аналитической функции с отличной от нуля производной конформно.

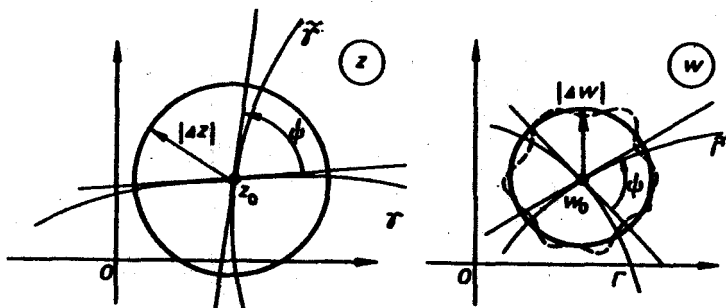


Рис. 10

Справедливо следующее утверждение.

Критерий конформности. Для того, чтобы отображение $w = f(z)$ было конформно в области D , необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $f(z)$ была однолистной и аналитической, причем $f'(z) \neq 0$ для всех z из D .

§ 2. Элементарные функции комплексного переменного

2.1. Дробно-рациональные функции

Линейной функцией комплексного переменного z называется функция вида

$$w = az + b, \quad (1)$$

где a и b — заданные комплексные числа, причем $a \neq 0$. Линейная функция определена для всех значений независимого переменного z , однозначна и, т. к. обратная функция

$$z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a} \quad (2)$$

также однозначна, однолистка во всей плоскости z . Линейная функция аналитична во всей комплексной плоскости, и ее производная

$$\frac{dw}{dz} = a \neq 0,$$

поэтому осуществляемое ей отображение конформно во всей плоскости.

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3)$$

где a, b, c и d — заданные комплексные числа, причем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Дробно-линейная функция определена для всех значений независимого переменного z , кроме $z = -\frac{d}{c}$, однозначна и, т. к. обратная функция

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

однозначна, однолистка во всей комплексной плоскости, исключая точку $z = -\frac{d}{c}$. В этой области функция (3) аналитична и ее производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

поэтому осуществляемое ею отображение конформно.

Доопределим функцию (3) в точке $z = -\frac{d}{c}$, положив $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, а бесконечно удаленной точке $w = \infty$ поставим в соответствие точку $z(\infty) = -\frac{d}{c}$. Тогда дробно-линейная функция будет однолистка в расширенной комплексной плоскости z .

Пример 1. Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$w = \frac{1}{z}.$$

Из равенства

$$wz = 1$$

вытекает, что модули комплексных чисел z и w связаны соотношением

$$|w| \cdot |z| = 1,$$

а сами эти числа располагаются на лучах, выходящих из точки O и симметричных относительно действительной оси.

В частности, точки единичной окружности $|z| = 1$ переходят в точки единичной окружности $|w| = 1$. При этом комплексному числу

$$z = e^{i\theta}$$

ставится в соответствие сопряженное число

$$w = \bar{z} = e^{-i\theta}$$

(рис. 11). Заметим также, что функция $w = \frac{1}{z}$ отображает бесконечно удаленную точку $z = \infty$ в нулевую $w = 0$.

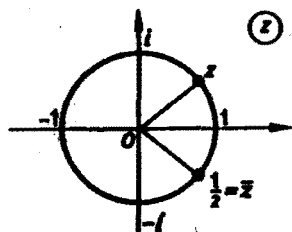


Рис. 11

2.2. Степенная функция

Степенная функция

$$w = z^n,$$

(4)

где n — натуральное число, аналитична во всей комплексной плоскости; ее производная $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$ при $n > 1$ отлична от нуля во всех точках, кроме $z = 0$. Записывая в формуле (4) w и z в показательной форме

$$w = \rho e^{i\varphi}, \quad z = r e^{i\theta},$$

получаем, что

$$\rho = r^n, \quad \varphi = n\theta. \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что комплексные числа z_1 и z_2 такие, что

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg z_2 = \arg z_1 + \frac{2\pi}{n} k, \quad (6)$$

где k — целое, переходят в одну точку w . Значит, при $n > 1$ отображение (4) не является однолистным на плоскости z .

Простейшим примером области, в которой отображение $w = z^n$ однолистно, является сектор

$$\alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}, \quad (7)$$

где α — любое вещественное число. В области (7) отображение (4) конформно.

Пример 2. Отображение $w = z^n$, $n > 1$, переводит сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ плоскости z в верхнюю полуплоскость плоскости w (рис. 12). При этом угол раствора сектора увеличивается в n раз. Поэтому в точке $z = 0$ конформность отображения $w = z^n$ нарушается.

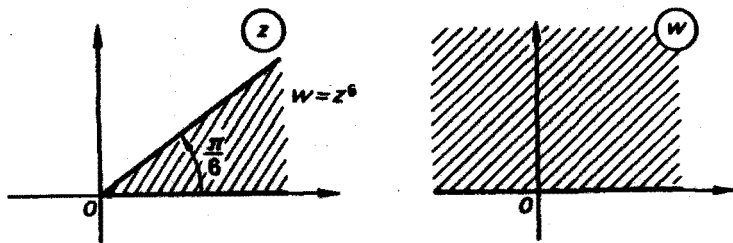


Рис. 12

Обратная функция — *корень n -й степени*

$$w = \sqrt[n]{z}$$

— многозначна, т. к. для каждого комплексного числа $z = re^{i\theta} \neq 0$ можно указать n различных комплексных чисел

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

таких, что их n -я степень равна z :

$$w_k^n = z.$$

Отметим, что $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$.

Многочлен степени n комплексного переменного z называется функция

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — заданные комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$. Многочлен любой степени является аналитической функцией на всей комплексной плоскости.

2.3. Дробно-рациональная функция

Дробно-рациональной функцией называется функция вида

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены комплексного переменного z . Дробно-рациональная функция аналитична во всей плоскости, кроме тех точек, в которых знаменатель $Q(z)$ обращается в нуль.

Пример 3. *Функция Жуковского*

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

(8)

аналитична во всей плоскости z , исключая точку $z = 0$.

Выясним условия на область комплексной плоскости, при которых функция Жуковского, рассматриваемая в этой области, будет однолистной.

◀ Пусть точки z_1 и z_2 функция (8) переводит в одну точку. Тогда

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0;$$

при $z_1 \neq z_2$ мы получаем, что $z_1 z_2 = 1$.

Значит, для однолистности функции Жуковского необходимо и достаточно выполнение условия

$$z_1 z_2 \neq 1. \quad (9)$$

Примером области, удовлетворяющей условию однолистности (9), является внешность круга $|z| > 1$. Так как производная функции Жуковского

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду, кроме точек $z = \pm 1$, то отображение области $|z| > 1$ осуществляемое этой функцией, будет конформным (рис. 13).

Заметим, что внутренность единичного круга $|z| < 1$ также является областью однолистности функции Жуковского. ►

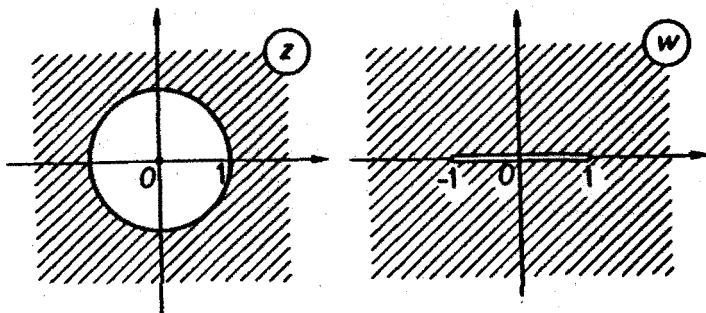


Рис. 13

2.4. Показательная функция

Показательную функцию e^z определим для любого комплексного числа $z = x + iy$ следующим соотношением:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (10)$$

При $x = 0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (11)$$

Опишем основные свойства показательной функции:

1. Для действительных z данное определение совпадает с обычным.

В этом можно убедиться непосредственно, положив в формуле (10) $y = 0$.

2. Функция e^z аналитична на всей комплексной плоскости, и для нее сохраняется обычная формула дифференцирования

$$(e^z)' = e^z.$$

3. Для функции e^z сохраняется теорема сложения:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

◀ Положим $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned} \blacktriangleright$$

4. Функция e^z — периодическая с мнимым основным периодом $2\pi i$.

◀ В самом деле, для любого целого k

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{i2\pi k} = e^z,$$

ибо $e^{i2\pi k} = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1$.

С другой стороны, если $e^{z_1} = e^{z_2}$, где $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из определения (10) вытекает, что

$$e^{x_1} = e^{x_2}, \quad \cos y_1 = \cos y_2, \quad \sin y_1 = \sin y_2.$$

Откуда следует, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi n$, или

$$z_2 - z_1 = i2\pi n, \tag{12}$$

где n — целое. ▶

Полоса $0 < y < 2\pi$ не содержит ни одной пары точек, связанных соотношением (12), поэтому из проведенного исследования вытекает, что отображение $w = e^z$ однолистно в полосе $0 < y < 2\pi$ (рис. 14). А так как производная $(e^z)' \neq 0$ ($|e^z| = e^x > 0$), то это отображение конформно.

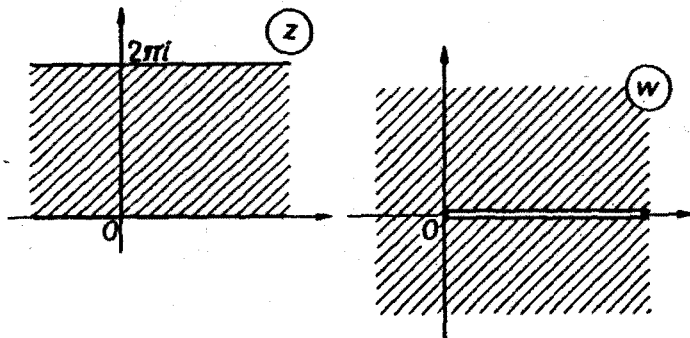


Рис. 14

Замечание. Функция e^z однолистка в любой полосе $\alpha < y < \alpha + 2\pi$.

2.5. Логарифмическая функция

Из уравнения

$$z = e^w,$$

где $z \neq 0$ задано, а $w = u + iv$ — неизвестное, получаем

$$|z| = e^u, \quad \text{Arg } z = v + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда

$$u = \ln |z|, \quad v = \text{Arg } z.$$

Тем самым функция, обратная функции

$$w = e^z,$$

определена для любого $z \neq 0$ и представляется формулой

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эта многозначная функция называется *логарифмической* и обозначается следующим образом

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Величину $\ln |z| + i \arg z$ называют *главным значением* логарифма и обозначают через

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (13)$$

Тогда для $\operatorname{Ln} z$ получается формула

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

2.6. Тригонометрические и гиперболические функции

Из формулы Эйлера (11) для действительных y получаем

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Откуда

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Определим *тригонометрические функции* $\sin z$ и $\cos z$ для любого комплексного числа z посредством следующих формул:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (15)$$

Синус и косинус комплексного аргумента обладают интересными свойствами. Перечислим основные из них.

Функции $\sin z$ и $\cos z$:

- 1) для действительных $z = x$ совпадают с обычными синусами и косинусами;
- 2) аналитичны на всей комплексной плоскости;
- 3) подчиняются обычным формулам дифференцирования:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z;$$

- 4) периодичны с периодом 2π ;
- 5) $\sin z$ — нечетная функция, а $\cos z$ — четная;
- 6) сохраняются обычные тригонометрические соотношения.

Все перечисленные свойства без труда получаются из формул (15).

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ в комплексной области определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (16)$$

а гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ — формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (17)$$

Гиперболические функции тесно связаны с тригонометрическими функциями. Эта связь выражается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos(iz), & \operatorname{sh} z &= -i \sin(iz), \\ \cos z &= \operatorname{ch}(iz), & \sin z &= -i \operatorname{sh}(iz). \end{aligned} \quad (18)$$

Синус и косинус комплексного аргумента обладают еще одним важным свойством: на комплексной плоскости $|\sin z|$ и $|\cos z|$ принимают сколь угодно большие положительные значения. Покажем это.

Пользуясь свойствами 6 и формулами (18) получаем, что

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y, \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= (\sin x \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \operatorname{sh} y)^2, \\ |\cos z|^2 &= (\cos x \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \operatorname{sh} y)^2. \end{aligned}$$

Полагая $x = 0$, имеем

$$|\sin z| = |\operatorname{sh} y|, \quad |\cos z| = \operatorname{ch} y.$$

Пример 4. Нетрудно проверить, что

$$\cos(i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})) = 5.$$

◀ В самом деле,

$$\cos(i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})) = \operatorname{ch} \ln(5 \pm 2\sqrt{6}) = \frac{1}{2}(e^{\ln(5+2\sqrt{6})} + e^{\ln(5-2\sqrt{6})}) = \frac{1}{2}(5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6}) = 5. \quad \blacktriangleright$$

§ 3. Интегрирование по комплексному аргументу. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного

Рассмотрим на комплексной плоскости z кусочно-гладкую ориентированную кривую γ и предположим, что на этой кривой определена функция $f(z)$ комплексного переменного z . Разобьем кривую γ на n частичных дуг последовательными точками деления

$$z_0 = a, \quad z_1, \dots, z_{n-1}, \quad z_n = b,$$

где a и b — концы кривой γ (рис. 15).

Положив

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1},$$

составим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \quad (1)$$

(здесь ζ_k — произвольно взятая точка k -й частичной дуги $[z_{k-1}, z_k]$), называемую *комплексной интегральной суммой* вдоль кривой γ .

Если при $\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0$ существует предел суммы (1), не зависящий от способа разбиения кривой на частичные дуги и от выбора точек ζ_k на них, то этот предел называется *интегралом* от функции $f(z)$ по кривой γ :

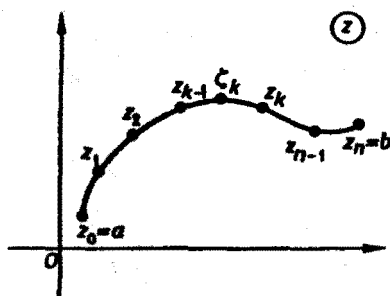


Рис. 15

$$\lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (2)$$

Положим

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \\ z_k &= x_k + iy_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \\ \zeta_k &= \xi_k + i\eta_k, \quad u_k = u(\xi_k, \eta_k), \quad v_k = v(\xi_k, \eta_k). \end{aligned}$$

Тогда интегральную сумму (1) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \quad (3)$$

Из этого соотношения видно, что действительная и мнимая части суммы (1) представляют собой интегральные суммы криволинейных интегралов второго рода —

$$\int_{\gamma} u dx - v dy \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} v dx + u dy \quad (4)$$

соответственно.

Таким образом, вопрос о существовании интеграла (2) сводится к вопросу о существовании обычных криволинейных интегралов от функций действительных переменных. Для существования этих интегралов достаточно кусочной непрерывности функций u и v действительных переменных x и y .

Таким образом, если γ — кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ — кусочно непрерывная и ограниченная на γ функция, то интеграл (2) всегда существует и справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (5)$$

Формулу (5) легко запомнить, если записать ее в следующем виде:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy).$$

Из формулы (5) вытекает, что для интегралов от функции комплексного переменного сохраняются основные свойства криволинейных интегралов второго рода:

$$1. \int_{\gamma} f_1(z) dz + \int_{\gamma} f_2(z) dz = \int_{\gamma} [f_1(z) + f_2(z)] dz.$$

$$2. \int_{\gamma} cf(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz,$$

где c — комплексная постоянная.

$$3. \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma^+} f(z) dz$$

(здесь кривые γ^- и γ^+ имеют противоположную ориентацию (рис. 16 а).

$$4. \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz$$

(рис. 16 б).

5. Пусть

$$M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$$

и l — длина кривой γ . Тогда

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq M \int_{\gamma} |dz| = Ml. \quad (6)$$

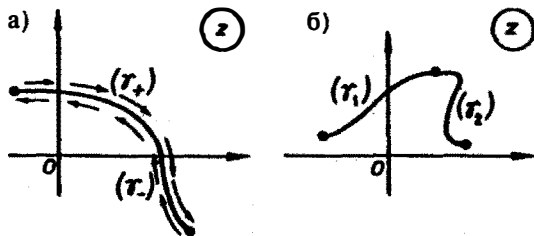


Рис. 16

◀ Доказательство формулы (6) вытекает непосредственно из определения интеграла: переходя в соотношении

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$$

к пределу при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$$

— длина ломаной, вписанной в кривую γ , получим требуемое. ▶

3.2. Вычисление интеграла от функции комплексного переменного

Пусть

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

— параметрическое представление гладкой кривой γ . Тогда справедлива следующая формула:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt. \quad (7)$$

◀ В самом деле, при помощи формулы (5) вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов (4) от действительных функций. Эти интегралы можно вычислить сведением к обыкновенным,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u \, dx - v \, dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] \, dt, \\ \int_{\gamma} v \, dx + u \, dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] \, dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя полученные выражения в правую часть формулы (5), получим требуемое:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) \, dt. \blacktriangleright$$

Пример 1. Покажем, что

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad (9)$$

где γ_r — окружность радиуса r с центром в точке z_0 , обходимая против часовой стрелки.

◀ Окружность γ_r имеет следующее параметрическое представление:

$$z = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Отсюда вытекает, что $z'(t) = ire^{it}$ и

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} \, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Заметим, что значение интеграла (9) не зависит ни от r , ни от z_0 . Рассуждая аналогично, убеждаемся в том, что

$$I_n = \int_{\gamma_r} (z - z_0)^n \, dz = 0,$$

где n — целое число, $n \neq -1$. В самом деле,

$$I_n = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi(n+1)i} - 1) = 0. \blacktriangleright$$

3.3. Теорема Коши

Теорема 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , γ — произвольная замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в области D . Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0. \quad (10)$$

◀ Доказательство этой теоремы проведем при двух дополнительных предположениях:

- 1) γ — кусочно-гладкий контур;
- 2) производная $f'(z)$ — непрерывна.

В силу соотношения

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy \quad (11)$$

достаточно показать, что интегралы

$$\int_{\gamma} u dx - v dy, \quad \int_{\gamma} v dx + u dy \quad (12)$$

равны нулю.

Обозначим внутренность контура γ через G . Так как функция $f'(z)$ непрерывна всюду в области G , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в этой области имеют непрерывные частные производные первого порядка. Ввиду кусочной гладкости контура γ выполнены все условия, позволяющие применить к интегралам (12) формулу Грина. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u dx - v dy &= \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \\ \int_{\gamma} v dx + u dy &= \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу условий Коши—Римана подынтегральные выражения в каждом из двойных интегралов (13) тождественно равны нулю. ►

Замечание. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то значение интеграла

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой кривой γ , принадлежащей области D , не зависит от выбора кривой γ , а определяется лишь положением начальной и конечной точек этой кривой. Чтобы подчеркнуть независимость интеграла $\int_{\gamma} f dz$ от пути интегрирования, будем обозначать его следующим образом:

$$\boxed{\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz},$$

где z_0 и z_1 — соответственно начальная и конечная точки кривой γ .

Теорема 4. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D ; точки z_0 и z принадлежат D . Тогда функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

аналитична в области D , и

$$\frac{dF}{dz} = f(z).$$

◀ В силу свойств интегралов от функции комплексного переменного и предыдущего замечания, разностное отношение

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right)$$

можно представить в следующем виде:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

Будем считать, что интеграл в равенстве (14) вычисляется вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $z+h$ (рис. 17).

Замечая, что

$$f(z) = f(z) \frac{1}{h} \int_z^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\zeta,$$

Рис. 17

оценим разность

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

В силу непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z , для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\zeta - z| < \delta$ выполняется неравенство $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

Пусть $|h| < \delta$. Тогда

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| < \varepsilon \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |d\zeta| = \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon.$$

Полученная оценка означает, что существует

$$\frac{dF(z)}{dz} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z). \blacktriangleright$$

Замечание. Нетрудно заметить, что приведенное выше доказательство основано на двух свойствах функции $f(z)$:

- 1) $f(z)$ непрерывна в области D ;
- 2) $\int_\gamma f(z) dz$, взятый вдоль любого замкнутого контура γ , лежащего в области D , равен нулю, или, что то же, интеграл $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ не зависит от пути интегрирования.

При этих условиях

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

есть функция, аналитическая в области D , причем $F'(z) = f(z)$. Этим замечанием мы воспользуемся в следующем параграфе.

Функция $\Phi(z)$ называется *первообразной* функции $f(z)$ в области D , если в каждой точке этой области выполняется неравенство

$$\boxed{\frac{d\Phi(z)}{dz} = f(z).} \quad (15)$$

Покажем, что любая первообразная $\Phi(z)$ функции $f(z)$ выражается формулой

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + c, \quad (16)$$

где c — постоянная, $z_0, z \in D$.

◀ Положим

$$w(z) = \Phi(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = u + iv. \quad (17)$$

Тогда

$$w'(z) = f(z) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и значит, $u(x, y) = c_1$, $v(x, y) = c_2$, где c_1 и c_2 — постоянные. Следовательно,

$$w(z) = c_1 + ic_2 = c.$$

Полагая в формуле (17) $z = z_0$, получим, что $\Phi(z_0) = c$. ▶

Заметим, что формулу (16) с учетом равенства $\Phi(z_0) = c$ можно записать в следующем виде:

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0) = \Phi(\zeta) \Big|_{z_0}^z. \quad (18)$$

Тем самым, если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , содержащей точки z_0 и z , то, как и в действительном случае, имеет место *формула Ньютона—Лейбница* (18), где $\Phi(z)$ — какая-либо первообразная функции $f(z)$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

◀ Подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду, $\Phi(z) = z^3 + z^2$ — ее первообразная. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим, что

$$I = (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3. Для вычисления интеграла

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где $z = re^{i\theta} \neq 0$, выберем в качестве пути интегрирования кусочно-гладкую кривую $\sim ABC$, состоящую из отрезка AB действительной оси с концами в точках 1 и $r = |z|$ и меньшей дуги $\sim BC$ окружности $|\zeta| = r$ с концами в точках $r = |z|$ и z (рис. 18). Тогда

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{AB} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\sim BC} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Так как на отрезке AB $\zeta = x$, то первый из интегралов

$$\int_{AB} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_1^r \frac{dx}{x} = \ln r = \ln |z|.$$

Для вычисления второго интеграла заметим, что $\zeta = re^{i\varphi}$ на дуге $\sim BC$. Поэтому

$$\int_{\sim BC} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^\theta \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = i\theta = i \arg z.$$

Таким образом,

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln |z| + i \arg z$$

и, значит,

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z. \quad (19)$$

На основании доказанной теоремы заключаем, что главное значение логарифма — $\ln z$ — аналитическая функция при $z \neq 0$ и

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

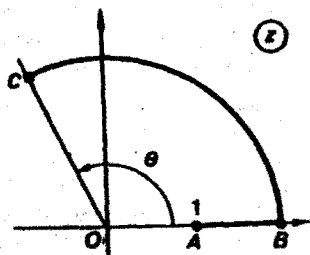


Рис. 18

3.4. Интегрирование многозначных функций

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D , отображает D на область G и такова, что обратная функция $z = g(w)$ многозначна в области G . Если существуют однозначные аналитические в области G функции $z = g_1(w)$, $z = g_2(w)$, ..., для каждой из которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то эти функции $g_1(w)$, $g_2(w)$, ... называются *однозначными ветвями* функции $g(w)$, определенными в области G .

Пример 4. Функция $w = z^n$ каждой точке z ставит в соответствие единственную точку w ; но одной и той же точке w ($w \neq 0$, $w \neq \infty$) функция $z = \sqrt[n]{w}$ ставит в соответствие n различных точек z . При этом если $w = re^{i\varphi}$, то эти n значений z находятся по формулам

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пусть односвязная область G содержит точку w_0 , но не содержит точек 0 и ∞ . Тогда при одном и том же выборе числа φ_0 (например, $\varphi_0 = \arg w_0$) различным значениям k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) соответствуют различные ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Точкой разветвления многозначной функции называется точка, обход вокруг которой в достаточно малой ее окрестности влечет за собой переход с одной ветви многозначной функции на другую.

Точками разветвления функции $\sqrt[n]{w}$ являются точки $w = 0$ и $w = \infty$. После n -кратного обхода, например, вокруг точки $w = 0$ мы вернемся к первоначальной ветви функции $\sqrt[n]{w}$. Точки разветвления, обладающие таким свойством, называются *алгебраическими точками разветвления (порядка $n-1$)*. В каждой из этих точек функция имеет только одно значение: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$, т. е. различные ветви функции в этих точках совпадают.

Для логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$ точками разветвления являются точки $z = 0$ и $z = \infty$, причем $\operatorname{Ln} 0 = -\infty$ и $\operatorname{Ln} \infty = \infty$. Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведет к первоначальной ветви функции $\operatorname{Ln} z$. Такие точки разветвления называются *логарифмическими*.

При интегрировании многозначной функции необходимо выделять ее однозначную ветвь. Это достигается заданием значения функции в некоторой точке кривой, по которой ведется интегрирование.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где γ — верхняя полуокружность $|z| = 1$. Для $\sqrt{z}$ берется ветвь, для которой $\sqrt{1} = -1$ (рис. 19).

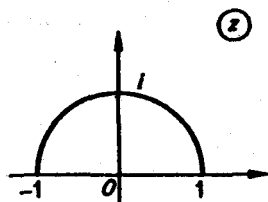


Рис. 19

◀ Положим $z = re^{i\theta}$, где $r = 1$, а θ изменяется от 0 до π . Из условия $\sqrt{1} = -1$ следует, что $\sqrt{e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$. Тогда

$$I = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\sqrt{e^{i\theta}}} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}} d\theta = \int_0^{\pi} ie^{i(\frac{\theta}{2} - \pi)} d\theta = 2e^{i(\frac{\theta}{2} - \pi)} \Big|_0^{\pi} = 2(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}) = 2(1 - i). \blacktriangleright$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$$

по меньшей дуге окружности $|z| = 1$. ($\ln z$ — главное значение логарифма, $\ln 1 = 0$).

◀ Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем, что

$$I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \frac{1}{4} \ln^4 z \Big|_1^i = \frac{1}{4} (\ln^4 i - \ln^4 1) = \frac{1}{4} \ln^4 i = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}. \blacktriangleright$$

3.5. Теорема Коши для многосвязной области

В теореме Коши речь идет о контуре, целиком лежащем внутри области аналитичности функции. Однако утверждение теоремы остается в силе и для контура, который является границей области аналитичности заданной функции, при дополнительном условии ее непрерывности в замыкании этой области. Сформулируем это важное для практических применений обобщение теоремы Коши.

Теорема 5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда интеграл от функции $f(z)$, взятый вдоль границы ∂D этой области, равен нулю:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0. \quad (20)$$

Рассмотрим на комплексной плоскости n замкнутых кусочно-гладких контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ таких, что каждый из контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ лежит во внешности остальных и все они располагаются во внутренности контура Γ_0 (рис. 20).

Множество точек плоскости, лежащих внутри контура Γ_0 и вне контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, представляет собой n -связную область D .

Полная граница Γ области D представляет собой сложный контур, который состоит из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$.

Ориентируем полную границу Γ области D следующим образом. Положительным направлением обхода границы многосвязной области будем называть такое направление движения, при котором область D все время остается слева. При этом внешний контур Γ_0 проходится против часовой стрелки, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ — по часовой стрелке.

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (21)$$

где Γ — полная граница области D , состоящая из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ и проходимая в положительном направлении.

◀ Соединим внешний контур Γ_0 с контурами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ гладкими кривыми $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, т. е. произведем разрезы, и рассмотрим область D^* , граница Γ^* которой складывается из кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ и кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$. При этом вспомогательные кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ проходятся дважды в противоположных направлениях (отмечены стрелками на рис. 21); кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ всегда можно построить так, чтобы область D^* была односвязной.

В силу теоремы Коши интеграл на границе Γ^* области D^* равен нулю. Так как интегралы вдоль γ_k взаимно уничтожаются, то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^*} f(\zeta) d\zeta &= \\ &= \int_{\Gamma_0^+} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Gamma_k^-} f(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(верхние индексы у Γ_k указывают направление обхода).

Полученное равенство означает, что

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0. \blacktriangleright$$

Замечание. Доказанное соотношение (22) можно записать в следующем виде:

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \dots + \int_{\Gamma_{n-1}} f(\zeta) d\zeta. \quad (23)$$

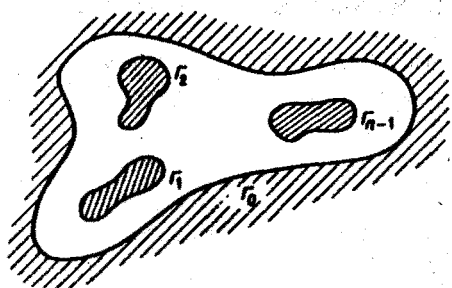


Рис. 20

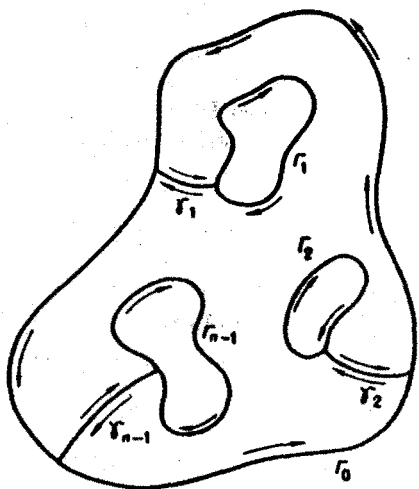


Рис. 21

3.6. Интегральная формула Коши

Теорема 7. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда для любой внутренней точки z области D имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (24)$$

где Γ — граница области D , проходимая в положительном направлении.

Таким образом, значение функции $f(z)$ в произвольной точке области D определяется ее значениями только на границе.

◀ Для вывода формулы (24) исключим из области D круг малого радиуса r с центром в точке z (рис. 22). В полученной при этом области D^* и числитель и знаменатель подынтегральной функции

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

аналитичны относительно переменного ζ , причем знаменатель отличен от нуля. Поэтому эта функция аналитична в области D^* и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^*$. По предыдущей теореме интеграл вдоль границы области D^* равен нулю,

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad (25)$$

где γ_r — окружность $|\zeta - z| = r$. Меняя направление интегрирования во втором слагаемом, получаем, что

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (26)$$

Воспользовавшись доказанным ранее равенством (9) из примера 1

$$\int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

запишем $f(z)$ так:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (27)$$

Поделив обе части соотношения (26) на $2\pi i$, вычтем из них $f(z)$. Тогда с учетом равенства (27) получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (28)$$

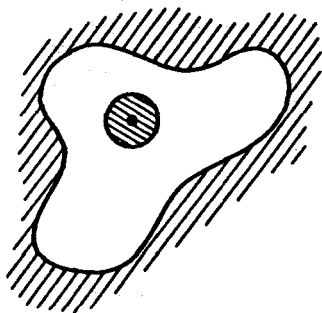


Рис. 22

Заметим, что левая часть равенства (28) не зависит от радиуса r выброшенного круга. Оценим правую часть последнего соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\max_{\gamma_r} |f(\zeta) - f(z)|}{r} \cdot 2\pi r = \max_{\gamma_r} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Функция $f(z)$ аналитична, а значит, и непрерывна в области D . Поэтому для любого $\epsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ для всех ζ , удовлетворяющих условию $|\zeta - z| < \delta$.

Это обстоятельство и оценка (29) означают, что за счет выбора радиуса r интеграл в правой части формулы (28) может быть сделан сколь угодно малым. С другой стороны, левая часть равенства (28) от r не зависит. Следовательно, рассматриваемая разность равна нулю. ►

Если, в частности, Γ — окружность

$$|\zeta - z| = R,$$

то, полагая в формуле Коши $\zeta - z = Re^{i\theta}$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) d\theta. \quad (30)$$

Формула (30) называется *формулой среднего значения*.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 8. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге и аналитична внутри этого круга. Значение функции $f(z)$ в центре круга равно среднему ее граничных значений на ограничивающей его окружности.

3.7. Существование производных всех порядков у аналитической функции

Теорема 9. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда в каждой внутренней точке z области D у функции $f(z)$ существуют производные всех порядков и имеют место формулы

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (31)$$

где Γ — граница области D , $n = 1, 2, \dots$.

◀ Убедимся сначала в справедливости формулы (31) при $n = 1$. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Применяя формулу Коши для значений функции $f(z)$ в точках z и $z+h$ области D , запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z+h)} d\zeta - \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned} \quad (32)$$

Как можно показать, при $h \rightarrow 0$ функция $\frac{1}{\zeta - z - h} \rightarrow \frac{1}{\zeta - z}$ равномерно для всех точек ζ на кривой Γ . Поэтому существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Отсюда и из соотношения (32) вытекает существование производной функции $f(z)$ и формула

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (33)$$

Предполагая формулу (31) верной для некоторого $k = n$, точно такими же рассуждениями можно доказать ее справедливость для $n = k + 1$. ▶

Замечание. Формулу (31) можно доказать также путем n -кратного дифференцирования равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (34)$$

по параметру z . При этом дифференцирование в правой части равенства (34) должно проводиться под знаком интеграла.

§ 4. Степенные ряды. Ряды Тейлора

4.1. Общие сведения о рядах

Напомним простейшие понятия, связанные с рядами.

Ряд из комплексных чисел

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad (1)$$

где $c_n = a_n + ib_n$, называется *сходящимся*, если последовательность его *частичных сумм*

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

имеет конечный предел σ . Этот предел называется *суммой* ряда (1).

Ясно, что ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|.$$

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$$

являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается при помощи известных признаков сходимости рядов с действительными членами.

Функциональный ряд

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)}, \quad (2)$$

где функции $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определены на некотором множестве S комплексной плоскости, называется *сходящимся* в точке z этого множества, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon,$$

где $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$.

Функциональный ряд (2) называется *равномерно сходящимся* на множестве S , если

- 1) он сходится в каждой точке множества S и
- 2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от z и такой, что для всех $n \geq N$ и для всех z из S остатки этого ряда удовлетворяют неравенству

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Точно так же, как и в случае одного действительного переменного, доказывается важный для практических вычислений достаточный признак равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса. Пусть всюду на множестве S ряд (2) мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом,

$$|f_n(z)| \leq |c_n|.$$

Тогда ряд (2) сходится на множестве S абсолютно и равномерно.

На ряды функций комплексного переменного без изменений переносятся доказательства непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами, теоремы о том, что равномерная сходимость функционального ряда не нарушится, если все его члены умножить на ограниченную функцию, а также доказательство того, что равномерно сходящийся на кусочно-гладкой кривой ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать вдоль этой кривой,

$$\int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta. \quad (3)$$

4.2. Степенные ряды

Степенным рядом называют ряд вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (4)$$

где z — независимая комплексная переменная, коэффициенты c_n — заданные комплексные числа, z_0 — фиксировано.

Ясно, что всякий степенной ряд сходится в точке $z = z_0$.

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

сходится только в точке $z = 0$.

◀ Это вытекает из того, что при $z \neq 0$ его общий член

$$n^n z^n$$

не стремится к нулю: для любого $z \neq 0$ можно найти номер, начиная с которого $|nz| > 2$, и следовательно, $|n^n z^n|$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. ▶

Пример 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

сходится в каждой точке комплексной плоскости: для любого z можно указать номер, начиная с которого $\frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$. Отсюда вытекает, что $\frac{|z|^n}{n^n} < \frac{1}{2^n}$, и, значит, данный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом. ▶

Теорема 10 (Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (5)$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд

1) абсолютно сходится в круге

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| = R;$$

2) равномерно сходится в круге

$$|z - z_0| \leq r < R$$

(рис. 23).

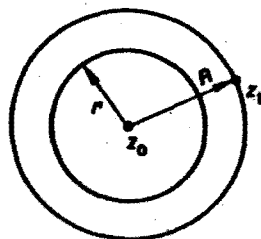


Рис. 23

◀ По условию числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n \quad (6)$$

сходится. В силу необходимого признака сходимости общий член ряда (6) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Из того, что всякая сходящаяся последовательность ограничена, вытекает существование постоянной K такой, что

$$|c_n (z_1 - z_0)^n| = |c_n| R^n \leq K \quad (7)$$

для любого $n = 0, 1, 2, \dots$.

Возьмем точку z , такую что

$$|z - z_0| \leq r < R = |z_1 - z_0|. \quad (8)$$

Из условия (8) вытекает, что

$$\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \leq \frac{r}{R} = q < 1. \quad (9)$$

Тем самым, справедлива следующая оценка:

$$|c_n (z - z_0)^n| = |c_n (z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n \right| \leq K q^n. \quad (10)$$

Неравенство (10) означает, что для любой точки из круга (8) ряд (4) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией $K \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Следовательно, ряд (4) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z - z_0| \leq r$. ▶

4.3. Свойства степенных рядов

1. Пусть степенной ряд (4) расходится в некоторой точке z_1 . Тогда этот ряд расходится в каждой точке z , удовлетворяющей неравенству

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|. \quad (11)$$

◀ Предположим противное: в некоторой точке z_2 , удовлетворяющей неравенству $|z_1 - z_0| < |z_2 - z_0|$, ряд (4) сходится. Тогда по теореме Абеля он должен сходиться и в точке z_1 . Это противоречит условию. Значит, наше предположение о существовании точки z_2 с указанным свойством неверно. ▶

2. Для любого степенного ряда (4) найдется число R такое, что в круге $|z - z_0| < R$ ряд (4) сходится, а вне этого круга, при $|z - z_0| > R$, расходится.

◀ Обозначим через S множество точек, в которых ряд (4) сходится. Множество S непусто: при $z = z_0$ ряд вида (4) с любыми коэффициентами сходится ($R = 0$).

Если множество S неограничено, то ряд (4) сходится в каждой точке комплексной плоскости ($R = \infty$).

Пусть множество S точек сходимости ряда (4) ограничено. Положим

$$R = \sup_{z \in S} |z - z_0|. \quad (12)$$

Ясно, что во всех точках z' , удовлетворяющих неравенству $|z' - z_0| > R$, ряд (4) расходится. ▶

Если $R > 0$, то наибольшей областью сходимости данного ряда является круг $|z - z_0| < R$.

В точках границы $|z - z_0| = R$ ряд (4) может как сходиться, так и расходиться.

Область

$$|z - z_0| < R, \quad R > 0, \quad (13)$$

называется *кругом сходимости* степенного ряда (4); число R , определяемое формулой (12), называется *радиусом сходимости* ряда (4).

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \quad c_n \neq 0, \quad \forall n, \quad (14)$$

или

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

если указанные пределы существуют (конечные или бесконечные).

Пример 3. Найти радиусы сходимости рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

◀ а) $c_n = 1$. Поэтому $\sqrt[n]{|c_n|} = 1$ и $R = 1$.

б) Здесь $c_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Рассмотрим

$$\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, кругом сходимости обоих рядов является единичный круг $|z| < 1$.

Однако множества точек сходимости рядов различны:

ряд а) расходится во всех точках окружности $|z| = 1$, т. к. общий член этого ряда при $|z| = 1$ не стремится к нулю;

ряд б) при $0 < \alpha \leq 1$ в некоторых точках окружности $|z| = 1$ сходится (например, при $z = -1$), а в некоторых — расходится (например, при $z = +1$);

при $\alpha > 1$ ряд б) сходится во всех точках окружности абсолютно и равномерно, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4. Доказать, что ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

сходится во всей плоскости комплексного переменного z .

◀ Согласно формуле (14) получаем, что

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \infty. \quad \blacktriangleright$$

Укажем еще один способ.

◀ Рассмотрим очевидное равенство

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) [2 \cdot (n-1)] \dots [(n-1) \cdot 2] \cdot (n \cdot 1).$$

Каждая скобка в его правой части не меньше n , т. к. при $k = 1, 2, \dots$

$$k(n-k+1) - n = (k-1)(n-k) \geq 0.$$

Следовательно,

$$(n!)^2 > n^n,$$

откуда

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}.$$

Последнее неравенство означает, что для данного ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \infty, \quad \text{т. е. } R = \infty. \blacktriangleright$$

Аналогичным образом можно показать, что ряды

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

сходятся во всей комплексной плоскости.

Замечание. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$$

сходится в единичном круге $|z| < 1$. Однако его радиус сходимости нельзя вычислить ни по формуле (14) ($c_n = 0$, если n не является квадратом целого числа), ни по формуле (15) (члены последовательности $\sqrt[n]{|c_n|}$ попеременно равны 1 или 0, и значит, эта последовательность не имеет предела).

Для вычисления радиуса сходимости в общем случае используется формула Коши—Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (16)$$

или

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Число l называется *верхним пределом* последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}$, если:

- 1) для всякого $l' > l$ найдется номер, начиная с которого все $\alpha_n \leq l'$;
- 2) существует подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, сходящаяся к l .

Обозначение: $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Каждая последовательность имеет конечный или бесконечный верхний предел.

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ сходится, то $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Отправляясь от коэффициентов степенного ряда

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (A)$$

построим последовательность неотрицательных чисел

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots$$

Обозначим через l верхний предел этой последовательности,

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Тогда радиус сходимости R степенного ряда (A) определяется по формуле Коши—Адамара

$$R = \frac{1}{l}.$$

При $l = 0$ ряд (A) абсолютно сходится во всей плоскости.

При $l = +\infty$ он сходится только в точке z_0 и расходится при $z \neq z_0$.

В случае если $0 < l < +\infty$, ряд (A) абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < \frac{1}{l}$ и расходится во внешности этого круга $|z - z_0| > \frac{1}{l}$.

◀ Рассмотрим отдельно все три случая.

1) $l = 0$. В этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0.$$

Следовательно, для любого z выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} |z - z_0|^n = 0.$$

В силу признака Коши отсюда следует сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z - z_0|^n,$$

т. е. абсолютная сходимость ряда (A).

2) $l = +\infty$. Существует подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ такая, что

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \rightarrow +\infty, \quad n_k \rightarrow +\infty.$$

Поэтому для любого $z \neq z_0$

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} |z - z_0|^{n_k} = \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \cdot |z - z_0| \rightarrow +\infty, \quad n_k \rightarrow +\infty.$$

Это означает, что $|c_{n_k}| |z - z_0|^{n_k} \rightarrow +\infty$, $n_k \rightarrow +\infty$. Таким образом, для ряда (A) не выполнен необходимый признак сходимости (общий член ряда не стремится к нулю).

3) $0 < l < +\infty$.

Если $z = z_0$, то все члены ряда (A), начиная со второго, обращаются в нуль, и следовательно, ряд абсолютно сходится.

Пусть $z \neq z_0$ и z лежит внутри круга $|z - z_0| < R$. Положим

$$|z - z_0| = \theta^2 R, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Так как $l' = \frac{l}{\theta} > l$, то, в силу определения верхнего предела, начиная с некоторого номера все $\sqrt[n]{|c_n|} < l'$. Тогда

$$\sqrt[n]{|c_n|} |z - z_0|^n < l' |z - z_0| = \frac{l}{\theta} \theta^2 R = \theta < 1.$$

Отсюда по признаку Коши вытекает абсолютная сходимость ряда (A).

Если z лежит вне круга $|z - z_0| > R$, то $|z - z_0| = \frac{R}{\theta}$, $0 < \theta < 1$. В силу определения верхнего предела, существует последовательность номеров $\{n_k\}$ такая, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \rightarrow l$, $n_k \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} |z - z_0|^{n_k} \rightarrow l |z - z_0| = \frac{lR}{\theta} = \frac{1}{\theta} > 1, \quad n_k \rightarrow +\infty.$$

Значит, $|c_{n_k}| |z - z_0|^{n_k} \rightarrow +\infty$, $n_k \rightarrow +\infty$, и ряд (A) расходится, т. к. не выполнен необходимый признак сходимости ряда. ►

4.4. Теорема Тейлора

Основная теорема 11. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$. Тогда в этом круге функция $f(z)$ может быть представлена в виде суммы сходящегося степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (17)$$

◀ Пусть z — произвольная точка круга $|z - z_0| < R$ (рис. 24).

Построим круг радиуса $r < R$ с центром в точке z_0 , содержащий точку z . Обозначим через γ_r ограничивающую его окружность $|\zeta - z_0| = r$. По интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (18)$$

Для любой точки ζ на окружности γ_r выполняется соотношение

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1.$$

Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} \quad (19)$$

на окружности γ_r мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{r(1 - q)}$$

и, следовательно, сходится абсолютно и равномерно по ζ .

Умножим обе части соотношения (19) на величину $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$. Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Это не нарушит равномерной сходимости ряда, так как функция $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на γ_r . Поэтому возможно почленное интегрирование полученного ряда вдоль γ_r . Выполним его:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n.$$

Полагая здесь

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

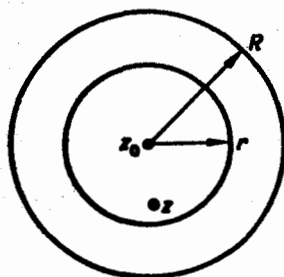


Рис. 24

и учитывая формулу Коши (18), получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (21)$$

Так как z — произвольная точка круга $|z - z_0| < R$, то из формулы (21) вытекает, что построенный степенной ряд сходится к $f(z)$ всюду внутри этого круга. ►

Отметим, что коэффициенты c_n не зависят от радиуса r окружности γ_r ($0 < r < R$).

Степенной ряд (21), коэффициенты которого определяются равенствами (20), называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$ с центром в точке z_0 . На основании формул для производных аналитической функции коэффициенты тейлоровского разложения имеют следующий вид:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

и, следовательно, определены однозначно (напомним, что по определению $0! = 1$).

Теорема 12. Сумма $f(z)$ степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (22)$$

аналитична в круге его сходимости, причем производная $f'(z)$ может быть получена путем почленного дифференцирования

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}. \quad (23)$$

◀ Естественно считать, что радиус сходимости $R > 0$. Степенные ряды

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad g(z)(z - z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^n \quad (24)$$

сходятся или расходятся одновременно. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

то радиус сходимости рядов (24) также равен R .

В каждом круге U , $|z - z_0| \leq r < R$, эти ряды сходятся равномерно. Следовательно, функция $g(z)$ непрерывна в круге U , и ряд, суммой которого она является, можно интегрировать почленно. Пусть γ — произвольный контур, лежащий в круге U . Тогда

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} dz = 0.$$

В силу замечания к теореме 4, функция

$$\int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \int_{z_0}^z (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

в каждой точке $z \in U$ имеет производную, равную $g(z)$. Тогда и функция

$$f(z) = c_0 + \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta$$

в каждой точке $z \in U$ имеет производную $f'(z) = g(z)$. ►

Следствие. *Внутри круга сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать произвольное число раз; при этом радиус сходимости получаемых рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.*

Теорема 13. *Если функция $f(z)$ представима в круге $|z - z_0| < R$ в виде суммы степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

то коэффициенты этого ряда определяются однозначно по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

◄ Полагая в формуле (22) $z = z_0$, получаем, что

$$f(z_0) = c_0.$$

Продифференцируем ряд (22) почленно. Имеем

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \dots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \dots \quad (26)$$

Полагая в формуле (26) $z = z_0$, получаем, что

$$f'(z_0) = c_1.$$

Продифференцируем ряд (22) почленно n раз. Имеем

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)n \dots 2c_{n+1}(z - z_0) + \dots$$

Полагая здесь $z = z_0$, получаем, что

$$f^{(n)}(z_0) = n!c_n.$$

Таким образом, всякий сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы. ►

Формулы (25) показывают, что вычисление коэффициентов ряда Тейлора можно проводить так же, как и в действительном случае.

Пример 5. Найдем, например, разложение в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$ функций e^z , $\sin z$ и $\cos z$.

◄ Так как

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} (e^z) \right|_{z=0} = e^z \Big|_{z=0} = 1,$$

то имеет место разложение

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

В силу того, что производные тригонометрических функций вычисляются по тем же формулам, что и в действительном случае, справедливы разложения:

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots\end{aligned}$$

Как показано выше, эти ряды сходятся во всей плоскости. ►

Пример 6. Найдем разложение в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 1$ функции

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

◀ Вычисляя коэффициенты c_n по формулам (25), получим

$$c_0 = \ln 1 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{z} \Big|_{z=1} = 1, \quad c_n = \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

откуда

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}.$$

Кругом сходимости полученного ряда является круг $|z-1| < 1$ (рис. 25).

Аналогичные разложения можно получить и по-иному. Так как

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad |z| < 1,$$

то

$$\frac{1}{1+\zeta} = 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \dots + (-1)^n \zeta^n + \dots$$

Интегрируя почленно, получим

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta} = z - \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

или

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Полагая здесь $1+z = \zeta$, получим

$$\ln \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\zeta-1)^n}{n}. \quad \blacktriangleright$$

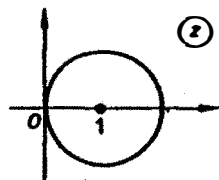


Рис. 25

Неравенства Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| < R$ и на окружности γ_r , $|z-z_0| = r < R$, ее модуль не превосходит постоянной M . Тогда коэффициенты c_n ряда Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке z_0 удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (27)$$

◀ По условию

$$|f(\zeta)| \leq M$$

для всех точек ζ окружности γ_r . Поэтому из формул (20) вытекают оценки:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}. \blacktriangleright$$

Теорема 14 (Лиувилля). Пусть функция $f(z)$ аналитична на всей плоскости, а ее модуль ограничен. Тогда функция $f(z)$ постоянна.

◀ По теореме Тейлора в любом замкнутом круге $|z| \leq r$ функцию $f(z)$ можно представить в виде ряда Тейлора с центром в нуле,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Так как модуль функции $f(z)$ ограничен,

$$|f(z)| \leq M,$$

то коэффициенты c_n этого ряда подчиняются неравенствам Коши (27). Радиус r может быть сколь угодно большим. Поэтому для $n = 1, \dots$ правые части соотношения (27) стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$. Левые же части — $|c_n|$ — не зависят от r . Поэтому $c_n = 0$ для $n = 1, \dots$ и $f(z) = c_0$. ▶

Следствие (основная теорема алгебры). Всякий многочлен ненулевой степени

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad n \geq 1, \quad c_n \neq 0,$$

имеет хотя бы один комплексный корень.

◀ Доказательство проведем от противного. Пусть $P(z)$ не имеет ни одного корня. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

— аналитическая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0. \quad (28)$$

Функция $f(z)$ ограничена по модулю на всей плоскости. (В самом деле, из (28) вытекает существование $R > 0$ такого, что для всех z , $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z)| < 1$; если $\max_{|z| \leq R} |f(z)| = M$, то $|f(z)| < M + 1$ для всех z .) Поэтому в силу теоремы Лиувилля $f(z) = \text{const} = 0$, что противоречит определению функции $f(z)$. ▶

4.5. Нули аналитической функции

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D . Точка z_0 из D называется *нулем* функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Разложение функции $f(z)$ в окрестности ее нуля z_0 в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

т. е. $c_0 = 0$. Если наряду с c_0 равны нулю и коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$, а коэффициент c_k отличен от нуля, то точка z_0 называется *нулем k -го порядка*. Из формулы (25) вытекает, что нуль k -го порядка характеризуется соотношениями

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

В окрестности нуля k -го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z) \quad (29)$$

(здесь функция

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n \quad (30)$$

обладает следующими свойствами: она аналитична в окрестности точки z_0 , $g(z_0) \neq 0$ и круги сходимости рядов (29) и (30) совпадают).

Пример 7. Найти нули функции

$$f(z) = 1 - e^z$$

и определить их порядки.

◀ Приравнявая $f(z)$ нулю, найдем нули функции: $z_n = 2\pi ni$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Далее

$$f'(2\pi ni) = -e^{2\pi ni} = -1 \neq 0.$$

Итак, $f(2\pi ni) = 0$, $f'(2\pi ni) \neq 0$. Следовательно, точки $z_n = 2\pi ni$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) — простые нули функции $f(z) = 1 - e^z$. ▶

Пример 8. Найти порядок нуля $z_0 = 0$ функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} \quad (z \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

◀ Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$, получим, что

$$f(z) = \frac{z^8}{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)} = \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots} = z^5 g(z),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}.$$

Так как $g(0) = 6 \neq 0$, то точка $z_0 = 0$ является для данной функции нулем пятого порядка. ▶

§ 5. Ряды Лорана.

Изолированные особые точки и их классификация

Ряды Тейлора служат эффективным средством для изучения функций, аналитических в круге $|z - z_0| < R$. Для исследования функций, аналитических в кольцевой области,

$$0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty,$$

оказывается возможным построение разложений по положительным и отрицательным степеням $(z - z_0)$ вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

обобщающим тейлоровские разложения.

Ряд (1), понимаемый как сумма двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}, \quad (2)$$

называется *рядом Лорана*.

Ясно, что областью сходимости ряда (1) является общая часть областей сходимости каждого из рядов (2). Найдем ее.

Областью сходимости первого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (3)$$

является круг $|z - z_0| < R$, радиус которого определяется по формуле Коши—Адамара

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Внутри круга сходимости ряд (3) сходится к аналитической функции, причем в любом круге меньшего радиуса $|z - z_0| < R'$, $R' < R$, он сходится абсолютно и равномерно.

Второй ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} \quad (4)$$

представляет собой степенной ряд относительно переменного $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \zeta^m. \quad (5)$$

Ряд (5) сходится внутри своего круга сходимости к аналитической функции комплексного переменного ζ ,

$$|\zeta| < \frac{1}{r},$$

где

$$r = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_{-m}|},$$

причем в любом круге меньшего радиуса он сходится абсолютно и равномерно. Это означает, что областью сходимости ряда (4) является внешность круга —

$$|z - z_0| > r.$$

Если $r < R$, то существует общая область сходимости рядов (3) и (4) — *круговое кольцо*

$$r < |z - z_0| < R,$$

в котором ряд (1) сходится к аналитической функции. При этом в любом кольце

$$r' \leq |z - z_0| \leq R',$$

где $r < r' \leq R' < R$, он сходится абсолютно и равномерно.

Пример 1. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

◀ Область сходимости первого ряда — внешность круга $|z| > 1$, а область сходимости второго ряда — внутренность круга $|z| < 2$. Тем самым, данный ряд сходится в кольце

$$1 < |z| < 2. \blacktriangleright$$

Теорема 15. Любую функцию $f(z)$, однозначную и аналитичную в круговом кольце

$$r < |z - z_0| < R,$$

можно представить в этом кольце в виде суммы сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

коэффициенты c_n которого определены однозначно и вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7)$$

где γ_ρ — окружность радиуса ρ : $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

◀ Зафиксируем внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ произвольную точку z . Построим окружности $\gamma_{r'}$ и $\gamma_{R'}$ с центрами в точке z_0 , радиусы r' и R' которых удовлетворяют неравенствам

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R,$$

и рассмотрим новое кольцо

$$r' < |z - z_0| < R'$$

(рис. 26).

По интегральной теореме Коши для многосвязной области имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (8)$$

Преобразуем отдельно каждый из интегралов в сумме (8). Для всех точек ζ по окружности $\gamma_{R'}$ выполняется соотношение

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q < 1.$$

Поэтому дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ можно представить в виде суммы равномерно сходящегося ряда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \end{aligned}$$

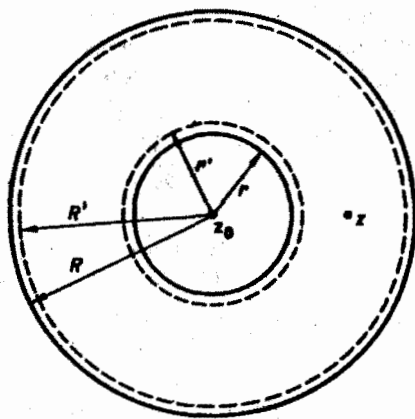


Рис. 26

Умножая обе части на непрерывную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и проводя почленное интегрирование вдоль окружности $\gamma_{R'}$, получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (9)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (10)$$

Преобразование второго интеграла проведем несколько по-иному. Для всех точек ζ на окружности γ_r выполнено соотношение

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = p < 1.$$

Поэтому дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ можно представить в виде суммы равномерно сходящегося ряда

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n.$$

Умножая обе части на непрерывную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя почленно вдоль окружности γ_r , получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (11)$$

где

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta) (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta. \quad (12)$$

Заметим, что подынтегральные функции в формулах (10) и (12) являются аналитическими функциями в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$. Поэтому в силу теоремы Коши значения соответствующих интегралов не изменятся, если заменить окружности γ_R и γ_r любой окружностью γ_ρ , $|z - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$. Это позволяет объединить формулы (10) и (12),

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Заменяя интегралы в правой части формулы (8) их выражениями (9) и (11) соответственно, получим нужное разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (14)$$

Так как z — произвольная точка кольца $r < |z - z_0| < R$, то отсюда следует, что ряд (14) сходится к функции $f(z)$ всюду в этом кольце, причем в любом кольце $r < r' \leq |z - z_0| \leq R' < R$ ряд сходится к этой функции абсолютно и равномерно.

Докажем теперь, что разложение вида (6) единственно. Предположим, что имеет место еще одно разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n.$$

Тогда всюду внутри кольца $r < |z - z_0| < R$ будем иметь

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (15)$$

На окружности γ_ρ : $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$, ряды (15) сходятся равномерно. Умножим обе части равенства (15) на $\frac{1}{2\pi i} (z - z_0)^{-m+1}$, где m — фиксированное целое число, и проинтегрируем оба ряда почленно. В результате получим в левой части c'_m , а в правой — c_m . Таким образом, $c'_m = c_m$. Так как m — произвольное число, то последнее равенство доказывает единственность разложения. ►

Ряд (6), коэффициенты которого вычисляются по формулам (7), называется *рядом Лорана* функций $f(z)$ в кольце $r < |z - z_0| < R$. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями $(z - z_0)$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а с отрицательными — его *главной частью*.

Формулы (7) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко, ибо, как правило, требуют громоздких вычислений. Обычно, если это возможно, используются готовые тейлоровские разложения элементарных функций. На основании единственности разложения любой законный прием приводит к одному и тому же результату.

Пример 2. Рассмотрим разложения в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}$$

в различных областях, приняв $z_0 = 0$.

◀ Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1 = -2$ и $z_2 = 1$ (См. 5.1). Следовательно, имеется три кольцевых области, с центром в точке $z_0 = 0$, в каждой из которых функция $f(z)$ является аналитической:

а) круг $|z| < 1$; б) кольцо $1 < |z| < 2$ и в) внешность круга $|z| > 2$ (рис. 27).

Найдем лорановские разложения функции $f(z)$ в каждой из этих областей.

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}. \quad (16)$$

а) **Круг** $|z| < 1$. Преобразуем соотношение (16) следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}. \quad (17)$$

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots, \quad |z| < 2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1. \quad (19)$$

Подставим найденные разложения в формулу (17):

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 - \dots, \quad |z| < 1.$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$.

б) **Кольцо** $1 < |z| < 2$. Ряд (18) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, так как $|z| < 2$. Ряд (19) для функции $\frac{1}{1-z}$ при $|z| > 1$ расходится. Поэтому преобразуем функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \quad (20)$$

Вновь применяя формулу (19), получим, что

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots. \quad (21)$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т. е. при $|z| > 1$. Подставляя разложения (18) и (21) в соотношение (20), получим

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots,$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

в) **Внешность круга** $|z| > 2$. Ряд (18) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z| > 2$ расходится, а ряд (21) для функции $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ сходится.

Представим функцию $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right).$$

Используя формулы (18) и (19), получим

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \frac{1}{z} \left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots \right),$$

или

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots, \quad |z| > 2. \blacktriangleright$$

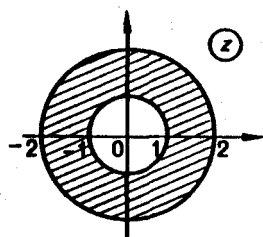


Рис. 27

Этот пример показывает, что для одной и той же функции $f(z)$ лорановское разложение, вообще говоря, имеет различный вид для разных колец.

Пример 3. Найти разложение в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

в кольцевой области $0 < |z-1| < 3$ (рис. 28).

◀ Воспользуемся представлением функции $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} \quad (22)$$

и преобразуем второе слагаемое

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = 1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{9} - \frac{(z-1)^3}{27} + \dots, \quad |z-1| < 3.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (22), имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} - \frac{z-1}{9} + \frac{(z-1)^2}{27} - \frac{(z-1)^3}{81} + \dots \blacktriangleright$$

Пример 4. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$$

в окрестности точки $z_0 = 0$.

◀ Для любого комплексного ζ имеем

$$\cos \zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \dots$$

Положим $\zeta = \frac{1}{z}$. Тогда

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \right) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 0$. В данном случае кольцевая область представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 0$. Эту область можно определить следующим соотношением:

$$0 < |z-0| < \infty$$

(здесь $r = 0$, $R = \infty$, $z_0 = 0$).

Данная функция является аналитической в области $|z| > 0$. ▶

Из формул (13) для коэффициентов ряда Лорана такими же рассуждениями, что и в предыдущем параграфе, можно получить *неравенства Коши*: если функция $f(z)$ ограничена на окружности $|z - z_0| = \rho$ ($|f(z)| \leq M$, где M — постоянная), то

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

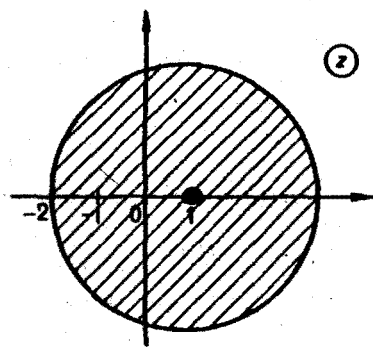


Рис. 28

5.1. Изолированные особые точки

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует кольцевая окрестность точки z_0 —

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

(это множество иногда называют также *проколотой окрестностью точки z_0*), в которой функция $f(z)$ однозначна и аналитична. В самой точке z_0 функция либо не определена, либо не является однозначной и аналитичной. В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении к точке z_0 различаются три типа особых точек.

Изолированная особая точка называется:

1) *устранимой*, если существует конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$;

2) *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;

3) *существенно особой точкой*, если функция $f(z)$ не имеет предела при $z \rightarrow z_0$.

Тип изолированной особой точки тесно связан с характером лорановского разложения функции $f(z)$ в круге $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ с выколотым центром z_0 .

Теорема 16. *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой особой точкой в том и только в том случае, когда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, т. е. имеет вид*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (23)$$

◀ Пусть z_0 — устраняемая особая точка. Тогда существует конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ и, следовательно, функция $f(z)$ ограничена в проколотой окрестности точки z_0 , $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Положим $|f(z)| \leq M$.

В силу неравенств Коши

$$|c_n| \leq M \rho^{-n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как ρ можно выбрать сколь угодно малым, то все коэффициенты при отрицательных степенях $(z - z_0)$ равны нулю: $c_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$

Обратно, пусть лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит только правильную часть, т. е. имеет вид (23) и, следовательно, является тейлоровским. Нетрудно видеть, что при $z \rightarrow z_0$ у функции $f(z)$ существует предельное значение:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 17. *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0 , $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

Замечание. Пусть z_0 — устраняемая особая точка функции $f(z)$. Полагая

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

мы получим, что функция $f(z)$ аналитична в некотором круге с центром в точке z_0 .

Это определяет название точки — *устраняемая*.

Теорема 18. *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом в том и только в том случае, когда главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки содержит конечное (и положительное) число отличных от нуля членов, т. е. имеет вид*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad m > 0, \quad c_{-m} \neq 0. \quad (24)$$

◀ Пусть z_0 — полюс. Так как

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

то существует проколота окрестность точки z_0 , в которой функция $f(z)$ аналитична и отлична от нуля. Тогда в этой окрестности определена аналитическая функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)},$$

причем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)} = 0.$$

Следовательно, точка z_0 является устранимой особой точкой (нулем) функции $g(z)$ и

$$g(z) = b_m (z - z_0)^m + b_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad b_m \neq 0, \quad m \geq 1,$$

или

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z),$$

где $h(z)$ — аналитическая функция, $h(z_0) \neq 0$.

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{h(z)}.$$

Так как $h(z)$ аналитична и $h(z_0) \neq 0$, то функция $\frac{1}{h(z)}$ аналитична в окрестности точки z_0 , и следовательно,

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n,$$

откуда получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Предположим теперь, что функция $f(z)$ имеет в проколота окрестности точки z_0 разложение вида (24). Это означает, что в этой окрестности функция $f(z)$ аналитична вместе с функцией

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

Для функции $g(z)$ справедливо разложение

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1} (z - z_0) + \dots,$$

из которого видно, что z_0 — устранимая особая точка функции $g(z)$ и существует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Тогда функция

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

при $z \rightarrow z_0$ стремится к ∞ , т. е. z_0 — полюс функции $f(z)$. ►

Имеет место еще один простой факт.

Точка z_0 — полюс функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ можно доопределить до аналитической функции в окрестности точки z_0 , положив $g(z_0) = 0$.

Порядком полюса функции $f(z)$ называется порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$.

Из теорем 16 и 18 вытекает следующее утверждение.

Теорема 19. *Изолированная особая точка является существенно особой в том и только в том случае, когда главная часть лорановского разложения в проколотой окрестности этой точки содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

Пример 5. Особой точкой функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

является $z_0 = 0$. Имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Следовательно, $z_0 = 0$ — устранимая особая точка. Разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности нулевой точки содержит только правильную часть:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Пример 6. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}$.

Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^7} = \infty.$$

Следовательно, $z_0 = 0$ — полюс. Разложим $\cos z$ в ряд Тейлора по степеням z . Тогда получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^7} \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots \right) = \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} - \dots$$

Разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z — три. Так как наибольший из показателей степени z , содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен пяти, то точка $z_0 = 0$ — полюс пятого порядка.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризуется следующим предложением.

Теорема 20 (Сохочкого). *Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A (конечного или бесконечного) существует последовательность точек $z_k \rightarrow z_0$ такая, что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A.$$

Пример 7. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.

◀ Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$.

Рассмотрим поведение этой функции на действительной и мнимой осях: на действительной оси

$z = x$ и $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$, на мнимой оси $z = iy$ и $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$.

Следовательно, ни конечного, ни бесконечного предела $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ не существует. Значит, точка $z_0 = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

Найдем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нулевой точки. Для любого комплексного ζ имеем

$$e^\zeta = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^3}{3!} + \dots$$

Положим $\zeta = \frac{1}{z^2}$. Тогда

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots, \quad |z| > 0.$$

Лорановское разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z . ►

§ 6. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta, \quad (1)$$

где γ — достаточно малая окружность $|z - z_0| = r$: в круге $|z - z_0| \leq r$ нет других особых точек функции $f(z)$.

Из формулы для коэффициентов ряда Лорана непосредственно вытекает, что

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = c_{-1}. \quad (2)$$

Таким образом, вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту при $(z - z_0)^{-1}$ в лорановском разложении этой функции в точке z_0 . Отсюда, в частности, вытекает, что вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Укажем некоторые формулы для вычисления вычета в полюсе функции $f(z)$.

1. z_0 — полюс первого порядка:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Умножим обе части этого равенства на $z - z_0$ и, переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = c_{-1}. \quad (3)$$

Если функцию $f(z)$ можно представить в виде дроби

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, т. е. z_0 — простой полюс, то из формулы (3) вытекает, что

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Пример 1. Пусть $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$.

◀ Особые точки $z = \pm i$ функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z) = z$, $\psi(z) = z^2 + 1$, являются простыми полюсами. Поэтому

$$\operatorname{res} f(\pm i) = \frac{\varphi(\pm i)}{\psi'(\pm i)} = \frac{1}{\pm 2i} = \mp \frac{i}{2}. \blacktriangleright$$

2. z_0 — полюс порядка m :

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Для устранения отрицательных степеней $z - z_0$ умножим обе части этого равенства на $(z - z_0)^m$,

$$f(z)(z - z_0)^m = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Продифференцируем полученное соотношение $m - 1$ раз и, переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим, что

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (4)$$

Пример 2. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

◀ Особыми точками этой функции являются точки $z = \pm i$. Это — полюсы второго порядка. Вычислим, например, $\operatorname{res} f(i)$. Имеем

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + i)^2} = - \lim_{z \rightarrow i} \frac{2}{(z + i)^3} = - \frac{2}{(2i)^3} = \frac{i}{4}. \blacktriangleright$$

Теорема 21. Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \dots, z_n$. Тогда для любой замкнутой области $\bar{G}$, лежащей в D и содержащей точки $z_1, \dots, z_n$ внутри, справедливо равенство

$$\int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k). \quad (5)$$

◀ Теорема вытекает из теоремы Коши для многосвязной области. Построим окружности

$$\gamma_k: |z - z_k| = r, \quad k = 1, \dots, n,$$

столь малого радиуса r , что ограниченные ими круги $U_k = \{z : |z - z_k| \leq r\}$ — содержатся в области G и не пересекаются друг с другом (рис. 29).

Обозначим через G^* область, которая получается из области G путем удаления кругов $U_1, \dots, U_n$. Функция $f(z)$ аналитична в области G^* и непрерывна в ее замыкании $\overline{G^*}$. Поэтому по теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\int_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta.$$

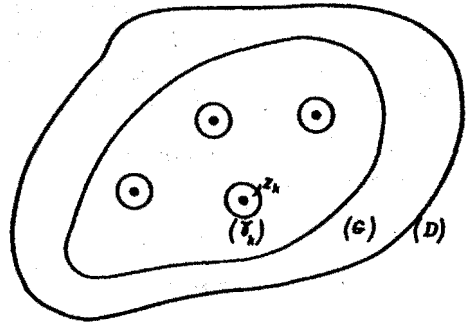


Рис. 29

Из этой формулы, пользуясь определением вычета

$$\int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{res} f(z_k),$$

получаем требуемое равенство (5). ▶

6.1. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

Говорят, что функция $f(z)$ является *аналитической в бесконечно удаленной точке* $z = \infty$, если функция

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

аналитична в точке $\zeta = 0$. Это следует понимать так: функцию $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ можно доопределить до аналитической, положив

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z).$$

Например, функция

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

аналитична в точке $z = \infty$, поскольку функция

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sin \zeta$$

аналитична в точке $\zeta = 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z = \infty$). Точка $z = \infty$ называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек функции $f(z)$.

Функция

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

имеет в бесконечности неизоллированную особенность: полюсы $z_k = k\pi$ этой функции накапливаются в бесконечности, если $k \rightarrow \infty$.

Говорят, что $z = \infty$ является *устранимой особой точкой*, *полюсом* или *существенно особой точкой* функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Критерии типа бесконечно удаленной точки, связанные с разложением Лорана, изменяются по сравнению с критериями для конечных особых точек.

Теорема 22. Если $z = \infty$ является *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, то лорановское разложение $f(z)$ в окрестности этой точки не содержит положительных степеней z ; если $z = \infty$ — *полюс*, то это разложение содержит конечное число положительных степеней z , в случае *существенной особенности* — бесконечное число положительных степеней z .

При этом лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки будем называть разложение в ряд Лорана, сходящийся всюду вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке $z = 0$ (кроме, быть может, самой точки $z = \infty$).

Пусть функция $f(z)$ — аналитична в некоторой окрестности точки $z = \infty$ (кроме, быть может, самой этой точки). *Вычетом* функции $f(z)$ в бесконечности называют величину

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

где γ^- — достаточно большая окружность $|z| = \rho$, проходимая по часовой стрелке (так, что окрестность точки $z = \infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = z_0$).

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, взятому с противоположным знаком:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \quad (7)$$

Пример 3. Для функции $f(z) = \frac{z+1}{z}$ имеем $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$. Это выражение можно рассматривать как ее лорановское разложение в окрестности точки $z = \infty$. Легко видеть, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1,$$

так что точка $z = \infty$ является *устранимой особой точкой*, и мы полагаем, как обычно, $f(\infty) = 1$. Здесь $c_{-1} = 1$ и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(\infty) = -1.$$

Из этого примера следует, что вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной *устранимой особой точки* (в отличие от конечной *устранимой особой точки*) может оказаться отличным от нуля.

Известные тейлоровские разложения функций e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ можно рассматривать также и как лорановские разложения в окрестности точки $z = \infty$. Так как все эти разложения содержат бесконечное множество положительных степеней z , то перечисленные функции имеют в точке $z = \infty$ *существенную особенность*.

Теорема 23. Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.

Так что, если $z_1, \dots, z_n$ — конечные особые точки функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) = 0, \quad (8)$$

или

$$\operatorname{res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k). \quad (9)$$

Последнее соотношение бывает удобно использовать при вычислении некоторых интегралов.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^8}.$$

◀ Полосами (конечными) подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{1}{1+z^8}$$

являются корни z_k уравнения $z^8 = -1$, которые все лежат внутри окружности $|z| = 2$. В окрестности точки $z = \infty$ функция $f(z)$ имеет следующее разложение:

$$f(z) = \frac{1}{z^8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^8}} = \frac{1}{z^8} - \frac{1}{z^{16}} + \frac{1}{z^{24}} - \dots,$$

из которого видно, что $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$.

В силу теоремы 23

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^8 \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 0. \quad \blacktriangleright$$

6.2. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. Интегралы от рациональных функций

Теорема 24. Пусть $f(x)$ — рациональная функция, т. е.

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_m(x) \neq 0$) и $m \geq n + 2$, т. е. степень знаменателя, по крайней мере, на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma,$$

где σ — сумма вычетов функции

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости (существенно особых точек у рациональной функции нет).

◀ Рассмотрим замкнутый контур γ , состоящий из отрезка действительной оси $-R \leq x \leq R$ и верхней полуокружности $\gamma_R: |z| = R, \operatorname{Im} z > 0$. Можно считать, что R выбрано большим настолько, что внутренность области, ограниченной контуром γ , содержит все полюсы $z_1, \dots, z_l$ функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости (рис. 30).

В силу основной теоремы о вычетах

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res} f(z_k). \end{aligned}$$

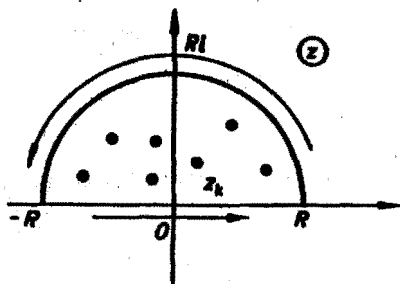


Рис. 30

Оценим $\int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta$. В силу условия на степени многочленов $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ найдутся положительные числа R_0 и M такие, что при $|z| > R_0$

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}.$$

По свойству 6 интегралов от функции комплексного переменного для $R > R_0$ имеем:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\gamma_R} |f(\zeta)| |d\zeta| < \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$. Перейдем в равенстве

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res} f(z_k)$$

к пределу при $R \rightarrow \infty$. Заметим, что правая часть от R не зависит, а второе слагаемое в левой части стремится к нулю. Отсюда следует, что предел первого слагаемого существует и равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{res} f(z_k), \quad (10)$$

где $z_1, \dots, z_l$ — все полюсы функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости. ►

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0.$$

◀ Так как подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

— четная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2},$$

которая на действительной оси, т. е. при $z = x$, совпадает с $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну изолированную особую точку $z = ai$ — полюс второго порядка. Вычет $f(z)$ в точке $z = ai$ равен

$$\operatorname{res} f(ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ai)^2] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2aiz}{(z + ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Пользуясь формулой (10), получаем, что

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}. \blacktriangleright$$

Интеграл вида

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция аргументов u и v .

Введем комплексное переменное $z = e^{ix}$. Тогда

$$dx = \frac{dz}{iz}, \quad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}. \quad (11)$$

Ясно, что в данном случае $|z| = 1$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Таким образом, исходный интеграл переходит в интеграл от функции комплексного переменного по замкнутому контуру:

$$I = \int_{\gamma} R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz} = \int_{\gamma} F(z) dz,$$

где γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат: $|z| = 1$.

Согласно основной теореме о вычетах, полученный интеграл равен $2\pi i \sigma$, где σ — сумма вычетов подынтегральной функции $F(z)$ в полюсах, расположенных внутри окружности γ .

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}, \quad a > b > 0.$$

◀ Применяя подстановку $z = e^{ix}$, после простых преобразований (см. формулы (11)) получим, что

$$I = \frac{4}{i} \int_{\gamma} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} F(z_k).$$

Внутри единичного круга при условии $a > b > 0$ находится только один полюс (второго порядка)

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Вычет функции

$$F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$$

в точке z_1 равен

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - z_1)^2 z}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right] = \frac{a}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Итак,

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}. \blacktriangleright$$

Интегралы вида

$$\left[\int_0^\infty R(x) \cos ax \, dx, \int_0^\infty R(x) \sin ax \, dx, \right]$$

где $R(x)$ — правильная рациональная дробь, $a > 0$ — вещественное число.

При вычислении таких интегралов часто бывает полезной следующая лемма.

Лемма Жордана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и при $|z| \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg z$. Тогда для любого положительного a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} \, dz = 0, \quad (12)$$

где γ_R — верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

◀ Условие равномерного стремления $f(z)$ к нулю означает, что на полуокружности γ_R

$$|f(z)| \leq M_R,$$

где $M_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Оценим исследуемый интеграл. Замечая, что на γ_R

$$|e^{iaz}| = |e^{iaR(\cos \varphi + i \sin \varphi)}| = |e^{-aR \sin \varphi + iaR \cos \varphi}| = e^{-aR \sin \varphi}$$

и

$$dz = d(\operatorname{Re} e^{i\varphi}) = i \operatorname{Re} e^{i\varphi} d\varphi,$$

а значит,

$$|dz| = R d\varphi,$$

получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} \, dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} |f(z)| |e^{iaz}| |dz| \leq M_R \cdot R \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2M_R \cdot R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу известного неравенства (см. рис. 31)

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi,$$

справедливого при $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (для доказательства достаточно заметить, что

$$\left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)' = \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} (\varphi - \operatorname{tg} \varphi) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

и, значит, функция $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ убывает на полуинтервале $(0, \frac{\pi}{2}]$),

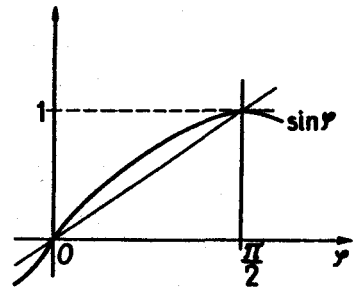


Рис. 31

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2aR} (1 - e^{-aR}). \quad (14)$$

Сопоставляя формулы (13) и (14), заключаем, что

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{\pi M_R}{a} (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$. ►

Пример 7. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx, \quad a > 0, \quad k > 0.$$

◄ Введем вспомогательную функцию

$$h(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}.$$

Нетрудно видеть, что если $z = x$, то $\operatorname{Im} h(z)$ совпадает с подынтегральной функцией

$$f(x) = \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}.$$

Рассмотрим контур, указанный на рис. 32. При достаточно большом R на дуге γ_R функция

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + k^2},$$

вследствие соотношения $|z^2 + k^2| \geq |z^2| - k^2$, удовлетворяет условию

$$|g(z)| < \frac{R}{R^2 - k^2} \rightarrow 0 \quad (12)$$

при $R \rightarrow \infty$. Значит, по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0. \quad (15)$$

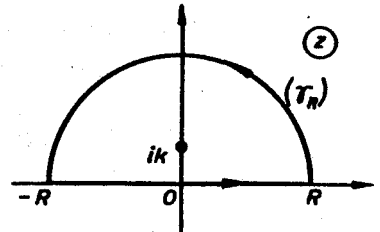


Рис. 32

По основной теореме о вычетах для любого $R > k$ имеем

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{iax}}{x^2 + k^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \sigma, \quad (16)$$

где

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ik} \frac{ze^{iaz}(z - ik)}{z^2 + k^2} = \frac{e^{-ak}}{2}.$$

Переходя к пределу в равенстве (16) и учитывая соотношение (15), получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iaz}}{x^2 + k^2} dx = \pi i e^{-ak}.$$

Разделяя слева и справа вещественные и мнимые части, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}.$$

В силу того что подынтегральная функция $f(x)$ — четная, окончательно получим

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}. \blacktriangleright$$

В рассматриваемом примере функция $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси. Однако небольшое изменение описанного метода позволяет применять его и в том случае, когда функция $f(z)$ имеет на действительной оси особые точки (простые полюсы). Покажем, как это делается.

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (17)$$

◀ Функция

$$h(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $\operatorname{Im} h(z)$ при $z = x$ совпадает с подынтегральной функцией;
- 2) имеет особенность на действительной оси — простой полюс в точке $z = 0$.

Рассмотрим в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ замкнутый контур Γ , состоящий из отрезков действительной оси $[-R, -r]$, $[r, R]$ и дуг полуокружностей γ_r , $|z| = r$, и γ_R , $|z| = R$ (рис. 33). Внутри этого контура находится лишь один полюс функции $h(z)$ — точка $z = bi$.

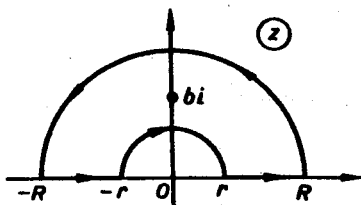


Рис. 33

Согласно основной теореме о вычетах,

$$\int_{\Gamma} h(z) dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz + \int_r^R \frac{e^{iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = 2\pi i \sigma, \quad (18)$$

где

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{e^{aiz}(z - bi)}{z(z^2 + b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}.$$

Преобразуем сначала сумму интегралов по отрезкам $[-R, -r]$ и $[r, R]$ действительной оси. Заменив x на $-x$ в первом слагаемом правой части равенства (18) и объединяя его с третьим слагаемым, получим

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_r^R \frac{e^{iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx = \int_r^R \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{x(x^2 + b^2)} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$$

Обратимся ко второму слагаемому в формуле (18). Так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b^2},$$

т. е.

$$\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} + g(z),$$

где $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$, то подынтегральная функция $h(z)$ представима в следующем виде:

$$h(z) = \frac{1}{b^2 z} + \frac{g(z)}{z}.$$

Тогда

$$\int_{\gamma_r} h(z) dz = \frac{1}{b^2} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z} dz.$$

Полагая $z = re^{i\varphi}$, получим, что

$$\frac{1}{b^2} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \frac{1}{b^2} \int_{\pi}^0 \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = -\frac{i\pi}{b^2}, \quad \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z} dz = i \int_{\pi}^0 g(re^{i\varphi}) d\varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Четвертое слагаемое в равенстве (18) при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю согласно лемме Жордана, ибо функция $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + b^2)}$ стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} dz = 0. \quad (19)$$

Таким образом, при $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ равенство (18) принимает вид

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \, dx}{x(x^2 + b^2)} - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i \frac{e^{-ab}}{b^2}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \, dx}{x(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}). \blacktriangleright$$

6.3. Вычисление интегралов Френеля

Интегралы Френеля:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx, \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z) = e^{iz^2}$ и контур Γ , указанный на рис. 34 ($OA = OB = r$, $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$). Внутри контура Γ функция $f(z)$ — аналитическая, и по теореме Коши

$$\int_{\Gamma} e^{iz^2} dz = \int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{\gamma_r} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0. \quad (20)$$

Покажем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} e^{iz^2} dz = 0.$$

Полагая $z^2 = \zeta$, получим $dz = \frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta}}$ и

$$\int_{\gamma_r} e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\zeta}}{2\sqrt{\zeta}} d\zeta,$$

где Γ_2 — полуокружность радиуса r^2 .

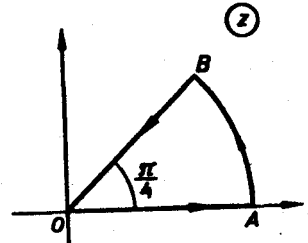


Рис. 34

Функция $g(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}}$ удовлетворяет условиям леммы

Жордана, и, значит,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{i\zeta}}{2\sqrt{\zeta}} d\zeta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} e^{iz^2} dz = 0.$$

На отрезке BO :

$$z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z^2 = \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho^2 i, \quad 0 \leq \rho \leq r.$$

Отсюда

$$\int_{BO} e^{iz^2} dz = \int_r^0 e^{-\rho^2} e^{i\frac{\pi}{4}} d\rho = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^r e^{-\rho^2} d\rho.$$

Переходя в формуле (20) к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим, что

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho. \quad (21)$$

Зная, что

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

имеем

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \blacktriangleright$$

Упражнения

Найдите действительную и мнимую части функции:

$$1. w = \bar{z} - iz^2. \quad 2. w = z^2 + i. \quad 3. w = \frac{1}{z}. \quad 4. w = \frac{\bar{z}}{z}.$$

Найдите образы действительной и мнимой осей при отображении:

$$5. w = \frac{z+1}{z-1}. \quad 6. w = 1 + \frac{1}{z}.$$

Докажите, что функция непрерывна на всей комплексной плоскости:

$$7. w = \bar{z}. \quad 8. w = \operatorname{Re} z. \quad 9. w = \operatorname{Im} z.$$

Пользуясь условиями Коши—Римана, выясните, является ли функция аналитической хотя бы в одной точке или нет:

$$10. z^2 \bar{z}. \quad 11. ze^z. \quad 12. |z|\bar{z}. \quad 13. |z| \operatorname{Re} z. \quad 14. e^{z^2}.$$

Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ (или по известной мнимой части $v(x, y)$) и значению $f(z_0)$:

$$15. u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}. \quad 16. v = 2xy + 2y, \quad f(i) = 2i - 1.$$

Покажите, что следующие функции являются гармоническими:

17. $x^2 + 2x - y^2$. 18. $2e^x \cos y$. 19. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. 20. $\ln(x^2 + y^2)$.

Может ли данная функция быть действительной или мнимой частью аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

21. $u = x^2 - y^2 + 2xy$? 22. $u = x^2$? 23. $v = \frac{x^2 + 1}{2}y$?

Найдите действительную и мнимую части функции:

24. $w = e^{-z}$. 25. $w = \sin z$. 26. $w = \operatorname{ch}(z - i)$. 27. $w = \operatorname{tg} z$.

Найдите модуль и главное значение аргумента функции в указанной точке z_0 :

28. $w = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$. 29. $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i \frac{\pi}{2}$. 30. $w = ze^z$, $z_0 = i\pi$.

Найдите логарифмы следующих чисел:

31. e . 32. $-i$. 33. i . 34. $-1 - i$.

Решите уравнение:

35. $e^{-z} + 1 = 0$. 36. $e^z + i = 0$. 37. $\sin z = \pi i$.

38. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} (1 + i - 2\bar{z}) dz$, где γ — линия, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$: а) отрезок прямой, б) дуга параболы $y = x^2$, в) ломаная $z_1 z_3 z_2$, $z_3 = 1$.

39. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$, где γ — полуокружность $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Вычислите интегралы:

40. $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$. 41. $\int_0^{1+i} e^z dz$. 42. $\int_{-i}^i ze^{z^2} dz$.

43. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где γ — верхняя половина окружности $|z| = 1$ (выбирается ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = 1$).

44. Вычислите интеграл $\int_{\gamma} \frac{\ln z}{z} dz$, где γ — отрезок прямой, идущий из точки $z_1 = 1$ в точку $z_2 = i$.

Вычислите интегралы:

45. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$. 46. $\int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$. 47. $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$. 48. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1 - \sin z}{z^2} dz$.

Найдите радиус сходимости ряда:

49. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$. 50. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$. 51. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$. 52. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n$. 53. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + i)^n z^n$.

Разложите функцию в ряд Тейлора и найдите радиус сходимости полученного ряда:

54. $\sin(2z + 1)$ по степеням $z + 1$. 55. $\cos z$ по степеням $z + \frac{\pi}{4}$.

56. $\frac{1}{3z + 1}$ по степеням $z + 2$. 57. $\frac{z}{z^2 + 1}$ по степеням z .

58. $\operatorname{sh}^2 z$ по степеням z .

Найдите нули функции и определите их порядки:

59. $z^4 + 4z^2$. 60. $\frac{\sin z}{z}$. 61. $z^2 \sin z$. 62. $1 + \operatorname{ch} z$.

Определите область сходимости ряда:

$$63. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(iz)^n}, \quad 64. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

$$65. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}, \quad 66. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$67. \frac{\sin z}{z^2}, \quad 68. \frac{e^z}{z^3}, \quad 69. z^4 \cos \frac{1}{z}, \quad 70. \frac{1 - e^{-z}}{z^3}.$$

Разложите в ряд Лорана в указанном кольце:

$$71. \frac{1}{z^2 + z}, \quad 0 < |z| < 1, \quad 72. \frac{1}{z^2 + z}, \quad 1 < |z| < \infty, \\ 73. \frac{2z + 3}{z^2 + 3z + 2}, \quad 1 < |z| < 2, \quad 74. \frac{1}{(z^2 - 4)^2}, \quad 4 < |z + 2| < \infty.$$

Найдите особые точки и определите их характер:

$$75. \frac{1 - \cos z}{z^2}, \quad 76. e^{-\frac{1}{z}}, \quad 77. \frac{\sin z}{z^2}, \quad 78. \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^3 + z^4}.$$

Найдите вычеты функции в особых точках:

$$79. \frac{e^z}{z^3(z-1)}, \quad 80. \cos \frac{1}{z} + z^3, \quad 81. z^2 \sin \frac{1}{z}, \quad 82. \frac{e^{\pi z}}{z - i}.$$

Вычислите интегралы:

$$83. \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}, \quad 84. \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}, \quad 85. \int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz, \quad 86. \int_{|z-1|=1} \frac{e^{2z} dz}{z^3 - 1}.$$

Определите характер бесконечно удаленной точки:

$$87. \frac{z+1}{z^4}, \quad 88. \frac{e^z}{z^2}, \quad 89. \cos \frac{1}{z}, \quad 90. z^3 e^{\frac{1}{z}}.$$

Вычислите интегралы:

$$91. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}, \quad 92. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}, \quad 93. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}, \\ 94. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9}, \quad 95. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{(x^2 + 1)^2}, \quad 96. \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x dx}{(x^2 + 1)^2}, \\ 97. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 98. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad 0 < p < 1, \\ 99. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 - 2p \sin x + p^2}, \quad 0 < p < 1.$$

Ответы

1. $u = x + 2xy, v = y^2 - x^2 - y$. 2. $u = x^2 - y^2, v = 1 + 2xy$. 3. $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{y}{x^2 + y^2}$. 4. $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$. 5. Ось x переходит в ось u , при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ u изменяется от $+1$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $+1$ (точка $+1$ исключается). ось y переходит в окружность $u^2 + v^2 = 1$. 6. Ось x переходит в ось u так же, как и в упр-и 5, ось y переходит в прямую $u = 1$, пробегаемую от точки 1 до $1 + i\infty$ и от $1 - i\infty$ до точки 1 (сама точка 1 исключается). 10. Нет. 11. Да.

12. Нет. 13. Нет. 14. Да. 15. $\frac{1}{z}$. 16. $z^2 + 2z$. 21. Да. 22. Нет. 23. Нет. 24. $u = e^{-x} \cos y$, $v = e^{-x} \sin y$. 25. $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \cos x \operatorname{sh} y$. 26. $u = \operatorname{ch} x \cos(y-1)$, $v = \operatorname{sh} x \sin(y-1)$. 27. $u = \frac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$, $v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$. 28. $\rho = \frac{3}{4}$, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. 29. $\rho = \operatorname{ch} 1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. 30. $\rho = \pi$, $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$. 31. $1 + i2\pi k$. 32. $i(2k - \frac{1}{2})\pi$. 33. $i(2k + \frac{1}{2})\pi$. 34. $\ln \sqrt{2} + i(2k - \frac{3}{4})\pi$ (всюду $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 35. $z_k = i(2k+1)\pi$. 36. $z_k = i(2k - \frac{1}{2})\pi$. 37. $z_{2k} = 2\pi k - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi)$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi)$ (всюду $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 38. а) $2(i-1)$, б) $-2 + \frac{4}{3}i$, в) -2 . 39. $-8/3$. 40. $-2 - 2i$. 41. $e \cos 1 - 1 + ie \sin 1$. 42. 0. 43. $-2 + 2i$. 44. $-\frac{\pi^2}{8}$. 45. πi . 46. π/e . 47. $-\pi i$. 48. $-2\pi i$. 49. 1. 50. 1. 51. ∞ . 52. 1. 53. $\frac{1}{2}$. 54. $-\sin 1 + 2(z+1) \cos 1 + \frac{z^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{z^3}{3!}(z+1)^3 \cos 1 - \dots$, $R = \infty$. 55. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(z + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right]$, $R = \infty$. 56. $-\frac{1}{5} \left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots \right]$, $R = \frac{5}{3}$. 57. $-iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \dots$, $R = 1$. 58. $\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right)$, $R = \infty$. 59. $z = 0$ — второго порядка, $z_{\pm} = \pm 2i$ — простые. 60. $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) — простые. 61. $z = 0$ — третьего порядка, $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) — простые. 62. $z_n = (2n+1)\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — второго порядка. 63. $|z| > e$. 64. $2 < |z| < 4$. 65. $1 < |z| < 2$. 66. $0 < |z| < 1$. 67. $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$. 68. $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$. 69. $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \dots$. 70. $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \dots$. 71. $\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. 72. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}$. 73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n$. 74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$. 75. $z = 0$ — устранимая особая точка. 76. $z = 0$ — существенно особая точка. 77. $z = 0$ — простой полюс. 78. $z = 0$ — полюс четвертого порядка, $z = -1$ — простой полюс. 79. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{5}{2}$, $\operatorname{res} f(1) = e$. 80. $\operatorname{res} f(0) = 0$. 81. $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{6}$. 82. $\operatorname{res} f(i) = -1$. 83. $(1 - \frac{2}{e})\pi$. 84. $2\pi i$. 85. 0. 86. $2\pi i \frac{e^2}{3}$. 87. Устранимая особая точка. 88. Существенно особая точка. 89. Устранимая особая точка. 90. Полюс третьего порядка. 91. $\frac{3\pi}{8}$. 92. $\frac{2\pi}{3}$. 93. $\frac{\pi}{2}$. 94. $\frac{\pi}{3e^2}$. 95. 0. 96. $\frac{\pi}{4e}$. 97. $\frac{b-a}{2}\pi$. 98. $\frac{2\pi}{1-p}$. 99. 0.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Одним из мощных средств исследования задач математической физики является метод интегральных преобразований.

Пусть функция $f(x)$ задана на интервале (a, b) , конечном или бесконечном. *Интегральным преобразованием* функции $f(x)$ называется функция

$$F(\omega) = \int_a^b K(x, \omega) f(x) dx, \quad (*)$$

где $K(x, \omega)$ — фиксированная для данного преобразования функция, называемая *ядром преобразования* (предполагается, что интеграл $(*)$ существует в собственном или несобственном смысле).

§ 1. Интеграл Фурье

Всякая функция $f(x)$, которая на отрезке $[-l, l]$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье, может быть на этом отрезке представлена тригонометрическим рядом

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right). \quad (1)$$

Коэффициенты a_n и b_n ряда (1) определяются по формулам Эйлера—Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi\tau}{l} d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \sin \frac{n\pi\tau}{l} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

Ряд в правой части равенства (1) можно записать в иной форме. С этой целью внесем в него из формул (2) значения коэффициентов a_n и b_n , подведем под знаки интегралов $\cos \frac{n\pi}{l} x$ и $\sin \frac{n\pi}{l} x$ (что возможно, поскольку переменной интегрирования является τ)

и используем формулу для косинуса разности. Будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi(x-\tau)}{l} d\tau. \quad (3)$$

Если функция $f(x)$ первоначально была определена на интервале числовой оси, большем, чем отрезок $[-l, l]$ (например, на всей оси), то разложение (3) воспроизведет значения этой функции только на отрезке $[-l, l]$ и продолжит ее на всю числовую ось как периодическую функцию с периодом $2l$ (рис. 1). Поэтому,

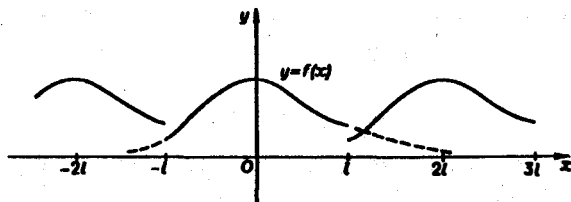


Рис. 1

если функция $f(x)$ (вообще говоря, непериодическая) определена на всей числовой оси, в формуле (3) можно попытаться перейти к пределу при $l \rightarrow +\infty$. При этом естественно потребовать выполнения следующих условий:

1. $f(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье на любом конечном отрезке оси Ox ;

2. функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = K < +\infty. \quad (4)$$

При выполнении условия 2 первое слагаемое правой части равенства (3) при $l \rightarrow +\infty$ стремится к нулю. В самом деле,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| d\tau = \frac{K}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0.$$

Попытаемся установить, во что перейдет в пределе при $l \rightarrow +\infty$ сумма в правой части (3). Положим

$$\xi_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \xi_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \dots, \quad \xi_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \dots;$$

$$\Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{l},$$

так, что $\frac{1}{l} = \frac{\Delta\xi_n}{\pi}$. Тогда сумма в правой части (3) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\xi_n \int_{-l}^l f(\tau) \cos \xi_n(x-\tau) d\tau. \quad (5)$$

В силу абсолютной сходимости интеграла эта сумма при больших l мало отличается от выражения

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\xi_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi_n(x-\tau) d\tau,$$

которое напоминает интегральную сумму для функции переменного ξ

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau,$$

составленную для интервала $(0, +\infty)$ изменения ξ . Поэтому естественно ожидать, что при $l \rightarrow +\infty$ ($\Delta\xi_n = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0$) сумма (5) перейдет в интеграл

$$\int_0^{+\infty} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau.$$

С другой стороны, при $l \rightarrow +\infty$ (x фиксировано) из формулы (3) вытекает, что

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi}{l}(x - \tau) d\tau, \quad (6)$$

и мы получаем равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau. \quad (7)$$

Достаточное условие справедливости формулы (7) выражается следующей теоремой.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$ и имеет вместе со своей производной конечное число точек разрыва первого рода на любом отрезке $[a, b]$, то справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau.$$

При этом во всякой точке x_0 , являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$, значение интеграла в правой части (7) равно

$$\frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)].$$

Формулу (7) называют *интегральной формулой Фурье*, а стоящий в ее правой части интеграл — *интегралом Фурье*.

Если воспользоваться формулой для косинуса разности, то формулу (7) можно записать в виде

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\xi) \cos \xi x + b(\xi) \sin \xi x] d\xi, \quad (8)$$

где

$$a(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau \, d\tau, \quad b(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau \, d\tau. \quad (9)$$

Функции $a(\xi)$, $b(\xi)$ являются аналогами соответствующих коэффициентов Фурье a_n и b_n 2π -периодической функции, но последние определены для дискретных значений n , в то время как $a(\xi)$, $b(\xi)$ определены для непрерывных значений $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

Комплексная форма интеграла Фурье

Предполагая $f(x)$ абсолютно интегрируемой на всей оси Ox , рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) \, d\tau, \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

Этот интеграл равномерно сходится для $-\infty < \xi < +\infty$, так как

$$|f(\tau) \sin \xi(x - \tau)| \leq |f(\tau)|,$$

и потому представляет собой непрерывную и, очевидно, нечетную функцию от ξ . Но тогда

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) \, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) \, d\tau = 0.$$

С другой стороны, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) \, d\tau, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

есть четная функция переменной ξ , так что

$$\int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) \, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) \, d\tau.$$

Поэтому интегральную формулу Фурье можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) \, d\tau. \quad (10)$$

Умножим равенство

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi(x - \tau) \, d\tau$$

на мнимую единицу i и прибавим к равенству (10). Получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) [\cos \xi(x - \tau) + i \sin \xi(x - \tau)] \, d\tau,$$

откуда, в силу формулы Эйлера ($e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$), будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\xi(x-\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau. \quad (11)$$

Это — *комплексная форма* интеграла Фурье. Здесь внешнее интегрирование по ξ понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \right) d\xi = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N e^{i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \right) d\xi.$$

§ 2. Преобразование Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Пусть функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке оси Ox и абсолютно интегрируема на всей оси.

Определение. Функция

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (1)$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$ (*спектральной функцией*).

Это — интегральное преобразование функции $f(x)$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ с ядром

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x}.$$

Используя интегральную формулу Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau,$$

получаем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (2)$$

Это так называемое *обратное преобразование Фурье*, дающее переход от $F(\xi)$ к $f(x)$.

Иногда прямое преобразование Фурье задают так:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx. \quad (1')$$

Тогда обратное преобразование Фурье определится формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (2')$$

Преобразование Фурье $F(\xi)$ функции $f(x)$ определяют также следующим образом:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (1'')$$

Тогда, в свою очередь,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (2'')$$

При этом положение множителя $\frac{1}{2\pi}$ достаточно произвольно: он может входить либо в формулу (1''), либо в формулу (2'').

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} \quad (\alpha > 0).$$

◀ Имеем

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x} dx. \quad (3)$$

Это равенство допускает дифференцирование по ξ под знаком интеграла (получающийся после дифференцирования интеграл равномерно сходится, когда ξ принадлежит любому конечному отрезку):

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x} (-ix) dx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} d(e^{-\alpha x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{i}{2\alpha} [e^{-i\xi x} e^{-\alpha x^2}] \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \frac{i}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x} (-i\xi) dx \right\}.$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль, и мы получаем

$$F'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-i\xi x} dx = -\frac{\xi}{2\alpha} F(\xi),$$

откуда

$$F(\xi) = C e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \quad (4)$$

(C — постоянная интегрирования). Полагая в (4) $\xi = 0$, найдем $C = F(0)$. В силу (3) имеем

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

и, значит, $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

Таким образом,

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

В частности, для $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($\alpha = \frac{1}{2}$) получаем, что

$$F(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \blacktriangleright$$

Пример 2 (разряд конденсатора через сопротивление). Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

◀ Для спектральной функции $F(\xi)$ получаем

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\xi)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha+i\xi}.$$

Отсюда

$$|F(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi(\alpha^2 + \xi^2)}$$

(рис. 2). ▶

Условие абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ на всей числовой оси является весьма жестким. Оно исключает, например, такие элементарные функции, как $f(x) = 1$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, для которых преобразования Фурье (в рассматриваемой здесь классической форме) не существуют.

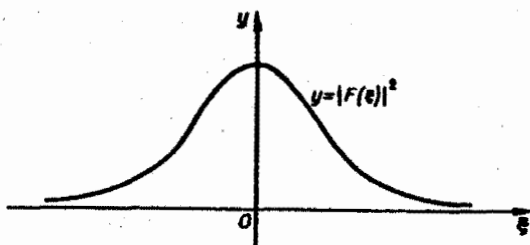


Рис. 2

Фурье-образ имеют только те функции, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$ (как в примерах 1 и 2).

2.1. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Используя формулу косинуса разности, перепишем интегральную формулу Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau$$

в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \xi x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau \right) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \xi x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau d\tau \right) d\xi. \quad (5)$$

Пусть $f(x)$ — четная функция. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau = 2 \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau d\tau = 0,$$

так что из равенства (5) имеем

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \xi x \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \xi \tau d\tau \right) d\xi. \quad (6)$$

В случае нечетной $f(x)$ аналогично получаем

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \xi x \left(\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \xi \tau d\tau \right) d\xi. \quad (7)$$

Если $f(x)$ задана лишь на $[0, +\infty)$, то формула (6) продолжает $f(x)$ на всю ось Ox четным образом, а формула (7) — нечетным.

Определение. Функция

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx \quad (8)$$

называется *косинус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$.

Из (6) следует, что для четной функции $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (9)$$

Это означает, что $f(x)$, в свою очередь, является косинус-преобразованием для $F_c(\xi)$. Иными словами, функции f и F_c являются взаимными косинус-преобразованиями.

Определение. Функция

$$F_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx \quad (10)$$

называется *синус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$.

Из (7) получаем, что для нечетной функции $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad (11)$$

т. е. f и F_s являются взаимными синус-преобразованиями.

Пример 3 (прямоугольный импульс). Пусть $f(t)$ — четная функция, определенная следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } |t| < \theta, \\ 0, & \text{при } |t| > \theta \end{cases} \quad (\theta > 0 - \text{const}).$$

Тогда

$$F_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\theta} \cos \xi t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi \theta}{\xi} \quad (12)$$

(рис. 3).

Воспользуемся полученным результатом для вычисления интеграла

$$si(\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

В силу формулы (9) имеем

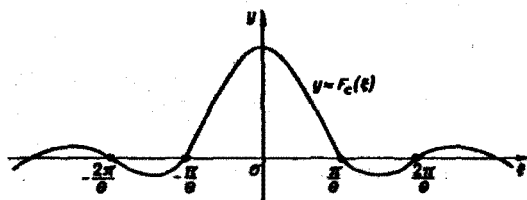


Рис. 3

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\xi) \cos \xi t d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta \xi}{\xi} \cos \xi t d\xi. \quad (12')$$

В точке $t = 0$ функция $f(t)$ непрерывна и равна единице. Поэтому из (12') получим

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta \xi}{\xi} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta \xi}{\theta \xi} d(\theta \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

так что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Амплитудный и фазовый спектры интеграла Фурье

Пусть периодическая с периодом 2π функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Это равенство можно записать в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx - \varphi_n),$$

где $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — амплитуда колебания с частотой n , φ_n — фаза. На этом пути мы приходим к понятиям амплитудного и фазового спектров периодической функции.

Для непериодической функции $f(x)$, заданной на $(-\infty, +\infty)$, при определенных условиях оказывается возможным представить ее интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \xi(x - \tau) d\tau,$$

осуществляющим разложение этой функции по всем частотам $0 < \xi < +\infty$ (разложение по непрерывному спектру частот).

Определение. Спектральной функцией, или спектральной плотностью интеграла Фурье, называется выражение

$$S(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

(прямое преобразование Фурье функции $f(x)$).

Функция

$$A(\xi) = |S(\xi)| = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \xi x \, dx\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \xi x \, dx\right)^2}$$

называется *амплитудным спектром*, а функция

$$\Phi(\xi) = -\arg S(\xi)$$

— *фазовым спектром* функции $f(x)$.

Амплитудный спектр $A(\xi)$ служит мерой вклада частоты ξ в функцию $f(x)$.

Пример 4. Найти амплитудный и фазовый спектры функции

$$f(x) = e^{-|x|}.$$

◀ Находим спектральную функцию

$$S(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx = \int_{-\infty}^0 e^x e^{-i\xi x} \, dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} \, dx = \frac{e^{x(1-i\xi)}}{1-i\xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=0} - \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

Отсюда $A(\xi) = |S(\xi)| = \frac{1}{1+\xi^2}$, $\Phi(\xi) = -\arg S(\xi) = 0$. Графики этих функций изображены на рис. 4. ▶

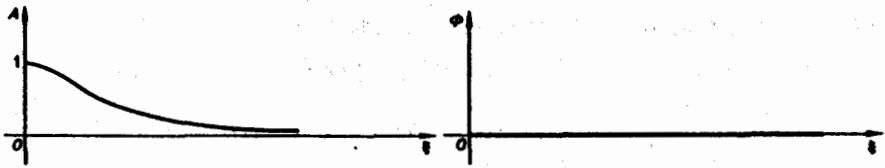


Рис. 4

§ 3. Свойства преобразования Фурье

1. Линейность. Если $F(\xi)$ и $G(\xi)$ — преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то при любых постоянных α и β преобразованием Фурье функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$ будет функция $\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$.

◀ Пользуясь свойством линейности интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i\xi x} \, dx &= \\ &= \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} \, dx + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} \, dx = \alpha F(\xi) + \beta G(\xi). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Таким образом, преобразование Фурье есть линейный оператор. Обозначая его через $\mathcal{F}$, будем писать

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\xi), \quad \text{или} \quad \mathcal{F}[f(x)] = F(\xi).$$

2. Если $F(\xi)$ есть преобразование Фурье абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции $f(x)$, то $F(\xi)$ ограничена при всех $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

◀ Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси $-\infty < x < +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = K < +\infty,$$

и пусть

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

— преобразование Фурье функции $f(x)$. Тогда

$$|F(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}. \blacktriangleright$$

Задача. Пусть $f(x)$ — функция, допускающая преобразование Фурье, h — действительное число. Функция $f_h(x) = f(x-h)$ называется сдвигом функции $f(x)$. Пользуясь определением преобразования Фурье, показать, что

$$\mathcal{F}[f_h] = e^{-i\xi h} \mathcal{F}[f].$$

Задача. Пусть функция $f(x)$ имеет преобразование Фурье $F(\xi)$, h — действительное число. Показать, что

$$\mathcal{F}[e^{ihx} f(x)] = F(\xi - h).$$

3. Преобразование Фурье и операция дифференцирования. Пусть абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, также абсолютно интегрируемую на всей оси Ox , так что $f(x)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$. Считая $f'(x)$ гладкой функцией, запишем

$$\mathcal{F}[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\mathcal{F}[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(f(x) e^{-i\xi x}) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right].$$

Внеинтегральное слагаемое обращается в нуль (так как $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$), и мы получаем

$$\boxed{\mathcal{F}[f'] = i\xi \mathcal{F}[f].} \quad (1)$$

Таким образом, дифференцированию функции $f(x)$ отвечает умножение ее образа Фурье $\mathcal{F}[f]$ на множитель $i\xi$.

Если функция $f(x)$ имеет гладкие абсолютно интегрируемые производные до порядка m включительно и все они, как и сама функция $f(x)$, стремятся к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$, то, интегрируя по частям нужное число раз, получим

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (i\xi)^k \mathcal{F}[f(x)] \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (2)$$

Преобразование Фурье очень полезно именно потому, что оно заменяет операцию дифференцирования операцией умножения на величину $i\xi$ и тем самым упрощает задачу интегрирования некоторых видов дифференциальных уравнений.

Так как преобразование Фурье $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ абсолютно интегрируемой функции $f^{(k)}(x)$ есть ограниченная функция от ξ (свойство 2), то из соотношения (2) получаем для $\mathcal{F}[f]$ следующую оценку:

$$|\mathcal{F}[f]| = \frac{|\mathcal{F}[f^{(k)}]|}{|\xi|^k} \leq \frac{C}{|\xi|^k} \quad (C > 0 - \text{const}).$$

Из этой оценки следует: чем больше функция $f(x)$ имеет абсолютно интегрируемых производных, тем быстрее ее преобразование Фурье стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow +\infty$.

Замечание. Условие $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$ является достаточно естественным, поскольку обычная теория интегралов Фурье имеет дело с процессами, которые в том или ином смысле имеют начало и конец, но не продолжаются неограниченно с примерно одинаковой интенсивностью.

4. Связь между скоростью убывания функции $f(x)$ при $|x| \rightarrow +\infty$ и гладкостью ее преобразования Фурье. Предположим, что не только $f(x)$, но и ее произведение $xf(x)$ является абсолютно интегрируемой функцией на всей оси Ox . Тогда преобразование Фурье

$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$ функции $f(x)$ будет дифференцируемой функцией.

Действительно, формальное дифференцирование по параметру ξ подынтегральной функции приводит к интегралу

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\xi x} dx,$$

который является абсолютно и равномерно сходящимся относительно параметра ξ . Следовательно, дифференцирование возможно, и

$$F'(\xi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\xi x} dx = -i\mathcal{F}[xf(x)].$$

Таким образом,

$$i \frac{d}{d\xi} F(\xi) = \mathcal{F}[xf(x)],$$

т. е. операция умножения $f(x)$ на аргумент x переходит после преобразования Фурье в операцию $i \frac{d}{d\xi}$.

Если вместе с функцией $f(x)$ абсолютно интегрируемыми на всей оси Ox являются функции $xf(x), \dots, x^m f(x)$, то процесс дифференцирования можно продолжить. Получим, что функция $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$ имеет производные до порядка m включительно, причем

$$i^k \frac{d^k}{d\xi^k} \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[x^k f(x)], \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Таким образом, чем быстрее функция $f(x)$ убывает при $|x| \rightarrow +\infty$, тем более гладкой получается функция $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$.

5.

Теорема 2 (о свертке). Пусть $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — преобразования Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} F_1(\xi) \cdot F_2(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-i\xi x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-i\xi y} dy = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y) e^{-i\xi(x+y)} dx dy, \end{aligned}$$

причем двойной интеграл в правой части сходится абсолютно.

Положим $x + y = \tau$, так что $y = \tau - x$. Тогда будем иметь

$$F_1(\xi) \cdot F_2(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau - x) e^{-i\xi\tau} d\tau \right\} dx,$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$F_1(\xi) \cdot F_2(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\tau - x) dx \right\} d\tau. \quad (1)$$

Функция

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\tau - x) dx, \quad -\infty < \tau < +\infty,$$

называется *сверткой* функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и обозначается символом $(f_1 * f_2)(\tau)$.

Формула (1) может быть теперь записана так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau = \sqrt{2\pi} F_1(\xi) \cdot F_2(\xi).$$

Отсюда видно, что преобразование Фурье свертки функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равно умноженному на $\sqrt{2\pi}$ произведению преобразований Фурье свертываемых функций,

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2].$$

Замечание. Нетрудно установить следующие свойства свертки:

- 1) линейность: $f * (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 (f * f_1) + \alpha_2 (f * f_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2 = \text{const})$;
- 2) коммутативность: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

§ 4. Приложения преобразования Фурье

1. Пусть $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ — линейный дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv a_0 \frac{d^m}{dx^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{d}{dx} + a_m$$

($a_0, a_1, \dots, a_m = \text{const}$). Используя формулу для преобразования Фурье производных функции $y(x)$, находим

$$\mathcal{F} \left[P \left(\frac{d}{dx} \right) y \right] = P(i\xi) \mathcal{F}[y].$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P \left(\frac{d}{dx} \right) y = f(x), \quad (1)$$

где $P \left(\frac{d}{dx} \right)$ — введенный выше дифференциальный оператор.

Предположим, что искомое решение $y(x)$ имеет преобразование Фурье $\tilde{y}(\xi)$, а функция $f(x)$ имеет преобразование $\tilde{f}(\xi)$. Применяя преобразование Фурье к уравнению (1), получим вместо дифференциального алгебраическое уравнение на оси $O\xi$ относительно $\tilde{y}(\xi)$,

$$P(i\xi)\tilde{y} = \tilde{f}(\xi),$$

откуда

$$\tilde{y}(\xi) = \frac{\tilde{f}(\xi)}{P(i\xi)},$$

так что формально

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\tilde{f}(\xi)}{P(i\xi)} \right\},$$

где символ $\mathcal{F}^{-1}$ обозначает обратное преобразование Фурье.

Основное ограничение применимости этого метода связано со следующим фактом. Решение обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами содержит функции вида $e^{\lambda x}$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Они не являются абсолютно интегрируемыми на оси $-\infty < x < +\infty$, и преобразование Фурье для них не определено, так что, строго говоря, применять данный метод нельзя. Это ограничение можно обойти, если ввести в рассмотрение так называемые *обобщенные функции*. Однако в ряде случаев преобразование Фурье все же применимо в своей классической форме.

Пример. Найти решение $u = u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

($a = \text{const}$), при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Это — задача о свободных колебаниях бесконечной однородной струны, когда задано начальное отклонение $\varphi(x)$ точек струны, а начальные скорости отсутствуют.

« Поскольку пространственная переменная x изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, подвергнем уравнение и начальные условия преобразованию Фурье по переменной x .

Будем предполагать, что

1) функции $u(x, t)$ и $\varphi(x)$ — достаточно гладкие и стремятся к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$ и $\forall t \geq 0$ настолько быстро, что существуют преобразования Фурье

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx; \quad (5)$$

2) допустимы операции дифференцирования, так что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx \right) = \frac{d^2 v(\xi, t)}{dt^2}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^2 v(\xi, t) = -\xi^2 v(\xi, t). \quad (7)$$

Умножая обе части (2) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x}$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + a^2 \xi^2 v = 0, \quad (8)$$

а из начальных условий (3) найдем

$$v \Big|_{t=0} = \bar{\varphi}(\xi), \quad (9)$$

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, применяя к задаче (2)–(3) преобразование Фурье, приходим к задаче Коши (8)–(10) для обыкновенного дифференциального уравнения, где ξ — параметр.

Решением уравнения (8) является функция

$$v(\xi, t) = C_1(\xi) \cos a\xi t + C_2(\xi) \sin a\xi t.$$

Из условий (9) и (10) находим, что $C_1(\xi) = \bar{\varphi}(\xi)$, $C_2(\xi) = 0$, так что $v(\xi, t) = \bar{\varphi}(\xi) \cos a\xi t$.

Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi) \cos a\xi t e^{i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi) \left[\frac{e^{i\xi(x+at)} + e^{i\xi(x-at)}}{2} \right] d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}. \end{aligned}$$

Это частный случай формулы Даламбера решения задачи (2)–(3). ►

2. Преобразование Фурье может быть использовано при решении некоторых интегральных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx = 2\pi e^{-|\xi|}, \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция. Записав (1) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx = \sqrt{2\pi} e^{-|\xi|}, \quad (2)$$

замечаем, что левую часть (2) можно рассматривать как преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, так что (2) равносильно следующему равенству:

$$\mathcal{F}[\varphi] = \sqrt{2\pi} e^{-|\xi|}.$$

Тогда по формуле обращения

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|\xi} e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^0 e^{\xi(1+ix)} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-\xi(1-ix)} d\xi = \\ &= \frac{e^{\xi(1+ix)} \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=0}}{1+ix} - \frac{e^{-\xi(1-ix)} \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}}{1-ix} = \frac{2}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Функция $\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2}$ есть решение уравнения (1).

§ 5. Понятие о многомерном преобразовании Фурье

Преобразование Фурье

	$f(x)$	$F(\xi) = \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$
1	$f(a, x), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\xi}{a}\right)$
2	$f(x - a)$	$e^{-i\xi a} F(\xi)$
3	$e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}$
4	$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$
5	$\begin{cases} 1, & x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\xi}{\xi}$
6	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{- \xi }$
7	$\frac{a}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \xi }$
8	$xe^{-a x }, a > 0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ia\xi}{(\xi^2+a^2)^2}$
9	$\begin{cases} \cos ax, & x < \frac{\pi}{2a}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2a} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 - \xi^2} \cos \frac{\pi\xi}{2a}$
10	$\begin{cases} 1 - x , & x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \xi/2}{\xi}\right)^2$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Многомерным преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

или, короче,

$$F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx,$$

где $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$; символ $\int_{\mathbb{R}^n} dx$ обозначает интегрирование по всему пространству $\mathbb{R}^n$.

Свойства многомерного преобразования аналогичны соответствующим свойствам преобразования Фурье функции одной переменной. В специальном случае, когда $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$, имеем

$$\mathcal{F}[f_1 \cdot f_2 \dots f_n] = \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2] \dots \mathcal{F}[f_n].$$

Упражнения

Представьте следующие функции интегралом Фурье:

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad 2. f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x < a, x > b. \end{cases}$$

$$3. f(x) = e^{-|x|}. \quad 4. f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad 5. f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

6. Решите интегральное уравнение

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos \xi t dt = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Ответы

$$1. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} \cos \xi x d\xi. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}. \quad 2. f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \xi(x-a) - \sin \xi(x-b)}{\xi} d\xi. \quad 3. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \xi x}{1 + \xi^2} d\xi. \quad 4. f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \sin x\xi d\xi. \quad 5. f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \xi \pi}{1 - \xi^2} \sin x\xi d\xi. \quad 6. f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

§ 1. Преобразование Лапласа. Основные определения

Ранее мы рассмотрели интегральное преобразование Фурье

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

с ядром $K(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi t}$. Преобразование Фурье неудобно тем, что должно быть выполнено условие абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ на всей оси t ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = A < +\infty. \quad (*)$$

Преобразование Лапласа позволяет освободиться от этого ограничения.

Определение 1. *Функцией-оригиналом* будем называть всякую комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющую следующим условиям:

1. $f(t)$ непрерывна на всей оси t , кроме отдельных точек, в которых $f(t)$ имеет разрыв 1-го рода, причем на каждом конечном интервале оси t таких точек может быть лишь конечное число;
2. функция $f(t)$ равна нулю при отрицательных значениях t , $f(t) = 0$ при $t < 0$;
3. при возрастании t модуль $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют числа $M > 0$ и s такие, что для всех t

$$|f(t)| \leq M e^{st}. \quad (1)$$

Ясно, что если неравенство (1) выполняется при некотором $s = s_1$, то оно будет выполняться и при всяком $s_2 > s_1$.

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s , $s_0 = \inf s$, для которых выполняется неравенство (1), называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Замечание. В общем случае неравенство

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$$

не имеет места, но справедлива оценка

$$|f(t)| \leq M e^{(s_0 + \varepsilon)t},$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Так, функция $f(t) = t$, $t \geq 0$, имеет показатель роста $s_0 = 0$. Для нее неравенство $|t| \leq M \forall t \geq 0$ не выполняется, но $\forall \varepsilon > 0, \forall t > 0$ верно неравенство $|t| \leq M e^{\varepsilon t}$.

Условие (1) гораздо менее ограничительное, чем условие (*).

Пример 1. Функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^t, & t \geq 0, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (*), но условие (1) выполнено при любом $s \geq 1$ и $M \geq 1$; показатель роста $s_0 = 1$. Так что $f(t)$ является функцией-оригиналом.

С другой стороны, функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{t^2}, & t \geq 0, \end{cases}$$

не является функцией-оригиналом: она имеет бесконечный порядок роста, $s_0 = +\infty$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая единичная функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

(рис. 1).

Если некоторая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения 1, но не удовлетворяет условию 2, то произведение $f(t) = \varphi(t) \eta(t)$ уже является функцией-оригиналом.

Для простоты записи мы будем, как правило, множитель $\eta(t)$ опускать, условившись, что все функции, которые мы будем рассматривать, равны нулю для отрицательных t , так что если речь идет о какой-то функции $f(t)$, например, о $\sin t$, $\cos t$, e^t и т. д., то всегда подразумеваются следующие функции (рис. 2):

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & t \geq 0, \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \cos t, & t \geq 0, \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Определение 2. Пусть $f(t)$ есть функция-оригинал. Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая формулой

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (2)$$

где интеграл берется по положительной полуоси t . Функцию $F(p)$ называют также *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$; ядро преобразования $K(t, p) = e^{-pt}$.

Тот факт, что функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, будем записывать так:

$$f(t) \doteq F(p), \quad F(p) \doteq f(t), \quad \text{или} \quad F(p) = \mathcal{L}(f(t)).$$

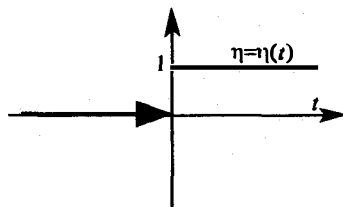


Рис. 1

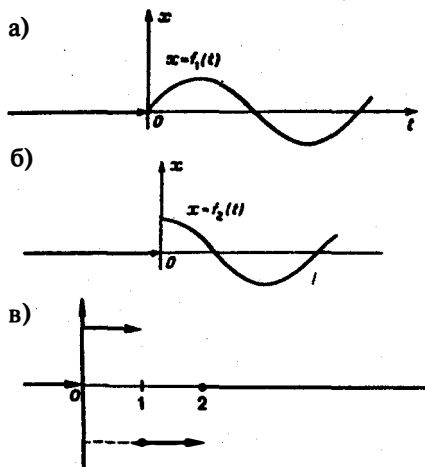


Рис. 2

Пример 2. Найти изображение единичной функции $\eta(t)$.

◀ Функция $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$ является функцией-оригиналом с показателем роста $s_0 = 0$. В силу формулы (2) изображением функции $\eta(t)$ будет функция

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt.$$

Если $p = s + i\sigma$, то при $s > 0$ интеграл в правой части последнего равенства будет сходящимся, и мы получим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p = s > 0),$$

так что изображением функции $\eta(t)$ будет функция $\frac{1}{p}$.

Как мы условились, будем писать, что $\eta(t) = 1$, и тогда полученный результат запишется так:

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}. \blacktriangleright$$

Теорема 1. Для всякой функции-оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0 изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией (рис. 3).

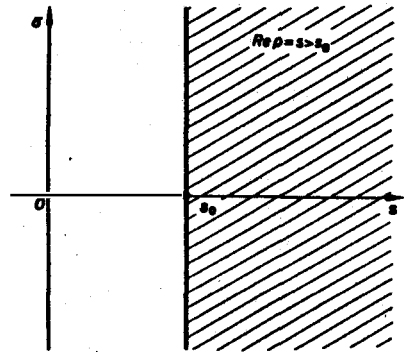


Рис. 3

◀ Пусть

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}. \quad (3)$$

Для доказательства существования изображения $F(p)$ в указанной полуплоскости достаточно установить, что несобственный интеграл (2) абсолютно сходится при $s > s_0$.

Используя (3), получаем

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-(s+i\sigma)t}| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0},$$

что и доказывает абсолютную сходимость интеграла (2). Одновременно мы получили оценку преобразования Лапласа $F(p)$ в полуплоскости сходимости $\operatorname{Re} p = s > s_0$:

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s-s_0}. \quad (4)$$

Дифференцируя выражение (2) формально под знаком интеграла по p , находим

$$F'(p) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt. \quad (5)$$

Существование интеграла (5) устанавливается так же, как было установлено существование интеграла (2).

Применяя для $F'(p)$ интегрирование по частям, получаем оценку

$$\begin{aligned} |F'(p)| &\leq M \int_0^{+\infty} t e^{-(s-s_0)t} dt = \\ &= M \left[\frac{t e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{s-s_0} \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \right] = \frac{M}{(s-s_0)^2}, \end{aligned}$$

откуда следует абсолютная сходимость интеграла (5). (Внеинтегральное слагаемое $\frac{t e^{-(s-s_0)t}}{s_0-s}$ при $t \rightarrow +\infty$ имеет предел, равный нулю).

В любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ интеграл (5) сходится равномерно относительно p , поскольку он мажорируется сходящимся интегралом

$$\left| \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} t e^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2},$$

не зависящим от p . Следовательно, дифференцирование по p законно и равенство (5) справедливо.

Поскольку производная $F'(p)$ существует, преобразование Лапласа $F(p)$ всюду в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ является аналитической функцией. ►

Из неравенства (4) вытекает

Следствие. Если точка p стремится к бесконечности так, что $\operatorname{Re} p = s$ неограниченно возрастает, то

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Пример 3. Найдем еще изображение функции $f(t) = e^{at}$, где $a = \alpha + i\beta$ — любое комплексное число. Показатель роста s_0 функции $f(t)$ равен α .

◄ Считая $\operatorname{Re} p = s > \alpha$, получим

$$\int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \alpha).$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

При $a = 0$ вновь получаем формулу $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$. ►

Обратим внимание на то, что изображение функции e^{at} является аналитической функцией аргумента p не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, но и во всех точках p , кроме точки $p = a$, где это изображение имеет простой полюс. В дальнейшем мы не раз встретимся с подобной ситуацией, когда изображение $F(p)$ будет аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного p , за исключением изолированных особых точек. Противоречия с теоремой 1 нет. Последняя утверждает лишь, что в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ функция $F(p)$ не имеет особых точек: все они оказываются лежащими или левее прямой $\operatorname{Re} p = s_0$, или на самой этой прямой.

Замечание. В операционном исчислении иногда пользуются изображением функции $f(t)$ по Хевисайду, определяемым равенством

$$F^*(p) = p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

и отличающимся от изображения по Лапласу множителем p .

§2. Свойства преобразования Лапласа

В дальнейшем через $f(t)$, $\varphi(t)$, ... будем обозначать функции-оригиналы, а через $F(p)$, $\Phi(p)$, ... — их изображения по Лапласу,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \Phi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad \dots$$

Из определения изображения следует, что если $f(t) \equiv 0 \forall t$, то $F(p) \equiv 0$.

Теорема 2 (единственности). Если две непрерывные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то они тождественно равны.

Теорема 3 (линейность преобразования Лапласа). Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ — функции-оригиналы, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta \varphi(t) \rightleftharpoons \alpha F(p) + \beta \Phi(p). \quad (2)$$

◀ Справедливость утверждения вытекает из свойства линейности интеграла, определяющего изображение:

$$\int_0^{+\infty} (\alpha f(t) + \beta \varphi(t)) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt = \alpha F(p) + \beta \Phi(p)$$

($\operatorname{Re} p > \max\{s_0, s_1\}$, где s_0, s_1 — показатели роста функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно). ▶

На основании этого свойства получаем

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \rightleftharpoons \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

т. е.

$$\boxed{\sin \omega t \rightleftharpoons \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}} \quad (3)$$

Аналогично находим, что

$$\boxed{\cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2 + \omega^2}} \quad (4)$$

и, далее,

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2 - 1}, \quad (5)$$

$$\operatorname{ch} t \doteq \frac{p}{p^2 - 1}. \quad (6)$$

Теорема 4 (подобия). Если $f(t)$ — функция-оригинал и $F(p)$ — ее изображение по Лапласу, то для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (7)$$

◀ Полагая $\alpha t = \tau$, имеем

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \blacktriangleright$$

Пользуясь этой теоремой, из формул (5) и (6) получаем

$$\operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Теорема 5 (о дифференцировании оригинала). Пусть $f(t)$ является функцией-оригиналом с изображением $F(p)$ и пусть $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ — также функции-оригиналы, а $\bar{s} = \max\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, где s_k — показатель роста функции $f^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad (8)$$

и вообще

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (9)$$

Здесь под $f^{(k)}(0)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) понимается правое предельное значение $f^{(k)}(t)$,

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t).$$

◀ Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Найдем изображение $f'(t)$. Имеем

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f'(t) \doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = (f(t) e^{-pt}) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (10)$$

Внеинтегральное слагаемое в правой части (10) обращается в нуль при $t \rightarrow +\infty$, т. к. при $\operatorname{Re} p = s > \bar{s}$ имеем

$$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{-(s-\bar{s})t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

подстановка $t = 0$ дает $-f(0)$.

Второе слагаемое справа в (10) равно $pF(p)$. Таким образом, соотношение (10) принимает вид

$$f'(t) \doteq p F(p) - f(0),$$

и формула (8) доказана. В частности, если $f(0) = 0$, то $f'(t) \doteq pF(p)$.

Для отыскания изображения $f^{(n)}(t)$ запишем

$$f^{(n)}(t) \doteq \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t) e^{-pt} dt,$$

откуда, интегрируя n раз по частям, получим

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \blacktriangleright$$

Пример 4. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

◀ Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t) \doteq p F(p) - f(0).$$

Но $f(0) = 0$, а $f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4}$. Следовательно, $\frac{2}{p^2+4} = p F(p)$, откуда $F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \doteq \sin^2 t$. ▶

Теорема 5 устанавливает замечательное свойство интегрального преобразования Лапласа: оно (как и преобразование Фурье) переводит операцию дифференцирования в алгебраическую операцию умножения на p .

Формула включения. Если $f(t)$ и $f'(t)$ являются функциями-оригиналами, то

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p F(p) = f(0). \quad (11)$$

◀ В самом деле, $f'(t) \doteq p F(p) - f(0)$. В силу следствия из теоремы 1, всякое изображение стремится к нулю при $\operatorname{Re} p = s \rightarrow +\infty$. Значит, $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} [p F(p) - f(0)] = 0$, откуда вытекает формула включения (11). ▶

Теорема 6 (о дифференцировании изображения). Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала,

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (12)$$

◀ Так как функция $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ является аналитической, то ее можно дифференцировать по p . Имеем

$$\begin{aligned} F'(p) &= - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt, \\ F''(p) &= \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt, \\ &\dots\dots\dots, \\ F^{(n)}(p) &= \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Последнее как раз и означает, что $F^{(n)}(p) \equiv (-1)^n t^n f(t)$. ▶

Пример 5. Пользуясь теоремой 6, найти изображение функции $\varphi(t) = t^n$.

◀ Как известно, $1 \equiv \frac{1}{p}$. Здесь $f(t) = 1$, $F(p) = \frac{1}{p}$. Отсюда $\left(\frac{1}{p}\right)' \equiv (-t) \cdot 1$, или $\frac{1}{p^2} \equiv t$. Вновь применяя теорему 6, найдем $\left(\frac{1}{p^2}\right)' \equiv (-t) \cdot t$, или $\frac{1 \cdot 2}{p^3} \equiv t^2$, вообще $t^n \equiv \frac{n!}{p^{n+1}}$. ▶

Теорема 7 (интегрирование оригинала). Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p : если $f(t) \equiv F(p)$, то

$$\int_0^t f(\xi) d\xi \equiv \frac{F(p)}{p}. \quad (13)$$

◀ Положим

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt. \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что если $f(t)$ есть функция-оригинал, то и $\varphi(t)$ будет функцией-оригиналом, причем $\varphi(0) = 0$. Пусть $\varphi(t) \equiv \Phi(p)$. В силу (14)

$$f(t) = \varphi'(t) \equiv p \Phi(p) - \varphi(0) = p \Phi(p),$$

так что $f(t) \equiv p \Phi(p)$. С другой стороны, $f(t) \equiv F(p)$, откуда $F(p) = p \Phi(p)$, т. е. $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$. Последнее равносильно доказываемому соотношению (13). ▶

Пример 6. Найти изображение функции

$$\varphi(t) = \int_0^t \cos \xi d\xi.$$

◀ В данном случае $f(t) = \cos t$, так что $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$. Поэтому

$$\int_0^t \cos \xi d\xi \equiv \frac{1}{p^2+1}. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 8 (интегрирование изображения). Если $f(t) = F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(q) dq$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq. \quad (15)$$

◀ Действительно,

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty \left\{ \int_0^{+\infty} f(t) e^{-qt} dt \right\} dq.$$

Предполагая, что путь интегрирования (p, ∞) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$, мы можем изменить порядок интегрирования ($t > 0$):

$$\int_p^\infty F(q) dq = \int_p^\infty \left\{ \int_0^{+\infty} f(t) e^{-qt} dt \right\} dq = \int_0^{+\infty} f(t) \left\{ \int_p^\infty e^{-qt} dq \right\} dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt.$$

Последнее равенство означает, что $\int_p^\infty F(q) dq$ является изображением функции $\frac{f(t)}{t}$. ▶

Пример 7. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

◀ Как известно, $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 9 (запаздывания). Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого положительного τ («запаздывания»)

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

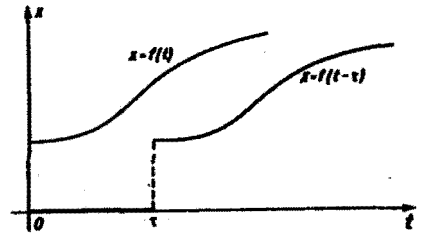


Рис. 4

◀ Так как $f(t-\tau) \equiv 0$ для $t < \tau$ (рис. 4), то

$$f(t-\tau) \doteq \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt. \quad (16)$$

Положим $\xi = t - \tau$. Тогда $dt = d\xi$. При $t = \tau$ получаем $\xi = 0$, при $t = +\infty$ имеем $\xi = +\infty$. Поэтому соотношение (16) принимает вид

$$f(t-\tau) \doteq \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-p(\xi+\tau)} d\xi = e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-p\xi} d\xi = e^{-p\tau} F(p). \quad \blacktriangleright$$

Пример 8. Найти изображение функции $f(t)$, заданной графически (рис. 5).

◀ Запишем выражение для функции $f(t)$ в следующем виде:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Это выражение можно получить так. Рассмотрим функцию $f_1(t) = \eta(t)$ для $t \geq 0$ (рис. 6 а) и вычтем из нее функцию

$$f_2(t) = 2\eta(t-1) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Разность $f_1(t) - f_2(t)$ будет равна единице для $t \in [0, 1)$ и -1 для $t \geq 1$ (рис. 6 б). К полученной разности прибавим функцию

$$f_3(t) = \eta(t-2) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ 1, & t \geq 2. \end{cases}$$

В результате получим функцию $f(t)$ (рис. 6 в), так что

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Отсюда, пользуясь теоремой запаздывания, найдем

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p}. \blacktriangleright$$

Теорема 10 (смещения). Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого комплексного числа p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0).$$

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} e^{p_0 t} f(t) &\doteq \int_0^{+\infty} e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на показательную функцию $e^{p_0 t}$, например,

$$\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

так что

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad e^{\lambda t} \cos \omega t \doteq \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}.$$

2.1. Свертка функций. Теорема умножения

Пусть функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены и непрерывны для всех t . *Сверткой* $(f * \varphi)(t)$ этих функций называется новая функция от t , определяемая равенством

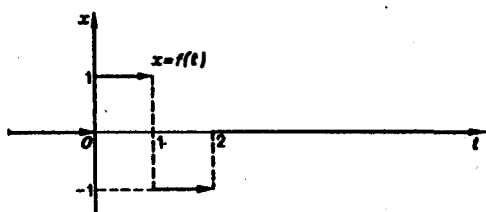


Рис. 5

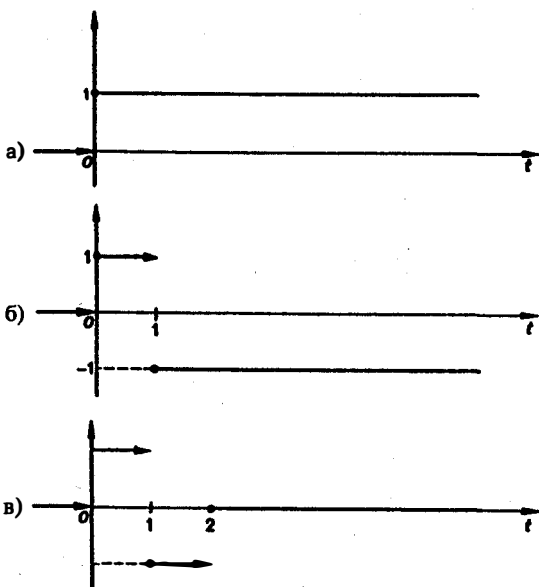


Рис. 6

$$(f * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

(если этот интеграл существует).

Для функций-оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ операция свертки всегда выполнима, причем

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (17)$$

◀ В самом деле, произведение функций-оригиналов $f(\tau) \varphi(t - \tau)$, как функция от τ , является финитной функцией, т.е. обращается в нуль вне некоторого конечного промежутка (в данном случае вне отрезка $0 \leq \tau \leq t$). Для финитных непрерывных функций операция свертки выполнима, и мы получаем формулу (17). ▶

Нетрудно проверить, что операция свертки коммутативна,

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Теорема 11 (умножения). Если $f(t) \doteq F(p)$, $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, то свертка $(f * \varphi)(t)$ имеет изображение $F(p) \cdot \Phi(p)$,

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \doteq F(p) \Phi(p),$$

или

$$(f * \varphi)(t) \doteq F(p) \Phi(p).$$

◀ Нетрудно проверить, что свертка $(f * \varphi)(t)$ функций-оригиналов есть функция-оригинал с показателем роста $s^* = \max\{s_1, s_2\}$, где s_1, s_2 — показатели роста функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ соответственно. Найдем изображение свертки,

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right\} dt. \quad (18)$$

Воспользовавшись тем, что

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \quad (\varphi(t - \tau) \equiv 0 \text{ при } \tau > t),$$

будем иметь

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right\} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^{+\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right\} dt.$$

Меняя порядок интегрирования в интеграле справа (при $\operatorname{Re} p = s > s^*$ такая операция законна) и применяя теорему запаздывания, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \right\} dt &= \int_0^{+\infty} f(\tau) \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-pt} \varphi(t-\tau) dt \right\} d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} \Phi(p) d\tau = \Phi(p) F(p). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, из (18) и (19) находим

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = F(p) \Phi(p), \quad (20)$$

— умножению изображений отвечает свертывание оригиналов,

$$F(p) \cdot \Phi(p) = (f * \varphi)(t). \blacktriangleright$$

Пример 9. Найти изображение функции

$$\psi(t) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau.$$

◀ Функция $\psi(t)$ есть свертка функций $f(t) = t$ и $\varphi(t) = \sin t$. В силу теоремы умножения

$$\psi(t) = F(p) \cdot \Phi(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}. \blacktriangleright$$

Задача. Пусть функция $f(t)$, периодическая с периодом T , есть функция-оригинал. Показать, что ее изображение по Лапласу $F(p)$ дается формулой

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p = s > 0.$$

§3. Отыскание оригинала по изображению

Задача ставится так: дана функция $F(p)$, надо найти функцию $f(t)$, изображением которой является $F(p)$.

Сформулируем условия, достаточные для того, чтобы функция $F(p)$ комплексного переменного p служила изображением.

Теорема 12. Если аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ функция $F(p)$

1) стремится к нулю при $|p| \rightarrow +\infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p = a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$;

2) интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp \quad (\forall a > s_0)$$

сходится абсолютно,

то $F(p)$ является изображением некоторой функции-оригинала $f(t)$.

Задача. Может ли функция $F(p) = \frac{p+1}{p}$ служить изображением некоторой функции-оригинала?

Укажем некоторые способы отыскания оригинала по изображению.

3.1. Отыскание оригинала с помощью таблиц изображений

Прежде всего стоит привести функцию $F(p)$ к более простому, «табличному» виду. Например, в случае, когда $F(p)$ — дробно-рациональная функция аргумента p , ее разлагают на элементарные дроби и пользуются подходящими свойствами преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти оригинал для

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}.$$

◀ Запишем функцию $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p}{(p+1)^2 + 2^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}.$$

Пользуясь теоремой сдвига и свойством линейности преобразования Лапласа, получаем

$$f(t) = e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t. \blacktriangleright$$

Пример 2. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}.$$

◀ Запишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Отсюда $f(t) = t - \sin t$. $\blacktriangleright$

3.2. Использование теоремы обращения и следствий из нее

Теорема 13 (обращения). Если функция $f(t)$ есть функция-оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ — ее изображение, то в любой точке непрерывности функции $f(t)$ выполняется соотношение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (1)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и понимается в смысле главного значения, т. е. как

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{s-iN}^{s+iN} F(p) e^{pt} dp.$$

Формула (1) называется *формулой обращения преобразования Лапласа*, или *формулой Меллина*.

◀ В самом деле, пусть, например, $f(t)$ — кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке $[0, a]$ функция-оригинал с показателем роста s_0 . Рассмотрим функцию $\varphi(t) = f(t) e^{-st}$, где $s > s_0$ — любое.

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям применимости интегральной формулы Фурье, и, следовательно, справедлива формула обращения преобразования Фурье,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{i\xi t} d\xi, \quad (2)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} dt \quad (3)$$

($\varphi(t) \equiv 0$ при $t < 0$). Подставляя в (3) выражение $\varphi(t) = f(t) e^{-st}$, найдем

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\xi t} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(s+i\xi)t} \cdot f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(p), \end{aligned}$$

где $F(p)$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$ при $p = s + i\xi$.

Формулу (2) можно переписать в виде

$$\varphi(t) = f(t) e^{-st} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} F(s + i\xi) d\xi,$$

откуда получаем формулу обращения преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(s+i\xi)t} F(s + i\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad s > s_0. \blacktriangleright$$

Как следствие из теоремы обращения получаем теорему единственности.

Теорема 14. Две непрерывные функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, имеющие одно и то же изображение $F(p)$, тождественны.

Непосредственное вычисление интеграла обращения (1) обычно затруднительно. Отыскание оригинала по изображению упрощается при некоторых дополнительных ограничениях на $F(p)$.

Теорема 15. Пусть изображение $F(p)$ — дробно-рациональная функция с полюсами $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда оригиналом для $F(p)$ будет функция $f(t) \eta(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}), \quad \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

◀ Пусть изображение $F(p)$ — дробно-рациональная функция, $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p)$, $B(p)$ — многочлены относительно p (взаимно простые), причем степень числителя $A(p)$ меньше степени знаменателя $B(p)$, т. к. для всякого изображения должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

Пусть корни знаменателя $B(p)$, являющиеся полюсами изображения $F(p)$, суть $p_1, p_2, \dots, p_n$, а их кратности равны $r_1, r_2, \dots, r_n$ соответственно.

Если число s , фигурирующее в формуле (1), взять большим всех $\operatorname{Re} p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то по формуле обращения, которая в этих условиях применима, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Рассмотрим замкнутый контур Γ_R (рис. 7), состоящий из дуги C_R окружности радиуса R с центром в начале координат и стягивающей ее хорды AB (отрезка прямой $\operatorname{Re} p = s$), и проходимый в положительном направлении, причем радиус R настолько велик, что все полюсы $F(p)$ лежат внутри Γ_R .

По теореме Коши о вычетах при любом R , удовлетворяющем указанному условию, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}),$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{AB} F(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}). \quad (5)$$

Второе слагаемое слева в равенстве (5) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Это следует из леммы Жордана, если в ней заменить p на iz и учесть, что $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Переходя в равенстве (5) к пределу при $R \rightarrow \infty$, мы получим слева

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

а справа — сумму вычетов по всем полюсам функции $F(p)$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}). \blacktriangleright$$

Замечание. Воспользовавшись формулой для вычисления вычетов, найдем, что

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} \left\{ \frac{A(p)}{B(p)} e^{pt} (p - p_k)^{r_k} \right\}. \quad (6)$$

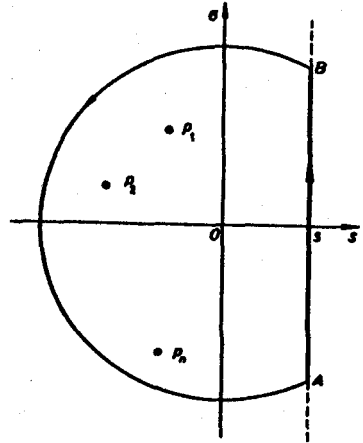


Рис. 7

Если все полюсы $p_1, p_2, \dots, p_n$ — простые, то

$$\operatorname{res}_{p=p_k} (F(p) e^{pt}) = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и формула (6) принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (7)$$

Пример 3. Найти оригинал для функции

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

◀ Функция $F(p)$ имеет простые полюсы $p_1 = i$, $p_2 = -i$. Пользуясь формулой (7), находим

$$f(t) = \operatorname{res}_{p=i} \left\{ \frac{e^{pt}}{p^2 + 1} \right\} + \operatorname{res}_{p=-i} \left\{ \frac{e^{pt}}{p^2 + 1} \right\} = \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 16. Пусть изображение $F(p)$ является аналитической функцией в бесконечно удаленной точке $p = \infty$, причем ее разложение в окрестности $|p| > R$ бесконечно удаленной точки имеет вид

$$F(p) = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}. \quad (8)$$

Тогда оригиналом для $F(p)$ будет функция $f(t)$ $\eta(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}, \quad \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Пример 4.

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Имеем

$$\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+2}},$$

так что в силу (9)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sin t.$$

§ 4. Приложения преобразования Лапласа (операционного исчисления)

4.1. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)} \quad (1)$$

(a_0, a_1, a_2 — действительные числа) и требуется найти решение $x(t)$ уравнения (1) для $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \quad (2)$$

Будем считать, что $f(t)$ есть функция-оригинал. Тогда $x(t)$ — также функция-оригинал. Пусть

$$f(t) \rightleftharpoons F(p), \quad x(t) \rightleftharpoons X(p).$$

По теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$x'(t) \rightleftharpoons p X(p) - x_0, \quad x''(t) \rightleftharpoons p^2 X(p) - p x_0 - x_1.$$

Перейдем в уравнении (1) от оригиналов к изображениям. Имеем

$$a_0 p^2 X(p) - a_0 p x_0 - a_0 x_1 + a_1 p X(p) - a_1 x_0 + a_2 X(p) = F(p),$$

или

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) = F(p) + a_0 x_0 p + a_0 x_1 + a_1 x_0. \quad (3)$$

Это уже не дифференциальное, а алгебраическое уравнение относительно изображения $X(p)$ искомой функции. Его называют *операторным уравнением*. Решая его, найдем операторное решение задачи (1)–(2) —

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 x_0 p + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Оригинал для $X(p)$ будет искомым решением $x(t)$ задачи (1)–(2).

Общий случай линейного дифференциального уравнения n -го порядка ($n \geq 1$) с постоянными коэффициентами от случая $n = 2$ принципиально ничем не отличается.

Приведем общую схему решения задачи Коши



Здесь $\mathcal{L}$ означает применение к I преобразование Лапласа, $\mathcal{L}^{-1}$ — применение к III обратного преобразования Лапласа.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$x''(t) + x(t) = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

« Здесь $f(t) = 2 \cos t \rightleftharpoons \frac{2p}{p^2+1}$. Пусть $x(t) \rightleftharpoons X(p)$. Тогда $x''(t) \rightleftharpoons p^2 X(p) - 1$. Операторное уравнение

$$p^2 X(p) - 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1},$$

откуда $X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{p^2+1}$.

По теореме о дифференцировании изображения

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = - \left(\frac{1}{p^2+1} \right)' \rightleftharpoons t \sin t.$$

Поэтому

$$x(t) = t \sin t + \sin t. \blacktriangleright$$

Формула Дюамеля

В приложениях операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений часто пользуются следствием из теоремы умножения, известным под названием формулы Дюамеля.

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ — функции-оригиналы, причем функция $f(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$, а $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$. Тогда если $f(t) \doteq F(p)$, $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$, то по теореме умножения получаем, что

$$\psi(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \doteq F(p) \Phi(p).$$

Нетрудно проверить, что функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$, причем

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau \right) = f(t) \varphi(0) + \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда, в силу правила дифференцирования оригиналов, учитывая, что $\psi(0) = 0$, получаем формулу Дюамеля

$$f(t) \varphi(0) + \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau \doteq p F(p) \Phi(p). \quad (4)$$

Покажем применение этой формулы.

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение n -го порядка ($n \geq 1$) с постоянными коэффициентами

$$L[x(t)] = f(t) \quad (5)$$

при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (6)$$

(последнее ограничение несущественно: задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями заменой искомой функции).

Если известно решение $x_1(t)$ дифференциального уравнения с той же левой частью и правой частью, равной единице,

$$L[x(t)] = 1 \quad (7)$$

при нулевых начальных условиях

$$x_1(0) = x_1'(0) = \dots = x_1^{(n-1)}(0) = 0, \quad (8)$$

то формула Дюамеля (4) позволяет сразу получить решение исходной задачи (5)–(6).

В самом деле, операторные уравнения, отвечающие задачам (5)–(6) и (7)–(8), имеют соответственно вид

$$A(p) X(p) = F(p) \quad (9)$$

и

$$A(p) X_1(p) = \frac{1}{p}, \quad (10)$$

где $F(p)$ — изображение функции $f(t)$. Из (9) и (10) легко находим

$$X(p) = p X_1(p) F(p).$$

Отсюда по формуле Дюамеля

$$x(t) = f(t) x_1(0) + \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau,$$

или, поскольку $x_1(0) = 0$,

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau. \quad (11)$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

◀ Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Применяя операционный метод, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)} = \int_0^t \operatorname{sh} t \, dt = x_1(t).$$

По формуле (11) получаем решение $x(t)$ исходной задачи:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}(e^t - te^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1 + e^t}{2}. \blacktriangleright$$

4.2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Интегрирование систем осуществляется так же, как и решение одного линейного дифференциального уравнения — путем перехода от системы дифференциальных уравнений к системе операторных уравнений. Решая последнюю как систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций, получаем операторное решение системы. Оригинал для него будет решением исходной системы дифференциальных уравнений.

Пример 3. Найти решение линейной системы

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + 2y(t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = 1$.

◀ Пусть $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq Y(p)$. Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и теоремой о дифференцировании оригиналов, сводим исходную задачу Коши к операторной системе

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -Y(p), \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 2Y(p). \end{cases}$$

Решая последнюю относительно $X(p)$ и $Y(p)$, получаем

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2-2p+2} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - 2 \frac{1}{(p-1)^2+1} \equiv e^t \cos t - 2e^t \sin t,$$

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2-2p+2} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{3}{(p-1)^2+1} \equiv e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

Решение исходной задачи Коши

$$x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t, \quad y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t. \quad \blacktriangleright$$

4.3. Решение интегральных уравнений

Напомним, что интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак интеграла.

Мы рассмотрим лишь уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (12)$$

называемое *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода* с ядром $K(t-\tau)$, зависящим от разности аргументов (уравнение типа свертки). Здесь $\varphi(t)$ — искомая функция, $f(t)$ и $K(t)$ — заданные функции.

Пусть $f(t)$ и $K(t)$ есть функции-оригиналы, $f(t) \equiv F(p)$, $K(t) \equiv \mathcal{K}(p)$. Применяя к обеим частям (12) преобразование Лапласа и, пользуясь теоремой умножения, получим

$$\Phi(p) = F(p) + \mathcal{K}(p) \cdot \Phi(p), \quad (13)$$

где $\Phi(p) \equiv \varphi(t)$. Из (13)

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \mathcal{K}(p)} \quad (\mathcal{K}(p) \neq 1).$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения (12).

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (14)$$

◀ Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (14), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1} \Phi(p),$$

откуда $\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} \equiv t + \frac{1}{6}t^3$.

Функция $\varphi(t) = t + \frac{1}{6}t^3$ является решением уравнения (14) (подстановка $\varphi(t) = t + \frac{1}{6}t^3$ в уравнение (14) обращает последнее в тождество по t). ▶

Замечание. Преобразование Лапласа может быть использовано также при решении некоторых задач для уравнений математической физики.

Преобразование Лапласа

Функция-оригинал $f(t)$	Преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$
1. 1	$\frac{1}{p}$
2. $t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3. $t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}$
4. $e^{\lambda t} \quad (\lambda = a + bi)$	$\frac{1}{p - \lambda}$
5. $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6. $\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7. $\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
8. $\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
9. $e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
10. $e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
11. $\sin(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{e^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
12. $\cos(t - \tau) \quad (\tau > 0)$	$\frac{pe^{-p\tau}}{p^2 + 1}$
13. $J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
14. $J_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$
15. $\operatorname{Erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$

Упражнения

Установите, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

1. $f(t) = e^t \cos t$. 2. $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$. 3. $f(t) = \frac{1}{(t-1)^2}$.

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, найдите изображения следующих функций:

4. $f(t) = \sin^2 t$. 5. $f(t) = \cos mt \cos nt$. 6. $f(t) = t \cos t$.

7. $f(t) = (t+1) \sin 2t$. 8. $f(t) = e^{2t} \sin t$. 9. $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

Найдите изображение следующих функций, заданных графически:

10. Рис. 8 а. 11. Рис. 8 б. 12. Рис. 8 в.

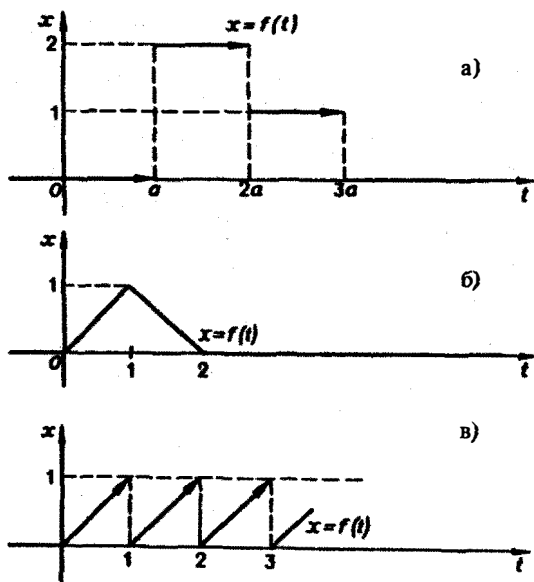


Рис. 8

Найдите оригиналы по заданному изображению:

13. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$. 14. $F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$. 15. $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

16. $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 3}$. 17. $F(p) = \frac{p}{p^3 + 1}$. 18. $F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

Решите задачу Коши для следующих дифференциальных уравнений:

19. $x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 1$. 20. $x'' + x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

21. $x'' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. 22. $x'' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

23. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$. 24. $x'' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

25. $x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Решите задачу Коши для следующих систем дифференциальных уравнений:

26. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$ 27. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

28. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

Решите интегральные уравнения:

29. $\varphi(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$. 30. $\varphi(t) = \sin t + \int_0^t (t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$.

Ответы

1. Да. 2. Да. 3. Нет. 4. $F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$. 5. $F(p) = \frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. 6. $F(p) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$.
 7. $F(p) = \frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$. 8. $F(p) = \frac{1}{(p-2)^2+1}$. 9. $F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+4}$. 10. $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p} (2 - e^{-ap} - e^{-2ap})$.
 11. $F(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$. 12. $F(p) = \frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}$. 13. $f(t) = e^{-2t} \sin t$. 14. $f(t) = (1-t)e^{-t}$. 15. $f(t) = \frac{1}{2}t \sin t$. 16. $f(t) = e^t \cos \sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}e^t \sin \sqrt{2}t$. 17. $f(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) - \frac{1}{3}e^{-t}$.
 18. $f(t) = e^{t-1} \eta(t-1) - \eta(t-1)$. 19. $x(t) = (t+1)e^{-t}$. 20. $x(t) = t$. 21. $x(t) = \cos t$.
 22. $x(t) = 1 - 2 \cos t$. 23. $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2$. 24. $x(t) = \frac{1}{2} \sin t + \sin t$. 25. $x(t) = t - \sin t$.
 26. $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$. 27. $x(t) = e^t - te^t$, $y(t) = te^t$. 28. $x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$,
 $y(t) = \frac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}$. 29. $\varphi(t) = te^t$. 30. $\varphi(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. Основные понятия. Примеры

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение вида

$$\mathcal{F} \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0, \quad (1)$$

связывающее независимые переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, искомую функцию $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и ее частные производные (наличие хотя бы одной производной обязательно). Здесь $k_1, k_2, \dots, k_n$ — неотрицательные целые числа, такие, что $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в уравнение частных производных. Так, если x, y — независимые переменные, $u = u(x, y)$ — искомая функция, то

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

— дифференциальное уравнение 1-го порядка;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$$

— дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Для упрощения записи пользуются также следующими обозначениями:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \dots$$

Пусть имеем дифференциальное уравнение с частными производными (1) порядка m . Обозначим через $C^m(D)$ множество функций, непрерывных в области D вместе со всеми производными до порядка m включительно.

Определение. Решением дифференциального уравнения (1) в некоторой области D изменения независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется всякая функция

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^m(D)$ такая, что подстановка этой функции и ее производных в уравнение (1) обращает последнее в тождество по $x_1, x_2, \dots, x_n$ в области D .

Пример 1. Найти решение $u = u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

◀ Равенство (2) означает, что искомая функция u не зависит от x , но может быть любой функцией от y ,

$$u = \varphi(y). \quad (3)$$

Таким образом, решение (3) уравнения (2) содержит одну произвольную функцию. Это — общее решение уравнения (2). ▶

Пример 2. Найти решение $u = u(x, y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (4)$$

◀ Положим $\frac{\partial u}{\partial y} = v$. Тогда уравнение (4) примет вид $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Его общим решением будет произвольная функция $v = \omega(y)$. Поскольку $v = \frac{\partial u}{\partial y}$, приходим к уравнению $\frac{\partial u}{\partial y} = \omega(y)$. Интегрируя по y (считая x параметром), получим

$$u(x, y) = \int \omega(y) dy + g(x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция. Так как $\omega(y)$ — произвольная функция, то и интеграл от нее также является произвольной функцией; обозначим его через $f(y)$. В результате получим решение уравнения (4) в виде

$$u(x, y) = f(y) + g(x) \quad (5)$$

($f(y), g(x)$ — произвольные дифференцируемые функции).

Решение (5) уравнения с частными производными 2-го порядка (4) содержит уже две произвольные функции. Его называют общим решением уравнения (4), так как всякое другое решение уравнения (4) может быть получено из (5) подходящим выбором функций f и g . ▶

Мы видим, таким образом, что уравнения с частными производными имеют целые семейства решений. Однако существуют уравнения с частными производными, множества решений которых весьма узки и, в некоторых случаях, даже пусты.

Пример 3. Множество действительных решений уравнения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

исчерпывается функцией $u(x, y) = \text{const}$, а уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0$$

вовсе не имеет действительных решений.

Мы не ставим пока вопрос об отыскании частных решений. Позже будет выяснено, какие дополнительные условия нужно задать, чтобы с их помощью можно было выделить частное решение, т. е. функцию, удовлетворяющую как дифференциальному уравнению, так и этим дополнительным условиям.

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Свойства их решений

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных, входящих в уравнение; в противном случае уравнение называется *нелинейным*.

Пример 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{-x^2}$$

— линейное уравнение; уравнения

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0, \quad u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y$$

— нелинейные.

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции двух независимых переменных x, y в общем случае имеет вид

$$\boxed{A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y),} \quad (1)$$

где $A(x, y), B(x, y), \dots, c(x, y), f(x, y)$ — функции переменных x, y , заданные в некоторой области D плоскости xOy . Если $f(x, y) \equiv 0$ в D , то уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Обозначив левую часть уравнения (1) через $L[u]$, запишем (1) в виде

$$\boxed{L[u] = f(x, y).} \quad (2)$$

Соответствующее однородное уравнение запишется так:

$$\boxed{L[u] = 0.} \quad (3)$$

Здесь L — линейный дифференциальный оператор, определенный на линейном пространстве $C^2(D)$ функций $u = u(x, y)$.

Пользуясь свойством линейности оператора L , легко убедиться в справедливости следующих теорем, выражающих свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений с частными производными.

Теорема 1. Если $u(x, y)$ есть решение линейного однородного уравнения (3), то $cu(x, y)$, где c — любая постоянная, есть также решение уравнения (3).

Теорема 2. Если $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — решения линейного однородного уравнения (3), то сумма $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ есть также решение этого уравнения.

Следствие. Если каждая из функций $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_k(x, y)$ является решением уравнения (3), то линейная комбинация

$$c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) + \dots + c_k u_k(x, y),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_k$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

В отличие от обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения, имеющего конечное число линейно независимых частных решений, линейная

комбинация которых дает общее решение этого уравнения, уравнение с частными производными может иметь бесконечное множество линейно независимых частных решений.

Пример 2. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

имеет общее решение $u = \varphi(x)$, так что решениями его будут, например, функции $1, x, \dots, x^n, \dots$.

В соответствии с этим в линейных задачах для уравнений с частными производными нам придется иметь дело не только с линейными комбинациями конечного числа решений, но и с рядами $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y)$, членами которых являются произведения постоянных c_n на частные решения $u_n(x, y)$ дифференциального уравнения.

Возможны случаи, когда функция $u(x, y; \lambda)$ при всех значениях параметра λ из некоторого интервала (λ_0, λ_1) , конечного или бесконечного, является решением уравнения (3). В этом случае говорят, что решения уравнения зависят от непрерывно меняющегося параметра λ . Если теперь взять функцию $C(\lambda)$ такую, что первые и вторые производные интеграла

$$U(x, y) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} C(\lambda) u(x, y; \lambda) d\lambda$$

по x и по y могут быть получены с помощью дифференцирования под знаком интеграла, то этот интеграл также будет решением уравнения (3).

Для линейного неоднородного уравнения

$$L[u] = f \tag{4}$$

справедливы следующие предложения.

Теорема 3. Если $u(x, y)$ есть решение линейного неоднородного уравнения (4), а $v(x, y)$ — решение соответствующего однородного уравнения (3), то сумма $u + v$ есть решение неоднородного уравнения (4).

Теорема 4 (принцип суперпозиции). Если $u_1(x, y)$ — решение уравнения $L[u] = f_1$, а $u_2(x, y)$ — решение уравнения $L[u] = f_2$, то $u_1 + u_2$ — решение уравнения $L[u] = f_1 + f_2$.

§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Определение. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

в некоторой области Ω на плоскости xOy называется

1) *гиперболическим* в Ω , если

$$\Delta = B^2 - AC > 0 \quad \text{в } \Omega;$$

2) *параболическим* в Ω , если

$$\Delta = B^2 - AC \equiv 0 \quad \text{в } \Omega;$$

3) *эллиптическим* в Ω , если

$$\Delta = B^2 - AC < 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Пользуясь этим определением, легко проверить, что уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

— гиперболические при всех x и y , уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

— параболическое при всех x и y , а уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— эллиптическое при всех x и y . Уравнение

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— эллиптическое при $y > 0$, параболическое на линии $y = 0$ и гиперболическое в полуплоскости $y < 0$.

Можно показать, что при определенных условиях на коэффициенты уравнения (1) существует неособая замена независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (\varphi, \psi \in C^2),$$

с помощью которой уравнение (1) преобразуется к более простому, *каноническому* виду, своему для каждого типа уравнения.

Уравнение гиперболического типа ($\Delta > 0$) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

(два канонических вида уравнений гиперболического типа).

Уравнение параболического типа ($\Delta \equiv 0$) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

(канонический вид уравнения параболического типа).

Уравнение эллиптического типа ($\Delta < 0$) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

(канонический вид уравнения эллиптического типа). Здесь F и Φ — некоторые функции, зависящие от искомой функции u , ее первых производных $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ и независимых переменных ξ , η . Вид функций F и Φ определяется исходным уравнением (1).

В некоторых случаях каноническая форма уравнения позволяет найти общее решение исходного уравнения.

Как правило, приведение уравнения (1) к каноническому виду путем замены независимых переменных имеет локальный характер, т. е. осуществимо лишь в некоторой достаточно малой окрестности рассматриваемой точки $M_0(x_0, y_0)$.

Когда число n независимых переменных больше двух, также различают уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов. Например, при $n = 4$ простейшая каноническая форма таких уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \quad (\text{гиперболический тип}), \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \quad (\text{параболический тип}), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \quad (\text{эллиптический тип}). \end{aligned}$$

Здесь $u = u(x, y, z, t)$.

Замечание. В общем случае, когда число независимых переменных больше двух, приведение линейного уравнения с переменными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, x_2, \dots, x_n)u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

к каноническому виду возможно только в данной точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и невозможно в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Мы ограничимся рассмотрением линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. К таким уравнениям приводит большое количество различных физических задач.

Так, колебательные процессы различной природы (колебания струн, мембран, акустические колебания газа в трубах, электромагнитные колебания и т. д.) описываются уравнениями гиперболического типа. Простейшим из таких уравнений является уравнение колебаний струны (одномерное волновое уравнение):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t). \quad (2)$$

Здесь x — пространственная координата, t — время, $a^2 = \frac{T}{\rho}$, где T — натяжение струны, ρ — ее линейная плотность.

Процессы теплопроводности и диффузии приводят к уравнениям параболического типа. В одномерном случае простейшее уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t). \quad (3)$$

Здесь $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, где ρ — плотность среды, c — удельная теплоемкость, k — коэффициент теплопроводности.

Наконец, установившиеся процессы, когда искомая функция не зависит от времени, определяются уравнениями эллиптического типа, типичным представителем которых является уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y). \quad (4)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что решением уравнения (2) является всякая функция $u(x, t)$ вида

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где $\varphi(\xi), \psi(\eta) \in C^2$.

Можно показать, что решениями уравнения (3) являются функции вида

$$u(x, t; \lambda) = Ae^{-a^2\lambda^2 t} \sin(\lambda x + \alpha)$$

(A, α — произвольные постоянные, λ — числовой параметр). Интегрируя решение $u(x, t; \lambda) = e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda x$ уравнения (3) по параметру λ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим так называемое фундаментальное решение $U(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ уравнения теплопроводности.

Наконец, нетрудно убедиться, что действительные функции $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$, определяемые из соотношения

$$(x + iy)^n = P_n(x, y) + iQ_n(x, y),$$

являются решениями уравнения Лапласа (4) для $n = 0, 1, 2, \dots$. Этот последний результат есть частный случай общего утверждения, что и действительная и мнимая части аналитической функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

комплексного переменного $z = x + iy$ являются решениями уравнения Лапласа (4).

В силу линейности уравнения (4) ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x, y)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Q_n(x, y)$ тоже будут решениями уравнения (4), если они сходятся равномерно, как и ряды, полученные из них двукратным почленным дифференцированием по каждому из аргументов x, y .

Таким образом, для простейшей — канонической — формы уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов мы располагаем о решениях этих уравнений некоторой информацией.

§ 4. Постановка основных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Для полного описания того или иного физического процесса мало иметь только дифференциальное уравнение процесса, надо еще задать начальное состояние этого процесса (начальные условия) и режим на границе S той области Ω , в которой процесс происходит (граничные условия). Это обусловлено неединственностью решения дифференциальных уравнений.

Пример. Общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

имеет вид $u(x, y) = f(x) + g(y)$, где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные дифференцируемые функции. Поэтому чтобы выделить решение, описывающее данный физический процесс, необходимо задать дополнительные условия.

Различают три основных типа задач для дифференциальных уравнений с частными производными (число независимых переменных равно n):

а) *задача Коши* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область Ω совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, граничные условия отсутствуют;

б) *краевая задача* для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе S области Ω , начальные условия отсутствуют;

в) *смешанная задача* для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные и граничные условия, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Упражнения

Найдите общее решение уравнения ($u = u(x, y)$):

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad 2. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x}. \quad 3. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}.$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y. \quad 5. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad 6. \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0.$$

7. Считая $u = u(x, y, z)$, решите уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

Найдите области гиперболичности, параболичности и эллиптичности следующих уравнений:

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad 9. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + 1.$$

Ответы

1. $u(x, y) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)e^y$. 2. $u(x, y) = \Phi_1(x)e^{y^2} + \Phi_2(x)$. 3. $u(x, y) = e^{x+y} + \Phi_1(x)y + \Phi_2(x)$. 4. $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \Phi_1(x)y + \Phi_2(x)$. 5. $u(x, y) = \frac{\Phi_1(y)}{x} + \Phi_2(x)$. 6. $u(x, y) = \Phi_1(x)y^{n-1} + \Phi_2(x)y^{n-2} + \dots + \Phi_n(x)$. 7. $u(x, y, z) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, z) + \Phi_3(y, z)$. 8. Уравнение всюду гиперболическое. 9. В области $x^2 - y > 0$ уравнение гиперболическое, в области $x^2 - y < 0$ уравнение эллиптическое, кривая $y = x^2$ состоит из точек параболичности.

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний (задача о колебаниях струны, мембраны, электромагнитных колебаниях и т. д.). Характерной особенностью процессов, описываемых гиперболическими уравнениями, является конечная скорость распространения возмущений.

Рассмотрим, например, уравнения электромагнитного поля. Законы классической теории электромагнетизма определяются системой уравнений Максвелла. В простейшем случае непроводящей, однородной и изотропной среды при отсутствии зарядов и токов эта система имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ϵ , μ — коэффициенты электрической и магнитной проницаемости (ϵ , $\mu = \text{const}$; c — скорость света в вакууме).

Дифференцируя (1) по t , получим

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Заменяя $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ из (2), найдем

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (5)$$

Известно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}.$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то из (5) имеем

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}.$$

Итак, для векторного поля $\mathbf{E}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \Delta \mathbf{E}.$$

Это одно из основных уравнений математической физики. Оно называется *волновым*.

Нетрудно убедиться, что векторное поле $\mathbf{H}$ удовлетворяет точно такому же уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \Delta \mathbf{H}.$$

Таким образом, каждая из координат E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяет в рассматриваемом простейшем случае волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (6)$$

Это уравнение гиперболического типа. Здесь $a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — скорость, так что электромагнитные процессы распространяются в непроводящей среде со скоростью $a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, в частности, в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$) — со скоростью света c . Если $u = u(x, y, t)$, то уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

в случае, когда $u = u(x, t)$, получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Именно с этого одномерного волнового уравнения (уравнения колебаний струны) мы и начнем изучение гиперболических уравнений.

Струной мы называем идеально гибкую, тонкую нить, упругую лишь тогда, когда она натянута, и оказывающую сопротивление растяжению.

Пусть струна колеблется в плоскости xOz и пусть вектор смещения $\mathbf{u}$ в любой момент t времени перпендикулярен оси Ox . Тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны.

Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать величиной $(u_x)^2$ по сравнению с единицей. Тогда, если линейная плотность струны $\rho = \text{const}$ и внешние силы отсутствуют, уравнение свободных колебаний однородной струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \frac{T}{\rho}$, а T — натяжение струны.

§ 1. Решение задачи Коши (начальной задачи) для неограниченной струны

1.1. Метод бегущих волн. Решение Даламбера

Займемся интегрированием уравнения свободных колебаний однородной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ — смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u = u(x, t)$ дает форму струны в момент времени t .

Введем новые независимые переменные ξ, η по формулам

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (2)$$

В переменных ξ, η уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

В этом легко убедиться, вычислив производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

и подставив полученные выражения в уравнение (1).

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

интегрируется весьма просто. Записав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

будем иметь $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi)$, где $\omega(\xi)$ — произвольная функция. Интегрируя полученное уравнение по ξ (η рассматривается как параметр), найдем, что

$$u = \int \omega(\xi) d\xi + \theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ — произвольная функция аргумента η . Полагая $\int \omega(\xi) d\xi = \theta_1(\xi)$, получим

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к исходным переменным x, t , получим

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (3), где θ_1 и θ_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, есть решение уравнения (1). Это *общее решение* (*решение Даламбера*) волнового уравнения (1): всякое решение уравнения (1) может быть представлено в виде (3) при соответствующем выборе функций θ_1 и θ_2 . В частности, каждое слагаемое в формуле (3) также является решением уравнения (1).

Физический смысл решения

$$u = \theta_1(x - at) \quad (4)$$

таков. При $t = 0$ имеем $u = \theta_1(x)$ (рис. 1). Если наблюдатель, выйдя в начальный момент $t = 0$ из точки $x = c$ оси Ox , передвигается по этой оси в положительном направлении со скоростью a , так что для абсциссы его положение имеем $\frac{dx}{dt} = a$, откуда $x = at + c$ и $x - at = c$, то для него $u = \theta_1(x - at) = \theta_1(c) = \text{const}$. Иными словами, для такого наблюдателя смещение u струны, определяемое формулой (4), будет все время постоянным и равным $\theta_1(c)$.

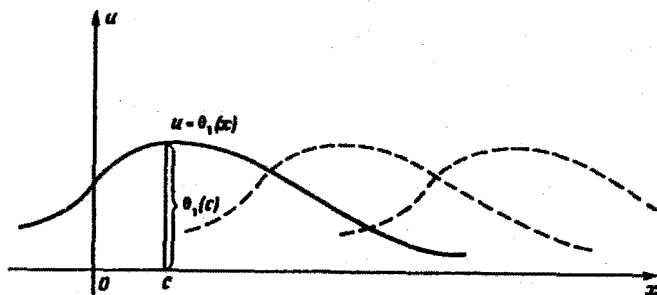


Рис. 1

Тем самым, решение (4) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси Ox со скоростью a . Если за $\theta_1(\xi)$ взять $\sin \xi$, то будем иметь *синусоидальную* волну.

Решение

$$u = \theta_2(x + at)$$

представляет обратную волну, которая распространяется со скоростью a в отрицательном направлении оси Ox .

Таким образом, решение (3) является суммой прямой и обратной волн.

Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени t : сначала строим кривые $u = \theta_1(x)$ и $u = \theta_2(x)$, изображающие прямую и обратную волны в начальный момент времени $t = 0$, а затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно на величину $at > 0$ в разные стороны, кривую $u = \theta_1(x)$ — вправо, $u = \theta_2(x)$ — влево. Чтобы получить график струны, достаточно построить алгебраическую сумму ординат передвинутых кривых.

1.2. Решение задачи Коши для неограниченной струны

Задача Коши для неограниченной струны состоит в следующем: найти функцию $u(x, t) \in C^2$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (5)$$

где $\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$. В начальный момент $t = 0$ функция $\varphi_0(x)$ определяет форму струны, а функция $\varphi_1(x)$ задает распределение скоростей $\frac{\partial u}{\partial t}$ вдоль струны.

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (3)$$

Определим функции θ_1 и θ_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (5). Имеем

$$u(x, 0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \varphi_1(x). \quad (7)$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Из равенств

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x), \quad \theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C$$

находим

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}.$$

Подставляя найденные выражения для θ_1 и θ_2 в формулу (3), получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi_0(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \varphi_0(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha,$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha \quad (8)$$

— формулу Даламбера.

Нетрудно проверить, что если $\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\varphi_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, то функция $u(x, t)$, определяемая формулой (8), удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (5), т. е. решает поставленную задачу.

Полученное решение единственно. В самом деле, если бы существовало другое решение задачи (1), (5), то оно также представлялось бы формулой (8) и, значит, совпадало с построенным решением.

Задача. Пользуясь формулой Даламбера для решения задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

показать, что $u(x, t)|_{x=0} = 0$ в случае нечетности обеих функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а в случае их четности $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0$.

1.3. Область зависимости

Из формулы Даламбера (8) видно, что значение решения $u(x, t)$ в точке P с координатами (x, t) зависит только от значений функций φ_0 и φ_1 в точках отрезка $\gamma_P = [x - at, x + at]$ оси Ox .

Отрезок γ_P оси Ox называют *областью зависимости* для точки P (рис. 2).

Фактически значения φ_0 входят в решение только в концах этого отрезка, в то время, как значения φ_1 берутся на всем отрезке γ_P .

Говорят также, что решение $u(P)$ «не замечает» данных задачи вне γ_P .

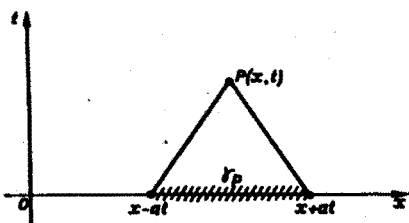


Рис. 2

§ 2. Исследование формулы Даламбера

Рассмотрим два частных случая, которые дают представление о поведении решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Случай 1. Пусть $\varphi_1(x) \equiv 0$, а график функции $\varphi_0(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 3 а. Будем считать для простоты, что $a=1$. Тогда формула Даламбера примет вид

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-t) + \varphi_0(x+t)}{2}.$$

Чтобы получить график решения $u(x, t)$, рассматриваемого как функция от x при каком-нибудь фиксированном положительном t , поступаем так: сначала начертим два одинаковых совпадающих графика, которые получаются из графика $\varphi_0(x)$ уменьшением вдвое каждой ординаты (пунктир на верхнем рисунке). Потом один из этих графиков передвинем, как

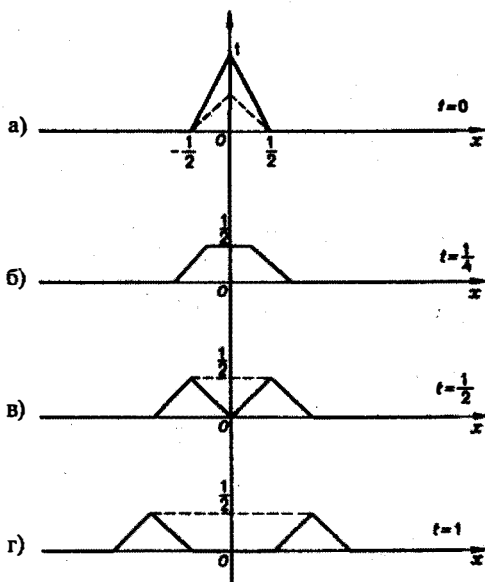


Рис. 3

целое, на t вправо по направлению положительной полуоси Ox , а другой — на t влево. После этого построим новый график, у которого ордината при каждом значении x равна сумме ординат двух передвинутых графиков. На рис. 3 б, в и 3 г этим способом построены графики $u(x, \frac{1}{4})$, $u(x, \frac{1}{2})$, $u(x, 1)$ соответственно.

Мы видим, что при выбранных начальных условиях в каждой точке струны после прохождения обеих волн (для точек, лежащих вне области начального смещения, — после прохождения только одной) наступает покой.

Случай 2. Пусть $\varphi_0(x) \equiv 0$, а

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(рис. 4).

В этом случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение (8) принимает вид (для простоты считаем $a = 1$):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\alpha) d\alpha.$$

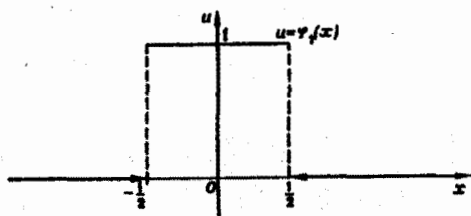


Рис. 4

Для каждого фиксированного x решение $u(x, t)$ будет равно нулю до тех пор, пока пересечение интервала $(x-t, x+t)$ с интервалом $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, где $\varphi_1(t) \neq 0$, пусто; $u(x, t)$ будет изменяться в течение того промежутка времени, пока увеличивающийся интервал $(x-t, x+t)$ будет покрывать все большую часть интервала $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. После того, как интервал $(x-t, x+t)$ заключит внутрь себя интервал $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, величина $u(x, t)$ будет оставаться неизменной и равной

$$\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_1(\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

Чтобы получить график, представляющий форму струны при различных t , поступаем следующим образом. Обозначим через $\Phi(z)$ какую-нибудь первообразную функцию для $\varphi_1(z)$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+t) - \Phi(x-t)].$$

Для построения графика $u(x, t)$ вычерчиваем графики функций $\frac{1}{2}\Phi(x)$ и $-\frac{1}{2}\Phi(x)$, а затем каждый из этих графиков передвигаем, как целое, на расстояние t вдольось Ox , первый график влево, а второй — вправо. Сложив ординаты передвинутых графиков, получим график функции $u(x, t)$ (рис. 5).

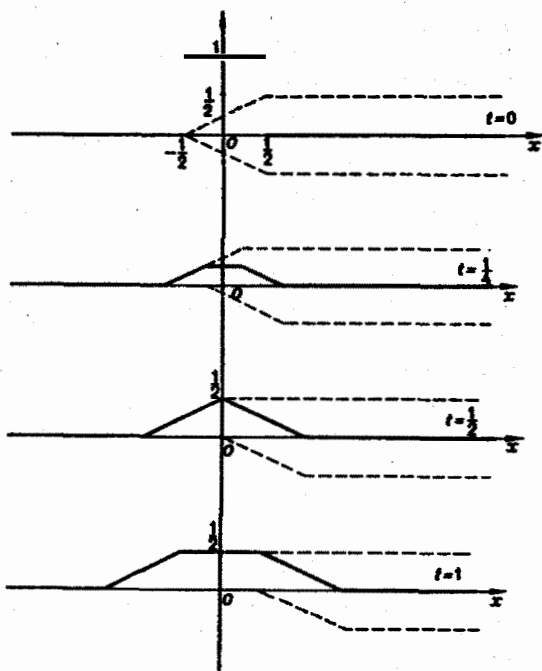


Рис. 5

По истечении достаточно большого промежутка времени каждая точка струны переместится и получит стационарное отклонение $u_{ст}$, определяемое интегралом (9). В этом случае мы имеем, следовательно, остаточную деформацию (гистерезис).

§ 3. Корректность постановки задачи.

Пример Адамара некорректно поставленной задачи

В связи с изучением физически детерминированных явлений вводится понятие корректности задачи.

Определение. Говорят, что математическая задача *поставлена корректно*, если

- 1) решение задачи существует в каком-то классе M_1 функций;
- 2) решение задачи единственно в некотором классе M_2 функций;
- 3) решение задачи непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных условий, коэффициентов уравнения и т. д.).

Множество $M_1 \cap M_2$ функций называется *классом корректности* рассматриваемой математической задачи.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что задача Коши

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

поставлена корректно, если функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов и имеет ограниченную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0) .

Рассмотрим задачу Коши для неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

$$\varphi_0(x) \in C^2(\mathbb{R}^1), \quad \varphi_1(x) \in C^1(\mathbb{R}^1).$$

Выше мы установили, что решение задачи (1)–(2)

- 1) существует и
- 2) единственно.

Покажем, что при непрерывном изменении начальных условий это решение изменяется непрерывно.

Теорема 1. *Каков бы ни был отрезок $[0, t_0]$ изменения времени t и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для любых двух решений $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ уравнения (1), отвечающих начальным условиям*

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x),$$

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\varphi}_1(x),$$

для $0 \leq t \leq t_0$, $-\infty < x < +\infty$, выполняется неравенство

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon,$$

если только

$$|\varphi_0(x) - \tilde{\varphi}_0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \tilde{\varphi}_1(x)| < \delta, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3)$$

(малое изменение начальных условий влечет за собой малое изменение решений).

◀ Функции $u(x, t)$ и $\tilde{u}(x, t)$ связаны со своими начальными условиями формулой Даламбера, так что

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) = & \frac{\tilde{\varphi}_0(x - at) - \varphi_0(x - at)}{2} + \\ & + \frac{\tilde{\varphi}_0(x + at) - \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} (\tilde{\varphi}_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)) d\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq & \frac{|\tilde{\varphi}_0(x - at) - \varphi_0(x - at)|}{2} + \\ & + \frac{|\tilde{\varphi}_0(x + at) - \varphi_0(x + at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\tilde{\varphi}_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)| d\alpha, \end{aligned}$$

или, используя соотношения (3),

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} 2at \delta \leq \delta(1 + t_0).$$

Если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$, то из последнего неравенства получаем

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon$$

для всех $0 \leq t \leq t_0$, $-\infty < x < +\infty$. ▶

Таким образом, для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

задача Коши поставлена корректно.

Пример Адамара некорректно поставленной задачи

Рассмотрим задачу Коши: найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4)$$

удовлетворяющее при $t = 0$ условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{n} \sin nx \quad (6)$$

(n — натуральное число).

◀ Легко проверить, что решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \sin nx. \quad (7)$$

Так как

$$\left| \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \sin nx \right| \leq \frac{1}{n},$$

то при достаточно большом n абсолютная величина $u_t(x, 0)$ как угодно мала при любом x . Вместе с тем, как показывает формула (7), решение $u(x, t)$ рассматриваемой задачи будет принимать как угодно большие по абсолютной величине значения при произвольно малом $t > 0$, если n достаточно велико.

Допустим, что мы нашли решение $u_0(x, t)$ задачи Коши для уравнения (4) при некоторых начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Тогда для начальных условий

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) + \frac{1}{n} \sin nx$$

решением задачи Коши будет функция

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \cdot \sin nx.$$

Отсюда видно, что малое изменение начальных условий может повлечь за собой как угодно большие изменения решения задачи Коши и притом в любой близости от линии начальных значений $t = 0$.

Следовательно, задача Коши для уравнения Лапласа является некорректно поставленной. ▶

Рассмотрим теперь гиперболическое уравнение

$$u_{xy} = 0 \quad (8)$$

и поставим следующую задачу: найти решение $u(x, y)$ уравнения (8) в прямоугольнике Q со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 6), принимающее на границе Γ этого прямоугольника заданные граничные значения.

Эта (граничная) задача, вообще говоря, не имеет решения. В самом деле, обратимся к общему решению уравнения (8)

$$u(x, y) = f(x) + g(y)$$

(здесь f и g — произвольные дифференцируемые функции). Так как производная $u_y = g'(y)$ должна принимать одинаковые значения в соответствующих противоположащих точках сторон $x = \text{const}$ прямоугольника Q , а производная $u_x = f'(x)$ — в соответствующих противоположащих точках сторон $y = \text{const}$, то мы не можем произвольно задавать граничные значения.

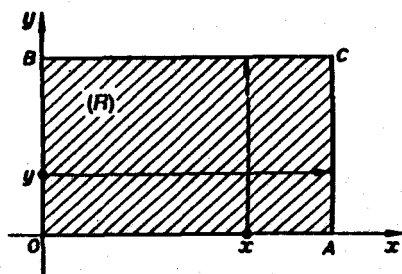


Рис. 6

Значения функции $u(x, y)$ можно задавать произвольно только на двух смежных сторонах прямоугольника (например, на OA и на OB), а не на всей его границе Γ , так что для гиперболического уравнения поставленная граничная задача оказывается переопределенной.

Замечание 1. Подчеркнем, что волновое уравнение и уравнение Лапласа являются уравнениями разных типов: волновое уравнение имеет гиперболический тип, а уравнение Лапласа — эллиптический.

Замечание 2. Некорректно поставленные задачи часто встречаются в приложениях. К их числу относятся многие хорошо известные математические задачи, в частности, приведенная выше задача Коши для уравнения Лапласа связана с обратной задачей гравиметрии об определении формы тела по создаваемой им аномалии силы тяжести.

Метод Фурье

Метод Фурье, или *метод разделения переменных*, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Рассмотрим этот метод, обратившись к простейшей задаче о свободных колебаниях однородной струны длины l , закрепленной на концах.

§ 4. Свободные колебания однородной струны, закрепленной на концах

Задача о свободных колебаниях однородной струны с закрепленными концами сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Задачу (1)–(3) называют *смешанной*: она содержит и начальные и граничные условия.

Решение задачи начнем с поиска частных решений уравнения (1) вида

$$u(x, t) = T(t) X(x). \quad (4)$$

При этом будем предполагать, что каждое из них удовлетворяет граничным условиям (2), но не равно нулю тождественно. Подставляя функцию $u(x, t)$ в форму (4) в уравнение (1), получаем

$$T''(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Последнее равенство (его левая часть зависит только от t , а правая — только от x) возможно лишь в том случае, если обе его части не зависят ни от t , ни от x , т. е. равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную (разделения) через $(-\lambda)$,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (5)$$

Из равенства (5) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (7)$$

Граничные условия (2) дают

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l) T(t) = 0,$$

откуда ($T(t) \not\equiv 0$) следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (8)$$

Чтобы получить нетривиальные решения $u(x, t)$ вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (7)–(8), а также сами эти решения. Такие значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* задачи (7)–(8). Сформулированную таким образом задачу называют *задачей Штурма—Лиувилля*.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (7)–(8). Рассмотрим отдельно три случая, когда $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

1. При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий (8), получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$, т. е. при $\lambda < 0$ нетривиальных решений задачи не существует.

2. При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия (8) дают

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$, и следовательно, $X(x) \equiv 0$, т.е. при $\lambda = 0$ нетривиальных решений задачи (7)–(8) также не существует.

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Потребовав выполнение граничных условий (8), получим

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} l & \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = 0,$$

или $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, откуда $\sqrt{\lambda} l = \pi k$, где k — любое целое число. Таким образом, нетривиальные решения задачи (7)–(8) возможны лишь при

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Это — собственные значения задачи (7)–(8).

Из первого уравнения системы (10) получаем, что $C_1 = 0$ и, значит, функции

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad k = 1, 2, \dots$$

будут собственными функциями задачи. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, который мы выбрали равным единице.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные. Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых A_k и B_k , $k = 1, 2, \dots, n, \dots$

В силу линейности и однородности уравнения (1) всякая конечная сумма решений будет также решением уравнения (1). То же справедливо и для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (11)$$

если он сходится равномерно и его можно дважды почленно дифференцировать по x и по t . Поскольку каждое слагаемое в ряде (11) удовлетворяет граничным условиям (2), то этим условиям будет удовлетворять и сумма $u(x, t)$ этого ряда. Остается определить в формуле (11) постоянные A_k и B_k так, чтобы выполнялись и начальные условия (3).

Продифференцируем формально ряд (11) по t . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} \left(-A_k \sin \frac{k\pi a}{l} t + B_k \cos \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (12)$$

Полагая в соотношениях (11) и (12) $t = 0$, в силу начальных условий (3) получим

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} B_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (13)$$

Формулы (13) представляют собой разложения заданных функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$.

Коэффициенты разложений (13) вычисляются по известным формулам

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Теорема 2. Если $\varphi_0(x) \in C^3[0, l]$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0,$$

а $\varphi_1(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет условию

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0,$$

то сумма $u(x, t)$ ряда (11), где A_k и B_k определяются формулами (14), имеет в области $\{0 < x < l, t > 0\}$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно по каждому из аргументов, удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и начальным условиям (3), т. е. является решением задачи (1)–(3).

Пример. Найти закон свободных колебаний однородной струны длины l , закрепленной на концах, если в начальный момент $t = 0$ струна имеет форму параболы $hx(l - x)$ ($h > 0$ — const), а начальная скорость отсутствует.

◀ Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = hx(l - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Применяя метод Фурье, ищем нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), в виде

$$u(x, t) = T(t) X(x). \quad (4)$$

Подставляя $u(x, t)$ в форму (4) в уравнение (1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (5)$$

откуда

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (7)$$

причем в силу (2)

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (8)$$

Как было установлено выше, собственные значения задачи (7)–(8)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t.$$

Будем искать решение исходной задачи в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (9)$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n воспользуемся начальными условиями (3). Имеем

$$u|_{t=0} = hx(l-x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 = \frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (11)$$

Из формулы (11) сразу получаем, что $B_n = 0$ для любого n , а из (10)

$$A_n = \frac{2h}{l} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

откуда, интегрируя по частям дважды, находим

$$A_{2m+1} = \frac{8l^2 h}{\pi^3 (2m+1)^3}, \quad A_{2m+2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

Подставляя найденные значения A_n и B_n в ряд (9), получим решение поставленной задачи

$$u(x, t) = \frac{8l^2 h}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cos \frac{(2m+1)\pi a}{l} t \sin \frac{(2m+1)\pi}{l} x. \blacktriangleright$$

Замечание. Если начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не удовлетворяют условиям теоремы 2, то дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)–(3) может и не существовать. Однако если $\varphi_0(x) \in C^1[0, l]$ и $\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0$, а $\varphi_1(x) \in C^0[0, l]$ и $\varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$, то ряд (11) сходится равномерно при $0 \leq x \leq l$ и любом t и определяет непрерывную функцию $u(x, t)$. В этом случае можно говорить лишь об обобщенном решении задачи.

Каждая из функций

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

определяет так называемые собственные колебания струны, закрепленной на концах. При собственных колебаниях, отвечающих $k = 1$, струна издает основной, самый низкий тон. При колебаниях, соответствующих большим k , она издает более высокие тоны, обертоны. Записав $u_k(x, t)$ в виде

$$u_k(x, t) = H_k \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \left(\frac{k\pi a}{l} t + \alpha_k \right),$$

заключаем, что собственные колебания струны — стоячие волны, при которых точки струны совершают гармонические колебания с амплитудой $H_k \sin \frac{k\pi}{l} x$, частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ и фазой α_k .

Мы рассмотрели случай свободных колебаний однородной струны, закрепленной на концах. Рассмотрим теперь случай других граничных условий. Пусть, например,

левый конец струны закреплен, $u(0, t) = 0$, а правый конец $x = l$ упруго связан со своим положением равновесия, что соответствует условию $u_x(l, t) = -hu(l, t)$ ($h > 0$ — const). Нетривиальное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее поставленным граничным условиям, будем опять искать в виде

$$u(x, t) = T(t) X(x).$$

В результате подстановки $u(x, t) = T(t) X(x)$ в уравнение (1) приходим к следующей задаче о собственных значениях: найти такие значения параметра λ , для которых дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (15)$$

при граничных условиях

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + h X(l) = 0 \quad (16)$$

имеет нетривиальные решения $X(x)$.

Общее решение уравнения (15) имеет вид ($\lambda > 0$)

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Первое из граничных условий (16) дает $C_1 = 0$, так что функциями $X(x)$ с точностью до постоянного множителя являются $\sin \sqrt{\lambda} x$.

Из второго граничного условия (16) имеем

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (17)$$

Положим $\lambda = \nu^2$. Тогда

$$\operatorname{tg}(\nu l) = -\frac{\nu}{h}. \quad (18)$$

Для отыскания ν получаем трансцендентное уравнение. Корни этого уравнения можно найти графически, взяв в плоскости (ν, z) сечения последовательных ветвей кривой $z = \operatorname{tg}(\nu l)$ прямой линией $z = -\frac{1}{h}\nu$ (рис. 7).

Обе части уравнения (18) — нечетные функции относительно ν , поэтому каждому положительному корню ν_k соответствует

равный ему по абсолютной величине отрицательный корень. Поскольку изменение знака ν_k не влечет за собой появления новых собственных функций (они только изменяют знак, что несущественно), достаточно ограничиться положительными корнями уравнения (18). В результате опять получается последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, и отвечающие им последовательности собственных функций $\sin \nu_1 x, \sin \nu_2 x, \dots, \sin \nu_n x, \dots$ и собственных колебаний $(A_1 \cos \alpha \nu_1 t + B_1 \sin \alpha \nu_1 t) \sin \nu_1 x, \dots, (A_n \cos \alpha \nu_n t + B_n \sin \alpha \nu_n t) \sin \nu_n x, \dots$.

Кстати, для n -ой собственной частоты ν_n получается асимптотическое соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = \frac{\pi}{l},$$

в частности, для $l = \pi$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = 1$.

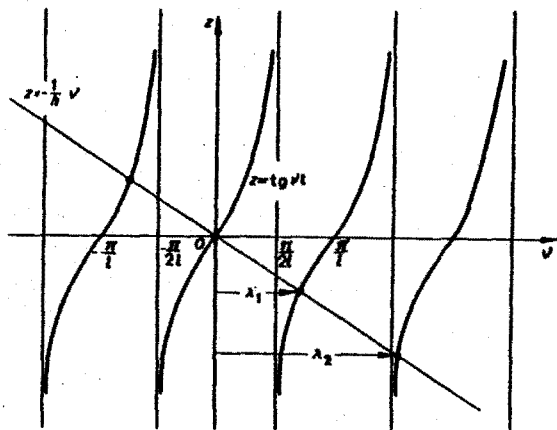


Рис. 7

Если правый конец струны $x = l$ свободен, $u_x(l, t) = 0$, то из (17) получаем $\cos \nu l = 0$. Отсюда $\nu l = \frac{\pi}{2} + n\pi$, так что в случае свободного конца собственные значения и собственные функции соответственно равны

$$\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

§ 5. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Рассмотрим колебания однородной струны длины l , закрепленной на концах, под действием внешней силы $f(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводит к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (3)$$

Будем искать решение $u(x, t)$ этой задачи в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (4)$$

где $v(x, t)$ — решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (5)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

а $w(x, t)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (8)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0 \quad (9)$$

и начальным условиям

$$w|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (10)$$

Решение $v(x, t)$ представляет вынужденные колебания струны, т. е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы $f(x, t)$, когда

начальные возмущения отсутствуют, а решение $w(x, t)$ представляет свободные колебания струны, т. е. такие колебания, которые происходят только вследствие начальных возмущений.

Метод нахождения свободных колебаний $w(x, t)$ был изложен ранее, так что остается только найти вынужденные колебания $v(x, t)$, т. е. решение неоднородного уравнения (5)–(7).

Применим метод разложения по собственным функциям, который является одним из мощных методов решения неоднородных линейных уравнений с частными производными. Основная идея метода состоит в разложении внешней силы $f(x, t)$ в ряд

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x)$$

по собственным функциям $\{X_n(x)\}$ соответствующей однородной краевой задачи и нахождении откликов $u_k(x, t)$ системы на воздействие каждой компоненты $f_k(t) X_k(x)$. Суммируя все такие отклики, получим решение исходной задачи

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t).$$

Решение $v(x, t)$ задачи (5)–(7) будем искать в следующем виде:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (11)$$

Здесь $\sin \frac{k\pi}{l} x$ — собственные функции однородной краевой задачи, и граничные условия (6) выполняются автоматически.

Определим функции $T_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) так, чтобы функция $v(x, t)$ удовлетворяла уравнению (5) и начальным условиям (7). Подставив $v(x, t)$ в виде (11) в уравнение (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k(t) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x, t). \quad (12)$$

Разложим функцию $f(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам (собственным функциям)

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (13)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \quad (14)$$

Сравнивая разложения (12) и (13) для одной и той же функции $f(x, t)$, получим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t) + \frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_k(t) = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

для неизвестных функций $T_k(t)$.

Чтобы решение $v(x, t)$, определяемое рядом (11), удовлетворяло нулевым начальным условиям (7), достаточно подчинить функции $T_k(t)$ условиям

$$T_k(0) = 0, \quad T'_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Действительно, полагая в (11) $t = 0$, получим

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi}{l} x \Rightarrow T_k(0) = 0 \quad \forall k.$$

Дифференцируя (11) по t и полагая $t = 0$, найдем, что $T'_k(0) = 0 \quad \forall k$.

Пользуясь методом вариации постоянных, получим, что решения уравнений (15) при начальных условиях (16) имеют вид

$$T_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где $f_k(t)$ определяются по формулам (14).

Подставив найденные выражения для $T_k(t)$ в ряд (11), получим решение $v(x, t)$ задачи (5)–(7), если ряд (11) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и по t дважды, сходятся равномерно.

Как можно показать, такая сходимость рядов будет обеспечена, если функция $f(x, t)$ непрерывна, имеет непрерывные частные производные по x до второго порядка включительно и для всех значений t выполняется условие $f(0, t) = f(l, t) = 0$.

Тогда решение $u(x, t)$ исходной задачи (1)–(3) представляется в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + B_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

где функции $T_k(t)$ определяются по формулам (17), а

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пример. Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (3)$$

« Начальные возмущения отсутствуют, так что мы имеем «чистую» задачу на вынужденные колебания однородной струны длины π , закрепленной на концах.

Система функций $\{\sin nx\}$ есть ортогональная на $[0, \pi]$ система собственных функций краевой задачи $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$ (здесь $l = \pi$).

Ищем решение задачи (1)–(3) в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx, \quad (4)$$

где $T_n(t)$ — неизвестные функции. Подставляя $u(x, t)$ в форме (4) в уравнение (1), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + n^2 T_n(t)) \sin nx = t \sin x,$$

откуда легко усматриваем, что

$$T_1''(t) + T_1(t) = t, \quad (5)$$

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6)$$

Используя формулу (4), в силу начальных условий (3) получаем

$$u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin nx,$$

откуда

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Таким образом, для $T_1(t)$ имеем

$$T_1''(t) + T_1(t) = t, \quad (8)$$

$$T_1(0) = T_1'(0) = 0. \quad (9)$$

Выпишем общее решение уравнения (8)

$$T_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t.$$

Потребовав выполнение начальных условий (9), находим $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, так что

$$T_1(t) = t - \sin t.$$

Для $n \geq 2$ имеем

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0,$$

откуда $T_n(t) \equiv 0$ ($n = 2, 3, \dots$).

Пользуясь формулой (4), для решения $u(x, t)$ исходной задачи получаем следующее выражение:

$$u(x, t) = (t - \sin t) \sin x. \blacktriangleright$$

§ 6. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны длины l под действием внешней силы $f(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, причем концы струны не закреплены, а двигаются по заданному закону.

Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u|_{x=l} = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

К решению этой задачи метод Фурье непосредственно неприменим, т. к. граничные условия (2) неоднородны. Однако эта задача легко сводится к задаче с нулевыми (однородными) граничными условиями.

Действительно, введем вспомогательную функцию

$$\omega(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}. \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$\omega|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \omega|_{x=l} = \psi_2(t). \quad (5)$$

Таким образом, функция $\omega(x, t)$ на концах отрезка $0 \leq x \leq l$ удовлетворяет условиям (2), а внутри этого отрезка она линейна по x (рис. 8). Говорят, что функция $\omega(x, t)$ продолжает граничные условия в интервале $0 < x < l$.

Решение задачи (1)–(3) ищем в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t), \quad (6)$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция.

В силу выбора функции $\omega(x, t)$ функция $v = u - \omega$ удовлетворяет нулевым граничным условиям

$$v|_{x=0} = (u - \omega)|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = (u - \omega)|_{x=l} = 0 \quad (7)$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} v|_{t=0} &= u|_{t=0} - \omega|_{t=0} = \varphi_0(x) - \psi_1(0) - [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \frac{x}{l} = \tilde{\varphi}_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x) - \psi_1'(0) - [\psi_2'(0) - \psi_1'(0)] \frac{x}{l} = \tilde{\varphi}_1(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив $u = v + \omega$ в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + f(x, t),$$

или, учитывая выражение для $\omega(x, t)$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t),$$

где

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \psi_1''(t) - [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \frac{x}{l}.$$

Таким образом, при $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^2$ приходим к смешанной задаче с нулевыми граничными условиями для функции $v(x, t)$: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x).$$

Метод решения таких задач был изложен ранее.

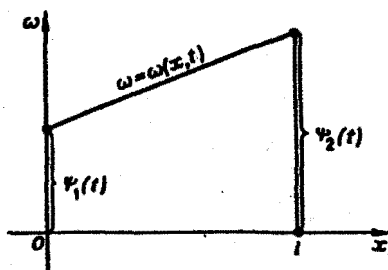


Рис. 8

Пример. Решить смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 2t, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 1 + x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

« Граничные условия неоднородные (концы струны подвижные). Здесь $\psi_1(t) = t$, $\psi_2(t) = 2t$. Вводим вспомогательную функцию

$$\omega(x, t) = t + tx = t(1 + x). \quad (4)$$

Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t), \quad (5)$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция.

Для нее получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

граничные условия

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad (7)$$

начальные условия

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Задача (6)–(8) имеет очевидное решение $v(x, t) \equiv 0$, и, как ясно из физических соображений, это ее единственное решение. Тогда по формуле (5) получаем решение $u(x, t)$ исходной задачи

$$u(x, t) = t(1 + x). \quad \blacktriangleright$$

§ 7. Общая схема метода Фурье

Рассмотрим в области $Q = \{t > 0, 0 < x < l\}$ дифференциальное уравнение

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x) u \quad (1)$$

(уравнение колебаний неоднородной струны длины l), где $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ для $0 \leq x \leq l$, так что уравнение (1) является уравнением гиперболического типа в области Q . Предположим, что

$$\rho(x) \in C[0, l], \quad p(x) \in C^1[0, l], \quad q(x) \in C[0, l],$$

и займемся изучением смешанной задачи для уравнения (1) при однородных граничных условиях

$$\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. (Напомним, что задача называется однородной, если, наряду с решением u этой задачи, ее решением является также cu , где c — произвольная постоянная.)

Возможны граничные условия следующих типов:

1. $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = 0$ (струна с закрепленными концами (рис. 9 а));
2. $u_x(0, t) = 0$ и $u_x(l, t) = 0$ (струна со свободными концами (рис. 9 б));

3. $u_x(0, t) = h_0 u(0, t)$ и $u_x(l, t) = -h_1 u(l, t)$ (упруго закрепленные концы (рис. 9 в)).

Числа h_0, h_1 должны быть положительными, если положение покоя есть положение устойчивого равновесия.

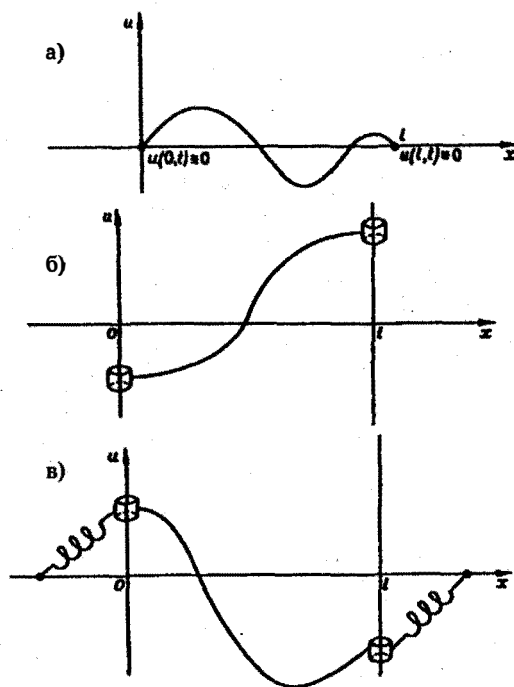


Рис. 9

Ограничившись для простоты случаем струны с закрепленными концами, приходим к следующей задаче: найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x) u, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

Будем решать эту задачу методом Фурье.

1. Ищем нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), в виде произведения

$$u(x, t) = T(t) X(x). \quad (4)$$

Подставляя $u(x, t)$ в форме (4) в уравнение (1), получим

$$T(t) \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x) X(x) T(t) = \rho(x) X(x) T''(t),$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x) X(x)}{\rho(x) X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (5)$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x , а правая часть — только от t , и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (5) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через $(-\lambda)$. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] + (\lambda \rho(x) - q(x)) X(x) = 0. \quad (7)$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (1) вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо, чтобы функция $X(x)$ была нетривиальным решением уравнения (7), удовлетворяющим граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (8)$$

Как мы уже видели, эта задача имеет отличное от тождественного нуля решение не при всяком λ .

Задача Штурма—Лиувилля о собственных значениях: найти такие значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8), а также сами эти решения.

Те значения параметра λ , при которых задача (7)–(8) имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями* (числами), а сами эти решения — *собственными функциями*, отвечающими данному собственному значению. Совокупность всех собственных значений называется *спектром* данной задачи.

В силу однородности уравнения (7) и граничных условий (8) собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1. \quad (9)$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (9), будем называть *нормированными с весом $\rho(x)$* .

Установим некоторые общие свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля.

Теорема 3. Каждому собственному значению с точностью до постоянного множителя отвечает лишь одна собственная функция.

◀ В самом деле, пусть существуют две собственные функции $X_1(x)$ и $X_2(x)$, отвечающие одному и тому же собственному значению λ_0 , т. е. удовлетворяющие дифференциальному уравнению (7) при одном и том же $\lambda = \lambda_0$. Так как по предположению $X_1(0) = 0$, $X_2(0) = 0$, то определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) \end{vmatrix}$$

решений $X_1(x)$ и $X_2(x)$ уравнения (7) в точке $x = 0$ обращается в нуль и, следовательно, решения $X_1(x)$ и $X_2(x)$ линейно зависимы. ▶

Теорема 4. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho(x)$,

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,$$

где $X_m(x)$, $X_n(x)$ — собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_m и λ_n .

Предварительно установим одно предложение, имеющее самостоятельный интерес. Введем так называемый оператор Штурма—Лиувилля

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x) y \quad (11)$$

($p(x)$, $p'(x)$, $q(x) \in C[0, l]$, $p(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$ на $[0, l]$). Будем рассматривать этот оператор на множестве $\tilde{C}^2[0, l]$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ и удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = y(l) = 0$:

$$\tilde{C}^2[0, l] = \{y(x) \mid y(x) \in C^2[0, l]; y(0) = y(l) = 0\}.$$

Лемма. Оператор Штурма—Лиувилля (11) на $\tilde{C}^2[0, l]$ является симметрическим:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

(здесь $u(x)$, $v(x) \in \tilde{C}^2[0, l]$; $(f, g) = \int_0^l f(x) g(x) dx$).

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x) u \right\} v(x) dx = \\ &= - \int_0^l q(x) v(x) u dx + \int_0^l \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) v dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям последний интеграл справа и принимая во внимание, что $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$, найдем

$$(Lu, v) = - \int_0^l q(x) uv dx - \int_0^l p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx.$$

Вновь интегрируя по частям второе слагаемое справа и учитывая, что $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, получим

$$\begin{aligned}(Lu, v) &= - \int_0^l q(x) uv \, dx + \int_0^l \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) u \, dx = \\ &= \int_0^l u \left\{ \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dv}{dx} \right) - q(x) v \right\} dx = (u, Lv). \blacktriangleright\end{aligned}$$

◀ Обратимся к доказательству теоремы. Запишем уравнение (7) в виде

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX}{dx} \right) - q(x) X(x) = -\lambda \rho(x) X(x) \quad (12)$$

и обозначим через $L[X]$ оператор, стоящий в левой части (12). Это — оператор Штурма—Лиувилля. На множестве собственных функций $X_k(x)$ задачи (7)–(8) это симметрический оператор.

Пусть $X_m(x)$ — собственная функция задачи (7)–(8), отвечающая собственному значению λ_m , а $X_n(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_n , ($\lambda_n \neq \lambda_m$). Тогда имеют место тождества

$$\begin{aligned}L[X_m(x)] &\equiv -\lambda_m \rho(x) X_m(x), \\ L[X_n(x)] &\equiv -\lambda_n \rho(x) X_n(x)\end{aligned} \quad (0 < x < l).$$

Умножим первое тождество на $X_n(x)$, второе — на $X_m(x)$ и проинтегрируем результаты по x от 0 до l . Получим

$$(L[X_m], X_n) = -\lambda_m (\rho X_m, X_n), \quad (13)$$

$$(L[X_n], X_m) = -\lambda_n (\rho X_n, X_m). \quad (14)$$

Замечая, что

$$(L[X_m], X_n) = (X_m, L[X_n]) = (L[X_n], X_m),$$

и вычитая равенства (13) и (14) почленно, найдем

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m)(\rho X_m, X_n),$$

откуда, при $\lambda_n \neq \lambda_m$, следует, что $(\rho X_m, X_n) = 0$, или, что то же

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad (\lambda_n \neq \lambda_m). \blacktriangleright$$

Так, в частном случае однородной струны ($\rho = p = 1, q = 0$), закрепленной на концах, собственные функции $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ ($n = 1, 2, \dots$) образуют ортогональную систему функций на отрезке $[0, l]$,

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x dx = 0, \quad m \neq n.$$

Теорема 5. Все собственные значения (7)–(8) действительны.

◀ В самом деле, допустим, что существует комплексное собственное значение $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, которому отвечает собственная функция $X(x) = u(x) + iv(x)$. Тогда комплексно сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также будет собственным значением, а функция $\bar{X}(x)$, комплексно сопряженная с $X(x)$, будет соответствующей собственной функцией, поскольку коэффициенты уравнения (7) и граничные условия (8) — действительные. Из условия ортогональности собственных функций, отвечающих различным собственным значениям, следует

$$\int_0^l \rho(x) X(x) \bar{X}(x) dx = \int_0^l \rho(x) |X(x)|^2 dx = 0,$$

откуда $X(x) \equiv 0$, т. е. комплексное число λ не является собственным значением. ▶

Теорема 6. Если $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на отрезке $[0, l]$, то все собственные значения задачи (7)–(8) положительные.

◀ В самом деле, пусть λ_k — собственное значение, а $X_k(x)$ — соответствующая собственная функция, нормированная с весом $\rho(x)$. Тогда справедливо тождество

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX_k}{dx} \right) - q(x) X_k(x) \equiv -\lambda_k \rho(x) X_k(x).$$

Умножая обе части тождества на $X_k(x)$, интегрируя результат по x от 0 до l и принимая во внимание, что $\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = 1$, получим

$$\lambda_k = \int_0^l q(x) X_k^2(x) dx - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX_k}{dx} \right) X_k(x) dx.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое справа, придем к равенству

$$\lambda_k = \int_0^l q(x) X_k^2(x) dx + \int_0^l p(x) \left(\frac{dX_k}{dx} \right)^2 dx. \quad (15)$$

Производная $\frac{dX_k}{dx} \neq 0$, так как в противном случае $X_k(x) \equiv \text{const}$ и из граничных условий (8) мы имели бы $X_k(x) \equiv 0$, что исключено. Таким образом, правая часть (15) положительна, откуда следует, что все собственные значения λ_k задачи (7)–(8) положительны. ▶

Теорема 7. У задачи (7)–(8) существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

которым отвечают собственные функции

$$X_1(x), \quad X_2(x), \quad \dots, \quad X_n(x), \quad \dots$$

Продолжим описание метода Фурье.

2. Обратимся к дифференциальному уравнению (6). Его общее решение при $\lambda = \lambda_k > 0$ имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные.

Каждая функция

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x)$$

будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

3. Составим формальный ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) X_k(x). \quad (16)$$

Если этот ряд, вместе с рядами, полученными из него двукратным почленным дифференцированием по x и по t , сходится равномерно, то его сумма $u(x, t)$ будет решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Для выполнения начальных условий (3) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x). \quad (18)$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$ граничной задачи (7)–(8). Предполагая, что ряды (17) и (18) сходятся равномерно, можно найти коэффициенты A_k и B_k , умножив обе части равенства (17) и (18) на $\rho(x) X_n(x)$ и проинтегрировав по x в пределах от 0 до l . Считая функции $X_k(x)$ ортонормированными с весом $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$, получим для коэффициентов Фурье функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ по системе $\{X_k(x)\}$ следующие выражения:

$$A_n = \int_0^l \rho(x) \varphi_0(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^l \rho(x) \varphi_1(x) X_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При нахождении коэффициентов A_n и B_n мы опираемся на теорему разложения Стеклова.

Теорема 8. *Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $F(x)$, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_k(x)$ этой задачи,*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

где

$$c_n = \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) dx,$$

а $X_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — нормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции.

Подставим найденные значения коэффициентов A_n и B_n в ряд (16) и, если ряд (16) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x и по t , сходятся равномерно, получим решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)–(3).

Замечание. Мы рассмотрели случай простейших граничных условий $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Несколько изменяя приведенные выше рассуждения, можно доказать аналогичные свойства собственных значений и собственных функций более общей однородной краевой задачи

$$\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(l, t) + \delta u_x(l, t) = 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0).$$

§8. Единственность решения смешанной задачи

Теорема 9. Решение смешанной задачи для вынужденных колебаний однородной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

единственно.

◀ Допустим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1)–(3). Тогда разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ этих решений будет удовлетворять однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (4)$$

нулевым граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

и нулевым начальным условиям

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6)$$

Покажем, что соотношениям (4)–(6) удовлетворяет лишь функция, тождественно равная нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (7)$$

и покажем, что при условиях (4)–(6) она не зависит от времени t . Взяв производную по t , получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{dE(t)}{dt} &= \int_0^l \left[\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right] dx = \\
 &= \int_0^l \left[\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx \right] + \left(a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \Big|_{x=0}^{x=l} - a^2 \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \\
 &= \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] dx \equiv 0,
 \end{aligned}$$

так как внеинтегральное слагаемое обращается в нуль в силу условий (5), а $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \equiv 0$, так как $v(x, t)$ — решение уравнения (4).

Итак, $\frac{dE(t)}{dt} \equiv 0$, т. е. $E(t) \equiv \text{const}$. Учитывая начальные условия (6), получаем

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{t=0} dx = 0,$$

и, следовательно, $E(t) \equiv 0$. Из того, что интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен нулю,

$$\int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0,$$

следует, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \equiv 0,$$

откуда $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$ и $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$, так что $v(x, t) \equiv \text{const}$. В силу первого из начальных условий (6) $v(x, 0) = 0$, и значит, $v(x, t) \equiv 0$, т. е. $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. ►

Интеграл (7) можно переписать в виде $\left(a^2 = \frac{T}{\rho} \right)$

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{\rho} \int_0^l \left(\frac{1}{2} \rho v_t^2 + \frac{1}{2} T v_x^2 \right) dx.$$

Величина

$$\int_0^l \frac{1}{2} \rho v_t^2 dx$$

является кинетической энергией струны в момент времени t , а

$$\int_0^l \frac{1}{2} T v_x^2 dx$$

— ее потенциальная энергия, так что функция $E(t)$ с точностью до постоянного множителя $\rho^{-1} = \text{const}$ выражает полную энергию струны. Равенство $E(t) \equiv 0$ является математическим выражением закона сохранения энергии для свободных колебаний любой физической природы при нулевых граничных условиях, т. е. когда нет притока или рассеивания энергии в процессе колебаний. Неоднородность в граничных условиях и неоднородность в уравнении означает наличие постоянно действующих факторов, подводящих или рассеивающих энергию. Неоднородность в начальных условиях означает, что в начальный момент процесс обладал некоторым запасом энергии, который он и сохраняет в течение всего колебания.

Изложенный метод доказательства единственности решения смешанной задачи называется *энергетическим* и широко используется при установлении различных теорем единственности.

§ 9. Колебания круглой мембраны

Метод Фурье разделения переменных применяется также при изучении колебаний ограниченных тел, плоских или объемных. Рассмотрим в качестве примера задачу о свободных колебаниях под действием начальных возмущений однородной круглой мембраны радиуса r_0 с центром в начале координат, закрепленной по краю.

Уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Введем полярные координаты r, φ . Тогда отклонение точек мембраны будет функцией полярных координат r, φ и времени t , $u = u(r, \varphi, t)$. Пользуясь выражением для оператора Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в полярных координатах,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

запишем уравнение колебаний мембраны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right).$$

Таким образом, задача о колебаниях мембраны ставится так: найти функцию $u(r, \varphi, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), \quad (1)$$

граничным условиям

$$u|_{r=r_0} = 0 \quad (2)$$

(мембрана закреплена по краю) и начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r, \varphi). \quad (3)$$

Ограничимся важным частным случаем осесимметричных колебаний, когда начальные функции f и F не зависят от φ . Ясно, что тогда в любой момент времени $t > 0$ величина отклонения мембраны не будет зависеть от полярного угла φ , а будет только функцией r и t , $u = u(r, t)$. Это означает, что при любом фиксированном t форма колеблющейся мембраны будет описываться поверхностью вращения.

При этом предположении задача сводится к отысканию решения $u(r, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4)$$

при граничном условии

$$u|_{r=r_0} = 0 \quad (5)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(r). \quad (6)$$

Применяя метод разделения переменных, будем искать нетривиальные решения уравнения (4), удовлетворяющие граничному условию (5), в виде

$$u(r, t) = T(t) R(r). \quad (7)$$

Подставляя функцию $u(r, t)$ в форму (7) в уравнение (4) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} = -\lambda \quad (\lambda > 0). \quad (8)$$

Равенства (8) приводят к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (9)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad (10)$$

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < +\infty \quad (11)$$

(условие $|R(0)| < +\infty$ выражает естественное требование ограниченности решения $u(r, t)$ в центре мембраны, т. е. при $r = 0$). Задача (10)–(11) имеет очевидное тривиальное решение $R(r) \equiv 0$, которое нас не устраивает.

Итак, мы пришли к задаче на собственные значения: найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (10)–(11), и отыскать эти решения.

Запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - 0) R(r) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение Бесселя с $\nu = 0$. Его общее решение

$$R(r) = C_1 \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \mathcal{N}_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Из условия $|R(0)| < +\infty$ следует, что $C_2 = 0$ (функция Неймана $\mathcal{N}_0(\sqrt{\lambda} r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$).

Таким образом,

$$R(r) = \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Граничное условие $R(r_0) = 0$ дает

$$\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0,$$

откуда следует, что число $\sqrt{\lambda} r_0$ должно быть одним из нулей функции Бесселя $\mathcal{J}_0(x)$, т. е.

$$\sqrt{\lambda} r_0 = \mu_k,$$

где μ_k — нуль функции $\mathcal{J}_0(x)$. Известно, что функция $\mathcal{J}_0(x)$ имеет бесконечное множество положительных нулей

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots,$$

откуда получаем собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и соответствующие собственные функции

$$R_n(r) = \mathcal{J}_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

задачи (10)–(11).

При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\mu_n}{r_0} t + B_n \sin \frac{a\mu_n}{r_0} t.$$

Функция

$$u_n(r, t) = \left(A_n \cos \frac{a\mu_n}{r_0} t + B_n \sin \frac{a\mu_n}{r_0} t \right) \mathcal{J}_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right)$$

будет решением уравнения (4), удовлетворяющим граничному условию (5). Она определяет стоячие осесимметричные волны круглой мембраны.

Решение $u(r, t)$ исходной задачи (4)–(6) ищем в виде формального ряда

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\mu_n}{r_0} t + B_n \sin \frac{a\mu_n}{r_0} t \right) \mathcal{J}_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right), \quad (12)$$

коэффициенты A_n и B_n которого определяются из начальных условий

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{J}_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\mu_n}{r_0} B_n \mathcal{J}_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right), \quad (14)$$

т. е. мы приходим к разложению данных функций $f(r)$ и $F(r)$ в ряды по функциям Бесселя.

Нетрудно проверить, что при $m \neq n$ функции $J_0\left(\frac{\mu_m}{r_0}r\right)$ и $J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)$ ортогональны на $[0, r_0]$ с весом r . Известно, что всякая функция $\Phi(r) \in C^2(0, r_0)$, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье—Бесселя

$$\Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right),$$

где

$$c_n = \frac{\int_0^{r_0} r \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Пользуясь этим, при достаточно гладких начальных условиях $f(r)$ и $F(r)$ получаем для коэффициентов Фурье—Бесселя функций $f(r)$ и $F(r)$ следующие формулы:

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr}, \quad B_n = \frac{r_0}{a\mu_n} \cdot \frac{\int_0^{r_0} r F(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Подставим найденные значения A_n и B_n в формулу (12). Если при этом ряд (12) сходится равномерно, так же как и ряды, получаемые из него двукратным почленным дифференцированием по каждому из аргументов t и r , то мы получаем решение задачи (4)–(6).

§ 10. Применение преобразований Лапласа к решению смешанной задачи

Пусть требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Независимая переменная t изменяется от 0 до $+\infty$. Применяя преобразование Лапласа по t , предположим, что $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, рассматриваемые как функции t ,

являются функциями-оригиналами. Пусть $U(x, p)$ есть изображение функции $u(x, t)$ по Лапласу,

$$U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Так как операция дифференцирования по x и операция интегрирования по t в преобразовании Лапласа перестановочны, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU(x, p)}{dx}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} \end{aligned}$$

(здесь величина p рассматривается как параметр, и вместо частных производных $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ пишут обычные производные $\frac{d^k}{dx^k}$, $k = 1, 2$).

По правилу дифференцирования оригиналов имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= pU - u(x, 0), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= p^2 U - p u(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая начальные условия (2), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pU - \varphi_0(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p^2 U - p\varphi_0(x) - \varphi_1(x).$$

Пусть функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, фигурирующие в граничных условиях (3), являются функциями-оригиналами и $\mu_1(t) = M_1(p)$, $\mu_2(t) = M_2(p)$. Тогда граничные условия (3) дают

$$U(0, p) = \int_0^{+\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = M_1(p), \quad U(l, p) = \int_0^{+\infty} u(l, t) e^{-pt} dt = M_2(p).$$

Переходя к изображениям, сводим задачу (1)–(3) для уравнения с частными производными к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

найти решение $U(x, p)$ уравнения

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{p}{a^2} \varphi_0(x) - \frac{1}{a^2} \varphi_1(x) \quad (4)$$

при граничных условиях

$$U(0, p) = M_1(p), \quad U(l, p) = M_2(p). \quad (5)$$

Пусть $U(x, p)$ — решение задачи (4)–(5). Тогда функция $u(x, t)$ (оригинал для $U(x, p)$) будет решением исходной задачи (1)–(3).

Пример. Струна l закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. Начальное отклонение струны определяется формулой

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad A = \text{const}.$$

Начальные скорости отсутствуют. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при $t > 0$.

◀ Задача сводится к отысканию решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (6)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Применим преобразование Лапласа по t . Пусть $U(x, p)$ — изображение функции $u(x, t)$,

$$U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

По правилу дифференцирования оригиналов с учетом начальных условий (7) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pU - A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p^2 U - p A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Граничные условия (8) в свою очередь дают

$$U(0, p) = \int_0^{+\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = 0, \quad U(l, p) = \int_0^{+\infty} u(l, t) e^{-pt} dt = 0.$$

Таким образом, в пространстве изображений мы приходим к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{Ap}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (9)$$

$$U(0, p) = U(l, p) = 0. \quad (10)$$

Решая уравнение (9) как линейное с постоянными коэффициентами, найдем

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{px}{a}} + C_2 e^{-\frac{px}{a}} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Из условий (10) получаем $C_1 = C_2 = 0$, так что

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Оригиналом для $U(x, p)$ является функция

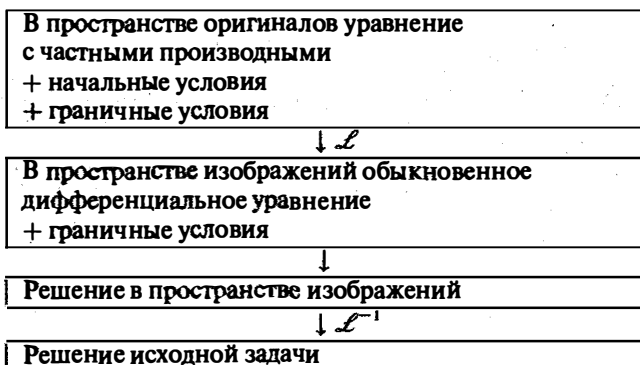
$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l},$$

которая будет решением задачи (6)–(8). ▶

Аналогичным приемом решаются смешанные задачи для более общих уравнений гиперболического (и параболического) типа.

Ход решения уравнения с частными производными при помощи преобразования Лапласа можно представить в виде следующей схемы (число независимых переменных $n = 2$).

Схема



Упражнения

Найдите решение следующих начальных задач:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $u|_{t=0} = e^{-x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x$.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Однородная бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, имеющим форму полуокружности: $u(x, 0) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Начальные скорости отсутствуют. Начертите положение струны для моментов времени $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$, считая для простоты $a = 1$.

Применяя метод Фурье разделения переменных, решите следующие смешанные задачи:

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = \sin \frac{3\pi}{l} x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin \frac{\pi}{l} x$.

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x$.

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$

8. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \pi x$, $t > 0$, $0 < x < 1$, $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (4t-8) \sin 2x$, $t > 0$, $0 < x < \pi$, $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=l} = t$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

11. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $0 < x < l$, $u|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{x=l} = A = \text{const}$, $u|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Ответы

1. $u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2}] + \frac{\sin at}{a} \cos x$. 2. $u(x, t) = \frac{1}{2a} [\arctg(x+at) - \arctg(x-at)]$.
 4. $u(x, t) = \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \frac{3\pi a}{l} t$. 5. $u(x, t) = \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi a}{l} t$. 6. $u(x, t) = (\sin t + \cos t) \sin x$.

7. $u(x, t) = \frac{4t^2}{a\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi a}{l} t$. 8. $u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \pi x$. 9. $u(x, t) = (2 \cos 2t - \frac{\sin 2t}{2} + t - 2) \sin 2x$. 10. $u(x, t) = \frac{x^2}{l} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} t$. 11. $u(x, t) = Ax + \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t$. (Указание. Положите $u = v + Ax$, где v — новая неизвестная функция.)

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными параболического типа возникают при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу распространения тепла в среде. Обозначим через $u(x, y, z, t)$ температуру среды в точке $M(x, y, z)$ в момент времени t . Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(M)$ ее плотность, через $c(M)$ — удельную теплоемкость и через $k(M)$ — коэффициент теплопроводности в точке M . Внутри тела может возникать или поглощаться тепло (например, вследствие химической реакции). Обозначим через $F(M, t)$ плотность источников тепла в точке M в момент времени t .

Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t + dt)$. Пусть S — граница области V и $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали поверхности S . Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = \iint_S (k \operatorname{grad} u, \mathbf{n}^0) dS dt,$$

где $\mathbf{n}^0$ — орт внешней нормали к поверхности S . Применяя к интегралу справедливую теорему Гаусса—Остроградского, будем иметь

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dv dt.$$

За счет тепловых источников в объеме V выделяется количество тепла, равное

$$Q_2 = \iiint_V F(x, y, z, t) dv dt.$$

Пусть температура в объеме V за промежуток времени $(t, t + dt)$ возросла на величину

$$\Delta u = u(M, t + dt) - u(M, t) \approx \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

В силу физических закономерностей, определяющих процесс распространения тепла, для такого изменения температуры необходимо затратить количество тепла, равное

$$Q_3 = \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dv dt.$$

Применяя закон сохранения энергии,

$$Q_3 = Q_1 + Q_2,$$

и потому

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv dt = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности объема V , получаем уравнение распространения тепла

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(M, t). \quad (1)$$

Если среда однородна (величины c , ρ и k постоянны), то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (2)$$

где

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}, \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение (2) называется *уравнением теплопроводности*. Аналогично выводится *уравнение диффузии частиц*.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры $u(M, t)$ в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничные условия).

Мы ограничимся изучением уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

(распространения тепла в линейных телах).

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

отвечающее случаю $f(x, t) \equiv 0$, т.е. отсутствию источников. Задача Коши ставится так: найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2)$$

Физический смысл задачи состоит в определении температуры однородного бесконечного стержня в любой момент времени $t > 0$ по известной его температуре $\varphi(x)$

в момент времени $t = 0$. Считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована, так что через нее тепло из стержня не уходит.

Предположим, что

1) $u(x, t)$ и $\varphi(x)$ — достаточно гладкие функции, убывающие при $x^2 + t^2 \rightarrow +\infty$ настолько быстро, что существуют преобразования Фурье

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad (3)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx; \quad (4)$$

2) законны операции дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\xi x} dx &= \frac{dv}{dt}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\xi x} dx &= -\xi^2 v(\xi, t). \end{aligned}$$

Тогда, применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1) и условию (2), от задачи (1)–(2) перейдем к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} + \xi^2 a^2 v = 0, \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\xi) \quad (6)$$

(величина ξ играет роль параметра).

Решение задачи (5)–(6) имеет вид

$$v(\xi, t) = \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\xi^2 a^2 t}. \quad (7)$$

Ранее мы установили, что

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

где $\mathcal{F}[f]$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Отсюда, полагая $t \approx \frac{1}{4a^2\alpha}$, получаем

$$e^{-\xi^2 a^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right].$$

Таким образом, в правой части равенства (7) стоит произведение преобразований Фурье функций $\varphi(x)$ и $\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$.

Пользуясь теоремой о свертке, в силу которой

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2],$$

равенство (7) можно представить в виде

$$v(\xi, t) = \bar{\varphi}(\xi) e^{-\xi^2 a^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} \left[\varphi(x) * \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right]. \quad (8)$$

Левая часть формулы (8) есть преобразование Фурье (по аргументу x) искомой функции $u(x, t)$, так что формулу (8) можно переписать так:

$$\mathcal{F}[u(x, t)] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathcal{F} \left[\varphi(x) * e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right],$$

откуда, пользуясь выражением для свертки функций $\varphi(x)$ и $e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$, имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda, \quad t > 0. \quad (9)$$

Полученная формула дает решение исходной задачи (1)–(2) и называется *интегралом Пуассона*.

В самом деле, можно доказать, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), имеет производные любого порядка по x и по t при $t > 0$ и удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и $\forall x$.

Покажем, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda, \quad \varphi(x) \in C(-\infty, +\infty), \quad (9)$$

удовлетворяет начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Положим

$$\frac{x - \lambda}{2a\sqrt{t}} = \mu.$$

Тогда $\lambda = x - 2a\sqrt{t} \mu$; $d\lambda = -2a\sqrt{t} d\mu$, так что

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2a\sqrt{t} \mu) e^{-\mu^2} d\mu,$$

откуда при $t \rightarrow +0$ получим

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\mu^2} d\mu = \varphi(x),$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \sqrt{\pi}.$$

Сформулируем следующий важный результат.

Теорема 1. В классе ограниченных функций

$$u(x, t) = \{ |u(x, t)| < M, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \}$$

решение задачи Коши (1)–(2) единственно и непрерывно зависит от начальной функции.

Пример. Найти решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1')$$

$$u|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2')$$

« Пользуясь формулой Пуассона (9), получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda \quad (10)$$

$$(\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad a = 1).$$

Преобразуем интеграл в правой части. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{x\lambda}{2t} - \frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda = e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+2t}{2} \left(\lambda - \frac{x}{1+2t}\right)^2} d\lambda. \quad (11)$$

Сделаем замену переменного

$$\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}} \left(\lambda - \frac{x}{1+2t} \right) = \xi.$$

Тогда интеграл в правой части последнего равенства примет вид

$$\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \sqrt{2\pi}$). Из формулы (11) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}.$$

Таким образом, решение $u(x, t)$ поставленной задачи определится формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \quad t > 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что построенная функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (2'). Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что эта функция при $t > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1')$$

Замечание. Из формулы Пуассона (9) следует, что тепло распространяется вдоль стержня мгновенно. Действительно, пусть начальная температура $\varphi(x)$ положительна для $\alpha \leq x \leq \beta$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда для последующего распределения температур получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda, \quad t > 0,$$

откуда видно, что при сколь угодно малых $t > 0$ и сколь угодно больших $|x|$ имеем $u(x, t) > 0$. Это объясняется неточностью теоретических предпосылок при выводе уравнения теплопроводности, не учитывающих инерциальность движения молекул. Тем не менее, уравнение теплопроводности дает хорошее количественное согласование с опытом. Более точное описание процессов переноса тепла дается так называемыми уравнениями переноса.

2.1. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Функция

$$G(x, t; \lambda) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}},$$

входящая в формулу Пуассона (9), называется *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности. Рассматриваемая как функция аргументов x, t , она удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Фундаментальное решение имеет важный физический смысл, связанный с понятием теплового импульса.

Допустим, что начальное распределение $\varphi(x)$ температур таково:

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{если } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда в силу (9) распределение температур $u(x, t)$, $t > 0$, в стержне будет иметь вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda. \quad (13)$$

По теореме о среднем

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda = 2\varepsilon e^{-\frac{(x-\tilde{\lambda})^2}{4a^2 t}},$$

где $\tilde{\lambda} \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, так что из (13) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\tilde{\lambda})^2}{4a^2 t}}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} = G(x, t; x_0).$$

Это означает, что функция $G(x, t; x_0)$ представляет распределение температур в стержне в момент $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ в точке $x = x_0$ имелся бесконечный пик температур (при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow +\infty$), а в остальных точках стержня температура была равна нулю. Такое начальное распределение температур может быть приближенно реализовано следующим образом: в момент $t = 0$ к точке $x = x_0$ стержня на очень короткий промежуток времени подносится узкое пламя очень высокой температуры (тепловой импульс плотности $\delta\rho$).

Это начальное распределение температур описывается так называемой δ -функцией Дирака, обозначаемой символом $\delta(x - x_0)$. Не являясь функцией в обычном смысле, δ -функция определяется формально при помощи соотношений

$$1) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \neq x_0, \\ +\infty, & \text{при } x = x_0; \end{cases}$$

$$2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \text{на любом интервале } (\alpha, \beta), \text{ содержащем точку } x_0.$$

Основным свойством, определяющим δ -функцию, является следующее: для всякой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } x_0 \in (\alpha, \beta), \\ 0, & \text{если } x_0 \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальное решение $G(x, t; x_0)$ является решением уравнения теплопроводности в бесконечном стержне при начальном распределении температуры $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$.

График функции $G(x, t; x_0)$ при различных значениях $t > 0$ имеет вид (рис. 1). Кривые 1, 2, 3 соответствуют моментам времени $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Рисунок показывает, как выравнивается температура в стержне после теплового импульса.

Решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda$$

задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном условии $u|_{t=0} = \varphi(x)$ можно рассматривать как результат суперпозиции температур, возникающих в точке x в момент времени t вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов интенсивности $\varphi(\lambda)$ в точке λ , приложенных в момент $t = 0$.

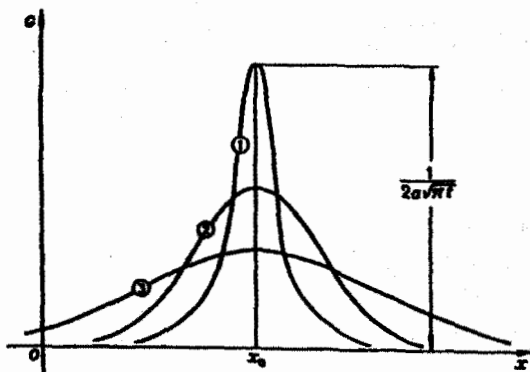


Рис. 1

§3. Распространение тепла в конечном стержне

Если стержень имеет конечную длину l и занимает отрезок $0 \leq x \leq l$ оси Ox , то для постановки задачи о распространении тепла в таком стержне помимо уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

и начального условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

необходимо задать еще температурный режим на концах стержня $x = 0$ и $x = l$, т.е. задать граничные условия. Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на концах стержня. Рассматривают три основных типа граничных условий.

1. На концах стержня задана температура

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

где $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — функции, заданные для отрезка времени $0 \leq t \leq T$, в течение которого изучается процесс.

2. На концах стержня заданы значения производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \nu_2(t).$$

Эти условия возникают, если задана величина теплового потока Q , протекающего через торцевое сечение стержня. Например, если для $x = l$ задана величина $Q(l, t)$, то

$$Q(l, t) = -k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l},$$

откуда $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = \nu_2(t)$, где $\nu_2(t) = -\frac{Q(l, t)}{k}$. Если $\nu_1(t)$ (или $\nu_2(t)$) тождественно равна нулю, то говорят, что соответствующий конец стержня теплоизолирован.

3. На концах стержня заданы линейные соотношения между функцией и ее производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0, t) - \theta(t)], \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)],$$

где $\theta(t)$ — известная функция — температура окружающей среды, λ — коэффициент теплообмена. Это граничное условие соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой $\theta(t)$.

Пользуясь двумя выражениями для теплового потока, протекающего через сечение $x = l$, $Q = h(u - \theta)$ и $Q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$, получаем формулировку третьего граничного условия в виде

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda[u(l, t) - \theta(t)], \quad \lambda = \frac{h}{k}.$$

Для сечения $x = 0$ стержня третье граничное условие имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0, t) - \theta(t)],$$

поскольку для теплового потока $-k \frac{\partial u}{\partial n}$ при $x = 0$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

(внешняя нормаль к стержню в конце $x = 0$ противоположна по направлению с осью Ox).

Перечисленные основные задачи далеко не исчерпывают возможных краевых задач для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

Например, на разных концах стержня могут задаваться условия разных типов. Мы ограничимся рассмотрением первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Задача ставится так: найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

в области $0 < x < l, t > 0$, $u(x, t) \in C^2\{0 < x < l, t > 0\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Считаем, что функция $u(x, t)$ непрерывна в замкнутой области $D = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ (рис. 2), для чего необходимо, чтобы функции $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ были непрерывными и выполнялись условия согласования $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$.

Замечание. Как и для уравнений гиперболического типа, функция $u(x, t)$ ищется только для $0 < x < l$ и $t > 0$ (но не при $t = 0$, $x = 0$ и $t = 0$, $x = l$, где значения функции $u(x, t)$ заранее задаются начальными и граничными условиями).

Сформулируем принцип максимального значения.

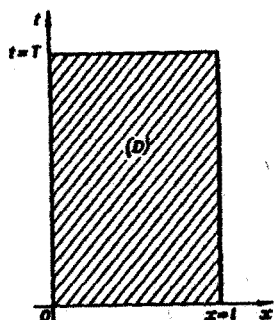


Рис. 2

Теорема 2. Если функция $u(x, t) \in C(D)$, удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в точках области $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x, t)$ достигаются или в начальный момент времени $t = 0$, или в точках границы на отрезках $x = 0$ или $x = l$.

Физический смысл этой теоремы очевиден: если температура тела не превосходит некоторого значения M в граничных точках или в начальный момент, то внутри тела (источники отсутствуют!) не может возникнуть температура, большая M .

Как следствия из принципа максимального значения вытекают теоремы.

Теорема 3 (единственности). Решение задачи (1)–(3) в прямоугольнике $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ единственно.

Теорема 4. Решение задачи (1)–(3) непрерывно зависит от начальных и граничных функций.

§ 4. Метод Фурье для уравнения теплопроводности

Займемся решением первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности: найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

1. Начнем с простейшей задачи: найти решение $u(x, t)$ однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (5)$$

и нулевым (однородным) граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (4), удовлетворяющие граничным условиям (6), в виде

$$u(x, t) = T(t) X(x). \quad (7)$$

Подставляя $u(x, t)$ в форму (7) в уравнение (4), получим

$$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad (8)$$

откуда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (9)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (10)$$

Чтобы получить нетривиальные решения $u(x, t)$ вида (7), удовлетворяющие граничным условиям (6), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (10), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы приходим к задаче на собственные значения: найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (10)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (11)$$

Эта задача была рассмотрена в предыдущей главе. Там было показано, что только при

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

существуют нетривиальные решения

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

задачи (10)–(11).

При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

($a_n \rightarrow$ произвольные постоянные). Функции

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют уравнению (4) и граничным условиям (6).

Образует формальный ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (12)$$

Потребовав, чтобы функция $u(x, t)$, определяемая формулой (12), удовлетворяла начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (13)$$

Ряд (13) представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты a_n разложения определяются по известным формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Предположим, что $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда ряд (13) с коэффициентами, определяемыми по формулам (14), будет сходиться к функции $\varphi(x)$ абсолютно и равномерно. Так как

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

при $t \geq 0$, то ряд (12) при $t \geq 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x, t)$ — сумма ряда (12) — непрерывна в области $0 < x < l, t > 0$ и удовлетворяет начальному и граничному условиям.

Остается показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4) в области $0 < x < l, t > 0$. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (12) почленным дифференцированием по t один раз и почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся при $0 < x < l, t > 0$. Но это следует из того, что при любом $t > 0$

$$0 < \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{n^2 \pi^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если n достаточно велико.

Единственность решения задачи (4)–(6) и непрерывная зависимость решения от начальной функции $\varphi(x)$ были уже установлены ранее. Таким образом, для $t > 0$ задача (4)–(6) поставлена корректно; напротив, для отрицательных t задача эта некорректна.

Замечание. В отличие от волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

несимметрично относительно времени t : если заменить t на $-t$, то получаем уравнение другого вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описывает необратимые процессы: мы можем предсказать, каким станет данное u через промежуток времени длиной t , но мы не можем с уверенностью сказать, каким было это u за время t до рассматриваемого момента. Это различие между предсказанием и предысторией типично для параболического уравнения и не имеет места, например, для волнового уравнения: в случае последнего заглянуть в прошлое так же легко, как и в будущее.

Пример. Найти распределение температуры в однородном стержне длины π , если начальная температура стержня $u|_{t=0} = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) и на концах стержня поддерживается нулевая температура.

◀ Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \quad (15)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (16)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

Применяя метод Фурье, ищем нетривиальные решения уравнения (15), удовлетворяющие граничным условиям (17), в виде

$$u(x, t) = T(t) X(x). \quad (18)$$

Подставляя $u(x, t)$ в форму (18) в уравнение (15) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (19)$$

и

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (20)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (21)$$

Собственные значения задачи (20)–(21) суть $\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), собственные функции $X_n(x) = \sin nx$. При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения (19) имеет вид $T_n(t) = a_n e^{-a^2 n^2 t}$, так что

$$u_n(x, t) = a_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx.$$

Решение задачи (15)–(17) ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx. \quad (22)$$

Потребовав выполнения начального условия (16), получим

$$u(x, 0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

откуда $a_1 = 1$, $a_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots$). Поэтому решением исходной задачи будет функция

$$u(x, t) = e^{-a^2 t} \sin x. \quad \blacktriangleright$$

2. Рассмотрим теперь следующую задачу: найти решение $u(x, t)$ неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и однородным граничным условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Предположим, что функции $f(x, t)$ непрерывна, имеет непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ и при всех $t > 0$ выполняется условие $f(0, t) = f(l, t) = 0$.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (4)$$

где $v(x, t)$ определим как решение задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad (7)$$

а функцию $w(x, t)$ — как решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad (9)$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \quad (10)$$

Задача (8)–(10) рассмотрена в п. 1. Будем искать решение $v(x, t)$ задачи (5)–(7) в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (11)$$

по собственным функциям $\{\sin \frac{n\pi}{l} x\}$ краевой задачи

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Подставляя $v(x, t)$ в виде (11) в уравнение (5), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x, t). \quad (12)$$

Разложим функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по синусам,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (13)$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi. \quad (14)$$

Сравнивая два разложения (12) и (13) функции $f(x, t)$ в ряд Фурье, получаем

$$T'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Пользуясь начальным условием для $v(x, t)$,

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

находим, что

$$T_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Решения уравнений (15) при начальных условиях (16) имеют вид:

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Подставляя найденные выражения для $T_n(t)$ в ряд (11), получим решение $v(x, t)$ задачи (5)–(7)

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (17)$$

Функция $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ будет решением исходной задачи (1)–(3).

3. Рассмотрим задачу: найти в области $\{0 < x < l, t > 0\}$ решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (18)$$

при начальном условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (19)$$

и неоднородных граничных условиях

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t). \quad (20)$$

Непосредственно метод Фурье неприменим из-за неоднородности условий (20).

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t),$$

где

$$\omega(x, t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \frac{x}{l}.$$

Тогда решение задачи (18)–(20) сведется к решению задачи (1)–(3), рассмотренной в п. 2, для функции $v(x, t)$.

Упражнения

1. Задан бесконечный однородный стержень. Покажите, что если начальная температура

$$\varphi(x) = u_0 e^{-\sigma^2 x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

($u_0 > 0$, $\sigma > 0 - \text{const}$), то в любой момент $t > 0$ температура стержня

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 4a^2\sigma^2 t}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{1 + 4a^2\sigma^2 t}}.$$

2. Концы стержня длиной π поддерживаются при температуре, равной нулю. Начальная температура определяется формулой

$$u(x, 0) = 2 \sin 3x.$$

Определите температуру стержня для любого момента времени $t > 0$.

3. Концы стержня длиной l поддерживаются при температуре, равной нулю. Начальная температура стержня определяется формулой

$$u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi}{l} x - 5 \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

Определите температуру стержня для любого момента времени $t > 0$.

4. Концы стержня длиной l поддерживаются при температуре, равной нулю. Начальное распределение температуры

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l} (l - x), & \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases} \quad (u_0 = \text{const}).$$

Определите температуру стержня для любого момента времени $t > 0$.

Ответы

2. $u(x, t) = 2e^{-9a^2 t} \sin 3x$. 3. $u(x, t) = 3e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi}{l} x - 5e^{-\frac{4\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{2\pi}{l} x$. 4. $u(x, t) = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(4k+2)\pi}{l} x}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(4k+2)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Определения. Постановка краевых задач

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т. е. не меняющихся во времени, процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Этим уравнением характеризуется гравитационный и электростатический потенциалы в точках свободного пространства, оно описывает потенциал скорости безвихревого потока несжимаемой жидкости, и оно же справедливо для температуры однородной изотропной среды при установившемся движении тепла.

В случае функции $u = u(x, y)$ двух независимых переменных x, y уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Оно лежит в основе теории аналитических функций комплексного переменного. Его решения — действительные и мнимые части аналитических в некоторой области D функций $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. В случае функции одного аргумента $u = u(x)$ имеем

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

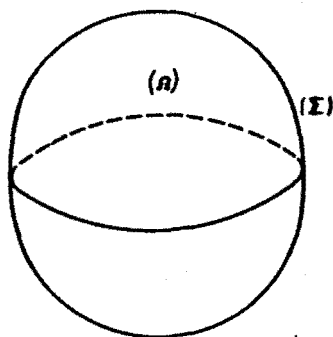


Рис. 1

Решениями уравнения (3) являются функции $u = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Определение. Функция $u = u(x, y, z)$ называется *гармонической* в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в области Ω уравнению Лапласа (1).

Пусть область Ω ограничена поверхностью Σ (рис. 1). Типичной для уравнения Лапласа является задача: найти функцию $u(M)$, $M \in \Omega$, гармоническую в Ω и удовлетворяющую на Σ граничному условию, которое может быть одного из следующих видов:

1. $u|_{\Sigma} = f_1(p)$, $p \in \Sigma$, — первая краевая задача, или задача Дирихле;
2. $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f_2(p)$, $p \in \Sigma$, — вторая краевая задача, или задача Неймана;
3. $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right)|_{\Sigma} = f_3(p)$, $p \in \Sigma$, — третья краевая задача. Здесь f_1, f_2, f_3, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная в направлении внешней нормали к поверхности Σ .

Геометрический смысл задачи Дирихле для одномерного уравнения Лапласа тривиален. Одномерные гармонические функции $u = C_1 x + C_2$ суть прямые линии, и задача Дирихле сводится к следующей: провести прямую через две точки $A(x_1, u_1)$ и $B(x_2, u_2)$ (рис. 2).

В зависимости от того, где ищется решение задачи — внутри области, ограниченной поверхностью Σ или в области, расположенной вне поверхности Σ , различают *внутренние* и *внешние* краевые задачи для уравнения $\Delta u = 0$.

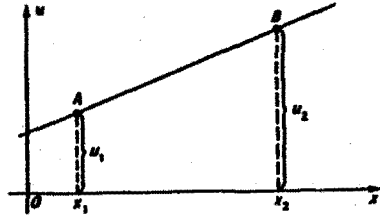


Рис. 2

Другим представителем эллиптических уравнений является уравнение Пуассона

$$\Delta u = g(x, y, z),$$

которое отвечает равновесному состоянию под действием внешней силы с плотностью, пропорциональной $g(x, y, z)$.

Еще пример. Рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0. \quad (4)$$

Будем искать решения уравнения (4) вида

$$u = u(x, y, z, t) = v(x, y, z) e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Подставляя функцию u в форму (5) в уравнение (4), будем иметь

$$e^{i\omega t} \Delta v + \frac{\omega^2}{a^2} v e^{i\omega t} = 0,$$

откуда

$$\Delta v + k^2 v = 0,$$

где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. Таким образом, для функции $v(x, y, z)$ мы получили эллиптическое уравнение

$$\Delta v + k^2 v = 0,$$

которое называется *уравнением Гельмгольца*.

Как и для уравнения Лапласа, для уравнений Пуассона и Гельмгольца типичными являются 1-я, 2-я и 3-я краевые задачи.

§ 2. Фундаментальные решения уравнений Лапласа

Декартовы, цилиндрические и сферические координаты являются наиболее употребительными. Оператор Лапласа в декартовых координатах (x, y, z) определяется формулой

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в сферических координатах (r, θ, φ)

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от переменной r .

Пользуясь сферическими координатами, видим, что решение $u = u(r)$, обладающее сферической симметрией, определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Полагая, например, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, получаем функцию

$$u_0(r) = \frac{1}{r},$$

которую называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*. Функция $u_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где u_0 обращается в бесконечность.

Если рассматривать поле точечного заряда e , помещенного в начало координат, то потенциал этого поля равен $u = \frac{e}{r}$.

Пользуясь цилиндрическими координатами, находим, что решение $u = u(r)$, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0,$$

интегрируя которое, получим

$$u = C_1 \ln r + C_2.$$

Выбирая $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, будем иметь

$$u_0(r) = \ln \frac{1}{r}.$$

Функцию $u_0(r)$ называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости*. Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $r = 0$, где $u = \ln \frac{1}{r}$ обращается в бесконечность.

§ 3. Формулы Грина

Будем исходить из формулы Гаусса—Остроградского

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} d\Omega. \quad (1)$$

Положим $\mathbf{a} = v \operatorname{grad} u$ и будем считать, что функции u, v имеют непрерывные вторые производные в области Ω и непрерывны вместе с первыми производными в ее замыкании $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, т. е.

$$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}^0) = v(\operatorname{grad} u, \mathbf{n}^0) = v \frac{\partial u}{\partial n},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, v \nabla u) = (\nabla v, \nabla u) + v \nabla^2 u = (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) + v \Delta u.$$

Поэтому из формулы (1) вытекает, что

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + v \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (2)$$

Это — *первая формула Грина*.

Меняя в формуле (2) u и v местами, получим

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u) + u \Delta v\} d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (3)$$

Вычитая равенства (2) и (3) почленно, находим

$$\iiint_{\Omega} \{u \Delta v - v \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4)$$

Это — *вторая формула Грина*.

Наконец, полагая в (2) $v = u$, получим

$$\iiint_{\Omega} \{(\operatorname{grad} u)^2 + u \Delta u\} d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (5)$$

Это — *третья формула Грина*.

Здесь всюду $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к гладкой или кусочно-гладкой замкнутой поверхности Σ .

Граница Σ области Ω может состоять из нескольких замкнутых поверхностей. В этом случае поверхностные интегралы в правых частях формул Грина следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область Ω .

§ 4. Основная интегральная формула Грина

Мы установили, что функция

$$v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}},$$

где $r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ при $\forall M, M \neq M_0$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$ с границей Σ и $u(M) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Пусть M_0 — некоторая внутренняя точка области Ω . Поскольку функция $v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}$ разрывна в точке $M_0 \in \Omega$, непосредственно применить вторую формулу Грина (4) к функциям u и v нельзя.

Рассмотрим область $\Omega \setminus K_\epsilon$ с границей $\Sigma \cup \Sigma_\epsilon$, получающуюся из области Ω выбрасыванием шара K_ϵ радиуса ϵ с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_ϵ (рис. 3). Область $\Omega \setminus K_\epsilon$ особенностей функции $v(M)$ не содержит. Применяя вторую формулу Грина к функциям $u(M)$ и $v(M) = \frac{1}{r_{MM_0}}$ в области $\Omega \setminus K_\epsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega \setminus K_\epsilon} \left(u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right) d\Omega = \\ = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (1)$$

Преобразуем второй интеграл в правой части равенства (1). Вычисляя производную в направлении внешней нормали к области $\Omega \setminus K_\epsilon$ на поверхности Σ_ϵ (рис. 4), найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\Sigma_\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\Sigma_\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2},$$

откуда, воспользовавшись теоремой о среднем для интеграла по поверхности Σ_ϵ , получим

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Sigma_\epsilon} u d\sigma = \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (2)$$

где u^* — среднее значение функции $u(M)$ на поверхности Σ_ϵ .

Преобразуем теперь третий интеграл в правой части (1)

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\epsilon} 4\pi\epsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (3)$$

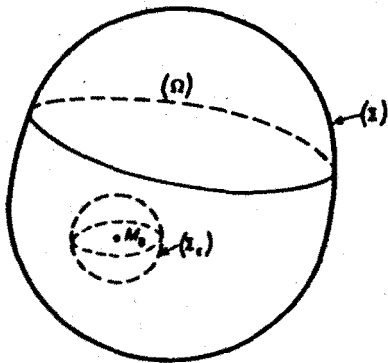


Рис. 3

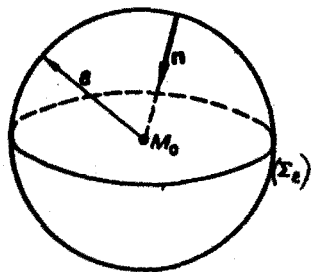


Рис. 4

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ — среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ϵ . Подставляя выражения (2) и (3) в формулу (1) и учитывая, что $\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) \equiv 0$ в $\Omega \setminus K_\epsilon$, будем иметь

$$\iiint_{\Omega \setminus K_\epsilon} \left(-\frac{1}{r}\right) \Delta u \, d\Omega = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*. \quad (4)$$

Устремим теперь радиус ϵ к нулю. Тогда получим:

1) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$, т. к. $u(M)$ — непрерывная функция, а u^* — ее среднее значение по сфере радиуса ϵ с центром в точке M_0 ;

2) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$, т. к. из непрерывности первых производных функции $u(M)$ внутри Ω вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

в окрестности точки M_0 ;

3) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Omega \setminus K_\epsilon} \left(-\frac{1}{r}\right) \Delta u \, d\Omega = - \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} \, d\Omega$ по определению несобственного интеграла.

В результате указанного предельного перехода в (4) при $\epsilon \rightarrow 0$ приходим к основной интегральной формуле Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} \, d\Omega. \quad (5)$$

Таким образом, всякая функция $u(M) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ представима как сумма трех интегралов

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Delta u}{r} \, d\Omega, \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma, \quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \, d\sigma,$$

которые называются *объемным потенциалом*, *потенциалом простого слоя* и *двойного слоя* соответственно.

Если $u(M)$ — гармоническая в Ω функция, то $\Delta u \equiv 0$ и формула (5) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma \quad (6)$$

(точка M_0 внутри Ω). Это — основная формула теории гармонических функций. Она показывает, что значение гармонической функции в любой внутренней точке области Ω выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на границе Σ области Ω .

Из формулы (6) следует

Утверждение. *Всякая гармоническая в Ω функция $u(M)$ есть сумма потенциалов простого и двойного слоя.*

Для уравнения Лапласа на плоскости фундаментальное решение имеет вид $v_0 = \ln \frac{1}{r}$. Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получаем основную интегральную формулу для гармонической функции двух аргументов:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(\left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) ds. \quad (7)$$

Здесь Γ — граница области D , $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе (рис. 5). Таким образом, всякая гармоническая в области D функция $u(x, y)$ есть сумма двух потенциалов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial n} ds, \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds, \end{aligned}$$

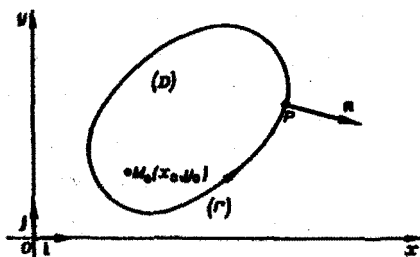


Рис. 5

логарифмического потенциала простого слоя и логарифмического потенциала двойного слоя соответственно.

§ 5. Свойства гармонических функций

Теорема 1. Если $u(M)$ — гармоническая в области Ω функция, непрерывная вместе с первыми производными в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, то ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ на границе Σ области Ω удовлетворяет условию

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0. \quad (1)$$

◀ В самом деле, применяя вторую формулу Грина

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

к гармонической функции $u(M)$ и к функции $v(M) \equiv 1$, получаем

$$0 = \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \blacktriangleright$$

Это свойство гармонических функций выражает факт отсутствия источников внутри области Ω .

Теорема 2. Если существует решение задачи Неймана для уравнения Лапласа, то оно определено с точностью до постоянного слагаемого.

◀ Доказательство проведем при дополнительном предположении, что решение $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Пусть решений два: $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &\equiv 0, & \Delta u_2 &\equiv 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Sigma} &= f(p) & \text{и} & \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = f(p). \end{aligned}$$

Разность $u = u_1 - u_2$ будет решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Для такой функции $u(M)$ третья формула Грина

$$\iiint_{\Omega} ((\text{grad } u)^2 + u \Delta u) d\Omega = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

дает

$$\iiint_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega = 0, \quad \text{или} \quad \iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega = 0.$$

В силу непрерывности и неотрицательности подынтегральной функции отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \equiv 0,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{в } \Omega,$$

так что $u(x, y, z) \equiv 0$ и, следовательно, $u_1(M) - u_2(M) \equiv \text{const.}$ ▶

Подчеркнем, что в задаче Неймана функция $f(p)$, $p \in \Sigma$, должна удовлетворять условию

$$\iint_{\Sigma} f(p) d\sigma = 0. \quad (2)$$

Если это условие не выполнено, задача Неймана решения не имеет.

Теорема 3 (о среднем значении гармонической функции). Если функция $u(M)$ — гармоническая внутри шара радиуса R с центром в точке M_0 и непрерывна вместе с первыми производными вплоть до его границы Σ_R , то значение функции $u(M)$ в центре M_0 сферы Σ_R равно среднему арифметическому всех значений $u(M)$ на этой сфере,

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(p) d\sigma. \quad (3)$$

◀ Для доказательства применим основную интегральную формулу теории гармонических функций

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma$$

к сфере Σ_R . Для этой сферы (рис. 6) $r = M_0p = R$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ и потому

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{1}{R^2} \right) d\sigma. \quad (4)$$

В силу теоремы 1 имеем $\iint_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, и формула (4) дает

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(p) d\sigma. \blacktriangleright$$

Для одномерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ эта теорема является теоремой о средней линии трапеции: длина отрезка M_0M равна полусумме длин отрезков aA и bB (рис. 7).

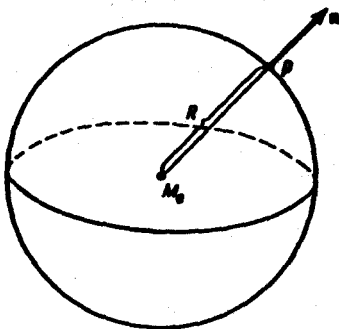


Рис. 6

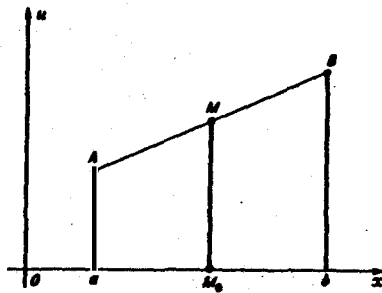


Рис. 7

Теорема 4 (об экстремальных значениях гармонической функции). Гармоническая в области Ω функция $u(M)$, не равная тождественно постоянной, не может иметь локальных экстремумов внутри области Ω .

◀ Будем вести доказательство методом рассуждения от противного. Пусть в точке $M_0 \in \Omega$ функция $u(M)$ имеет, например, локальный максимум. Иными словами, неравенство

$$u(M_0) > u(M) \quad (5)$$

выполняется во всех точках M шара достаточно малого радиуса с центром в точке M_0 . По теореме о среднем значении гармонической функции

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma_R} u(M) d\sigma$$

(Σ_R — сфера в указанном шаре), откуда по теореме о среднем для двойного интеграла получаем, что

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 u(M_{cp}) = u(M_{cp}).$$

Полученное противоречие с неравенством (5) доказывает теорему. ►

Таким образом, функция $u(M)$, гармоническая в ограниченной области Ω и непрерывная в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе Σ области Ω (принцип максимального значения).

Отсюда легко получаем следующие теоремы.

Теорема 5 (теорема единственности). *Решение внутренней задачи Дирихле*

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Sigma} = f(p), \quad p \in \Sigma,$$

непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, единственно.

◀ Пусть две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$ являются решениями задачи. Тогда их разность $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является гармонической в Ω функцией, непрерывной в $\bar{\Omega}$ и равной нулю на Σ . По теореме 4 об экстремальных значениях отсюда следует, что наибольшее и наименьшее значения $u(M)$ в Ω равны нулю. Следовательно, $u(M) = u_1(M) - u_2(M) \equiv 0$ в Ω , т.е. $u_1(M) \equiv u_2(M)$. ►

Теорема 6 (о непрерывной зависимости решений первой внутренней краевой задачи от граничных значений). *Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — решения задач*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \Delta u &= 0, \\ u|_{\Sigma} &= \varphi_1(p) & u|_{\Sigma} &= \varphi_2(p), \end{aligned}$$

непрерывные в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$. Тогда если всюду на границе Σ выполняется неравенство

$$|\varphi_1(p) - \varphi_2(p)| < \epsilon, \quad p \in \Sigma,$$

то всюду в области Ω

$$|u_1(M) - u_2(M)| < \epsilon, \quad M \in \Omega.$$

◀ Функция $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$ является гармонической в Ω , непрерывна в $\bar{\Omega}$, и $u|_{\Sigma} = \varphi_1(p) - \varphi_2(p)$. Поскольку $-\epsilon < \varphi_1(p) - \varphi_2(p) < \epsilon$, то по теореме 4 об экстремальных значениях наибольшее и наименьшее значения функции $u(M)$ заключены между $-\epsilon$ и ϵ . Следовательно, $|u(M)| < \epsilon$, т.е. $|u_1(M) - u_2(M)| < \epsilon \quad \forall M \in \Omega$. ►

§ 6. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Задача ставится так: найти функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую внутри круга K_{r_0} радиуса r_0 с центром в начале координат уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

непрерывную в замкнутой области $\bar{K}_{r_0}$ и принимающую заданные значения на границе круга,

$$u|_{r=r_0} = f(\varphi), \tag{2}$$

где $f(\varphi)$ — достаточно гладкая функция, периодическая с периодом 2π .

В силу однозначности искомого решения оно должно быть периодическим по φ с периодом 2π , $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$. Из непрерывности решения в $\bar{K}_{r_0}$ следует его ограниченность в $\bar{K}_{r_0}$.

Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

Будем искать частные решения уравнения (3) в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (4)$$

Подставляя $u(r, \varphi)$ в форму (4) в уравнение (3), умноженное на r^2 , получим

$$\Phi(\varphi) r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + R(r) \Phi''(\varphi) = 0,$$

или

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda,$$

откуда

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad (5)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0. \quad (6)$$

Из условия $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$ получаем $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, а из (5) находим $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), так что

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В частности, $\Phi_0(\varphi) = A_0 = \text{const}$.

Полагая в уравнении (6) (уравнении Эйлера) $R(r) = r^\sigma$, при $\lambda = n^2$ получаем

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - n^2 = 0.$$

Отсюда $\sigma^2 - n^2 = 0$, $\sigma = \pm n$ ($n > 0$) и, следовательно,

$$R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n} \quad (n > 0).$$

При $n = 0$ из (6) находим

$$R_0(r) = a_0 + b_0 \ln r.$$

Так как $r^{-n} \rightarrow \infty$ и $\ln r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0+0$, то для решения внутренней задачи Дирихле нужно положить $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. взять $R_n(r) = a_n r^n$ ($n = 1, 2, \dots$), $R_0(r) = a_0$.

Решение внутренней задачи Дирихле будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (7)$$

где коэффициенты A_n, B_n определяются из граничного условия (2).

При $r = r_0$ имеем

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (8)$$

Запишем разложение $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, & \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая ряды (8) и (9), получаем

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{r_0^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{r_0^n}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, формальное решение внутренней задачи Дирихле для круга представимо в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \quad (11)$$

где коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n, \dots$ определяются по формулам (10).

При $r < r_0$ ряд (11) можно дифференцировать по r и φ любое число раз, и, значит, функция $u(r, \varphi)$ из (11) удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$.

Если предположить, что функция $f(\varphi)$ непрерывна и дифференцируема, то ряд (11) при $r \leq r_0$ сходится равномерно, и, следовательно, функция $u(r, \varphi)$ непрерывна на границе круга и удовлетворяет всем условиям поставленной задачи.

Решение внешней задачи Дирихле следует искать в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (12)$$

где коэффициенты A_n, B_n определяются из граничного условия $u|_{r=r_0} = f(\varphi)$.

Для кольцевой области $r_1 < r < r_2$, образованной двумя концентрическими окружностями с центром в точке 0 радиусов r_1 и r_2 (рис. 8), решение задачи ищется в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{C_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi + A_0 \ln r + B_0, \quad (13)$$

коэффициенты которого $A_0, B_0, A_n, C_n, B_n, D_n$ ($n = 1, 2, \dots$) определяются из граничных условий

$$u(r_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u(r_2, \varphi) = f_2(\varphi).$$

Пример. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса r_0 с центром в начале координат и такую, что

$$u|_{r=r_0} = 3 + 5 \cos \varphi.$$

« Задача сводится к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta u = 0 \quad (14)$$

при граничном условии

$$u|_{r=r_0} = 3 + 5 \cos \varphi. \quad (15)$$

Будем искать решение задачи в виде ряда

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Из граничного условия (15) имеем

$$u(r_0, \varphi) = 3 + 5 \cos \varphi = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Отсюда в силу ортогональности системы функций $1, \sin \varphi, \cos \varphi, \dots$ на отрезке $[0, 2\pi]$ получаем

$$A_0 = 3, \quad r_0 A_1 = 5, \quad A_n = 0 \quad \forall n \geq 2, \quad B_n = 0 \quad \forall n.$$

Искомое решение

$$u(r, \varphi) = 3 + \frac{5}{r_0} r \cos \varphi, \quad \text{или} \quad u(x, y) = 3 + \frac{5}{r_0} x. \quad \blacktriangleright$$

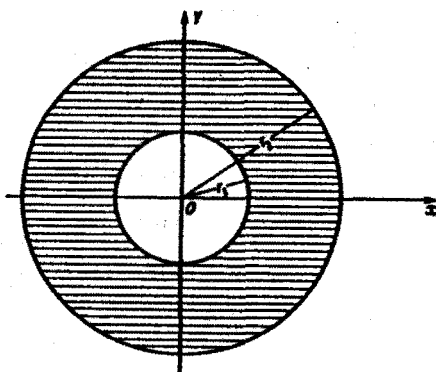


Рис. 8

§ 7. Интеграл Пуассона

Преобразуем формулу (11) предыдущего параграфа к более простому виду. Подставив в нее выражения для коэффициентов Фурье и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n (\cos nt \cos n\varphi + \sin nt \sin n\varphi) \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\varphi - t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Положим для краткости $\frac{r}{r_0} = \tau$ ($\tau < 1$) и проведем следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \cos n(\varphi - t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n [e^{in(\varphi-t)} + e^{-in(\varphi-t)}] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\tau e^{i(\varphi-t)})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\tau e^{-i(\varphi-t)})^n \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tau e^{i(\varphi-t)}}{1 - \tau e^{i(\varphi-t)}} + \frac{\tau e^{-i(\varphi-t)}}{1 - \tau e^{-i(\varphi-t)}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \tau^2}{1 - 2\tau \cos(\varphi - t) + \tau^2}.$$

Подставляя это выражение в (16), получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}{1 - 2\frac{r}{r_0} \cos(\varphi - t) + \frac{r^2}{r_0^2}} dt,$$

или

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - t) + r^2} dt. \quad (17)$$

Полученная формула дает решение первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$ внутри круга K_{r_0} и называется *интегралом Пуассона*, а выражение $\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - t) + r^2}$ называют *ядром Пуассона*.

Решение внешней краевой задачи имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - t) + r_0^2} dt \quad (r > r_0).$$

Можно показать, что если функция $f(\varphi)$ только непрерывна на границе круга K_{r_0} , то функция

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - t) + r^2} dt & \text{при } r < r_0, \\ f(\varphi) & \text{при } r = r_0 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при $r < r_0$ и непрерывна в замкнутом круге $\bar{K}_{r_0}$.

Упражнения

Найдите функцию, гармоническую внутри круга радиуса r_0 с центром в начале координат и такую, что

$$1. u|_{r=r_0} = 2 + 3 \sin \varphi. \quad 2. u|_{r=r_0} = \sin^2 \varphi.$$

Найдите функцию, гармоническую внутри круга радиуса r_0 с центром в начале координат и такую, что

$$3. \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = A \cos \varphi \quad (A = \text{const}). \quad 4. \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 2 \sin^2 \varphi.$$

5. Найдите функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

$$u|_{r=1} = 1 - \cos \varphi, \quad u|_{r=2} = \sin 2\varphi.$$

6. Найдите стационарное распределение температуры в однородном секторе $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$. Температура на прямолинейных участках границы равна нулю, а на дуге окружности задано линейное распределение. **Указание.** Задача сводится к решению уравнения $\Delta u = 0$ в секторе при граничных условиях $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0$, $u|_{r=a} = A\varphi$ ($A = \text{const}$).

Ответы

1. $u(r, \varphi) = 2 + 3 \frac{r}{r_0} \sin \varphi$. 2. $u(r, \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos 2\varphi$. 3. $u = A_0 + Ar \cos \varphi$, где A_0 — произвольная постоянная. 4. Задача решения не имеет. 5. $u(r, \varphi) = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left(\frac{r}{3} - \frac{4}{3r} \right) \cos \varphi + \frac{4}{15} \left(r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\varphi$. 6. $u(r, \varphi) = \frac{\alpha A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi$.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

При решении прикладных задач часто возникает необходимость преобразовать заданную область в область более простого вида, причем так, чтобы сохранялись углы между кривыми. Преобразования, наделенные таким свойством, позволяют успешно решать задачи аэро- и гидродинамики, теории упругости, теории полей различной природы и многие другие.

Мы ограничимся преобразованиями плоских областей.

Непрерывное отображение $w = f(z)$ плоской области $\mathcal{D}$ в область на плоскости называется *конформным в точке $z_0 \in \mathcal{D}$* , если в этой точке оно обладает свойствами постоянства растяжения и сохранения углов.

Открытые области $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ называются *конформно эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение одной из этих областей на другую, конформное в каждой точке.

Теорема Римана. Любые две плоские открытые односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, конформно эквивалентны.

Основной проблемой при решении конкретных задач является построение по заданным плоским областям *явного* взаимно однозначного конформного отображения одной из них на другую. Один из способов решения этой проблемы в плоском случае — привлечение аппарата теории функций комплексного переменного.

Как уже отмечалось выше, однолистная аналитическая функция с отличной от нуля производной осуществляет конформное отображение своей области задания на ее образ.

При построении конформных отображений весьма полезно следующее правило.

Принцип соответствия границ. Пусть в односвязной области $\mathcal{D}$ комплексной плоскости z , ограниченной контуром γ , задана однозначная аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в замыкании $\overline{\mathcal{D}}$ и отражающая контур γ на некоторый контур γ' комплексной плоскости w . Если при этом сохраняется направление обхода контура, то функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathcal{D}$ комплексной плоскости z на область $\mathcal{D}'$ комплексной плоскости w , ограниченную контуром γ' (рис. 1).

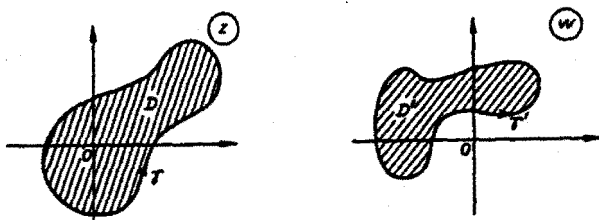


Рис. 1

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы, используя найденные ранее области однолиственности основных элементарных функций комплексного переменного, научиться строить конформные отображения открытых односвязных плоских областей, часто встречающихся в приложениях, на две стандартные области — *верхнюю полуплоскость* и *единичный круг* (рис. 2).

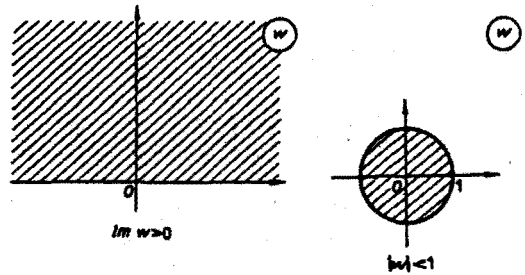


Рис. 2

Для более эффективного использования приводимой ниже таблицы полезны некоторые простейшие преобразования комплексной плоскости.

Преобразования плоскости, осуществляющие:

1. параллельный перенос (сдвиг на заданное комплексное число a) (рис. 3),

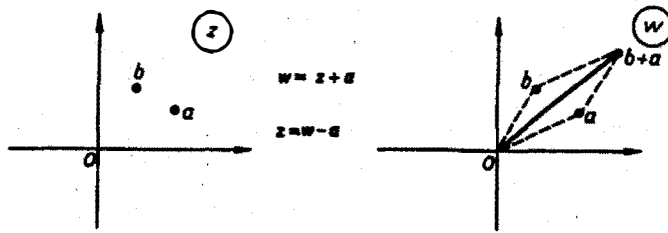


Рис. 3

2. поворот (на заданный угол φ) (рис. 4),

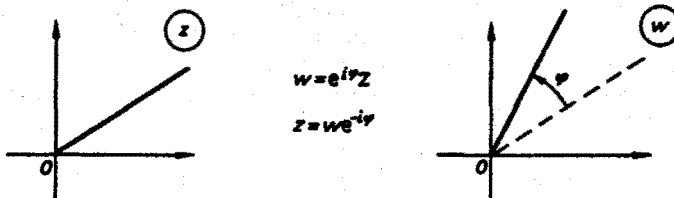


Рис. 4

3. растяжение ($k > 1$) или сжатие ($0 < k < 1$) (рис. 5).

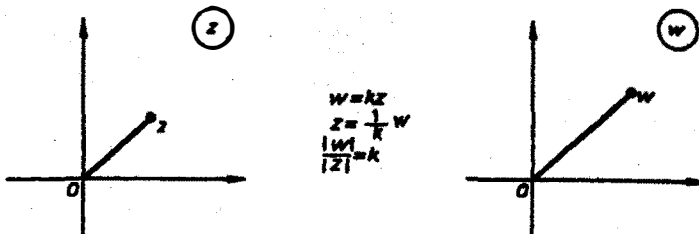


Рис. 5

Тем самым, преобразование вида $w = az + b$, $a \neq 0$ любой круг можно сделать единичным кругом с центром в нуле (рис. 6), любую полуплоскость можно сделать верхней полуплоскостью, любой отрезок прямой можно преобразовать в отрезок $[0, 1]$ вещественной оси (рис. 7), любой луч — в положительный луч вещественной оси (рис. 8).

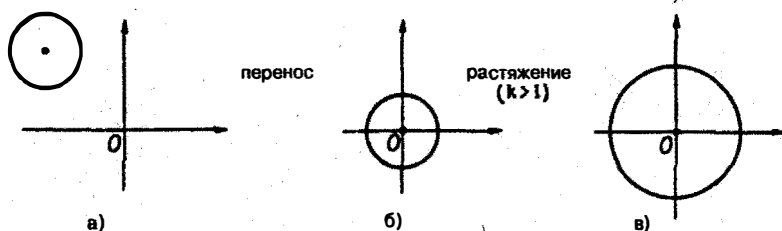


Рис. 6

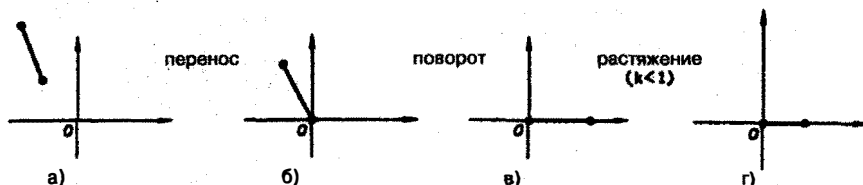


Рис. 7

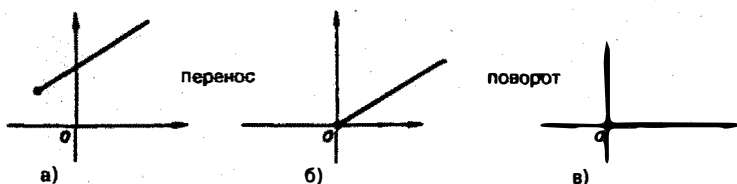


Рис. 8

4. Преобразование плоскости z , переводящее три различные точки z_1, z_2, z_3 в три различные точки w_1, w_2, w_3 плоскости

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

(рис. 9).

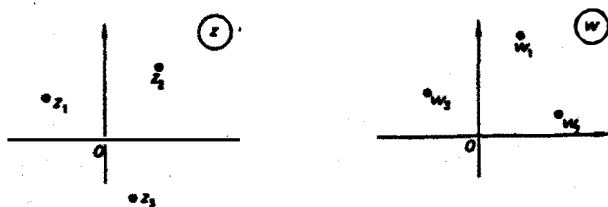


Рис. 9

Рассмотрим пример, показывающий, как пользоваться приведенной ниже таблицей.

Пример 1. Отобразить круг

$$|z - (2 + 2i)| < 3$$

с разрезом по радиусу

$$\arg z = \frac{\pi}{4}, \quad 1 + 2\sqrt{2} \leq |z| < 3 + 2\sqrt{2}$$

(рис. 10) взаимно однозначно и конформно на единичный круг с центром в нуле.

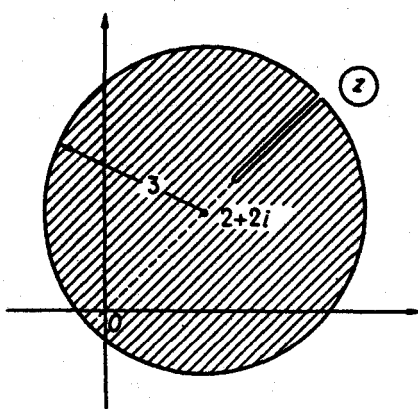


Рис. 10

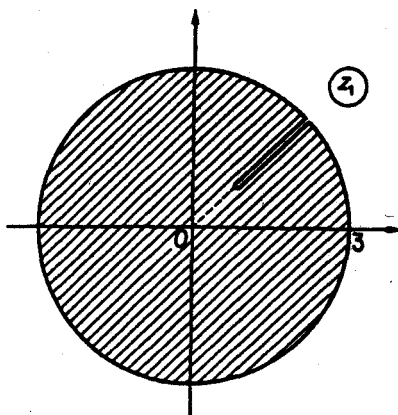


Рис. 11

◀ **А.** Применяя простейшие преобразования плоскости, приведем заданную область к области, имеющейся в таблице.

1. Переместим центр заданного круга в нулевую точку (см. рис. 11):

$$z_1 = z - (2 + 2i).$$

Имеем: круг $|z_1| < 3$ с разрезом $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $1 \leq |z_1| < 3$.

2. Повернем полученный круг по часовой стрелке на угол (см. рис. 12)

$$z_2 = z_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} = z_1 \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}.$$

Имеем: круг $|z_2| < 3$ с разрезом $\arg z_2 = 0$, $1 \leq |z_2| < 3$.

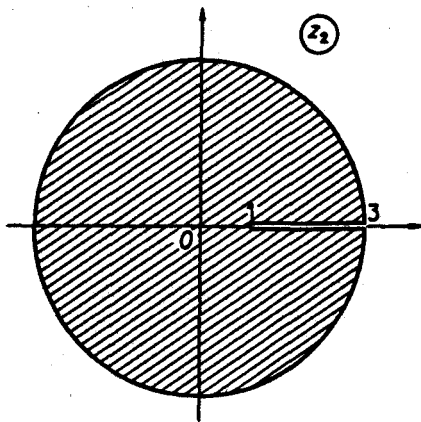


Рис. 12

3. Сожмем круг в три раза (см. рис. 13)

$$z_3 = \frac{z_2}{3}.$$

Имеем: круг $|z_3| < 1$ с разрезом $\frac{1}{3} \leq |z_3| < 1$, $\arg z_3 = 0$.

Таким образом, исходная область приводится к имеющейся в таблице при помощи следующего преобразования

$$z_3 = \frac{z - 2 - 2i}{3\sqrt{2}} (1 - i).$$

Б. 1. Указанная область — круг

$$|z_3| < 1 \quad \text{с разрезом} \quad \arg z_3 = 0, \quad \frac{1}{3} \leq |z_3| < 1$$

— приведена в таблице под № 30. Функция Жуковского

$$z_4 = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right)$$

преобразует эту область в плоскость с разрезом по отрезку $[-1, \frac{5}{3}]$ вещественной оси (рис. 14).

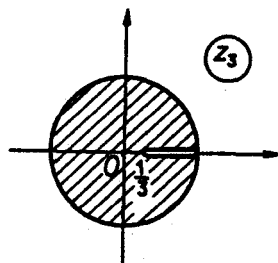


Рис. 13

2. Указанная область приведена в таблице под № 22. Применяя дробно-линейное преобразование

$$z_5 = \frac{z_4 + 1}{\frac{5}{3} - z_4},$$

преобразуем эту область в плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty]$ вещественной оси (рис. 15).

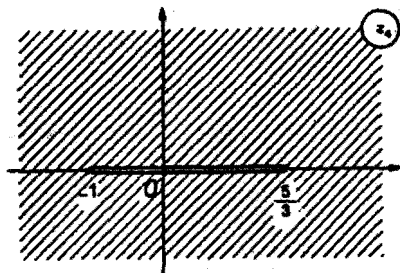


Рис. 14

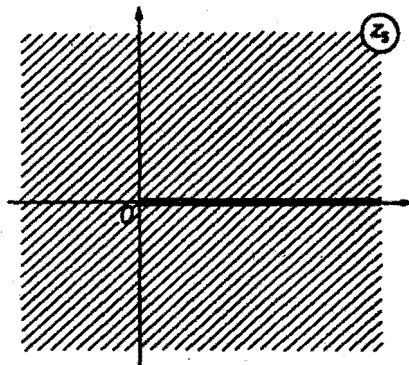


Рис. 15

3. Указанная область приведена в таблице под № 6. Извлекая квадратный корень

$$z_6 = \sqrt{z_5},$$

преобразуем эту область в верхнюю полуплоскость $\text{Im } z_6 > 0$ (рис. 16).

4. Указанная область приведена в таблице под № 11. Применяя дробно-линейное преобразование

$$w = z_7 = \frac{z_6 - 1}{z_6 + i},$$

преобразуем эту область в единичный круг с центром в нуле

$$|w| < 1$$

(рис. 17).

Последовательно выражая z_k через z_{k-1} , получим взаимно однозначное и конформное преобразование заданного на комплексной плоскости z круга с разрезом по радиусу на единичный круг комплексной плоскости w . ►

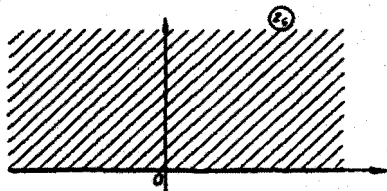


Рис. 16

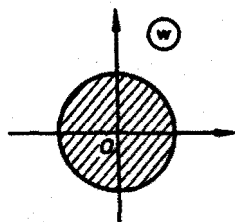


Рис. 17

Конформное отображение заданными областями определяется неоднозначно.

Пример 2. Отобразить полукруг

$$|z| < 1, \quad \text{Im } z > 0$$

(рис. 18) взаимно однозначно и конформно на верхнюю полуплоскость

$$\text{Im } w > 0.$$

◀ А. 1. Дробно-линейное отображение

$$z_1 = \frac{z + i}{1 - z}$$

преобразует заданный полукруг в прямой угол

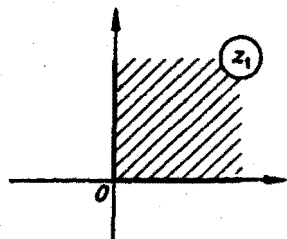
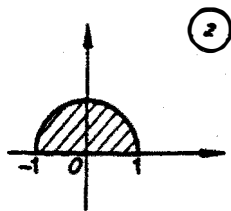


Рис. 18

$$\text{Im } z_1 > 0, \quad \text{Re } z_1 > 0.$$

2. Указанная область приведена в таблице под № 4 ($n = 2$). Возводя в квадрат

$$w = z_1^2,$$

преобразуем эту область в верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

Тем самым, искомое отображение

$$w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2.$$

Б. Заданная область

$$|z| < 1, \quad \text{Im } z > 0$$

приведена в таблице за № 9.

Искомое преобразование имеет вид

$$w = -\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Оба отображения $w = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$ и $w = -\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ переводят взаимно однозначно и конформно заданный полукруг

$$|z| < 1, \quad \text{Im } z > 0$$

в верхнюю полуплоскость

$$\text{Im } w > 0. \quad \blacktriangleright$$

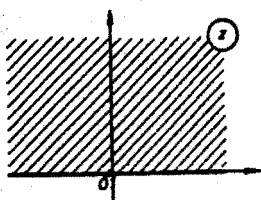
Организация таблицы и правила пользования ею

Таблица строится по следующей схеме: номер по порядку, область $\mathcal{D}$ на комплексной плоскости z , конформное отображение (прямое $w = f(z)$ и обратное $z = g(w)$), область $\mathcal{D}'$ на комплексной плоскости w , конформно эквивалентная области $\mathcal{D}$.

Под каждым номером в приводимой в таблице одной из областей, как правило, является либо верхняя полуплоскость, либо единичный круг с центром в нуле. Как будет показано в конце параграфа, такая стандартизация удобна для практического использования. Часто приводится только преобразование, сводящее заданную область к ранее рассмотренной. В этом случае дается ссылка на преобразование, переводящее полученную область в стандартную (единичный круг с центром в нуле или верхнюю полуплоскость).

Основные элементарные функции

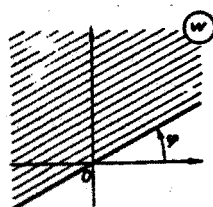
Таблица



$$\text{Im } z > 0$$

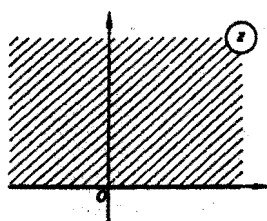
$$w = e^{i\varphi} z$$

$$z = e^{-i\varphi} w$$



$$\varphi < \text{Arg } w < \pi + \varphi$$

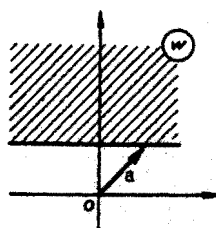
№ 1



$$\operatorname{Im} z > 0$$

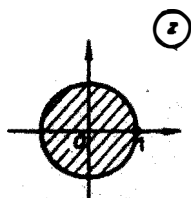
$$w = z + a$$

$$z = w - a$$



$$\operatorname{Im} w > \operatorname{Im} a$$

№ 2

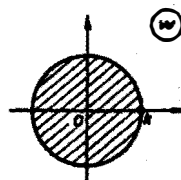


$$|z| < 1$$

$$w = kz$$

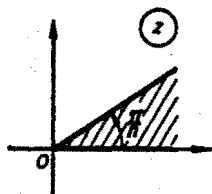
$$z = \frac{1}{k} w,$$

$$k > 1$$



$$|w| < k$$

№ 3

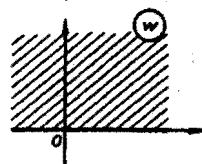


$$0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n$$

$$w = z^n$$

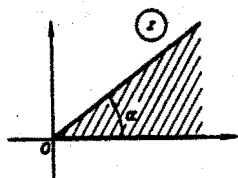
$$z = \sqrt[n]{w},$$

$$n = 2, 3, \dots$$



$$\operatorname{Im} w > 0$$

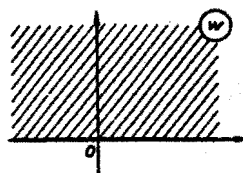
№ 4



$$0 < \operatorname{Arg} z < \alpha < \pi$$

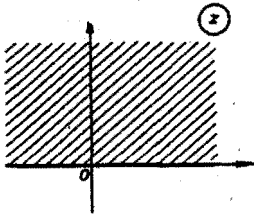
$$w = z^{\pi/\alpha}$$

$$z = w^{\alpha/\pi}$$



$$\operatorname{Im} w > 0$$

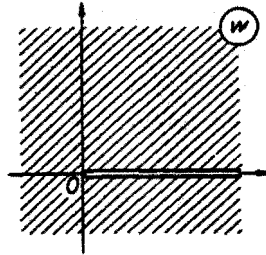
№ 5



$$\operatorname{Im} z > 0$$

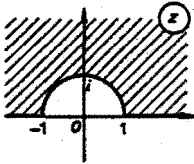
$$w = z^2$$

$$z = \sqrt{w}$$



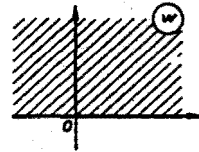
Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

№ 6



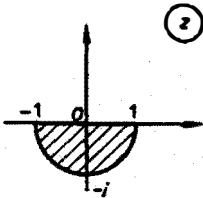
$$\operatorname{Im} z > 0, |z| > 1$$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



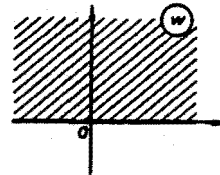
$$\operatorname{Im} w > 0$$

№ 7



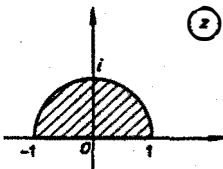
$$\operatorname{Im} z < 0, |z| < 1$$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



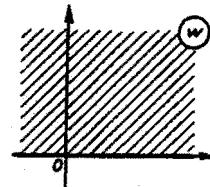
$$\operatorname{Im} w > 0$$

№ 8



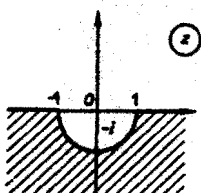
$$\operatorname{Im} z > 0, |z| < 1$$

$$w = -\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



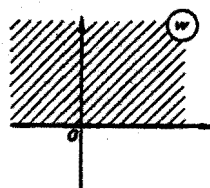
$$\operatorname{Im} w > 0$$

№ 9



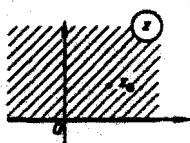
$$\operatorname{Im} z < 0, |z| > 1$$

$$w = -\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



$$\operatorname{Im} w > 0$$

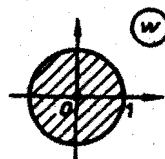
№ 10



$$\operatorname{Im} z > 0$$

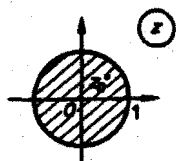
$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

$$w(z_0) = 0$$



$$|w| < 1$$

№ 11

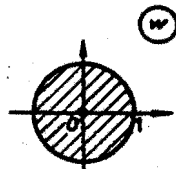


$$|z| < 1$$

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

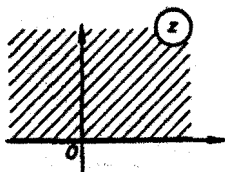
$$w(z_0) = 0$$

$$\operatorname{Arg} w'(z_0) = \alpha$$



$$|w| < 1$$

№ 12

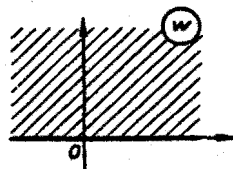


$$\operatorname{Im} z > 0$$

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

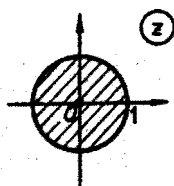
a, b, c, d — действительные

$$ad - bc > 0$$



$$\operatorname{Im} w > 0$$

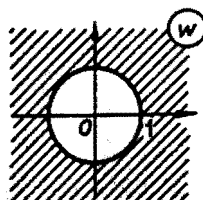
№ 13



$$|z| < 1$$

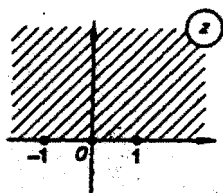
$$w = \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{1}{w}$$



$$|w| > 1$$

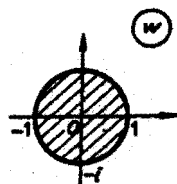
№ 14



$$\operatorname{Im} z > 0$$

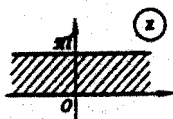
$$\frac{w+1}{w+i} \frac{1+i}{1+1} =$$

$$= \frac{z+1}{z+0} \frac{1-0}{1+1}$$



$$|w| < 1$$

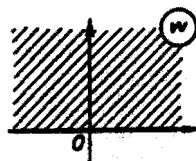
№ 15



$$0 < \operatorname{Im} z < \pi$$

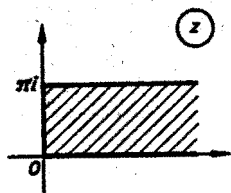
$$w = e^z$$

$$z = \ln w$$



$$\operatorname{Im} w > 0$$

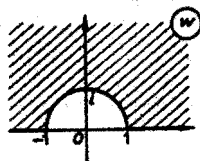
№ 16



$$0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$$

$$w = e^z$$

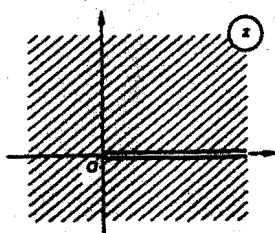
$$z = \ln w$$



$$\operatorname{Im} w > 0, |w| > 1$$

№ 17

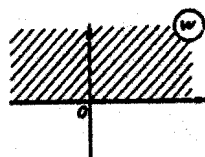
Плоскость с разрезами



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

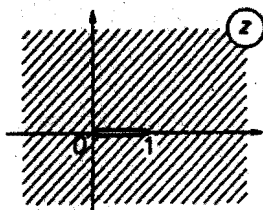
$$w = \sqrt{z}$$

$$z = w^2$$



$\text{Im } w > 0$

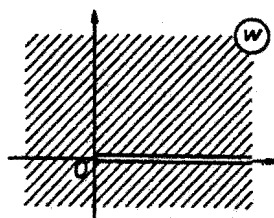
№ 18



Плоскость с разрезом
по отрезку $[0, 1]$

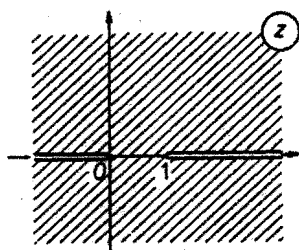
$$w = \frac{z}{1-z}$$

$$z = \frac{w}{w+1}$$



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

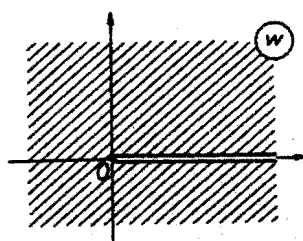
№ 19



Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

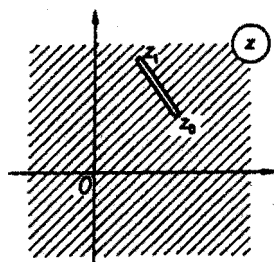
$$w = \frac{z}{z-1}$$

$$z = \frac{w}{w-1}$$



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

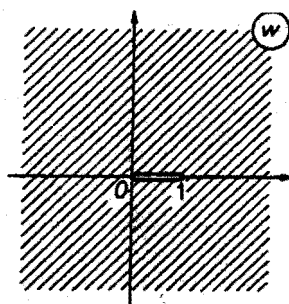
№ 20



Плоскость с разрезом
по отрезку $[z_0, z_1]$

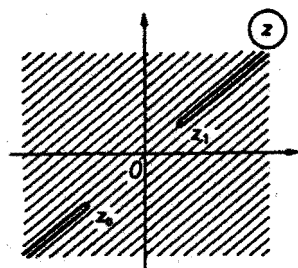
$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезом
по отрезку $[0, 1]$

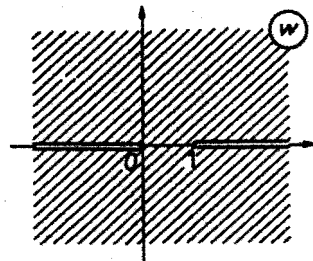
№ 21



Плоскость с разрезами
по лучам, лежащим
на прямой, проходящей через
начало координат

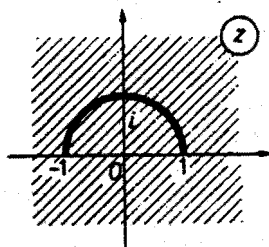
$$w = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)w$$



Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, 0]$ и $[1, +\infty[$

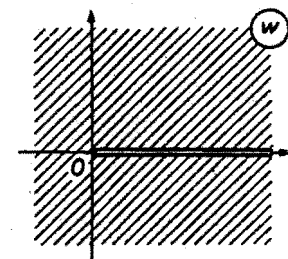
№ 22



Плоскость с разрезом
по дуге окружности
 $|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$

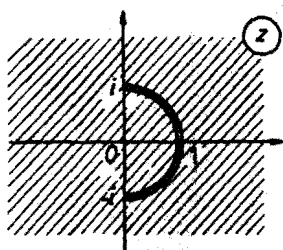
$$w = \frac{1}{i} \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$z = \frac{iw + 1}{1 - iw}$$



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

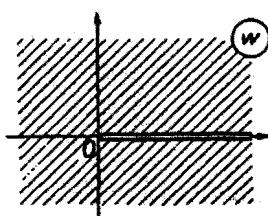
№ 23



Плоскость с разрезом
по дуге окружности
 $|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0$

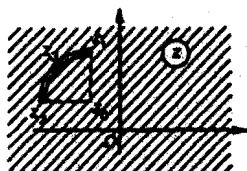
$$w = \frac{1}{i} \frac{z - i}{z + i}$$

$$z = \frac{w + i}{1 + iw}$$



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

№ 24



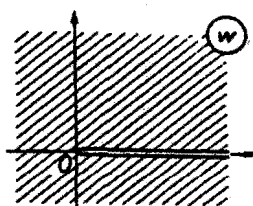
Плоскость с разрезом
по дуге окружности
 $|z - z_0| = r, z = z_0 + re^{i\varphi},$
 $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$

$$w = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

$$z_1 = z(\varphi_1),$$

$$z_2 = z(\varphi_2),$$

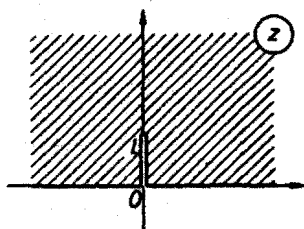
$$z_3 = z\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$



Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[0, +\infty[$

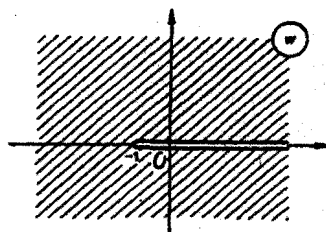
№ 25

Полуплоскость с разрезами



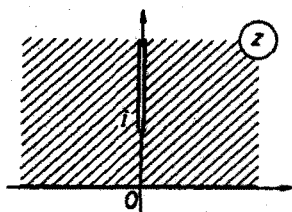
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
с разрезом по отрезку $[0, i]$

$$w = z^2$$



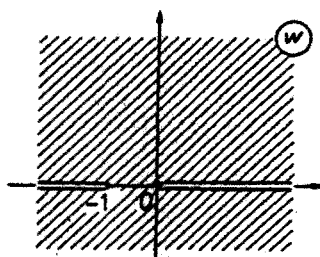
Плоскость с разрезом
по действительному
лучу $[-1, +\infty[$

№ 26



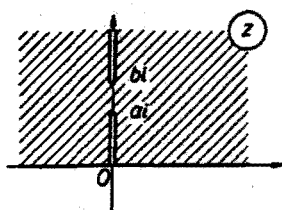
Полуплоскость $\text{Im } z > 0$
с разрезом по отрезку $[i, i + \infty[$

$$w = z^2$$



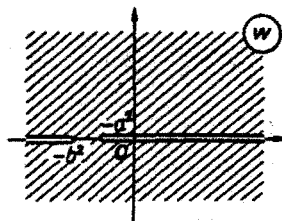
Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, -1]$ и $[0, +\infty[$

№ 27



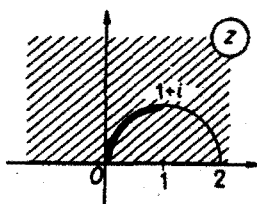
Полуплоскость $\text{Im } z > 0$
с разрезами по отрезку $[0, ai]$
и мнимому лучу $]bi, +i\infty[$
 $0 < a < b$

$$w = z^2$$



Плоскость с разрезами
по действительным
лучам $]-\infty, -b^2]$
и $[-a^2, +\infty[$

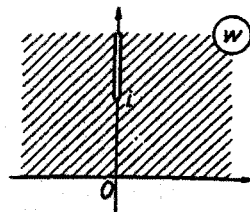
№ 28



Полуплоскость
с разрезом по дуге
окружности
 $|z - 1| = 1, z = 1 + e^{i\varphi},$
 $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$

$$w = \frac{z-1}{z}$$

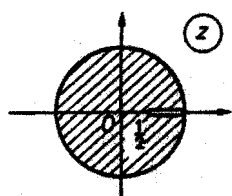
$$z = \frac{1}{1-w}$$



Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезом по мнимому
лучу $[i, i\infty[$

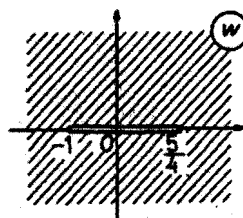
№ 29

Круг с разрезами



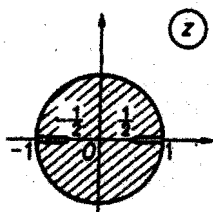
Круг $|z| < 1$
с разрезом
по отрезку $[1/2, 1]$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



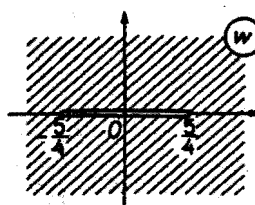
Плоскость с разрезом
по отрезку $[-1, 5/4]$

№ 30



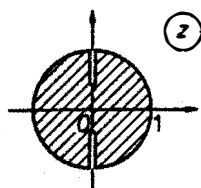
Круг $|z| < 1$
с разрезами
по отрезкам $[-1, -1/2]$ и $[1/2, 1]$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



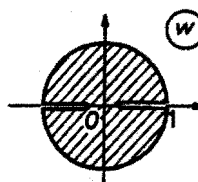
Плоскость с разрезами
по отрезкам $[-5/4, 5/4]$

№ 31



Круг $|z| < 1$
с симметричными
разрезами по мнимой оси

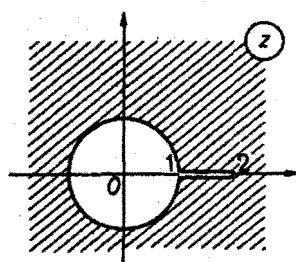
$$w = \frac{z}{i}$$



Круг $|w| < 1$
с симметричными разрезами
по действительной оси

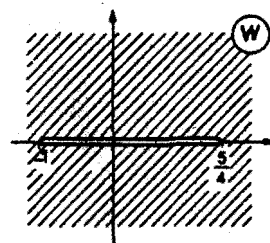
№ 32

Внешность круга с разрезами



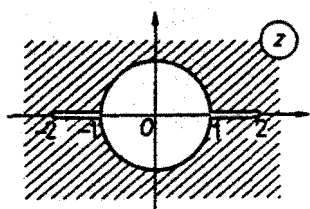
Внешность
единичного круга $|z| > 1$
с разрезом по отрезку $[1, 2]$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



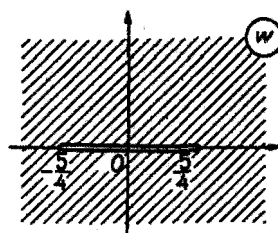
Плоскость с разрезом
по отрезку $[-1, 5/4]$

№ 33



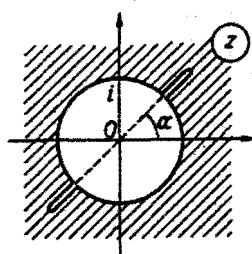
Внешность единичного круга
с разрезом по отрезкам
 $[-2, -1]$ и $[1, 2]$

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



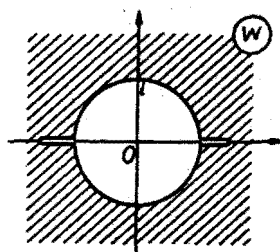
Плоскость с разрезом
по отрезку $[-5/4, 5/4]$

№ 34



Внешность единичного круга $|z| > 1$
с разрезами по отрезкам,
являющимися продолжениями
его диаметра

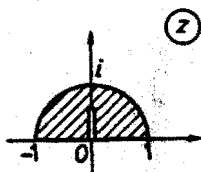
$$w = e^{-i\alpha} z$$



Внешность единичного круга $|w| > 1$
с разрезами по отрезкам,
лежащим на действительной оси

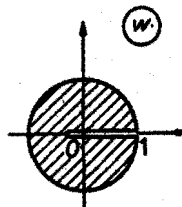
№ 35

Полукруг с разрезами



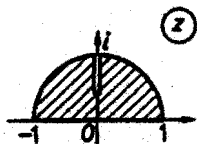
Полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$,
с разрезом по отрезку $[0, i/2]$

$$w = z^2$$



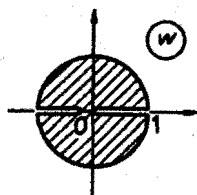
Круг $|w| < 1$
с разрезом по отрезку $[-1/4, 1]$

№ 36



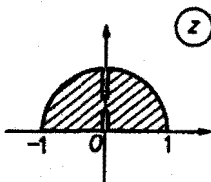
Полукруг $|z| < 1$,
с разрезом по отрезку $[i/2, i]$

$$w = z^2$$



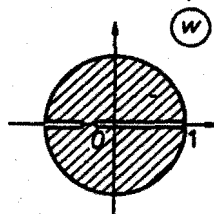
Круг $|w| < 1$
с разрезами по отрезкам
 $[-1, -1/4]$ и $[0, 1]$

№ 37



Полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$,
с разрезами по отрезкам
 $[0, ai]$ и $[bi, i]$, где
 $0 < a < b < 1$

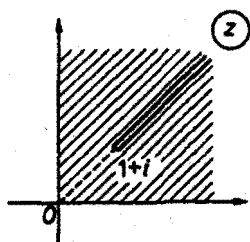
$$w = z^2$$



Круг $|w| < 1$
с разрезами по отрезкам
 $[-1, -b^2]$ и $[-a^2, 1]$

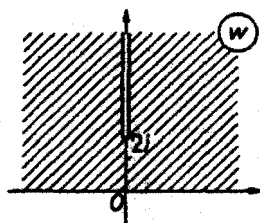
№ 38

Угол с разрезами



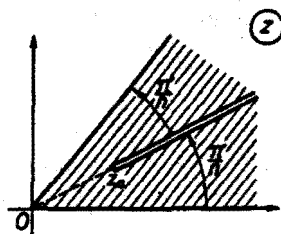
Угол $0 < \text{Arg } z < \pi/2$
с разрезом по действительному
лучу $\text{Arg } z = \pi/4$
с началом в точке $1 + i$

$$w = z^2$$



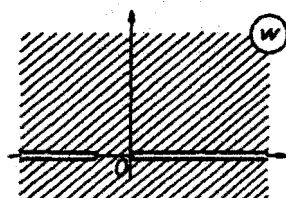
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезом по мнимому лучу
с началом в точке $[2i, +i\infty[$

№ 39



Угол $0 < \text{Arg } z < 2\pi/n$
с разрезом по действительному
лучу $\text{Arg } z = \pi/n$
с началом в точке $z_0 = e^{ia/n}$; $a > 0$

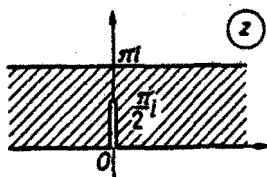
$$w = z^n$$



Плоскость с разрезами
по действительным лучам
 $]-\infty, -a^n]$ и $[0, +\infty[$

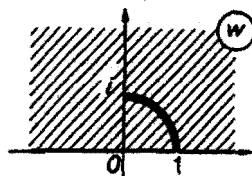
№ 40

Полоса с разрезами



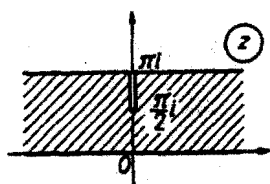
Полоса $0 < \text{Im } z < \pi$
с разрезом по мнимому
отрезку $[0, i\pi/2]$

$$w = e^z$$



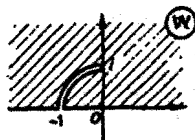
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезом по дуге
окружности $w = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

№ 41



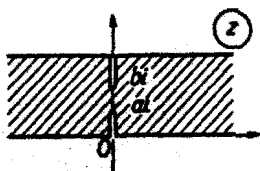
Полоса $0 < \text{Im } z < \pi$
с разрезом по мнимому
отрезку $[\pi i/2, \pi i]$

$$w = e^z$$



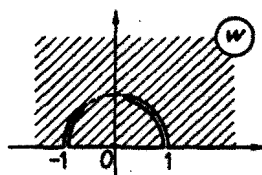
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезом по дуге
окружности $w = e^{iw}$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$

№ 42



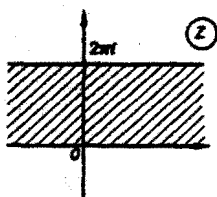
Полоса $0 < \text{Im } z < \pi$
с разрезами по мнимым
отрезкам $[0, ai]$ и $[bi, \pi i]$,
где $0 < a < b < \pi$,

$$w = e^z$$



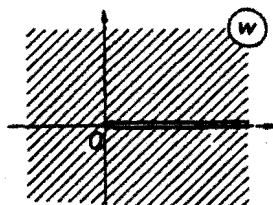
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезами по дуге
окружности $w = e^{iw}$,
где $0 \leq \varphi \leq a$, $b \leq \varphi \leq \pi$

№ 43



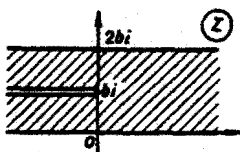
Полоса $0 < \text{Im } z < 2\pi$

$$w = e^z$$



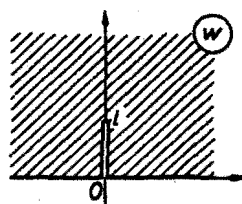
Плоскость с разрезом
по действительному лучу
 $[0, +\infty[$

№ 44



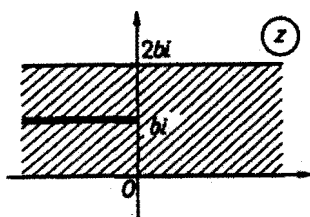
Полоса $0 < \text{Im } z < 2b$ с разрезом
по действительному
лучу $\text{Im } z = b$, $\text{Re } z \leq 0$

$$w = e^{\frac{\pi z}{2b}}$$



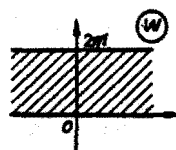
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$
с разрезом по мнимому
отрезку $[0, i]$

№ 45



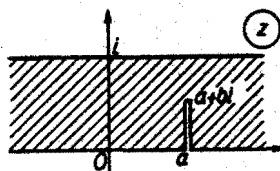
Полоса $0 < \text{Im } z < 2b$
с разрезом
по действительному
лучу $\text{Im } z = b$, $\text{Re } z \leq 0$

$$w = \ln(e^{\pi z/b} + 1)$$



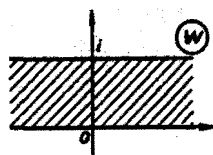
Полоса $0 < \text{Im } w < 2\pi$

№ 46



Полоса $0 < \text{Im } z < 1$
с разрезом
по действительному
лучу $\text{Re } z = a$,
 $0 \leq \text{Im } z \leq b < 1$

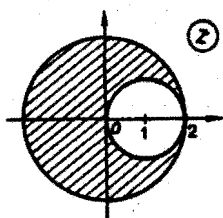
$$w = \sqrt{\text{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} + \text{tg}^2 \frac{\pi b}{2}}$$



Полоса $0 < \text{Im } w < 1$

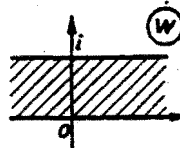
№ 47

Различные области



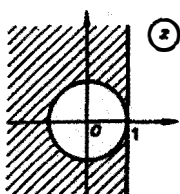
Область $|z| < 2$, $|z - 1| > 1$

$$w = 2i \frac{z}{z-2}$$



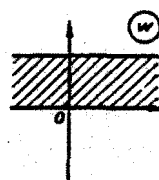
Полоса $0 < \text{Im } w < 1$

№ 48



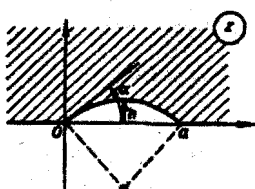
Область с удаленным кругом
 $\operatorname{Re} z < 1, |z| > 1$

$$w = i \frac{z+1}{z-1}$$



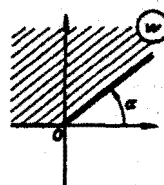
Полоса $0 < \operatorname{Im} w < 1$

№ 49



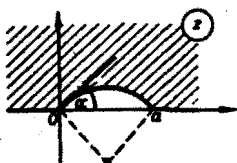
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
 с удаленным круговым
 сегментом

$$w = \frac{z}{a-z}$$



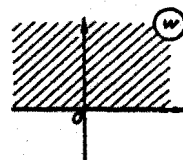
Угол $\alpha < \operatorname{Arg} w < \pi$

№ 50



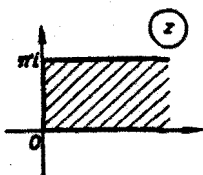
Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$
 с удаленным круговым
 сегментом

$$w = - \left(\frac{z}{z-a} \right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$



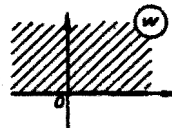
Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 51



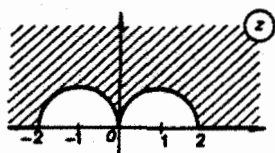
Полуполоса
 $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0$

$$w = \operatorname{ch} z$$



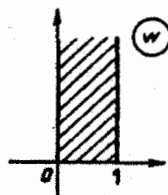
Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

№ 52



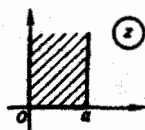
Полуплоскость $\text{Im } z > 0$
с удаленными полукругами

$$w = \frac{z-2}{z}$$



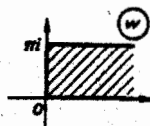
Полуполоса $0 < \text{Re } w < 1$,
 $\text{Im } w > 0$

№ 53



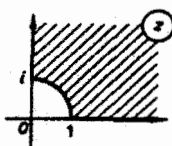
Полуполоса $0 < \text{Re } z < a$,
 $\text{Im } z > 0$

$$w = \pi \frac{z-a}{i}$$



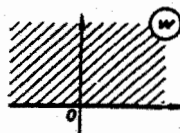
Полуполоса $0 < \text{Im } w < \pi$,
 $\text{Re } w > 0$

№ 54



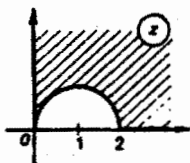
Угол $\text{Im } z > 0$, $\text{Re } z > 0$
с удаленным сектором
единичного круга $|z| < 1$

$$w = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)$$



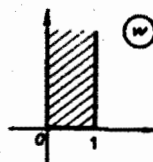
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$

№ 55



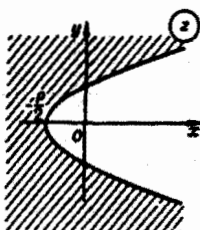
Угол $\text{Im } z$, $\text{Re } z > 0$
с удаленным полукругом

$$w = -\frac{2}{z}$$



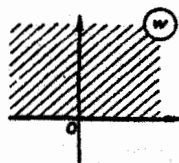
Полуполоса $0 < \text{Re } w < 1$,
 $\text{Im } w > 0$

№ 56



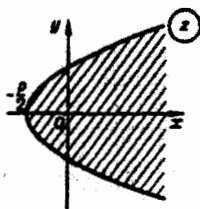
Внешность параболы
 $y^2 = 2p(x + p/2), p > 0,$
 $z = x + iy$

$$w = \sqrt{z} - i\sqrt{\frac{p}{2}}$$



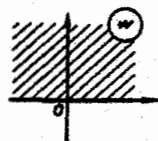
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$

№ 57



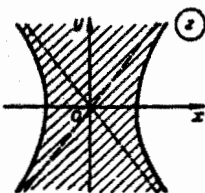
Внутренность параболы
 $y^2 = 2p(x + p/2), p > 0,$
 $z = x + iy$

$$w = i\sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{z}{2p}}$$



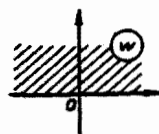
Полуплоскость $\text{Im } w > 0$

№ 58



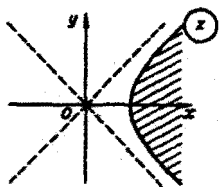
Внешность гиперболы
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2},$
 $\theta = \arcsin \frac{a}{c}$

$$w = \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{c e^{i\theta}} \right)^{\frac{\pi}{\pi - 2\theta}}$$



Полуплоскость $\text{Im } w > 0$

№ 59

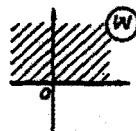


Внутренность правой
ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

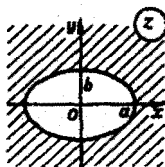
$$\theta = \arcsin \frac{a}{c}$$

$$w = i\sqrt{2} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2\theta} \operatorname{Arch} \frac{z}{c} \right)$$



Полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

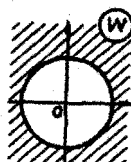
№ 60



Внешность эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}$$



Внешность круга $|w| > 1$

№ 61

Предметный указатель

А

Абеля теорема 170

Б

бета-функция 136

В

волна синусоидальная 256

выражение подынтегральное 5

вычет функции 190

— в бесконечно удаленной точке 193

Г

гамма-функция 133

Гаусса—Остроградского теорема 82

— формула 82

Гельмгольца уравнение 307

градиент 66, 68

граница области 53

— многосвязная 53

— односвязная 53

— , связанные компоненты 53

— на комплексной плоскости 140

Грина формула

Д

Даламбера формула 257

дивергенция 88

Дирака функция 296

Дирихле задача 307

дифференциал 5

— длины дуги 115

Дюамеля формула 239

Ж

Жордана лемма 197

Жуковского функция 152

З

задача Дирихле 307

— корректная 260

— Коши 252

— краевая 252

— — внешняя 307

— — внутренняя 307

— — 1-я 307

— — 2-я 307

— — 3-я 307

— Неймана 307

— смешанная 252, 263

— Штурма—Лиувилля 264

значение главное логарифма 155

— собственное 264, 276

— среднее функции 8

И

изображение функции 223

изолированная особая точка 187

— — — полюс 187, 193

— — — порядка n 189

— — — существенно особая 187, 193

— — — устранимая 187, 193

инвариант 63, 67

интеграл двойной 5

— зависящий от параметра 125

— — — несобственный 1-го рода 129

— — — — — сходящийся 130

— — — — — абсолютно 130

— — — — — равномерно 130

— — — — — 2-го рода 133

— криволинейный 1-го рода 44

— — 2-го рода 49

— несобственный кратный по неограниченной области расходящийся 39

— — — — — сходящийся 39

— от функций комплексного переменного 157

— повторный 10

— Пуассона 294, 319

— тройной 27

— Фурье 207

— — в комплексной форме 209

— — , спектральная плотность 213

интегралы Френеля 200

источник 87

К

- контур 141
 - , внешность 141
 - , внутренность 141
 - интегрирования 45
- координаты криволинейные 15, 113
 - цилиндрические 30, 113
 - сферические 32, 114
- косинус-преобразование Фурье 212
- Коши задача 252
 - неравенство 186
 - теорема 159
 - формула интегральная 166
- Коши—Адамара формула 173
- Коши—Римана условия 145
- коэффициенты Ламэ 115
- кривая гладкая 44
 - , длина дуги 44
 - кусочно-гладкая 44
- круг на комплексной плоскости единичный 322
 - — — открытый 140
- сходимости комплексного степенного ряда 172

Л

- Лапласа уравнение 111, 148
- лапласиан 111
- лемма Жордана 197
- линия векторная 70
 - координатная 15, 113
 - — , семейство 15
 - силовая 70
 - тока 70
- Лиувилля теорема 179
- Лорана ряд 181, 184

М

- Меллина формула 234
- метод энергетический доказательства единственности решения смешанной задачи 283
 - Фурье (разделения переменных) решения уравнения с частными производными 263
- многочлен n -й степени комплексного переменного 152
- множество замкнутое 141
 - открытое 140
 - связанное 140
- момент статический 35

Н

- Неймана задача 307
- неравенство Коши 186
- нуль n -го порядка аналитической функции 180
- Ньютона—Лейбница формула 162

О

- области конформно эквивалентные 321

- область зависимости для решения Даламбера 258
 - замкнутая 141
 - звездная 20
 - интегрирования 5
 - интегрируемая 27
 - квадрируемая 3
 - на комплексной плоскости 140
 - — — многосвязная 141
 - — — односвязная 141
 - неограниченная 39
 - ограниченная 3
 - поверхностно односвязная 98
 - связанная 3
 - частичная 3
 - — , диаметр 4
- окрестность бесконечно удаленной точки 141, 193
- оператор Лапласа 111
 - Штурма—Лиувилля 277
- операции дифференциальные 2-го порядка 110
- определитель функциональный (якобиан) 16
- отображение 14
 - взаимно однозначное 14
 - конформное 149
 - — в точке 321

П

- первообразная функции 161
- плоскость расширенная комплексного переменного 141
- площадь поверхности 22
- поверхность гладкая 21
 - координатная 113
 - натянутая на контур 91
 - неориентируемая (односторонняя) 75
 - ориентируемая (двусторонняя) 75
 - уровня 62
 - эквипотенциальная 102
- показатель роста функции 222
- поле 62
 - векторное 69
 - — безвихревое 93
 - — плоское 71
 - — , потенциал 102
 - — потенциальное 102
 - — соленоидальное (трубчатое) 90
 - скалярное 62
 - — , градиент 66, 68
 - — лапласово (гармоническое) 111
 - — плоское 62
 - — , поверхность уровня 62
- порядок дифференциального уравнения 245
- последовательность комплексных чисел, сходящаяся к бесконечно удаленной точке 141
- потенциал векторного поля 102
 - двойного слоя 311
 - — — логарифмический 312
 - — — объемный 311
 - — — простого слоя 311
 - — — логарифмический 312
- поток вектора (векторного поля) 73

- жидкости через поверхность 72, 73
- предел верхний 173
- преобразование интегральное 205
 - — , ядро 205
 - Лапласа 223
 - Фурье 209
 - — косинус 212
 - — многомерное 220
 - — обратное 209
 - — синус 212
- производная по направлению 63
- Пуассона интеграл 294, 319
- уравнение 307

Р

- радиус сходимости степенного ряда 172
- решение дифференциального уравнения с частными производными 245
- Даламбера (общее) волнового уравнения 255
- фундаментальное уравнения теплопроводности 296
- Римана теорема 321
- ротор 93
- ряд комплексных чисел сходящийся 168
 - — — абсолютно
 - функциональный 169
 - — сходящийся 169
 - — равномерно 169
 - Лорана 181, 184
 - — , главная часть 184
 - — , правильная часть 184
 - Тейлора 176
 - степенной 170

С

- свертка 217, 231
- свойство аддитивности 3
- постоянства напряжений 149
- сохранения углов 149
- синус-преобразование Фурье 212
- система координат ортогональная 115
- Сохоцкого теорема 189
- спектр задачи о собственных значениях 276
 - функции амплитудный 214
 - — фазовый 214
- сток 87
- струна 254
- сумма интегральная 4, 24, 44
 - — комплексная 157
 - комплексного числового ряда 168
 - — — частичная 168

Т

- Тейлора теорема 175
 - ряд 176
- тело цилиндрическое 3
 - — , основание 3
- теорема Абеля 170
- алгебры основная 179

- Гаусса—Остроградского 82
- Коши 159
 - — для многосвязной области 164
- Лиувилля 179
- обращения 234
- Римана 321
- Сохоцкого 189
- Тейлора 175
- точка внутренняя 140
 - граничная 140
 - интегрирования конечная 45
 - — начальная 45
 - — переменная 5
 - — , ε -окрестность 140
 - — , проколота окрестность 187
 - особая изолированная 187, 192
 - разветвления 163
 - — алгебраическая n -го порядка 163
 - — логарифмическая 163
- трубка векторная 90

У

- уравнение волновое 253
 - Вольтерра интегральное линейное 2-го рода 241
 - Гельмгольца 307
 - дифференциальное с частными производными 245
 - — — — — линейное 246
 - — — — — гиперболическое 249
 - — — — — , канонический вид 249
 - — — — — неоднородное 247
 - — — — — однородное 247
 - — — — — параболическое 249
 - — — — — эллиптическое 249
 - — — — — нелинейное 246
 - диффузии частиц 292
 - Лапласа 111, 148
 - — , решение фундаментальное в пространстве 308
 - — — — — на плоскости 308
 - — — — — операторное 238
 - — — — — Пуассона 307
 - — — — — теплопроводности 292
- уравнения мнимой натуральные 45
- условия Коши—Римана 145

Ф

- формула Гаусса—Остроградского 82
 - Грина
 - — 1-я 309
 - — 2-я 309
 - — 3-я 309
 - Даламбера 257
 - Дюамеля 239
 - замены переменных в тройном интеграле 30
 - Коши—Адамара 173
 - Коши интегральная 166
 - Меллина (обращения преобразования Лапласа) 234

- Ньютона—Лейбница 162
- среднего значения 167
- Фурье интегральная 207
- Эйлера 153
- Френеля интегралы 200
- Функция бета 136
 - гамма 133
 - гармоническая 148, 306
 - Дирака 296
 - Жуковского 152
 - интегрируемая в области 5
 - — — вдоль кривой 45
 - комплексного переменного 142
 - — — аналитическая в бесконечно удаленной точке 192
 - — — в области 147
 - — — в точке 147
 - — — действительная часть 142
 - — — дифференцируемость 144
 - — — дробно-линейная 150
 - — — дробно-рациональная 152
 - — — корень n -й степени 152
 - — — линейная 150
 - — — логарифмическая 155
 - — — мнимая часть 142
 - — — многозначная 142
 - — — многолистная 142
 - — — непрерывная в точке 144
 - — — на множестве 144
 - — — однолистная 142
 - — — показательная 153
 - — — предел 143
 - — — производная 144
 - — — степенная 151
 - — — тригонометрическая 155

- оригинал 222
- подынтегральная 5
- собственная 264, 276
 - — нормированная с весом $\rho(x)$ 276
- спектральная 209, 213
- Фурье интеграл 207
 - преобразование 209
 - формула интегральная 207

Ш

- Штурма—Лиувилля задача 264

Ц

- центр тяжести 35
- циркуляция 92

Э

- Эйлера формула 153
- элемент объема в сферических координатах 33
 - — в цилиндрических координатах 31
- площади поверхности 5, 23
 - — — в криволинейных координатах 16

Я

- ядро преобразования 205
 - Пуассона 319
- якобиан 16

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди недавно вышедших книг мы предлагаем Вам следующие.

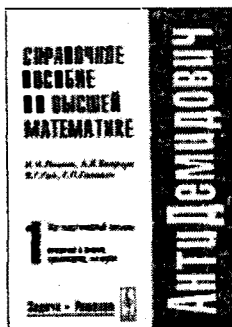
- Пригожин И., Стенгерс И. *Время, хаос, квант. К решению парадокса времени.*
- Боровков А. А. *Теория вероятностей.*
- Боровков А. А. *Эргодичность и устойчивость случайных процессов.*
- Пытьев Ю. П. *Возможность. Элементы теории и применения.*
- Гнеденко Б. В. *О математике.*
- Шикин Е. В. *От игр к играм.*
- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения. 5-е издание, исправленное. Т. 1–3.*
- Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.*
- Волубуев И. П., Кубышин Ю. А. *Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля.*
- Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. *Синергетика и прогнозы будущего.*
- Эбелинг В., Энтель А., Файстель Р. *Физика процессов эволюции.*
- Кириллов В. М. и др. *Решение задач по физике.*
- Шепелев А. В. *Оптика. Готовимся к экзаменам, зачетам, коллоквиумам.*
- Рубаков В. А. *Классические калибровочные поля.*
- Ельяшевич М. А. *Атомная и молекулярная спектроскопия.*
- Морозов А. Д. и др. *Инвариантные множества динамических систем в Windows.*
- Картан Э., Козлов В. В. *Интегральные инварианты.*
- Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях.*
- Сарданашвили Г. А. *Современные методы теории поля. Т. 1–4.*
- Коноплева Н. П., Попов В. Н. *Калибровочные поля.*
- Темчин А. Н. *Уравнения Эйнштейна на многообразии.*
- Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. *Применение теории групп в квантовой механике.*
- Неретин Ю. А. *Категории симметрий и бесконечномерные группы.*
- Гетлинг А. В. *Конвекция Рэлея—Бенара. Структуры и динамика.*
- Пытьев Ю. П. *Возможность. Элементы теории и применения.*
- Гейзенберг В. *Собрание научных трудов.*
- Низовцев В. В. *Время и место физики XX века.*

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135-44-23, тел. 135-42-46
или электронной почтой urss@urss.ru.
Полный каталог изданий представлен
в Интернет-магазине: <http://urss.ru>

Издательство УРСС
Научная и учебная
литература

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:



Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. (АнтьДемидович.) В 5 томах.

Книга выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 1 охватывает материал по следующим разделам курса математического анализа: введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, неопределенный и определенный интегралы.

Том 2 посвящен теории рядов и дифференциальному исчислению функций векторного аргумента.

Том 3 включает интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Том 4 посвящен теории функций комплексного переменного. Он является логическим продолжением трех предыдущих ориентированных на практику томов и содержит более четырехсот подробно решенных задач, но при этом отличается более детальным изложением теоретических вопросов и может служить самостоятельным замкнутым курсом теории функций комплексного переменного. Помимо вопросов, обычно включаемых в курсы такого рода, в книге излагается ряд нестандартных — таких, как интеграл Ньютона—Лейбница и производная Ферма—Лагранжа.

Том 5 охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики. Наряду с минимальными теоретическими сведениями в нем содержится более семисот детально разобранных примеров, взятых из ряда широко известных отечественных учебников и сборников задач. Среди вопросов, нестандартных для такого рода пособий, следует отметить примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений.

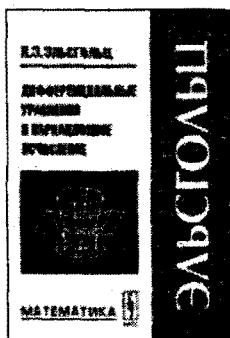
Эльсгольц Л.Э.

Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

Настоящая книга — классический учебник по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению для студентов физических и физико-математических факультетов университетов.

Цель данного учебника — способствовать глубокому усвоению теории с помощью подробно решенных примеров и задач разного уровня сложности: от простых до самых сложных и нетривиальных. Большинство примеров имеет прямое приложение в физике.

Книга состоит из двух независимых частей. В первой части подробно изложены методы интегрирования дифференциальных уравнений и простейшие способы исследования их решений; вторая часть знакомит читателя с методами решения различных вариационных задач. Каждая глава снабжена задачами для самостоятельного решения.



**Издательство
УРСС**

(095) 135-42-46,
(095) 135-44-23,
urss@urss.ru

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (095) 925-2457)
«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (095) 263-6342)
«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40. Тел. (095) 137-0633)
«Дом книги на Соколе» (м. Сокол, Ленинградский пр., 78/1. Тел. (095) 162-6367)
«Дом деловой книги» (м. Пятницкая, ул. Марксистская, 9. Тел. (095) 270-3427)
«Мех.-мат. МГУ» (м. Университет, Воробьевы горы, ДС МГУ. Тел. (095) 939-1263)
Книжки фирмы «Аргумент 2001» (м. Университет, 2 г-н. в. МГУ. Тел. (095) 939-2776)
«С.-Пб. техническая книга» (С.-Пб., ул. Пушkinsкая, 40. Тел. (812) 325-3589)
«С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 371-3954)

Издательство УРСС



Представляет Вам свои лучшие книги:

Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А.
Задачи и упражнения по численным методам.

Учебное пособие поддерживает курс по численным методам, который читается в вузах с повышенной математической подготовкой. Задачи и упражнения охватывают все основные разделы численного анализа: интерполирование функций, численное интегрирование, прямые и итерационные методы линейной алгебры, спектральные задачи, системы нелинейных уравнений, задачи минимизации функций, интегральные уравнения, краевые задачи и задачи с начальными данными для обыкновенных уравнений и уравнений с частными производными. Каждый раздел содержит небольшой справочный материал, упражнения (задачи с решениями) и набор задач для самостоятельной работы.

**Колоколов И. В., Кузнецов Е. А., Мильштейн А. И., Подивилов Е. В.,
Черных А. И., Шапиро Д. А., Шапиро Е. Г.**
Задачи по математическим методам физики.

Предлагаемый сборник задач — результат 15-летнего опыта преподавания по новой методике математических методов физики на физическом факультете Новосибирского государственного университета. Сборник включает в себя более 350 задач по уравнениям в частных производных, специальным функциям, асимптотическим методам, методу функций Грина, интегральным уравнениям, теории конечных групп, групп Ли и их применениям в физике.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.

В книге дается систематическое изложение основ теории вероятностей, проиллюстрированное большим числом подробно рассмотренных примеров, в том числе и прикладного содержания. Серьезное внимание уделено рассмотрению вопросов методологического характера.

Пригожин И., Стенгерс И.

Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.

Книга лауреата Нобелевской премии Ильи Пригожина и его постоянной сотрудницы Изабеллы Стенгерс посвящена широкому кругу проблем, интенсивно изучаемых в руководимых Пригожиным Международных институтах физики и химии Э. Сольваэ в Брюсселе и Центре исследований по статистической механике и сложным системам в Остине (штат Техас): времени, случайности и хаоса, индетерминизма и необратимости («стрелы времени»), самоорганизации и возникновения диссипативных структур, а также обсуждению различных аспектов и перспектив новой парадигмы современной науки, охватывающей не только естествознание, но и общественные и социальные дисциплины.

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.

Современные проблемы нелинейной динамики.

В книге рассматриваются некоторые ключевые проблемы современной нелинейной динамики. Концепция авторов сводится к тому, что принципиальные трудности, с которыми столкнулся этот междисциплинарный подход, требуют новой парадигмы. В книге сделана попытка наметить ее возможные контуры. На смену эре диссипативных структур и эре динамического хаоса должна прийти новая эпоха. Если многие концепции и базовые математические модели ранее приходили из синергетики из физики, химии, гидродинамики, то теперь их основными поставщиками становятся нейронаука, теория риска, биология, теоретическая история, психология и другие области, связанные с анализом сложных необратимо развивающихся систем.

Обсуждается ряд оригинальных результатов, касающихся математического моделирования нелинейных явлений и анализа временных рядов. Большое внимание уделено таким бурно развивающимся в синергетике подходам как теория инерциальных многообразий, реконструкции аттракторов, теория самоорганизованной критичности, решеточные газы. Это делает книгу интересной для специалистов в нелинейной динамике и смежных областях.

Более чем двадцатилетнее развитие синергетики заставляет подвести предварительные итоги и заново оценить основные идеи, модели, концепции, отредактированные в ходе большого пройденного пути, осмыслить «язык» нелинейной науки. Этому посвящена значительная часть книги, что делает ее полезной широкому кругу студентов, аспирантов и всем, кто хочет ознакомиться с конкретным математическим содержанием нелинейной динамики.

