УРСС

# ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко
Е. В. Шикин
В. И. Заляпин

2

# ВСЯ ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*М.Л.Краснов*
*А.И.Киселев*
*Г.И.Макаренко*
*Е.В.Шикин*
*В.И.Заляпин*

# 2

**Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений**

Издание второе, исправленное

УРСС

Москва • 2004

ББК 22.1я73

**Краснов Михаил Леонтьевич,**
**Киселев Александр Иванович,**
**Макаренко Григорий Иванович,**
**Шикин Евгений Викторович,**
**Заляпин Владимир Ильич**

**Вся высшая математика:** Учебник. Т. 2. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 192 с.

ISBN 5–354–00300–8

Предлагаемый учебник впервые вышел в свет в виде двухтомника сначала на английском и испанском языках в 1990 году, а затем на французском. Он пользуется большим спросом за рубежом.

В 1999 году книга стала лауреатом конкурса по созданию новых учебников Министерства образования России.

Этот учебник адресован студентам высших учебных заведений (в первую очередь будущим инженерам и экономистам) и охватывает практически все разделы математики, но при этом представляет собой не набор разрозненных глав, а единое целое.

Во второй том включен материал по некоторым разделам математического анализа (неопределенный и определенный интегралы, функции нескольких переменных) и дифференциальной геометрии.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 22.10.2003 г.
Формат 70×100/16. Тираж 4000 экз. Печ. л. 12. Зак. № 628.

Отпечатано в типографии ИПО «Профиздат». 109044, г. Москва, Крутицкий вал, 18.

1859 ID 17344 м / 17345 т

9 785354 003006 >

**ISBN 5–354–00270–2** (Полное произведение)
**ISBN 5–354–00300–8** (Том 2)



Издательство УРСС

научная и учебная литература

Тел./факс: 7(095)135–44–23
Тел./факс: 7(095)135–42–46
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в *Internet*: http://URSS.ru

*Глава XII*

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Понятие первообразной

Основной задачей дифференциального исчисления являлось нахождение по заданной функции $f(x)$ ее производной $f'(x)$. В интегральном исчислении основной задачей является обратная задача, которая заключается в нахождении функции $f(x)$ по ее известной производной $f'(x)$. Перейдем к рассмотрению этой задачи.

**Определение.** Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого интервала и ее производная $F'(x) = f(x)$ или, что то же самое, $dF(x) = f(x)\,dx$ для всех $x \in (a, b)$.

**Пример 1.** Функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$, так как

$$F'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

**Пример 2.** Функция

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1,$$

является первообразной для функции $f(x) = a^x$ на интервале $(-\infty, +\infty)$. В самом деле,

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$ на интервале $(a, b)$. В самом деле,

$$\Phi'(x) = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

для всех $x \in (a, b)$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет на $(a, b)$ первообразную, то она имеет на этом интервале бесконечное множество первообразных. Между двумя различными первообразными для одной и той же функции существует тесная связь, которая устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две любые первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то их разность равна некоторой постоянной*

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad C = \text{const}, \ x \in (a, b).$$

◀ Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на $(a, b)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Для нее получаем

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всех $x \in (a, b)$. Возьмем в интервале $(a, b)$ любые две точки $x_0$ и $x$ и применим теорему Лагранжа (о конечных приращениях) к функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0, x]$. Тогда получим

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (x - x_0)\varphi'(\xi), \quad \text{где} \quad x_0 < \xi < x.$$

Так как $\varphi'(x) = 0$ на $(a, b)$, то и $\varphi'(\xi) = 0$ и, значит, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ $\forall x \in (a, b)$, т. е. функция $\varphi(x)$ на $(a, b)$ постоянна. Таким образом, $\Phi(x) - F(x) = C$, где $C = \text{const}$, для всех $x \in (a, b)$. ▶

**Следствие.** *Если $F(x)$ является одной из первообразных для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ имеет вид*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

*где $C$ — некоторая постоянная.*

# § 2. Неопределенный интеграл

**Определение.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенных на интервале $(a, b)$, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Здесь знак $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а $x$ называется *переменной интегрирования*.

Если $F(x)$ является какой-либо первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то в силу следствия будем иметь

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C,}$$

где $C$ — произвольная постоянная. При этом любое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, является равенством между множествами. Такое равенство означает, что эти множества содержат одни и те же элементы — первообразные.

Иногда будем понимать символ $\int f(x)\,dx$ как любой элемент из этой совокупности, т. е. как какую-то из первообразных.

В дальнейшем будет доказана теорема о существовании неопределенного интеграла, а сейчас приведем ее формулировку.

**Теорема 2.** *Функция $f(x)$, непрерывная на интервале $(a, b)$, имеет на этом интервале первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.*

Операцию нахождения первообразной или иеопределенного интеграла от функции $f(x)$ называют *интегрированием функции* $f(x)$. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

## § 3. Свойства неопределенного интеграла

Будем считать, что все рассматриваемые функции определены и непрерывны на одном и том же интервале $(a, b)$, следовательно, на этом интервале существуют неопределенные интегралы от этих функций.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.}$$

◀ В самом деле, так как $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, то

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\big[F(x) + C\big] = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx. ▶$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x),}$$

что следует из свойства 1.

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C.}$$

◀ В самом деле, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C. ▶$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\boxed{\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad A = \text{const},\ A \neq 0.}$$

◀ В силу свойства 2 имеем

$$\left(\int Af(x)\,dx\right)' = Af(x), \quad \left(A\int f(x)\,dx\right)' = A\left(\int f(x)\,dx\right)' = Af(x). ▶$$

Таким образом, $\int Af(x)\,dx$ выражает то же самое множество функций, что и $A\int f(x)\,dx$, т. е. множество первообразных для функции $Af(x)$.

**5.** Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций

$$\boxed{\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.}$$

◀ В силу свойства 2

$$\left(\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

С другой стороны,

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

Таким образом,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$$

являются первообразными для одних и тех же функций $f(x) \pm \varphi(x)$. Следовательно, они отличаются друг от друга на некоторую постоянную $C$. ▶

---

**Следствие.**

$$\int \left[\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \int f_k(x)\,dx,$$

*где* $A_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

---

Так как выражение вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f_k(x) = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x),$$

где все $A_k$ — некоторые постоянные, называется *линейной комбинацией функций* $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то последнее равенство означает, что

---

***неопределенный интеграл от линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации неопределенных интегралов от этих функций.***

---

Свойства 4 и 5 определяют так называемое *линейное свойство* неопределенного интеграла.

# § 4. Табличные интегралы

Каждая формула для производных конкретных функций, т. е. формула вида $F'(x) = f(x)$, может быть обращена, т. е. записана в виде $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C = \text{const}$. Таким путем получается следующая таблица основных интегралов, которые являются обращением основных формул дифференциального исчисления:

1. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1.$

   В частности, при $a = e$ получим

   $$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq n\pi \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$ (для знака «$-$» должно быть $|x| > |a|$).

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad |x| \neq a.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -\operatorname{th} x + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C, \quad x \neq 0.$

Формулы 8 и 10 являются частными случаями более общих формул

8'. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

10'. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C.$

Справедливость всех приведенных выше формул устанавливается с помощью дифференцирования, которое показывает, что производная правой части этих равенств равна подынтегральной функции.

Следует отметить, что если операция дифференцирования элементарных функций всегда приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования элементарных функций может привести к неэлементарным функциям, т. е. к таким функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций. Например, доказано, что

*следующие интегралы не выражаются через элементарные функции:*

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \text{(интеграл Пуассона)},$$

$$\int \sin x^2\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx \qquad \text{(интеграл Френеля)},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \qquad \text{(интегральный логарифм)},\ 0 < x \neq 1,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{(интегральный синус)},\ x \neq 0,$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \text{(интегральный косинус)},\ x \neq 0.$$

Эти интегралы хотя и существуют в силу непрерывности подынтегральных функций в их областях определения, но они не являются элементарными функциями. Некоторые из этих интегралов играют большую роль как в самом математическом анализе, так и в его разнообразных приложениях.

В некоторых случаях с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции данный интеграл можно свести к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

**Пример 1.** Найти неопределенный интеграл

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx.$$

◀ Имеем

$$\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(x^3 - 2 + x^{-3}\right) dx =$$

$$= \int x^3\,dx - 2\int dx + \int x^{-3}\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C. \ ▶$$

**Пример 2.** Найти интеграл

$$\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{(1+x^2)+2x}{x(1+x^2)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C. \ ▶$$

**Пример 3.** Найти интеграл

$$\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{5^x}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{2\cdot 3^x + 3\cdot 2^x}{5^x}\,dx = 2\int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx + 3\int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx = 2\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}} + 3\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} + C. \ ▶$$

# § 5. Интегрирование заменой переменной

Одним из основных приемов интегрирования функций является *замена переменной*.

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$. В подынтегральном выражении положим $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ и обратную функцию $t = \psi(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,} \qquad (1)$$

в правой части которого после интегрирования вместо $t$ надо подставить его выражение через $x$, т. е. функцию $\psi(x)$.

◀ Для доказательства равенства (1) находим производные интегралов, стоящих в его левой и правой частях. Производная по $x$ от левого интеграла равна

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x).$$

Производную по $x$ от правого интеграла находим по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом $t$. Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}, \quad \text{где} \quad \varphi'(t) \neq 0,$$

получим

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot t'_x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Так как производные указанных выше интегралов равны, то эти интегралы определяют одно и то же множество функций, а именно — множество первообразных функций $f(x)$. ▶

Равенство (1) выражает собой часто применяемый на практике метод интегрирования, называемый *интегрированием заменой переменной* или *подстановкой*. Функцию $\varphi(t)$ на практике выбирают так, чтобы интеграл в правой части равенства (1) был более простым, чем первоначальный.

**Пример 1.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0).$$

◀ Положим $x = a\operatorname{sh} t$. Тогда $dx = a\operatorname{ch} t\,dt$ и мы будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\operatorname{ch} t\,dt}{\sqrt{a^2(\operatorname{sh}^2 t+1)}} = \int \frac{a\operatorname{ch} t\,dt}{a\operatorname{ch} t} = \int dt = t + \widetilde{C}.$$

Выразим переменную $t$ через старую переменную $x$. Для этого разрешим равенство $x = a\operatorname{sh} t$ относительно $t$. Так как по определению $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, то

$$a\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x,$$

или

$$ae^{2t} - 2xe^t - a = 0,$$

откуда

$$e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

Учитывая, что $e^t > 0$, берем корень со знаком «+», так что

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

откуда находим

$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C \quad \left(C = \widetilde{C} - \ln a\right). \blacktriangleright$$

**Пример 2.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}.$$

◀ Сделаем замену переменной, положив $x = t^2 - 1$, откуда $dx = 2t\,dt$, $t = \sqrt{x+1}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} \int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной $x$ по формуле $t = \sqrt{x+1}$, получим

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + C. \blacktriangleright$$

**Замечание.** Если в интеграле $\int f(x)\,dx$ подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно представить в виде

$$f(x)\,dx = g\left[\psi(x)\right]\psi'(x)\,dx,$$

т. е.

$$f(x)\,dx = g\left[\psi(x)\right]d\left[\psi(x)\right],$$

причем функция $g(t)$ легко интегрируется, т. е. интеграл

$$\int g(t)\,dt = F(t) + C$$

находится легко, то делая в данном интеграле замену $t = \psi(x)$, будем иметь

$$\int f(x)\,dx = F\left[\psi(x)\right] + C.$$

**Пример 3.** Найти интеграл

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\,dx.$$

◀ Положим $t = 2^x + 2^{-x}$, $t > 0$. Тогда $dt = (2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2)\,dx$, откуда

$$(2^x - 2^{-x})\,dx = \frac{dt}{\ln 2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln 2}\ln t + C = \frac{\ln(2^x + 2^{-x})}{\ln 2} + C. \blacktriangleright$$

**Пример 4.** Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

◀ Сделаем замену переменной, положив $\sqrt{e^x + 1} = t$. Тогда $\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}} = 2\,dt$, $e^x = t^2 - 1$. Поэтому

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int e^x \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x + 1}} = 2\int \left(t^2 - 1\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\left(e^x + 1\right)^{3/2} - 2\sqrt{e^x + 1} + C = \frac{2}{3}\left(e^x - 2\right)\sqrt{e^x + 1} + C. \blacktriangleright$$

# §6. Интегрирование по частям

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$\left[u(x)v(x)\right]' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

Это равенство показывает, что произведение данных функций $u(x)v(x)$ является первообразной для суммы $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ и, следовательно,

$$\int \left[u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\right] dx = u(x)v(x) + C.$$

Отсюда, используя линейное свойство интеграла, находим

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx + C.}$$

Так как по определению дифференциала

$$v'(x)\,dx = dv, \qquad u'(x)\,dx = du,$$

то полученное равенство можно записать короче

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C,$$

или

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du,} \tag{1}$$

считая, что постоянная $C$ включена в один из неопределенных интегралов.

Нахождение неопределенного интеграла с помощью этой формулы называется *интегрированием по частям*. Формула (1) сводит нахождение интеграла $\int u\,dv$ к нахождению интеграла $\int v\,du$, который в некоторых случаях можно легко найти. При ее применении к нахождению интеграла приходится разбивать подынтегральное выражение на два множителя $u$ и $dv = v'\,dx$, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части. Выбирать $u$ следует так, чтобы интегрирование дифференциала $dv$ не представляло трудностей и чтобы замена $u$ на $du$ и $dv$ на $v$ в совокупности приводили к упрощению подынтегрального выражения.

**Пример 1.** Найти интеграл

$$\int (2-3x)\cos x\,dx.$$

◀ Здесь

$$u\,dv = (2-3x)\cos x\,dx.$$

Положим

$$u = 2-3x, \quad dv = \cos x\,dx.$$

Тогда

$$du = -3\,dx, \quad v = \int \cos x\,dx = \sin x.$$

Применяя формулу (1), будем иметь

$$\int (2-3x)\cos x\,dx = (2-3x)\sin x + 3\int \sin x\,dx = (2-3x)\sin x - 3\cos x + C. \ ▶$$

**Замечание.** Если взять

$$u = \cos x, \quad dv = (2-3x)\,dx$$

или же

$$u = (2-3x)\cos x, \quad dv = dx$$

и применить формулу (1), то в обоих случаях в ее правой части получим более сложные интегралы, чем первоначальный.

**Замечание.** При нахождении функции $v$ по ее дифференциалу $dv$ можно брать любое значение постоянной интегрирования $\tilde{C}$, так как она в конечный результат не входит (для проверки этого достаточно в формулу (1) подставить $v+\tilde{C}$ вместо $v$). Поэтому для удобства будем брать $\tilde{C}=0$.

**Пример 2.** Найти интеграл

$$\int \ln x\,dx.$$

◀ Так как в данном интеграле $u\,dv = \ln x\,dx$, то здесь имеется единственный выбор, а именно $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int dx = x$. По формуле (1) получаем

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \ ▶$$

**Пример 3.** Найти интеграл

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (|x| < |a|).$$

◀ Применим метод интегрирования по частям, положив

$$u = \sqrt{a^2-x^2}, \quad dv = dx.$$

Отсюда находим

$$du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v = x.$$

Применяя формулу (1), получим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + 2C.$$

Добавим и вычтем $a^2$ в числителе подынтегральной функции интеграла в правой части и, произведя деление на $\sqrt{a^2-x^2}$, будем иметь

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + 2C = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} -$$

$$-\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C.$$

Для нахождения данного интеграла мы получили алгебраическое уравнение с одним неизвестным, которым является этот интеграл,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + 2C.$$

Из этого уравнения находим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. ▶$$

**Задача.** Показать, что справедливы следующие формулы:

а) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C;$

б) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C,$ где $|x| > |a|$.

**Замечание.** К нахождению интеграла $\int v\, du$ в правой части формулы (1) можно применить снова интегрирование по частям.

**Пример 4.** Найти интеграл

$$\int x^2 2^x\, dx.$$

◀ Положим $u = x^2$, $dv = 2^x\, dx$, тогда

$$du = 2x\, dx, \quad v = \frac{2^x}{\ln 2} \quad \text{и} \quad \int x^2 2^x\, dx = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int x 2^x\, dx.$$

К интегралу в правой части снова применяем интегрирование по частям, полагая $u = x$, $dv = 2^x\, dx$, откуда

$$du = dx, \quad v = \frac{2^x}{\ln 2}$$

и, следовательно,

$$\int x^2 2^x\, dx = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx\right) = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2}\right) + C =$$

$$= \left(x^2 - \frac{2}{\ln 2}x + \frac{2}{\ln^2 2}\right)\frac{2^x}{\ln 2} + C. ▶$$

**Пример 5.** Найти интеграл

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0).$$

◀ Интегрируя по частям, положим, например,

$$u = e^{\alpha x}, \quad dv = \cos \beta x\, dx \quad (\text{или} \quad u = \cos \beta x, \quad dv = e^{\alpha x}\, dx).$$

Тогда

$$du = \alpha e^{\alpha x}\, dx, \quad v = \int \cos \beta x\, dx = \frac{\sin \beta x}{\beta}.$$

Поэтому

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx.$$

Для нахождения полученного в правой части интеграла снова применим интегрироаание по частям:

$$u = e^{\alpha x}, \quad dv = \sin \beta x\, dx; \qquad du = \alpha e^{\alpha x}\, dx, \quad v = -\frac{\cos \beta x}{\beta};$$

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx.$$

Подставляя правую часть этого равенства в результат первого интегрирования, будем иметь

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \cos \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx.$$

Таким образом, посредством двукратного интегрирования по частям мы получим для нахождения данного интеграла алгебраическое уравнение первой степени с одним неизвестным, из которого находим

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x),$$

откуда

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C.$$

Аналогично находим интеграл

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C. \blacktriangleright$$

С помощью интегрирования по частям можно находить, например, следующие интегралы:

1. $$\boxed{\int P_n(x)\ln x\,dx,}$$

где $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_kx^k$ — многочлен $n$-ой степени.

◄ Положим

$$u=\ln x,\quad dv=P_n(x)\,dx.$$

Тогда

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=\int P_n(x)\,dx=Q_{n+1}(x),$$

где $Q_{n+1}(x)$ — многочлен $(n+1)$-ой степени. Поэтому

$$\boxed{\int P_n(x)\ln x\,dx = Q_{n+1}(x)\ln x-\int\frac{Q_{n+1}(x)}{x}\,dx = Q_{n+1}(x)\ln x - H_{n+1}(x)+C,}$$

где $H_{n+1}(x)$ — многочлен $(n+1)$-ой степени. ►

**Пример 6.** Найти интеграл

$$\int(4x^3+2x)\ln x\,dx.$$

◄ Полагаем

$$u=\ln x,\quad dv=(4x^3+2x)\,dx;$$

тогда

$$du=\frac{dx}{x},\quad v=\int(4x^3+2x)\,dx=x^4+x^2.$$

Формула (1) дает:

$$\int(4x^3+2x)\ln x\,dx=(x^4+x^2)\ln x-\int(x^3+x)\,dx=(x^4+x^2)\ln x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C. \blacktriangleright$$

2. $$\boxed{\int P_n(x)\operatorname{arctg}\alpha x\,dx,\quad \int P_n(x)\operatorname{arcctg}\alpha x\,dx,}$$

где $\alpha$ — действительное число.

Эти интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Если, например, в первом интеграле взять

$$u = \operatorname{arctg} \alpha x, \quad dv = P_n(x)\, dx,$$

то

$$du = \frac{\alpha\, dx}{1+\alpha^2 x^2}, \quad v = Q_{n+1}(x),$$

и мы получаем

$$\boxed{\int P_n(x) \operatorname{arctg} \alpha x\, dx = Q_{n+1}(x) \operatorname{arctg} \alpha x - \alpha \int \frac{Q_{n+1}(x)}{1+\alpha^2 x^2}\, dx.}$$

Аналогично поступаем и со вторым интегралом.

**Пример 7.** Найти интеграл

$$\int (3x^2+1) \operatorname{arctg} x\, dx.$$

◄ Пусть

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = (3x^2+1)\, dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x^3 + x.$$

Поэтому

$$\int (3x^2+1) \operatorname{arctg} x\, dx = (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3+x}{1+x^2}\, dx = (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \int x\, dx =$$

$$= (x^3+x) \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2} + C. \ ►$$

3. $$\boxed{\int P_n(x) \arcsin \alpha x\, dx, \quad \int P_n(x) \arccos \alpha x\, dx,}$$

где $\alpha$ — действительное число.

Для нахождения этих интегралов берем

$$u = \arcsin \alpha x \quad (u = \arccos \alpha x), \quad dv = P_n(x)\, dx;$$

тогда

$$du = \frac{\alpha\, dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \quad \left(du = -\frac{\alpha\, dx}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}\right), \quad v = Q_{n+1}(x)$$

и формула (1) дает

$$\boxed{\int P_n(x) \arcsin \alpha x\, dx = Q_{n+1}(x) \arcsin \alpha x - \alpha \int \frac{Q_{n+1}(x)}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}\, dx.}$$

Полученный в правой части интеграл можно находить различными способами, которые мы приведем в примерах (подробнее этот интеграл будет рассмотрен ниже (см. § 8)).

**Пример 8.** Найти интеграл

$$\int x^2 \arcsin x\, dx.$$

◀ Берем

$$u = \arcsin x, \quad dv = x^2\,dx,$$

откуда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Применяя формулу (1), будем иметь

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В полученном в правой части равенства интеграле сделаем подстановку $t = \sqrt{1-x^2}$, $x^2 = 1 - t^2$, $x\,dx = -t\,dt$. Тогда

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} x\,dx = -\int \frac{1-t^2}{t} t\,dt = \int (t^2-1)\,dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2 \arcsin x\,dx = \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C. \ ▶$$

Используя многократное интегрирование по частям можно найти следующие интегралы:

4. $$\boxed{\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx,}$$

где $\lambda$ — действительное число.

Для нахождения этого интеграла в формуле (1) интегрирования по частям полагаем

$$u = P_n(x), \quad dv = e^{\lambda x}\,dx,$$

откуда

$$du = P_n'(x)\,dx, \quad v = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

Поэтому

$$\boxed{\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}P_n(x)e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\int P_n'(x)e^{\lambda x}\,dx,}$$

где $P_n'(x)$ — многочлен $(n-1)$-ой степени. К интегралу в правой части снова применяем формулу (1) и т. д. В результате $n$-кратного интегрирования по частям придем к табличному интегралу $\int e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C$.

**Пример 9.** Найти интеграл

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx.$$

◀ Полагая

$$u = x^2 + 2x, \quad dv = e^x\,dx,$$

находим

$$du = 2(x+1)\,dx, \quad v = e^x.$$

Тогда

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (x^2+2x)e^x - 2\int (x+1)e^x\,dx.$$

Интеграл в правой части снова берем по частям, принимая $u = x + 1$, $dv = e^x\,dx$, откуда $du = dx$, $v = e^x$. Следовательно,

$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C.$$

Окончательно получаем

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (x^2+2x)e^x - 2xe^x + C = x^2e^x + C. \blacktriangleright$$

**Замечание.** Интегралы этого вида можно находить с помощью метода неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем: ищем интеграл в виде произведения многочлена $n$-ой степени

$$Q_n(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

с неопределенными коэффициентами $b_0, b_1, \ldots, b_n$ на функцию $e^{\lambda x}$, т. е.

$$\int P_n(x)e^{\lambda x}\,dx = Q_n(x)e^{\lambda x}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $b_k$ дифференцируем обе части этого равенства:

$$P_n(x)e^{\lambda x} = Q_n'(x)e^{\lambda x} + Q_n(x)\lambda e^{\lambda x}.$$

Затем, сокращая на $e^{\lambda x} \neq 0$, будем иметь

$$P_n(x) = Q_n'(x) + \lambda Q_n(x).$$

В этом равенстве слева и справа стоят многочлены $n$-ой степени, приравнивая коэффициенты которых при одинаковых степенях $x$, получим систему из $n+1$ линейных уравнений, содержащих искомые коэффициенты $b_k$. Эта линейная система имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля.

**Пример 10.** Найти интеграл

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx.$$

◀ Положим

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = (b_0 + b_1x + b_2x^2)e^x,$$

где $b_0, b_1, b_2$ — неизвестные коэффициенты. Дифференцируя это равенство, найдем

$$(x^2+2x)e^x = \left(b_1x + 2b_2x\right)e^x + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2\right)e^x.$$

Обе части последнего равенства сокращаем на $e^x \neq 0$:

$$2x + x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_1 + 2b_2x.$$

В правой части равенства собираем все члены с одинаковыми степенями $x$:

$$2x + x^2 = (b_0 + b_1) + (b_1 + 2b_2)x + b_2x^2.$$

Прирванивaем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^0 & 0 = b_0 + b_1 \\ x^1 & 2 = b_1 + 2b_2 \\ x^2 & 1 = b_2 \end{array}\right\}.$$

Решая эту систему, находим: $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Исходный интеграл будет равен

$$\int (x^2+2x)e^x\,dx = x^2e^x + C. \blacktriangleright$$

5. $$\boxed{\int P_n(x)\sin\beta x\,dx, \qquad \int P_n(x)\cos\beta x\,dx,}$$

где $\beta$ — действительная постоянная, $\beta \neq 0$.

Для первого из этих интегралов в формуле интегрирования по частям полагаем

$$u = P_n(x), \quad dv = \sin\beta x\,dx \quad (\text{для второго} \quad dv = \cos\beta x\,dx),$$

откуда

$$du = P_n'(x)\,dx, \quad v = -\frac{\cos\beta x}{\beta} \quad \left(\text{для второго} \quad v = \frac{\sin\beta x}{\beta}\right).$$

Следовательно,

$$\boxed{\int P_n(x)\sin\beta x\,dx = -P_n(x)\frac{\cos\beta x}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int P_n'(x)\cos\beta x\,dx.}$$

Применяя $n$ раз интегрирование по частям, придем к одному из интегралов

$$\int \sin\beta x\,dx = -\frac{\cos\beta x}{\beta} \quad \text{или} \quad \int\cos\beta x\,dx = \frac{\sin\beta x}{\beta}.$$

**Пример 11.** Найти интеграл

$$\int (x^2-1)\cos x\,dx.$$

◀ Интегрируем два раза по частям, при этом будем пользоваться более короткой записью. Получаем

$$\int(x^2-1)\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u=x^2-1, & dv=\cos x\,dx \\ du=2x\,dx, & v=\sin x\end{matrix}\right| = (x^2-1)\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u=x, & dv=\sin x\,dx \\ du=dx, & v=-\cos x\end{matrix}\right| = (x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C. \ ▶$$

Кроме указанных выше интегралов существуют и другие интегралы, которые находятся посредством метода интегрирования по частям.

**Пример 12.** Найти интеграл

$$\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$$

◀ Полагая

$$u = x, \quad dv = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

получим

$$du = dx, \quad v = \int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

Поэтому

$$\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg}x + \int\operatorname{ctg}x\,dx.$$

В интеграле правой части равенства, применяя подстановку $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$, найдем

$$\int\operatorname{ctg}x\,dx = \int\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Окончательно имеем

$$\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg}x + \ln|\sin x| + C. \ ▶$$

# § 7. Интегрирование рациональных функций

В этом параграфе будет рассмотрен метод интегрирования рациональных функций.

## 7.1. Краткие сведения о рациональных функциях

Простейшей *рациональной функцией* является многочлен $n$-ой степени, т. е. функция вида

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные постоянные, причем $a_0 \neq 0$. Многочлен $Q_n(x)$, у которого коэффициент $a_0 = 1$, называется *приведенным*.

Действительное число $b$ называется *корнем* многочлена $Q_n(x)$, если $Q_n(b) = 0$.

Известно, что каждый многочлен $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на действительные множители вида

$$x - b \quad \text{и} \quad x^2 + px + q,$$

где $p, q$ — действительные коэффициенты, причем квадратичные множители не имеют действительных корней и, следовательно, неразложимы на действительные линейные множители. Объединяя одинаковые множители (если таковые имеются) и полагая, для простоты, многочлен $Q_n(x)$ приведенным, можно записать его разложение на множители в виде

$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s$ — натуральные числа.

Так как степень многочлена $Q_n(x)$ равна $n$, то сумма всех показателей $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, сложенная с удвоенной суммой всех показателей $\mu_1, \ldots, \mu_s$, равна $n$:

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \ldots + \mu_s) = n.$$

Корень $a$ многочлена называется *простым* или *однократным*, если $\alpha = 1$, и *кратным*, если $\alpha > 1$; число $\alpha$ называется *кратностью* корня $a$. То же самое относится и к другим корням многочлена.

*Рациональной функцией* $f(x)$ или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

причем предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих множителей. Рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т. е. $m < n$. Если же $m \geqslant n$, то рациональная дробь называется *неправильной* и в этом случае, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x)$, $\widetilde{P}(x)$ — некоторые многочлены, а $\frac{\widetilde{P}(x)}{Q_n(x)}$ является правильной рациональной дробью.

**Пример 1.** Рациональная дробь $\frac{x^5+1}{x^2+1}$ является неправильной дробью. Разделив $P_5(x) = x^5 + 1$ на $Q_2(x) = x^2 + 1$ «уголком», будем иметь

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^5 \qquad\quad + 1 & x^2 + 1 \\
\underline{x^5 + x^3 \qquad\;\;} & \overline{x^3 - x} \\
-\,-x^3 \quad + 1 & \\
\underline{-x^3 - x \quad\;\;} & \\
x + 1 &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Здесь $R_3(x) = x^3 - x$, $\widetilde{P}(x) = x + 1$, причем $\frac{x+1}{x^2+1}$ есть правильная дробь. ▶

**Определение.** *Простейшими* (или *элементарными*) *дробями* называются рациональные дроби следующих четырех типов:

$$\text{I.}\ \frac{A}{x-a},\qquad \text{II.}\ \frac{A}{(x-a)^k},\qquad \text{III.}\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\qquad \text{IV.}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

где $A, M, N, a, p, q$ — действительные числа, $k$ — натуральное число, большее или равное 2, а квадратный трехчлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней, так что его дискриминант $\frac{p^2}{4}-q<0$ или $q-\frac{p^2}{4}>0$.

В алгебре доказывается следующая теорема.

**Теорема 3.** *Правильная рациональная дробь* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m<n)$ *с действительными коэффициентами, знаменатель которой* $Q_n(x)$ *имеет вид*

$$Q_n(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s},$$

*разлагается единственным способом на сумму простейших дробей по правилу*

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\\ +\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\ldots+\\ +\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_sx+q_s)^1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\ldots+\frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}}.\end{aligned}\qquad(1)$$

*В этом разложении* $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, $B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots$, $M_1$, $N_1$, $M_2$, $N_2, \ldots$, $M_{\mu_s}$, $N_{\mu_s}$ *— некоторые действительные постоянные, часть которых может быть равна нулю. Для нахождения этих постоянных правую часть равенства* (1) *приводят к общему знаменателю, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях* $x$ *в числителях левой и правой частей. Это дает систему линейных уравнений, из которой находятся искомые постоянные. Этот метод нахождения неизвестных постоянных называется методом неопределенных коэффициентов.*

Иногда бывает удобнее применить другой способ нахождения неизвестных постоянных, который состоит в том, что после приравнивания числителей получается тождество относительно $x$, в котором аргументу $x$ придают некоторые значения, например, значения корней, в результате чего получаются уравнения для нахождения постоянных. Особенно он удобен, если знаменатель $Q_n(x)$ имеет только действительные простые корни.

**Пример 2.** Разложи ь на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}.$$

◀ Данная дробь правильная. Разлагаем знаменатель на множи ели:

$$(x^3-3x^2+2x)=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2).$$

Так как корни знаменателя действительные и различные, то на основании формулы (1) разложение дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$

Приводя правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравнивая числители в его левой и правой частях, получим тождество

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1), \qquad (*)$$

или

$$3x^2 - 6x + 2 = (A + B + C)x^2 + (-3A - 2B - C)x + 2A.$$

Неизвестные коэффициенты $A$, $B$, $C$ найдем двумя способами.

**Первый способ.** Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, т. е. при $x^2$, $x^1$, $x^0$ (свободный член), в левой и правой частях тождества, получим линейную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $A$, $B$, $C$:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B + C = 3 \\ x^1 & -3A - 2B - C = -6 \\ x^0 & 2A = 2 \end{array} \Bigg\}.$$

Это система имеет единственное решение

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1.$$

**Второй способ.** Так как корни знаменателя равны $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, то полагая в тождестве $(*)$:

$x = 0$, получим $2 = 2A$, откуда $A = 1$;

$x = 1$, получим $-1 = -B$, откуда $B = 1$;

$x = 2$, получим $2 = 2C$, откуда $C = 1$,

и искомое разложение имеет вид

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \ ▶$$

**Пример 3.** Разложить на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^3 + 3x + 1}{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2}.$$

◀ Разлагаем многочлен, стоящий в знаменателе, на множители:

$$x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 = x^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x+1)^3x^2.$$

Знаменатель имеет два различных действительных корня: $x_1 = 0$ кратности 2 и $x_2 = -1$ кратности 3. Поэтому разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^3 + 3x + 1}{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, найдем

$$x^3 + 3x + 1 = A_1x(x+1)^3 + A_2(x+1)^3 + B_1x^2(x+1)^2 + B_2x^2(x+1) + B_3x^2,$$

или

$$x^3 + 3x + 1 = (A_1 + B_1)x^4 + (3A_1 + A_2 + 2B_1 + B_2)x^3 + (3A_1 + 3A_2 + B_1 + B_2 + B_3)x^2 + (A_1 + 3A_2)x + A_2.$$

**Первый способ.** Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях последнего тождества, получим линейную систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A_1 + B_1 = 0 \\ x^3 & 3A_1 + A_2 + 2B_1 + B_2 = 1 \\ x^2 & 3A_1 + 3A_2 + B_1 + B_2 + B_3 = 0 \\ x^1 & A_1 + 3A_2 = 3 \\ x^0 & A_2 = 1 \end{array} \Bigg\}.$$

Эта система имеет единственное решение

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -3,$$

и искомым разложением будет

$$\frac{x^3 + 3x + 1}{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{(x+1)^3}.$$

**Второй способ.** В полученном тождестве полагая $x = 0$, получаем $1 = A_2$, или $A_2 = 1$; полагая $x = -1$, получим $-3 = B_3$, или $B_3 = -3$. При подстановке найденных значений коэффициентов $A_1$ и $B_3$ в тождество оно примет вид

$$x^3 + 3x + 1 = A_1x(x+1)^3 + (x+1)^3 + B_1x^2(x+1)^2 + B_2x^2(x+1) - 3x^2,$$

или
$$x^3 + 3x + 1 - (x+1)^3 + 3x^2 = A_1 x(x+1)^3 + B_1 x^2 (x+1)^2 + B_2 x^2 (x+1),$$
т. е.
$$0 = A_1 x(x+1)^3 + B_1 x^2 (x+1)^2 + B_2 x^2 (x+1).$$
Сокращая на $x(x+1)$, будем иметь
$$A_1 (x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x = 0.$$
Полагая $x = 0$, а затем $x = -1$, найдем, что $A_1 = 0$, $B_2 = 0$ и, значит, $B_1 = 0$. Таким образом, опять получаем
$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -3. ▶$$

**Пример 4.** Разложить на простейшие дроби рациональную дробь
$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2+1)^2}.$$

◀ Знаменатель дроби не имеет действительных корней, так как функция $x^2 + 1$ не обращается в нуль ни при каких действительных значениях $x$. Поэтому разложение на простейшие дроби должно иметь вид
$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+1)^2}.$$
Отсюда получаем
$$x^3 + x^2 + 1 = (M_1 x + N_1)(x^2 + 1) + M_2 x + N_2,$$
или
$$x^3 + x^2 + 1 = M_1 x^3 + N_1 x^2 + (M_1 + M_2)x + (N_1 + N_2).$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях последнего равенства, будем иметь
$$M_1 = 1, \quad N_1 = 1, \quad M_1 + M_2 = 0, \quad N_1 + N_2 = 1,$$
откуда находим
$$M_1 = 1, \quad N_1 = 1, \quad M_2 = -1, \quad N_2 = 0,$$
и, следовательно,
$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}. ▶$$

Следует отметить, что в некоторых случаях разложения на простейшие дроби можно получить быстрее и проще, действуя каким-либо другим путем, не пользуясь методом неопределенных коэффициентов.

Например, для получения разложения дроби в примере 3, можно прибавить и вычесть в числителе $3x^2$ и произвести деление, так как указано ниже:
$$\frac{x^3 + 3x + 1}{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2} = \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3x^2}{x^2 (x+1)^3} = \frac{(x+1)^3 - 3x^2}{x^2 (x+1)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{(x+1)^3}.$$

## 7.2. Интегрирование простейших дробей

Как было сказано выше, любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной рациональной дроби (§ 7), причем это представление единственно. Интегрирование многочлена не представляет трудностей, поэтому рассмотрим вопрос об интегрировании правильной рациональной дроби.

Так как любая правильная рациональная дробь представима в виде суммы простейших дробей, то ее интегрирование сводится к интегрированию простейших дробей.

Рассмотрим теперь вопрос об их интегрировании.

I.
$$\boxed{\int \frac{A\,dx}{x-a}} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \boxed{A\ln|x-a|+C.}$$

II.
$$\boxed{\int \frac{A\,dx}{(x-a)^k}} = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) =$$
$$= \frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1} + C = \boxed{\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.}$$

III. Для нахождения интеграла от простейшей дроби третьего типа выделим у квадратного трехчлена полный квадрат двучлена:

$$x^2+px+q = \left[x^2+2x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Так как второе слагаемое $q-\frac{p^2}{4} > 0$, то положим его равным $a^2$, где $a = +\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, а затем сделаем подстановку $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, $x^2+px+q=t^2+a^2$. Тогда, учитывая линейные свойства интеграла, найдем:

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$
$$\boxed{= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.}$$

**Пример 5.** Найти интеграл
$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция является простейшей дробью третьего типа, так как квадратный трехчлен $x^2+4x+6$ не имеет действительных корней (его дискриминант отрицателен: $\frac{p^2}{4}-q=-2<0$), а в числителе стоит многочлен первой степени. Поэтому поступаем следующим образом:

1) выделяем полный квадрат в знаменателе
$$x^2+4x+6 = (x^2+4x+4)+2 = (x+2)^2+2;$$

2) делаем подстановку
$$x+2=t,\quad dx=dt,\quad x=t-2,\quad x^2+4x+6=t^2+2$$
(здесь $a^2=2$);

3) находим интеграл
$$\int\frac{2-x}{x^2+4x+6}\,dx = \int\frac{2-(t-2)}{t^2+2}\,dt = 4\int\frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+2} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C = 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + C. \blacktriangleright$$

IV. Для нахождения интеграла от простейшей дроби четвертого типа положим, как и выше,

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt, \quad a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Тогда получим ($k \geqslant 2$)

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Интеграл в правой части обозначим через $J_k$ и преобразуем его следующим образом:

$$J_k=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}\,dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{2a^2}\int t\,\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}.$$

Интеграл в правой части интегрируем по частям, полагая

$$u=t, \quad dv=\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k},$$

откуда

$$du=dt, \quad v=\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},$$

и, следовательно,

$$J_k=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{1-k}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{k-1}J_{k-1}\right],$$

или

$$\boxed{J_k=\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1}.}$$

Мы получили так называемую *рекуррентную формулу*, которая позволяет найти интеграл $J_k$ для любого $k=2, 3, \ldots$ . Действительно, интеграл $J_1$ является табличным:

$$\boxed{J_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.}$$

Полагая в рекуррентной формуле $k=2$, найдем

$$J_2=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}=\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{J_1}{2a^2}=\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Зная $J_2$ и полагая $k=3$, легко найдем $J_3$ и так далее.

В окончательном результате, подставляя всюду вместо $t$ и $a$ их выражения через $x$ и коэффициенты $p$ и $q$, получим для первоначального интеграла выражение его через $x$ и заданные числа $M$, $N$, $p$, $q$.

**Пример 8.** Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция есть простейшая дробь четвертого типа, так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2-4x+5$ отрицателен, т. е. $\frac{p^2}{4}-q=-1<0$, а значит, знаменатель действительных корней не имеет, и числитель есть многочлен 1-ой степени.

1) Выделяем в знаменателе полный квадрат

$$x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1.$$

2) Делаем подстановку:

$$x-2=t, \quad dx=dt; \quad x=t+2 \quad (a^2=1).$$

Интеграл примет вид:

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=\int \frac{t+3}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}+3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Полагая в рекуррентной формуле $k=2$, $a^2=1$, будем иметь

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C,$$

и, следовательно, искомый интеграл равен

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{3t}{2(t^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t+C=\frac{3t-1}{2(t^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, получим окончательно

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=\frac{3x-7}{2(x^2-4x+5)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-2)+C. \ ▶$$

## 7.3. Общий случай

Из результатов пп. 1 и 2 этого параграфа непосредственно следует важная теорема.

---

**Теорема 4.** *Неопределенный интеграл от любой рациональной функции всегда существует (на интервалах, в которых знаменатель дроби $Q_n(x)\neq 0$) и выражается через конечное число элементарных функций, а именно, он является алгебраической суммой, членами которой могут быть лишь многочлены, рациональные дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.*

---

Итак, для нахождения неопределенного интеграла от дробно-рациональной функции следует поступать следующим образом:

1) если рациональная дробь неправильная, то делением числителя на знаменатель выделяется целая часть, т. е. данная функция представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) затем знаменатель полученной правильной дроби разлагается на произведение линейных и квадратичных множителей;

3) эта правильная дробь разлагается на сумму простейших дробей;

4) используя линейность интеграла и формулы п. 2, находятся интегралы от каждого слагаемого в отдельности.

**Пример 7.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)}\,dx.$$

◀ Так как знаменатель $(x-1)(x^2-4) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ есть многочлен третьей степени, то подынтегральная функция является неправильной дробью. Выделяем в ней целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - x^2 - 4x + 4} & 1 \\ x^2 + 4x - 4 & \end{array}$$

Следовательно, будем иметь

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2-4)} = 1 + \frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)},$$

где $R_0(x) = 1$, $\tilde{P}(x) = x^2 + 4x - 4$. Знаменатель правильной дроби

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)}$$

имеет три различных действительных корня:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = -2,$$

и поэтому ее разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Отсюда находим

$$x^2 + 4x - 4 = A(x^2-4) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x-2).$$

Придавая аргументу $x$ значения, равные корням знаменателя, найдем из этого тождества, что:

$$\begin{array}{lll} \text{если } x = 1, & \text{то} & 1 = -3A, \ A = -\dfrac{1}{3}; \\ \text{если } x = 2, & \text{то} & 8 = \ 4B, \ B = \ 2; \\ \text{если } x = -2, & \text{то} & -8 = 12C, \ C = -\dfrac{2}{3}. \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2+4x-4}{(x-1)(x^2-4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + 2\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2}.$$

Искомый интеграл будет равен

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)(x^2-4)} = \int \left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} + 2\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + 2\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + C. ▶$$

**Пример 8.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}\,dx.$$

◀ Подынтегральная функция является правильной дробью, знаменатель которой имеет два различных действительных корня: $x = 0$ кратности 1 и $x = 1$ кратности 3. Поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x-1}.$$

Приводя правую часть этого равенства к общему знаменателю и сокращая обе части равенства на этот знаменатель, получим

$$x^2 + 1 = A_1x^2(x-1) + A_2(x-1)x + A_3(x-1) + Bx^3,$$

или

$$x^2 + 1 = (A_1 + B)x^3 + (-A_1 + A_2)x^2 + (-A_2 + A_3)x - A_3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях этого тождества:

$$A_1 + B = 0, \quad -A_1 + A_2 = 1, \quad -A_2 + A_3 = 0, \quad -A_3 = 1.$$

Отсюда находим $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = -1$, $B = 2$. Подставляя найденные значения коэффициентов в разложение, будем иметь

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^3} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x-1}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^3}\,dx = \int\left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2\ln|x-1| + C. \blacktriangleright$$

**Пример 9.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

◀ Знаменатель дроби не имеет действительных корней. Поэтому разложение на простейшие дроби подынтегральной функции имеет вид

$$\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Отсюда

$$x^3 - x = (M_1x+N_1)(x^2+1) + M_2x + N_2,$$

или

$$x^3 - x = M_1x^3 + N_1x^2 + (M_1+M_2)x + (N_1+N_2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях этого тождества, будем иметь

$$M_1 = 1, \quad N_1 = 0, \quad M_1 + M_2 = -1, \quad N_1 + N_2 = 0,$$

откуда находим

$$M_1 = 1, \quad N_1 = 0, \quad M_2 = -2, \quad N_2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\left[\frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C. \blacktriangleright$$

**Замечание.** В приведенном примере подынтегральную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей более простым способом, а именно, в числителе дроби выделяем бином, стоящий в знаменателе, а затем производим почленное деление:

$$\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1)-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

# § 8. Интегрирование иррациональных функций

Функция вида

$$\boxed{R(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \frac{P_m(u_1, u_2, \ldots, u_k)}{Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_k)},}$$

где $P_m$ и $Q_n$ являются многочленами степеней $m$ и $n$ соответственно от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_k$, называется *рациональной функцией* от $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Например, многочлен второй степени от двух переменных $u_1$ и $u_2$ имеет вид

$$P_2(u_1, u_2) = A_{00} + A_{10}u_1 + A_{01}u_2 + A_{20}u_1^2 + A_{11}u_1u_2 + A_{02}u_2^2,$$

где $A_{00}$, $A_{10}$, $A_{01}$, $A_{20}$, $A_{11}$, $A_{02}$ — некоторые действительные постоянные, причем $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

**Пример 1.** Функция

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^3+xy}{x+x^3y^2+1}$$

является рациональной функцией от переменных $x$ и $y$, так как она представляет собой отношение многочлена третьей степени $P_3(x,y) = x^2+2y^3+xy$ и многочлена пятой степени $Q_5(x,y) = x+x^3y^2+1$, а функция $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-2xy+3}}{x+y}$ таковой не является.

В том случае, когда переменные $u_1, u_2, \ldots, u_k$, в свою очередь, являются функциями переменной $x$:

$$u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \quad \ldots, \quad u_k = f_k(x),$$

то функция $R\left[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\right]$ называется *рациональной функцией* от функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$.

**Пример 2.** Функция

$$f(x) = \frac{x^2+\sqrt{x^2+x+1}}{x+1+3\sqrt{x^2+x+1}}$$

есть рациональная функция от $x$ и радикала $\sqrt{x^2+x+1}$:

$$f(x) = R\left(x, \sqrt{x^2+x+1}\right).$$

**Пример 3.** Функция вида

$$f(x) = \frac{\ln x + e^{\sqrt{x^2+1}}}{2+\sin x^2}$$

не является рациональной функцией от $x$ и радикала $\sqrt{x^2+1}$, но она является рациональной функцией от функций $\ln x$, $e^{\sqrt{x^2+1}}$ и $\sin x^2$:

$$f(x) = R\left(\ln x, e^{\sqrt{x^2+1}}, \sin x^2\right).$$

Как показывают примеры, интегралы от иррациональных функций не всегда выражаются через элементарные функции. Например, часто встречающиеся в приложениях интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad 0 < k < 1,$$

не выражаются через элементарные функции; эти интегралы называются *эллиптическими интегралами первого* и *второго родов* соответственно.

Рассмотрим те случаи, когда интегрирование иррациональных функций можно свести с помощью некоторых подстановок к интегрированию рациональных функций.

1. Пусть требуется найти интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

где $R(x,y)$ — рациональная функция своих аргументов $x$ и $y$; $m \geqslant 2$ — натуральное число; $a, b, c, d$ — действительные постоянные, удовлетворяющие условию $ad-bc \neq 0$ (при $ad-bc=0$ коэффициенты $a$ и $b$ пропорциональны коэффициентам $c$ и $d$, и поэтому отношение $\frac{ax+b}{cx+d}$ не зависит от $x$; значит, в этом случае подынтегральная функция будет являться рациональной функцией переменной $x$, интегрирование которой было рассмотрено ранее).

◀ Сделаем в данном интеграле замену переменной, положив

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{или} \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Отсюда выражаем переменную $x$ через новую переменную $t$. Имеем

$$(cx+d)t^m = ax+b, \quad ax - cxt^m = d\cdot t^m - b;$$

$x = \frac{d\cdot t^m - b}{a - ct^m}$ — рациональная функция от $t$. Далее находим

$$dx = \frac{d\cdot mt^{m-1}(a-ct^m) + cmt^{m-1}(d\cdot t^m - b)}{(a-ct^m)^2}\,dt,$$

или, после упрощения,

$$dx = \frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{d\cdot t^m - b}{a-ct^m}, t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(a-ct^m)^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от $t$, так как рациональная функция от рациональной функции, а также произведение рациональных функций, представляют собой рациональные функции.

Интегрировать рациональные функции мы умеем. Пусть

$$\int R_1(t)\,dt = F(t) + C, \quad F'(t) = R_1(t).$$

Тогда искомый интеграл будет равен

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) + C.} \ ▶$$

**Пример 4.** Найти интеграл

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

◀ Подынтегральная функция есть рациональная функция от $x$ и $y = \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$, т. е. $R(x) = \frac{y}{(2x+3)^2}$. Поэтому полагаем $t = \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}$. Тогда

$$2x-3 = 2xt^4 + 3t^4, \quad x = \frac{3}{2}\frac{1+t^4}{1-t^4} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{1-t^4} - 1\right), \quad dx = \frac{12t^3}{(1-t^4)^2}, \quad 2x+3 = \frac{6}{1-t^4}.$$

Таким образом, получим

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2} = \int t\frac{(1-t^4)^2}{36}\frac{12t^3}{(1-t^4)^2}\,dt = \frac{1}{3}\int t^4\,dt = \frac{1}{15}t^5 + C = \frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5 + C. \ ▶$$

**Пример 5.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}\right)}.$$

◀ Общий знаменатель дробных показателей степеней $x$ равен 12, поэтому подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{(\sqrt[12]{x})^3\left[(\sqrt[12]{x})^4+(\sqrt[12]{x})^6\right]},$$

откуда видно, что она является рациональной функцией от $x$ и $\sqrt[12]{x}$, т. е. $R(x, \sqrt[12]{x})$. Учитывая это, положим $t=\sqrt[12]{x}$, $x=t^{12}$, $dx=12t^{11}\,dt$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}=\int\frac{12t^{11}\,dt}{t^3(t^4+t^6)}=12\int\frac{t^4\,dt}{1+t^2}=12\int\frac{(t^4-1)+1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=12\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=12\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)+C=4\sqrt[4]{x}-12\sqrt[12]{x}+12\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}+C.$$ ▶

2. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где подынтегральная функция такова, что заменив в ней радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ через $y$, получим функцию $R(x, y)$ — рациональную относительно обоих аргументов $x$ и $y$. Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции другой переменной *подстановками Эйлера*.

### 8.1. Первая подстановка Эйлера

Пусть коэффициент $a>0$. Положим

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x.$$

Тогда

$$(t-\sqrt{a}\,x)^2=ax^2+bx+c,$$

или

$$t^2-2\sqrt{a}\,xt=bx+c.$$

Отсюда находим $x$ как рациональную функцию от $t$:

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

и, значит,

$$dx=\frac{2t(2\sqrt{a}\,t+b)-(t^2-c)2\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt=2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x=t-\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}.$$

Таким образом, указанная подстановка выражает $x$, $dx$ и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ рационально через $t$. Поэтому будем иметь

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R_1(t)\,dt,}$$

где

$$\boxed{R_1(t)=R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}}$$

является рациональной функцией от $t$.

**Замечание.** Первую подстановку Эйлера можно брать и в виде

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\,x.$$

**Пример 6.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}.$$

◀ Так как $a = 1 > 0$, то применяя подстановку Эйлера $t = \sqrt{x^2+\alpha^2} + x$, найдем

$$x = \frac{t^2-\alpha^2}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}\,dt, \quad \sqrt{x^2+\alpha^2} = t - \frac{t^2-\alpha^2}{2t} = \frac{t^2+\alpha^2}{2t}.$$

Поэтому будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int \frac{2t}{t^2+\alpha^2}\,\frac{t^2+\alpha^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha^2}\right| + C. \text{ ▶}$$

**Задача.** Применяя первую подстановку Эйлера, показать, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-\alpha^2}\right| + C, \quad |x| > |\alpha|.$$

## 8.2. Вторая подстановка Эйлера

Пусть трехчлен $ax^2+bx+c$ имеет различные действительные корни $x_1$ и $x_2$ (коэффициент $a$ может иметь любой знак). В этом случае полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t \quad \left(\text{или} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_2)t\right).$$

Так как

$$ax^2+bx+c = (x-x_1)^2t^2,$$

то получаем

$$a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2t^2, \quad \text{или} \quad a(x-x_2) = (x-x_1)t^2,$$

откуда находим

$$x = \frac{x_1t^2 - ax_2}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a} - x_1\right)t = \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}.$$

Так как $x$, $dx$ и $\sqrt{ax^2+bc+c}$ выражаются рационально через $t$, то исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции, т. е.

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R_1(t)\,dt,}$$

где

$$\boxed{R_1(t) = R\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}}$$

— рациональная функция от $t$.

**Пример 7.** Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$$

◀ Функция $1-x^2$ имеет различные действительные корни $x_1=-1$, $x_2=1$. Поэтому применяем вторую подстановку Эйлера
$$\sqrt{1-x^2}=(1+x)t \quad \left(\text{или} \quad \sqrt{1-x^2}=(1-x)t\right).$$
Отсюда находим
$$1-x^2=(1+x)^2t^2, \quad 1-x=(1+x)t^2, \quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$
$$x-2=-\frac{3t^2+1}{t^2+1}, \quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}; \quad dx=-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$
Подставляя найденные выражения для $x-2$, $\sqrt{1-x^2}$ и $dx$ в данный интеграл, получим
$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{(t^2+1)(t^2+1)4t\,dt}{(3t^2+1)2t(t^2+1)^2}=2\int\frac{dt}{3t^2+1}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,t+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3\cdot\frac{1-x}{1+x}}+C. ▶$$

## 8.3. Третья подстановка Эйлера

Пусть коэффициент $c>0$. Делаем замену переменной, положив
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \quad \left(\text{или } \sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}\right).$$
Заметим, что для приведения интеграла
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$
к интегралу от рациональной функции достаточно первой и второй подстановок Эйлера. В самом деле, если дискриминант $b^2-4ac>0$, то корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$ действительны, и в этом случае применима вторая подстановка Эйлера. Если же $b^2-4ac<0$, то знак трехчлена $ax^2+bx+c$ совпадает со знаком коэффициента $a$, и так как трехчлен должен быть положительным, то $a>0$. В этом случае применима первая подстановка Эйлера.

Для нахождения интегралов указанного выше вида не всегда целесообразно применять подстановки Эйлера, так как для них можно найти и другие способы интегрирования, приводящие к цели быстрее. Рассмотрим некоторые из таких интегралов.

1. Для нахождения интегралов вида
$$\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad a\neq 0,}$$
выделяют полный квадрат из квадратного трехчлена:
$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+P,$$

где

$$\boxed{P = \frac{4ac - b^2}{4a}.}$$

После этого делают подстановку

$$\boxed{t = x + \frac{b}{2a},} \quad dx = dt$$

и получают

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + P}},}$$

где коэффициенты $a$ и $P$ имеют разные знаки или они оба положительны. При $a > 0$ и $P > 0$, а также при $a > 0$ и $P < 0$ интеграл сведется к логарифму, если же $a < 0$ и $P > 0$ — к арксинусу.

**Пример 8.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

◄ Так как $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, то, полагая $x - 2 = t$, $dx = dt$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C = \ln\left(x - 2 + \sqrt{x^2-4x+5}\right) + C. \text{ ►}$$

**Пример 9.** Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}}.$$

◄ Имеем $6x - x^2 = -\left[(x^2 - 6x + 9) - 9\right] = 9 - (x-3)^2$. Полагая $x - 3 = t$, $dx = dt$, будем иметь

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x-3}{3} + C. \text{ ►}$$

**2.** Интеграл вида

$$\boxed{\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \qquad a \neq 0,}$$

приводится к интегралу из п. 1 следующим образом. Учитывая, что производная $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, выделяем ее в числителе:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx &= \int \frac{M\frac{1}{2a}[(2ax+b) - b] + N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \\
&= \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax+b)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\
&= \frac{M}{2a} \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\
&= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.
\end{aligned}$$

**Пример 10.** Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx.$$

◀ Выделяем в числителе производную подкоренного выражения. Так как $(6x-x^2)' = 6-2x$, то будем иметь, учитывая результат примера 9,

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(6-2x)-8}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx =$$

$$= 4\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{d(6x-x^2)}{\sqrt{6x-x^2}} = 4\arcsin\frac{x-3}{3} - \sqrt{6x-x^2} + C. ▶$$

**3.** Интегралы вида

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,}$$

где $P_n(x)$ — многочлен $n$-ой степени, можно находить методом неопределенных коэффициентов, который состоит в следующем. Допустим, что имеет место равенство

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + A_n\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1)$$

где $Q_{n-1}(x)$ —многочлен $(n-1)$-ой степени с неопределенными коэффициентами:

$$Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ продифференцируем обе части (1):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + A_n\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (2)$$

Затем правую часть равенства (2) приводим к общему знаменателю, равному знаменателю левой части, т. е. $\sqrt{ax^2+bx+c}$, сокращая на который обе части (2), получим тождество

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + A_n, \qquad (3)$$

в обеих частях которого стоят многочлены степени $n$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях (3), получим $n+1$ уравнений, из которых находим искомые коэффициенты $A_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя их значения в правую часть (1) и найдя интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

получим ответ для данного интеграла.

**Пример 11.** Найти интеграл

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

◄ Положим

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (A_0 + A_1 x)\sqrt{x^2+2x+2} + A_2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}. \qquad (4)$$

Дифференцируя обе части равенства, будем иметь

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A_1\sqrt{x^2+2x+2} + (A_0 + A_1 x)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{A_2}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю и сокращая на него обе части, получим тождество

$$x^2 = A_1(x^2+2x+2) + (A_0 + A_1 x)(x+1) + A_2,$$

или

$$x^2 = 2A_1x^2 + (2A_1 + A_1 + A_0)x + (A_0 + 2A_1 + A_2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, придем к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 2A_1 = 1 \\ x^1 & A_0 + 3A_1 = 0 \\ x^0 & A_0 + 2A_1 + A_2 = 0 \end{array}\right\},$$

из которой находим $A_0 = -\frac{3}{2}$, $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Затем находим интеграл, стоящий в правой части равенства (4):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

Следовательно, искомый интеграл будет равен

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C. \ ►$$

# § 9. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

1. Рассмотрим интеграл вида

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx,} \qquad (1)$$

в котором подынтегральная функция является рациональной функцией как от $\sin x$, так и от $\cos x$ одновременно. Например, функция

$$f(x) = \frac{1 - 2\sin x}{2 + \cos^2 x}$$

является рациональной функцией одновременно и от $\sin x$ и от $\cos x$; функция

$$g(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\sqrt{\cos x} + \cos x}$$

является рациональной относительно $\sin x$, но не является рациональной относительно $\cos x$ (функции такого типа мы рассматривать не будем).

Интеграл (1) с помощью замены переменной $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, где $-\pi < x < \pi$, сводится к интегралу от рациональной функции. В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2},$$

поэтому

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,}$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от $t$.

**Пример 1.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

◀ Применяя подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, найдем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \ ▶$$

Указанная подстановка иногда приводит на практике к громоздким выкладкам, поэтому укажем несколько частных случаев, в которых интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ может быть найден с помощью более простых подстановок.

**А.** Пусть интеграл имеет вид

$$\boxed{\int R(\sin x)\cos x\,dx.}$$

Тогда подстановка $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ приводит интеграл к виду

$$\boxed{\int R(t)\,dt.}$$

**Пример 2.**

$$◀ \int \frac{\cos x\,dx}{4 + \sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\sin x\right) + C. \ ▶$$

**Б.** Интеграл имеет вид

$$\boxed{\int R(\cos x)\sin x\,dx.}$$

Полагая $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$, приводим интеграл к виду

$$-\int R(t)\,dt.$$

**Пример 3.**

$$◀ \int \frac{\sin x}{2 + \cos x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ \sin x\,dx = -dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{2+t} = -\int \frac{d(2+t)}{2+t} = -\ln(2+t) + C = -\ln(2+\cos x) + C. \ ▶$$

**В.** Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ содержит $\sin x$ и $\cos x$ только в четных степенях, то удобно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2},$$

Функция $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ в этом случае выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$, а следовательно, и через $t$. В самом деле,

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

В результате этой подстановки интеграл приведется к виду

$$\boxed{\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,}$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от $t$.

**Пример 4.** Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2}$$

◀ Положим $\operatorname{tg} x = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{4}{1+t^2} + 2}\,\frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right) + C. \blacktriangleright$$

**г.** Рассмотрим интеграл вида

$$\boxed{\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx,}$$

где $\alpha$, $\beta$ — действительные числа, и укажем два случая, когда этот интеграл выражается через элементарные функции.

а) Одно из чисел $\alpha$ или $\beta$ является положительным нечетным числом. Пусть, например, $\beta = 2k+1$, где $k > 0$ — целое, а второй показатель степени, т. е. $\alpha$, может быть любым действительным числом. Тогда, используя тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, интеграл можно представить в виде

$$\int \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx = \int \sin^\alpha x \cos^{2k+1} x\,dx =$$
$$= \int \sin^\alpha x(\cos^2 x)^k \cos x\,dx = \int \sin^\alpha x(1-\sin^2 x)^k \cos x\,dx.$$

Положив

$$\sin x = t, \quad \cos x\,dx = dt,$$

будем иметь

$$\int \sin^\alpha x \cos^{2k+1} x\,dx = \int t^\alpha (1-t^2)^k\,dt.$$

Возводя $1-t^2$ в степень $k$ по формуле бинома Ньютона и умножая все члены полученного многочлена на $t^\alpha$, получим $k+1$ степенных функций, интегрирование которых очевидно.

**Пример 5.** Найти интеграл

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx.$$

◀ Имеем

$$\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^2(1-t^2)^2\, dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C. \ ▶$$

**Пример 6.** Найти интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ \sin x\, dx = -dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^2}\, dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C. \ ▶$$

**Пример 7.** Найти интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

◀ Имеем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} \cos x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}} \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\, dt = \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right) dt = 2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}(\sqrt{\sin x})^5 + C. \ ▶$$

б) Числа $\alpha$ и $\beta$ являются положительными четными числами, т.е. $\alpha = 2m$, $\beta = 2n$, где $m$ и $n$ — натуральные числа. В этом случае иногда удобно преобразовывать подынтегральную функцию, используя известные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{1}$$

В результате применения этих формул при $m \neq n$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \int (\sin^2 x)^m (\cos^2 x)^n\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2^{m+n}} \int (1-\cos 2x)^m (1+\cos 2x)^n\, dx.$$

Возводя биномы $1-\cos 2x$ и $1+\cos 2x$ соответственно в степени $m$ и $n$ и раскрывая скобки, получим сумму, члены которой содержат нечетные и четные степени $\cos 2x$. Члены с нечетными степенями $\cos 2x$ интегрируются как указано в п. а). К членам с четными степенями $\cos 2x$ снова применяем формулы (1), в результате чего получим степени $\cos 4x$. Продолжая так дальше, дойдем до интегралов вида $\int \cos kx\, dx$ (где $k > 0$ — четное число), которые легко находятся.

В случае, когда $m = n$, используется также формула

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

применение которой дает

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2n} x \, dx = \int (\sin x \cos x)^{2n} \, dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^{2n} dx =$$

$$= \frac{1}{4^n} \int \sin^{2n} 2x \, dx = \frac{1}{4^n} \int (\sin^2 2x)^n \, dx =$$

$$= \frac{1}{4^n} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{8^n} \int (1 - \cos 4x)^n \, dx.$$

Последний интеграл находится так, как указано выше.

**Пример 8.**

$$◄ \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \frac{1}{8} \int \left[1 + \cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - (1 - \sin^2 2x) \cos 2x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x + \sin^2 2x \cos 2x\right) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin^3 2x\right) + C. ►$$

**Пример 9.**

$$◄ \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C. ►$$

**2.** *Интегралы вида*

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx}$$

легко находятся с помощью тригонометрических формул ($\alpha \neq \beta$):

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x].$$

Найдем, например, первый интеграл. Имеем

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta}\right] + C.$$

Остальные два интеграла находятся аналогично.

**Пример 10.**

$$◄ \int \cos 3x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 4x + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. ►$$

## Упражнения

Используя таблицу простейших интегралов, найдите следующие интегралы:

1. $\int x^2 \sqrt[3]{x}\, dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$.
3. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$.
4. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.
5. $\int 2^x 8^x\, dx$.
6. $\int \frac{6^x}{3^{2x}}\, dx$.
7. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x}\, dx$.
8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}\, dx$.
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x \cos^3 x}\, dx$.
10. $\int \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\sin 5x \cos 2x}\, dx$.
11. $\int (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2\, dx$.
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.
14. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} x}\, dx$.
15. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx$.
16. $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx$.
17. $\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$.
18. $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$.
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$.

Применяя метод подстановки, найдите следующие интегралы:

21. $\int x e^{\frac{x^2}{2}}\, dx$.
22. $\int x^2 \sin \frac{x^3}{3}\, dx$.
23. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$.
24. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\,(1 + \sqrt[4]{x})}$.
26. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\sqrt{1 - \sqrt[4]{x}}}$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.
28. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1}\, dx$.
29. $\int x^2 (x - 1)^{18}\, dx$.
30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$.
31. $\int x \sqrt[3]{x + 1}\, dx$.
32. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}\, dx$.
33. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$.
34. $\int \frac{x\, dx}{1 + x^4}$.
35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx$.
36. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$.
37. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x}\, dx$.
38. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} e^{\operatorname{tg}^2 x}\, dx$.
39. $\int \frac{\operatorname{arctg} x \cdot e^{\operatorname{arctg}^2 x}}{1 + x^2}\, dx$.
40. $\int \frac{\ln x}{x(4 + \ln^2 x)}\, dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, найдите следующие интегралы:

41. $\int x e^{-x}\, dx$.
42. $\int x 2^x\, dx$.
43. $\int x \sin 2x\, dx$.
44. $\int (1 + x) e^x\, dx$.
45. $\int (1 + x \ln 2) 2^x\, dx$.
46. $\int (2x - x^2) e^{-x}\, dx$.
47. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.
48. $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$.
49. $\int \arcsin x\, dx$.
50. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$.
51. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$.
52. $\int \cos(\ln x)\, dx$.
53. $\int \sin(\ln x)\, dx$.

Найдите интегралы от простейших дробей:

**54.** $\int \frac{2\,dx}{5+2x}$. **55.** $\int \frac{dx}{2-3x}$. **56.** $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$.

**57.** $\int \frac{dx}{(1-2x)^5}$. **58.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. **59.** $\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$.

**60.** $\int \frac{x+1}{x^2-x+2}\,dx$. **61.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+7x+13}$.

Найдите интегралы от рациональных функций, применяя метод неопределенных коэффициентов:

**62.** $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx$. **63.** $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$. **64.** $\int \frac{3x^2-2x-4}{(x-1)(x^2-4)}\,dx$.

**65.** $\int \frac{x^3-x+2}{x^2-1}\,dx$. **66.** $\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx$. **67.** $\int \frac{x+2}{(x+3)^2}\,dx$.

**68.** $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^4}\,dx$. **69.** $\int \frac{dx}{x^3+x^4}$. **70.** $\int \frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$.

**71.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **72.** $\int \frac{dx}{x^4-1}$. **73.** $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

Найдите интегралы от иррациональных функций:

**74.** $\int \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. **75.** $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$. **76.** $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

**77.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$. **78.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$. **79.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

**80.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$. **81.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. **82.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

**83.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-6x-1}}\,dx$. **84.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+6x-x^2}}\,dx$. **85.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{1+6x-x^2}}\,dx$.

**86.** $\int \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$. **87.** $\int \frac{1+2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **88.** $\int \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$.

**89.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **90.** $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Найдите интегралы от тригонометрических функций:

**91.** $\int \frac{dx}{2+\cos x}$. **92.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. **93.** $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

**94.** $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$. **95.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$. **96.** $\int \frac{\cos x\,dx}{5+\sin^2 x-6\sin x}$.

**97.** $\int \frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x+\sin x}\,dx$. **98.** $\int \cos^3 x\,dx$. **99.** $\int \sin^5 x\,dx$.

**100.** $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$. **101.** $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$. **102.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

**103.** $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$. **104.** $\int \sin^4 x\,dx$. **105.** $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

106. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$. 107. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$. 108. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

109. $\int \frac{dx}{\cos^4 x - \sin^4 x}$. 110. $\int \sin 5x \cos x\,dx$. 111. $\int \sin x \cos 5x\,dx$.

112. $\int \cos 7x \cos 3x\,dx$. 113. $\int \sin 15x \sin 10x\,dx$. 114. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.

115. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$.

## Ответы

1. $0{,}3x^{10/3}+C$. 2. $4\sqrt[4]{x}+C$. 3. $\frac{8}{15}x^{15/8}+C$. 4. $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+C$. 5. $\frac{16^x}{\ln 16}+C$. 6. $\frac{1}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$. 7. $-\frac{5^{-x}}{\ln 5}-\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C$. 8. $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$. 9. $2\operatorname{tg}x+C$. 10. $2x+C$. 11. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-4x+C$. 12. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. 13. $-\operatorname{th}x-\operatorname{cth}x+C$. 14. $2\operatorname{ch}x+C$. 15. $x-\operatorname{th}x+C$. 16. $x-\operatorname{ch}x+C$. 17. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{3}x+C$. 18. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$. 19. $\ln\sqrt{2x+\sqrt{4x^2+9}}+C$. 20. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}x+C$. 21. $e^{x^2/2}+C$; 22. $-\cos\frac{x^3}{3}+C$. 23. $-\sqrt{1-x^2}+C$. 24. $\ln|\ln x|+C$. 25. $4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. 26. $-8\sqrt{1-\sqrt[4]{x}}+C$. 27. $-2\ln\left(e^{-x/2}+\sqrt{1+e^{-x}}\right)+C$. 28. $\ln|e^x-1|+e^x+C$. 29. $\frac{(x-1)^{21}}{21}+\frac{(x-1)^{20}}{10}+\frac{(x-1)^{19}}{19}+C$. 30. $2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x-1}$. 31. $\frac{3}{7}(x+1)^{7/3}-\frac{3}{4}(x+1)^{4/3}+C$. 32. $\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3)+C$. 33. $-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{(1-x)^3}+C$. 34. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}x^2+C$. 35. $\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3+C$. 36. $\frac{1}{4}\ln^2\operatorname{tg}x+C$. 37. $\ln|\ln\sin x|+C$. 38. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{tg}^2 x}+C$. 39. $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}^2 x}+C$. 40. $\ln\sqrt{4+\ln^2 x}+C$. 41. $-(x+1)e^{-x}+C$. 42. $\frac{x\ln 2-1}{\ln^2 2}2^x+C$. 43. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}\cos 2x+C$. 44. $xe^x+C$. 45. $x2^x+C$. 46. $x^2e^{-x}+C$. 47. $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}+C$. 48. $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C$. 49. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$. 50. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$. 51. $-\frac{x^2}{2}+x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$. 52. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$. 53. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. 54. $\ln|5+2x|+C$. 55. $-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. 56. $-\frac{1}{6(3x+5)^2}+C$. 57. $\frac{1}{8(1-2x)^4}+C$. 58. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$. 59. $\ln\sqrt{x^2+2x+5}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x+1}{2}+C$. 60. $\ln\sqrt{x^2-x+2}+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C$. 61. $\ln\sqrt{x^2+7x+13}-\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{3}}+C$. 62. $\ln|x^2+3x-10|+C$. 63. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{|2x+1|}}+C$. 64. $\ln|(x-1)(x^2-4)|+C$. 65. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 66. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$. 67. $\frac{1}{x+3}+\ln|x+3|+C$. 68. $\frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{1}{x+1}+C$. 69. $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. 70. $\frac{1}{x-1}+\ln|x+1|+C$. 71. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$. 72. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. 73. $\frac{1}{3}\left(\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$. 74. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$. 75. $2\sqrt{1+x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$. 76. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 77. $-\frac{3}{8}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{4/3}+C$. 78. $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x}|+C$. 79. $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. 80. $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x-5}|+C$. 81. $\ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+5})+C$. 82. $\arcsin\frac{x+2}{3}$. 83. $\sqrt{x^2-6x-1}+4\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-1}|+C$. 84. $2\sqrt{1+6x-x^2}+4\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{10}}+C$. 85. $-\sqrt{1+6x-x^2}+C$. 86. $x\sqrt{x^2+2x+2}+C$. 87. $x^2\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$. 88. $x\sqrt{x^2+2}-\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C$. 89. $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}+C$. 90. $\left(\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$. 91. $\ln\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+C$. 92. $\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$. 93. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|+C$. 94. $\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. 95. $\ln(1+\sin^2 x)+C$. 96. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}+C$. 97. $-x+2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. 98. $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$. 99. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. 100. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$. 101. $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. 102. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$. 103. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. 104. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. 105. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. 106. $-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. 107. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C$. 108. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{ctg}2x+C$. 109. $-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 110. $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 4x}{8}+C$. 111. $-\frac{\cos 6x}{12}+\frac{\cos 4x}{8}+C$. 112. $\frac{\sin 10x}{20}+\frac{\sin 4x}{8}+C$. 113. $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$. 114. $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}+C$. 115. $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$.

Глава XIII

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## § 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

### 1.1. Геометрия: площадь плоской фигуры

Рассмотрим плоскую фигуру $aABb$, ограниченную кривой $AB$, являющейся графиком положительной непрерывной функции $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$, $a < b$, оси $Ox$ и прямыми $x = a$, $x = b$, которую будем называть *криволинейной трапецией* (рис. 1).

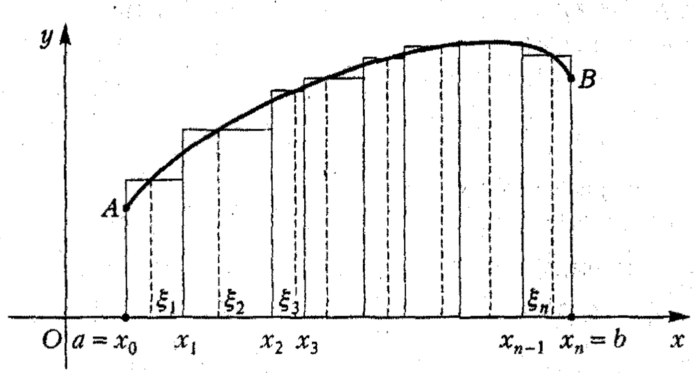


Рис. 1

Установим понятие площади криволинейной трапеции $aABb$ и укажем способ вычисления этой площади. Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем по одной произвольной точке $\xi_k$ ($x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$) и построим прямоугольник с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой, равной $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Площадь $\Delta Q_k$ этого прямоугольника будет равна

$$\Delta Q_k = f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где длина основания прямоугольника равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. В результате такого построения получим «ступенчатую» фигуру, состоящую из $n$ прямоугольников, площадь $Q_n$ которой будет равна сумме площадей этих прямоугольников:

$$Q_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi)\Delta x_k.$$

Будем теперь делить отрезок $[a, b]$ на все более и более мелкие части так, чтобы число частичных отрезков увеличивалось, а их длины уменьшались. Тогда «ступенчатая» фигура будет все меньше и меньше отклоняться от криволинейной трапеции $aABb$. Пусть

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k$$

является длиной наибольшего из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При $\lambda \to 0$ число частичных отрезков будет неограничено увеличиваться, а длины $\Delta x_k$ всех этих отрезков будут стремиться к нулю, так как $0 \leqslant \Delta x_k \leqslant \lambda$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Если существует конечный предел $Q$ площади «ступенчатой» фигуры при

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0,$$

то он принимается за площадь криволинейной трапеции $aABb$, т. е.

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} Q_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Этот предел, если он существует, не должен зависеть от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и от выбора точек $\xi_k$ на них.

Таким образом, задача о площади криволинейной трапеции $aABb$ привела нас к вычислению предела вида

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

## 1.2. Физика: путь материальной точки

Рассмотрим следующую физическую задачу: найти путь $S$, пройденный материальной точкой за промежуток времени от $t = t_0$ до $t = T$, если известна скорость $v$ движения этой точки как функция времени $t$, т. е. $v = f(t)$. Для ее решения разобьем промежуток времени $[t_0, T]$ на $n$ малых временных интервалов, ограниченных моментами времени

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Допустим, что скорость $f(t)$ мало меняется на каждом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ и поэтому ее можно приближенно считать постоянной на нем и равной значению $v$ в некоторый момент времени $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Тогда путь $s_k$, пройденный точкой за время $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, будет приближенно равен $s_k = f(\tau_k)\Delta t_k$ и, следовательно, путь $S_n$, пройденный точкой за время от $t_0$ до $T$, приближенно равен

$$S_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = f(\tau_1)\Delta t_1 + f(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + f(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Обозначим через $\lambda$ наибольший из частичных промежутков времени $\Delta t_k$:

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k.$$

При $\lambda \to 0$ число частичных промежутков времени будет неограниченно увеличиваться, а сами промежутки будут неограниченно уменьшаться. При переходе к пределу при $\lambda \to 0$ в сумме $S_n$ получим точное значение пути $S$, пройденного точкой за промежуток времени от $t_0$ до $T$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta_k. \tag{2}$$

Мы пришли к вычислению предела, имеющего тот же вид, что и предел (1), только роль переменной $x$ играет время $t$.

Таким образом, рассмотренные выше две задачи приводят нас к вычислению однотипных пределов (1) и (2) специального вида. Эти пределы, в случае их существования, называются определенными интегралами от функции $f(x)$ (или $f(t)$) и обозначаются символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\left(\text{или } \int\limits_{t_0}^T f(t)\,dt\right)$.

Перейдем теперь к изучению этих пределов, отвлекаясь от их геометрического и физического смыслов.

## § 2. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Разобьем этот отрезок на $n$ частей произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($\Delta x_k > 0$) — длины полученных частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. В каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку $\xi_k$, вычислим значения $f(\xi_k)$ функции $f(x)$ в этих точках и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Величина интегральной суммы $S_n$ зависит как от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, так и от выбора точек $\xi_k$ на них.

Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

---

**Определение.** Число $J$ называется *пределом интегральных сумм* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на части с длинами $\Delta x_k < \delta$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. $\lambda < \delta$), неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - J\right| < \varepsilon$$

будет выполняться при любом выборе точек $\xi_k$.

---

Для обозначения предела интегральных сумм употребляется запись

$$\boxed{J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Здесь число $\delta$ зависит от выбора числа $\varepsilon$ и поэтому иногда пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

---

**Определение.** Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$, $a < b$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и при любом выборе точек $\xi_k$ в них, интегральные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ при $\lambda \to 0$ имеют один и тот же конечный предел $J$, то этот предел называют *определенным интегралом в смысле Римана* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и его обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

---

Итак, по определению

$$\boxed{J = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Числа $a$ и $b$ называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интеграла*; $x$ называется *переменной интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

Заметим, что из самой конструкции определенного интеграла вытекает, что его величина не меняется, если функцию $f(x)$ видоизменить в любой точке $c$ отрезка $[a, b]$. Иначе говоря, если вместо функции $f(x)$ взять функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x \in [a, b], \quad x \neq c, \\ C & \text{для} \quad x = c, \end{cases}$$

где число $C \neq f(c)$, то

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Это справедливо и в случае изменения значений функции $f(x)$ в конечном числе точек отрезка $[a, b]$.

Так как определенный интеграл определен нами при условии, что $a < b$, то дополним его определение, заметив, что:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \text{если } b = a, \text{ то } \displaystyle\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0; \\[2ex] 2)\ \text{если } b < a, \text{ то } \displaystyle\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \end{array}}$$

**Пример.** Вычислить $\int\limits_a^b dx$.

◀ По определению определенного интеграла получаем

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\Big[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})\Big] =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}(x_n - x_0) = \lim_{\lambda\to 0}(b - a) = b - a. \blacktriangleright$$

# § 3. Условия интегрируемости функций

**Определение.** Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ называется *интегрируемой по Риману* на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

**Теорема 1.** *Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

◀ Пусть функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как $f(x)$ неограничена на $[a, b]$, то найдется частичный отрезок, на котором она не ограничена. Пусть, например, таким отрезком будет отрезок $[x_0, x_1]$. Выберем точки $\xi_k$ и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Зафиксируем точки $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ и будем менять только точку $\xi_1 \in [x_0, x_1]$. Тогда сумма $\sum\limits_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ будет иметь определенное значение, а первое слагаемое $f(\xi_1)\Delta x_1$ будет изменяться, и надлежащим выбором точки $\xi_1$ его можно сделать как угодно большим по абсолютной величине и, значит, $|S_n|$ может быть сделана как угодно большой. Это означает, что интегральная сумма $S_n$ при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta x_k \to 0$ не имеет конечного предела, т. е. $f(x)$ не интегрируема по Риману на $[a, b]$. Отсюда следует, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$. ▶

**Замечание.** Ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не является достаточным условием для ее интегрируемости, т. е. функция $f(x)$ может быть ограниченной на $[a, b]$ и в то же время неинтегрируемой на $[a, b]$. В качестве примера, доказывающего это утверждение, приведем функцию Дирихле:

$$f(x) = \Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

которую рассмотрим, например, на отрезке $[0, 1]$. Эта функция ограничена: $|f(x)| \leqslant 1\ \forall x \in [0, 1]$, но она не интегрируема на нем.

◄ В самом деле, составив для нее интегральную сумму $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ будем иметь:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = 1 \quad \text{для рациональных точек} \quad \xi_k,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k = 0 \quad \text{для иррациональных точек} \quad \xi_k.$$

Итак, при любом как угодно малом $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$ интегральная сумма $S_n$ может принимать как значение, равное 1, так и значение, равное нулю. Следовательно, $S_n$ при $\lambda \to 0$ предела не имеет, т. е. функция Дирихле не интегрируема на отрезке $[0, 1]$. ►

Приведем без доказательства теорему, дающую достаточное условие интегрируемости функции.

**Теорема 2.** *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

**Пример 1.** Функция $f(x) = e^{-x^2}$ непрерывна на отрезке $[0, a]$, где $a$ — любое число, и поэтому она интегрируема на этом отрезке, т. е. для нее существует определенный интеграл

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx.$$

Приведем формулировки еще двух теорем, дающих достаточные признаки интегрируемости функции.

**Теорема 3.** *Функция $f(x)$, определенная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.*

Здесь следует отметить, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то ее значения заключены между числами $f(a)$ и $f(b)$. Поэтому определенная на $[a, b]$ монотонная функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.

**Теорема 4.** *Функция $f(x)$, ограниченная на отрезке $[a, b]$ и имеющая на нем конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.*

**Пример 2.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$, потому что она ограничена, $|f(x)| \leqslant 1$ $\forall x \in [0, 1]$, и имеет на этом отрезке одну точку разрыва $x = 0$ (точка разрыва второго рода).

## § 4. Свойства определенного интеграла

Установим некоторые свойства определенного интеграла. При этом будем считать, что все рассматриваемые функции непрерывны, а следовательно, интегрируемы на отрезке $[a, b]$.

1. Определенный интеграл зависит только от величины нижнего и верхнего пределов интегрирования, т. е. от чисел $a$ и $b$, и от вида подынтегральной функции $f(x)$, но он не зависит от переменной интегрирования. Поэтому величина определенного

интеграла не изменится, если букву $x$, обозначающую переменную интегрирования, заменить любой другой буквой:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.}$$

**2.** Постоянный множитель можно выносить за знак (вносить под знак) определенного интеграла:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \qquad A = \text{const}\,.}$$

◀ По определению имеем

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n Af(\xi_k)\,\Delta x_k = A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = A\int_a^b f(x)\,dx. ▶$$

**3.** Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.}$$

◀ $$\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k)\pm f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{k=1}^n f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k)\Delta x_k\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f_2(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx. ▶$$

---

**Следствие.** *Имеет место соотношение*

$$\int_a^b [A_1f_1(x) + A_2f_2(x)]\,dx = A_1\int_a^b f_1(x)\,dx + A_2\int_a^b f_2(x)\,dx,$$

*где $A_1$ и $A_2$ — произвольные постоянные, которое выражает* свойство линейности *определенного интеграла.*

---

**4.** Для любых чисел $a$, $b$ и $c$ имеет место равенство

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx}$$

при условии существования обоих интегралов в правой части. Это равенство выражает *свойство аддитивности* определенного интеграла.

◀ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a < c < b$. По определению имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Так как интеграл не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, то точку $c$ можно включить в число точек деления этого отрезка. Пусть, например, разбиение имеет вид (рис. 2)

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = c < x_{m+1} < \ldots < x_n = b.$$

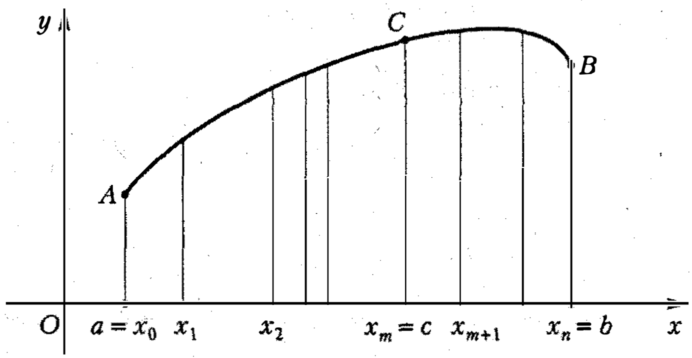


Рис. 2

Тогда интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, соответствующую отрезку $[a, b]$, можно разбить на две суммы: одну, соответствующую отрезку $[a, c]$, и другую, соответствующую отрезку $[c, b]$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом равенстве к переделу при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

2) Пусть $a < b < c$. В силу доказанного имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

откуда находим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Для случая, когда $f(x) > 0$ и $a < c < b$, свойство аддитивности определенного интеграла означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ равна сумме площадей криволинейных трапеций $acCA$ и $cbBC$ (рис. 2).

**5.** Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяют условию $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx,}$$

т. е. неравенство можно интегрировать.

$\blacktriangleleft$ Так как $f(x) \leqslant g(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$, то при любом разбиении отрезка $[a, b]$ на части $[x_{k-1}, x_k]$ и при любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, получим при $a \leqslant b$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \blacktriangleright$$

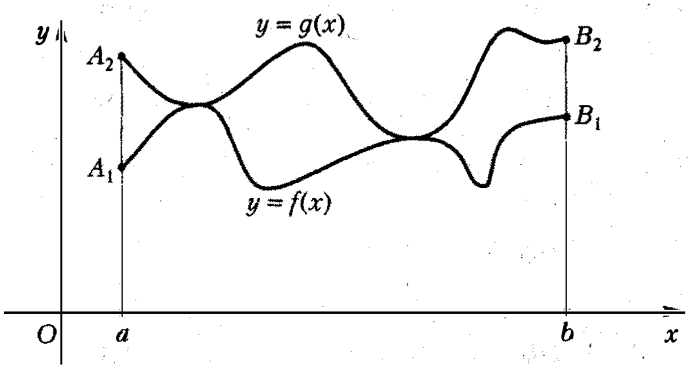


Рис. 3

**Замечание.** В случае, когда $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, это свойство геометрически означает, что площадь криволинейной трапеции $abB_1A_1$ не больше площади криволинейной трапеции $abB_2A_2$ (рис. 3). Из этого свойства, в частности, следует, что если $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \leqslant 0$) на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \left(\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0\right).$$

6. Если $a < b$, то имеет место неравенство

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.}$$

◀ Интегрируя в переделах от $a$ до $b$ очевидное двойное неравенство

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

получим

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

т. е.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \ ▶$$

7. Если числа $m$ и $M$ являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).}$$

◀ Так как $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$, то в силу свойства 5 получаем

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Но так как

$$\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b-a),$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \ ▶$$

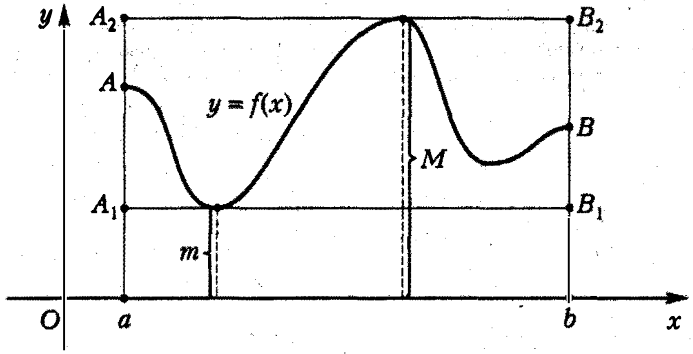


Рис. 4

**Замечание.** Для функции $f(x) > 0$ на $[a, b]$, это свойство геометрически означает, что площадь $Q$ криволинейной трапеции $abBA$ заключена между площадями $Q_1$ и $Q_2$ прямоугольников $abB_1A_1$ и $abB_2A_2$ (рис. 4):

$$Q_1 \leqslant Q \leqslant Q_2.$$

**Пример 1.** Оценить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}}.$$

◀ Так как

$$m = \min_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0{,}25,$$

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}} = \left.\frac{1}{\sqrt{10 + 6\sin x}}\right|_{x=\frac{3}{2}\pi} = 0{,}50,$$

то согласно свойству 7 будем иметь

$$2\pi \cdot 0{,}25 \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}} \leqslant 2\pi \cdot 0{,}50,$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{10 + 6\sin x}} \leqslant \pi. \blacktriangleright$$

**Пример 2.** Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^{-x}\,dx.$$

◀ На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $x^2 \leqslant x$, откуда $-x \leqslant -x^2$, и так как число $e > 1$, то $e^{-x} \leqslant e^{-x^2}$ и по свойству 5 получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geqslant \int_0^1 e^{-x}\,dx. \blacktriangleright$$

# § 5. Теорема о среднем

**Теорема 5.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда на этом отрезке найдется по крайней мере одна точка $\xi$ такая, что имеет место равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

◀ Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке имеет наименьшее значение $m$ и наибольшее значение $M$, и по свойству 7 получим

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Учитывая, что $b - a > 0$, находим

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Положим

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \quad \text{где} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

В силу непрерывности функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, заключенные между $m$ и $M$. Поэтому найдется значение $x = \xi$, $a \leqslant \xi \leqslant b$ такое, что $f(\xi) = \mu$, т. е.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a \leqslant \xi \leqslant b. ▶$$

**Замечание.** При $a < b$ будем иметь

$$a \leqslant \xi \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \xi - a \leqslant b - a \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{\xi - a}{b - a} \leqslant 1.$$

Положив

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

находим отсюда $\xi = a + (b - a)\cdot\theta$. Доказанное выше равенство можно записать теперь в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f[a + (b-a)\theta], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Геометрический смысл теоремы о среднем состоит в следующем. Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q_1, \quad (b-a)f(\xi) = Q_2,$$

где $Q_1$ — площадь криволинейной трапеции $abBA$, $Q_2$ — площадь прямоугольника $abNM$, основанием которого является отрезок $[a, b]$, а высотой ордината точки $C(\xi, f(\xi))$. Теорема о среднем утверждает, что на кривой $AB$ (рис. 5) найдется по крайней мере одна точка $C(\xi, f(\xi))$ такая, что $Q_1 = Q_2$.

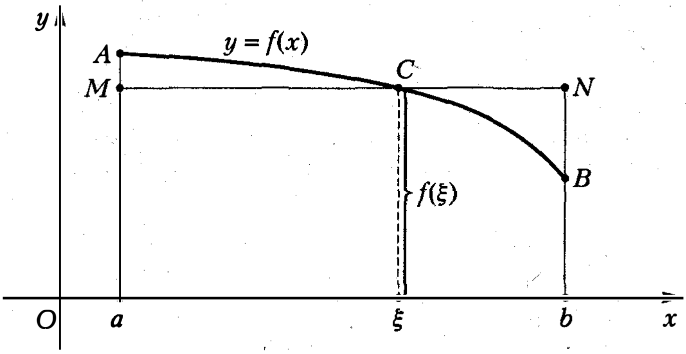


Рис. 5

---

**Определение.** Число

$$M[f(x)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

называется *средним значением функции $f(x)$ на отрезке* $[a, b]$.

---

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $M[f(x)] = f(\xi)$.

**Пример.** Найти среднее значение функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

◀ По определению получаем:

$$M[\sin x] = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались формулой Ньютона—Лейбница, которая будет доказана ниже в § 7. ▶

# § 6. Производная интеграла с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Возьмем на этом отрезке произвольную точку $x$ и рассмотрим определенный интеграл

$$\int_a^x f(t)\, dt.$$

Этот интеграл существует для любого $x \in [a, b]$ в силу непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ и является функцией своего верхнего предела $x$. Обозначим ее через $F(x)$, т. е. положим

$$\boxed{F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.}$$

---

**Теорема 6.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

***имеет производную в любой точке $x \in [a, b]$, причем***

$$F'(x) = f(x).$$

---

Другими словами, производная от определенного интеграла по его верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в верхнем пределе.

◀ Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда функция $F(x)$ получит приращение $\Delta F$, равное в силу аддитивности определенного интеграла

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int\limits_x^a f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_x^a f(t)\,dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$\Delta F = (x + \Delta x - x) f(x + \theta \cdot \Delta x) = \Delta x \cdot f(x + \theta \Delta x),$$

откуда

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x + \theta \cdot \Delta x), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая непрерывность функции $f(x)$ в любой точке $x \in [a, b]$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta \cdot \Delta x) = f(x),$$

т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad \left( \int\limits_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x) \quad \forall x \in [a, b]. \blacktriangleright$$

**Замечание.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ то для любого $x \in [a, b]$ будем иметь

$$\left( \int\limits_x^b f(t)\,dt \right)' = \left( -\int\limits_b^x f(t)\,dt \right)' = -\left( \int\limits_b^x f(t)\,dt \right)' = -f(x).$$

**Пример.**

$$\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = +e^{-x^2}, \quad \left(\int\limits_x^0 e^{-t^2}\,dt\right)' = -e^{-x^2}.$$

---

**Теорема 7.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ то она на этом отрезке имеет первообразную, а значит и неопределенный интеграл.*

---

◀ Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда для любого $x$ из этого отрезка существует определенный интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$, т. е. существует функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

такая, что

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Это означает по определению, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Отсюда следует, что неопределенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, можно представить в виде

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная. ▶

# §7. Формула Ньютона—Лейбница

---

**Теорема 8.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

---

Эта формула называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

◀ Возьмем функцию

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Эта функция является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а любые две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т. е. существует постоянная $C$ такая, что

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

для всех $x \in [a, b]$. При $x = a$ имеем

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

и так как $\int_a^a f(t)\,dt = 0$, то $F(a) + C = 0$, откуда

$$C = -F(a).$$

Следовательно,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Положив $x = b$, получим

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

или, обозначая переменную $t$ интегрирования через $x$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \blacktriangleright$$

**Замечание.** Если обозначить $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x).}$$

Доказанная формула является основной в интегральном исчислении. Она сводит вычисление определенного интеграла от функции $f(x)$ к нахождению ее первообразной $F(x)$.

**Примеры.**

1. Найти

$$\int_2^4 x\,dx.$$

◀ Известно, что

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad \text{т.е.} \quad F(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Поэтому

$$\int_2^4 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 6. \blacktriangleright$$

2. Найти

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2. \blacktriangleright$$

# §8. Замена переменной в определенном интеграле

**Теорема 9.** *Пусть дан интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

*где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Положим $x = \varphi(t)$, и пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:*

*1) при изменении $t$ от $\alpha$ до $\beta$ функция $\varphi(t)$ непрерывно меняется от $a$ до $b$ так, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ а все остальные значения $\varphi(t)$ содержатся в области, где функция $f(x)$ определена и непрерывна;*

*2) производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

*Тогда будет справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

◄ По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Возьмем сложную функцию от $t$, а именно $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$, определенную на отрезке $[\alpha, \beta]$. По правилу дифференцирования сложной функции ее производная равна

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Таким образом, функция $\Phi(t)$ есть первообразная для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha, \beta]$, и по формуле Ньютона—Лейбница получим

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \ ►$$

**Замечание.** Функцию $\varphi(t)$ выбирают так, чтобы новый интеграл

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

был более простым, чем первоначальный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

При вычислении определенного интеграла по доказанной формуле к старой переменной интегрирования не возвращаются.

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0).$$

◀ Положим, например, $x = a\sin t$. Тогда

$$dx = a\cos t\,dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t.$$

Полагая в равенстве $x = a\sin t$ сначала $x = 0$, а затем $x = a$, получим два уравнения $a\sin t = 0$, $a\sin t = a$, из которых находим нижний предел интегрирования $t = 0$ и верхний предел $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому будем иметь

$$\int\limits_a^b \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}. \blacktriangleright$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$$

◀ Положим $x = e^t$. Так как $t = 0$ при $x = 1$, $t = 1$ при $x = e$, $t = \ln x$, то

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

**Замечание.** В некоторых случаях в интеграле удобнее применять замену переменной не в виде $x = \varphi(t)$, а в виде $t = \psi(x)$.

**Пример 3.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$$

◀ Положим $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тогда $x = \ln(t^2 + 1)$, $dx = \frac{2t\,dt}{1+t^2}$. При $x = 0$ получаем $t = 0$, а при $x = \ln 2$ получаем $t = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\left(t\Big|_0^1 - \operatorname{arctg} t\Big|_0^1\right) = 2(1 - \operatorname{arctg} 1) = 2 - \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\,dx.$$

◀ Положим $t = x^4 - 2x + 1$. В данном случае выражать $x$ через $t$, т. е. находить функцию $x = \varphi(t)$ не нужно! Дифференцируя это равенство, получим $dt = (4x^3 - 2)\,dx$, откуда $(2x^3 - 1)\,dx = \frac{1}{2}dt$. Поэтому будем иметь

$$\int\limits_0^1 (2x^3 - 1)\sqrt{x^4 - 2x + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Приведем теорему, которая в некоторых случаях упрощает вычисление определенного интеграла.

**Теорема 10.** *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на симметричном относительно точки $O$ отрезке $[-a, a]$, $a > 0$. Тогда*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция;} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

◀ Согласно свойству аддитивности определенного интеграла имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной: $x = -t$, $dx = -dt$; $t = -x$. Тогда

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \left[f(-x) + f(x)\right] dx.$$

Полагая в этом равенстве $f(-x) = f(x)$ (четная функция), а затем $f(-x) = -f(x)$ (нечетная функция), получим требуемые равенства. ▶

**Пример 5.** Интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x e^{\cos x}\,dx = 0,$$

так как подынтегральная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ является нечетной.

◀ В самом деле,

$$\sin^3(-x)e^{\cos(-x)} = -\sin^3 x e^{\cos x} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \ ▶$$

# § 9. Интегрирование по частям

**Теорема 11.** *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ Тогда имеет место равенство*

$$\int_{a}^{b} u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_{a}^{b} v\,du.$$

◀ В силу условия теоремы произведение $uv = u(x)v(x)$ данных функций имеет на $[a, b]$ производную, равную

$$(uv)' = uv' + vu',$$

т. е. $uv$ является первообразной на $[a, b]$ для функции $uv' + vu'$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_{a}^{b} (uv' + vu')\,dx = uv\Big|_a^b.$$

По правилу интегрирования суммы это равенство можно представить в виде

$$\int_{a}^{b} uv'\,dx + \int_{a}^{b} vu'\,dx = uv\Big|_a^b,$$

откуда находим

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

Так как по определению дифференциала функции $v'dx = dv$, $u'dx = du$ то окончательно будем иметь

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \blacktriangleright$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx.$$

◀ В данном интеграле имеем $u\,dv = (\pi - x)\sin dx$. Возьмем $u = \pi - x$, $dv = \sin x\,dx$, тогда $du = -dx$, $v = -\cos x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^\pi (\pi - x)\sin x\,dx = -(\pi - x)\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\,dx = (x - \pi)\cos x\Big|_0^\pi - \sin x\Big|_0^\pi = \pi. \blacktriangleright$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

◀ Имеем

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x}, & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - 2e^{-1}. \blacktriangleright$$

## § 10. Площадь плоских фигур в прямоугольных координатах

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда площадь $Q$ криволинейной трапеции $abBA$ будет равна (рис. 6)

$$\boxed{Q = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

**Пример 1.** Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямой $x = a$ $(a > 0)$ и осью $Ox$ (рис. 7).

◀ Имеем

$$Q = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}. \blacktriangleright$$

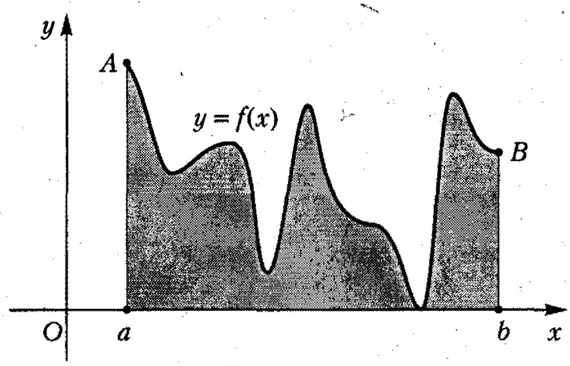


Рис. 6

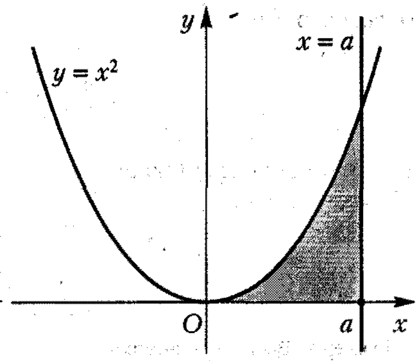


Рис. 7

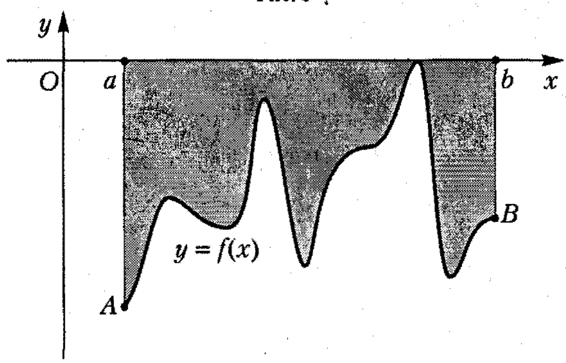


Рис. 8

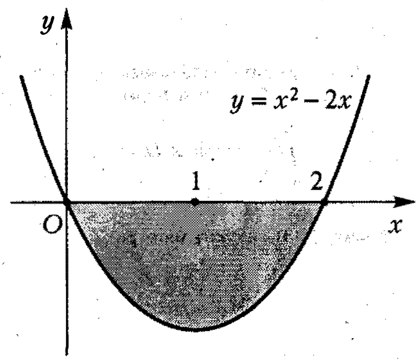


Рис. 9

**2.** Пусть функция $f(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Тогда кривая $y = f(x)$ расположена под осью $Ox$ и интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx < 0.$$

Площадь $Q$ криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 8) будет равна

$$\boxed{Q = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad Q = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.}$$

**Пример 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и осью $Ox$ (рис. 9).

◄ Данная фигура расположена под осью $Ox$ на отрезке $[0, 2]$ на котором $y \leqslant 0$. Поэтому искомая площадь $Q$ будет равна

$$Q = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

**3.** Пусть функция $f(x)$ меняет свой знак при переходе $x$ через точку $c \in (a, b)$, т. е. часть криволинейной трапеции $abBA$ расположена над осью $Ox$, а другая часть под осью $Ox$ (рис. 10). Тогда площадь $Q$ всей заштрихованной фигуры будет равна сумме двух площадей

$$Q = Q_1 + Q_2 = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

или

$$\boxed{Q = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.}$$

**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - x^2$, прямой $x = 2$ и осями $Ox$ и $Oy$ (см. рис. 11).

◄ Имеем

$$Q = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx - \int_1^2 (1 - x^2)\,dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - x\Big|_1^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{3} - 1 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 2. ►$$

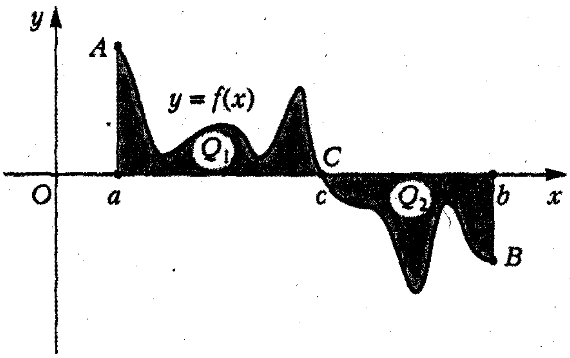


Рис. 10

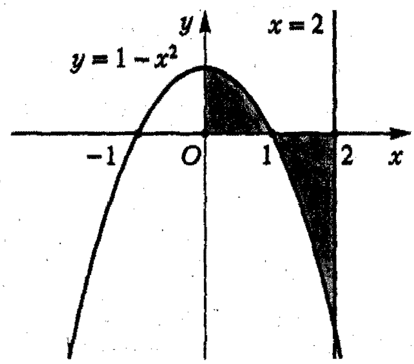


Рис. 11

**4.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $f(x) > g(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, $a < b$, причем кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Тогда площадь $Q$ фигуры, ограниченной этими линиями (рис. 12), будет равна разности площадей $Q_1$ и $Q_2$ криволинейных трапеций $aACBb$ и $aADBb$ соответственно. Таким образом,

$$\boxed{Q = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{Q = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\,dx.}$$

Для нахождения пределов интегрирования $a$ и $b$ надо из системы уравнений $y = f(x)$, $y = g(x)$, исключить $y$ и решить уравнение $f(x) = g(x)$, действительные корни которого дадут искомые пределы.

**Пример 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 4x + 6$ (рис. 13).

◀ Находим абсциссы точек $A$ и $B$ пересечения данных парабол. Для этого решаем уравнение $4x - x^2 = x^2 - 4x + 6$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ являются пределами интегрирования: $a = 1$, $b = 3$. Искомая площадь $Q$ равна

$$Q = \int_1^3 \left[4x - x^2 - (x^2 - 4x + 6)\right] dx = \int_1^3 (8x - 2x^2 - 6)\, dx = 4x^2\Big|_1^3 - \frac{2}{3}x^3\Big|_1^3 - 6x\Big|_1^3 = \frac{8}{3}. \ ▶$$

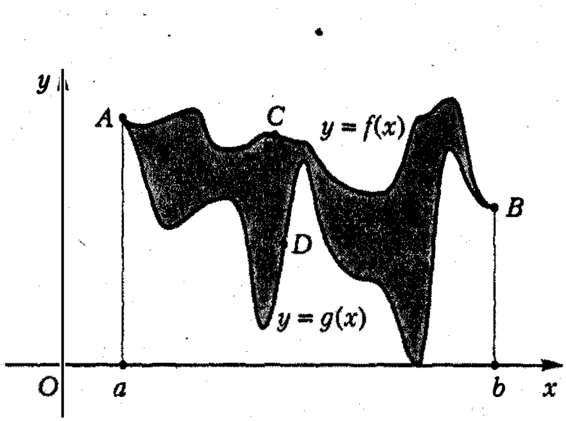


Рис. 12

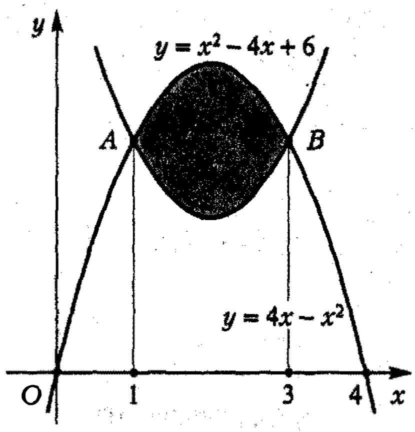


Рис. 13

5. Пусть кривая $AB$ задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны, причем $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Площадь $Q$ криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 14) описывается формулой

$$Q = \int_a^b y\, dx.$$

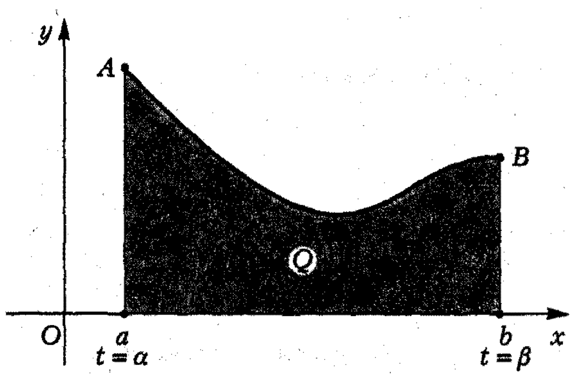


Рис. 14

Сделаем замену переменной в этом интеграле, положив $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда площадь $Q$ криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями, будет равна

$$\boxed{Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\, dt.}$$

**Пример 5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad (a, b > 0).$$

3 Зак. 628

◀ В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь той части фигуры, которая расположена в первой четверти, а затем ее учетверить, т. е. искомая площадь $Q$ равна

$$Q = 4\int_0^a y\,dx.$$

В этом интеграле делаем замену переменной:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad dx = -a\sin dt.$$

Для нахождения новых пределов интегрирования положим $x = 0$, тогда получим уравнение $a\cos t = 0$, из которого находим $t_1 = \alpha = \frac{\pi}{2}$, а затем, полагая $x = a$, получим $a = a\cos t$, т. е. $\cos t = 1$, откуда $t_2 = \beta = 0$. Таким образом, когда $x$ изменяется от 0 до $a$, то $t$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Поэтому

$$Q=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t\,dt) = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \pi ab. \text{ ▶}$$

6. В некоторых случаях для вычисления площадей плоских фигур удобнее пользоваться формулами, в которых интегрирование ведется по переменной $y$. В этом случае переменная $x$ считается функцией от $y$: $x = g(y)$, где функция $g(y)$ однозначна и непрерывна на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$ оси $Oy$. Пределы $c$ и $d$ интегрирования по переменной $y$, являющиеся точками пересечения данной кривой с осью $Oy$, находятся из уравнения $g(y) = 0$, получаемого из уравнения $x = g(y)$, если в нем положить $x = 0$. Тогда площадь $Q$, ограниченная кривой $x = g(y)$ и осью ординат (рис. 15), будет равна

$$\boxed{Q = \int_c^d g(y)\,dy.}$$

**Пример 6.** Вычислить площадь, ограниченную кривой $x = 2-y-y^2$ (парабола) и осью ординат (рис. 16).

◀ Пределы интегрирования находим как ординаты точек пересечения параболы с осью ординат: при $x = 0$ получаем уравнение $2-y-y^2 = 0$, из которого находим $y_1 = c = -2$, $y_2 = d = 1$. Следовательно,

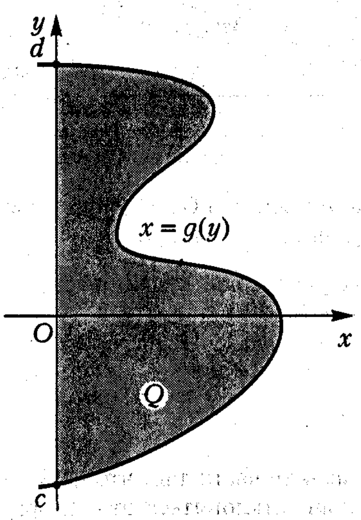

Рис. 15

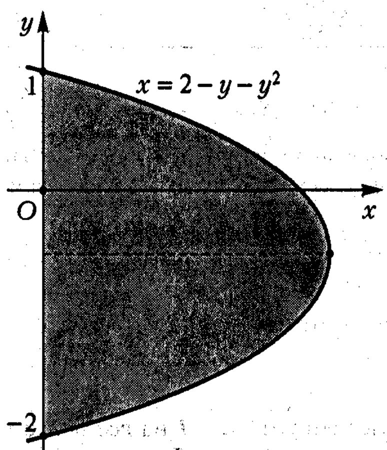

Рис. 16

искомая площадь будет равна

$$Q = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = 2y\Big|_{-2}^{1} - \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = 4{,}5. \blacktriangleright$$

**Задача.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ (парабола) и $x - y - 1 = 0$ (прямая).

**Задача.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ и осью абцисс.
**Указание.** Записать уравнения линий в виде $x = g(y)$.

# §11. Площадь плоской фигуры в полярных координатах

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = f(\varphi)$, где функция $f(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Плоская фигура, ограниченная этой кривой и двумя лучами, образующими с полярной осью углы $\alpha$ и $\beta$ называется *криволинейным сектором* (рис. 17).

Для определения площади криволинейного сектора $OABO$ разобьем его на $n$ произвольных частей лучами $\varphi = \alpha = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi = \varphi_{n-1}$, $\varphi = \beta = \varphi_n$. Обозначим углы между этими лучами через $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_n$. Возьмем произвольный луч $\widetilde{\varphi}_k$, заключенный между $\varphi_{k-1}$ и $\varphi_k$ и обозначим через $\widetilde{\rho}_k$ длину радиуса-вектора, соответствующего этому лучу. Возьмем круговой сектор с радиусом, равным $\widetilde{\rho}_k$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$(рис. 18). Его площадь $\Delta Q_k$ будет равна $\Delta Q_k = \frac{1}{2}\widetilde{\rho}_k^2\Delta\varphi_k$ или, так как $\widetilde{\rho}_k = f(\widetilde{\varphi}_k)$, $\Delta Q_k = \frac{1}{2}f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$.

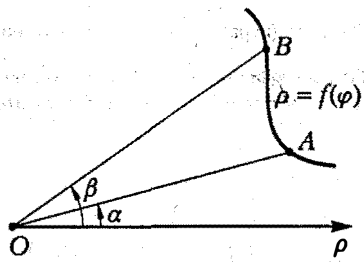


Рис. 17

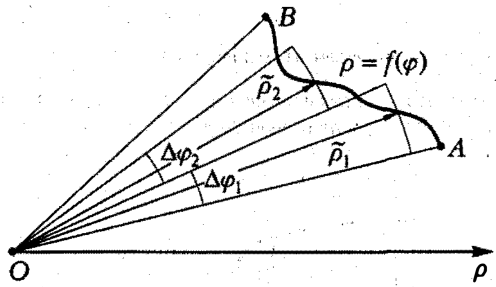


Рис. 18

Проделав подобное построение во всех $n$ частях сектора $OABO$, получим фигуру, состоящую из $n$ круговых секторов, площадь $Q_n$ которой будет равна

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.$$

Обозначим наибольшее $\Delta\varphi_k$ через $\lambda$:

$$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta\varphi_k.$$

Будем делить угол $AOB$ на все более и более мелкие части так, чтобы $\lambda \to 0$. Тогда полученная фигура будет все меньше и меньше отклоняться от сектора $OABO$, и поэтому естественно считать площадью $Q$ криволинейного сектора $OABO$ предел площади $Q_n$ построенной фигуры, когда $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta\varphi_k \to 0$, при условии что этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\widetilde{\varphi}_k$ на них. Таким образом, по определению имеем

$$\boxed{Q = \lim_{\lambda\to 0} Q_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k.}$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\widetilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$ является интегральной суммой для функции $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$, которая непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ в силу непрерывности функции $f(\varphi)$. Следовательно, эта сумма при $\lambda \to 0$ имеет предел, равный определенному интегралу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Итак, площадь криволинейного сектора $OABO$ равна

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.}$$

**Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad a > 0$$

(рис. 19).

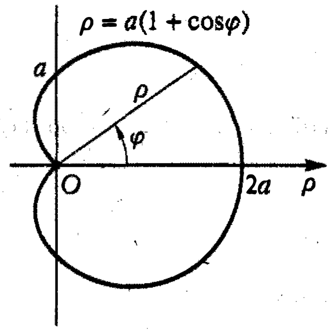


Рис. 19

◄ Искомая площадь равна

$$Q = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2. \blacktriangleright$$

## § 12. Вычисление объемов тел

Рассмотрим тело, ограниченное некоторой замкнутой поверхностью. Пусть известна площадь $Q$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси $Ox$ (рис. 20). Эта площадь зависит от положения секущей плоскости, т. е. она будет функцией от $x$:

$$Q = Q(x).$$

Будем считать, что функция $Q(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для определения объема данного тела проводим плоскости $x = a = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = b = x_n$, которые разобьют тело на $n$ слоев. В каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, возьмем по одной произвольной точке $\xi_k$ и заменим каждый слой тела цилиндром с образующими, параллельными оси $Ox$, направляющей которого является контур сечения тела плоскостью $x = \xi_k$ (рис. 20). Объем $\Delta v_k$ такого цилиндра равен произведению площади $Q(\xi_k)$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, его основания на его высоту $\Delta x_k$:

$$\Delta v_k = Q(\xi_k)\Delta x_k,$$

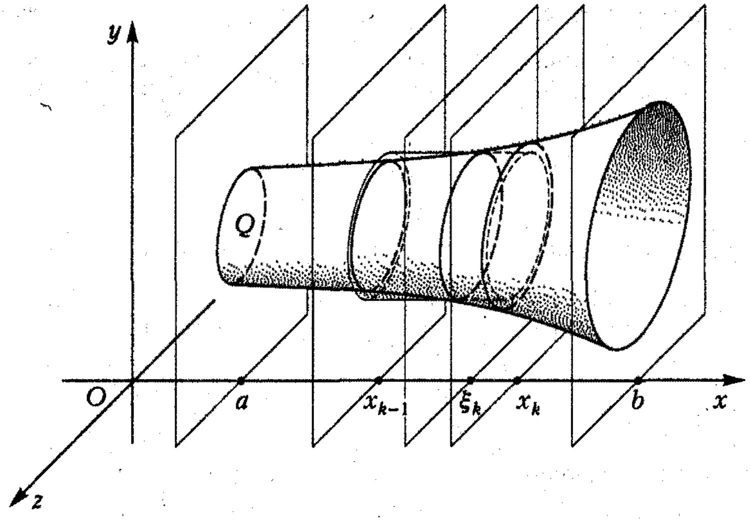


Рис. 20

а объемом $V_n$ всех $n$ цилиндров будет сумма

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если эта сумма имеет предел при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, то его естественно принять за объем $V$ данного тела:

$$V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k.$$

В нашем случае сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} Q(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой для функции $Q(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, и поэтому указанный предел существует и равен определенному интегралу

$$\boxed{V = \int_a^b Q(x)\, dx.} \qquad (1)$$

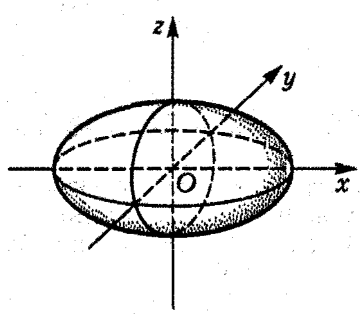


Рис. 21

**Пример 1.** Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◀ В сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной к оси $Ox$ и соответствующей абсциссе $x$, получается эллипс (рис. 21)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

или

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

полуоси которого равны

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Поэтому площадь $Q(x)$ сечения будет равна

$$Q(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Применяя формулу (1), получим

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $b = c = a$, эллипсоид обращается в сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$, а объем шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant a^2$ будет равен $V = \frac{4}{3}\pi a^3$. ▶

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 22), ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и осью $Ox$. Это тело называют *телом вращения*. Сечением тела вращения плоскостью, перпендикулярной к оси $Ox$ и соответствующей абсциссе $x$, является круг площади $Q(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ и, следовательно, объем тела вращения

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{или} \quad V = \pi\int_a^b y^2 dx.}$$

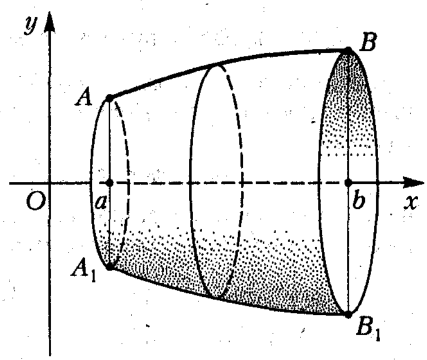

Рис. 22

**Пример 2.** Найти объем тела вращения, полученного вращением дуги $OA$ параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси $Ox$ (рис. 23).

◀ Уравнение дуги $OA$ параболы будет $y = \sqrt{2px}$, $p > 0$. Искомый объем равен

$$V = \pi\int_0^a y^2 dx = \pi\int_0^a 2px\,dx = \pi pa^2. \ ▶$$

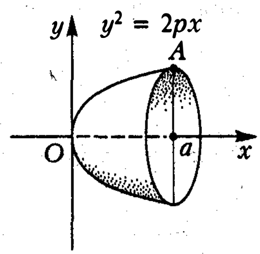

Рис. 23

# § 13. Вычисление длины кривой

Рассмотрим кривую $\smile AB$, имеющую концы в точках $A$ и $B$, и возьмем на ней произвольные точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, следующие вдоль кривой одна за другой (рис. 24). Соединим эти точки хордами $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Тогда длина $S_n$ ломаной $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$, вписанной в кривую $\smile AB$, будет равна

$$S_n = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k.$$

**Определение.** *Длиной* $S$ кривой $\smile AB$ называется предел, к которому стремится длина $S_n$ вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$S = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k,$$

если этот предел существует и не зависит от выбора точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на кривой $\smile AB$. В этом случае кривая $\smile AB$ называется *спрямляемой.*

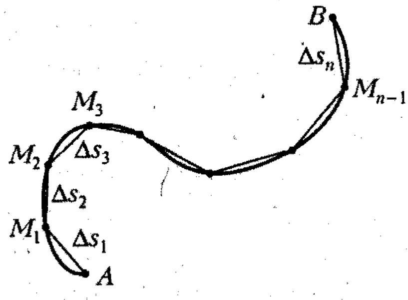

Рис. 24

## 13.1. Длина кривой в прямоугольных координатах

Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнением $y = f(x)$, где функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$

на $n$ элементарных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и построим вписанную ломаную, вершинами которой являются точки кривой $y = f(x)$:

$$A = M_0\big(x_0, f(x_0)\big), \quad M_1\big(x_1, f(x_1)\big), \quad \ldots, \quad M_n\big(x_n, f(x_n)\big) = B.$$

Обозначим длины звеньев ломаной через $\Delta s_1$, $\Delta s_n$, $\ldots$, $\Delta s_n$ и положим

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \qquad \Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

Тогда длина $k$-го звена ломаной равна (рис. 25)

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k.$$

Применяя теорему Лагранжа, получим

$$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = \\ = (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k) = \\ = f'(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $\xi_k$ — некоторая точка отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Поэтому

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k,$$

и длина вписанной ломаной будет равна

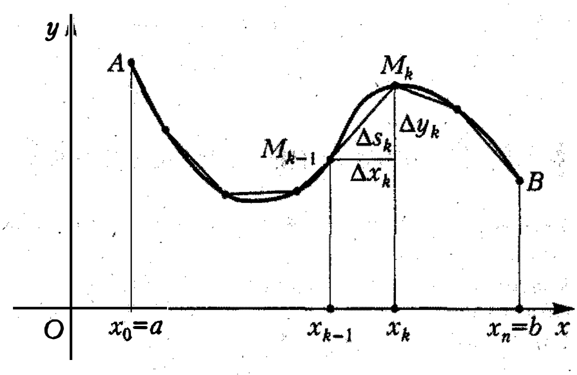

Рис. 25

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k. \tag{1}$$

Так как по условию $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то и функция $\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$ будет непрерывна на этом отрезке, и, следовательно, интегральная сумма (1) имеет предел $S$ при $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta s_k \to 0$, который является определенным интегралом:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta s_k \to 0 \\ 1\leqslant k\leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(\xi_k)\right]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

или, короче,

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.} \tag{2}$$

**Пример 1.** Вычислить длину $S$ цепной линии

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

от точки $A(0, 1)$ до точки $B(a, \operatorname{ch} a)$ (рис. 26).

◀Из уравнения цепной линии находим

$$y' = \operatorname{sh} x.$$

Учитывая тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, получим

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{ch} x \quad (\operatorname{ch} x > 0).$$

Поэтому

$$S = \int_0^a \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\Big|_0^a = \operatorname{sh} a. \ ▶$$

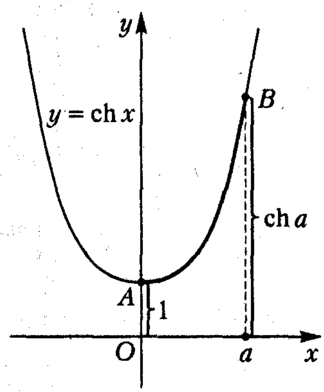


Рис. 26

## 13.2. Длина кривой, заданной в параметрической форме

Пусть кривая $\smile AB$ задана в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, причем $\varphi'(t) \neq 0$ на этом отрезке. В этом случае уравнения (3) определяют функцию $y = f(x)$, имеющую непрерывную производную $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ на $[t_0, T]$. Тогда

$$\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt$$

и, согласно формуле (2),

$$S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt,$$

или

$$\boxed{S = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.} \tag{4}$$

**Пример 2.** Вычислить длину окружности радиуса $R$ (рис. 27).

◀ Окружность в параметрической форме задается уравнениями

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi.$$

Согласно формуле (4) получим

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R. \ ▶$$

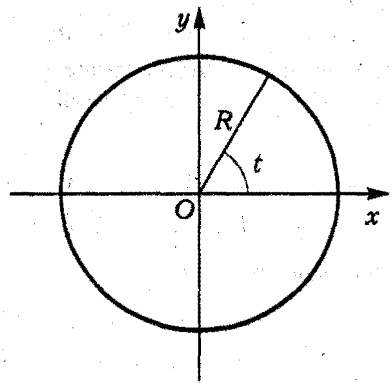


Рис. 27

**Пример 3.** Найти длину эллипса.

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad (0 < b \leqslant a).$$

◀ Так как $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$, то, применяя формулу (4) и учитывая симметричность эллипса относительно координатных осей, найдем

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Мы получил так называемый *эллиптический интеграл*, который не вычисляется с помощью непосредственного применения формулы Ньютона—Лейбница, поскольку первообразная не является элементарной функцией. ▶

**Замечание.** Если положить $t = \frac{\pi}{2} - \tau$, то получим

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 \tau}\, d\tau = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\, dt;$$

именно в этой последней записи интересующий нас интеграл обычно и рассматриваают.

**Пример 4.** Найти длину одной «арки» циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad 0 \leqslant t < 2\pi, \quad a > 0 \qquad \text{(рис. 28)}.$$

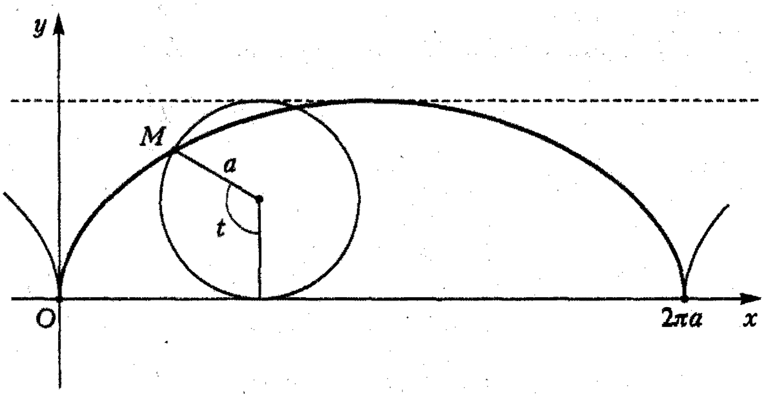


Рис. 28

◀ Применяя формулу (4), найдем

$$S = a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \ ▶$$

### 13.3. Длина кривой в полярных координатах

Пусть кривая $\smile AB$ задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Для нахождения длины кривой составим ее параметрические уравнения. С этой целью воспользуемся формулами перехода от полярных координат к декартовым: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Подставляя сюда вместо $\rho$ функцию $f(\varphi)$, получим уравнения $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, которые являются параметрическими уравнениями кривой. Здесь параметром является полярный угол $\varphi$. Дифференцируя последние уравнения, найдем

$$x'_\varphi = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi, \qquad y'_\varphi = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi.$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства и складывая, будем иметь

$$x'^2_\varphi + y'^2_\varphi = \left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2.$$

Согласно формуле (4), получим

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[f'(\varphi)\right]^2 + \left[f(\varphi)\right]^2}\,d\varphi, \tag{5}$$

или, что то же,

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.} \tag{6}$$

**Пример 5.** Вычислить длину кардиоиды $\rho = a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$.

◀ Из уравнения кардиоиды находим $\rho' = a\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Применяя формулу (6), получаем, что

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a. \ ▶$$

## § 14. Дифференциал длины дуги кривой

Пусть дана кривая $y = f(x)$, где функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$. Рассмотрим дугу $\smile AM$ этой кривой от точки $A(a, f(a))$ до переменной точки $M(x, f(x))$ (рис. 29). Тогда длина $S$ дуги $\smile AM$ этой кривой будет функцией от $x$ и выразится формулой

$$S = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx = \int_a^x \sqrt{1 + \left[f'(t)\right]^2}\,dt.$$

Так как подынтегральная функция $\sqrt{1+[f'(t)]^2}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то будем иметь

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt\right) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

или

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Отсюда для дифференциала длины дуги $\smile AM$ получаем формулу

$$\boxed{dS = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{или} \quad dS = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.}$$

Геометрический смысл дифференциала длины дуги кривой заключается в том, что он равен длине отрезка $MN$ касательной $MT$, ограниченного точкой касания $M(x, y)$ и точкой $N(x+dx, y+dy)$ (рис. 29). При достаточно малом $dx = \Delta x$ длина $\Delta S$ дуги $\smile MM'$ кривой $y = f(x)$, отвечающей приращению $\Delta x = dx$ может считаться приближенно равной длине отрезка $MN$ касательной $MT$, проведенной в точке $M$ к этой кривой, т. е.

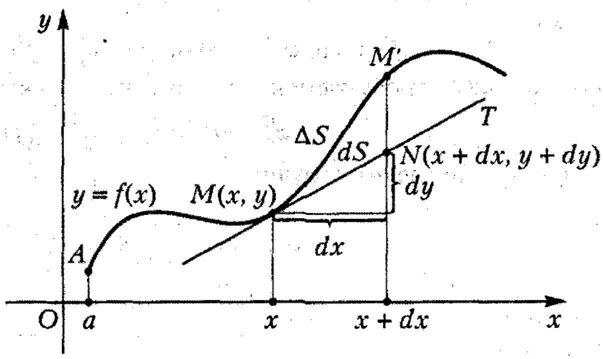

Рис. 29

$$\Delta S \approx dS.$$

Для случая задания кривой параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[t_0, T]$, получим

$$dS = \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

или

$$\boxed{dS = \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt.}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что если за параметр $t$ взять длину $S$ переменной дуги, т. е. положить

$$x = \varphi(S), \quad y = \psi(S),$$

то

$$\boxed{\left(\frac{dx}{dS}\right)^2+\left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = 1.}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах: $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где функция $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную $f'(\varphi)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\boxed{dS = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.}$$

# § 15. Физические приложения определенного интеграла

## 15.1. Работа переменной силы

Определим работу, которую произведет сила $\mathbf{F}$ при перемещении ею материальной точки $M$ по прямой $Ox$ из точки $a$ в точку $b$ ($a < b$). Из физики известно, что если сила $\mathbf{F}$ постоянна, то работа $A$ равна произведению величины $F$ силы $\mathbf{F}$ на длину пути $s = b - a$, т. е. $A = F \cdot s$, при условии, что сила направлена по прямой $Ox$.

Пусть величина силы $\mathbf{F}$, действующей на материальную точку $M$ по прямой $Ox$, является непрерывной функцией от $x$:

$$F = F(x)$$

на отрезке $[a, b]$ прямой $Ox$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на $n$ частей с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку $\xi_k$ и будем считать, что величина силы $\mathbf{F}$ на этом отрезке постоянна и равна $F = F(\xi_k)$. Тогда при достаточно малом $\Delta x_k$ работа $\Delta A_k$ будет приближенно равна

$$\Delta A_k \approx F(\xi_k)\Delta x_k,$$

а сумма

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$

даст приближенное значение работы $A$ силы $\mathbf{F}$ на отрезке $[a, b]$. Но так как $A_n$ является интегральной суммой для функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$, то за работу $A$ силы $\mathbf{F}$ на отрезке $[a, b]$ естественно принять предел этой суммы при $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k \to 0$, который существует в силу непрерывности $F(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, искомая работа $A$ будет равна

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\, dx. \tag{1}$$

**Пример 1.** Найти работу $A$, которая совершается при перемещении заряда $q_2$ из точки $M_1$, отстоящей от заряда $q_1$ на расстоянии $r_1$, в точку $M_2$, отстоящую от заряда $q_1$ на расстоянии $r_2$, считая, что заряд $q_1$ помещен в точке $M_0$, принятой за начало отсчета.

◀ Пусть электрические заряды $q_1$ и $q_2$ имеют одинаковые знаки, например, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Поэтому заряд $q_1$ будет отталкивать заряд $q_2$. По закону Кулона величина $F$ силы $\mathbf{F}$ электростатического взаимодействия двух точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, равна

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $r$ — расстояние между зарядами, $k$ — коэффициент пропорциональности. Применяя формулу (1), найдем

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr = kq_1q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = kq_1q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). ▶$$

## 15.2. Масса и центр тяжести неоднородного стержня

Пусть дан неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a, b]$ оси $Ox$, линейная плотность $\rho = \rho(x)$ которого известна. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, на каждом из которых возьмем по одной произвольной точке $\xi_k$, и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k.$$

Так как каждое слагаемое этой суммы является приближенным значением массы части стержня на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то указанную сумму естественно принять за приближенное значение массы всего стержня. Поэтому массу $m$ всего стержня определим как предел сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$ при стремлении к нулю $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k \to 0$, т. е. как интеграл

$$\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Таким образом, масса $m$ стержня равна

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{2}$$

Для определения центра тяжести неоднородного стержня используем формулу для координаты центра системы материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и расположенных в точках $x_1, x_1, \ldots, x_n$ оси $Ox$. Координата $x_c$ центра тяжести этой системы находится по формуле

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}. \tag{3}$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ и вычислим массу $m_k$ части стержня, расположенной на этом отрезке. По формуле (2) имеем $m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx$. Применив формулу среднего значения к этому интегралу, получим, что

$$m_k = \rho(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \rho(\xi_k)\Delta x_k, \quad \text{где} \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k.$$

Допуская, что масса $m_k$ сосредоточена в точке $\xi_k$ отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, неоднородный стержень можно рассматривать как систему материальных точек с массами $m_k$, расположенных в точках $\xi_k$ отрезка $[a, b]$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\,dx = m,$$

то по формуле (3) найдем приближенное выражение для координаты $x_c$ центра тяжести неоднородного стержня:

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k) \Delta x_k}{m}. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в числителе правой части (4), является интегральной суммой для функции $x\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому координату $x_c$ центра тяжести неоднородного стержня определим по формуле

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}.$$

**Пример 2.** Найти координату $x_c$ центра тяжести неоднородного стержня, линейная плотность которого $\rho = x$, а длина $l = 1$.

◀ Находим массу данного стержня

$$m = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Искомая координата центра тяжести равна

$$x_c = 2\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}. \;▶$$

## § 16. Приближенное вычисление определенных интегралов

При решении физических задач приходится иметь дело с определенными интегралами от непрерывных функций, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. Это приводит к необходимости получения приближенных формул для вычисления определенных интегралов. Приведем две из них, а именно, формулу трапеций и формулу парабол.

### 16.1. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Для упрощения рассуждений будем считать, что $f(x) \geqslant 0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

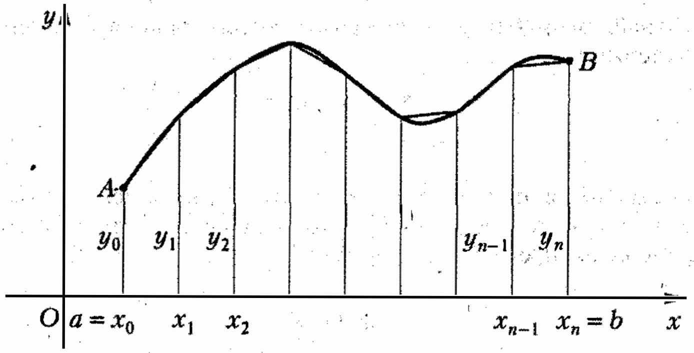


Рис. 30

и с помощью прямых $x = x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ построим $n$ прямолинейных трапеций (рис. 30). Сумма площадей этих трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n-x_{n-1}) = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right],$$

где $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ — соответственно основания трапеций, а $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ — их высоты. Таким образом, получена приближенная формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right],}$$

которая называется *формулой трапеций*. Эта формула тем точнее, чем больше $n$.

**Замечание.** Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка $f''(x)$, то абсолютная величина погрешности не превосходит числа

$$M\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f''(x)|$.

**Пример 1.** Пользуясь формулой трапеций, вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+1}$ при $n = 10$.

◀ Разобьем отрезок $[0, 1]$ на 10 равных частей точками $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; … ; $x_9 = 0{,}9$; $x_{10} = 1$ и вычислим приближенно значения функции $f(x) = \frac{1}{x+1}$ в этих точках:

$f(0) = 1{,}0000;$

$f(0{,}1) = 0{,}9091;$ $f(0{,}2) = 0{,}8333;$ $f(0{,}3) = 0{,}7692;$

$f(0{,}4) = 0{,}7143;$ $f(0{,}5) = 0{,}6667;$ $f(0{,}6) = 0{,}6250;$

$f(0{,}7) = 0{,}5882;$ $f(0{,}8) = 0{,}5556;$ $f(0{,}9) = 0{,}5263;$

$f(1) = 0{,}5000.$

Применяя формулу трапеций, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}0000+0{,}5000}{2} + 0{,}9091 + 0{,}8333 + 0{,}7692 + 0{,}7143 + 0{,}6667 + 0{,}6250 + \right.$$
$$\left. + 0{,}5882 + 0{,}5556 + 0{,}5263\right) = 0{,}69377 \approx 0{,}6938.$$

Оценим погрешность полученного результата. Так как

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{то} \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

На отрезке $[0,1]$ имеем $|f''(x)| \leqslant 2$, а значит $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f''(x)| = 2$. Поэтому погрешность полученного результата не превосходит величины

$$M\frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12\cdot 10^2} = \frac{1}{600} < 0{,}0017.$$

Точное значение данного интеграла легко находим по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

Абсолютная ошибка результата, полученного по формуле трапеций, меньше 0,0007, что находится в соответствии с приведенной выше оценкой погрешности. ▶

## 16.2. Формула парабол

Вычислим сначала площадь $Q$ криволинейной трапеции, ограниченной дугой $M_0M_2$ параболы $y = Ax^2 + Bx + C$, проходящей через точки $M_0(0, y_0)$, $M_1\left(\frac{h}{2}, y_1\right)$, $M_2(h, y_2)$ (рис. 31). Площадь $Q$ будет равна

$$Q = \int_0^h (Ax^2 + Bx + C)\,dx = A\frac{x^3}{3}\Big|_0^h + B\frac{x^2}{2}\Big|_0^h + Cx\Big|_0^h =$$
$$= A\,\frac{h^3}{3} + B\,\frac{h^2}{2} + Ch = \frac{h}{6}\,(2Ah^2 + 3Bh + 6C). \tag{1}$$

Выразим площадь $Q$ через ординаты точек $M_0$, $M_1$, $M_2$. Подставляя координаты этих точек в уравнение параболы, получим

$$y_0 = C, \quad y_1 = A\,\frac{h^2}{4} + B\,\frac{h}{2} + C,$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C.$$

Отсюда находим, что

$$2Ah^2 + 3Bh + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2$$

и поэтому

$$Q = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

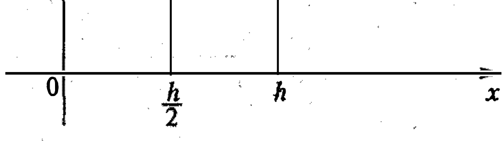


Рис. 31

Рассмотрим теперь определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2n$ (четное число) равных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

и представим интеграл в виде суммы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{2n-2}^{2n} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Проведем через точки $x_k$ прямые, параллельные оси $Oy$ и обозначим через $A$, $M_1$, $M_2, \ldots, M_{2n-2}, M_{2n-1}$, $B$ точки пересечения этих прямых с кривой $y = f(x)$, а их ординаты обозначим чрез $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$. Через каждые три точки $M_{2k-2}$, $M_{2k-1}$, $M_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ проведем параболу с вертикальной осью симметрии. В результате получим $n$ криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболами (рис. 32). Так как площадь частичной криволинейной трапеции, отвечающей отрезку $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ приближенно равна площади соответствующей «параболической» трапеции, то, учитывая, что длина $h$ отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ равна $\frac{b-a}{6n}$, по формуле (1) имеем

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right),$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя в правую часть равенства (2) вместо интегралов их приближенные значения, получаем приближенную формулу

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})\right].}$$

Эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*.

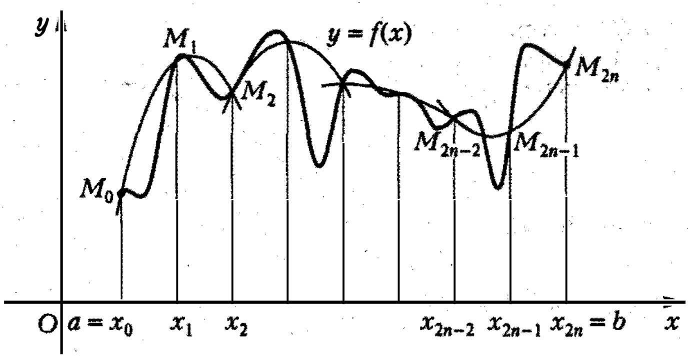


Рис. 32

**Замечание.** Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную четвертого порядка $f^{IV}(x)$, то абсолютная величина погрешности формулы Симпсона не больше чем

$$M\frac{(b-a)^5}{2880n^4},$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|$.

Погрешность формулы Симпсона с ростом $n$ уменьшается быстрее, чем погрешность формулы трапеций. Поэтому формула Симпсона позволяет получить большую точность, чем формула трапеций.

**Пример 2.** Вычислить приближенно интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

по формуле Симпсона при $2n = 4$.

◀ Разобьем отрезок $[0, 1]$ на четыре равных части точками

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0{,}25; \quad x_2 = 0{,}50; \quad x_3 = 0{,}75; \quad x_4 = 1$$

и вычислим приближенно значения функции $y = \frac{1}{x+1}$ в этих точках:

$$y_0 = 1{,}0000; \quad y_1 = 0{,}8000; \quad y_2 = 0{,}6662; \quad y_3 = 0{,}5714; \quad y_4 = 0{,}5000.$$

По формуле Симпсона находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[1{,}0000 + 0{,}5000 + 2\cdot 0{,}6662 + 4(0{,}8000 + 0{,}5714)\right] \approx 0{,}69325.$$

Оценим погрешность полученного результата. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ имеет производную четвертого порядка $f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$, для которой получаем

$$M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f^{\mathrm{IV}}(x)\right| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = 24.$$

Погрешность результата не превосходит величины $\frac{24}{2880\cdot 2^4} < 0{,}0005$. Сравнивая приближенное значение интеграла с точным, приходим к выводу, что абсолютная ошибка результата, полученного по формуле Симпсона, меньше 0,0001, что соответствует полученной выше оценке погрешности. ▶

Эти примеры показывают, что формула Симпсона дает более точные приближенные значения определенных интегралов, чем формула трапеций.

## Упражнения

Вычислить определенные интегралы, пользуясь формулой Ньютона—Лейбница.

**1.** $\int_0^1 x^3\cdot\sqrt{x}\,dx$. **2.** $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. **3.** $\int_0^1 2^x\cdot 3^{-x}\,dx$.

**4.** $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$. **5.** $\int_0^1 \mathrm{tg}^2\,x\,dx$. **6.** $\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

**7.** $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$. **8.** $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$. **9.** $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

**10.** $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **11.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **12.** $\int_0^4 \frac{\ln(x+\sqrt{9+x^2})}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

13. $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.  14. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$.  15. $\int\limits_0^{\pi/2} 3^{\cos^2 x} \sin 2x\,dx$.

16. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$.  17. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/12} \ln\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x\,dx$.  18. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

19. $\int\limits_0^1 \operatorname{sh}^2 x\,dx$.  20. $\int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{th} x\,dx$.  21. $\int\limits_0^{\ln 3} \operatorname{th}^2 x\,dx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите следующие интегралы:

22. $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$.  23. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx$.  24. $\int\limits_0^1 x\operatorname{sh} x\,dx$.

25. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} \arcsin x\,dx$.  26. $\int\limits_0^1 x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$.

**Вычисление площадей**

27. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2+2x-3$ и прямой $y = x+3$.

28. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

29. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 1$, прямой $x = 2$ и осями координат.

30. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2-3x-4$ и $y = 4+3x-x^2$.

31. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = x-1$, $y = 1$ и кривой $y = \ln x$.

32. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{-x}$, $y = e^x$ и прямой $x = 1$.

33. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью $Oy$.

34. Вычислите площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$.

35. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, и осью абцисс.

36. Найдите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $a > 0$.

37. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin\varphi$ $(a > 0)$.

38. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin 2\varphi$ $(a > 0)$.

39. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2 + \sin\varphi$.

**Вычисление объемов тел**

40. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

41. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ кривой $y = \sin^2 x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

42. Найдите объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси $Ox$.

43. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ площадки, ограниченной осью $Ox$ и параболой $y = ax - x^2$ $(a > 0)$

44. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью $Oy$ и прямой $y = 1$.

45. Найдите объем сегмента, отсекаемого плоскостью $x = a$ от эллиптического параболоида $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$.

46. Найдите объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

**Вычисление длин дуг**

**47.** Вычислите длину дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$ от точки $(0, 0)$ до точки $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

**48.** Вычислите длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки $A(1, 1)$.

**49.** Найдите длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

**50.** Найдите длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

**51.** Найдите длину кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(a > 0)$ (астроида).

**52.** Найдите длину дуги кривой $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ от $t = 0$ до $t = 3$.

**53.** Найдите длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = \ln \pi$.

**54.** Найдите длину дуги логарифмической спирали $\rho = ae^{\varphi}(a > 0)$, находящейся внутри круга $\rho \leqslant a$.

**55.** Найдите длину кривой $\rho = a\sin\varphi$ $(a > 0)$.

**56.** Найдите длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$.

## Ответы

**1.** $\frac{2}{9}$. **2.** $\frac{3}{2} + \ln 4$. **3.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **4.** $\frac{\pi+4}{8}$. **5.** $\operatorname{tg} 1 - 1$. **6.** 6,5. **7.** 0. **8.** $\frac{8}{3}$. **9.** $-\frac{2}{3}$. **10.** 2. **11.** 1. **12.** $\frac{3}{2}\ln^2 3$. **13.** $\frac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$. **14.** $\frac{\pi}{12}$. **15.** $\frac{2}{\ln 3}$. **16.** 0. **17.** $-\frac{\ln 2}{4}$. **18.** $\sin 1$. **19.** $\operatorname{sh}^2 1$. **20.** $\ln\frac{5}{4}$. **21.** $\ln 3 - \frac{4}{5}$. **22.** $-2\pi$. **23.** $\ln 4 - 1$. **24.** $e^{-1}$. **25.** $\frac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$. **26.** $2-\sqrt{e}$. **27.** $\frac{125}{6}$. **28.** 4,5. **29.** 2. **30.** $\frac{125}{3}$. **31.** $e-2{,}5$. **32.** $2\operatorname{ch} 1 - 2$. **33.** 12. **34.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **35.** $3\pi a^2$. **36.** $6\pi a^2$. **37.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **38.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **39.** $\frac{9}{2}\pi$. **40.** $\frac{\pi^2}{2}$. **41.** $\frac{3}{8}\pi^2$. **42.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **43.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **44.** $\frac{\pi}{2}$. **45.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **46.** $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$. **47.** $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **48.** $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$. **49.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **50.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **51.** $6a$. **52.** 12. **53.** $(\pi-1)\sqrt{2}$. **54.** $a\sqrt{2}$. **55.** $\pi a$. **56.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

*Глава XIV*

# НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

### 1.1. Определения. Примеры

Понятие определенного интеграла связано с функцией, рассматриваемой на некотором конечном отрезке $[a, b]$, так что область интегрирования в определенном интеграле всегда ограничена. Однако часто приходится иметь дело с функциями в неограниченных областях: в бесконечных полуинтервалах вида $[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$, или же в интервале $(-\infty, +\infty)$. С подобной ситуацией мы встречаемся, например, при вычислении потенциала гравитационной или электростатической силы.

Чтобы распространить понятие определенного интеграла на случай неограниченных областей интегрирования, нужны новые определения, устанавливающие, что следует понимать под символами

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \geqslant a$ и интегрируема (например, непрерывна) на каждом конечном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где $a$ — фиксировано, а $b \geqslant a$ — произвольно. Определим, что мы будем понимать под символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

(*несобственный интеграл 1-го рода*). Рассмотрим функцию аргумента $b \geqslant a$

$$J(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

---

**Определение.** Если при $b \to +\infty$ функция $J(b)$ имеет конечный предел $L$, то мы называем несобственный интеграл (1) *сходящимся* и полагаем по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Если при $b \to +\infty$ функция $J(b)$ не имеет (конечного) предела, то мы называем интеграл (1) *расходящимся* и не приписываем ему никакого числового значения.

**Пример 1.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

◀ По определению

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

так что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

сходится и равен $\frac{\pi}{2}$. ▶

**Пример 2.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx.$$

◀ Так как интеграл

$$\int_0^b \cos x\,dx = \sin b$$

не имеет предела при $b \to +\infty$, то данный несобственный интеграл расходится. ▶

**Пример 3.** Пусть точечные электрические заряды $q_1$ и $q_2$ имеют одинаковые знаки, например, $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$, так что заряд $q_1$ будет отталкивать заряд $q_2$. По закону Кулона сила $F$ электростатического взаимодейстаия в вакууме деух точечных электрических зарядов равна

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2},$$

где $r$ — расстояние между зарядами, $k$ — постоянная.

Пусть заряд $q_1$ помещен в точке $M_0$, которая принимается за начало отсчета. Требуется найти работу $A$ по перемещению заряде $q_2$ из точки $M$, отстоящей от точки $M_0$ на расстоянии $r_1$, в бесконечность. Искомая работа $A$ выражается несобственным интегралом

$$A = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{kq_1q_2}{r^2}\,dr = kq_1q_2 \int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

По определению

$$\int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{r_1}^{b} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=r_1}^{r=b} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{r_1}.$$

Таким образом, $A = \frac{kq_1q_2}{r_1}$. Если $q_2$ — единичный заряд, то $A = \frac{kq_1}{r_1}$. Эта величина называется *потенциалом* поля, создаваемого зарядом $q_1$.

**Пример 4.** Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha = \text{const}). \tag{3}$$

Установим, при каких значениях $\alpha$ интеграл (3) сходится и при каких расходится. По определению имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Поэтому, если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

так что при $\alpha > 1$ интеграл (3) сходится; если же $\alpha < 1$, то при $b \to +\infty$ интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

не имеет конечного предела, так что при $\alpha < 1$ интеграл (3) расходится.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b,$$

откуда видно, что при $\alpha = 1$ интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} \xrightarrow[b\to+\infty]{} +\infty.$$

Следовательно,

$$\text{интеграл} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{array}{ll} \text{сходится, если} & \alpha > 1, \\ \text{расходится, если} & \alpha \leqslant 1. \end{array}$$

Полученные результаты имеют простой геометрический смысл. Рассмотрим область $D$, ограниченную слева прямой $x = 1$, снизу — осью $Ox$, а сверху — кривой $y = \frac{1}{x^\alpha}$ (рис. 1). Вправо эта область простирается безгранично. Условимся под площадью всей бесконечной области $D$ понимать предел площади конечной ее части до прямой $x = b$ (рис. 2) при $b \to +\infty$. Тогда полученные выше результаты будут означать, что если область $D$ сверху ограничена кривой $y = \frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha > 1$, то она имеет конечную площадь, если же верхняя граница области $D$ есть гипербола $y = \frac{1}{x}$ или кривая $y = \frac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha < 1$, то говорить о площади области $D$ не имеет смысла.

**Замечание.** Нетрудно видеть, что для любого $a \geqslant \delta > 0$ интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

также сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

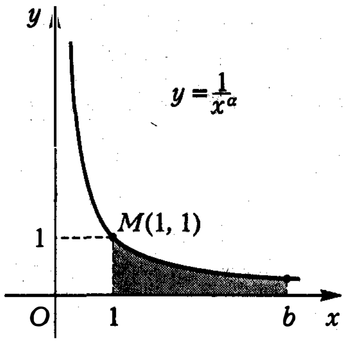


Рис. 1

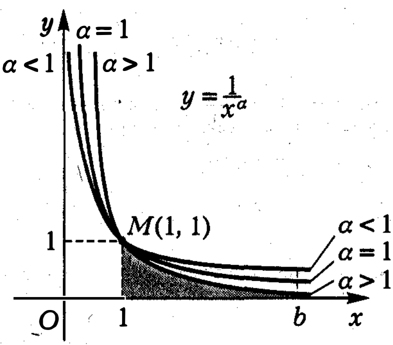


Рис. 2

Пользуясь определением несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

можно доказать справедливость следующих утверждений.

1. Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится и $\lambda$ — любое действительное число, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$$

также сходится, причем

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.}$$

2. Если интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходятся, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx$$

также сходится, причем

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.} \tag{4}$$

◄ Действительно, для любого $b > a$

$$\int_a^b \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Каждое слагаемое в правой части (5) имеет предел при $b \to +\infty$. Значит, существует предел левой части (5) при $b \to +\infty$, т. е. интеграл

$$\int_a^{+\infty} \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx$$

сходится. Переходя в равенстве (5) к пределу при $b \to +\infty$, получаем равенство (4). ►

**Задача.** Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + \varphi(x)\big)\,dx$$

сходится. Что можно сказать о сходимости интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx\ ?$$

Можно показать, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на полупрямой $x \geqslant a$, то

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} u\,dv = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} v\,du} \tag{6}$$

(*формула интегрирования по частям*). При этом предполагается, что из трех входящих в равенство (6) выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют смысл по крайней мере два; существование третьего отсюда уже вытекает.

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

($n$ — натуральное число или нуль).

◀ Интегрируя по частям, находим

$$J_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -(x^n e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nJ_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Замечая, что

$$J_0 = \int\limits_a^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1,$$

получаем

$$J_n = n!\,. ▶$$

## 1.2. Несобственные интегралы 1-го рода от неотрицательных функций. Теоремы сравнения

Во многих задачах вычислять несобственный интеграл не требуется, а нужно лишь установить, сходится ли этот интеграл или расходится. Вопрос о сходимости или расходимости несобственного интеграла часто решается с помощью теорем сравнения.

---

**Теорема 1 (сравнения).** *Пусть на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы и*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \geqslant a.$$

*Тогда*

1) *если интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

*сходится, то сходится и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx;$$

2) *если интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*расходится, то расходится и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

---

◀ 1) Пусть интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходится. Докажем, что сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. $J(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$.

Прежде всего из неотрицательности функции $f(x)$ $\forall x \geqslant a$ следует, что $J(b)$ есть неубывающая функция от $b$. Действительно, если $b_1 > b$, то

$$J(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{b_1} f(x)\,dx \geqslant \int_a^{b} f(x)\,dx = J(b).$$

Далее, т. к. $f(x) \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \geqslant a$, то при любом $b > a$ имеем

$$\int_a^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ не превосходит несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ который по условию сходится. Следовательно, при любом $b > a$ имеем

$$J(b) = \int_a^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx = L.$$

Итак, интеграл $J(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ представляет собой функцию от $b$, неубывающую и ограниченную сверху (при $b \to +\infty$). Поэтому $J(b)$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$, а это, согласно определению, означает, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Первое утверждение теоремы доказано.

2) Докажем второе ее утверждение. Пусть интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

расходится. Применяя метод рассуждения от противного, допустим, что интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

сходится. Тогда, согласно уже доказанной первой части теоремы, будет сходящимся интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, что противоречит условию. Следовательно, наше допущение неверно, т. е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится. ▶

**Пример.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}\,dx.$$

◀ Исследовать его на сходимость при помощи определения не представляется возможным. Воспользуемся тем, что для всех $x \geqslant 0$ функция

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x}$$

удовлетворяет условию

$$0 < \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+\sin^4 x} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x).$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

сходится, то в силу теоремы 1 сходится и рассматриваемый интеграл. ▶

---

**Теорема 2 (сравнения).** *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и неотрицательны для всех $x \geqslant a$ и пусть $\varphi(x)$ отлична от нуля для всех достаточно больших $x$. Тогда, если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0,$$

*то интегралы*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

*сходятся или расходятся одновременно.*

---

◀ Пусть

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k>0.$$

Это означает, согласно определению предела, что для всякого числа $\varepsilon>0$, например, $\varepsilon=\frac{k}{2}>0$, существует такое число $N$, что для всех $x\geqslant N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-k\right|<\varepsilon=\frac{k}{2},$$

или, что то же,

$$\frac{k}{2}<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<\frac{3}{2}\,k.$$

Отсюда, в силу того, что $\varphi(x)>0$, получаем двойное неравенство

$$\frac{k}{2}\,\varphi(x)<f(x)<\frac{3}{2}\,k\varphi(x)\quad\forall x\geqslant N.$$

Пользуясь теоремой 1, из неравенства $f(x)<\frac{3}{2}\,k\varphi(x)$ заключаем: если интеграл $\int\limits_N^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_N^{+\infty}f(x)\,dx$; из неравенства $\frac{k}{2}\varphi(x)<f(x)$ усматриваем: если интеграл $\int\limits_N^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_N^{+\infty}f(x)\,dx$.

Аналогично устанавливаем, что если интеграл $\int\limits_N^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится (расходится), то интеграл $\int\limits_N^{+\infty}\varphi(x)\,dx$ будет также сходящимся (расходящимся).

Полученные выводы остаются в силе и для интегралов $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx$. Это следует из того, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ будет сходящимся или нет одновременно с интегралом $\int\limits_p^{+\infty}g(x)\,dx$, где $p>a$ — сколь угодно большое фиксированное число, поскольку разность этих интегралов является собственным интегралом. ▶

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}\,dx.$$

◀ На полупрямой $x\geqslant 1$ подынтегральная функция $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}>0$. Запишем ее так:

$$f(x)=\frac{2+\frac{1}{x^2}}{x+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

Отсюда видно, что для больших $x$ функция $f(x)$ ведет себя как $\frac{2}{x}$. Выберем в качестве функции сравнения $\varphi(x)=\frac{1}{x}$. Будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2+1)\cdot x}{x^3+3x+4}=2\neq 0.$$

Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

расходится. В силу теоремы 2 расходится и данный интеграл. ►

Используя теорему 1, а также результаты, касающиеся интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, приходим к следующим признакам сходимости и расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ от неотрицательной функции $f(x)$.

---

**Теорема 3.** *Если существует такое число $\alpha > 1$, что для всех достаточно больших $x$*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{x^\alpha},$$

*где $M > 0$ и не зависит от $x$, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*сходится.*

*Если для всех достаточно больших $x$*

$$f(x) \geqslant \frac{M}{x} \quad (M > 0,\ M \text{ не зависит от } x),$$

*то интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*расходится.*

---

◄ Пусть условие

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{M}{x^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

выполнено для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$. Так как интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\,dx$ для $\alpha > 1$ сходится, то, взяв в качестве $\varphi(x)$ функцию $\frac{M}{x^\alpha}$, по теореме 1 получим, что сходится и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx$. Отсюда, в свою очередь, вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, так как

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^b f(x)\,dx$$

и при $b \to +\infty$ интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_A^b f(x)\,dx$ имеют конечные пределы только одновременно.

Пусть теперь для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$ выполнено условие $f(x) \geqslant \frac{M}{x}$ $(M > 0)$. Так как интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{M}{x}\, dx$ расходится, то по теореме 1 расходится и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} f(x)\, dx$, а вместе с ним и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$. ▶

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5}\, dx.$$

◀ Для $x \geqslant 3$ имеем

$$0 < \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}.$$

Интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится $(\alpha = 2 > 1)$. Следовательно, сходится и данный интеграл. ▶

## 1.3. Абсолютно сходящиеся интегралы 1-го рода

Пусть функция $f(x)$ определена для $x \geqslant a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, где $b > a$.

---

**Определение.** Интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

называют (*условно*) *сходящимся* интегралом.

---

**Теорема 4.** *Если интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

*сходится, то сходится и интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

---

◀ Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится,

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = L < +\infty.$$

Так как для всякого $x$ из области определения функции $f(x)$

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

то

$$0 \leqslant |f(x)| + f(x) \leqslant 2|f(x)|. \tag{1}$$

Вместе с интегралом $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, который сходится по условию, сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} 2|f(x)|\,dx = 2\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Поэтому, согласно 1-й теореме сравнения, из (1) следует, что сходится также и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx$. Последнее означает, что интеграл $\int\limits_a^b \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx$ при $b \to +\infty$ имеет конечный предел.

Имеем, очевидно,

$$f(x) = \big(f(x) + |f(x)|\big) - |f(x)| \quad \forall x \geqslant a,$$

откуда для всякого $b > a$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \big(f(x) + |f(x)|\big)\,dx - \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

Каждое слагаемое правой части (2) имеет конечный предел при $b \to +\infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$ также имеет конечный предел, т. е. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. ▶

Теорема 1 и результаты, касающиеся интегралов $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, позволяют сформулировать следующий признак абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

---

**Теорема 5.** *Если существует такое число $\alpha > 1$, что для всех достаточно больших $x$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^\alpha}, \tag{3}$$

*где $M > 0$ и не зависит от $x$, то интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

*сходится абсолютно.*

---

◀ В самом деле, пусть условие (3) выполнено для всех $x \geqslant A > \max\{a, 0\}$. Так как интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\, dx$ для $\alpha > 1$ сходится, то по теореме 1 сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} |f(x)|\, dx$. А тогда сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$, и, значит, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится абсолютно. ▶

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx.$$

◀ Имеем, очевидно, $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$ $\forall x \geqslant 1$. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

сходится, следовательно, данный интеграл сходится абсолютно. ▶

Итак, если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится абсолютно, то он сходится. Обратное неверно: интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

может быть сходящимся, но не быть абсолютно сходящимся.

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{4}$$

◀ Для исследования его сходимости применим формально интегрирование по частям:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{5}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ сходится абсолютно и, значит, сходится. Таким образом, оба выражения в правой части (5) конечны. Поэтому, во-первых, проделанное интегрирование по частям законно, а во-вторых, левая часть конечна, т. е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ сходится.

Покажем теперь, что интеграл (4) не сходится абсолютно, т. е. что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \tag{6}$$

расходится. Действительно, из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

при любом $b > 1$ имеем

$$\int\limits_1^{b} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{b} \frac{\cos 2x}{x}\, dx. \tag{7}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится:

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = +\infty.$$

Интеграл $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx$ сходится. Чтобы в этом убедиться, достаточно проинтегрировать его по частям (см. (5)). Переходя в неравенстве (7) к пределу при $b \to +\infty$, получим, что правая, а следовательно, и левая часть этого неравенства стремятся к бесконечности и поэтому интеграл (6) расходится. Таким образом, интеграл (4) не сходится абсолютно. ►

Приведем один достаточной критерий сходимости интегралов, называемый *признаком Абеля—Дирихле.*

---

**Теорема 6.** *Пусть*

1) *функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную $F(x)$ при $x \geqslant a$;*
2) *функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant a$;*
3) *функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant a$;*
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

*Тогда интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$$

*сходится.*

---

**Пример.** Применим признак Абеля—Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

◄ Функция $f(x) = \sin x$ имеет всюду ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а непрерывно дифференцируемая при $x \geqslant 1$ функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) монотонно убывает и стремится к нулю, когда $x \to +\infty$. Все условия теоремы Абеля—Дирихле выполнены, так что интеграл (8) сходится. ►

**Задача.** Доказать сходимость интеграла Френеля

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx.$$

(**Указание:** сделать замену переменной $x^2 = t$.)

## 1.4. Главное значение интеграла 1-го рода

Несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$$

определяется следующим образом:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx.}$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если указанный предел существует, и *расходящимся* в противном случае.

Если оба предела интегрирования бесконечны, то по определению полагают

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

или

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{N_1\to+\infty\\ N_2\to+\infty}} \int\limits_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx}$$

($N_1, N_2 \to +\infty$ независимо друг от друга). Может оказаться, что определенный таким образом несобственный интеграл не существует, но существует *главное значение интеграла по Коши*, определяемое по формуле

$$\boxed{\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx,}$$

т. е. когда $N_1 = N_2 = N$ (v. p. — начальные буквы слов *valeur principal* — *главное значение*). Тогда говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

*сходится в смысле главного значения по Коши.*

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

◀ Имеем

$$\int\limits_{N_1}^{N_2} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+N_2^2}{1+N_1^2},$$

откуда видно, что при произвольном стремлении $N_1$ и $N_2$ к $+\infty$ интеграл $\int\limits_{-N_1}^{N_2} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ предела не имеет, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ расходится. В то же время

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+N^2}{1+N^2} = 0,$$

т. е. рассматриваемый интеграл сходится в смысле главного значения по Коши. ▶

# § 2. Интегралы от неограниченных функций

## 2.1. Определения. Примеры

Необходимым условием существования определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Так что, если, например, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b_1]$, где $b_1 < b$, и неограничена в окрестности точки $x=b$, то интеграл от $f(x)$ на $[a,b]$ в обычном смысле (в смысле Римана) не может существовать. Однако при помощи новых определений понятие интеграла можно распространить и на такие случаи, когда подынтегральная функция оказывается неограниченной на отрезке интегрирования.

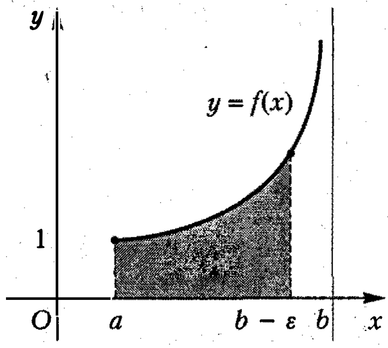


Рис. 3

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$, но не ограничена в интервале $(b-\varepsilon, b)$ (см. рис. 3). Определим, что мы будем понимать под символом

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

(*несобственный интеграл 2-го рода*). Для этого рассмотрим функцию от $\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$:

$$J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

---

**Определение.** Если при $\varepsilon \to 0+0$ функция $J(\varepsilon)$ имеет конечный предел $L$, то мы говорим, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*, и полагаем по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = L. \tag{2}$$

Если при $\varepsilon \to 0+0$ функция $J(\varepsilon)$ не имеет предела, то говорят, что несобственный интеграл (1) *расходится* и не приписывают ему никакого числового значения.

---

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

◀ Здесь функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна и, значит, интегрируема на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, но при $x \to 1-0$ функция $f(x) \to +\infty$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\Bigl(\arcsin(1-\varepsilon)\Bigr)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

так что рассматриваемый несобственный интеграл сходится. ▶

Аналогично, если функция $f(x)$ неограничена только в интервале $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

определяется так:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.} \qquad (3)$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *сходящимся*, если указанный предел существует, и *расходящимся* — в противном случае.

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}. \qquad (4)$$

◀ По определению

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Так как при $\alpha\neq 1$

$$\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_\varepsilon^1=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha},\quad \text{если}\quad \alpha<1;$$

если же $\alpha>1$, то интеграл $\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}$ не имеет конечного предела при $\varepsilon\to 0+0$.

При $\alpha=1$ имеем

$$\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=-\ln\varepsilon\underset{\varepsilon\to 0+0}{\longrightarrow}+\infty. ▶$$

Следовательно,

$$\boxed{\text{интеграл}\int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}\quad \begin{array}{ll}\text{сходится, если} & \alpha<1,\\ \text{расходится, если} & \alpha\geqslant 1.\end{array}}$$

Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не ограничена только в окрестности точки $c$, где $a < c < b$, то полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+0 \\ \varepsilon_2 \to 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \right\}.$$

Рассмотрение других вариантов распределения особенностей функции $f(x)$ предоставляем читателю.

## 2.2. Несобственные интегралы 2-го рода от неотрицательных функций. Теоремы сравнения

---

**Теорема 7 (сравнения).** *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b-\varepsilon]$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, неограничены в интервале $(b-\varepsilon, b)$ и связаны условием*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \textit{на} \quad [a, b).$$

*Тогда*

1) *если интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$;*

2) *если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то расходится интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.*

---

◀ Пусть интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

сходится, т. е. существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = L.$$

Докажем, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

также сходится, т. е. что функция $J(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0+0$. В самом деле, так как $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < b-a)$ функция $J(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ неотрицательна и не убывает при убывании $\varepsilon$. Кроме того, из условия $f(x) \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \in [a, b)$ при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx.$$

Интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ не превосходит интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$, который по условию сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$J(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = L.$$

Таким образом, $J(\varepsilon)$ есть неубывающая при $\varepsilon \to 0+0$, ограниченная сверху функция. Поэтому существует конечный предел $J(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+0$, что означает, согласно определению, сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Справедливость второго утверждения теоремы легко доказывается методом рассуждения от противного. ▶

---

**Теорема 8 (сравнения).** *Пусть положительные на $[a, b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неограничены только в окрестности точки $x = b$, и пусть существует предел*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0.$$

*Тогда интегралы*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

*сходятся или расходятся одновременно.*

---

**Пример.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx, \qquad \alpha \geqslant 0. \tag{$*$}$$

◀ Интеграл $(*)$ является объединением несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. Действительно, во-первых, это интеграл с бесконечным верхним пределом, в во-вторых, подынтегральная функция $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}$ не определена в точке $x = 0$ и становится неограниченной при $x \to 0$ для достаточно большого $\alpha > 0$.

Для исследования сходимости интеграла $(*)$ разобьем промежуток интегрирования на два так, чтобы первый промежуток учитывал особенность функции $f(x)$ в точке $x = 0$, а второй — поведение функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Выберем, например, полуинтервалы $(0, 1]$ и $[1, +\infty)$. Тогда будем иметь

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx. \tag{$**$}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx.$$

Для исследования его сходимости воспользуемся теоремой 8. Известно, что $\operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \to 0)$. Положив $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, будем иметь

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^{\alpha-1}\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = 1.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx$ сходится при $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. В силу теоремы 8 интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$ также сходится при $\alpha < 2$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx.$$

Воспользуемся теоремой 2, положив $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$, а поэтому при $\alpha > 1$ сходится и рассматриваемый интеграл. Значит, оба интеграла в правой части равенства (**) будут сходиться лишь когда $1 < \alpha < 2$. Это и есть условие сходимости интеграла (*). ▶

## 2.3. Абсолютно сходящиеся интегралы 2-го рода

---

**Определение.** Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

---

**Теорема 9.** *Если сходится интеграл* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, *то сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

---

Пользуясь теоремой 7, нетрудно доказать следующий признак абсолютной сходимости интеграла.

---

**Теорема 10.** *Пусть функция $f(x)$ неограничена только в интервале $(b - \varepsilon, b)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Если существует такое положительное число $\alpha < 1$, что для всех $x$, достаточно близких к $b$, $x < b$,*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{(b-x)^\alpha},$$

*где $M > 0$ и не зависит от $x$, то интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

*сходится абсолютно.*

---

**Задача.** Показать, что если для всех $x$, достаточно близких к $b$, $x < b$

$$|f(x)| \geqslant \frac{M}{b-x}, \quad M > 0,$$

то интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

абсолютно сходиться не может.

**Замечание.** Интегралы второго рода приводятся к интегралам первого рода с помощью подстановок $b - x = \frac{1}{t}$ или $x - a = \frac{1}{t}$. Поэтому элементарную теорию несобственных интегралов 2-го рода можно вывести из теории интегралов 1-го рода.

## 2.4. Главное значение интеграла 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$, где $a < c < b$, при любом $\varepsilon > 0$ и неограничена в окрестности точки $c$. Тогда,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+0\\ \varepsilon_2\to 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \right\},}$$

причем для сходимости интеграла предел должен существовать при независимом стремлении $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ к нулю.

Говорят, что несобственный интеграл *сходится в смысле главного значения по Коши*, если существует предел

$$\boxed{\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\},}$$

($\varepsilon > 0$ одно в обоих интегралах). Величину

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx$$

называют *главным значением интеграла по Коши*. Очевидно, что интеграл может быть сходящимся в смысле главного значения, но не быть сходящимся.

**Пример.** Пусть $f(x) = \frac{1}{x-c}$, где $c \in (a, b)$. Тогда

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \left(\ln|x-c|\right)\Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \left(\ln|x-c|\right)\Big|_{c+\varepsilon_2}^b = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (1)$$

Предел правой части (1) при произвольном стремлении $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ к нулю не существует. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \to 0+0$ предел правой части существует и есть главное значение рассматриваемого интеграла:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}, \quad a < c < b.$$

**Задача.** Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $(-R, R)$ точки $x = 0$, кроме, быть может, самой этой точки, и неограничена при $x \to 0$. Известно, что всякую функцию $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ можно однозначно представить в виде суммы четной и нечетной функций

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x).$$

Показать, что

$$\text{v.p.} \int_{-R}^R f(x)\,dx$$

существует, если существует интеграл $\int_0^R f_2(x)\,dx$, где $f_2(x)$ — четная составляющая функции $f(x)$.

## Упражнения

Пользуясь определением, исследуйте на сходимость интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}$. 2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx$. 3. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$. 4. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

5. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x+1}$. 6. $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x+5}\,dx$. 7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$. 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^4+1}}\,dx$. 10. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^\alpha x}$, $\alpha$ — действительное число. 11. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\,dx$.

12. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ ($n$ — целое число, $n \geqslant 0$).

13. Покажите, что

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0, \quad \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Пользуясь определением, исследуйте на сходимость интегралы:

14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. 15. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$. 16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

17. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. 18. $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. 19. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

20. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 21. $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. 22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. 23. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Исследуйте на сходимость интегралы:

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$ ($\alpha, \beta$ — действительные числа). 25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\,dx$.

## Ответы

1. Сходится; равен $\frac{\pi}{4}$. 2. Расходится. 3. Сходится; равен $\frac{1}{2}$. 4. Расходится. 5. Сходится. 6. Расходится. 7. Сходится. 8. Расходится. 9. Расходится. 10. Сходится при $\alpha > 1$. 11. Сходится при $\alpha > 0$. 12. $\frac{n!}{2}$. 14. Сходится; равен 2. 15. Сходится; равен $-\frac{1}{4}$. 16. Сходится; равен $\frac{3}{2}$. 17. Сходится; равен $-\frac{2}{e}$. 18. Расходится. 19. Расходится. 20. Сходится. 21. Расходится. 22. Сходится. 23. Расходится. 24. Сходится, если $\alpha > -1$, $\beta - \alpha > 1$. 25. Сходится неабсолютно; использовать теорему Абеля—Дирихле.

*Глава XV*

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной переменной не охватывают все зависимостей, существующих в природе. Так, например, объем $v$ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого имеют длины $x$, $y$, $z$ соответственно, выражается формулой

$$v = xyz,$$

где $x$, $y$, $z$ могут принимать любые положительные значения. В этом примере имеем четыре переменных величины, причем значение $v$ вполне определяется заданием трех остальных переменных $x$, $y$, $z$. Для изучения таких и подобных им зависимостей вводится понятие функции нескольких переменных.

## § 1. Некоторые определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство. *Расстояние* между двумя любыми точками $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ и $M''(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ из $\mathbb{R}^n$ обозначается символом $\rho(M', M'')$ и определяется формулой

$$\boxed{\rho(M', M'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x''_k - x'_k)^2}.}$$

При $n = 1$ получаем

$$\rho(M', M'') = |x''_1 - x'_1|$$

— расстояние между точками $M'(x'_1)$ и $M''(x''_1)$ прямой ($\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$); при $n = 2$ имеем

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2}$$

— расстояние между точками $M'(x'_1, x'_2)$ и $M''(x''_1, x''_2)$ плоскости ($\mathbb{R}^2$).

---

**Определение.** Пусть точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ и пусть $\varepsilon > 0$ — действительное число. Совокупность всех точек $M \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\rho(M, M_0) < \varepsilon$, называется ***n-мерным (открытым) шаром с центром в точке $M_0$ и радиусом $\varepsilon$***, или ***шаровой $\varepsilon$-окрестностью точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$***.

---

В случае $n = 2$ имеем

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2.$$

Это внутренность круга с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ радиуса $\varepsilon$ (круг без ограничивающей его окружности; рис. 1). Для $n = 3$ имеем $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2$. Это шар радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (шар без ограничивающей его сферы; рис. 2).

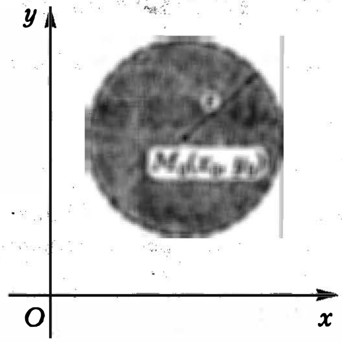


Рис. 1

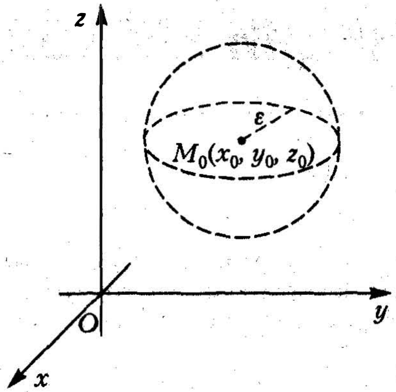


Рис. 2

Наряду с шаровыми окрестностями рассматривают ***прямоугольные окрестности*** точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Это совокупность всех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$x_i^0 - \varepsilon_i < x_i < x_i^0 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В случае $n = 1$ имеем обычную $\varepsilon$-окрестность $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ точки $x_0$ на числовой прямой. При $n = 2$ это прямоугольник со сторонами длины $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ (без границы, рис. 3). Для $n = 3$ это (открытый) параллелепипед с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ребра которого имеют длины $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, $2\varepsilon_3$ (рис. 4).

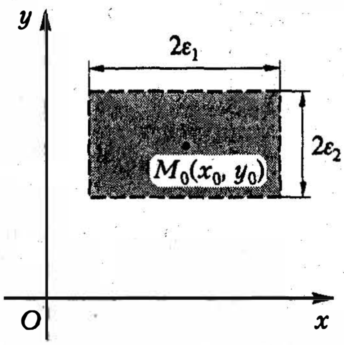


Рис. 3

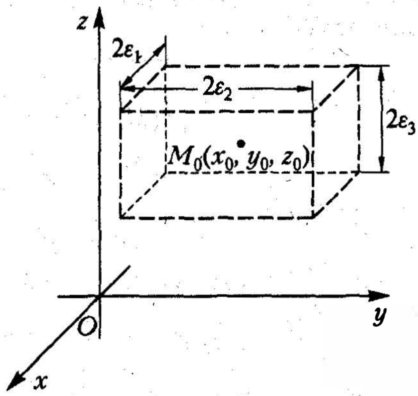


Рис. 4

**Определение.** Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^n$. Точка $M \in E$ называется ***внутренней точкой*** множества $E$, если су ествует $\varepsilon > 0$ такое, что точка $M$ содержится в множестве $E$ вместе со своей $\varepsilon$-окрестностью.

Если все точки множества $E$ внутренние для $E$, то множество $E$ называется ***открытым множеством***.

Так, в случае $n = 2$ любой круг без ограничивающей его окружности является примером открытого множества.

---

**Определение.** Точка $P \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если в любой окрестности точки $P$ существуют точки, как принадлежащие множеству $E$, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества $E$ называется его *границей* и обозначается $\partial E$.

Если к множеству $E$ присоединить его границу, то получим *замкнутое множество* $\overline{E}$:

$$\overline{E} = E \cup \partial E.$$

---

Примером замкнутого множества может служить круг вместе с ограничивающей его окружностью.

---

**Определение.** Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой (в частности, ломаной), всеми своими точками содержащейся в множестве $E$ (рис. 5).

---

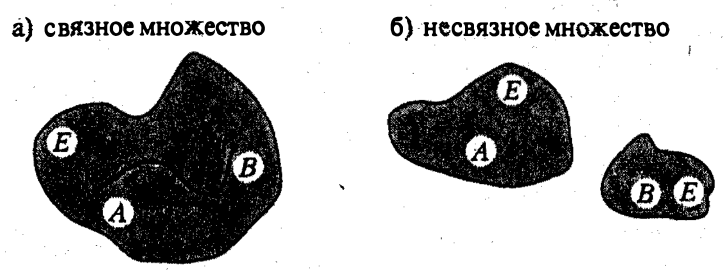


Рис. 5

---

**Определение.** Открытое связное множество называется *областью*.

Область называется *ограниченной*, если существует шар (круг), содержащий эту область.

---

Всякую область, содержащую данную точку $M_0$, будем называть *окрестностью* точки $M_0$ (просто окрестностью, в отличие от $\varepsilon$-окрестности).

## § 2. Понятие функции нескольких переменных

Если каждой точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множества $E$ точек $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число $u$, то говорят, что на множестве $E$ определена *функция точки $M$* или *функция $n$ переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и пишут

$$u = f(M), \quad \text{или} \quad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad M \in E.$$

Множество $E$ называется *областью определения* функции $f$.

При изучении функций нескольких переменных мы, как правило, будем ограничиваться рассмотрением функций двух переменных $z = f(x, y)$, так как обычно бывает ясно, как перенести выводы, сделанные для функции двух переменных, на функции большего числа переменных.

Если функция задана одним аналитическим выражением, причем область определения функции заранее не указана, то в качестве области определения принимают совокупность всех тех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых данное аналитическое выражение имеет конечное действительное значение (*естественная область определения*). Так, для функции

$$z = x + y$$

область определения — вся плоскость $xOy$, для функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

область определения — замкнутый круг

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

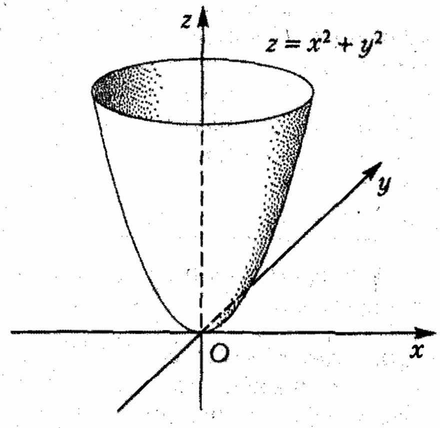


Рис. 6

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $E$ на плоскости $xOy$. Тогда каждой точке $(x, y) \in E$ будет отвечать точка $\big(x, y, f(x, y)\big)$ трехмерного пространства. Множество всех таких точек $\big(x, y, f(x, y)\big)$, где точка $(x, y) \in E$, называется *графиком функции* $z = f(x, y)$. Например, график функции

$$z = x^2 + y^2$$

— параболоид вращения (рис. 6).

Для изучения характера изменения функции $z = f(x, y)$ пользуются линиями уровня. *Линией уровня* называется множество точек на плоскости $xOy$, в которых функция $f$ принимает данное постоянное значение $z = c$. Эту линию можно также получить, пересекая график функции $z = f(x, y)$ плоскостью $z = c$, параллельной плоскости $xOy$, и проектируя линию пересечения ортогонально на плоскость $xOy$. Система линий уровня $f(x, y) = c_m$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$, где $c_{m+1} - c_m = h = \text{const}$, позволяет судить о ходе изменения функции. Там, где линии уровня расположены густо, функция изменяется быстро, а где линии уровня расположены редко, функция изменяется медленно. Для функции

$$z = x^2 + y^2$$

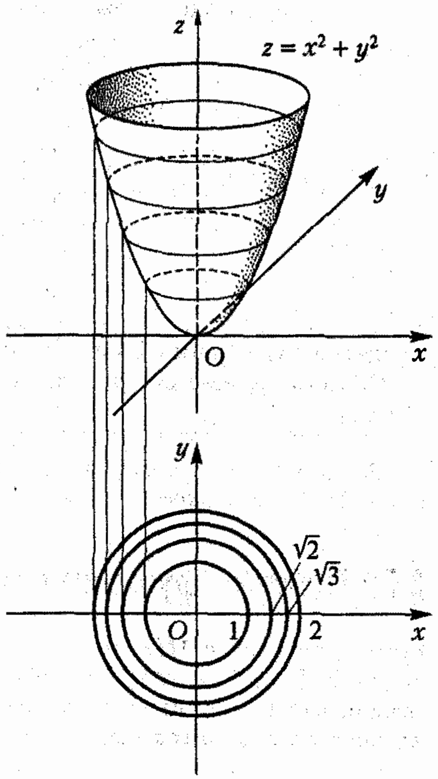


Рис. 7

линии уровня — концентрические окружности с центром в начале координат (рис. 7; здесь шаг $h = 1$).

Этот прием изучения функции может быть распространен и на функции $u = f(x, y, z)$ трех независимых переменных. Вместо линий уровня тогда возникают *поверхности уровня* — множество точек $M(x, y, z)$ пространства, в которых функция $f(M)$ принимает данное постоянное значение. Например, для функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

поверхности уровня — концентрические сферы с центром в начале координат.

## § 3. Предел функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности $\Omega$ точки $M_0(x_0, y_0)$, кроме, быть может, самой точки $M_0$.

**Определение 1.** Число $A$ называется *пределом функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M(x, y) \in \Omega$, отличных от точки $M_0(x_0, y_0)$ и удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, верно неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

**Обозначения:**

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M) \quad \text{или} \quad A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y).$$

Предполагается, что точка $M$ может стремиться к точке $M_0$ по любому закону, по любому направлению, и все соответствующие предельные значения существуют и равны числу $A$.

**Примеры.**

**1.** Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Она определена на всей *плоскости* $xOy$, причем $f(0, 0) = 0$. Покажем, что предел этой функции в точке $O(0, 0)$ равен нулю. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда условие $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ запишется так: $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$, или

$$|x^2 + y^2| < \varepsilon.$$

Замечая, что $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho(M, O)$, где $M(x, y)$ — точка с координатами $(x, y)$, последнему неравенству можно придать вид $\rho^2(M, O) < \varepsilon$, или

$$\rho(M, O) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Если взять $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, то для любой точки $M(x, y)$, для которой $\rho(M, O) < \delta = \sqrt{\varepsilon}$, будем иметь $|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$, или

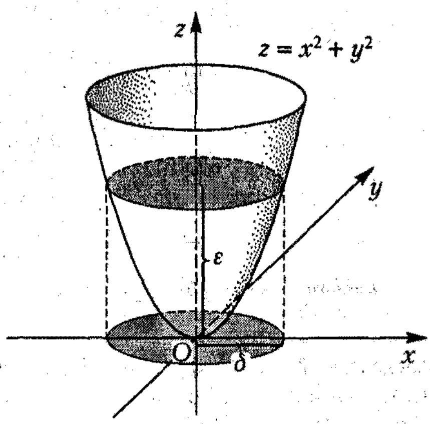

Рис. 8

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

(рис. 8). Согласно определению это означает, что число $A = 0$ есть предел данной функции в точке $O(0, 0)$.

**2.** Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Этим заданием она определена всюду, исключая точку $O(0,0)$. Рассмотрим поведение функции на различных лучах $y = kx$, $x \neq 0$. Имеем

$$f(x, kx) = \frac{2x^2k}{(1+k^2)x^2}, \quad x \neq 0,$$

откуда

$$f(x, kx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{2k}{1+k^2},$$

так что при разных $k$ мы получаем различные предельные значения. Следовательно, данная функция в точке $O(0,0)$ предела не имеет.

3. Пусть

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Эта формула задает функцию во всех точках плоскости $xOy$, кроме начала координат $O(0,0)$. Исследуем поведение функции на различных лучах $y = kx$, $x \neq 0$. Имеем

$$f(x, kx) = \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}, \quad x \neq 0,$$

так что

$$f(x, kx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. предел функции $f(x, y)$ по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y = x^2$, то

$$f(x, x^2) = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0,$$

и, значит, предел вдоль параболы $y = x^2$ существует, но равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, данная функция в точке $O(0,0)$ предела не имеет.

---

**Теорема 1.** *Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ имеют предел в точке $M_0$, то в точке $M_0$ существуют пределы суммы $f(M)+\varphi(M)$, разности $f(M)-\varphi(M)$, произведения $f(M)\cdot\varphi(M)$ и частного $\frac{f(M)}{\varphi(M)}$ (последнее при дополнительном условии, что $\lim\limits_{M \to M_0} \varphi(M) \neq 0$), причем*

$$\lim_{M \to M_0} \big(f(M) \pm \varphi(M)\big) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} \big(f(M) \cdot \varphi(M)\big) = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{\varphi(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} \varphi(M)} \qquad \Big(\lim_{M \to M_0} \varphi(M) \neq 0\Big).$$

---

**Замечание.** Удобным бывает следующее определение предела функции в точке (эквивалентное определению 1).

---

**Определение 2.** Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой «проколотой» окрестности $\Omega$ точки $M_0$ (т. е. окрестности, из которой удалена точка $M_0$). Число $A$ называется *пределом функции $f(M)$ в точке $M_0$*, если для любой последовательности точек $\{M_n\}$, сходящейся к точке $M_0$ ($M_n \in \Omega$, $M_n \neq M_0$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к числу $A$.

---

**Замечание.** Рассмотренное выше понятие предела предполагает одновременное стремление всех аргументов к их предельным значениям:

$$(x, y) \to (x_0, y_0).$$

Для функций многих переменных приходится иметь дело и с пределами другого рода, получаемыми в результате ряда последовательных предельных переходов в том или ином порядке. Такие пределы называются *повторными*. Они составляют специфику функций многих переменных.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

определенную этой формулой всюду, кроме точки $O(0,0)$. При постоянном $y \neq 0$ и $x \to 0$ имеем

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = -1;$$

при постоянном $x \neq 0$ и $y \to 0$ получаем

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = 1.$$

Стало быть, для этой функции

$$\lim_{y \to 0} \left[ \lim_{x \to 0} f(x, y) \right] \neq \lim_{x \to 0} \left[ \lim_{y \to 0} f(x, y) \right],$$

и результат зависит от порядка предельных переходов.

## § 4. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой окрестности $\Omega$ точки $M_0(x_0, y_0)$.

---

**Определение.** Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0),$$

или, что то же,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

---

Предполагается, что точка $M(x, y)$ может стремиться к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом, но все время оставаясь в области определения функции $f(M)$.

На языке «$\varepsilon$-$\delta$» непрерывность функции в точке $M_0$ выражается так:

---

функция $f(M)$ *непрерывна в точке* $M_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $M \in \Omega$, таких, что $\rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon.$$

---

Определению непрерывности функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ можно придать еще следующую форму. Если обозначить через $\Delta x$ и $\Delta y$ приращения независимых переменных $x$ и $y$ при переходе от точки $M_0(x_0, y_0)$ к точке $M(x, y)$, а через

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

обозначить соответствующее полное приращение функции $z = f(x, y)$, то равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

будет равносильно равенству

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,}$$

выражающему условие непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Величины $\Delta x$, $\Delta y$ могут стремиться здесь к нулю произвольным образом, независимо друг от друга.

Понятие непрерывности функции, введенное выше, называется *непрерывностью по совокупности переменных* $x$, $y$. Из этого опреде ения следует, что ес и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных $x$ и $y$. Напротив, из непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $M_0$ по каждой из переменных $x$, $y$ не вытекает непрерывность функции $f$ в этой точке. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

По заданию функции $f(x, y)$ имеем $f(x, 0) = 0 \ \forall x$, так что

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0).$$

Поэтому функция $f(x, 0)$ непрерывна по $x$ при $x = 0$. Ана огично функция $f(0, y)$ непрерывна по $y$ при $y = 0$, так как $f(0, y) = 0$ для всякого $y$, и потому

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0).$$

Однако данная функция $f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ разрывна. В самом деле, пусть $y = x$. Тогда

$$\lim_{x = y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = 1 \neq f(0, 0).$$

Это не удивительно. Говоря о непрерывности по $x$ и по $y$ в отдельности, мы учитываем лишь приближения к точке $O(0, 0)$ по оси $Ox$ или по оси $Oy$, оставляя в стороне бесконечное множество других способов приближения.

---

**Теорема 2.** *Сумма, разность и произведение функций $f(M)$ и $\varphi(M)$, непрерывных в точке $M_0$, есть функция непрерывная в точке $M_0$. Частное $\frac{f(M)}{\varphi(M)}$ непрерывных в точке $M_0$ функций $f(M)$ и $\varphi(M)$ непрерывно в точке $M_0$, если $\varphi(M_0) \neq 0$.*

---

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке области $D$, то она называется *непрерывной в области* $D$. Точки, в которых функция $f(M)$ не является непрерывной, называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва функции $f(x, y)$ могут быть изолированными и могут заполнять целые линии. Так, функция

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

имеет единственную точку разрыва $O(0, 0)$; точки разрыва функции

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

заполняют прямые $y = x$ и $y = -x$.

---

**Теорема 3.** *Если функция $f(M)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, то*

1) *$f(M)$ ограничена в $\overline{D}$;*

2) *$f(M)$ принимает в $\overline{D}$ наибольшее и наименьшее значения.*

---

# § 5. Частные производные

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D$ на плоскости $xOy$. Возьмем внутреннюю точку $(x, y)$ из области $D$ и дадим $x$ приращение $\Delta x$ такое, чтобы точка $(x + \Delta x, y) \in D$ (рис. 9). Величину

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$$

назовем *частным приращением функции $z$ по $x$*. Составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Для данной точки $(x, y)$ это отношение является функцией от $\Delta x$.

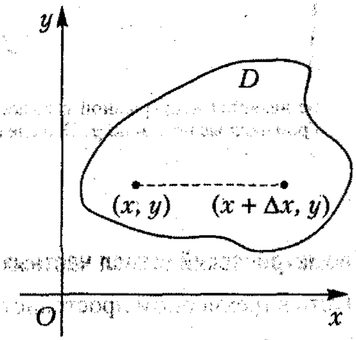


Рис. 9

**Определение.** Если при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ имеет конечный предел, то этот предел называется *частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной $x$* в точке $(x, y)$ и обозначается символом $\frac{\partial z}{\partial x}$ (или $f'_x(x, y)$, или $z'_x(x, y)$).

Таким образом, по определению

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},}$$

или, что то же самое,

$$\boxed{f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.}$$

Аналогично

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.}$$

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция $n$ независимых переменных, то

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.}$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном значении переменной $y$, а $\Delta_y z$ — при неизменном значении переменной $x$, определения частных производных можно сформулировать так:

частной производной по $x$ функции $z = f(x, y)$ называется обычная производная этой функции по $x$, вычисленная в предположении, что $y$ — постоянная;

частной производной по $y$ функции $z = f(x, y)$ называется ее производная по $y$, вычисленная в предположении, что $x$ — постоянная.

Отсюда следует, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, доказанными для функции одной переменной.

**Пример.** Найти частные производные функции $z = e^{xy}$.

◀ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$. ▶

**Замечание.** Из существования у функции $z = f(x, y)$ в данной точке частных производных по всем аргументам не вытекает непрерывности функции в этой точке. Так, функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $O(0,0)$. Однако в этой точке указанная функция имеет частные производные по $x$ и по $y$. Это следует из того, что $f(x,0) \equiv 0$ и $f(0,y) \equiv 0$ и поэтому

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

## Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Пусть в трехмерном пространстве поверхность $S$ задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — функция, непрерывная в некоторой области $D$ и имеющая там частные производные по $x$ и по $y$. Выясним геометрический смысл этих производных в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$, которой на поверхности $z = f(x, y)$ соответствует точка $N_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

При нахождении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M_0$ мы полагаем, что $z$ является только функцией аргумента $x$, тогда как аргумент $y$ сохраняет постоянное значение $y = y_0$, т. е.

$$z = f(x, y_0) = f_1(x).$$

Функция $f_1(x)$ геометрически изображается кривой $L$, по которой поверхность $S$ пересекается плоскостью $y = y_0$. В силу геометрического смысла производной функции одной переменной

$$f_1'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где $\alpha$ — угол, образованный касательной к линии $L$ в точке $N_0$ с осью $Ox$ (рис. 10). Но

$$f_1'(x_0) = \left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_{(x_0,y_0)},$$

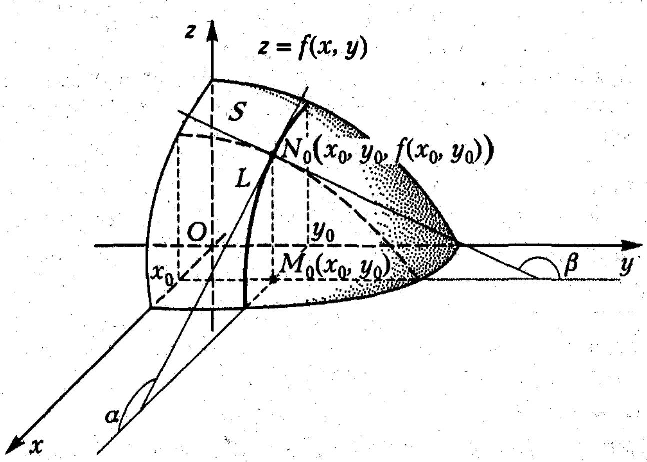


Рис. 10

так что

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\bigg|_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha.}$$

Таким образом, частная производная $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\big|_{M_0}$ равна тангенсу угла $\alpha$ между осью $Ox$ и касательной в точке $N_0$ к кривой, полученной в сечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$.

Аналогично получаем, что

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\bigg|_{M_0} = \operatorname{tg}\beta.}$$

# § 6. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D$ на плоскости $xOy$. Возьмем точку $(x, y) \in D$ и выбранным значениям $x$ и $y$ дадим любые приращения $\Delta x$ и $\Delta y$, но такие, чтобы точка $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$.

---

**Определение.** Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $(x, y) \in D$, если полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

этой функции, отвечающее приращениям $\Delta x$, $\Delta y$ аргументов, можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{1}$$

где $A$ и $B$ не зависят от $\Delta x$ и $\Delta y$ (но вообще зависят от $x$ и $y$), а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю $\Delta x$ и $\Delta y$.

---

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x, y)$, то часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения функции, линейная относительно $\Delta x$ и $\Delta y$, называется *полным дифференциалом* этой функции в точке $(x, y)$ и обозначается символом $dz$:

$$\boxed{dz = A\Delta x + \beta\Delta y.} \tag{2}$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y.}$$

**Пример.** Пусть $z = x^2 + y^2$. Во всякой точке $(x, y)$ и для любых $\Delta x$ и $\Delta y$ имеем

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y.$$

Здесь $A = 2x$, $B = 2y$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$, $\beta(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$, так что $\alpha$ и $\beta$ стремятся к нулю при стремлении к нулю $\Delta x$ и $\Delta y$. Согласно определению, данная функция дифференцируема в любой точке плоскости $xOy$. При этом

$$dz = 2x\Delta x + 2y\Delta y. \blacktriangleright$$

Заметим, что в наших рассуждениях не был формально исключен тот случай, когда приращения $\Delta x$, $\Delta y$ порознь или даже оба сразу равны нулю.

Формулу (1) можно записать более компактно, если ввести выражение

$$\boxed{\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

(*расстояние* между точками $(x, y)$ и $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ ). Пользуясь им, можем написать

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho \quad (\rho \neq 0).$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через $\varepsilon$, будем иметь

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \varepsilon\rho,$$

где $\varepsilon$ зависит от $\Delta x$, $\Delta y$ и стремится к нулю, если $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, или, короче, если $\rho \to 0$.

Формулу (1), выражающую условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $(x, y)$, можно теперь записать в виде

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho,} \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Так, в приведенном выше примере $\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, или $\Delta z = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \rho^2$, так что тут $\varepsilon(\rho) = \rho$.

## 6.1. Необходимые условия дифференцируемости функции

**Теорема 4.** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

◀ Если в точке $(x, y)$ функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то полное приращение функции $z$ в этой точке, отвечающее приращениям $\Delta x$ и $\Delta y$ аргументов, можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1)$$

(величины $A$, $B$ для данной точки постоянны; $\alpha, \beta \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0$), откуда следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Последнее означает, что в точке $(x, y)$ функция $z = f(x, y)$ непрерывна. ▶

**Теорема 5.** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в данной точке, то она имеет в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.*

◀ Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x, y)$. Тогда приращение $\Delta z$ этой функции, отвечающее приращениям $\Delta x$, $\Delta y$ аргументов, можно представить в виде (1). Взяв в равенстве (1) $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0).$$

Так как в правой части последнего равенства величина $A$ не зависит от $\Delta x$, а $\alpha(\Delta x, 0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Это означает, что в точке $(x, y)$ существует частная производная функции $z = f(x, y)$ по $x$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A.$$

Подобными же рассуждениями убеждаемся в том, что в точке $(x, y)$ существует частная производная функции $z = f(x, y)$ по $y$, причем $\frac{\partial z}{\partial y} = B$. ▶

Из теоремы следует, что

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Подчеркнем, что теорема 5 утверждает существование частных производных только в точке $(x, y)$, но ничего не говорит о непрерывности их в этой точке, а также об их поведении в окрестности точки $(x, y)$.

## 6.2. Достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных

Как известно, необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $y = f(x)$ одной переменной в точке $x_0$ являетсясуществование конечной производной $f'(x)$ в точке $x_0$. В случае, когда функция зависит от нескольких переменных, дело обстоит значительно сложнее: необходимых и достаточных условий дифференцируемости нет уже для функ ии $z = f(x, y)$ двух независимых переменных $x$, $y$; есть лишь отдельно необходимые условия (см. выше) и отдельно — достаточные. Эти достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных выражаются следующей теоремой.

**Теорема 6.** *Если функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x$ и $f'_y$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$ и если эти производные непрерывны в самой точке $(x_0, y_0)$, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$.*

**Пример.** Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Она определена всюду. Исходя из определения частных производных, имеем

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Для исследования дифференцируемости данной функции в точке $O(0,0)$ найдем ее приращение в этой точке:

$$\Delta f(0,0) = \sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho.$$

Так как $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, то

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}. \tag{1}$$

Для дифференцируемости функции $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ в точке $O(0,0)$ необходимо, чтобы функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ была бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Положим $\Delta y = \Delta x > 0$. Тогда из формулы (1) будем иметь

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\sqrt{2}\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \infty.$$

Поэтому функция $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке $O(0,0)$, хотя и имеет в этой точке производные $f'_x$ и $f'_y$. Полученный результат объясняется тем, что производные $f'_x$ и $f'_y$ разрывны в точке $O(0,0)$. ▶

# §7. Полный дифференциал. Частные дифференциалы

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема, то ее полный дифференциал $dz$ равен

$$\boxed{dz = A\Delta x + B\Delta y.} \tag{1}$$

Замечая, что $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$, запишем формулу (1) в следующем виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y. \tag{2}$$

Распространим понятие дифференциала функции на независимые переменные, положив дифференциалы независимых переменных равными их приращениям:

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

После этого формула полного дифференциала функции примет вид

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.} \tag{3}$$

**Пример.** Пусть $z = \ln(x + y^2)$. Тогда

$$dz = \frac{1}{x+y^2}\,dx + \frac{2y}{x+y^2}\,dy = \frac{dx + 2y\,dy}{x+y^2}. \ ▶$$

Аналогично, если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть дифференцируемая функция $n$ независимых переменных, то

$$\boxed{du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx_k \quad (dx_k = \Delta x_k).}$$

Выражение

$$\boxed{d_x z = f'_x(x,y)\,dx} \tag{4}$$

называется *частным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* $x$; выражение

$$\boxed{d_y z = f'_y(x, y)\,dy} \tag{5}$$

называется *частным дифференциалом функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* $y$.

Из формул (3), (4) и (5) следует, что полный дифференциал функции является суммой ее частных дифференциалов:

$$\boxed{dz = d_x z + d_y z.}$$

Отметим, что полное приращение $\Delta z$ функции $z = f(x, y)$, вообще говоря, не равно сумме частных приращений.

Если в точке $(x, y)$ функция $z = f(x, y)$ дифференцируема и дифференциал $dz \neq 0$ в этой точке, то ее полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

отличается от своей линейной части

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\Delta y$$

только на сумму последних слагаемых $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$, которые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ являются бесконечно малыми более высокого порядка, чем слагаемые линейной части. Поэтому при $dz \neq 0$ линейную часть приращения дифференцируемой функции называют *главной частью* приращения функции и пользуются приближенной формулой

$$\boxed{\Delta z \approx dz,}$$

которая будет тем более точной, чем меньшими по абсолютной величине будут приращения аргументов.

## § 8. Производные сложной функции

1. Пусть функция

$$z = f(x, y)$$

определена в некоторой области $D$ на плоскости $xOy$, причем каждая из переменных $x$, $y$ в свою очередь является функцией аргумента $t$:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 < t < t_1. \tag{1}$$

Будем предполагать, что при изменении $t$ в интервале $(t_0, t_1)$ соответствующие точки $(x, y)$ не выходят за пределы области $D$. Если подставить значения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в функцию $z = f(x, y)$, то получим сложную функцию

$$z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$$

одной переменной $t$.

---

**Теорема 7.** *Если в точке $t$ существуют производные*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

*и при соответствующих значениях $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функция $f(x, y)$ дифференцируема, то сложная функция $z = f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]$ в точке $t$ имеет производную $\frac{dz}{dt}$, причем*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

---

◀ Дадим $t$ приращение $\Delta t$. Тогда $x$ и $y$ получат некоторые приращения $\Delta x$ и $\Delta y$. В результате этого при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \neq 0$ функция $z$ также получит некоторое приращение $\Delta z$, которое в силу дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке $(x, y)$ может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ стремятся к нулю при стремлении к нулю $\Delta x$ и $\Delta y$. Доопределим $\alpha$ и $\beta$ при $\Delta x = \Delta y = 0$, положив $\alpha(0, 0) = 0$, $\beta(0, 0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ будут непрерывны при $\Delta x = \Delta y = 0$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta z}{\Delta t}$. Имеем

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{2}$$

В каждом слагаемом в правой части (2) оба сомножителя имеют пределы при $\Delta t \to 0$: действительно, частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для данной точки $(x, y)$ являются постоянными, по условию существуют пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \psi'(t),$$

из существования производных $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ в точке $t$ следует непрерывность в этой точке функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$; поэтому при $\Delta t \to 0$ стремятся к нулю и $\Delta x$ и $\Delta y$, что в свою очередь влечет за собой стремление к нулю $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$.

Таким образом, правая часть равенства (2) при $\Delta t \to 0$ имеет предел, равный

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Значит, существует при $\Delta t \to 0$ и предел левой части (2), т. е. существует

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t},$$

равный $\frac{dz}{dt}$. Переходя в равенстве (2) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем требуемую формулу

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.} \blacktriangleright \tag{3}$$

**Пример.** Пусть

$$z = x^2 + y^2, \quad x = \sin t, \quad y = t^3.$$

Тогда в силу (3)

$$\frac{dz}{dt} = 2x\cos t + 2y\cdot 3t^2 = 2\sin t\cos t + 6t^5 = \sin 2t + 6t^5.$$

В частном случае, когда

$$z = f(x, y), \quad \text{а} \quad y = \psi(x), \tag{4}$$

и, следовательно, $z$ является сложной функцией от $x$,

$$z = f\big(x, \psi(x)\big),$$

получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

В формуле (5) $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная функции $z = f(x, y)$ по $x$, при вычислении которой в выражении $f(x, y)$ аргумент $y$ принимается за постоянную. А $\frac{dz}{dx}$ есть полная производная функции $z$ по независимой переменной $x$, при вычислении которой $y$ в выражении $f(x, y)$ уже не принимается за постоянную, а считается в свою очередь функцией от $x$: $y = \psi(x)$, и поэтому зависимость $z$ от $x$ учитывается полностью.

**Пример.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и $y = x^2$.

◀ $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}\cdot 2x = \frac{1}{1 + x^2}.$$ ▶

**2.** Рассмотрим теперь дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Пусть

$$z = f(x, y),$$

где в свою очередь

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta),$$

так что

$$z = z(\xi, \eta) = f\big(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)\big).$$

Предположим, что в точке $(\xi, \eta)$ существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, а в соответствующей точке $(x, y)$, где $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, функция $f(x, y)$ дифференцируема. Покажем, что при этих условиях сложная функция $z = z(\xi, \eta)$ в точке $(\xi, \eta)$ имеет производные $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, и найдем выражения для этих производных. Заметим, что этот случай от уже изученного существенно не отличается. Действительно, при дифференцировании $z$ по $\xi$ вторая независимая переменная $\eta$ принимается за постоянную, вследствие чего $x$ и $y$ при этой операции становятся функциями одной переменной $\xi$: $x = \varphi(\xi, c)$, $y = \psi(\xi, c)$ и вопрос о производной $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ решается совершенно так же, как вопрос о производной $\frac{dz}{dt}$ при выводе формулы (3).

Используя формулу (3) и формально заменяя в ней производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ на производные $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ соответственно, получим

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}.}$$

Аналогично находим

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.}$$

**Пример.** Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ функции $z = x^2y - xy^2$, если $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$.

◀ $$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \left(2xy - y^2\right)\eta + \left(x^2 - 2xy\right)\frac{1}{\eta} =$$
$$= \left(2\xi\eta \cdot \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\eta + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta\frac{\xi}{\eta}\right)\frac{1}{\eta} = 3\xi^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right);$$
$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \left(2xy - y^2\right)\xi + \left(x^2 - 2xy\right)\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) =$$
$$= \left(2\xi\eta \cdot \frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi^2}{\eta^2}\right)\xi + \left(\xi^2\eta^2 - 2\xi\eta \cdot \frac{\xi}{\eta}\right)\left(-\frac{\xi}{\eta^2}\right) = \xi^3\left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right).$$ ▶

Если сложная функция $u$ задана формулами
$$u = f(x, y, z), \quad x = x(\xi, \eta), \ y = y(\xi, \eta), \ z = z(\xi, \eta),$$
так что
$$u = u(\xi, \eta),$$
то при выполнении соответствующих условий имеем
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}.}$$

В частном случае, когда
$$u = f(x, y, z),$$
где
$$z = z(x, y),$$
имеем
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial x}$ — полная частная производная функции $u$ по независимой переменной $x$, учитывающая полную зависимость $u$ от $x$, в том числе и через $z = z(x, y)$, а $\frac{\partial f}{\partial x}$ — частная производная функции $u = f(x, y, z)$ по $x$, при вычислении которой аргументы $y$ и $z$ принимаются за постоянные. То же относится к $\frac{\partial u}{\partial y}$.

## §9. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

Если $z = f(x, y)$ — дифференцируемая функция независимых переменных $x$ и $y$, то ее полный дифференциал $dz$ равен
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy, \tag{1}$$
где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Пусть теперь
$$z = f(x, y),$$
где
$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta).$$

Предположим, что в точке $(\xi, \eta)$ функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ имеют непрерывные частные производные по $\xi$ и по $\eta$, а в соответствующей точке $(x, y)$ существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, вследствие чего функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке. При этих условиях функция

$$z = f\left[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)\right]$$

имеет в точке $(\xi, \eta)$ производные

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}. \tag{2}$$

Как видно из формул (2), $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ непрерывны в точке $(\xi, \eta)$. Поэтому функция $z = f\left[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)\right]$ в точке $(\xi, \eta)$ дифференцируема, причем согласно формуле полного дифференциала для функции от независимых переменных $\xi$ и $\eta$, имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}\,d\eta. \tag{3}$$

Заменив в правой части равенства (3) $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ их выражениями из формул (2), получим

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{d\eta}\right) d\eta,$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta\right). \tag{4}$$

Так как по условию функции $x = \varphi(\xi, \eta)$ и $y = \psi(\xi, \eta)$ в точке $(\xi, \eta)$ имеют непрерывные частные производные, то они в этой точке дифференцируемы и

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) получаем, что

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.} \tag{6}$$

Сравнение формул (1) и (6) показывает, что полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ выражается формулой одного и того же вида как в случае, когда аргументы $x$ и $y$ функции $f(x, y)$ являются независимыми переменными, так и в случае, когда эти аргументы являются в свою очередь функциями от некоторых переменных. Таким образом, полный дифференциал функции нескольких переменных обладает свойством *инвариантности формы*.

**Замечание.** Из инвариантности формы полного дифференциала следует: если $x$ и $y$ являются дифференцируемыми функциями какого угодно конечного числа переменных

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \qquad y = \psi(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

то остаются в силе формулы

$$d(x \pm y) = dx \pm dy, \qquad d(xy) = x\,dy + y\,dx, \qquad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

легко получаемые для случая, когда $x$ и $y$ — независимые переменные.

# § 10. Неявные функции

Пусть имеем уравнение

$$\mathscr{F}(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $\mathscr{F}(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в некоторой области $G$ на плоскости $xOy$. Если для каждого значения $x$ из некоторого интервала $(x_0 - h_0, x_0 + h_0)$ существует ровно одно значение $y$, которое совместно с $x$ удовлетворяет уравнению (1), то этим определяется функция $y = y(x)$, для которой равенство

$$\mathscr{F}\big(x, y(x)\big) = 0$$

выполняется тождественно по $x$ в указанном интервале. В этом случае говорят, что уравнение (1) определяет величину $y$ как *неявную функцию* $x$.

Иными словами, функция $y = y(x)$, заданная уравнением $\mathscr{F}(x, y) = 0$, не разрешенным относительно $y$, называется *неявной функцией*; она становится *явной*, если зависимость $y$ от $x$ задается непосредственно.

**Примеры.**

1. Уравнение

$$y - x = 0$$

определяет на всей оси $Ox$ величину $y$ как однозначную функцию $x$:

$$y = x.$$

2. Уравнением

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{2}$$

величина $y$ определяется как однозначная функция $x$. Проиллюстрируем это утверждение. Уравнение

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0$$

удовлетворяется парой значений $x = 0$, $y = 0$. Будем считать $x$ параметром и рассмотрим функции $z = y$ и $z = x + \varepsilon \sin y$. Вопрос о том, существует ли для выбранного $x_0$ соответствующее единственное значение $y_0$ такое, что пара $(x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению (2), сводится к тому, пересекаются ли кривые $z = y$ и $z = x_0 + \varepsilon \sin y$ в единственной точке. Построим их графики на плоскости $zOy$ (рис. 11). Кривая $z = x + \varepsilon \sin y$, где $x$ рассматривается как параметр, получается параллельным переносом вдоль оси $Oz$ кривой $z = \varepsilon \sin y$. Геометрически очевидно, что при всяком $x$ кривые $z = y$ и $z = x + \varepsilon \sin y$ имеют единственную точку пересечения, ордината $y$ которой является функцией от $x$, определяемой уравнением (2) неявно. Через элементарные функции эта зависимость не выражается.

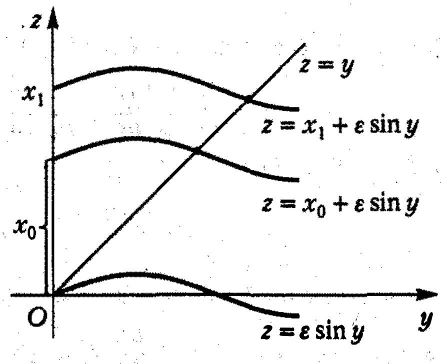


Рис. 11

3. Уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ни при каких действительных $x$ не определяет $y$ как действительную функцию аргумента $x$.

В таком же смысле можно говорить о неявных функциях нескольких переменных.

Следующая теорема дает достаточные условия однозначной разрешимости уравнения

$$\mathscr{F}(x, y) = 0 \tag{1}$$

относительно $y$ в некоторой окрестности заданной точки $(x_0, y_0)$.

**Теорема 8 (существования неявной функции).**

*Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция $\mathscr{F}(x, y)$ определена и непрерывна в некотором прямоугольнике $D = \{x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1, y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2\}$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, с центром в точке $(x_0, y_0)$;*

2) *в точке* $(x_0, y_0)$ *функция* $\mathcal{F}(x, y)$ *обращается в нуль,*

$$\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0;$$

3) *в прямоугольнике* $D$ *существуют и непрерывны частные производные* $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$;

4)

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}(x, y)}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

*Тогда для любого достаточно малого положительного числа* $\varepsilon$ *найдется окрестность* $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$, $\delta_0 > 0$, *точки* $x_0$ *такая, что в этой окрестности существует единственная*[1] *непрерывная функция* $y = f(x)$ (рис. 12), *которая принимает значение* $y_0$ *при* $x = x_0$ $(f(x_0) = y_0)$, *удовлетворяет условию* $|y - y_0| < \varepsilon$ *и обращает уравнение* (1) *в тождество:*

$$\mathcal{F}(x, f(x)) \equiv 0.$$

*Эта функция* $y = f(x)$ *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* $x_0$, *причем*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}} \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \neq 0\right). \qquad (3)$$

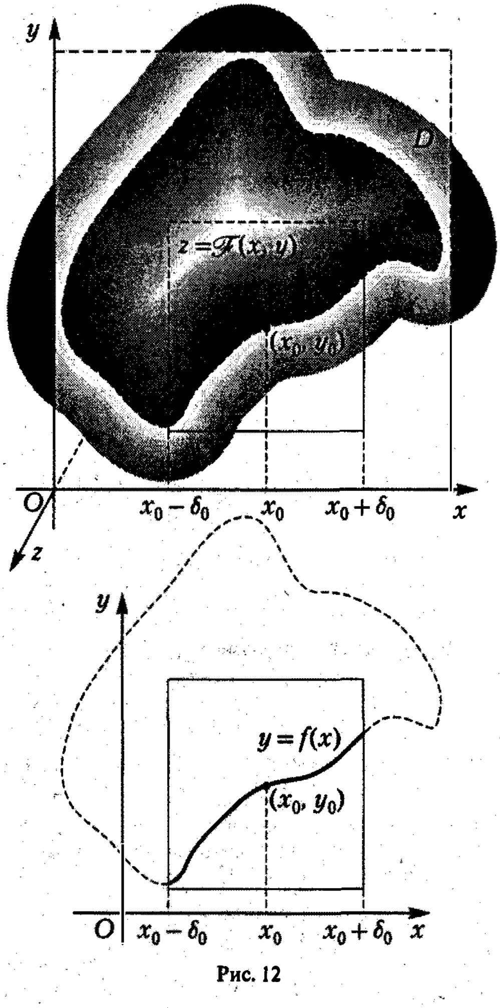


Рис. 12

◄ Выведем формулу (3) для производной неявной функции, считая существование этой производной доказанным.

Пусть $y = f(x)$ — неявная дифференцируемая функция, определяемая уравнением (1). Тогда в интервале $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ имеет место тождество

$$\mathcal{F}(x, f(x)) \equiv 0,$$

вследствие чего в этом интервале

$$\frac{d\mathcal{F}(x, f(x))}{dx} = 0.$$

Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d\mathcal{F}(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

[1] Единственная в том смысле, что любая точка $(x, y)$, лежащая на кривой $\mathcal{F}(x, y) = 0$ и принадлежащая окрестности $\Omega = \{x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\}$ точки $(x_0, y_0)$, имеет координаты, связанные уравнением $y = f(x)$.

Отсюда при $y = f(x)$ получаем, что

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

и, значит,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}}{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}}. \blacktriangleright$$

**Пример.** Найти $\frac{dy}{dx}$ от функции $y = y(x)$, определяемой уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

◀ В данном случае

$$\mathcal{F}(x, y) = x^2 + y^2 - R^2,$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} = 2y.$$

Отсюда в силу формулы (3)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \blacktriangleright$$

**Замечание.** Теорема 8 дает условия для существования единственной неявной функции, график которой проходит через заданную точку $(x_0, y_0)$, достаточные, но не необходимые. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$(y - x)^2 = 0.$$

Здесь

$$\mathcal{F}(x, y) = (y - x)^2$$

имеет непрерывные частные производные $\mathcal{F}'_x$, $\mathcal{F}'_y$, но

$$\mathcal{F}'_y = 2(y - x)$$

равна нулю в точке $O(0, 0)$. Тем не менее, данное уравнение имеет единственное решение

$$y = x,$$

равное нулю при $x = 0$.

**Задача.** Пусть дано уравнение

$$y^2 = x^2 \tag{1'}$$

и пусть

$$y = y(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2'}$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1′).

1) Сколько однозначных функций (2′) удовлетворяет уравнению (1′)?
2) Сколько однозначных непрерывных функций удовлетворяет уравнению (1′)?
3) Сколько однозначных дифференцируемых функций удовлетворяет уравнению (1′)?
4) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$, $1 - \delta < x < 1 + \delta$, удовлетворяет уравнению (1′), если $y(1) = 1$ и $\delta > 0$ достаточно мало?

Теорема существования, аналогичная теореме 8, имеет место и в случае неявной функции $z = z(x, y)$ двух переменных, определяемой уравнением

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

---

**Теорема 9.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция $\mathcal{F}$ определена и непрерывна в области $D$ :*

$$D: \begin{cases} x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1, \\ y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2, \quad (\delta_1 > 0, \ \delta_2 > 0, \ \delta_3 > 0); \\ z_0 - \delta_3 < z < z_0 + \delta_3, \end{cases}$$

2) $$\mathscr{F}(x_0, y_0, z_0) = 0;$$

3) *в области $D$ существуют и непрерывны частные производные*
$$\mathscr{F}'_x, \mathscr{F}'_y, \mathscr{F}'_z;$$

4) $$\mathscr{F}'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

*Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\Omega$ точки $(x_0, y_0)$, в которой существует единственная непрерывная функция $z = f(x, y)$, принимающая значение $z_0$ при $x = x_0$, $y = y_0$, удовлетворяющая условию $|z - z_0| < \varepsilon$ и обращающая уравнение* (4) *в тождество:*
$$\mathscr{F}(x, y, f(x, y)) \equiv 0.$$

*При этом функция $z = f(x, y)$ в области $\Omega$ имеет непрерывные частные производные $f'_x$ и $f'_y$.*

---

◀ Найдем выражения для этих производных. Пусть уравнение
$$\mathscr{F}(x, y, z) = 0$$
определяет $z$ как однозначную и дифференцируемую функцию $z = f(x, y)$ независимых переменных $x$ и $y$. Если в это уравнение вместо $z$ подставить функцию $f(x, y)$, то получим тождество
$$\mathscr{F}(x, y, f(x, y)) \equiv 0 \quad (x, y) \in \Omega.$$
Следовательно, полные частные производные по $x$ и по $y$ функции $\mathscr{F}(x, y, z)$, где $z = f(x, y)$, также должны быть равны нулю. Дифференцируя, найдем
$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
откуда
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}} \quad \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z} \neq 0\right).$$
Эти формулы дают выражения для частных производных неявной функции двух независимых переменных. ▶

**Пример.** Найти частные производные от функции $z(x, y)$, заданной уравнением
$$\mathscr{F}(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

◀ Имеем
$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z} = 2z,$$
откуда
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z} \quad (z \neq 0). ▶$$

# § 11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

## 11.1. Предварительные сведения

Пусть имеем поверхность $S$, заданную уравнением
$$\mathscr{F}(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

**Определение.** Точка $M(x, y, z)$ поверхности (1) называется *обыкновенной точкой* этой поверхности, если в точке $M$ все три производные

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$$

существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля.

Если в точке $M(x, y, z)$ поверхности (1) все три производные

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$$

равны нулю или хотя бы одна из этих производных не существует, то точка $M$ называется *особой точкой* поверхности.

**Пример.** Рассмотрим круговой конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

(рис. 13). Здесь

$$\mathcal{F}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

так что

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = -2z.$$

Единственной особой точкой является начало координат $O(0, 0, 0)$: в этой точке все частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}$$

одновременно обращаются в нуль. ▶

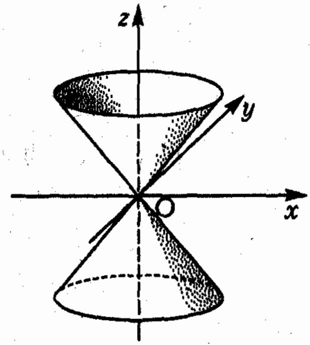

Рис. 13

Рассмотрим пространственную кривую $L$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \xi(t), \\ y = \eta(t), \\ z = \zeta(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta. \tag{2}$$

Пусть функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ имеют непрерывные производные $\xi'(t)$, $\eta'(t)$, $\zeta'(t)$ в интервале $\alpha < t < \beta$. Исключим из рассмотрения особые точки кривой, в которых

$$\xi'^2(t) + \eta'^2(t) + \zeta'^2(t) = 0.$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — обыкновенная точка кривой $L$, определяемая значением $t_0$ параметра $t$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}}$$

— вектор касательной к кривой $L$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

## 11.2. Касательная плоскость поверхности

Пусть поверхность $S$ задана уравнением

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Возьмем на поверхности $S$ обыкновенную точку $P$ и проведем через нее некоторую кривую $L$, лежащую на поверхности и задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \xi(t), \\ y = \eta(t), \qquad \alpha < t < \beta. \\ z = \zeta(t), \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ имеют непрерывные производные, нигде на $(\alpha, \beta)$ не обращающиеся одновременно в нуль. По определению, касательная кривой $L$ в точке $P$ называется *касательной* к поверхности $S$ в этой точке.

Если выражения (2) подставить в уравнение (1), то, поскольку кривая $L$ лежит на поверхности $S$, уравнение (1) обратится в тождество относительно $t$:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\right) \equiv 0, \quad t \in (\alpha, \beta).}$$

Дифференцируя это тождество по $t$, по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.} \tag{3}$$

Выражение в левой части (3) является скалярным произведением двух векторов:

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\,\mathbf{k}} \tag{4}$$

и

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k}.}$$

В точке $P$ вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по касательной к кривой $L$ в этой точке (рис. 14). Что касается вектора $\mathbf{n}$, то он зависит только от координат этой точки и вида функции $\mathcal{F}(x, y, z)$ и не зависит от вида кривой, проходящей через точку $P$.

Так как $P$ — обыкновенная точка поверхности $S$, то длина вектора $\mathbf{n}$ отлична от нуля,

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2}.$$

То, что скалярное произведение

$$(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}) = 0$$

означает, что вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к кривой $L$ в точке $P$, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$ в этой точке (рис. 14). Эти рассуждения сохраняют свою силу для любой кривой, проходящей через точку $P$ и лежащей на поверхности $S$. Следовательно, любая касательная прямая к поверхности $S$ в точке $P$ перпендикулярна вектору $\mathbf{n}$, и, значит, все эти прямые лежат в одной плоскости, тоже перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$.

---

**Определение.** Плоскость, в которой расположены все касательные прямые к поверхности $S$, проходящие через данную обыкновенную точку $P \in S$, называется ***касательной плоскостью*** поверхности в точке $P$ (рис. 15).

---

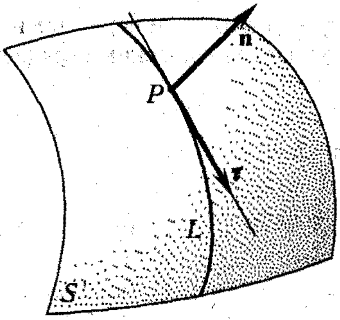


Рис. 14

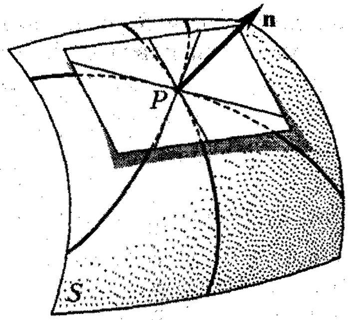


Рис. 15

Вектор

$$\mathbf{n}\big|_P = \left\{ \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}\bigg|_P, \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}\bigg|_P, \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}\bigg|_P \right\}$$

есть нормальный вектор касательной плоскости к поверхности $\mathscr{F}(x, y, z) = 0$ в точке $P$. Отсюда сразу получаем уравнение касательной плоскости к поверхности $\mathscr{F}(x, y, z) = 0$ в обыкновенной точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ этой поверхности:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0.} \tag{6}$$

Если поверхность $S$ задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то, записав это уравнение в виде

$$\mathscr{F} \equiv f(x, y) - z = 0,$$

получим

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial z} = -1,}$$

и уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, будет выгл - деть так

$$\boxed{z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}(y - y_0).} \tag{7}$$

## 11.3. Геометрический смысл полного дифференциала

Если в формуле (7) положить $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, то она примет вид

$$\boxed{z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bigg|_{(x_0,y_0)}\Delta y.} \tag{8}$$

Права часть (8) представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости $xOy$, так что

$$z - z_0 = dz.$$

Таким образом, полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных $x$ и $y$ в точке $M_0$, отвечающий приращениям $\Delta x$ и $\Delta y$ переменных $x$ и $y$, равен приращению $z - z_0$ аппликаты $z$ точки касательной плоскости поверхности $S$ в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ при переходе от точки $M_0(x_0, y_0)$ к точке $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

## 11.4. Нормаль к поверхности

**Определение.** Прямая, проходящая через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 0$$

перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в точке $P_0$, называется *нормалью к поверхности* в точке $P_0$.

Вектор

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right\}\Bigg|_{P_0}$$

является направляющим вектором нормали, а ее уравнения имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}} = \frac{z - z_0}{\left(\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}}.} \tag{9}$$

Если поверхность $S$ задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнения нормали в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ выглядят так:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}.} \tag{10}$$

**Пример.** Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 + y^2$$

в точке $O(0, 0, 0)$.

◀ Здесь

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

так что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

В точке $(0, 0)$ эти производные равны нулю:

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0,$$

и уравнение касательной плоскости в точке $O(0, 0, 0)$ принимает следующий вид:

$$z - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0),$$

т. е. $z = 0$ (плоскость $xOy$). Уравнения нормали:

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{1},$$

или

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

— ось $Oz$. ▶

# § 12. Производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в каждой точке $x$ области $D$. Тогда эти производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

будут функциями от $x$ и $y$ в области $D$, которые в свою очередь в точках области $D$ (во всех или в некоторых) могут иметь частные производные. Эти частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ (если они существуют) называются *вторыми частными производными* или *частными производными второго порядка* функции $z = f(x, y)$. Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных $x$, $y$ получаем четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \text{или} \quad f''_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \text{или} \quad f''_{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \text{или} \quad f''_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \text{или} \quad f''_{yy}.$$

Производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ называются *смешанными*: одна из них получается дифференцированием функции сначала по $x$, затем по $y$; другая, наоборот, дифференцированием сначала по $y$, затем по $x$.

Аналогично определяются частные производные 3-го и т. д. порядков.

**Пример.** Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от функции

$$z = x^3y^2 - xy^3.$$

◀ $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - y^3$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 3y^2$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 3xy^2$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 6xy$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 3y^2$. ▶

Обратим внимание на то, что смешанные производные $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$ оказались тождественно равными. Это не случайно. Имеет место следующая теорема.

---

**Теорема 10 (о равенстве смешанных производных).** *Пусть для функции*

$$z = f(x, y)$$

*в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ существуют производные $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ и пусть, кроме того, производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ непрерывны. Тогда в точке $M_0$ эти производные равны,*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

---

Требование непрерывности производных $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ существенно. Так, для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$$

смешанные производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ разрывны в точке $O(0,0)$, и для этой функции имеем $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Верен и более общий факт:

---

*если для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-либо смешанные производные порядка $m \geqslant 2$ отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и то же значение.*

---

## § 13. Дифференциалы высших порядков

Пусть в области $D$ задана функция $z = f(x,y)$ независимых переменных $x$ и $y$. Если эта функция дифференцируема в области $D$, то ее полный дифференциал в точке $(x,y) \in D$, соответствующий приращениям $dx$ и $dy$ независимых переменных $x$, $y$, выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения независимых переменных, т. е. произвольные числа, не зависящие от $x$ и $y$). Поэтому мы можем изменять $x$ и $y$, оставляя $dx$ и $dy$ постоянными. При фиксированных $dx$ и $dy$ полный дифференциал $dz$ есть функция от $x$ и $y$, которая в свою очередь может оказаться дифференцируемой.

---

**Определение.** Полный дифференциал от $dz$ в точке $(x,y)$, соответствующий приращениям независимых переменных, равным прежним $dx$ и $dy$, называется *дифференциалом второго порядка* функции $z = f(x,y)$ и обозначается символом $d^2z$:

$$d^2z \overset{\text{опр.}}{=} d(dz). \tag{1}$$

---

Пусть функция $z = f(x,y) \in C^2(D)$, т. е. имеет в области $D$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда полный дифференциал $dz$ этой функции будет дифференцируемым, т. е. будет существовать $d^2z$. Пользуясь известными правилами дифференцирования и помня, что $dz$ и $dy$ — постоянные, получим

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = \\ &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\,dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\,dy. \end{aligned} \tag{2}$$

По формуле полного дифференциала, примененной к $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, имеем

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dy,$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy.$$

Поэтому из формулы (2) следует

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

в силу непрерывности этих смешанных производных, то для $d^2 z$ получаем формулу

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.} \tag{3}$$

Здесь $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$.

С помощью формального символа $\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$ формулу (3) записывают условным равенством

$$\boxed{d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z.} \tag{4}$$

Здесь символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ рассматриваются как «множители» и формула квадрата суммы с последующим условным умножением на $z$ приводит к нужному результату. Именно, запишем

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,dy^2.$$

«Умножим» обе части полученного выражения почленно на $z$, поместив множитель $z$ в «числители» $\partial^2$ дробей, стоящих в правой части. Получим

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2,$$

что совпадает с формулой (3).

Подобным же образом вводятся понятия дифференциалов 3-го, 4-го и т. д. порядков. Вообще, полный дифференциал $n$-го порядка $d^n z$ есть полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$\boxed{d^n z = d(d^{n-1} z).}$$

Если функция $z = f(x, y) \in C^n(D)$, то у нее существует дифференциал $n$-го порядка. Этот дифференциал выражается формулой следующего вида

$$\boxed{d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z.} \tag{5}$$

Для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от $m$ независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ при выполнении соответствующих условий получаем

$$\boxed{d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\,dx_m\right)^n u.}$$

**Замечание.** Если $x$ и $y$ не являются независимыми переменными, а суть функции от $\xi$ и $\eta$, то, как и в случае функции одной переменной, уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

◀ В самом деле, пусть

$$z = f(x, y), \qquad \text{где } x = \varphi(\xi, \eta),\ y = \psi(\xi, \eta).$$

Тогда первый дифференциал может быть записан в прежнем виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

но теперь $dx$ и $dy$ сами есть функции и могут не быть постоянными. Поэтому

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial x}\,d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\,d(dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y,$$

так что инвариантность формы вообще не имеет места. ▶

# § 14. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до $n$-го порядка включительно во всех точках $(x, y)$ некоторой $\delta$-окрестности точки $(x_0, y_0)$ и пусть точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности (рис. 16). Положим

$$x = x_0 + t\Delta x, \qquad y = y_0 + t\Delta y, \tag{1}$$

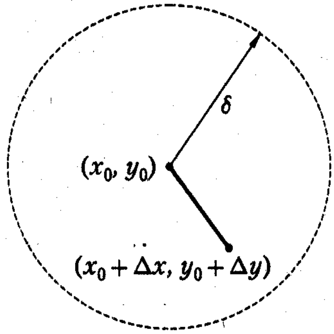

Рис. 16

где $t \in [0, 1]$ — новая независимая переменная. Тогда

$$z = f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = \varphi(t),$$

так что величина $z$ оказывается сложной функцией от $t$, определенной на отрезке $[0, 1]$ и имеющей там производные до порядка $n$ включительно. Поэтому $z = \varphi(t)$ можно представить формулой Тейлора по степеням $t$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\,t + \frac{\varphi''(0)}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,t^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{n!}\,t^n, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Полагая $t = 1$, получим

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{2}$$

Выразим величины в правой части формулы (2) при помощи исходной функции $f(x, y)$ и ее производных. Заметим, что аргументы $x$ и $y$ функции $f(x, y)$ являются функциями от $t$, но имеют постоянные дифференциалы $dx = \Delta x \cdot dt$, $dy = \Delta y \cdot dt$ ($\Delta x$, $\Delta y$ —

фиксированные числа). Поэтому для вычисления последовательных дифференциалов функции $z = f(x, y)$ применима формула

$$d^p z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^p f(x, y) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\,(\Delta x\,dt) + \frac{\partial}{\partial y}\,(\Delta y\,dt)\right)^p f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^p f(x, y)(dt)^p,$$

откуда

$$\boxed{\frac{d^p z}{dt^p} = \varphi^{(p)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^p f(x, y).} \tag{3}$$

При $t = 0$ в силу соотношений (1) имеем $x = x_0$, $y = y_0$, и формула (3) принимает вид

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^p f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

При $t = \theta$ получаем

$$\boxed{\varphi^{(n)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^n f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}}.} \tag{5}$$

Заметим еще, что

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y). \tag{6}$$

Подставляя выражения (4), (5) и (6) в равенство (2), получим, что

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right) f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^2 f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^{n-1} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \\ &+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Delta y\right)^n f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}} \tag{7}$$

Это — *формула Тейлора для функции $z = f(x, y)$ двух переменных*, а

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}}$$

— *остаточный член* этой формулы *в форме Лагранжа.*

Приведем сокращенную форму записи формулы Тейлора. Перенося первое слагаемое правой части формулы (7) в левую часть и обозначая разность $f(x_0 + \Delta x,$ $y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ через $\Delta f\big|_{(x_0,y_0)}$, получаем, что

$$\boxed{\Delta f\Big|_{(x_0,y_0)} = df\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{1}{2!}\,d^2 f\Big|_{(x_0,y_0)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\,d^{n-1} f\Big|_{(x_0,y_0)} + \frac{1}{n!}\,d^n f\Big|_{(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)}.} \tag{8}$$

Формулой (8) пользуются для приближенного вычисления приращения $\Delta f$ функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

При достаточно малых по модулю значениях $\Delta x$ и $\Delta y$ и при $df \neq 0$ за приращение функции $\Delta f$ приближенно можно принять дифференциал $df$. Это означает, что в правой части формулы Тейлора (8) берется только одно первое слагаемое. Если приближенное равенство $\Delta f \approx df$ не дает требуемой точности, то для повышения точности можно воспользоваться дальнейшими членами формулы Тейлора (8).

**Пример.** Разложить функцию

$$f(x,y) = e^x \sin y$$

по формуле Маклорена с остаточным членом 3-го порядка.

◀ Формула Тейлора (7) с остаточным членом $R_3$ имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) &= f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right] + \\ &+ \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(x,y)\Delta x^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xyy}(x,y)\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}(x,y)\Delta y^3\right]\Bigg|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x \\ y=y_0+\theta\Delta y}}. \end{aligned}$$

Формула Маклорена получается из нее, если положить $x_0 = y_0 = 0$, $\Delta x = x$, $\Delta y = y$:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(0,0)x^2 + 2f''_{xy}(0,0)xy + f''_{yy}(0,0)y^2\right] + \\ &+ \frac{1}{3!}\left[f'''_{xxx}(\theta x,\theta y)x^3 + 3f'''_{xxy}(\theta x,\theta y)x^2y + 3f'''_{xyy}(\theta x,\theta y)xy^2 + f'''_{yyy}(\theta x,\theta y)y^3\right], \quad 0<\theta<1. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

В данном случае

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x \sin y, & f(0,0) &= 0; \\ f'_x(x,y) &= e^x \sin y, & f'_x(0,0) &= 0; \\ f'_y(x,y) &= e^x \cos y, & f'_y(0,0) &= 1; \\ f''_{xx}(x,y) &= e^x \sin y, & f''_{xx}(0,0) &= 0; \\ f''_{xy}(x,y) &= e^x \cos y, & f''_{xy}(0,0) &= 1; \\ f''_{yy}(x,y) &= -e^x \sin y, & f''_{yy}(0,0) &= 0; \\ f'''_{xxx}(x,y) &= e^x \sin y, & f'''_{xxx}(\theta x,\theta y) &= e^{\theta x}\sin\theta y; \\ f'''_{xxy}(x,y) &= e^x \cos y, & f'''_{xxy}(\theta x,\theta y) &= e^{\theta x}\cos\theta y; \\ f'''_{xyy}(x,y) &= -e^x \sin y, & f'''_{xyy}(\theta x,\theta y) &= -e^{\theta x}\sin\theta y; \\ f'''_{yyy}(x,y) &= -e^x \cos y, & f'''_{yyy}(\theta x,\theta y) &= -e^{\theta x}\cos\theta y. \end{aligned}$$

Таким образом, формула Маклорена (*) принимает вид

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{6}\left[e^{\theta x}\sin\theta y\cdot x^3 + 3e^{\theta x}\cos\theta y\cdot x^2y - 3e^{\theta x}\sin\theta y\cdot xy^2 - e^{\theta x}\cos\theta y\cdot y^3\right]. \ ▶$$

**Замечание 1.** Нетрудно заметить, что формулу Маклорена можно записать так:

$$f(x,y) = f(0,0) + P_1(x,y) + P_2(x,y) + \ldots + P_{n-1}(x,y) + R_n,$$

где $P_k(x,y)$ — однородный многочлен $k$-ой степени относительно $x$, $y$.

# § 15. Экстремум функции нескольких переменных

## 15.1. Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D$ и пусть $M_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка этой области.

---

**Определение.** Если существует такое число $\delta > 0$, что для всех $\Delta x$ и $\Delta y$, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$, верно неравенство

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \leqslant 0, \tag{1}$$

то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* функции $f(x, y)$; если же для всех $\Delta x$, $\Delta y$, удовлетворяющих условиям $|\Delta x| < \delta$ и $|\Delta y| < \delta$,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \geqslant 0, \tag{2}$$

то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального минимума.*

---

Иными словами, точка $M_0(x_0, y_0)$ есть точка максимума или минимума функции $f(x, y)$, если существует $\delta$-окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ такая, что во всех точках $M(x, y)$ этой окрестности приращение функции

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

сохраняет знак.

**Примеры.**

1. Для функции

$$z = x^2 + y^2$$

точка $O(0, 0)$ — точка минимума (рис. 17).

2. Для функции

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

точка $O(0, 0)$ является точкой максимума (рис. 18).

3. Для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x = y = 0, \end{cases}$$

точка $O(0, 0)$ является точкой локального максимума.

◀ В самом деле, существует окрестность точки $O(0, 0)$, например, круг радиуса $\frac{1}{2}$ (см. рис. 19), во всякой точке которого, отличной от точки $O(0, 0)$, значение функции $f(x, y)$ меньше $1 = f(0, 0)$. ▶

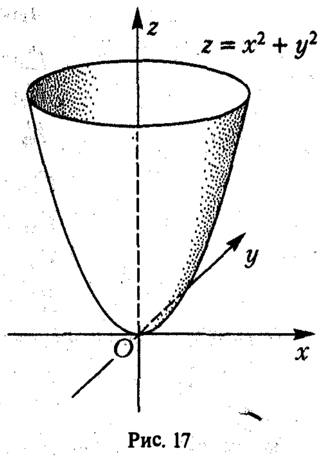

Рис. 17

Мы будем рассматривать только точки *строгого* максимума и минимума функций, когда строгое неравенство $\Delta f < 0$ или строгое неравенство $\Delta f > 0$ выполняется для всех точек $M(x, y)$ из некоторой проколотой $\delta$-окрестности точки $M_0$.

Значение функции в точке максимума называется *максимумом*, а значение функции в точке минимума — *минимумом* этой функции. Точки максимума и точки минимума функции называются *точками экстремума* функции, а сами максимумы и минимумы функции — ее *экстремумами.*

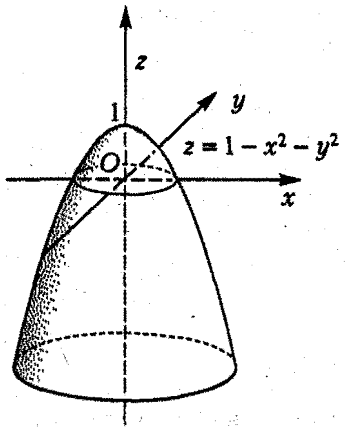


Рис. 18

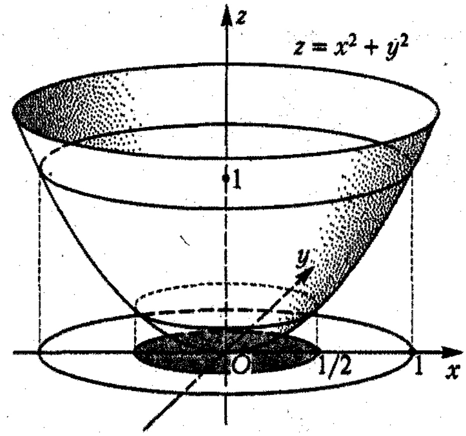


Рис. 19

**Теорема 11 (необходимое условие экстремума).** *Если функция*

$$z = f(x, y)$$

*имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке каждая частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ либо обращается в нуль, либо не существует.*

◄ Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум. Дадим переменной $y$ значение $y_0$. Тогда функция $z = f(x, y)$ будет функцией одной переменной $x$:

$$z = f(x, y_0).$$

Так как при $x = x_0$ она имеет экстремум (максимум или минимум, рис. 20), то ее производная по $x$ при $x = x_0$, т. е. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$, либо равна нулю, либо не существует. Аналогично убеждаемся в том, что $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$ или равна нулю, или не существует. ►

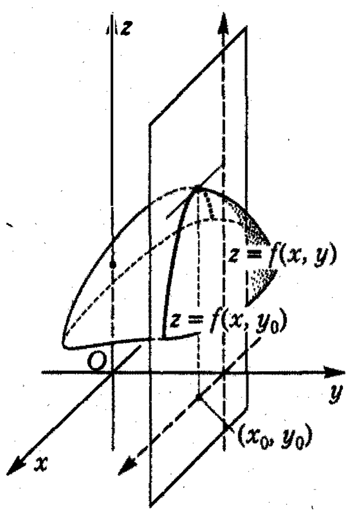


Рис. 20

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ либо не существуют, называются *критическими точками* функции $z = f(x, y)$. Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются также *стационарными точками* функции.

Теорема 11 выражает лишь необходимые условия экстремума, не являющиеся достаточными.

**Пример.** Функция

$$z = x^2 - y^2$$

имеет производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y,$$

которые обращаются в нуль при $x = y = 0$. Но эта функция в точке $O(0, 0)$ не имеет экстремума.

◀ Действительно, функция

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

равна нулю в точке $O(0,0)$ и принимает в точках $M(x,y)$, как угодно близких к точке $O(0,0)$, как положительные, так и отрицательные значения. Для нее

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2,$$

так что

$$\begin{cases} \Delta f > 0 \text{ в точках } (x,0) \\ \Delta f < 0 \text{ в точках } (0,y) \end{cases}$$

при сколь угодно малых $|x| > 0$ и $|y| > 0$. ▶

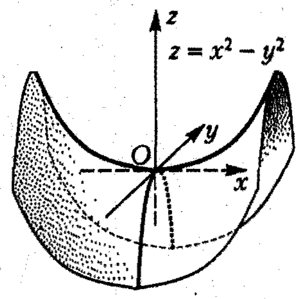


Рис. 21

Точку $O(0,0)$ указанного типа называют *точкой минимакса* (рис. 21).

Достаточные условия экстремума функции двух переменных выражаются следующей теоремой.

---

**Теорема 12 (достаточные условия экстремума функции двух переменных).** *Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $f(x,y)$,*

$$f'_x(x_0,y_0) = 0 \quad и \quad f'_y(x_0,y_0) = 0,$$

*и в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, включая саму точку $M_0$, функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда:*

1) *в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум, если в этой точке определитель*

$$D(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - f''^2_{xy}(x_0,y_0) > 0$$

*и*

$$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \quad (f''_{yy}(x_0,y_0) < 0);$$

2) *в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет минимум, если*

$$D(x_0,y_0) > 0$$

*и*

$$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \quad (f''_{yy}(x_0,y_0) > 0);$$

3) *в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ не имеет экстремума, если*

$$D(x_0,y_0) < 0.$$

*Если же*

$$D(x_0,y_0) = 0,$$

*то в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум функции $f(x,y)$ может быть, а может и не быть. В этом случае требуется дальнейшее исследование.*

---

◀ Ограничимся доказательством утверждений 1) и 2) теоремы. Напишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x,y)$:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2\right]\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}}$$

где $0<\theta<1$. По условию $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$, так что

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ = \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x,y)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x,y)\Delta y^2\right]\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}} \tag{1}$$

откуда видно, что знак приращения $\Delta f$ определяется знаком трехчлена в правой части (1), т. е. знаком второго дифференциала $d^2 f$. Обозначим для краткости

$$A = f''_{xx}(x,y), \qquad B = f''_{xy}(x,y), \qquad C = f''_{yy}(x,y).$$

Тогда равенство (1) можно записать так:

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2\right)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x\\ y=y_0+\theta\Delta y}}. \tag{2}$$

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеем

$$AC - B^2 > 0, \tag{3}$$

т. е.

$$f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - f''^2_{xy}(x_0,y_0) > 0.$$

Так как по условию частные производные второго порядка от функции $f(x,y)$ непрерывны, то неравенство (3) будет иметь место и в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$.

Если выполнено условие (3), то $A = f''_{xx}(x,y) \neq 0$ в точке $M_0$, и в силу непрерывности производная $f''_{xx}(x,y)$ будет сохранять знак в некоторой окрестности точки $M_0$. В области, где $A \neq 0$, имеем

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{A}\left[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC-B^2)\Delta y^2\right].$$

Отсюда видно, что если $AC - B^2 > 0$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, то знак трехчлена $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ совпадает со знаком $A$ в точке $(x_0,y_0)$ (а также и со знаком $C$, поскольку при $AC - B^2 > 0$ $A$ и $C$ не могут иметь разные знаки).

Так как знак суммы $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ в точке $(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ определяет знак разности

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

то мы приходим к следующему выводу: если для функции $f(x,y)$ в стационарной точке $(x_0,y_0)$ выполнено условие $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$ ($C < 0$), то для достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ будет выполняться неравенство

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \leqslant 0.$$

Тем самым, в точке $(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум.

Если же в стационарной точке $(x_0,y_0)$ выполнено условие $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$ ($C > 0$), то для всех достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ верно неравенство

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \geqslant 0,$$

и, значит, в точке $(x_0,y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет минимум. ▶

**Примеры.**

1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6.$$

◄ Пользуясь необходимыми условиями экстремума, разыскиваем стационарные точки функции. Для этого находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и приравниваем их нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y + 4 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $y = -1$, так что $M_0(1, -1)$ — стационарная точка. Воспользуемся теперь теоремой 12. Имеем

$$A\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = 2, \quad B\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Big|_{M_0} = 0, \quad C\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = 4,$$

так что

$$(AC - B^2)\Big|_{M_0} = 8 > 0.$$

Значит, в точке $M_0$ экстремум есть. Поскольку $A\Big|_{M_0} = 2 > 0$, то это — минимум.

Если преобразовать функцию $z$ к виду

$$z = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 - 9, \tag{$*$}$$

то нетрудно заметить, что правая часть ($*$) будет минимальной, когда $x = 1$, $y = -1$. Это — абсолютный минимум данной функции. ►

2. Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy.$$

◄ Находим стационарные точки функции, для чего составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = y = 0$, так что точка $M_0(0, 0)$ — стационарная. Так как

$$A\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = 0, \quad B\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Big|_{M_0} = 1, \quad C\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = 0,$$

то

$$(AC - B^2)\Big|_{M_0} = -1 < 0$$

и в силу теоремы 12 в точке $M_0(0, 0)$ экстремума нет. ►

3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4.$$

◄ Находим стационарные точки функции. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 = 0, \end{cases}$$

получаем, что $x = y = 0$, так что стационарной является точка $M_0(0, 0)$. Далее имеем

$$A\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = 0, \quad B\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\Big|_{M_0} = 0, \quad C\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = 0,$$

так что

$$(AC - B^2)\Big|_{M_0} = 0,$$

и теорема 12 не дает ответа на вопрос о наличии или отсутствии экстремума. Поступим поэтому так. Для функции

$$z = x^4 + y^4$$

во всех точках $M(x, y)$, отличных от точки $M_0(0, 0)$,

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 > 0,$$

так что, по определению, в точке $M_0(0,0)$ функция $z$ имеет абсолютный минимум.

Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что функция

$$z = -x^4 - y^4$$

имеет в точке $O(0,0)$ максимум, а функция

$$z = x^4 - y^4$$

в точке $O(0,0)$ экстремума не имеет. ▶

Пусть функция $n$ независимых переменных

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Точка $M_0$ называется *стационарной* точкой функции $u$, если

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{M_0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

**Теорема 13 (достаточные условия экстремума).** *Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, которая является стационарной точкой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда, если квадратичная форма (второй дифференциал функции $f$ в точке $M_0$)*

$$\mathscr{A}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{M_0} dx_i\, dx_j \tag{4}$$

*является положительно определенной (отрицательно определенной), то точкой минимума (соответственно, точкой максимума) функции $f$ является точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Если же квадратичная форма (4) является знакопеременной, то в точке $M_0$ экстремума нет.*

---

Для того чтобы установить, будет ли квадратичная форма (4) положительно или отрицательно определенной, можно воспользоваться, например, критерием Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

## 15.2. Условный экстремум

До сих пор мы занимались отысканием локальных экстремумов функции во всей области ее определения, когда аргументы функции не связаны никакими дополнительными условиями. Такие экстремумы называются *безусловными*. Однако часто встречаются задачи на отыскание так называемых условных экстремумов.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D$. Допустим, что в этой области задана кривая $L$, и нужно найти экстремумы функции $f(x, y)$ только среди тех ее значений, которые соответствуют точкам кривой $L$. Такие экстремумы называют *условными экстремумами* функции $z = f(x, y)$ на кривой $L$.

**Определение.** Говорят, что в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на кривой $L$, функция $f(x, y)$ имеет *условный максимум* (*минимум*), если неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

(соответственно

$$f(x, y) > f(x_0, y_0))$$

выполняется во всех точках $M(x, y)$ кривой $L$, принадлежащих некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и отличных от точки $M_0$ (рис. 22).

Если кривая $L$ задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$, то задача о нахождении условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на кривой $L$ может быть сформулирована так: найти экстремумы функции $z = f(x, y)$ в области $D$ при условии, что $\varphi(x, y) = 0$.

Таким образом, при нахождении условных экстремумов функции $z = f(x, y)$ аргументы $x$ и $y$ уже нельзя рассматривать как независимые переменные: они связаны между собой соотношением $\varphi(x, y) = 0$, которое называют *уравнением связи*.

Чтобы пояснить различие между безусловным и условным экстремумом, рассмотрим такой пример. Безусловный максимум функции

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

(рис. 23) равен единице и достигается в точке $(0, 0)$. Ему соответствует точка $M$ — вершина параболоида. Присоединим уравнение связи $y = \frac{1}{2}$. Тогда условный максимум будет, очевидно, равен $\frac{3}{4}$. Он достигается в точке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, и ему отвечает вершине $M_1$ параболы, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $y = \frac{1}{2}$. В случае безусловного максимума мы имеем максимальную аппликату среди всех аппликат поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$; в случае условного — только среди аппликат точек параболоида, отвечающих точкам прямой $y = \frac{1}{2}$ на плоскости $xOy$.

Один из методов отыскания условного экстремума функции

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

при наличии связи

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{2}$$

состоит в следующем.

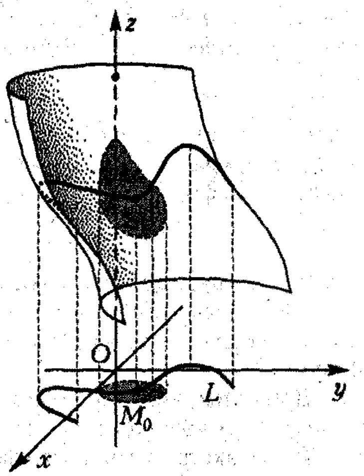


Рис. 22

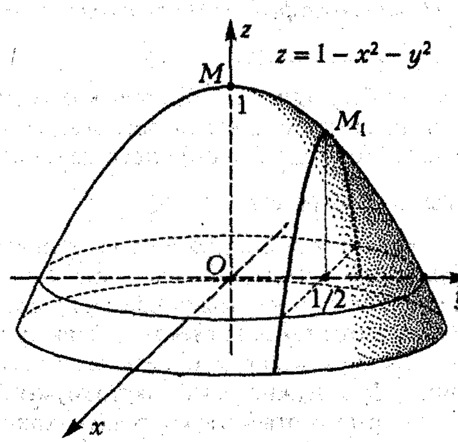


Рис. 23

Пусть уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$ определяет $y$ как однозначную дифференцируемую функцию аргумента $x$:

$$y = \psi(x).$$

Подставляя в функцию $z = f(x, y)$ вместо $y$ функцию $\psi(x)$, получаем функцию одного аргумента

$$z = f\big(x, \psi(x)\big) = F(x), \tag{3}$$

в которой условие связи уже учтено. Экстремум (безусловный) функции $F(x)$ является искомым условным экстремумом.

**Пример.** Найти экстремум функции

$$z = x^2 + y^2 \tag{1'}$$

при условии

$$x + y - 1 = 0. \tag{2'}$$

◀ Из уравнения связи (2′) находим $y = 1 - x$. Подставляя это значение $y$ в (1′), получим функцию одного аргумента $x$:

$$z = x^2 + (1 - x)^2.$$

Исследуем ее на экстремум:

$$z' = 2x - 2(1 - x),$$

откуда $x = \frac{1}{2}$ — критическая точка; $z'' = 4 > 0$, так что $x = \frac{1}{2}$ $(y = \frac{1}{2})$ доставляет условный минимум функции $z$ (рис. 24). ▶

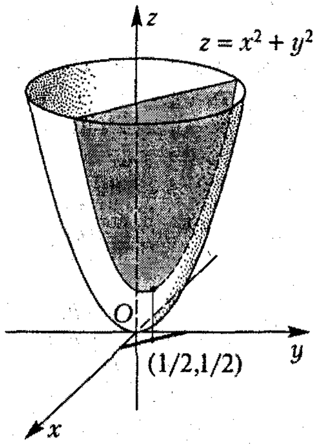


Рис. 24

Укажем другой способ решения задачи об условном экстремуме, называемый *методом множителей Лагранжа*.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ есть точка условного экстремума функции

$$z = f(x, y)$$

при наличии связи

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Допустим, что уравнение связи определяет единственную непрерывно дифференцируемую функцию

$$y = \psi(x)$$

в некоторой окрестности точки $x_0$. Считая, что

$$y = \psi(x),$$

получаем, что производная по $x$ от функции $f\big(x, \psi(x)\big)$ в точке $x_0$ должна быть равна нулю или, что равносильно этому, должен быть равен нулю дифференциал от $f(x, y)$ в точке $M_0$:

$$(df)\big|_{M_0} = \left(f'_x\,dx + f'_y\,dy\right)\big|_{M_0} = 0. \tag{4}$$

Из уравнения связи имеем

$$(d\varphi)\big|_{M_0} = \left(\varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy\right)\big|_{M_0} = 0. \tag{5}$$

Умножая последнее равенство на неопределенный пока числовой множитель $\lambda$ и складывая почленно с равенством (4), будем иметь

$$\left(f'_x + \lambda\varphi'_x\right)\big|_{M_0}\,dx + \left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\big|_{M_0}\,dy = 0.$$

Предположим, что значение множителя $\lambda$ выбрано следующим образом:

$$\boxed{\left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\big|_{M_0} = 0} \tag{6}$$

(считаем, что $\varphi'_y \neq 0$). Тогда в силу произвольности $dx$ получим

$$\boxed{\left(f'_x + \lambda\varphi'_x\right)\big|_{M_0} = 0.} \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) выражают *необходимые условия* безусловного экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции

$$\boxed{F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),}$$

которая называется *функцией Лагранжа*.

Таким образом, точка условного экстремума функции $f(x, y)$, если $\varphi(x, y) = 0$, есть обязательно стационарная точка функции Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где $\lambda$ — некоторый числовой коэффициент. Отсюда получаем *правило для отыскания условных экстремумов*:

---

***чтобы найти точки, которые могут быть точками условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$:***

1) ***составляем функцию Лагранжа***

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y);$$

2) ***приравнивая нулю производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ этой функции и присоединяя к полученным уравнениям уравнение связи, получаем систему из трех уравнений***

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

***из которой находим значения $\lambda$ и координаты $x$, $y$ возможных точек экстремума.***

---

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dy^2$$

для рассматриваемой системы значений $x_0$, $y_0$, $\lambda$, полученной из (8) при условии, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = 0 \quad \left((dx)^2 + (dy)^2 \neq 0\right).$$

Если $d^2F < 0$, то в точке $(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ имеет условный максимум; если $d^2F > 0$ — то условный минимум. В частности, если в стационарной точке $(x_0, y_0)$ определитель $D$ для функции $F(x, y)$ положителен,

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{xy}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

то в точке $(x_0, y_0)$ имеется условный максимум функции $f(x, y)$, если

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad (C = F''_{yy}(x_0, y_0) < 0),$$

и условный минимум функции $f(x, y)$, если

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad (C = F''_{yy}(x_0, y_0) > 0).$$

**Пример.** Вновь обратимся к условиям предыдущего примера: найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y = 1$.

◀ Будем решать задачу методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$F(x, y; \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Для отыскания стационарных точек составляем систему

$$\begin{cases} F'_x \equiv 2x + \lambda = 0, \\ F'_y \equiv 2y + \lambda = 0, \\ F'_\lambda \equiv x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы получаем, что $x = y$. Затем из третьего уравнения системы (уравнения связи) находим, что $x = y = \frac{1}{2}$ — координаты точки возможного экстремума. При этом оказывается, что $\lambda = -1$. Таким образом, функция Лагранжа

$$F(x, y; -1) = x^2 + y^2 - x - y + 1.$$

Для нее $F''_{xx} = 2$, $F''_{yy} = 2$, $F''_{xy} = 0$, так что

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

и $F''_{xx} = 2 > 0$, т. е. точка $M_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ есть точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$. ▶

Отсутствие безусловного экстремума для функции Лагранжа $F(x, y)$ еще не означает отсутствия условного экстремума для функции $f(x, y)$ при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$.

**Пример.** Найти экстремум функции $z = xy$ при условии $y - x = 0$.

◀ Составляем функцию Лагранжа

$$F(x, y; \lambda) = xy + \lambda(y - x)$$

и выписываем систему для определения $\lambda$ и координат возможных точек экстремума:

$$\begin{cases} F'_x \equiv y - \lambda = 0, \\ F'_y \equiv x + \lambda = 0, \\ F'_\lambda \equiv y - x = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем $x + y = 0$ и приходим к системе

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = 0, \end{cases}$$

откуда $x = y = \lambda = 0$. Таким образом, соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y; 0) = xy.$$

В точке $(0, 0)$ функция $F(x, y; 0)$ не имеет безусловного экстремума, однако условный экстремум функции $z = xy$, когда $y = x$, имеется. Действительно, в этом случае $z = x^2$. Отсюда видно, что в точке $(0, 0)$ есть условный минимум. ▶

Метод множителей Лагранжа переносится на случай функций любого числа аргументов.

Пусть ищется экстремум функции

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при наличии уравнений связи

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $m < n$. Составляем функцию Лагранжа

$$\boxed{\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — неопределенные постоянные множители. Приравнивая нулю все частные производные первого порядка от функции $F$ и присоединяя к полученным уравнениям уравнения связи (9), получим систему $n + m$ уравнений, из которых определяем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ возможных точек условного экстремума. Вопрос о том, являются ли найденные по методу Лагранжа точки действительно точками условного экстремума зачастую может быть решен на основании соображений физического или геометрического характера.

## 15.3. Наибольшее и наименьшее значения непрерывных функций

Пусть требуется найти наибольшее (наименьшее) значение функции $z = f(x, y)$, непрерывной в некоторой замкнутой ограниченной области $\overline{D}$. По теореме 3 в этой области найдется точка $(x_0, y_0)$, в которой функция принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если точка $(x_0, y_0)$ лежит внутри области $D$, то в ней функция $f$ имеет максимум (минимум), так что в этом случае интересующая нас точка содержится среди критических точек функции $f(x, y)$. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x, y)$ может достигать и на границе области. Поэтому, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение, принимаемое функцией $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, нужно найти все максимумы (минимумы) функции, достигаемые внутри этой области, а также наибольшее (наименьшее) значение функции на границе этой области. Наибольшее (наименьшее) из всех этих чисел и будет искомым наибольшим (наименьшим) значением функции $z = f(x, y)$ в области $\overline{D}$. Покажем, как это делается в случае дифференцируемой функции.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2$$

в области $\overline{D}\{-1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

◄ Находим критические точки функции $z = x^2 + y^2$ внутри области $D$. Для этого составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv 2x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 2y = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $x = y = 0$, так что точка $O(0, 0)$ — критическая точка функции $z$. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

то в этой точке $AC - B^2 = 4 > 0$ и $A = 2 > 0$, и, значит, в точке $O(0, 0)$ функция $z = x^2 + y^2$ имеет минимум, равный нулю.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе $\Gamma$ области $D$. На части границы $\Gamma_1 = \{x = 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ имеем

$$z = 1 + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

так что $y = 0$ — критическая точка, и так как $\frac{d^2z}{dy^2} = 2 > 0$, то в этой точке функция $z = 1 + y^2$ имеет минимум, равный единице. На концах отрезка $\Gamma_1$, в точках $(1, -1)$ и $(1, 1)$, имеем

$$z(1, -1) = z(1, 1) = 2.$$

Пользуясь соображениями симметрии, те же результаты получаем для других частей границы $\Gamma_2 = \{y = 1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, $\Gamma_3 = \{x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и $\Gamma_4 = \{y = -1, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. Окончательно получаем: наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2$ в области $\overline{D}$ равно нулю и достигается оно во внутренней точке $O(0, 0)$ области, а наибольшее значение этой функции, равное двум, достигается в четырех точках границы $M_1(1, -1)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(-1, 1)$, $M_4(-1, -1)$ (рис. 25). ▶

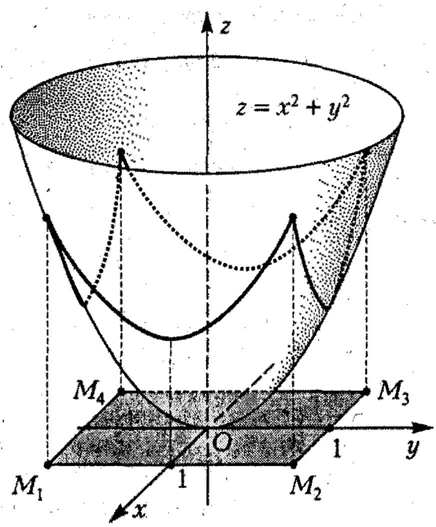


Рис. 25

## Упражнения

Найдите область определения функций:

**1.** $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$. **2.** $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$. **3.** $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

**4.** $z = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{y}$. **5.** $z = \ln(x^2 + y)$. **6.** $z = xy + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2} + \sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2 + y^2}}$.

**7.** $z = \operatorname{ctg}\pi(x + y)$. **8.** а) $z = \sqrt{\sin x \cdot \sin y}$; б) $z = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\sin y - 1}$.

Постройте линии уровня функций:

**9.** а) $z = x + y$; б) $z = x^2 + y^2$. **10.** а) $z = \frac{y}{x^2}$; б) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$.

**11.** а) $z = \ln(x^2 + y)$; б) $z = \arcsin xy$.

Найдите поверхности уровня функций трех независимых переменных:

**12.** $u = x + y + z$. **13.** $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Вычислите пределы функций:

**14.** а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. **15.** а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(xy)}{xy}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$.

**16.** а) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k\ (k = \mathrm{const})}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$. **17.** а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$.

**18.** Покажите, что функция $z = \frac{x + y}{x - y}$ при $x \to 0$, $y \to 0$ предела не имеет. Рассмотрите поведение функции на прямых $y = kx$.

Укажите множества точек разрыва следующих функций:

**19.** а) $z = \frac{2}{x^2 + y^2}$; б) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. **20.** а) $z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$; б) $z = \frac{1}{(x - y)^2}$.

**21.** а) $z = \cos\frac{1}{xy}$; б) $z = xy$. **22.** $z = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

Найдите частные производные функций и их полные дифференциалы:

**23.** $z=x^3+y^2-2xy$. **24.** $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. **25.** $z=e^{-\frac{x}{y}}$. **26.** $z=\ln(x+\ln y)$.

**27.** $u=xy+yz+xz$. **28.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **29.** $z=\operatorname{ch}(x^2y+\operatorname{sh}y)$. **30.** $u=x^{yz}$.

Найдите производные сложных функций:

**31.** а) $z=x^2+xy+y^2$, где $x=t^2$, $y=t$. Найдите $\frac{dz}{dt}$. б) $z=\frac{y}{x}$, где $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$. Найдите $\frac{dz}{dt}$.

**32.** а) $z=xe^y$, где $y=\operatorname{arctg}x$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$. б) $z=\ln(x^2-y^2)$, где $y=e^x$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$.

**33.** а) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, где $x=u\sin v$, $y=u\cos v$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. б) $z=x^2+y^2$, где $x=u+v$, $y=u-v$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

**34.** Используя формулу производной сложной функции двух переменных, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функций: а) $z=f(u)$, где $u=\arcsin xy+\frac{x}{y}$, б) $z=f(u)$, где $u=\sin\frac{x}{y}+e^{\operatorname{tg}xy}$.

**35.** Используя формулу производной сложной функции двух переменных, найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функций: а) $z=f(u,v)$, где $u=x^2\ln y$, $v=\arcsin\frac{x}{y}$. б) $z=f(u,v)$, где $u=e^{x^2+\cos y}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Найдите $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных неявно:

**36.** $x^2+y^2+\ln(x^2+y^2)=a^2$. **37.** $\ln\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}=b$.

**38.** $x^2y+\arcsin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=0$. **39.** $y^x=x^y$.

**40.** Найдите угловой коэффициент касательной кривой $x^2+y^2=10y$ в точке пересечения ее с прямой $x=3$.

**41.** Найдите точки, в которых касательная кривой $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ параллельна оси $Ox$.

В следующих задачах найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

**42.** $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

**43.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Напишите уравнения касательной плоскости и нормали поверхности:

**44.** $z=x^2+2y^2$ в точке $(1,1,3)$.

**45.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $(x_0,y_0,z_0)$.

**46.** $z=\sin x\cos y$ в точке $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**47.** $z=x^2+y^2+2xy$ в точке $(1,1,4)$.

**48.** $x^2+y^2+xyz-3=0$ в точке $(1,1,1)$.

**49.** Составьте уравнения касательных плоскостей поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$, параллельных плоскости $x+4y+6z=0$.

Найдите три–четыре первых члена разложения по формуле Тейлора:

**50.** $f(x,y)=e^x\cos y$ в окрестности точки $(0,0)$.

**51.** $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ в окрестности точки $(0,0)$.

**52.** $f(x,y)=x^y$ в окрестности точки $(1,1)$.

**53.** $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$ в окрестности точки $(0,0)$.

**54.** $f(x,y)=e^{x+y}$ в окрестности точки $(1,-1)$.

Пользуясь определением экстремума функции, исследуйте на экстремум следующие функции:

**55.** $z = 1 - (x-2)^4 - (y-3)^4$ в точке $(2,3)$.

**56.** $z = (x-2)^4 + (y-3)^4$ в точке $(2,3)$.

**57.** $z = x^4 - y^4$ в точке $(0,0)$.

**58.** $z = \sin^4 x - (y-1)^4$ в точке $(0,1)$.

Используя достаточные условия экстремума функции двух переменных, исследуйте на экстремум функции:

**59.** $z = 2y - x^2 - y^2$. **60.** $z = x^2 - 2x + y^2$. **61.** $z = 2xy - 4x - 2y$.

**62.** $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. **63.** $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

**64.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

**65.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2y(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

**66.** Определите размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объем равен $V$.

**67.** Найдите размеры прямоугольного параллелепипеда, имеющего при данной полной поверхности $S$ максимальный объем.

## Ответы

**1.** $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0 \end{cases}$. **2.** Квадрат, образованный отрезками прямых $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$, включая его стороны. **3.** Семейство концентрических колец $2\pi k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (2k+1)\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ . **4.** Вся плоскость за исключением точек прямых $y = x$ и $y = 0$. **5.** Часть плоскости, расположенная выше параболы $y = -x^2$. **6.** Точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$. **7.** Вся плоскость за исключением прямых $x + y = n$, $n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$ . **8.** а) Подкоренное выражение неотрицательно в двух случаях $\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \sin y \geqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x \leqslant 0 \\ \sin y \leqslant 0, \end{cases}$ что равносильно бесконечной серии неравенств $\begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 2m\pi \leqslant y \leqslant (2m+1)\pi, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$ и $\begin{cases} (2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ (2m-1)\pi \leqslant y \leqslant 2m\pi, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$ соответственно. Область определения — заштрихованные квадраты (рис. 26);

б) $\begin{cases} \sin x - 1 = 0, \\ \sin y - 1 = 0, \end{cases}$ что равносильно бесконечной серии $\begin{cases} x_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ y_m = \dfrac{\pi}{2} + 2m\pi, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{cases}$

Функция определена в точках $M_{km} = (x_k, y_m)$.

**9.** а) Прямые, параллельные прямой $x + y = 0$; б) концентрические окружности с центром в начале координат. **10.** а) параболы $y = Cx^2$; б) параболы $y = C\sqrt{x}$. **11.** а) параболы $y = C - x^2$ $(C > 0)$; б) гиперболы $xy = C$, где $|C| \leqslant 1$. **12.** Плоскости $x + y + z = c$. **13.** При $u > 0$ — однополостные гиперболоиды вращения вокруг оси $Oz$; при $u < 0$ — двуполостные гиперболоиды вращения вокруг оси $Oz$, оба семейства поверхностей разделяет конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **14.** а) $-\frac{1}{4}$; б) 0. **15.** а) 1; б) 2. **16.** а) $e^k$; б) 0. **17.** а) Предела не существует; б) 0. **18.** Положим $y = kx$, тогда $z = \frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k}$, $x \neq 0$. При $k = -1$ имеем $\lim\limits_{x \to 0} z = 0$, при $k = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x \to 0} z = 3$, а при $k = 3$ $\lim\limits_{x \to 0} z = -2$, так что заданная функция в точке (0,0) предела не имеет. **19.** а) Точка (0,0); б) точка (0,0). **20.** а) Линия разрыва — окружность $x^2 + y^2 = 1$; б) линия разрыва — прямая $y = x$. **21.** а) Линии разрыва — координатные оси $Ox$ и $Oy$; б) $\varnothing$ (пустое множество). **22.** Все точки $(m, n)$, где $m$ и $n$ — целые числа. **23.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2x$; $dz = (3x^2 - 2y)\,dx + 2(y - x)\,dy$. **24.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$; $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$. **25.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y}e^{-x/y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-x/y}$; $dz = \frac{e^{-x/y}}{y^2}(-y\,dx + x\,dy)$. **26.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \ln y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(x + \ln y)}$; $dz = \frac{y\,dx + dy}{y(x + \ln y)}$. **27.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y + z$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$;

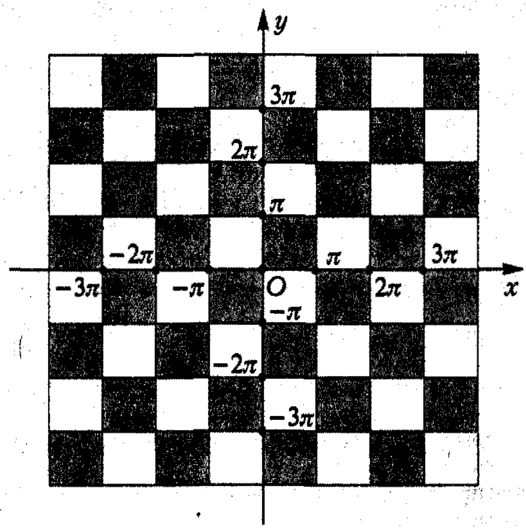


Рис. 26

$du = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$. **28.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $du = \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **29.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sh}(x^2y+\operatorname{sh}y)2xy$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{sh}(x^2y+\operatorname{sh}y)(x^2+\operatorname{ch}y)$; $dz = \operatorname{sh}(x^2y+\operatorname{sh}y)\left[2xy\,dx+(x^2+\operatorname{ch}y)\,dy\right]$. **30.** $du = x^{yz-1}[yz\,dx+xz\ln x\,dy+xy\ln x\,dz]$. **31.** а) $4t^3+3t^2+2t$; б) $-2\operatorname{ch}t$. **32.** а) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y$; $\frac{dz}{dx} = e^y\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2-y^2}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$. **33.** а) $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$; б) $\frac{\partial z}{\partial u} = 4u$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 4v$. **34.** а) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\left[\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{1}{y}\right]$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}-\frac{x}{y^2}\right]$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\left[\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}+e^{\operatorname{tg}xy}\frac{1}{\cos^2 xy}y\right]$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\left[-\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y^2}+e^{\operatorname{tg}xy}\frac{1}{\cos^2 xy}x\right]$. **35.** а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}2xy+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}x^2-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\frac{x}{y}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}e^{x^2+\cos y}2x-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u}e^{x^2+\cos y}\sin y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$. **36.** $y' = -\frac{x}{y}$. **37.** $y' = \frac{y}{x}$. **38.** $y' = \frac{\left(2xy\sqrt{y^2-x^2}+1\right)y^2}{(1-x^2y^2)\sqrt{y^2-x^2}+xy}$. **39.** $y' = \frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{xy^{x-1}-x^y\ln x}$. **40.** В точке $M_1(3,1)$, $y' = 3/4$; в точке $M_2(3;9)$, $y' = -3/4$. **41.** $M_1(-1,3)$; $M_2(-1,-1)$. **42.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. **43.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$. **44.** $2x+4y-z = 3$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$. **45.** $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2} = 1$; $\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$. **46.** $x-y-2z+1 = 0$; $\frac{x-\pi/4}{1} = \frac{y-\pi/4}{-1} = \frac{z-1/2}{-2}$. **47.** $4x+4y-z-4 = 0$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-1}$. **48.** $3x+3y+z-7 = 0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$. **49.** $x+4y+6z+21 = 0$; $x+4y+6z-21 = 0$. **50.** $1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\frac{1}{6}(x^3-3xy^2)$. **51.** $y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$. **52.** $1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$. **53.** **Указание:** воспользоваться формулой $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$; получим $x-y-\frac{1}{3}(x^3-y^3)+\frac{1}{5}(x^5-y^5)$. **54.** $1+[(x-1)+(y+1)]+\frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!}+\frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!} = 1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}$. **55.** $z_{\max} = 1$. **56.** $z_{\min} = 0$. **57.** Нет экстремума. **58.** Нет экстремума. **59.** $z_{\max} = 1$ в точке $(0,1)$. **60.** $z_{\min} = -1$ в точке $(1,0)$. **61.** Нет экстремума. **62.** $z_{\min} = 0$ в точке $(1,\frac{1}{2})$. **63.** $z_{\min} = -\frac{2}{e}$ в точке $(-2,0)$. **64.** Наибольшее значение $z = 1$ в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$; наименьшее значение $z = -1$ в точках $(0,1)$ и $(0,-1)$. **65.** Наибольшее значение $z = 4$ в точке $(2,1)$, наименьшее значение $z = -64$ в точке $(4,2)$. **66.** $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **67.** Куб со стороной $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Глава XVI

# ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## § 1. Плоские кривые. Способы задания. Естественная параметризация

Наглядный геометрический объект — плоская кривая — при точных определениях приводит к нескольким различным, хотя и близким понятиям. Плоскую кривую можно понимать и как некоторое множество точек на плоскости и как множество точек плоскости вместе с очередностью их прохождения — *ориентацией*. Приведем два наиболее распространенных подхода к определению того, что представляет собой плоская кривая.

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат $Oxy$.

**Определение 1 (неявный способ задания).** *Плоской кривой* называется множество $\gamma$ точек $M$ плоскости, координаты $x$ и $y$ которых при подстановке в уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

обращают его в тождество.

**Пример 1.** Уравнение

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \text{где } a > 0,$$

задает окружность радиуса $a$ с центром в точке $O(0, 0)$ (рис. 1).

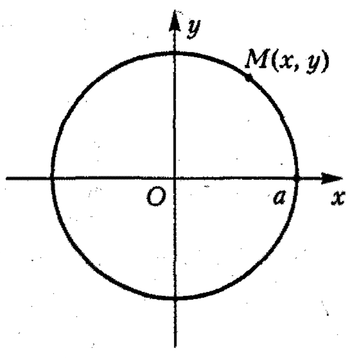

Рис. 1

Другим распространенным способом задания плоской кривой является *параметрический способ задания*.

**Определение 2.** *Параметризованной плоской кривой* называется множество $\gamma$ точек $M$ плоскости, координаты $x$ и $y$ которых определяются соотношениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.

**Пример 2.**

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

— параметрические уравнения окружности радиуса $a$ с центром в точке $O(0, 0)$. При изменении параметра $t$ от 0 до $2\pi$ соответствующая точка обегает окружность против часовой стрелки.

Данное определение допускает естественную физическую интерпретацию. Если воспринимать параметр $t$ как время, то параметрически заданную кривую можно рассматривать как след движущейся точки $M(x, y)$, координаты которой изменяются со временем по правилу (2). При этом вовсе не исключается случай, когда при своем движении переменная точка $M$ в некоторый момент $t^*$ может вновь оказаться там, где ранее (в момент $t_*$, $t_* < t^*$) она уже находилась:

$$\varphi(t_*) = \varphi(t^*), \quad \psi(t_*) = \psi(t^*)$$

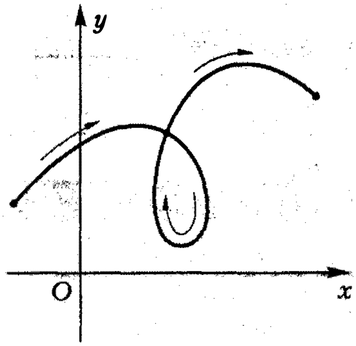


Рис. 2

(рис. 2). Геометрически это одна и та же точка. Однако вследствие того, что в рассматриваемом процессе мы попадаем в нее дважды в разные моменты времени, это две *разные* точки кривой, задаваемой параметрическими уравнениями (2).

**Замечание.** Строго говоря, определения 1 и 2 вводят в рассмотрение разные объекты. Поэтому для того, чтобы не впасть в заблуждение, нужно ясно представлять, в каком именно смысле рассматривается задаваемая кривая.

Пусть кривая $\gamma$ задана параметрическими уравнениями (2) (рис. 3). Точка $A(\varphi(a), \psi(a))$ называется *начальной точкой* этой кривой, а точка $B(\varphi(b), \psi(b))$ — *конечной точкой* кривой $\gamma$. Кривая $\gamma$ называется *замкнутой*, если ее начальная и конечная точки совпадают (рис. 4).

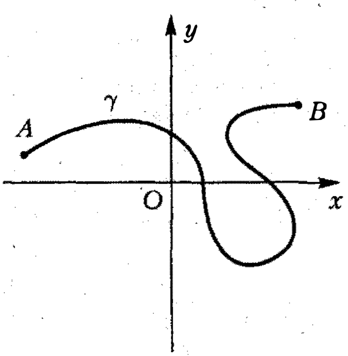


Рис. 3

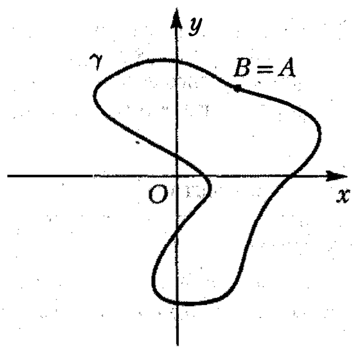


Рис. 4

Одно и то же множество точек на плоскости можно задавать при помощи различных параметрических уравнений.

**Пример 3.** Уравнения

$$x = a\cos(2\pi\tau^3), \quad y = a\sin(2\pi\tau^3), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{4}$$

задают окружность радиуса $a$, обходимую в положительном направлении. Легко видеть, что, положив в формулах (3) $t = 2\pi\tau^3$, мы приходим к соотношениям (4). ►

---

**Определение.** Функция

$$t = h(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta, \tag{5}$$

подчиненная условиям:

а) $h(\tau)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$;

б) $h(\tau)$ строго возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$;

в) область значения функции $h(\tau)$ — отрезок $[a, b]$,

называется *непрерывной заменой параметра* кривой $\gamma$ (рис. 5).

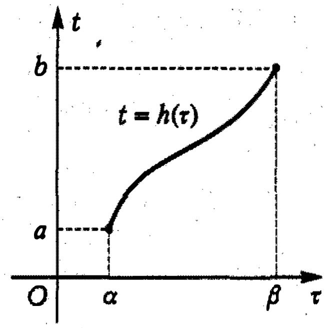

Рис. 5

---

Заменяя в формулах (2) параметр $t$ на функцию $h(\tau)$, получаем уравнения

$$x = \varphi(h(\tau)), \quad y = \psi(h(\tau)), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,$$

— *другую* параметризацию кривой $\gamma$.

Любую кривую можно параметризовать многими различными способами.

---

**Определение 3.** Плоская кривая $\gamma$ называется *$n$-гладкой относительно параметризации*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ принадлежит классу $C^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Если порядок $n$ гладкости функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ несуществен, то говорят просто о *гладкой* кривой.

---

**Пример 4.** Кривая $\gamma$, заданная уравнениями

$$x = t^3|t|, \quad y = t^3|t|, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

является 3-гладкой (рис. 6а).

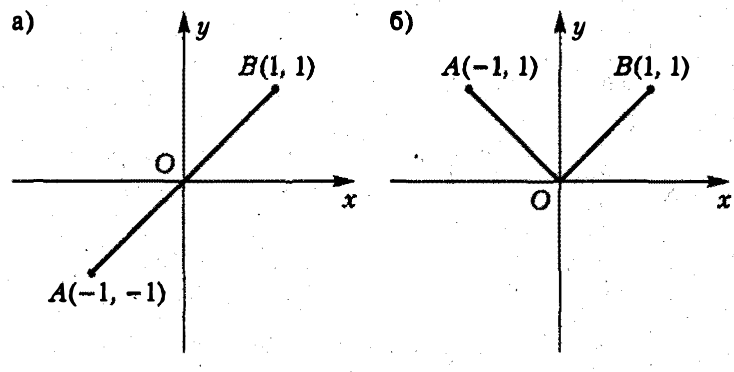

Рис. 6

**Пример 5.** Кривая $\gamma$, заданная уравнениями

$$x = t^3, \quad y = t^2|t|, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

является 2-гладкой. Однако множество точек на плоскости, описываемое этими уравнениями, имеет в точке $O$ (при $t = 0$) особенность — излом (рис. 6б). Это означает, что гладкость функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, задающих кривую, не обеспечивает плавного ее изменения. Отметим, что производные

$$\varphi'(t) = 3t^2, \quad \psi'(t) = 3t|t|$$

этих функций при $t = 0$ одновременно обращаются в нуль.

Точка $M_0$ гладкой кривой $\gamma$, отвечающая значению $t_0$ параметра, $M_0 = M_0(t_0)$, в которой

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad \psi'(t_0) = 0,$$

называется *особой точкой* этой кривой (относительно заданной параметризации). Точка $M_0(t_0)$ гладкой кривой $\gamma$, в которой

$$\left[\varphi'(t_0)\right]^2 + \left[\psi'(t_0)\right]^2 > 0,$$

называется *обыкновенной*, или *регулярной*, точкой этой кривой.

**Пример 6.** Все точки окружности (3) являются регулярными.

**Пример 7.** У кривой, задаваемой уравнениями

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

(астроида) четыре особых точки (при $t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$) (рис. 7).

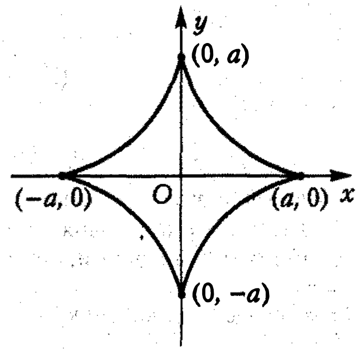


Рис. 7

**Определение 4.** Гладкая плоская кривая $\gamma$ называется *регулярной* относительно заданной параметризации, если все ее точки являются регулярными, т. е.

$$\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 > 0$$

на отрезке $[a, b]$.

Последнее неравенство означает, что *скорость*

$$\boxed{\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}}$$

кривой $\gamma$ относительно заданной параметризации не обращается в нуль ни в одной точке кривой. При изменении параметра $t$ текущая точка $M(t)$ перемещается по регулярной кривой $\gamma$, нигде не останавливаясь и не поворачивая вспять, поскольку скорость регулярной кривой ни при каких значениях параметра не обращается в нуль.

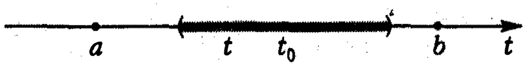


Рис. 8

Пусть $\gamma$ — регулярная кривая, заданная параметрически. Обозначим через $M_0$ точку кривой $\gamma$, отвечающую значению $t_0$ параметра, а через $M$ — точку кривой $\gamma$, отвечающую значению $t$ параметра из некоторой окрестности точки $t_0$ (рис. 8, 9).

Прямая $M_0T$ называется *касательной* регулярной кривой $\gamma$ в точке $M_0$, если при $M \to M_0$ (или, что то же, $t \to t_0$) наименьший $\Delta\theta$ из углов между этой прямой и переменной прямой $M_0M$ стремится к нулю (рис. 9). Регулярная кривая имеет касательную в каждой своей точке. Вектор скорости кривой в точке $M_0$ $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ коллинеарен ее касательной в этой точке.

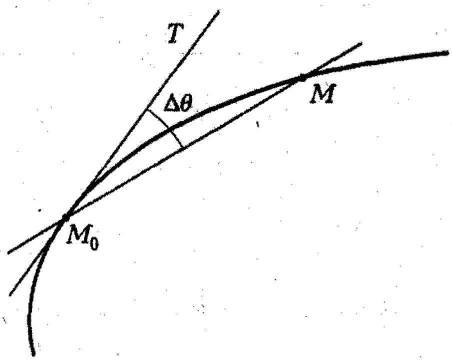


Рис. 9

Прямая, проходящая через точку $M_0$ перпендикулярно касательной кривой $\gamma$ в этой точке, называется *нормалью* кривой в точке $M_0$.

Замена параметра

$$t = h(\tau), \quad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta,$$

называется *регулярной*, если $h'(\tau) > 0$ во всех точках отрезка $[\alpha, \beta]$.

В случае неявного задания (1) кривая $\gamma$ будет *регулярной*, если в каждой ее точке $M(x, y)$ выполняется неравенство

$$\boxed{[F_x(x,y)]^2 + [F_y(x,y)]^2 > 0.}$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$ неявно заданной кривой $\gamma$ называется *особой*, если в этой точке

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) = 0. \tag{6}$$

**Пример 8.** Кривая, заданная уравнением

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$$

(*лемниската Бернулли*), имеет одну особую точку $O(0,0)$ — узел (рис. 10).

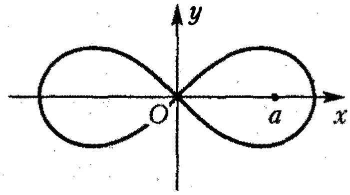

Рис. 10

Различают несколько типов особых точек.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — особая точка кривой $\gamma$,

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Введем следующие обозначения

$$A = F_{xx}(x_0, y_0), \quad B = F_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F_{yy}(x_0, y_0)$$

и

$$\Delta = AC - B^2.$$

1. $\Delta > 0 \Rightarrow M_0$ — *изолированная точка.*

**Пример 9.**

$$F(x,y) \equiv (x^2+y^2)(x-1) = 0$$

(рис. 11).

◀ В точке $M_0(0,0)$ имеем:

$$F(0,0) = 0, \quad F_x(0,0) = 0, \quad F_y(0,0) = 0; \quad A = -2, \quad B = 0, \quad C = -2; \quad \Delta = 4 > 0. \ ▶$$

2. $\Delta < 0 \Rightarrow M_0$ — *двойная точка (узел).*

**Пример 10.**

$$F(x,y) \equiv x^2 - y^2 = 0$$

(рис. 12).

◀ В точке $M_0(0,0)$ имеем:

$$F(0,0) = 0, \quad F_x(0,0) = 0, \quad F_y(0,0) = 0; \quad A = 2, \quad B = 0, \quad C = -2; \quad \Delta = -4 < 0. \ ▶$$

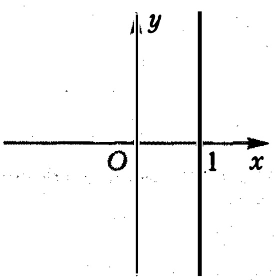

Рис. 11

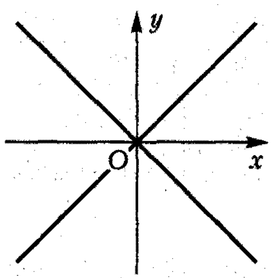

Рис. 12

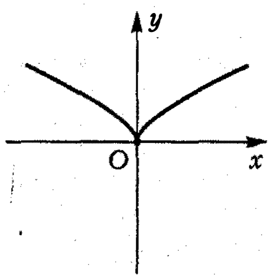

Рис. 13

3. Случай $\Delta = 0$ требует более детального исследования, так как характер особенности кривой при этом условии может быть разным.

**Пример 11.**

$$F(x,y) \equiv x^2 - y^3 = 0$$

(рис. 13).

$$◀ \; F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0;$$
$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad \Delta = 0.$$

Точка $M_0(0,0)$ — *точка возврата первого рода.* ▶

**Пример 12.**

$$F(x,y) \equiv 2x^2 + y^5 - 3x\sqrt{y^5} = 0$$

(рис. 14).

$◀ \; F(0,0) = F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0; \quad A = 2, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad \Delta = 0.$

Точка $M_0(0,0)$ — *точка возврата второго рода.* ▶

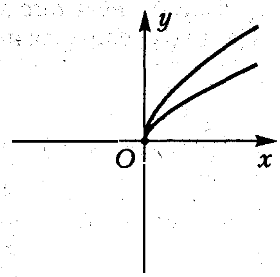


Рис. 14

Гладкая (тем более регулярная) кривая спрямляема.

Длина кривой $\gamma$, заданной уравнениями (2), вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.}$$

Значение функции

$$\boxed{s(t) = \int_a^t \sqrt{[\varphi'(\xi)]^2 + [\psi'(\xi)]^2}\, d\xi}$$

равно длине переменной дуги кривой $\gamma$, заключенной между точками $A(a)$ и $M(t)$ (рис. 15). Функция $s(t)$ на отрезке $[a, b]$ строго возрастает,

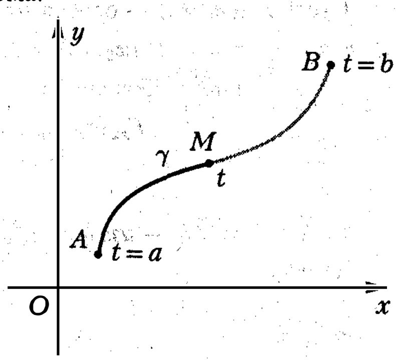


Рис. 15

$$\boxed{s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0,}$$

и является гладкой на отрезке $[a, b]$. Кроме того, область значений функции $s(t)$ совпадает с отрезком $[0, S]$. Тем самым, длину дуги можно взять за новый, ***естественный*** (***натуральный***) параметр кривой. Параметризация кривой, где в качестве параметра взята длина дуги $s$, называется ***естественной параметризацией***.

Если

$$\boxed{x = x(s), \quad y = y(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S}$$

— естественная параметризация кривой $\gamma$, то

$$\boxed{\sqrt{[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2} = 1.}$$

Поэтому естественно параметризованную кривую часто называют ***кривой с единичной скоростью***.

**Пример 13.** Параметризация

$$x = a\cos\frac{s}{a}, \quad y = a\sin\frac{s}{a}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi a,$$

окружности радиуса $a$ является естественной:

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = \sin^2\frac{s}{a} + \cos^2\frac{s}{a} = 1.$$

# §2. Кривизна плоской кривой. Радиус кривизны. Эволюта и эвольвента плоской кривой

Пусть $\gamma$ — регулярная кривая и $M_0$ — точка этой кривой.

**Определение.** *Кривизной* $k$ кривой $\gamma$ в точке $M_0$ называется предел отношения

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

при $M \to M_0$, где $\Delta\theta$ — наименьший угол между касательными к кривой $\gamma$ в точках $M_0$ и $M$, а $\Delta s$ — длина дуги $\smile M_0M$ (рис. 16).

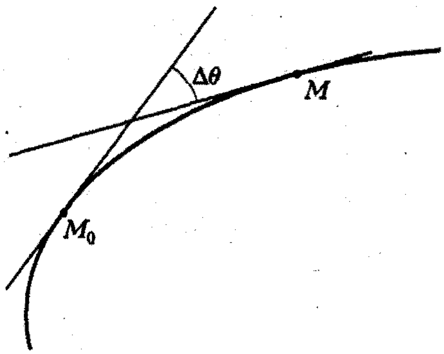

Рис. 16

Кривизна кривой характеризует скорость ее отклонения от касательной. Кривизна прямой равна нулю в каждой ее точке. Кривизна окружности постоянна и равна $\frac{1}{a}$, где $a$ — радиус окружности.

2-регулярная кривая имеет в каждой своей точке определенную кривизну. Если

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

— естественная параметризация кривой $\gamma$, то ее кривизна $k(s)$ может быть найдена по формуле

$$\boxed{k(s) = |x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|.}$$

В случае произвольной параметризации

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

имеем

$$\boxed{k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{3/2}}.}$$

При явном способе задания $y = y(x)$ —

$$\boxed{k(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(1 + [y'(x)]^2\right)^{3/2}}.}$$

**Пример 1.** Кривизна параболы $y = x^2$ в ее вершине $O(0,0)$ равна 2.

Кривизна плоской кривой по определению неотрицательна. Однако во многих случаях кривизне плоской кривой полезно отнести знак. Обычно выбор знака связывают с направлением вращения касательной к кривой при перемещении вдоль кривой при возрастании параметра:

«+»: кривизна кривой положительна, если касательная вращается против часовой стрелки (в положительном направлении);

«−»: кривизна кривой отрицательна, если касательная вращается по часовой стрелке (в отрицательном направлении) (рис. 17).

В этом смысле кривизна явно заданной кривой вычисляется по формуле

$$\boxed{k(x)=\frac{y''(x)}{\left(1+[y'(x)]^2\right)^{3/2}}.}$$

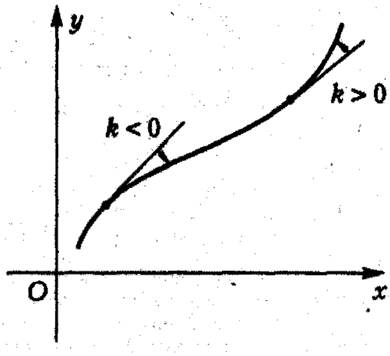


Рис. 17

**Пример 2.** Кривизна синусоиды $y=\sin x$

$$k(x)=-\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$$

положительна (равна 1) в точке $A\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ и отрицательна (равна $-1$) в точке $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ (рис. 18). В точке $O$ кривизна синусоиды равна нулю.

Если кривизна кривой в точке $M_0(t_0)$ отлична от нуля, то определен *радиус кривизны* кривой в этой точке

$$\boxed{R(t_0)=\frac{1}{k(t_0)}.}$$

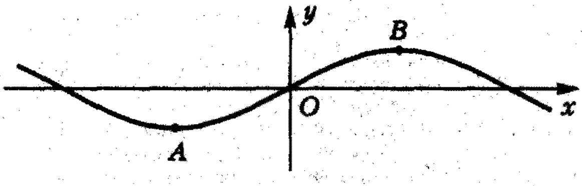


Рис. 18

Окружность радиуса $R(t_0)$, проходящая через точку $M_0(t_0)$, имеющая в этой точке с кривой $\gamma$ общую касательную и лежащая по ту же сторону от этой касательной, что и кривая $\gamma$, называется *соприкасающейся окружностью* кривой $\gamma$ в точке $M_0$, или *окружностью кривизны* (рис. 19). Ясно, что кривизны кривой и ее окружности кривизны в их общей точке совпадают. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны* кривой в точке $M_0$. Его координаты $a$ и $b$ вычисляются по формулам

$$\boxed{a=x(t_0)-\frac{y'(t_0)}{k(t_0)},\qquad b=y(t_0)+\frac{x'(t_0)}{k(t_0)}.}$$

**Пример 3.** Для параболы $y=x^2$ в ее вершине $O(0,0)$ имеем $R=\frac{1}{2}$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$. Поэтому окружность кривизны параболы в точке $O$ может быть задана уравнением

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(рис. 20).

*Эволютой* регулярной плоской кривой называется множество ее центров кривизны (рис. 21). Уравнения эволюты кривой $\gamma$, заданной параметрически,

$$x=x(t),\qquad y=y(t),$$

имеют следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x(t)-y'(t)\frac{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)},\\ y&=y(t)+x'(t)\frac{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}.\end{aligned}}$$

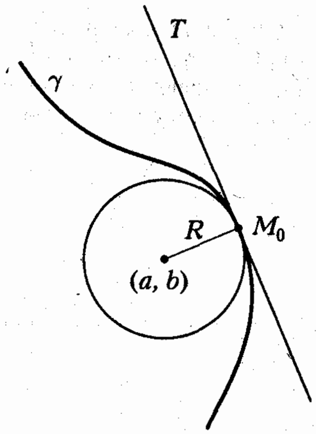


Рис. 19

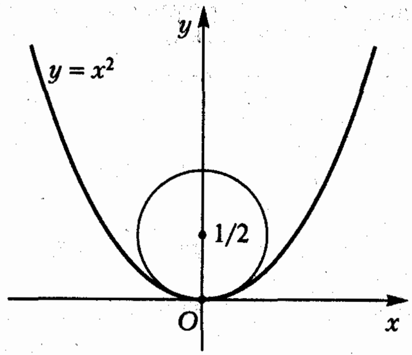


Рис. 20

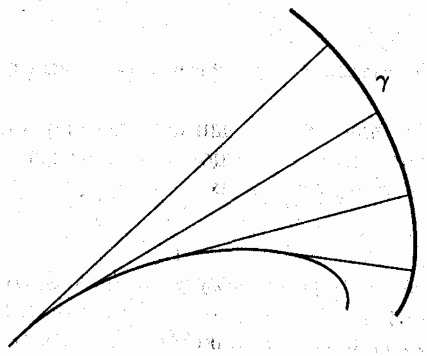


Рис. 21

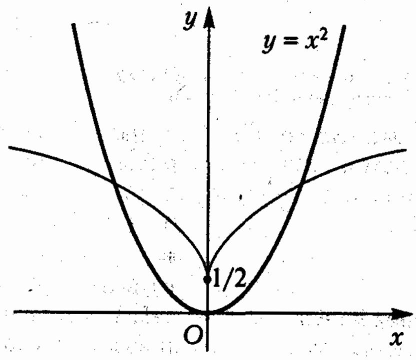


Рис. 22

**Пример 4.** Найти эволюту параболы

$$x = t, \quad y = t^2.$$

◀ Имеем

$$x = t - 2t \cdot \frac{1+4t^2}{2} = -4t^3,$$

$$y = t^2 + 1 \cdot \frac{1+4t^2}{2} = 3t^2 + \frac{1}{2}$$

или, что то же,

$$y = 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} + \frac{1}{2}$$

(рис. 22). ▶

**Пример 5.** Эволюта окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

состоит из одной точки — ее центра $O(0,0)$.

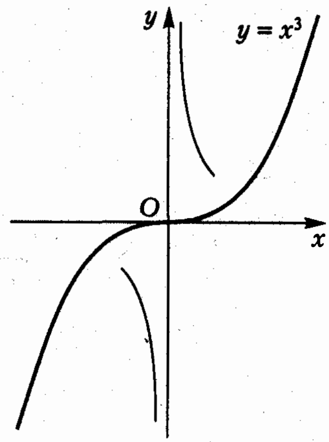


Рис. 23

Если кривизна $k(s)$ регулярной кривой $\gamma$ отлична от нуля и производная $k'(s)$ сохраняет знак вдоль кривой $\gamma$, то эволюта этой кривой состоит только из регулярных точек.

Если кривизна $k(s)$ регулярной кривой $\gamma$ равна нулю в некоторой точке кривой, $k(s_0) = 0$, а ее производная сохраняет знак вдоль кривой $\gamma$, то эволюта этой кривой распадается на две регулярные кривые, являющиеся эволютами частей кривой $\gamma$ при $s < s_0$ и при $s > s_0$. Каждая из этих ветвей уходит в бесконечность при $s \to s_0$.

**Пример 6.** Кривизна параболы $y = x^2$

$$k = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

в ее вершине $O(0,0)$ отлична от нуля, а производная кривизны

$$k' = -\frac{24x}{(1 + 4x^2)^{5/2}}$$

не сохраняет знака вдоль параболы. Поэтому эволюта параболы и имеет особенность — точку возврата первого рода (см. рис. 22).

**Пример 7.** Кривизна кубической параболы $y = x^3$

$$k = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}}$$

при $x = 0$ обращается в нуль, а ее производная

$$k' = \frac{6 - 270x^4}{(1 + 9x^4)^{5/2}}$$

в окрестности точки $O(0,0)$ сохраняет знак. Поэтому эволюта кубической параболы распадается на две регулярные ветви (рис. 23).

*Эвольвентой* кривой $\gamma$ называется кривая, для которой данная кривая $\gamma$ является эволютой. Эвольвента кривой $\gamma$ совпадает с множеством концов отрезков касательных к кривой $\gamma$, отложенных от точек касания, длины которых убывают на величину, равную приращению дуги кривой $\gamma$.

**Наглядный способ образования эвольвенты**

Отложим на кривой $\gamma$ от произвольной точки $M_0$ этой кривой дугу длины $c$. Обозначим второй конец дуги через $M$. Представим теперь, что на дугу $\smile M_0M$ наложена гибкая нерастяжимая нить, один из концов которой закреплен в точке $M_0$. При сматывании натянутой нити с кривой $\gamma$ (как с шаблона) второй ее конец $M$ опишет эвольвенту кривой $\gamma$ (рис. 24).

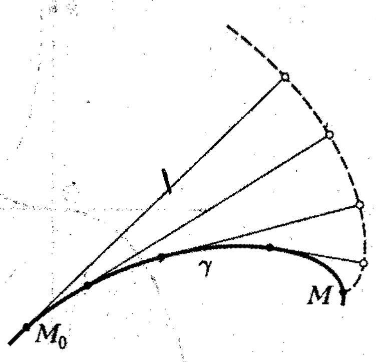


Рис. 24

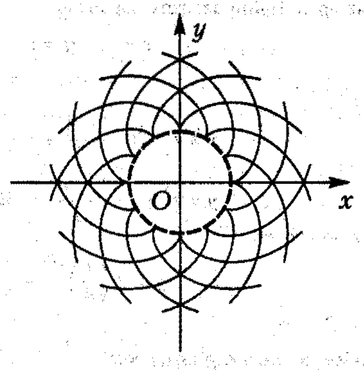


Рис. 25

Пусть

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

— естественная параметризация кривой $\gamma$. Тогда уравнения эвольвенты этой кривой имеют следующий вид

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(s) + (c - s)x'(s), \\ y &= y(s) + (c - s)y'(s), \end{aligned}}$$

где $c$ — произвольная постоянная. Тем самым, у любой регулярной кривой существует бесконечное число эвольвент.

**Пример 8.** Эвольвенты окружности

$$x^2 + y^2 = a^2$$

описываются уравнениями вида

$$x = a(\cos t + (t - c)\sin t),$$
$$y = a(\sin t - (t - c)\cos t),$$

где $c$ — параметр семейства эвольвент (рис. 25).

## § 3. Пространственные кривые. Способы задания

**Определение.** *Параметрически заданной пространственной кривой* называется множество $\gamma$ точек $M$, координаты $x$, $y$ и $z$ которых определяются соотношениями

$$x = \xi(t), \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad (1)$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ — функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$, или *в векторной форме*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

где $\mathbf{r}(t) = \big(\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\big)$ (рис. 26).

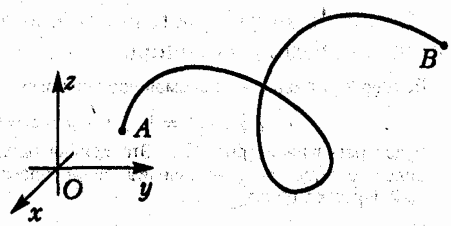


Рис. 26

Наглядно параметрически заданную кривую можно представлять как след движущейся точки $M$ с координатами $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$.

**Пример 1.**

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi,$$

— уравнения двух витков винтовой линии (рис. 27).

Точки $A$ и $B$ кривой $\gamma$, отвечающие значениям $t = a$ и $t = b$ параметра соответственно, называются *начальной* и *конечной точками* кривой $\gamma$. Кривая $\gamma$ называется *замкнутой*, если эти точки совпадают.

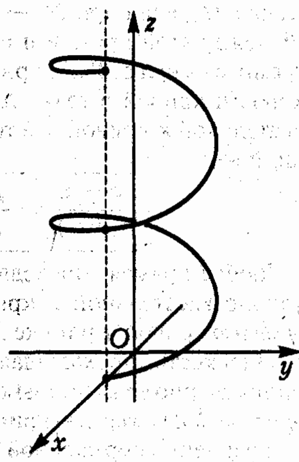


Рис. 27

Понятия гладкой и регулярной пространственной кривой вводятся в полном соответствии с плоским случаем: кривая $\gamma$, заданная параметрическим векторным уравнением

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,}$$

называется *n-регулярной*, если

1) векторная функция $\mathbf{r}(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные порядка $n$ и

2) скорость кривой

$$\boxed{|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[\xi'(t)]^2 + [\eta'(t)]^2 + [\zeta'(t)]^2}}$$

положительна в каждой точке.

Другим распространенным способом задания пространственной кривой является *неявный способ задания* кривой как множества точек $M$, координаты $x$, $y$ и $z$ которых являются решением системы уравнений

$$\boxed{\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}} \qquad (2)$$

где функции $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ подчиняются определенным условиям.

Укажем важный частный случай, наиболее часто встречающийся на практике: $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ являются гладкими функциями своих аргументов и в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выполнены условия:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0,z_0) & F_y(x_0,y_0,z_0) & F_z(x_0,y_0,z_0) \\ G_x(x_0,y_0,z_0) & G_y(x_0,y_0,z_0) & G_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix} = 2. \qquad (3)$$

Неявно заданная пространственная кривая, в каждой точке которой выполняется условие (3), будет регулярной.

**Пример 2.** Кривая, задаваемая уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0,$$

будет регулярной (рис. 28). Эта кривая представляет собой большую окружность — сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр.

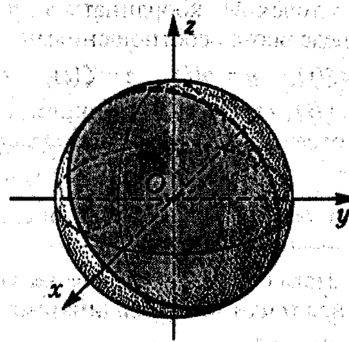


Рис. 28

Пусть $\gamma$ — регулярная кривая, заданная параметрически. Обозначим через $M_0$ точку кривой $\gamma$, отвечающую значению $t_0$ параметра, а через $M$ — точку кривой, отвечающую значению $t$ из некоторой окрестности $t_0$.

Прямая $M_0T$ называется *касательной* к кривой $\gamma$ в точке $M_0$, если при $M \to M_0$ наименьший из углов $\Delta\theta$ между этой прямой и переменной прямой $M_0M$ стремится к нулю. Регулярная кривая имеет касательную в каждой своей точке. Вектор скорости кривой в точке $M_0$ коллинеарен ее касательной в этой точке. Уравнения касательной к кривой $\gamma$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют следующий вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.}$$

Любая прямая, проходящая через точку $M_0$ перпендикулярно касательной к кривой $\gamma$ в точке $M_0$, называется *нормалью* кривой $\gamma$ в точке $M_0$.

Плоскость, проходящая через точку $M_0$ кривой $\gamma$ перпендикулярно ее касательной $M_0T$ в этой точке, называется *нормальной плоскостью* кривой в точке $M_0$ (рис. 29).

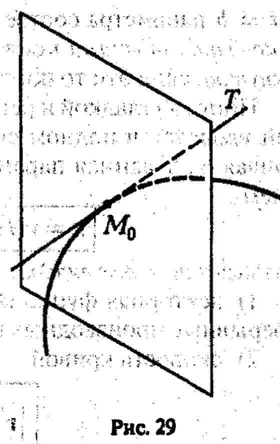


Рис. 29

Уравнение нормальной плоскости кривой, заданной параметрически, имеет следующий вид:

$$\boxed{x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.}$$

Ясно, что все нормали кривой в точке $M_0$ лежат в ее нормальной плоскости в этой точке.

**Пример 3.** Касательная и нормальная плоскость винтовой линии в точке $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b\pi}{4}\right)$ (при $t = \frac{\pi}{4}$) описываются уравнениями

$$\frac{x - \frac{a}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{z - b\frac{\pi}{4}}{b},$$

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + b\left(z - b\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

соответственно.

Регулярная пространственная кривая спрямляема. Длина кривой, заданной векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt.}$$

В случае координатного задания кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

имеем

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.}$$

Значение функции

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\xi)|\, d\xi = \int_a^t \sqrt{[x'(\xi)]^2 + [y'(\xi)]^2 + [z'(\xi)]^2}\, d\xi$$

равно длине дуги кривой $\gamma$, заключенной между точками $A(a)$ и $M(t)$ (рис. 30). Эта функция строго возрастает на отрезке $[a, b]$, причем

$$\boxed{s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| > 0.}$$

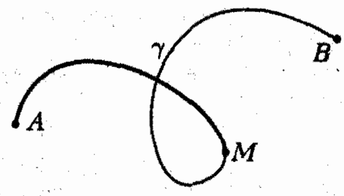


Рис. 30

Тем самым, длину дуги можно взять за новый параметр на кривой. Параметризация кривой, где в качестве параметра взята длина дуги $s$, называется *естественной параметризацией*. Кривая с естественной параметризацией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S$$

имеет единичную *скорость*

$$\boxed{|\mathbf{r}'(s)| = 1}$$

(относительно этой параметризации).

Для того, чтобы параметризация кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

была естественной, необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\mathbf{r}'(t)| = 1$$

или, что то же самое,

$$\boxed{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 1.}$$

**Пример 4.** Для винтовой линии имеем

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \xi + a^2 \cos^2 \xi + b^2}\, d\xi = \sqrt{a^2 + b^2}\, t.$$

Поэтому естественная параметризация винтовой линии может быть записана так

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, s.$$

# § 4. Кривизна и кручение пространственной кривой. Формулы Френе

Пусть $\gamma$ — регулярная кривая, $M_0$ — точка кривой $\gamma$, $\Pi$ — плоскость, проходящая через касательную $M_0T$ кривой $\gamma$ в точке $M_0$. Пусть $M$ — точка кривой $\gamma$, близкая к точке $M_0$, и $P$ — ортогональная проекция точки $M$ на плоскость $\Pi$ (рис. 31). Обозначим через $h$ длину отрезка $MP$ и через $d$ — длину отрезка $M_0M$. Плоскость $\Pi$ называется *соприкасающейся плоскостью* кривой $\gamma$ в точке $M_0$, если отношение

$$\frac{h}{d^2}$$

стремится к нулю при $M \to M_0$.

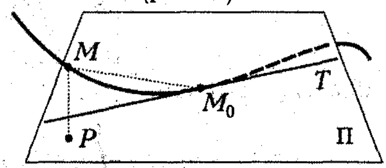

Рис. 31

**Геометрическое пояснение.** Среди всех плоскостей, проходящих через касательную к кривой в точке $M_0$, соприкасающаяся плоскость наиболее тесно примыкает к кривой в некоторой (малой) окрестности этой точки.

Пусть кривая $\gamma$ задана векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

и точка $M_0$ кривой $\gamma$ отвечает значению $t_0$ параметра. Если векторы $\mathbf{r}'(t_0)$ и $\mathbf{r}''(t_0)$ неколлинеарны, то в точке $M_0$ существует и притом ровно одна соприкасающаяся плоскость (рис. 32). Вектор $\mathbf{r}''(t_0)$ второй производной вектора $\mathbf{r}(t)$ кривой лежит в соприкасающейся плоскости. Поэтому соприкасающуюся плоскость кривой называют также *плоскостью ускорений*.

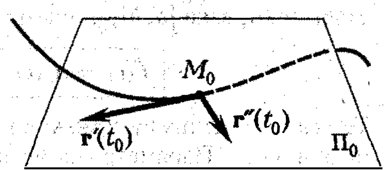

Рис. 32

Если кривая $\gamma$ задана в координатной форме

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то уравнение соприкасающейся плоскости записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Нормаль кривой $\gamma$ в точке $M_0$, лежащая в соприкасающейся плоскости $\Pi_0$ кривой в этой точке, называется *главной нормалью* кривой в точке $M_0$, а нормаль кривой $\gamma$, перпендикулярная соприкасающейся плоскости $\Pi_0$, называется *бинормалью* кривой $\gamma$ в точке $M_0$.

Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль кривой $\gamma$ в точке $M_0$, называется *спрямляющей плоскостью* кривой $\gamma$ в точке $M_0$.

**Пример 1.** Найти главную нормаль и бинормаль, соприкасающуюся и спрямляющую плоскости винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

в точке $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b\pi}{4}\right)$ (при $t = \frac{\pi}{4}$).

◄ Начнем с уравнения соприкасающейся плоскости. Имеем

$$\begin{vmatrix} x - a\frac{\sqrt{2}}{2} & y - a\frac{\sqrt{2}}{2} & z - b\frac{\pi}{4} \\ -a\frac{\sqrt{2}}{2} & a\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ -a\frac{\sqrt{2}}{2} & -a\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{ab\sqrt{2}}{2}\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{ab\sqrt{2}}{2}\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + a^2\left(z - b\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Так как бинормаль перпендикулярна соприкасающейся плоскости, то ее канонические уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{x - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{ab\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{ab\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - b\frac{\pi}{4}}{a^2}.$$

Вычислим теперь направляющий вектор главной нормали. Имеем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{2}}{2} & b \\ \frac{ab\sqrt{2}}{2} & -\frac{ab\sqrt{2}}{2} & a^2 \end{vmatrix} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2 + b^2\right)\mathbf{i} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2 + b^2\right)\mathbf{j}.$$

Заменяя найденный вектор на коллинеарный

$$\mathbf{i} + \mathbf{j},$$

получаем канонические уравнения главной нормали:

$$\frac{x - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y - a\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{z - b\frac{\pi}{4}}{0}.$$

Наконец,

$$1\cdot\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1\cdot\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

— уравнение спрямляющей плоскости, перпендикулярной главной нормали. ►

(Первой) *кривизной* $k_1$ кривой $\gamma$ в точке $M_0$ называется предел отношения

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

при $M \to M_0$, где $\Delta\theta$ — наименьший угол между касательными к кривой $\gamma$ в ее точках $M_0$ и $M$, а $\Delta s$ — длина дуги $\smile M_0M$ (рис. 33). Кривизна кривой измеряет скорость ее отклонения от касательной. Кривизна прямой равна нулю в каждой ее точке.

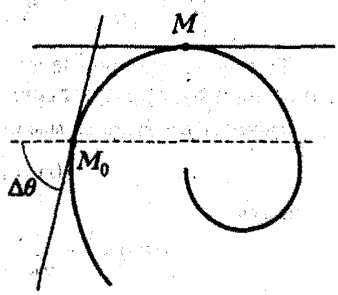

Рис. 33

Если

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

— естественная параметризация кривой $\gamma$, то ее кривизна $k_1$ вычисляется по формуле

$$\boxed{k_1(s) = \left|\mathbf{r}''(s)\right|.}$$

Вектор $\mathbf{r}''(s)$ называется *вектором кривизны* кривой. Он ортогонален единичному вектору касательной $\mathbf{r}'(s)$, а его длина равна кривизне кривой.

В случае произвольной параметризации

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

кривизна 2-регулярной кривой находится по формуле

$$\boxed{k_1(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.}$$

**Пример 2.** Вектор кривизны винтовой линии

$$\mathbf{r}(s) = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i} + a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j} + \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{k}$$

равен

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{a}{a^2+b^2}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{i} - \frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathbf{j}.$$

Поэтому кривизна винтовой линии постоянна:

$$k_1 = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

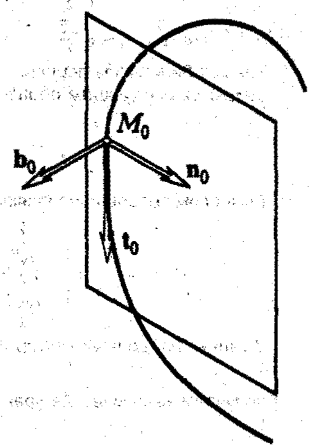

Рис. 34

Пусть $M_0$ — точка кривой $\gamma$, отвечающая значению $s_0$ естественного параметра, и

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{r}'(s_0)$$

— единичный вектор касательной кривой $\gamma$ в этой точке. Если точка $M_0$ не является точкой *распрямления кривой* $\gamma$, $k_1(s_0) \neq 0$, то формулой

$$\boxed{\mathbf{n}_0 = \frac{1}{k_1(s_0)}\,\mathbf{r}''(s_0)}$$

определен единичный вектор главной нормали кривой в этой точке. Векторное произведение

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_0$$

является единичным вектором бинормали кривой $\gamma$ (рис. 34).

В случае произвольной параметризации векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ вычисляются по формулам

$$\boxed{\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \times \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| \cdot |\mathbf{r}'(t)|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}.}$$

Три луча, исходящие из точки $M_0$ и имеющие направления, задаваемые векторами $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{b}_0$, образуют *сопровождающий триэдр* кривой $\gamma$ в точке $M_0$ (рис. 34).

**Пример 3.** Для винтовой линии

$$\mathbf{r}(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,s\right)$$

имеем

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0\right),$$

$$\mathbf{b}(s) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Обозначим через $\Delta\theta$ наименьший угол между соприкасающимися плоскостями $\Pi_0$ и $\Pi$ кривой $\gamma$ в точке $M_0$ и близкой ей точке $M$ соответственно (этот угол совпадает с наименьшим углом между бинормалями кривой в точках $M_0$ и $M$), а через $\Delta s$ — длину дуги $\smile M_0M$ кривой $\gamma$ (рис. 35). ***Кручением*** $k_2$ кривой $\gamma$ в точке $M_0$ называется предел отношения

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

при $M \to M_0$, снабженный знаком в соответствии со следующим *правилом выбора знаков*:

если векторы $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{n}$ сонаправлены (они всегда коллинеарны), то выбирается знак «$-$» (вращение соприкасающейся плоскости происходит от вектора $\mathbf{n}$ к вектору $\mathbf{b}$);

если векторы $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{n}$ противоположно направлены, то выбирается знак «$+$» (вращение соприкасающейся плоскости происходит от вектора $\mathbf{b}$ к вектору $\mathbf{n}$) (рис. 36).

Кручение кривой определено в любой точке 3-регулярной кривой, не являющейся точкой распрямления, и измеряет скорость отклонения кривой от соприкасающейся плоскости. Кручение плоской кривой равно нулю в каждой точке.

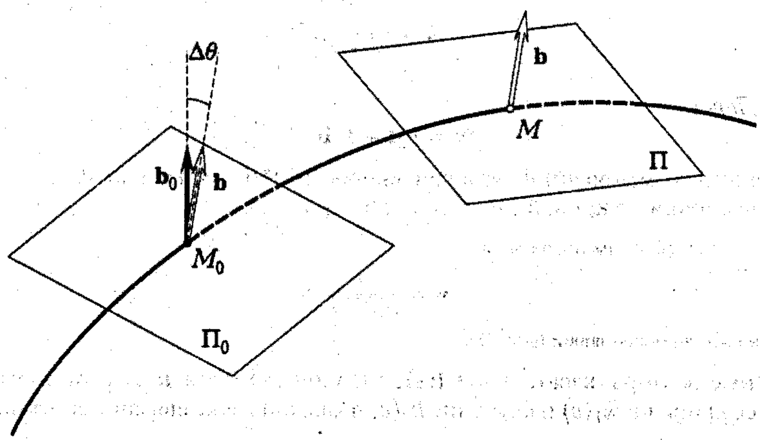


Рис. 35

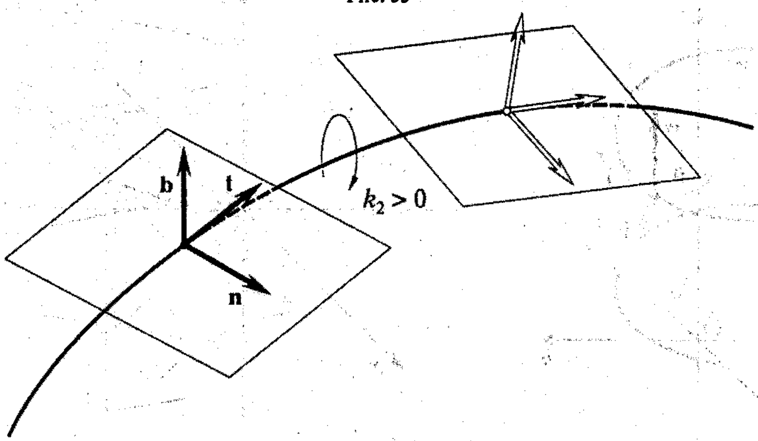


Рис. 36

Если

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

— естественная параметризация кривой, то ее кручение вычисляется по формуле

$$\boxed{k_2(s) = \frac{\left(\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''(s), \mathbf{r}'''(s)\right)}{\left(\mathbf{r}''(s)\right)^2}.}$$

В случае произвольной параметризации

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

имеем

$$\boxed{k_2(t) = \frac{\left(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)\right)}{\left(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(s)\right)^2}.}$$

**Пример 4.** Кручение винтовой линии постоянно:

$$k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

*Вектор Дарбу*

$$\mathbf{w} = k_2\mathbf{t} + k_1\mathbf{b}$$

является вектором мгновенной угловой скорости сопровождающего трехгранника при движении точки по кривой с единичной скоростью.

**Пример 5.** Вектор Дарбу винтовой линии

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\mathbf{k}$$

параллелен оси винтовой линии (рис. 37).

Единичные векторы касательной $\mathbf{t}(s)$, главной нормали $\mathbf{n}(s)$ и бинормали $\mathbf{b}(s)$ кривой $\gamma$ и ее кривизна $k_1(s)$ и кручение $k_2(s)$ в каждой точке связаны соотношениями

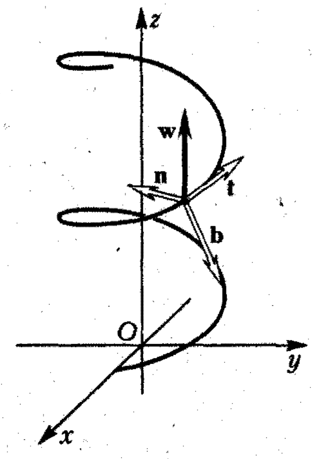

Рис. 37

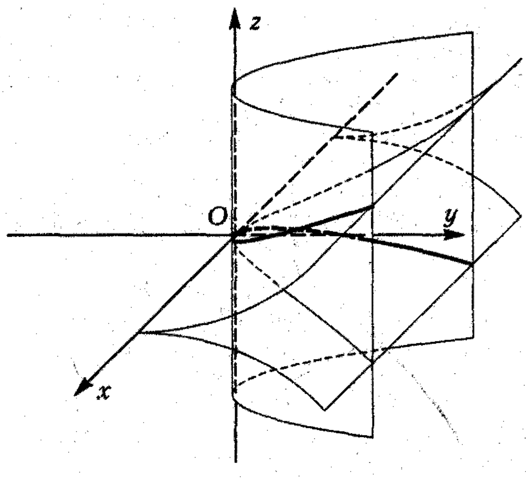

Рис. 38

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k_1\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k_1\mathbf{t} + k_2\mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -k_2\mathbf{n}, \end{aligned}}$$

называемыми *уравнениями Френе*.

Выберем в пространстве прямоугольную декартову координатную систему $Oxyz$ так, чтобы начало координат — точка $O$ — совпадало с точкой $M_0$ кривой $\gamma$, отвечающей значению $s_0 = 0$ естественного параметра,

$$\mathbf{r}(s_0) = \mathbf{r}(0) = 0,$$

а ортами координатных осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ были единичные векторы $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$, $\mathbf{b}(s_0)$:

$$\mathbf{i} = \mathbf{t}(s_0), \quad \mathbf{j} = \mathbf{n}(s_0), \quad \mathbf{k} = \mathbf{b}(s_0).$$

Раскладывая векторную функцию $\mathbf{r}(s)$ в окрестности точки $s_0 = 0$ по степеням $s$ и сохраняя лишь главные члены, получим уравнения кривой $\tilde{\gamma}$, близкой кривой $\gamma$:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{r}}(s) = s\mathbf{i} + as^2\mathbf{j} + bs^3\mathbf{k},}$$

где

$$a = \frac{k_1(0)}{2}, \quad b = a\,\frac{k_2(0)}{3}.$$

Записывая последние соотношения в координатной форме

$$x = s, \quad y = as^2, \quad z = bs^3$$

и предполагая $a > 0$ и $b > 0$, убеждаемся в том, что проекции кривой $\tilde{\gamma}$, общий вид которой показан на рис. 38, на координатные плоскости имеют следующий вид (рис. 39):

на соприкасающуюся плоскость (рис. 39 а);
на спрямляющую плоскость (рис. 39 б);
на нормальную плоскость (рис. 39 в).

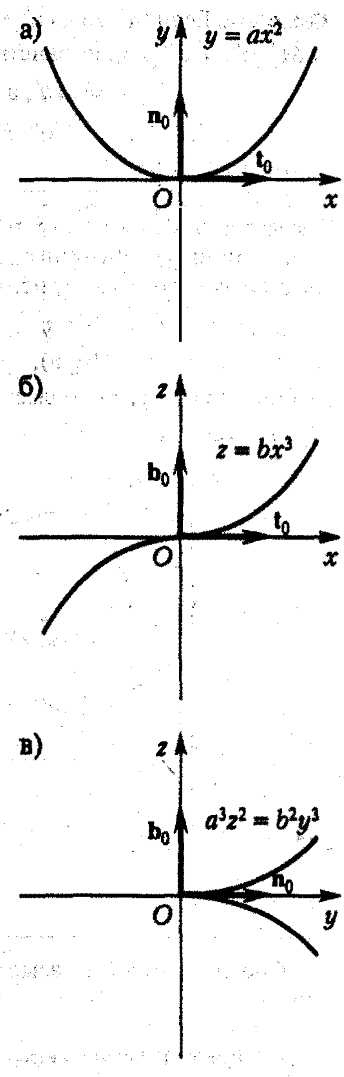


Рис. 39

## § 5. Понятие гладкой поверхности. Способы задания

Пусть $D$ — ограниченная плоская область, $\partial D$ — ее граница и $\overline{D} = D \cup \partial D$ — замыкание области $D$. Введем на плоскости координатную систему $(u, v)$ и зададим на множестве $\overline{D}$ три непрерывные функции

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D}. \tag{1}$$

Пусть $x$, $y$, $z$ — прямоугольные декартовы координаты точек в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Предположим, что функции (1) обладают следующим свойством:

**Свойство А.** Если $(u', v')$ и $(u'', v'')$ — различные точки множества $\overline{D}$, то точки $M'(x', y', z')$ и $M''(x'', y'', z'')$ пространства $\mathbb{R}^3$, координаты которых вычисляются по формулам

$$x' = \xi(u', v'), \qquad y' = \eta(u', v'), \qquad z' = \zeta(u', v'),$$
$$x'' = \xi(u'', v''), \qquad y'' = \eta(u'', v''), \qquad z'' = \zeta(u'', v''),$$

также различны.

**Определение.** Множество $S$ точек $M$, координаты $x$, $y$ и $z$ которых определяются соотношениями (1) и функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ и $\zeta(u, v)$ обладают свойством А, называется *простой поверхностью* (рис. 40).

Множество точек $M(x, y, z)$ с координатами

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \qquad (u, v) \in \partial D,$$

— образ границы $\partial D$ области $D$ — называется *границей* простой поверхности $S$.

**Обозначение:** $\partial S$.

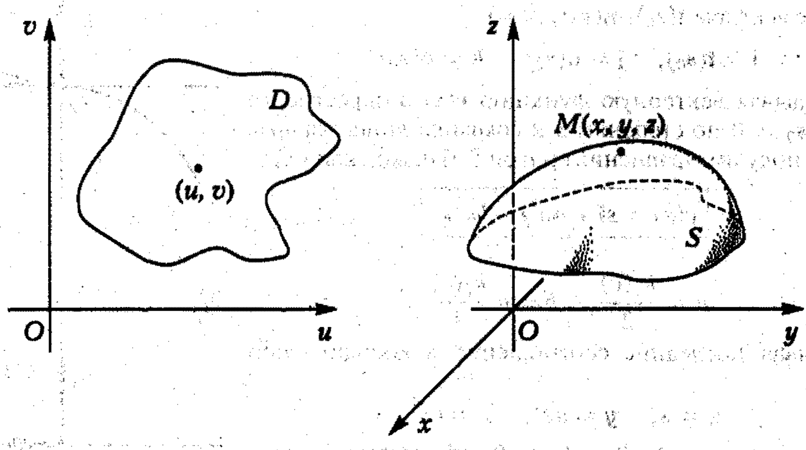


Рис. 40

Соотношения (1) называются *параметрическими уравнениями* простой поверхности.

**Пример 1.** График непрерывной функции

$$z = f(x, y)$$

является примером простой поверхности (рис. 41). Ее параметрические уравнения имеют вид

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — орты координатных осей. Тогда задание поверхности $S$ при помощи функций (1) равносильно заданию одной векторной функции

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \xi(u, v)\mathbf{i} + \eta(u, v)\mathbf{j} + \zeta(u, v)\mathbf{k}.} \qquad (2)$$

В этом случае говорят, что поверхность $S$ задана *векторным уравнением*.

Простая поверхность $S$ называется *гладкой в точке* $M_0$, отвечающей значениям $u = u_0$ и $v = v_0$ параметров, если функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$ имеют в точке $(u_0, v_0)$ непрерывные производные.

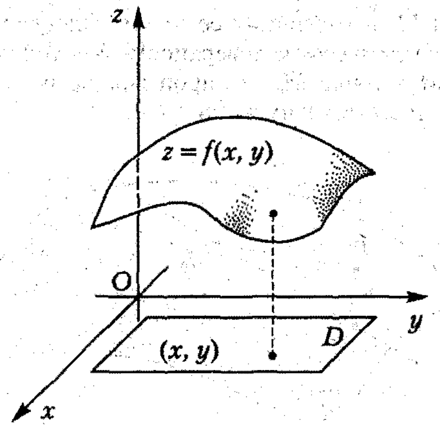


Рис. 41

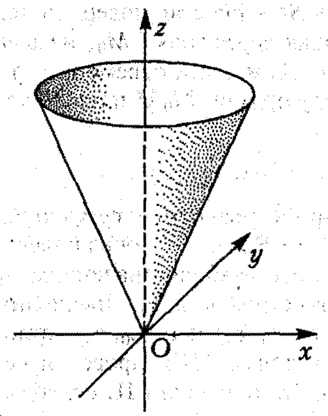


Рис. 42

Точка $M_0$ гладкой поверхности $S$ называется *обыкновенной*, или *регулярной*, если

$$\boxed{\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \xi_u(u_0, v_0) & \eta_u(u_0, v_0) & \zeta_u(u_0, v_0) \\ \xi_v(u_0, v_0) & \eta_v(u_0, v_0) & \zeta_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 2.} \tag{3}$$

В противном случае точка $M_0$ называется *особой*.

Поверхность называется *регулярной*, если условие (3) выполняется в каждой ее точке. Часто условие (3) удобнее записывать в равносильной форме

$$\boxed{\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0.} \tag{4}$$

**Пример 2.** График гладкой функции является регулярной поверхностью, так как всегда

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

**Пример 3.** У конической поверхности, задаваемой уравнениями

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u,$$

все точки, кроме точки $O(0, 0, 0)$ (при $u = 0$, $v = 0$), регулярны (рис. 42). В точке $O$ имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Другим распространенным способом задания поверхности является *неявный способ задания поверхности* как множества $S$ точек $M$, координаты $x$, $y$ и $z$ которых обращают в тождество уравнение

$$\boxed{F(x, y, z) = 0.}$$

Если $F(x, y, z)$ — гладкая функция своих аргументов, причем

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0,$$

то поверхность $S$ будет регулярной.

**Пример 4.** Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

является регулярной поверхностью:

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = 4R^2 > 0$$

в каждой точке.

Пусть $S$ — простая поверхность, $M_0$ и $M$ — различные ее точки. Плоскость П, проходящая через точку $M_0$, называется *касательной* к поверхности $S$ в точке $M_0$, если при стремлении переменной точки $M$ к точке $M_0$ (по произвольному закону) угол между прямой $M_0M$ и плоскостью П стремится к нулю (рис. 43).

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

— векторное уравнение регулярной поверхности $S$ и $M_0$ — точка поверхности $S$, отвечающая значениям $u_0$ и $v_0$ параметров $u$ и $v$. Вычислим векторы $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, отложим их от точки $M_0$ и проведем через точку $M_0$ плоскость П, содержащую эти векторы. Построенная плоскость П будет касательной плоскостью поверхности в точке $M_0$ (рис. 44).

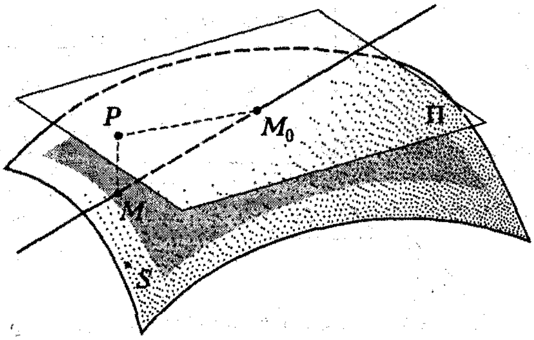


Рис. 43

В каждой точке регулярной поверхности существует и притом ровно одна касательная плоскость.

Прямая, проходящая через точку $M_0$ регулярной поверхности $S$ и перпендикулярная касательной плоскости поверхности в этой точке, называется *нормалью* к поверхности $S$ в точке $M_0$;

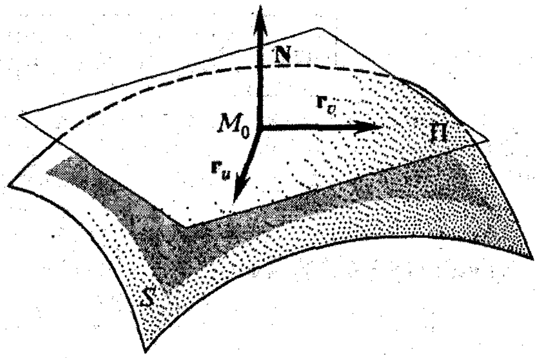


Рис. 44

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

— вектор нормали.

**Пример 5.** Написать уравнения касательной плоскости и нормали поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

◀ Вычислим вектор нормали в точке $M_0$. Имеем

$$\mathbf{N}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Тогда

$$\frac{x - x_0}{-f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1} \qquad (z_0 = f(x_0, y_0))$$

— уравнения нормали, а

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0$$

— уравнение касательной плоскости поверхности в точке $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$. ▶

## § 6. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности

Пусть $S$ — регулярная поверхность, заданная векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \qquad (u, v) \in D.$$

*Первой квадратичной формой* поверхности $S$ называется выражение

$$\boxed{\mathrm{I} = d\mathbf{r}^2.}$$

Запишем последнее соотношение подробнее. Так как

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv,$$

то

$$\boxed{d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_u^2\,du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)\,du\,dv + \mathbf{r}_v^2\,dv^2.} \tag{1}$$

Выражение (1) в каждой точке поверхности $S$ представляет собой квадратичную форму от дифференциалов $du$ и $dv$. Эта квадратичная форма является знакоположительной, так как ее дискриминант

$$\mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 > 0$$

и $\mathbf{r}_u^2 > 0$.

Для коэффициентов первой квадратичной формы используют следующие обозначения:

$$\boxed{E = \mathbf{r}_u^2, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad G = \mathbf{r}_v^2,}$$

так что выражение (1) для формы I можно переписать в виде

$$\boxed{\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,} \tag{2}$$

где

$$\boxed{EG - F^2 > 0.}$$

**Пример 1.** Первая квадратичная форма поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, имеет вид

$$\boxed{\mathrm{I} = (1 + f_x^2)\,dx^2 + 2f_xf_y\,dx\,dy + (1 + f_y^2)\,dy^2.}$$

**Площадь поверхности**

Разобьем область $D$ изменения переменных $u$ и $v$ на части прямыми $u = u_i$, $v = v_k$, параллельными координатным осям $u$ и $v$ (рис. 45). Кривыми $\mathbf{r}(u_i, v)$ и $\mathbf{r}(u, v_k)$ будет разбита на части и поверхность $S$ (рис. 46). Произвольному четырехугольнику $D_{ik}$ параметрической плоскости соответствует на поверхности $S$ криволинейный четырехугольник $S_{ik}$, мало отличающийся от параллелограмма $P_{ik}$ со сторонами, определяемыми векторами $\mathbf{r}_u(u_i, v_k)\Delta u_i$ и $\mathbf{r}_v(u_i, v_k)\Delta v_k$. Этот параллелограмм лежит в касательной плоскости поверхности $S$ в точке $M(u_i, v_k)$. Примем его площадь

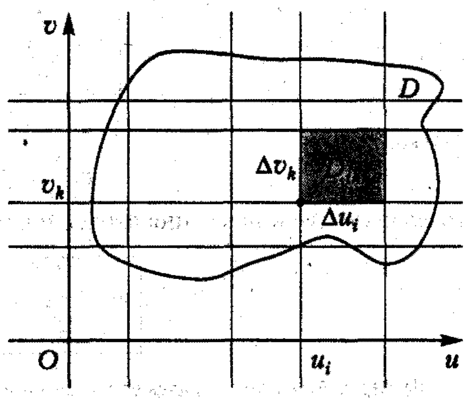

Рис. 45

$$\sigma_{ik} = \left|\mathbf{r}_u(u_i, v_k)\Delta u_i \times \mathbf{r}_v(u_i, v_k)\Delta v_k\right| = \left|\mathbf{r}_u(u_i, v_k) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_k)\right|\Delta u_i\Delta v_k$$

за приближенное значение площади криволинейного четырехугольника $S_{ik}$, а за приближенное значение площади поверхности $S$ сумму

$$\sum \sigma_{ik}$$

площадей всех таких параллелограммов.

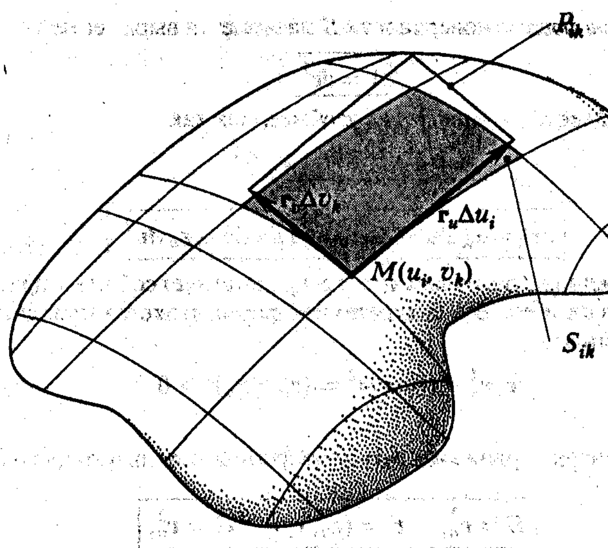


Рис. 46

*Площадью* $\sigma$ поверхности $S$ назовем предел этих сумм при стре лении к нулю величин $\Delta u_i$ и $\Delta v_k$.

Для регулярной поверхности этот предел всегда существует и равен

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv.} \tag{3}$$

Так как

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2,$$

то формулу для вычисления площади поверхности можно записать в виде

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.}$$

**Пример 2.** Вычислить площадь сферы радиуса $R$.

◀ Параметрические уравнения сферы имеют вид

$$x = R\cos u \cos v, \quad y = R\sin u \cos v, \quad z = R\sin v,$$

$$D = \left\{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Путем простых вычислений находим

$$E = \mathbf{r}_u^2 = R^2\cos^2 v, \quad F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = R^2, \quad \sqrt{EG - F^2} = R^2\cos v,$$

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = R^2 \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv = 4\pi R^2. \ ▶$$

Если поверхность $S$ представляет собой график гладкой функции $z = f(x, y)$, заданной в области $D$, то ее площадь можно вычислить по формуле

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy.}$$

# § 7. Вторая квадратичная форма. Кривизна поверхности

Пусть $S$ — 2-регулярная поверхность, заданная векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

В каждой точке такой поверхности помимо единичного вектора нормали

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{1}$$

определен и второй дифференциал векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$:

$$d^2\mathbf{r} = \mathbf{r}_{uu}\, du^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\, du\, dv + \mathbf{r}_{vv}\, dv^2.$$

*Второй квадратичной формой* поверхности $S$ называется скалярное произведение векторов $d^2\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$:

$$\boxed{\mathrm{II} = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})\, du^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})\, du\, dv + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})\, dv^2.} \tag{2}$$

Ясно, что в каждой точке поверхности $S$ форма (2) является квадратичной формой относительно дифференциалов $du$ и $dv$.

Для коэффициентов второй квадратичной формы приняты обозначения

$$\boxed{L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}), \quad M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}), \quad N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}).} \tag{3}$$

Это позволяет записать ее в следующем виде

$$\boxed{\mathrm{II} = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2.} \tag{4}$$

Приведем несколько формул для вычисления коэффициентов $L$, $M$ и $N$.

Заменяя в формулах (3) вектор $n$ его выражением (1), получаем

$$\boxed{L = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.}$$

Если поверхность является графиком гладкой функции

$$z = f(x, y),$$

то

$$\boxed{L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.}$$

Вторая квадратичная форма является эффективным средством исследования геометрических свойств регулярной поверхности. Посредством этой формы можно ввести важные геометрические характеристики, измеряющие степень и вид отклонения поверхности от касательной плоскости. Остановимся на двух понятиях — гауссовой кривизны поверхности и нормальной кривизны поверхности в заданном направлении.

*Гауссовой кривизной* поверхности называется отношение дискриминантов первой и второй квадратичных форм

$$\boxed{K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.}$$

Если поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то гауссова кривизна этой поверхности вычисляется по формуле

$$\boxed{K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.}$$

Гауссову кривизну удобно использовать для классификации точек регулярной поверхности: знак гауссовой кривизны поверхности в данной ее точке указывает на характер поведения поверхности в этой точке.

Точка $M_0$ поверхности $S$, отвечающая значениям $u_0$ и $v_0$ параметров, $M_0(u_0, v_0)$, в которой

$K(u_0, v_0) > 0$, называется *эллиптической*;

$K(u_0, v_0) < 0$, называется *гиперболической*;

$K(u_0, v_0) = 0$, но отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов второй квадратичной формы, называется *параболической*.

Пусть $\Pi_0$ — касательная плоскость поверхности $S$ в точке $M_0$. Все точки поверхности $S$ в окрестности эллиптической точки лежат по одну сторону от плоскости $\Pi_0$. Точки поверхности $S$ в окрестности гиперболической точки лежат по обе стороны от плоскости $\Pi_0$. Все точки поверхности $S$ в окрестности параболической точки кроме (возможно) одной кривой лежат по одну сторону от плоскости $\Pi_0$.

**Пример 1.** Все точки эллиптического параболоида являются эллиптическими (рис. 47), все точки гиперболического параболоида являются гиперболическими (рис. 48), все точки цилиндрической поверхности являются параболическими (рис. 49).

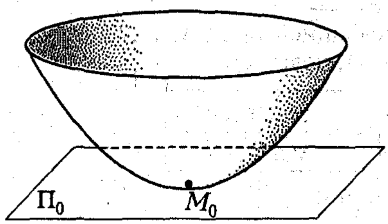


Рис. 47

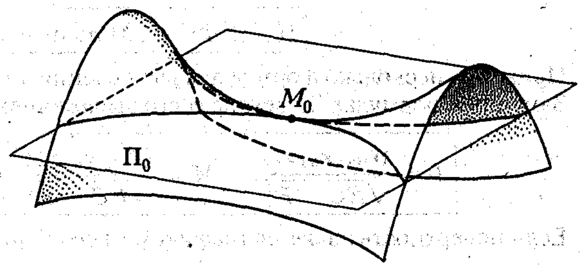


Рис. 48

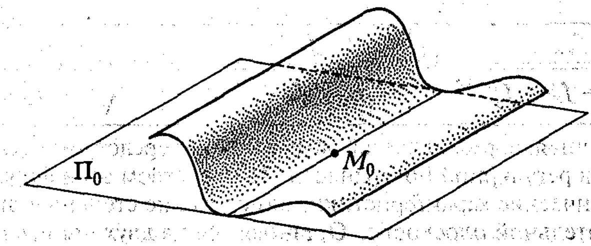


Рис. 49

Возьмем на регулярной поверхности $S$, заданной векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

произвольную точку $M_0(u_0, v_0)$ и проведем через нее касательную плоскость $\Pi_0$. Производные $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ и $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ векторной функции $\mathbf{r}(u, v)$, вычисленные в точке $(u_0, v_0)$, лежат в плоскости $\Pi_0$ (рис. 50). Построим на плоскости $\Pi_0$ линейную комбинацию этих векторов

$$\xi\mathbf{r}_u(u_0, v_0) + \eta\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$

(рис. 51) и проведем через определяемую ей прямую $l$ и нормаль поверхности в этой точке плоскость $\Pi$. Эта плоскость рассечет поверхность $S$ по кривой — ***нормальному сечению*** поверхности ***в направлении*** $l$, определяемом парой чисел $\xi$ и $\eta$ (рис. 52).

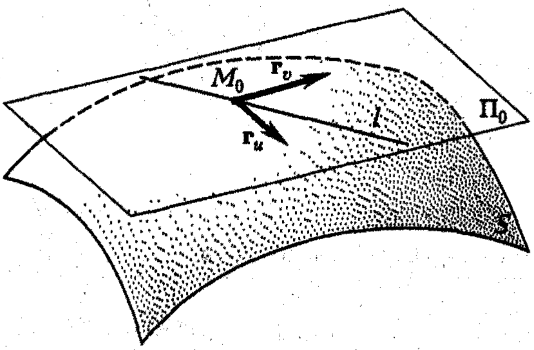

Рис. 50

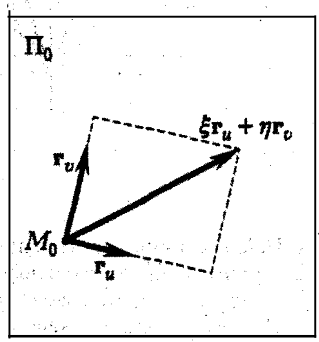

Рис. 51

Кривизна $k_n$ построенной кривой — ***нормальная кривизна*** поверхности в данном направлении — вычисляется по формуле

$$\boxed{k_n = k_n(\xi, \eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.}$$

**Пример 2.** Найти нормальные кривизны эллиптического параболоида

$$z = \frac{1}{2}x^2 + y^2$$

в точке $O(0, 0, 0)$.

◄ Вычислим в точке $O$ коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Имеем

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$
$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 2.$$

Тем самым,

$$k_n(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 + 2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} = 1 + \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}. \blacktriangleright$$

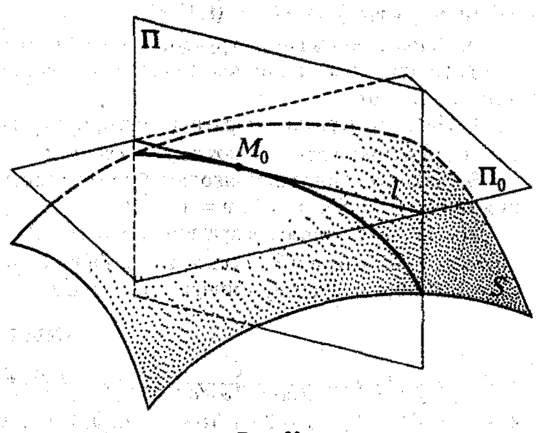

Рис. 52

Ясно, что в данной точке величина $k_n$ изменяется вместе с изменением прямой $l$. Направления, в которых нормальная кривизна принимает наибольшее и наименьшее значения, называются *главными*. В общем случае главные направления на поверхности в каждой точке ортогональны. Соответствующие им нормальные кривизны называются *главными кривизнами* поверхности в рассматриваемой точке.

**Пример 3.** В приведенном выше примере главными направлениями эллиптического параболоида в точке $O(0,0,0)$ будут направления координатных осей $x$ и $y$: $(\xi;0)$ и $(0;\eta)$ (рис. 53). Главные кривизны равны соответственно

$$k_n(\xi,0)=1,\quad k_n(0,\eta)=2.$$

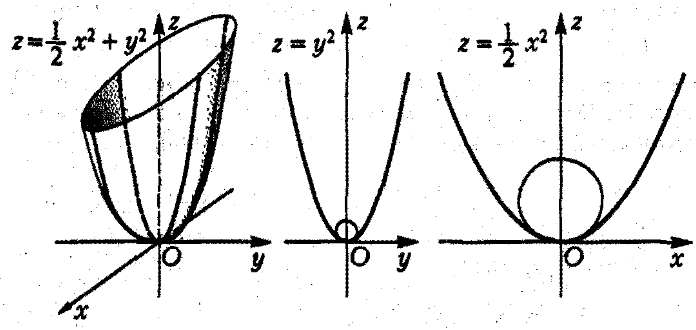


Рис. 53

## Упражнения

**1.** Найдите кривизну: а) цепной линии $y=\operatorname{ch} x$; б) эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

**2.** Найдите соприкасающуюся окружность эллипса в его вершине $A(a,0)$ (при $t=0$).

**3.** Найдите уравнения эволюты эллипса.

**4.** Найдите уравнения касательной и нормальной плоскости кривой с уравнением $\mathbf{r}(t)=(t,t^2,t^3)$ в точке $A(1,1,1)$.

**5.** Найдите единичные векторы сопровождающего трехгранника в точке $O(0,0,0)$ кривой, *заданной уравнением* $\mathbf{r}(t)=(t,t^2,t^3)$.

**6.** Найдите кривизну и кручение кривой с уравнениями: $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=\sqrt{2}\,t$.

**7.** Найдите уравнения касательной плоскости и нормали геликоида: $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$.

**8.** Найдите первую квадратичную форму: а) *параболоида вращения* $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$; б) геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$.

**9.** Найдите площадь криволинейного четырехугольника на геликоиде, ограниченного линиями $u=0$, $u=a$, $v=0$, $v=1$.

**10.** Найдите вторую квадратичную форму: а) параболоида вращения $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$; б) геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$.

**11.** Найдите гауссову кривизну геликоида.

## Ответы

**1.** а) $k=\frac{1}{y^2}$; б) $k=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$. **2.** $\left(x-\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2+y^2=\frac{b^4}{a^2}$. **3.** $x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$. **4.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$, $x+2y+3z-6=0$. **5.** $\mathbf{t}=(1,0,0)$, $\mathbf{n}=(0,1,0)$, $\mathbf{b}=(0,0,1)$. **6.** $k_1=-k_2=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. **7.** $xa\sin v-ya\cos v+zu-auv=0$, $\frac{x-u\cos v}{a\sin v}=\frac{y-u\sin v}{-a\cos v}=\frac{z-av}{u}$. **8.** а) $\mathrm{I}=(1+4u^2)\,du^2+u^2\,dv^2$; б) $\mathrm{I}=du^2+(u^2+a^2)\,dv^2$. **9.** $\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **10.** а) $\mathrm{II}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2+u^2\,dv^2)$; б) $\mathrm{II}=-\frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{u^2+a^2}}$. **11.** $K=-\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}$.

# Предметный указатель

## Л



## М



## Н



## О



## П



## Р



## С



## Т

# Оглавление