ПОПУЛЯРНАЯ НАУКА

АЙЗЕК АЗИМОВ

ЧИСЛА

ОТ АРИФМЕТИКИ ДО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Популярная наука

ПОПУЛЯРНАЯ НАУКА

АЙЗЕК АЗИМОВ

ЧИСЛА

ОТ АРИФМЕТИКИ ДО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЭКСМО
МОСКВА
2012

УДК 51
ББК 22.1
А 35

Составитель серии *Д. Байкалов*

Оформление *Б.Волкова*

Серия основана в 2009 году

Азимов А.

А 35 Числа: от арифметики до высшей математики / Айзек Азимов ; [пер. с англ. О. Замятиной]. – М. : Эксмо, 2012. – 288 с. – (Популярная наука от Азимова).

ISBN 978-5-699-52723-6

Знаменитый фантаст и популяризатор науки сэр Айзек Азимов в этой книге решил окунуть читателя в магию чисел Свой увлекательный рассказ Азимов начинает с древнейших времен, когда человек использовал для вычислений пальцы, затем знакомит нас со счетами, а также с историей возникновения операций сложения, вычитания, умножения и деления Шаг за шагом, от простого к сложному, используя занимательные примеры, автор ведет нас тем же путем, которым шло человечество, совершенствуя свои навыки в математике

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-699-52723-6

Посвящается моим верным
читателям – с благодарностью

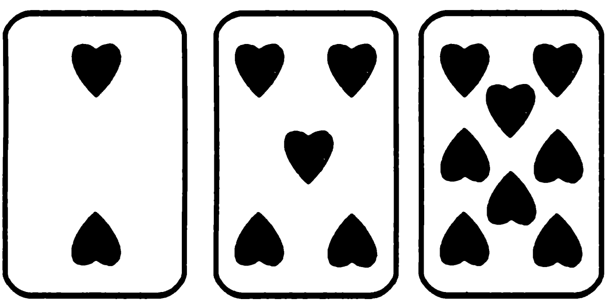
Глава 1

ЦИФРЫ И – ЦИФРЫ

Обозначение чисел

Люди не единственные создания на Земле, кому принадлежит знание о числах. Животных также можно научить различать количество объектов. Естественно, никто не думает, что животные осознанно считают, однако несомненно то, что они могут различать числа.

Большинство из нас, играя в карты, никогда не обращает внимания на маленький номер в левом верхнем углу. Даже средний



Игральные карты без нумерации

игрок в нем особенно не нуждается. В сопроводительных описаниях игры в карты вы также не найдете чисел. И это никого не беспокоит. Обычно мы узнаем нумерацию карты с первого взгляда и без подсчета.

Решающий момент в истории человечества наступил тогда, когда простых примеров стало недостаточно. Нетрудно заглянуть в пещеру и удостовериться, что оба ребенка на месте, или взглянуть на полку с каменными топорами, чтобы увериться в сохранности всех четырех. Но потребовалась более сложная информация, и в какой-то момент человек решил, что необходимо использовать числа. Скажем, надо пойти к соседу и сказать: «Послушай, старик, ты, случайно, не прибрал один из моих каменных топоров, когда прошлый раз заходил ко мне в пещеру?» И если сосед отвечал: «Господь с тобой, почему ты так думаешь?» – можно было привести следующий довод: «Послушай, дружище, у меня было четыре топора до твоего прихода, а после того как ты ушел, осталось только три». В общем, оказалось, что очень удобно, когда каждое число имеет название.

Несомненно, поначалу было придумано всего несколько названий, которых было достаточно, только чтобы обобщать простейшую информацию.

Некоторые примитивные племена даже сегодня не имеют названий для чисел выше, чем два или три. (Это, конечно, не означает, что они не знают больших чисел. Скажем, они могли бы обозначить число четыре как «три и еще один».)

Почти во всех случаях тем не менее для первых десяти чисел существуют специальные названия: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять и десять.

Можно и дальше изобретать названия для чисел, больших десяти, но это создало бы серьезные трудности. Нелегко было бы запомнить специальные названия для «сорока трех», «семидесяти девяти» и далее до бесконечности. С другой стороны, название чисел от одного до десяти запомнить легко, ведь у нас на руках десять пальцев, а это своеобразная встроенная система памяти.

Человек говорил «четыре» и показывал четыре пальца; говорил «шесть» и показывал шесть пальцев. Слушающий видел пальцы и легко мог понять то, что подразумевал собеседник, даже если забыл, что означают слова «четыре» и «шесть».

«Палец» по-латыни – «digitus», и не случайно в английском языке, куда это слово было привнесено из латинского, приобрело новое значение. «Digit» по-английски означает цифру. Также вполне логично и то, что все первые десять чисел называются цифрами, то есть «digits», поскольку в древности эти два понятия, пальцы и числа, были фактически идентичны.

Может показаться, что существуют самостоятельные названия для чисел, больших десяти, но это не так. Язык со временем трансформируется, одни слова сменяют другие, и иногда при этом теряется первоначальное значение слов. Что означает слово «одиннадцать»? Это «один» над «цать», то есть один сверх десяти. «Цать» – это древнерусское обозначение десятка. По-английски «одиннадцать» – «eleven». Это слово пришло в английский из древнегерманского, где оно означает «на один больше».

Нетрудно представить себе такую картину. Один человек показывает другому десять пальцев и добавляет: «И еще один».

Точно так же было образовано слово «двенадцать», то есть «два» над «цать», «тринадцать», и так далее до двадцати, то есть до «двух десятков». В английском языке все обстоит точно так же. Двенадцать по-английски – «twelve», означает «два сверх», то есть два после десяти. После двенадцати все упрощается. Thirteen, тринадцать – это «три и десять», fourteen, четырнадцать, – это «четыре и десять», и так далее, до двадцати. Двадцать, twenty – это просто «два десятка», thirty – «три десятка», forty – «четыре десятка», и так далее до ста.

В русском языке исключением является слово «сорок». Почему мы говорим «сорок», а не «четыредесят»? Дело в том, что в древности на Руси считали «сороками», поэтому для четырех десятков было введено специальное слово. Говорили, что Москва – город «сорока сороков церквей», то есть в Москве было 40 × 40, или 1600 церквей. В те времена при расчетах использовали не только монеты, но и шкурки соболей. Сорок шкурок составляли один «мех», то есть число 40 было таким же граничным числом, как десять, сто, тысяча и т. д.

Обозначаем числа пальцами

Можно ли использовать пальцы для обозначения чисел, больших десяти? Например, как показать на пальцах число 54? Както я видел молодого человека, который сначала быстро-быстро пять раз показал своему приятелю раскрытые ладони с растопыренными пальцами, а потом показал четыре пальца, то есть сначала пять десятков, или пятьдесят, а затем четыре, и всего 54. Все это прекрасно, за исключением того, что наблюдатель должен быть начеку, чтобы не пропустить одного или нескольких десятков. Обычно в таких случаях переспрашивают: «Пятьдесят четыре, да?» А это значит, что все представление с демонстрацией числа на пальцах было бесполезным.

Конечно, нам не приходится развивать навыки счета на пальцах, в школе мы изучаем совсем другие методы обращения с числами, и они гораздо эффективнее. Но если бы пришлось считать на пальцах, мы могли бы, например, договориться о следующей процедуре счета. Когда мы держим ладони внутрь, то число вытянутых пальцев указывает на число десятков. Когда ладони повернуты наружу, число пальцев указывает на число единиц.

Тогда то же число 54 можно было бы показать на пальцах следующим образом. Одну ладонь держите внутрь, показывая пять пальцев, а другую – ладонью наружу, показывая четыре пальца. Таким образом, двумя жестами можно изобразить любое число от 10 до 99.

Вот мы и добрались до десяти десятков, то есть до ста. «Сто» – это тоже слово, пришедшее из глубокой древности. Мы можем даже изобразить десять десятков, повернув ладони внутрь и показав десять пальцев.

А как быть, когда нужно изобразить одиннадцать десятков? Это тоже возможно.

Добравшись до сотни, мы продолжаем действовать таким же образом, как и раньше. Следующее за сотней число – это «сотня и один», то есть сто один. Что может быть яснее и проще? Мы продолжаем наш путь вперед, проходим разные числа, названия которых образуются по такой же простой схеме, например «сто и двадцать три» – это «сто двадцать три», «сто и семьдесят девять» – это «сто семьдесят девять», и так вплоть до «ста и девяноста девяти», то есть до «ста девяноста девяти». Теперь у нас уже две сотни, то есть двести. Таким образом, мы можем добраться до «девяти сотен и девяноста девяти», то есть до «девятисот девяноста девяти». Здесь удобно ввести принципиально новое название для числа, равного «десяти сотням». Это число получило название «тысяча», его происхождение тоже уходит в глубь веков.

Теперь можно опять использовать тот же принцип для обозначения чисел при помощи пальцев и двигаться дальше. Мы можем, например, договориться, что когда пальцы направлены вниз, а ладонь обращена наружу, то количество пальцев обозначает количество тысяч, когда пальцы направлены вниз, а ладонь обращена внутрь, то количество пальцев обозначает количество сотен. Когда пальцы направлены вверх, а ладонь обращена наружу, то количество пальцев обозначает количество десятков. И наконец, когда пальцы направлены вверх, а ладонь обращена внутрь, то количество пальцев обозначает количество единиц.

Поэтому, если мы хотим показать на пальцах число «семь тысяч пятьсот двадцать четыре», мы можем сделать это в четыре движения: «семь пальцев вниз, ладони внутрь, затем пять пальцев вниз ладони наружу, два пальца вверх, ладони внутрь, затем четыре пальца вверх, ладони наружу».

На пальцах показываем число 7524

В быту мы почти никогда не используем числа выше тысячи, и поэтому никаких новых названий для чисел «десять тысяч», «двадцать тысяч» и так далее не появилось ни в русском, ни в английском, ни в большинстве европейских языков. Вслед за «десятью тысячами» идет «десять тысяч один» и далее вплоть до «десяти тысяч девятисот девяноста девяти», а затем – «одиннадцать тысяч»... «двадцать тысяч»... сто тысяч» и так далее.

Греческие математики использовали специальное название для десяти тысяч. Они назвали это число «myrias» (от него произошло современное слово «мириады», или «несметное количество»), но это название использовалось только в узком кругу ученых и никогда не было широкоупотребительным. Названия для таких чисел, как «миллион» и «миллиард», появились только в эпоху позднего Средневековья, а на протяжении большей части истории человечества было достаточно двух ладоней и десяти пальцев, чтобы обозначить необходимые числа.

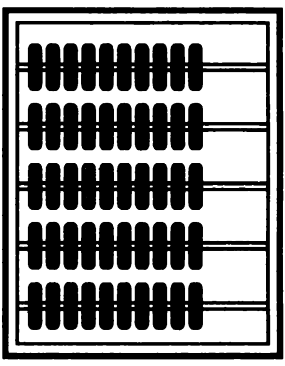
Счеты

Я отнюдь не утверждаю, что моя система обозначения больших чисел на пальцах когда-либо использовалась. К тому моменту, когда в обиход вошли десятки, сотни, тысячи и десятки тысяч, человечество уже располагало удобным инструментом для произведения расчетов, своеобразными искусственными пальцами. Это счеты, или по-гречески «абака».

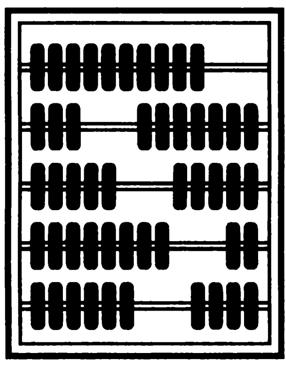
Самые простые счеты представляли собой коробку с горизонтальными желобками, в каждом из которых лежало по десять камешков округлой формы, или гальки. Длина желобков была достаточна, чтобы эти камешки передвигать справа налево. Такими счетами пользовались и в Древней Греции, и в Древнем Риме, и в более поздние времена. По-латыни «галька» – «calculus», от этого слова и произошло слово «calculate», что по-английски означает «вычислять».

Позже появились счеты другой формы. Это деревянная рамка с горизонтальными стержнями, на которые насажено по десять дисков, называемых костяшками. Стержень достаточно длинный, и косточки можно передвигать. В принципе каждый стержень – это модель ладоней с десятью пальцами. Если вначале все косточки сдвинуты налево, то, передвинув одну косточку направо, мы имитируем такой жест, когда поднимаем один палец.

А теперь договоримся, что нижний ряд косточек – это единицы, над ним – десятки. Выше – сотни, а над сотнями – тысячи. Теперь попробуем представить число 7524 при помощи счетов. На нижнем ряду надо передвинуть направо 4 косточки, на следующем – 2, на следующем – 5, и, наконец, на ряду, расположенном еще выше, – 7.



1



2

1 – счеты;
2 – счеты, на которых отложено число 7524

Разумеется, гораздо удобнее пользоваться счетами, чем показывать числа на пальцах. Преимуществ у счетов несколько, и они достаточно серьезные. Во-первых, нет необходимости засорять память тем, как нужно расположить пальцы и ладони, когда изображаешь какое-то число. Во-вторых, можно показать все число, даже если это десятки или сотни тысяч, целиком, а не по частям. Не нужно запоминать, сколько было тысяч, сотен и десятков. В-третьих, когда пользуешься счетами, можно добавлять сколько угодно рядов и, таким образом, изобразить в принципе сколь угодно большое число. И наконец, счеты позволяют изобразить одновременно два числа и выполнить с ними какие-то действия.

Считаем на счетах

Человеку еще в доисторические времена было необходимо складывать и вычитать числа. Предположим, что вы приобрели у соседа несколько наконечников для стрел и вам нужно знать, сколько у вас теперь всего в запасе наконечников. Или, скажем, ваши овцы принесли по несколько ягнят – вы должны знать, сколько голов в вашем стаде после этого прибавления.

Самый простой способ – посчитать. Предположим, у вас было пять наконечников и вы приобрели еще два. Вы складываете их вместе, считаете – и у вас получается семь. Но постепенно приобретается опыт счета, вы уже знаете, что пять плюс два – это семь.

Однако наша память не беспредельна, и когда нужно сложить большие числа, например двадцать три и пятьдесят четыре, ответ найти уже гораздо труднее. Представьте себе древнего пастуха, у которого в стаде было пятьдесят четыре овцы, а потом прибавилось еще двадцать три. И вот он их долго и нудно пересчитывает, сбивается, начинает сначала, опять сбивается... и приходит в ярость от собственного бессилия. Пожалуй, от человека, занимающегося подсчетами по такой методике, лучше держаться подальше.

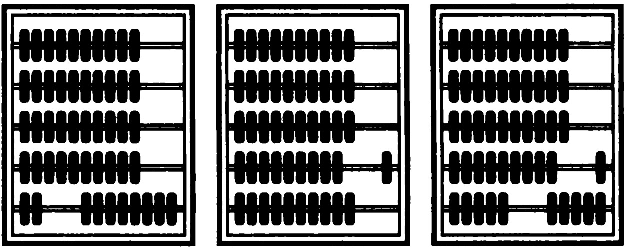
Вот тут на помощь могут прийти счеты. Это очень удобное приспособление, которое помогает подсчитать сумму этих двух чисел, не делая никаких особых интеллектуальных усилий. Теперь совсем не нужно находиться рядом с этими глупыми овцами, которые не могут стоять на месте и все время перемещаются. Можно уйти в дом и считать там.

Если нужно прибавить двадцать три к пятидесяти четырем, то сначала на счетах на нижнем ряду, то есть на ряду единиц, мы откладываем четыре. На следующем ряду, на ряду десятков, – пять. Теперь на нижнем ряду откладываем еще три, а на следующем – два. И в результате получаем семьдесят семь. Правда, при счете сумма ни разу не равнялась десяти или большему числу.

Точно так же без особых проблем можно складывать и очень большие числа. Например, нам нужно сложить двести пятьдесят три тысячи сто двенадцать и сто двадцать шесть тысяч восемьсот тридцать один. Используя счеты, мы легко определим сумму, которая равна триста семидесяти девяти тысячам девятисот сорока трем. Однако эта легкость отчасти определяется тем, что ни на одном ряду при сложении мы не получали числа, большего десяти.

А теперь представьте себе, что надо на счетах сложить семь и восемь. Как ни странно, это даже трудней, чем получить сумму от сложения нескольких сотен тысяч, что мы только что сделали.

Посмотрите на рисунок.



Шаг 1. *Шаг 2.* *Шаг 3.*

Складываем 7 и 8 на счетах

Сначала на нижнем ряду вы переводите направо восемь костяшек. Теперь нужно к ним прибавить еще семь, но у нас на нижнем ряду свободны только две костяшки. Что же делать? Все очень просто. Сначала передвигайте оставшиеся две. Теперь у вас есть целый десяток. Вы делаете замену, десять костяшек на нижнем ряду заменяете на одну костяшку на следующем ряду, то есть откладываете в ряду десятков один десяток. Теперь вы можете закончить сложение, ведь ряд единиц у вас свободен. Нам нужно было передвинуть семь костяшек. Две мы уже передвинули. Значит, осталось передвинуть еще пять. Передвигаем пять костяшек на нижнем ряду влево и получаем результат: один десяток и пять единиц, то есть пятнадцать.

Такая замена десяти костяшек на одну в следующем верхнем ряду годится для всех рядов. Десять десятков можно заменить на одну сотню, десять сотен на одну тысячу и так далее.

Таким образом, когда мы используем счеты, нам не надо отсчитывать больше десяти костяшек. На самом деле достаточно считать до пяти. Ведь если вы передвинули направо больше пяти костяшек, нужно только подсчитать количество костяшек в левой части, их всегда будет меньше пяти, чтобы узнать, сколько их в правой части. Скажем, если слева осталась одна костяшка, значит, справа их девять.

Когда костяшек пять или меньше, нам легко определить их количество с первого взгляда, не считая. Поэтому опытный работник, которому приходилось постоянно считать на счетах, мог производить операции сложения и вычитания с большой скоростью, гораздо быстрее, чем это делается по обычной методике, на бумаге, складывая и вычитая в столбик. Самым выдающимся специалистам по работе со счетами удавалось даже обогнать электрические настольные счетные машины.

Используя счеты, вы легко можете показать, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Неважно, какое число вы первым выставили на счетах. Вы можете сначала отложить семь, а потом восемь, или наоборот, сумма останется той же самой. Это пятнадцать. Так что запомните это правило хорошенько: от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Изображаем числа при помощи букв

Итак, мы выяснили, какая полезная и удобная вещь – счеты. Но ведь результаты вычислений надо как-то записывать. И в Древнем Вавилоне, и в Древнем Египте велись систематические записи налогов, податей, запасов, поступивших в закрома правителей, и многого другого. Конечно, можно записывать числа словами, как это сделано в начале главы, например двести пятьдесят три тысячи сто двенадцать. Такую запись можно было сделать на любом языке, но это довольно утомительно и неудобно. На помощь пришли сокращения и обозначения.

Уже в древности писцы использовали различные знаки, символы и буквы алфавита для записи чисел. Мы с вами рассмотрим систему буквенных изображений чисел, которую использовали древние римляне. Она используется до сих пор. Римские цифры мы можем увидеть на памятниках, на общественных зданиях, на циферблатах часов, в дипломах и юбилейных грамотах, так что они всем нам хорошо знакомы.

Число один в римской системе обозначалось как I, два – II, три – III, четыре – IIII, пять – V (возможно, это схематичное изображение ладони с отведенным в сторону большим пальцем), шесть – VI, семь – VII, восемь – VIII, девять – VIIII, десять – X (возможно, этот значок обозначал две ладони с отведенными большими пальцами, одну с пальцами, направленными вверх, другую – с пальцами вниз). Дальше идет пятьдесят – L, сто – C, пятьсот – D, тысяча – M.

Так число тысяча девятьсот пятьдесят восемь в римской системе записи будет выглядеть как MDCCCCLVIII (то есть одна тысяча + пятьсот + сто + сто + сто + + сто + пятьдесят + пять + один + один + + один).

Обратите внимание, в римской системе записи чисел определенный символ всегда обозначал одно и то же число, независимо от того места в строке, которое он занимал. Скажем, вместо MDCCCCLVIII можно написать CLCDIIVCMCI, и это будет то же самое число. Единственная причина, которая заставляла писцов располагать символы в порядке убывания справа налево, – это удобство считывания числа. Примерно так же, как при игре в бридж – значимость карты всегда остается постоянной, но игроки раскладывают их в порядке убывания справа налево.

В наши дни используют немного измененную систему обозначения. Меньший символ ставят перед большим, когда его надо вычесть из большего. Например, мы привыкли число четыре записывать как IV, а не IIII, а девятьсот как CM, а не DCCCC. Это усовершенствование древнеримской системы записи чисел было введено уже в Средние века с целью сокращения записи, и древние римляне им не пользовались.

Итак, в римской системе записи значение символа не зависело от его положения, то есть эта система отличается от системы обозначения на счетах, где значение числа зависит от того, в каком ряду оно находится.

Тем не менее и в римской системе обозначения чисел можно производить действия сложения. Например, нам надо сложить MDCCCCLVIII и MMCCCCLXXII. Запишем новое число, записав знаки обоих чисел вместе. Мы получим:

MMMDCCCCCCCCLLXXVIIIII.

Теперь упростим это выражение:

Пять единиц или IIIII – это V, а два раза по пятьдесят (LL) – это сто (C).

Произведем замену и получим:

MMMDCCCCCCCCCXXVV.

Но две пятерки (VV) – это десять, а пять сотен (CCCCC) – это пятьсот (D). Произведем еще одну замену и получим следующий результат:

MMMDDCCCCXXX.

Но пятьсот и пятьсот (DD) – это тысяча (M), проводим последнюю возможную замену и получаем окончательный результат:

MMMMCCCCXXX,

то есть четыре тысячи четыреста тридцать.

Не сомневайтесь, опытный писец в Древнем Риме мог молниеносно проделать эту операцию. Но есть масса других, крайне необходимых операций с числами, которые очень легко выполнить на счетах и крайне трудно – используя римские цифры.

Именно отсутствие рациональной системы записи чисел остановило развитие математики в Древней Греции, поскольку греки записывали числа не менее громоздким и неудобным способом, чем римляне. Если бы величайший математик древности Архимед владел современной системой записи чисел, он смог бы задолго до Ньютона прийти к идее дифференциального исчисления, а это на восемнадцать веков ускорило бы прогресс науки.

В IX веке нашей эры какой-то индиец, имя которого не сохранилось, разработал ту систему счисления, которой человечество пользуется и в наши дни. Из Индии эта система распространилась на Арабский Восток, а арабы принесли ее в Европу. Поэтому наши цифры и называются арабскими, хотя правильнее было бы называть их индийскими. Индийская система просто моделировала систему изображения чисел при помощи счетов, и об этом речь пойдет несколько позже. Совершенно непонятно, почему этого открытия пришлось ждать так долго, ведь счеты были изобретены задолго до того, как вошли в обиход арабские цифры.

Глава 2

НИЧТО – И НЕЧТО, ЕЩЕ МЕНЬШЕЕ,

или Как важно иметь свободный ряд

В основе индийской системы счета – цифры от одного до девяти. Они видоизменялись во времени, но уже к XVI веку приобрели в Европе современный привычный вид: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Казалось бы, здесь нет ничего нового. И древние греки, и древние иудеи использовали для чисел различные символы. И у тех и у других первые девять букв алфавита использовались для обозначения чисел от 1 до 9. Следующие девять букв обозначали числа десять, двадцать, тридцать и так далее до девяноста. Следующие девять букв обозначали сотни: сто, двести, триста и так далее до девятисот. Двадцать восьмая буква обозначала тысячу. Таким образом, двадцати восьми букв было достаточно для обозначения числового ряда от единицы до тысячи. Когда букв алфавита было недостаточно, добавляли специальные символы или измененное написание букв.

Однако использование буквенных обозначений приводит к путанице понятий. Например, число 15 в древнееврейском написании представляет собой первые две буквы в слове «бог», то же самое относится и к сочетаниям некоторых других букв.

С другой стороны, при такой системе каждому слову можно было приписать определенное числовое значение, что и было сделано для многих слов в Библии. Такая процедура называется «гематрией». Таким образом, многие слова, включая имена собственные, получали особое мистическое и оккультное толкование.

Наиболее известный пример такого толкования слов – это использование слова «зверь» в Откровении Иоанна Богослова (то есть в Апокалипсисе), которое соответствовало числу 666. Скорее всего, имя какого-то властителя, которое в те времена опасно было даже произносить, также составляло число 666, если его изобразить буквами древнегреческого или древнееврейского алфавита. Возможно, этим властителем был император Нерон. С тех давних пор люди часто зашифровывали имена своих врагов в виде чисел.

В индийской системе, в отличие от древнееврейской и древнегреческой, для обозначения всех возможных чисел использовалось всего девять цифр, так же как и на счетах, где на каждом ряду одно и то же количество костяшек. Это было необходимо, чтобы придать цифрам определенную значимость в зависимости от положения, которое они занимали.

Например, если мы хотим выложить число двадцать три на счетах, то в нижнем ряду, в ряду единиц, мы откладываем три костяшки, а в следующем ряду, в ряду десятков, мы откладываем две костяшки. В индийской системе это число записывается как 23, и, когда мы его видим, мы сразу понимаем, что данное число состоит из двух десятков и трех единиц.

Соответственно число тридцать два будет записано как 32, где 3 – это количество десятков, а 2 – количество единиц. Поскольку значимость цифры зависит от положения, то числа 32 и 23 – это совершенно разные числа.

Маловероятно, что хитроумные древние греки не могли разработать подобной системы, ведь удалось же им сделать множество чрезвычайно важных открытий в самых разных областях. Настоящим препятствием для них, а также для всех остальных, помимо индийцев, на пути развития методов счета явилась проблема свободного ряда на счетах.

Предположим, вам надо вместо двадцати трех изобразить число двести три. На счетах вы отложите три костяшки в нижнем ряду, не отложите ни одной в следующем ряду, в ряду десятков, и, наконец, в ряду сотен отложите две костяшки.

А как записать это число в индийской системе? Двадцать три мы записываем как 23, а число двести три, казалось бы, будет выглядеть точно так же, 23, только теперь 2 будет обозначать число сотен.

А теперь перейдем к тысячам. Как отложить на счетах число две тысячи три?

Три костяшки откладываем в нижнем ряду, ни одной в следующем ряду, в ряду десятков, ни одной в следующем ряду, в ряду сотен, и, наконец, в ряду тысяч отложим две костяшки.

А как записать это число в индийской системе? Опять 23? Только теперь двойка означала бы количество тысяч. Так что же, три разных числа записываются одинаковым образом? Нет, записываются они по-разному, и это стало возможным именно благодаря главному усовершенствованию, введенному в систему счета индийцами.

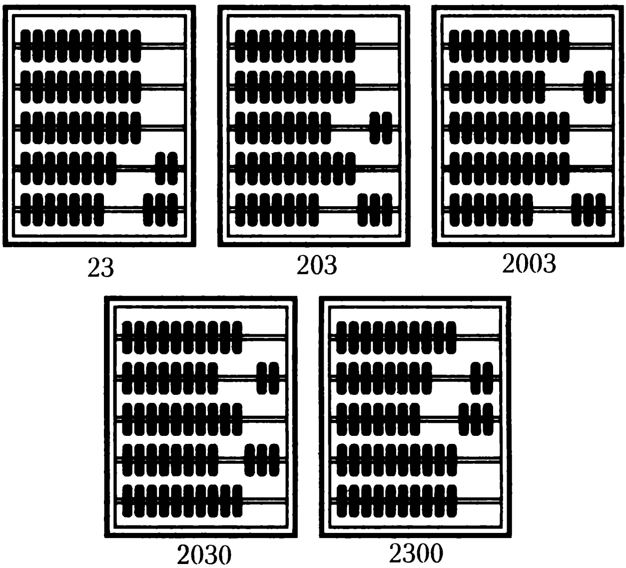
Как можно было бы изобразить эти три числа, чтобы они различались? Можно было бы, скажем, ставить над каждой цифрой определенное количество точек, которое обозначало бы, к какому разряду относится данная цифра, к сотням, тысячам или десяткам. Например, одна точка – единицы, две – десятки, три – сотни, четыре – тысячи:

Но такая система записи громоздка и неудобна, и индийская система основана совсем на другом принципе.

Величайшим достижением древних индийцев стало введение специального символа для отсутствующего разряда, то есть для того ряда на счетах, на котором не передвинуто направо ни одной костяшки. Арабы называли этот символ «сифр», то есть пустой, в английском языке название трансформировалось в «зеро» в русском языке этот символ получил название «ноль». Но слово «сифр» также прижилось в русском языке. От него произошли слова «цифра», «шифр», «шифровать».

Ноль обозначается как «0». Теперь двести три можно записать как 203, а две тысячи три – как 2003, двести тридцать – как 230, а две тысячи тридцать – как 2030. В каждом случае мы обозначаем нолем тот ряд на счетах, на котором не передвинуты костяшки.

(Двадцать три можно записать также как 0023 или 00023 или даже 000000023, но так никогда не делают. Принято записывать только первый по величине значащий разряд, а на счетах все ряды выше первого значащего приравнены к нулю).



На счетах отложены числа, содержащие ноль

Именно изобретение такой цифры, как ноль, и сделало так называемые арабские цифры удобными и практичными. Это изобретение стало поистине революционным. (Странно, что изобретение «нуля», то есть «ничего», оказалось столь важным для дальнейшего развития человечества. Но еще более странно то, что многие великие математики древности так и не додумались до этого «ничего».)

Переносим счеты на бумагу

Когда мы считаем, используя арабские цифры, то первое, что следует сделать, – это запомнить суммы чисел от нуля до девяти. Как мы учимся считать? Сначала запоминаем, что 1 + 1 = 2, 2 + 3 = 5, 4 + 5 = 9, 6 + 7 = 13 и так далее. Очень важно также усвоить, что 0 + 0 = 0.

Когда мы считаем на счетах, запоминать ничего не надо. Необходимо только научиться считать от одного до десяти. На этом этапе преимущества расчетов при помощи чисел, записанных на бумаге, еще незаметны. Кажется, что счеты удобнее.

А теперь попробуем сложить два больших числа, например 5894 и 2578. Все, что для этого нужно, – это уметь складывать числа в пределах десяти. Сначала разобьем числа на единицы, десятки, сотни и тысячи, то есть на разряды.

$$\begin{array}{lccccccc} & 5000 & \text{и} & 800 & \text{и} & 90 & \text{и} & 4 \\ \text{плюс} & \underline{2000} & \text{и} & \underline{500} & \text{и} & \underline{70} & \text{и} & \underline{8} \\ & 7000 & \text{и} & 1300 & \text{и} & 160 & \text{и} & 12 \end{array}$$

Теперь разобьем число 1300 на 1000 и 300, 160 на 100 и 60, а 12 на 10 и 2. Теперь надо просто прибавить тысячи к тысячам, сотни к сотням, десятки к десяткам. В результате получаем: 8000 и 400 и 70 и 2, то есть 8472.

Упрощенно процесс сложения можно изобразить так:

$$\begin{array}{lr} & 5894 \\ \text{плюс} & \underline{2578} \\ & 8472 \end{array}$$

Упрощение заключается в том, что мы не записываем «нули» и переносим «единицы» в следующий разряд, то есть десятки переносим в колонку десятков и так далее.

Вычитание – это процесс, обратный сложению. Предположим, надо из 531 вычесть 298. Мы также разбиваем числа на разряды:

$$\begin{array}{lccccc} & 500 & \text{и} & 30 & \text{и} & 1 \\ \text{минус} & 200 & \text{и} & 90 & \text{и} & 8 \end{array}$$

Вначале может показаться, что нам придется вычитать 8 из 1, и 90 из 30. Но это не так, мы ведь можем занять один десяток и одну сотню из следующих разрядов. Перепишем таблицу в новом виде:

	400	и 120	и 11		
минус	200	и 90	и 8		
	200	и 30	и 3		

Таким образом, получаем ответ: 233.

Когда мы производим вычитание в столбик, то следуем именно этому принципу, хотя форма записи более упрощенная.

Человек, привыкший считать на счетах, сможет произвести эту операцию гораздо быстрее, чем средний ученик, вычисляющий разность этих двух чисел на бумаге. Однако счеты требуют, кроме всего прочего, наработки чисто механических навыков.

В то же время, когда мы считаем в столбик, мы записываем все этапы, и легко проверить правильность расчетов. Используя счеты, этого сделать нельзя. Метод подсчета в столбик настолько же эффективнее подсчета на счетах, насколько изображение чисел на счетах эффективнее, чем показывать числа на пальцах.

Пересекаем нулевую отметку

Каждый первоклассник, изучающий арифметику, знает, что сложить можно любые два числа. Он также знает, что к вычитанию это правило не относится.

Можно вычесть 5 из 7 и получить 2. Можно вычесть 7 из 7 и получить 0. А можно ли вычесть 8 из 7?

В Древней Греции на этот вопрос отвечали отрицательно. Как можно произвести действие, в результате которого получается меньше, чем ничего? Ведь «ничего» – это последний предел, дальше идти некуда.

Эта точка зрения торжествовала вплоть до 1500-х годов. А в наши дни кажется совершенно очевидным, что могут существовать числа, меньшие, чем ничего, то есть меньшие ноля.

Предположим, у вас есть семь долларов, а тут к вам подходит ваш приятель и напоминает о вашем долге в восемь долларов. Будучи честным человеком, вы тут же возвращаете ему семь долларов и говорите приятелю, что вернете ему остаток в один доллар, как только получите эту сумму.

Теперь у вас осталось меньше, чем ничего, ведь денег у вас нет, а, напротив, есть долг в один доллар. Другими словами, если из семи вычесть восемь, мы получаем число, на единицу меньшее, чем ноль. Что же тут трудного или непонятного?

Предположим, вы собираетесь дойти до города, который находится в семи километрах к югу от того места, где вы находитесь. Итак, вы идете на юг. Проходите один километр, и вам остается пройти еще шесть, проходите два километра, и вам остается еще пять. Проходите семь километров – и вот вы на месте. До города осталось пройти ноль километров.

Но вы настолько рассеянны (или настолько упрямы), что продолжаете двигаться дальше и проходите еще один километр к югу. Итак, вы прошли восемь километров и оказались на расстоянии в один километр к югу от города. Итак, до города было семь километров, вы прошли восемь. Значит, вы получаете число меньше нуля. Конечно, вы можете сказать, что расстояние начало увеличиваться снова. Но ведь теперь вы двигаетесь в противоположном направлении. Разве это одно и то же?

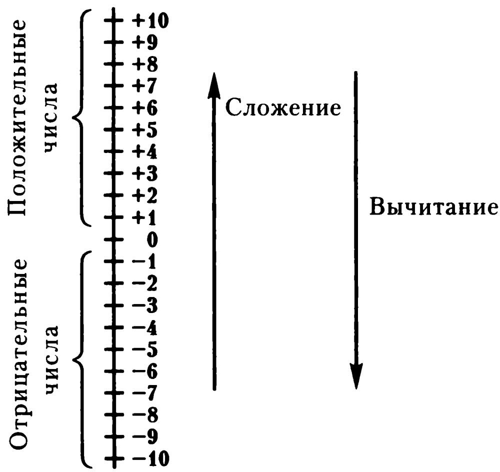
Для того чтобы прояснить ситуацию, нарисуем вертикальную линию и отметим на ней точкой положение города. Эту точку мы будем считать точкой отсчета или нулем. Теперь нанесем на прямую по несколько равных делений выше и ниже нулевой точки. Пусть каждое деление соответствует одному километру.

Числа выше точки отсчета (то есть к северу от города) будем называть обычными (или положительными), а числа ниже точки отсчета (то есть к югу от города) будем называть числами, меньшими нуля, или отрицательными.

Теперь нам понадобится специальный символ, который поможет различить положительные и отрицательные числа. Обычно для этого используют систему обозначений, основанную на способе, которым можно получить это число. Любое положительное число получается в результате сложения других положительных чисел. Символом сложения является знак «+», поэтому положительные числа обозначаются +1, +2, +3 и так далее. Само название «положительное число» говорит о том, что это число реально существует.

Отрицательные числа получаются как результат вычитания, скажем, при вычитании (2 – 3) мы получаем число на единицу меньше нуля. Его обозначают −1. Таким образом, отрицательные числа обозначают −1, −2, −3, и так далее[1].

То, что числа, меньшие нуля, получили название отрицательных, не случайно. Даже когда математики освоили операции с числами, меньшими нуля, надо было подчеркнуть, что эти числа не существуют в действительности.



[1] Символ (+) перед положительным числом появился где-то в 1500-х годах. В те времена операцию сложения обозначали как &, например «2 плюс 3» записывали как «2&3». В скорописи значок «&» постепенно трансформировался в «φ», а потом в «+». Что же касается происхождения знака «—», то на этот счет существует множество различных теорий, но ни одна из них не кажется достаточно убедительной.

Обратите внимание, ноль не является ни положительным, ни отрицательным числом.

Теперь у нас вертикальная размеченная линия, то есть шкала, и мы можем использовать ее для операций сложения и вычитания. Поскольку положительные числа увеличиваются вверх по шкале, а операции сложения положительных чисел приводят к увеличению чисел, будем считать, что сложение – это движение вверх по шкале. Вычитание – это операция, противоположная сложению, поэтому вычитание – это движение вниз по шкале.

Предположим, надо сложить +2 и +5. Записать это выражение можно следующим образом: (+2) + (+5). Скобки нам понадобились по той причине, что необходимо отделить плюс как знак операции сложения от плюсов, обозначающих положительные числа. Но поскольку мы привыкли к тому, что обычно имеем дело с положительными числами, то часто знаки «+» перед положительными числами просто опускают. Тогда получаем: 2 + 5. Необходимо ставить знаки «+» перед положительными числами только в тех случаях, когда надо привлечь особое внимание к знаку числа.

Теперь отложим на нашей шкале два деления вверх. Это число 2. Прибавим еще 5 делений и остановимся на делении 7, то есть 2 + 5 = 7. Мы можем начать с 5 и прибавить два деления. Мы опять получим 7. Тут я еще раз хочу обратить ваше внимание на тот факт, что от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Теперь займемся вычитанием. Предположим, надо вычесть 2 из 5. От точки 5 на шкале мы откладываем вниз два деления и оказываемся в точке 3. Таким образом, получаем 5 – 2 = 3.

Теперь нам надо выяснить, как обращаться с отрицательными числами. Можно ли производить с ними такие же действия, как и с положительными числами? Если да, то они окажутся очень полезными, несмотря на то что не являются «настоящими» числами. И действительно, отрицательные числа нашли широчайшее применение не только в науке и инженерной практике, но и в повседневной деятельности. Они применяются, например, в бухгалтерии, где запасы и доходы обозначаются положительными числами, а расходы – отрицательными.

Проводим операции с отрицательными числами

Начнем с простого примера. Определим, чему равно выражение 2 – 5. От точки +2 отложим вниз пять делений, два до нуля и три ниже нуля. Остановимся на точке –3. То есть 2 – 5 = –3. А теперь обратите внимание, что 2 – 5 совсем не равно 5 – 2. Если в случае сложения чисел их порядок не имеет значения, то в случае вычитания все обстоит по-другому. Порядок чисел имеет значение.

Теперь перейдем в отрицательную область шкалы. Предположим, надо к –2 прибавить +5. (С этого момента и до конца этой главы мы будем ставить знаки «+» перед положительными числами и заключать в скобки как положительные, так и отрицательные числа, чтобы не путать знаки перед числами со знаками сложения и вычитания.) Теперь нашу задачу можно записать как (–2) + (+5). Чтобы ее решить, от точки –2 вверх поднимемся на пять делений и окажемся на точке +3.

Есть ли в этой задаче какой-то практический смысл? Конечно есть. Предположим, у вас есть долг 2 доллара, а вы заработали 5 долларов. Таким образом, после того, как вы отдадите долг, у вас останется 3 доллара.

Можно также двигаться вниз по отрицательной области шкалы. Предположим, нужно из –2 вычесть 5, или (–2) – (+5). От точки –2 на шкале отложим вниз пять делений и окажемся в точке –7. Какой практический смысл у этой задачи? Предположим, у вас был долг 2 доллара и вам пришлось занять еще 5. Теперь ваш долг равен 7 долларам.

Мы видим, что с отрицательными числами можно проводить такие же операции сложения и вычитания, как и с положительными.

Правда, мы еще освоили не все операции. К отрицательным числам мы прибавляли только положительные числа и вычитали из отрицательных чисел только положительные. А как действовать, если надо складывать отрицательные числа или из отрицательных чисел вычитать отрицательные?

На практике это похоже на операции с долгами. Предположим, с вас списали долг 5 долларов, это означает то же самое, как если бы вы получили 5 долларов. С другой стороны, если я каким-то образом заставлю вас принять ответственность за чей-то долг в 5 долларов, это то же самое, что забрать у вас эти 5 долларов. То есть вычесть –5 – это то же самое, что прибавить +5. А прибавить —5 – это то же самое, что вычесть +5.

Это позволяет нам избавиться от операции вычитания. Действительно, «5 – 2» – это то же самое, что (+5) – (+2) или согласно нашему правилу (+5) + (–2). И в том и в другом случае мы получаем один и тот же результат. От точки +5 на шкале нам нужно спуститься вниз на два деления, и мы получим +3. В случае 5 – 2 это очевидно, ведь вычитание – это движение вниз.

В случае (+5) + (–2) это менее очевидно. Мы прибавляем число, а это означает движение вверх по шкале, но мы прибавляем отрицательное число, то есть совершаем обратное действие, и эти два фактора, взятые вместе, означают, что нам надо двигаться не вверх по шкале, а в обратном направлении, то есть вниз.

Таким образом, мы опять получаем ответ +3.

Почему, собственно, нужно заменять вычитание сложением? Зачем двигаться вверх «в обратном смысле»? Не проще ли просто двигаться вниз? Причина заключается в том, что в случае сложения порядок слагаемых не имеет значения, в то же время в случае вычитания он очень важен.

Мы уже выяснили раньше, что (+5) – (+2) – это совсем не то же самое, что (+2) – (+5). В первом случае ответ +3, а во втором –3. С другой стороны, (–2) + (+5) и (+5) + (–2) в результате дают +3. Таким образом, переходя на сложение и отказываясь от операций вычитания, мы можем избежать случайных ошибок, связанных с перестановкой слагаемых.

Аналогично можно действовать при вычитании отрицательного числа. (+5) – (–2) – это то же самое, что (+5) + (+2). И в том и в другом случае мы получаем ответ +7. Мы начинаем с точки +5 и двигаемся «вниз в обратном направлении», то есть вверх. Точно так же мы бы действовали, решая выражение (+5) + (+2).

Замену вычитания сложением ученики активно используют, когда начинают изучать алгебру, и поэтому эта операция называется «алгебраическим сложением». На самом деле это не совсем справедливо, поскольку такая операция, очевидно, является арифметической, а совсем не алгебраической.

Глава 3

В ОБХОД «СЛОЖЕНИЯ»

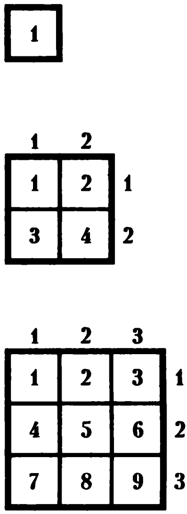
Плюс и полюс и плюс и полюс

Предположим, мы нарисовали квадрат со стороной в 1 дюйм. Такой квадрат можно назвать квадратным дюймом и использовать его как единицу площади.

Теперь нарисуем квадрат со стороной 2 дюйма, затем разделим каждую сторону пополам и разделим квадрат на четыре части. Каждая часть будет представлять собой 1 квадратный дюйм. Проделаем такую же операцию с квадратом со стороной 3 дюйма, но на этот раз каждую сторону разделим на три части. В результате мы получим 9 квадратов площадью 1 квадратный дюйм каждый.

Затем такую же операцию произведем с прямоугольником длиной 9 дюймов и шириной 6 дюймов. После деления мы получим 54 квадрата площадью по 1 квадратному дюйму. Все эти действия показаны на рисунке.

В каждом случае квадраты по 1 квадратному дюйму расположены в горизонтальных рядах и вертикальных столбцах.



Количество квадратов в столбце соответствует длине квадрата или прямоугольника в дюймах, а количество квадратов в ряду – ширине квадрата или прямоугольника в дюймах.

В квадрате площадью 2 квадратных дюйма в каждом из двух столбцов – по два однодюймовых квадрата, 2 + 2 = 4. В трехдюймовом квадрате три столбика, содержащие по три однодюймовых квадрата, 3 + 3 + 3 = 9. В прямоугольнике 6 × 9 мм в каждом из 6 столбцов содержится по 9 однодюймовых квадратов, 9 + 9 + 9 + 9 + + 9 + 9 = 54. Можно просчитать прямоугольник по строкам. В каждой из 9 строк содержится по 6 однодюймовых квадратов, 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 54.

1	2	3	4	5	6	
1	2	3	4	5	6	1
7	8	9	10	11	12	2
13	14	15	16	17	18	3
19	20	21	22	23	24	4
25	26	27	28	29	30	5
31	32	33	34	35	36	6
37	38	39	40	41	42	7
43	44	45	46	47	48	8
49	50	51	52	53	54	9

Площади

В общем виде процедура вычисления площадей геометрических фигур заключается в повторном сложении. В случае квадратов и прямоугольников такие вычисления предельно просты. В случае треугольников и кругов – несколько сложнее. В случае площадей неправильной формы это уже достаточно сложная процедура. Однако площади умели вычислять еще в древних сельскохозяйственных цивилизациях (не будем сейчас обсуждать нашу высокотехнологичную цивилизацию). Уже в глубокой древности производили обмеры земельных участков и вычисляли их площади, как минимум, для того, чтобы определить сумму налога с участка. (У меня вообще есть подозрение, что в древности именно необходимость расчета налогообложения, а не что-либо другое, способствовала интенсивному развитию арифметики.)

Если необходимость повторного счета способствовала созданию операции сложения, то необходимость повторного сложения привела к возникновению нового вида операций с числами.

Начнем с того, что примем новое обозначение и запишем выражение «шесть раз по девять» как 6 × 9. Значок «×» называется знаком умножения. Такая запись означает, что складывают девять раз по шесть или шесть раз по девять. Как я уже показал на предыдущем примере и как вы можете убедиться самостоятельно, просчитав свой собственный пример, неважно, какую из двух операций вы сделаете: $6 \times 9 = 9 \times 6$.

Используя это новое наблюдение, мы можем сформулировать общее правило для вычисления площади квадрата или прямоугольника. Площадь этих фигур равна произведению длины на ширину. Следующий необходимый шаг – найти простой способ осуществления операций умножения. Конечно, мы всегда можем воспользоваться повторным сложением, но такой способ неудобен и в случае больших чисел неэффективен.

Скажем, надо вычислить площадь прямоугольного участка размером 129 футов на 54 фута. Нам понадобится перемножить 129 на 54 или 54 на 129, чтобы получить ответ (в данном случае уже в квадратных футах, а не в квадратных дюймах). Это означает, что нам либо надо просуммировать сто двадцать девять раз число 54, либо, наоборот, пятьдесят четыре раза просуммировать число 129. И то и другое достаточно утомительно.

Или другой пример: на этот раз торговая сделка. Предположим, нам надо оплатить 254 дюжины каких-то предметов, которые стоят по 72 цента за дюжину. В этом случае нам придется умножить 254 на 72, то есть двести пятьдесят четыре раза просуммировать число 72. Такие задачи приходится постоянно решать в повседневной жизни, поэтому нам необходима простая и эффективная процедура умножения.

Один к одному

Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью заучивать что-то наизусть. Необходимо твердо знать таблицу умножения, куда входят все возможные комбинации чисел от 1 и до 9×9 включительно. Школьники затверживают выражения из таблицы, например $5 \times 2 = 10$, $7 \times 8 = 56$ и другие до тех пор, пока цифры не полезут у них из ушей. Но зато, как только этот барьер взят, ребенок понимает, что теперь он знает все, что необходимо для того, чтобы перемножать любые сколь угодно большие числа.

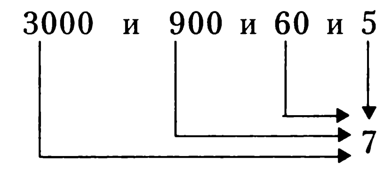
Очень также важно усвоить, что при умножении любого числа на ноль мы всегда получаем ноль. $5 \times 0 = 0$, $155 \times 0 = 0$, $14\,856\,734 \times 0 = 0$. И конечно, $0 \times 0 = 0$. Это утверждение легко проверить путем сложения. Если мы складываем пять нулей, мы получаем ноль, если мы складываем 155 нулей, мы опять получаем ноль, и, сколько бы нулей мы ни складывали, в результате мы всегда получим ноль.

Это значит, что если вы запомнили, что $7 \times 3 = 21$, то вы легко перемножите 70 на 3 или 7 на 30. $70 \times 3 = 210$, $7 \times 30 = 210$. Операции умножения не влияют на нули: если вы производите умножение 70×30, то оба нуля сохраняются: $70 \times 30 = 2100$.

Идем дальше. Нам надо перемножить числа, состоящие из разных цифр, отличных от нуля. Для этого мы разобьем число по разрядам, как мы это уже делали при операции сложения. Например, нам надо найти произведение от умножения 3965×7. (Произведение – это результат перемножения чисел, так же как сумма – это результат сложения.)

Число 3965 можно представить как 3000 + 900 + 60 + 5.

Теперь легко произвести умножение, поскольку каждое из чисел содержит только по одной значащей цифре, а остальные – нули.



$$\begin{array}{r} 35 \\ 420 \\ 6\ 300 \\ \underline{21\ 000} \\ 27\ 775 \end{array}$$

Неважно, в каком порядке производить перемножение. Это можно делать справа налево, слева направо и вразбивку. Я делаю это так, как меня научили в школе, то есть справа налево. Кроме того, в школе нас учат не разбивать числа на разряды и не обращать внимания на нули. Тогда запись предыдущего примера будет проще:

```
  3 965
      7
_______
     35
    42
  63
 21
_______
 27 775
```

Преимущества такой записи при обучении очевидны: ученик быстро и легко осваивает умножение и может быстро перемножать большие числа. Недостаток данной формы записи при обучении состоит в том, что ученик выполняет операции умножения чисто механически и часто не представляет себе, почему он так сделал.

Помимо использования этой сокращенной формы записи, мы также учимся перемножать некоторые числа в уме. Но это все вопросы техники умножения, принцип при этом остается неизменным.

Когда надо перемножить два числа, каждое из которых больше десяти, возникают небольшие дополнительные сложности. При этом мы разбиваем оба числа на разряды и перемножаем каждую часть одного числа на каждую часть другого числа. Таким образом, если надо перемножить 35 и 28, мы делаем это по следующей схеме (стрелки на рисунке показывают порядок умножения, из такой схемы, по-видимому, появился знак умножения «×»)

$$\begin{array}{r} 30 \text{ и } 5 \\ \times\ 20 \text{ и } 8 \\ \hline 40 \\ 100 \\ 240 \\ 600 \\ \hline 980 \end{array}$$

При перемножении больших чисел мы используем ту же методику, но даже упрощенная схема умножения, которой нас учат в школе, требует значительного внимания, иначе можно запутаться в расчетах. Вы можете убедиться в этом на приведенном ниже примере:

$$\begin{array}{r} 3\ 965 \\ \times\ 2\ 197 \\ \hline 27\ 755 \\ 35\ 685 \\ 3\ 965 \\ 7\ 930 \\ \hline 8\ 711\ 105 \end{array}$$

Конечно, и такой метод не очень прост, но он все же гораздо практичнее, чем повторное сложение. Представьте себе, в последнем случае нам пришлось бы складывать 3965 + 3965 + 3965 + 3965 + 3965 + ... и так 2197 раз.

Умножение наоборот

В случае сложения противоположным действием является вычитание, для умножения также есть противоположное действие, которое называется деление. Если умножение – это последовательное многократное сложение, то деление – это последовательное многократное вычитание.

Предположим, вы хотите разделить 15 на 3, это действие записывается как 15 : 3, где знак «:» обозначает деление. Один способ выполнить это действие – последовательно вычитать 3 из 15. Так, 15 – 3 = 12, 12 – 3 = 9, 9 – 3 = 6, 6 – 3 = 3, 3 – 3 = 0. Мы добрались до нуля за пять действий вычитания, то есть 15 : 3 = 5.

Но так, конечно, никто никогда не делает. Вместо этого используют ту же методику, что и в случае умножения. Если мы поделим 15 на 3, мы получим какое-то число, после перемножения которого на 3 мы опять получим 15. Мы прошли вперед, вернулись назад и оказались на первоначальном месте. (С этим мы уже сталкивались при сложении и вычитании, которые также являются обратными процессами. Если $7 - 4 = 3$, то $3 + 4 = 7$).

Таким образом, нашу задачу можно сформулировать следующим образом. На какое число нужно умножить 3, чтобы получить 15? Не сомневаюсь, что вы прекрасно помните таблицу умножения, которую прочно вбивают в голову школьников с младших классов, и поэтому вы автоматически вспоминаете, что для того, чтобы получить 15, надо 3 умножить на 5.

Поскольку $5 \times 3 = 15$, следовательно, $15 : 3 = 5$ и $15 : 5 = 3$. Одна и та же строчка в таблице умножения дает ответ на две задачи деления.

Обратите внимание, при делении, так же как и при вычитании, порядок членов в выражении имеет значение. 5×3 равно

3 × 5, но 15 : 5 не равно 5 : 15. Число, находящееся слева от знака деления, называется делимым; число, находящееся справа от знака деления, называется делителем; результат деления называется частным. Таким образом, в выражении 15 : 5 = 3 15 – это делимое, 5 – это делитель, а 3 – это частное.

То, что деление – это обратный процесс, а значит, наиболее сложная арифметическая операция, знает каждый школьник.

Предположим, вам нужно разделить 7715 на 5. Представляете, сколько раз придется последовательно вычитать 5 из 7715, чтобы добраться до 0 и получить ответ? Таблица умножения не дает ответа на этот вопрос. Что же делать?

В этом случае нам опять поможет умножение на 0. Вы знаете, что 1 × 5 = 5, следовательно, 1000 × 5 = 5000. Это число уже достаточно близко к 7715, но остается еще 2715. Разделим это число на 5. Из таблицы умножения вы знаете, что 5 × 5 = 25, значит, 500 × 5 = 2500, и теперь остается только 215. Пойдем дальше. Поскольку 4 × 5 = 20, следовательно, 40 × 5 = 200.

У нас остается только 15. Это число легко делится на 5, и мы знаем, что ответ – это 3.

Вначале мы умножили 5 на 1000, затем на 500, затем на 40 и, наконец, на 3. Сложим все результаты и получим 1543. Поскольку 1543 × 5 = 7715, следовательно, 7715 : 5 = 1543, это и есть ответ, то есть частное.

$$\begin{array}{r|l} & \underline{1543} \\ 5 & 7715 \\ & \underline{5} \\ & 27 \\ & \underline{25} \\ & 21 \\ & \underline{20} \\ & 15 \\ & \underline{15} \\ & 0 \end{array}$$

Задача деления на числа, большие 10, значительно сложнее, поскольку в таблице умножения максимальный множитель равен 10. Но принцип остается тем же самым, хотя нам приходится сначала «угадывать» ответ, а потом проверять, насколько он правильный.

(Тем не менее наши школьники сталкиваются с гораздо более простой задачей, чем математики древности, ведь у нас – арабские цифры. В те времена, когда арабских цифр еще не применяли, деление больших чисел, или «длинное деление», было настоящим искусством, доступным лишь очень опытным математикам.)

Расположение знаков

В начале этой главы я уже рассказал вам, как складывать и вычитать отрицательные числа.

Теперь давайте разберемся с умножением и делением.

Предположим, нам нужно умножить +3 на –4. Как это сделать?

Давайте рассмотрим такой случай. Три человека залезли в долги, и у каждого по 4 доллара долга. Чему равен общий долг? Для того чтобы его найти, надо сложить все три долга: 4 доллара + 4 доллара + 4 доллара = 12 долларов. Мы с вами решили, что сложение трех чисел 4 обозначается как 3 × 4. Поскольку в данном случае мы говорим о долге, перед

4 стоит знак «–». Мы знаем, что общий долг равен 12 долларам, так что теперь наша задача имеет вид $3 \times (-4) = -12$.

Мы получим тот же результат, если по условию задачи каждый из четырех человек имеет долг по 3 доллара. Другими словами, $(+4) \times (-3) = -12$. А поскольку порядок сомножителей значения не имеет, получаем $(-4) \times (+3) = -12$ и $(+4) \times (-3) = -12$.

Давайте обобщим результаты. При перемножении одного положительного и одного отрицательного числа результат всегда будет отрицательным числом. Численная величина ответа будет той же самой, как и в случае положительных чисел. Произведение $(+4) \times (+3) = +12$. Присутствие знака «–» влияет только на знак, но не влияет на численную величину.

А как перемножить два отрицательных числа?

К сожалению, на эту тему очень трудно придумать подходящий пример из жизни. Легко себе представить долг в сумме 3 или 4 доллара, но совершенно невозможно вообразить –4 или –3 человека, которые залезли в долги.

Пожалуй, мы пойдем другим путем. В умножении при изменении знака одного из множителей меняется знак произведения. Если мы меняем знаки у обоих множителей, мы должны дважды сменить знак произведения, сначала с положительного на отрицательный, а затем наоборот, с отрицательного на положительный, то есть у произведения будет первоначальный знак.

Следовательно, вполне логично, хотя немного странно, что $(-3) \times (-4) = +12$.

Положение знака при умножении изменяется таким образом:

положительное число ×
положительное число =
положительное число;
отрицательное число ×
положительное число =
отрицательное число;
положительное число ×
отрицательное число =
отрицательное число;
отрицательное число ×
отрицательное число =
положительное число.

Иначе говоря, перемножая два числа с одинаковыми знаками, мы получаем положительное число. Перемножая два числа с разными знаками, мы получаем отрицательное число.

Такое же правило справедливо и для действия противоположного умножению – для деления.

$$(+12):(+3)=+4;$$
$$(+12):(-3)=-4;$$
$$(-12):(+3)=-4;$$
$$(-12):(-3)=+4.$$

Вы легко можете в этом убедиться, проведя обратные операции умножения. Если в каждом из примеров, приведенных выше, вы умножите частное на делитель, то получите делимое, и убедитесь, что оно имеет тот же самый знак, например $(-3) \times (-4) = (+12)$.

Делить или не делить?

Поскольку мы определили деление как последовательное многократное вычитание, в результате которого получают ноль, оказывается, что оно не всегда возможно. Попробуем разделить 7 на 2.

В результате повторного вычитания мы получим $7 - 2 - 2 - 2 = 1$, и здесь нам придется остановиться. Если мы вычтем еще одну двойку, мы окажемся в области отрицательных чисел. Даже если мы признаём существование отрицательных чисел, а древние о них не знали, мы не можем проводить вычитание в области отрицательных чисел. Предположим, мы делаем еще несколько шагов: $1 - 2 = -1$, следующий шаг: $-1 - 2 = -3$, затем $-3 - 2 = -5$, и так до бесконечности. Где же нам остановиться? Похоже, наша система дала сбой.

Попробуем пойти другим путем. Вспомним о таблице умножения. Конечно, мы не найдем там числа, которое при перемножении на 2 даст 7, но $2 \times 3 = 6$, а $2 \times 4 = 8$.

Следовательно, если мы определяем деление как последовательное вычитание, то в каких-то случаях деление возможно, а в каких-то нет.

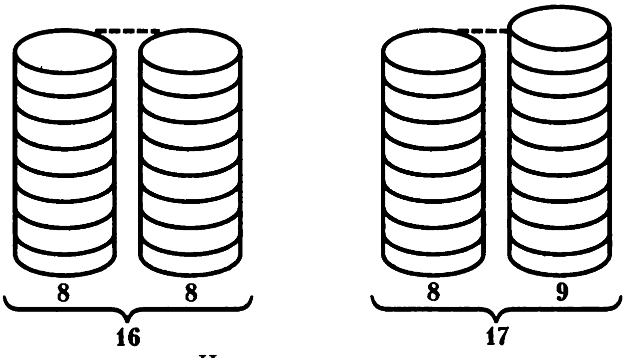
Древних греков изумляло это свойство чисел, и они дали ему своеобразное толкование.

Какие числа делятся на 2, а какие не делятся? 1 не делится, 2 делится, 3 не делится, 4 делится, 5 не делится, 6 делится...

Еще в древние времена числа разделили на те, которые делятся на 2, и на те, которые на 2 не делятся. Математики Древней Греции считали, что числа заключают в себе мистический смысл. По их представлениям, те числа, которые делятся на 2, имеют женское начало и являются несчастливыми. Те числа, которые не делятся на 2, греки считали мужскими и счастливыми. (Учтите, греческие математики были исключительно мужчинами и, конечно, все счастье присвоили себе.)

В обыденной жизни делимость числа на 2 имела большое значение, поскольку часто приходилось делить определенное количество предметов между двумя людьми. Делить по справедливости – это лучший способ избежать ссоры.

Самый простой способ справедливого дележа в те далекие времена, когда люди плохо разбирались в арифметике, – это разложить предметы в две кучки так, чтобы каждому предмету в одной стопке соответствовал один предмет в другой. Представим себе эти предметы в виде фишек, которые можно складывать в столбики (как показано на рисунке). Если общее число предметов делится на 2, то мы получим два столбика и в каждом – одинаковое количество фишек. Если вначале у нас было 16 фишек, то мы получим два столбика одинаковой высоты по 8 фишек, поскольку число 16 делится на 2, то есть является четным числом.



Четное и нечетное

Если же вначале у нас было 17 фишек, то мы получим два столбика неравной высоты, в одном будет 8 фишек, а в другом на одну фишку больше, поскольку число 17 не делится на 2, то есть является нечетным числом. Делимость или неделимость на другие числа также подчиняется определенным зависимостям, но гораздо более сложным, чем разделение чет – нечет.

Греки развлекаются

В области деления было сделано еще одно открытие: некоторые числа делятся нацело более чем на одно меньшее число. Например, 60 делится нацело на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30. Все эти числа называются делителями числа 60. Следовательно, у числа 60 есть десять различных множителей.

Кроме того, есть еще два множителя, о которых я говорил вам раньше. Это единица и само число 60. В конце концов, 60 : 60 = 1, поскольку любое число, поделенное на самое себя, дает единицу. Другой множитель – это 1. Действительно, 60 : 1 = 60. Любое число, поделенное на 1, остается неизменным, то есть 1 – это универсальный множитель.

Поскольку каждое число делится без остатка на единицу и на себя самое, греки, которые с удовольствием решали всякие головоломки, связанные с множителями, просто отбрасывали эти два множителя. Что же может быть в них интересного, если такие множители есть у всех чисел? (Кроме того, теперь мы можем сказать, что у каждого числа есть отрицательные множители. Например, у числа 60 – это –2, –3, –4, –5, –6, –10, –12, –15, –20 и –30. Но грекам отрицательные числа не были известны, и, кроме того, эти отрицательные сомножители фактически не дают нам никакой новой информации, поэтому эти сомножители мы также не будем рассматривать.)

Если у числа 60 10 сомножителей, то его соседям по числовой оси не так повезло. Например, у числа 58 только 2 сомножителя, 2 и 29, у числа 62 – 2 и 31. Независимо от того, сколько сомножителей имеет данное число, если такие сомножители существуют, такое число называется составным, поскольку его можно составить из других, меньших чисел, перемноженных между собой. Так, число 58 – это 2 × 29, а число 62 – это 2 × 31.

Число 60 более сложное, поскольку у него несколько сомножителей. Его можно представить как 2 × 30, но и число 30 является составным, и его можно представить как 2×15, причем 15 также составное число, равное 3×5. Таким образом, мы имеем $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Мы не делали никаких попыток разбить на множители числа 2, 3 и 5. Да это и невозможно. Таким же числом, у которого нет других сомножителей, кроме единицы и себя самого, является 29 и 31. Другими словами, мы с вами убедились, что существуют числа, которые невозможно разделить без остатка на другие сомножители, кроме единицы и самого числа.

Числа, которые невозможно разбить на сомножители, называются простыми числами, в отличие от составных чисел, которые на множители разбить можно. Люди часто видят в числах какой-то мистический смысл, и с этой точки зрения могло бы показаться, что именно простые числа появились первыми, ведь любые составные числа получаются при перемножении простых чисел. Скажем, после того, как появились числа 2, 3 и 5, можно составить число 60, равное $2 \times 2 \times 3 \times 5$.

Может показаться, что если мы пойдем вверх по числовой оси, то возможность найти следующее простое число уменьшается и в конце концов какое-то простое число станет самым большим возможным простым числом. Но это не соответствует действительности. Еще 2200 лет тому назад греческий математик Эвклид доказал, что не существует такого сколь угодно большого простого числа, для которого нельзя было бы найти еще большее. То есть самого большого простого числа в принципе не существует.

Как я уже говорил, греки любили разгадывать разные числовые головоломки и выискивать закономерности. Например, они вычисляли суммы сомножителей, на этот раз включая единицу, для разных чисел и смотрели, что же получается. Они выяснили, что суммы сомножителей могут быть меньше, или больше самого числа, или равны самому числу. Например, сумма сомножителей 10 (1, 2 и 5) равна только 8. Число 10 называется неполным числом. Сумма сомножителей числа 12 (1, 2, 3, 4 и 6) равна 16, то есть она больше самого числа. Такие числа, как 12, называются избыточными.

Сумма сомножителей числа 6 (1, 2 и 3) равна самому числу, то же самое относится и к числу 28 (1, 2, 4, и 7). Такие числа греки называли совершенными.

Есть еще одна забавная закономерность. Сумма сомножителей числа 220 (1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110) равна 284, и в то же время сумма сомножителей числа 284 (1, 2, 4, 71, 142) равна 220. Такие числа греки называли содружественными числами.

Разделение чисел на простые, совершенные, содружественные и так далее не имеет большой практической ценности, но в течение тысячелетий числовые закономерности вызывали восторг и любопытство математиков. Интерес к ним не угас и в наши дни.

Считаем и измеряем

До сих пор мы с вами имели дело с обычными числами, при помощи которых можно пересчитывать различные объекты: 1, 2, 3... Очень часто нам и не требуются другие числа.

Например, подобным числом может быть определено количество мальчиков в классной комнате. В комнате может быть 4 мальчика, 5 мальчиков или другое число мальчиков. В любом случае это будет вполне определенное число. Но вы никак не можете заявить: «Ну, я все тщательно подсчитал, и выяснилось, что в комнате больше чем 4 мальчика, но меньше чем 5. Я думаю, их какое-то промежуточное число, между 4 и 5».

Если вы считаете какие-то объекты, то между 4 и 5 для вас нет никаких других чисел. В комнате либо 4 мальчика, либо 5, но нет никакого промежуточного числа. Если в комнату, где уже находится 5 мальчиков, войдет еще 1, то в комнате окажется 6 мальчиков, причем ровно 6, а не около 6 или чуточку больше 6.

Однако если вы поинтересуетесь, сколько времени мальчики посвятили занятиям, вы можете получить приблизительный ответ: «Они занимались больше одного часа, я не уверен, но, по-моему, меньше двух часов».

В данном случае ответ не лишен смысла, поскольку существует отрезок времени, больший одного часа, но меньший двух часов. Время – это то, что измеряют, а не пересчитывают.

Пересчет и измерение – это разные процессы. При пересчете вы имеете дело с отдельными, или дискретными объектами. Те числа, которые мы с вами изучали в начале книжки, также являются отдельными, или дискретными, и они хорошо соответствуют дискретным объектам. При рассмотрении дискретных объектов нам и не нужны никакие другие числа.

Если же нам приходится измерять что-либо, что не состоит из отдельных объектов, задача сразу же усложняется. Теперь мы имеем дело с протяженностью, или с континуумом, то есть с продолжительностью времени какого-то процесса или длиной какой-нибудь линии.

Обычные дискретные числа не соответствуют протяженным величинам, и их нельзя использовать для измерения таких величин, не рискуя допустить неточность.

Для того чтобы избежать такого несоответствия, следует вставить в ряд дискретных чисел какие-то промежуточные числа. Когда мы это сделаем, числа 1, 2, 3, 4... становятся только малой частью бесконечной системы, которая соответствует таким понятиям, как время, длина, или любому другому континууму.

Со следующей главы мы начнем изучать такие числа, выясним их происхождение и освоим правила расчетов при помощи таких чисел.

Глава 4
РАЗБИТЫЕ ЧИСЛА

Делим единицы

Человечество не могло согласиться с ограничениями в делении. Предположим, надо разделить два яблока между четырьмя детьми. Совершенно бесполезно объяснять им, что такое деление невозможно, поскольку нет такого числа, которое после умножения на 4 даст 2. И ни одна мать так не сделает. Она попросту разрежет каждое из яблок пополам и даст каждому из детей половину (или приготовит из этих яблок пюре).

Следуя этой системе, человечество уже давно научилось разбивать основные единицы измерения на более мелкие и присваивать этим новым единицам собственные названия. Например, в американской системе измерения объема существует единица, называемая кварта, если кварту разделить пополам, получим две новые единицы, пинты. Если у вас есть две кварты пива, на которое претендуют четыре человека, то каждый получит по одной пинте.

Можно делить единицы и на числа, большие 2. Например, бушель (еще одна американская мера объема) можно разделить на 4 пека, а пек – на 8 кварт. Один фунт можно разделить на 16 унций, а 1 кварту на 32 жидкие унции. Все эти числа являются результатом деления какой-то величины на две части, затем каждую из этих частей снова делили пополам и так далее.

Можно, например, разделить 1 кварту между двумя людьми, если каждому дать по 16 жидких унций (а это как раз 1 пинта). А если надо разделить одну кварту между четырьмя людьми, то каждому можно дать по 8 жидких унций (то есть по полпинты). Если же у нас 8 человек, то каждому достанется по 4 жидкие унции (или по 1 джиллу).

Все это замечательно, но что делать, если надо разделить что-то между тремя? Мы не можем разделить кварту, в которую входят 32 унции, на три, поскольку 32 не делится на 3. Кварту удобно делить между 16 или 32.

Следовательно, было бы полезно выбрать какую-нибудь единицу, которая содержала бы максимальное количество сомножителей. Одним из таких чисел является 12. В одном футе 12 дюймов, 12 тройских унций содержится в тройском фунте, а 12 – это, как известно, дюжина.

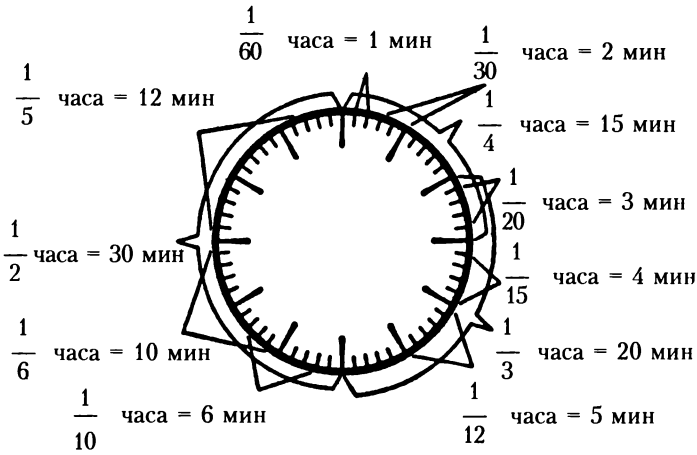
Обратите внимание на дюжину, это очень полезная единица. Если у вас есть дюжина яблок, вы можете поделить их на две группы по 6, на 3 группы по 4, на 4 группы по 3, на 6 групп по 2, и на 12 групп по одному. Очень важно, что 12 делится не только на 2 и 4, но также и на 3.

Дюжины раньше часто использовали в торговле, ведь дюжину легко разбить на несколько более мелких частей различными путями. Существовала также единица, которая являлась дюжиной дюжин (это гросс), которая равнялась 12 × 12 или 144. У числа 144 много сомножителей. Это 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48 и 72.

Такая система удобна и практична, ее легко применять в повседневной жизни, и кое-кто даже жалеет о том, что в основе нашей системы исчисления лежит 10, а не 12. У числа 190 есть только два множителя, это 2 и 5. Десять не делится ни на 3, ни на 4. Единственная причина, по которой в основе системы оказалось число 10, – это то, что у нас по 5 пальцев на каждой руке. А вот если бы их было бы по 6...

У числа 10 есть одно преимущество перед 12. Число 10 делится на 5, а 12 – нет. Древние вавилоняне пытались соединить в одном числе все достоинства чисел 10 и 12. Такое число должно делиться не только на 2, 3, и 4, но и на 5. Наименьшим таким числом является 60. Это число используется и в астрономии. Год составляет 365 дней и несколько часов. Год – это то время, за которое Солнце совершает свой (кажущийся) круговой путь по небу относительно неподвижных звезд. Если полный круг разделить на величину пути, которое Солнце проходит за день (то есть на «путь-день»). Мы получим 365 долей круга.

У вавилонян год равнялся 360 дням (либо они неправильно вычислили продолжительность года, либо просто округлили 365 до 360 для удобства вычислений). С этим числом удобно работать, поскольку 360 – это 60 × 60. Поэтому они делили небесную сферу и другие круги на 360 равных частей, которые мы в наши дни называем градусами. Затем каждый градус они делили на 60 частей, которые мы называем минутами, а каждую минуту еще на 60 частей, на 60 секунд.



Час, состоящий из 60 минут.

Мы до сих пор придерживаемся вавилонской системы. Более того, поскольку время измеряется по движению крупных небесных тел на небосклоне, наш час разделен на 60 минут, а минута – на 60 секунд.

При подсчете времени мы находим также следы системы, основанной на 12. День и ночь разделены на 12 часов. В древности, до того как были изобретены часы, длина часа менялась в зависимости от времени года. Зимой дневные часы были короче, чем летом, а ночные длиннее. В наши дни продолжительность часа принята постоянной, поэтому летом светлое время длится дольше, чем зимой, ночное, наоборот, – короче.

Тем не менее на циферблате наших часов только 12 чисел, и, следовательно, мы определяем время между 1 часом ночи и 1 часом дня. (В армии принято считать время после 12 как 13, 14 и так далее часов, но обычно в быту мы не используем таких обозначений.)

Части единицы

То, что обычный человек сделал с обычными единицами измерения, смогут сделать математики со своими абстрактными числами.

Почему бы не разделить единицу на две равные части, на три, на четыре и так далее? Для того чтобы такое деление не было бесполезным, надо присвоить этим частям единицы собственные названия. Затем надо найти удобный символ для этих частей единицы. И наконец, надо разработать систему, которая позволит оперировать с этими частями и производить обычные арифметические операции.

Далее, если с долями чисел можно манипулировать так же, как с обычными числами, это означает, что части чисел можно рассматривать как обычные числа как в практической, так и в теоретической сфере применения.

Названия для частей чисел пришли из обыденной речи. Две равные части называют половинами. Части, которые получаются при делении числа на какое-то количество долей, называются в соответствии с количеством этих долей, то есть третьи, четвертые, пятые и так далее.

Половина — это то, что получается при делении единицы на 2 части. Другими словами, это 1 : 2. При таком делении мы не получим обычного целого числа, и бессмысленно его искать. Нужно просто выбрать обозначение для данной арифметической операции. Таким обозначением стало $\frac{1}{2}$. Его можно прочесть как одна вторая, или половина. Если мы делим 1 на 3, то получаем соответственно одну третью часть, или одну треть. Если делим на 5, то получаем одну пятую, и так далее. Мы не пытаемся решить эти примеры, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ — это просто обозначения.

Когда мы говорим, что $1 : 3 = \frac{1}{3}$, мы просто утверждаем, что «единица, деленная на 3, равна единице, деленной на 3».

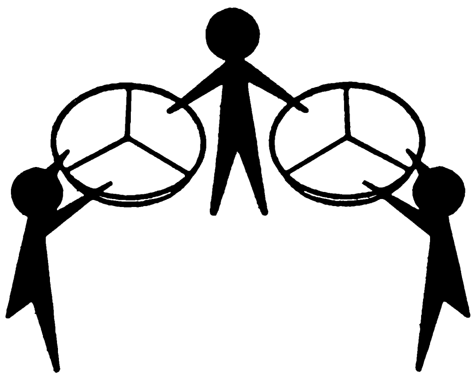
Это звучит обескураживающе. Вы можете спросить: а что такое эта единица, которую мы делим на 3? Ответ совсем прост: а какая разница, что это. Если мы можем манипулировать с величиной $\frac{1}{3}$ как с обычным числом, то этого вполне достаточно.

Эти доли единицы назвали дробями (от слова «дробить»). В отличие от дробей те числа, с которыми мы имели дело рань ше, называются целыми.

Теперь рассмотрим, какие действия можно осуществлять с дробями. Надо выяснить, как складывать и вычитать дроби. Предположим, нам надо сложить $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$. На словах это очень легко объяснить. Одна треть и одна треть вместе дадут две трети (так же как одно яблоко плюс одно яблоко равно двум яблокам).

Затем надо решить, как записать это действие при помощи арифметических символов. Поскольку одна треть — это $\frac{1}{3}$, логично предположить, что две трети — это $\frac{2}{3}$. Но что означает эта величина? Как мы разделим 2 на 3? Предположим, у нас два куска пирога, а детей — трое. Тогда каждый кусок пирога делим на 3, получаем 6 маленьких кусочков. Теперь каждому ребенку можно дать по два кусочка. Таким образом, каждый ребенок получает по $\frac{2}{3}$.

Рассуждая таким образом, мы можем показать, что результат любого деления может быть представлен в виде дроби. Сорок три пирога, разделенные между семидесятью тремя людьми, дадут результат $\frac{43}{73}$, то есть каждый человек получит по $\frac{43}{73}$ части пирога.



Вернемся к сложению и умножению. Мы показали, чему равно $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, также можно показать, что $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$, а $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Мы вывели общее правило. При сложении и вычитании дробей с одинаковыми знаменателями (знаменателем называется та часть дроби, которая записана под чертой) необходимо вычесть числитель одной дроби из числителя другой.

То же правило распространяется на умножение дроби на целое число. Умножается только числитель дроби. Произведение $\frac{1}{7}$ на 6 равно $\frac{6}{7}$; $\frac{18}{23}$, деленное на 9, равно $\frac{2}{23}$. Точно так же, как с яблоками: одно яблоко, умноженное на 6, — это 6 яблок, а 18 яблок, поделенных на 9, — это 2 яблока.

В процессе сложения может оказаться, что числитель достигнет величины знаменателя. Например, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$, или $\frac{1}{3}\times 3$.

Чему равно $\frac{3}{3}$?

Очевидно, если вы разделите единицу на три части, а потом сложите снова все эти три части, вы получите первоначальное число, то есть единицу. Другими словами, $\frac{3}{3} = 1$, и это выражение соответствует нашему определению дроби, то есть $3 : 3 = 1$.

Точно так же $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{27}{27}$, $\frac{109476}{109476}$ равны единице.

А что, если нам надо $\frac{1}{3}$ умножить на 4?

Мы получим ответ $\frac{4}{3}$, а что означает такое выражение? Дробь $\frac{4}{3}$ может быть представлена в виде $1 + \frac{1}{3}$, или $1\frac{1}{3}$, или одна целая и одна треть.

В школе учеников обычно приучают к тому, чтобы выделять максимально возможную целую часть из дроби. То есть превращать $\frac{4}{3}$ в $1\frac{1}{3}$, $\frac{27}{5}$ в $5\frac{2}{5}$ и так далее. Однако делать это преобразование не всегда необходимо. На самом деле арифметические действия с $\frac{4}{3}$ и $\frac{27}{5}$ производить удобнее, чем с $1\frac{1}{3}$ и $1\frac{1}{3}$.

По существу, в большинстве случаев стремление выделить целую часть дроби вызвано только природным консерватизмом, а не соображениями целесообразности.

Дроби, меньшие 1, то есть дроби, у которых числитель меньше знаменателя, называют правильными дробями. И наоборот, дроби, у которых числитель больше знаменателя, называют неправильными, то есть даже название этих дробей имеет оттенок неодобрения.

Тем не менее не следует забывать, что действия со всеми дробями производят по одним и тем же правилам. И с математической точки зрения и те и другие дроби равным образом правильные.

Знаменатель вступает в игру

Рассмотрим дробь $\frac{6}{3}$. Ее величина равна 2, так как $\frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$.

А что произойдет, если числитель и знаменатель умножить на 2? $\frac{6}{3} \times 2 = \frac{12}{6}$. Очевидно, величина дроби не изменилась, так как $\frac{12}{6}$ также равно 2. Можно умножить числитель и знаменатель на 3 и получить $\frac{18}{9}$, или на 27 и получить $\frac{162}{81}$, или на 101 и получить $\frac{606}{303}$. В каждом из этих случаев величина дроби, которую мы получаем, разделив числитель на знаменатель, равна 2. Это означает, что величина дроби не изменилась.

Такая же закономерность наблюдается и в случае других дробей. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{120}{60}$ (равной 2) разделить на 2 (результат $\frac{30}{60}$), или на 3 (результат $\frac{40}{20}$), или на 4 (результат $\frac{30}{15}$) и так далее, то в каждом случае величина дроби остается неизменной и равной 2.

Это правило распространяется также на дроби, которые не равны целому числу. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{3}$ умножить на 2, мы получим $\frac{2}{6}$, то есть величина дроби не изменилась. И в самом деле, если вы разделите пирог на 3 части и возьмете одну из них или разделите его на 6 частей и возьмете 2 части, вы в обоих случаях получите одинаковое количество пирога. Следовательно, числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$ идентичны.

Сформулируем общее правило. Числитель и знаменатель любой дроби можно умножить или разделить на одно и то же число, и при этом величина дроби не изменяется. Это правило оказывается очень полезным. Например, оно позволяет в ряде случаев, но не всегда, избежать операций с большими числами.

Например, мы можем разделить числитель и знаменатель дроби $\frac{126}{189}$ на 63 и получить дробь $\frac{2}{3}$, с которой гораздо проще производить расчеты. Еще один пример. Числитель и знаменатель дроби $\frac{155}{31}$ можем разделить на 31 и получить дробь $\frac{5}{1}$, или 5, поскольку $5 : 1 = 5$.

В этом примере мы впервые встретились с дробью, знаменатель которой равен 1. Такие дроби играют важную роль при вычислениях. Следует помнить, что любое число можно разделить на 1 и при этом его величина не изменится. То есть $\frac{273}{1}$ равно 273; $\frac{509993}{1}$ равно 509993 и так далее. Следовательно, мы можем не разделять числа на целые и дробные, поскольку каждое целое число можно представить в виде дроби со знаменателем 1.

С такими дробями, знаменатель которых равен 1, можно производить те же арифметические действия, что и со всеми остальными дробями: $\frac{15}{1} + \frac{15}{1} = \frac{30}{1}$; $\frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{12}{1}$.

Вы можете спросить, какой прок от того, что мы представим целое число в виде дроби, у которой под чертой будет стоять единица, ведь с целым числом работать удобнее. Но дело в том, что представление целого числа в виде дроби дает нам возможность эффективнее производить различные действия, когда мы имеем дело одновременно и с целыми, и с дробными числами.

Предположим, нам надо сложить $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$. Мы знаем, что складывать можно только те дроби, знаменатели которых равны. Значит, нам нужно научиться приводить дроби к такому виду, когда их знаменатели равны. В этом случае нам опять пригодится то, что можно умножать числитель и знаменатель дроби на одно и то же число без изменения ее величины.

Сначала умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{3}$ на 5. Получим $\frac{5}{15}$, величина дроби не изменилась. Затем умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{1}{5}$ на 3. Получим $\frac{3}{15}$, опять величина дроби не изменилась. Следовательно,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}.$$

Теперь попробуем применить эту систему к сложению чисел, содержащих как целую, так и дробную части.

Нам надо сложить $3+\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}$. Сначала переведем все слагаемые в форму дробей и получим: $\frac{3}{1}+\frac{1}{3}+\frac{5}{4}$. Теперь нам надо привести все дроби к общему знаменателю, для этого мы числитель и знаменатель первой дроби умножаем на 12, второй — на 4, а третьей — на 3. В результате получаем $\frac{36}{12} + \frac{4}{12} + \frac{15}{12}$, что равно $\frac{55}{12}$. Если вы хотите избавиться от неправильной дроби, ее можно превратить в число, состоящее из целой и дробной частей:

$$\frac{55}{12} = \frac{48}{12} + \frac{7}{12}, \text{ или } 4\frac{7}{12}.$$

Дроби, меньшие нуля

Все правила, позволяющие проводить операции с дробями, которые мы с вами только что изучили, также справедливы и в случае отрицательных чисел. Так, $-1 : 3$ можно записать как $\frac{-1}{3}$, а $1 : (-3)$ как $\frac{1}{-3}$. Поскольку как при делении отрицательного числа на положительное, так и при делении положительного числа на отрицательное в результате мы получаем отрицательные числа, в обоих случаях мы получим ответ в виде отрицательного числа. То есть $(-1) : 3 = \frac{-1}{3}$ или $1 : (-3) = \frac{1}{-3}$. Знак минус при таком написании относится ко всей дроби целиком, а не отдельно к числителю или знаменателю.

С другой стороны, $(-1) : (-3)$ можно записать как $\frac{-1}{-3}$, а поскольку при делении отрицательного числа на отрицательное число мы получаем положительное число, то $\frac{-1}{-3}$ можно записать как $+\frac{1}{3}$.

Сложение и вычитание отрицательных дробей проводят по той же схеме, что и сложение, и вычитание положительных дробей. Например, что такое $1 - 1\frac{1}{3}$? Представим оба числа в виде дробей и получим $\frac{1}{1} - \frac{4}{3}$. Приведем дроби к общему знаменателю и получим $\frac{(1 \times 3)}{(1 \times 3)} - \frac{4}{3}$, то есть $\frac{3}{3} - \frac{4}{3}$, или $-\frac{1}{3}$.

Глава 5

РАЗБИВАЕМ НА ДЕСЯТКИ

Избегаем операций деления

Продолжаем разбираться с дробями. Мы уже выяснили, как умножать и делить дроби на целые числа. А как умножить дробь на дробь или разделить дробь на дробь?

Предположим, нам надо разделить $\frac{1}{3}$ на 2 части. Все три третьих части вместе составят единицу. Если каждую из этих частей разделить пополам, получим 6 частей, которые вместе также составляют 1. Поскольку каждая из этих меньших частей составляет одну шестую, мы можем утверждать, что одна вторая от одной третьей равна одной шестой. Рассуждая таким же образом, мы можем показать, что одна вторая от одной четвертой равна одной восьмой, а одна третья от одной четвертой – соответственно одной двенадцатой.

Действия с дробями удобно записывать в такой форме:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Мы используем знак «×», поскольку правильный ответ мы получаем при перемножении знаменателей. А как обстоит дело с числителями? На первый взгляд кажется, что числитель не изменяется, но ведь $1 \times 1 = 1$. Поэтому, чтобы ответить на этот вопрос, надо выяснить, как обстоит дело с дробями, числитель которых отличается от 1. Предположим, нам надо разделить 10 на пять равных частей. Каждая часть будет равна одной пятой от 10. Поскольку $10 : 5 = 2$, следовательно, одна пятая часть от десяти составляет 2. Выражение «одна пятая от десяти» записывается как $\frac{1}{5} \times 10$. Теперь попробуем представить это выражение в виде дроби. Во первых, $\frac{1}{5}$ может быть преобразована в $\frac{2}{10}$, если числитель и знаменатель дроби умножить на 2. Затем 10 можно представить как $\frac{10}{1}$, умножить числитель и знаменатель на 3 и получить $\frac{30}{3}$.

Теперь мы можем сказать, что $\frac{1}{5} \times 10$ — это то же самое, что $\frac{2}{10} \times \frac{30}{3}$. Теперь, если мы перемножим числитель на числитель и знаменатель на знаменатель, то получим $2 \times \frac{30}{10} \times 3$, то есть $\frac{60}{30}$, или 2, а это именно тот ответ, который мы ожидали получить.

Рассмотрим другой пример. Предположим, при перемножении $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ мы перевели дроби в $\frac{4}{12}$ и $\frac{6}{12}$, умножив числитель и знаменатель соответственно на 4 и на 6. Теперь мы имеем: $\frac{4}{12} \times \frac{6}{12}$ равно $\frac{24}{144}$, если при перемножении мы следуем схеме «числитель × числитель», «знаменатель × знаменатель». Теперь разделим числитель и знаменатель ответа, $\frac{24}{144}$, на 24 и получим $\frac{1}{6}$, то есть тот ответ, который мы считаем верным результатом при перемножении $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$.

Точно так же проводят операции деления. Числитель делимого делят на числитель делителя, а знаменатель делимого – на знаменатель делителя. $\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = (10 : 5) : (21 : 7)$, или $\frac{2}{3}$, но здесь могут возникнуть осложнения. Что делать в одном или обоих случаях, если деление нацело невозможно? Тогда может оказаться, что и числитель, и знаменатель будут представлять собой дроби, то есть мы получим дроби внутри дробей.

К счастью, такого деления можно избежать.

Давайте вернемся к нашей предыдущей задаче, когда мы делили 10 на 5 равных частей. Мы получили ответ 2 в обоих случаях, то есть $10 : 5$ и $10 \times \frac{1}{5}$. Число 5 можно представить в виде дроби $\frac{5}{1}$, а эту дробь можно рассматривать как перевернутую дробь $\frac{1}{5}$. Такие дроби, то есть две дроби, у которых числитель первой равен знаменателю второй и, наоборот, знаменатель первой дроби равен числителю второй, называют обратными. Очевидно, $\frac{5}{1}$ — это перевернутая дробь $\frac{1}{5}$, то есть дроби $\frac{1}{5}$ и $\frac{5}{1}$ являются обратными, точно так же обратными являются дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; дроби $\frac{55}{26}$ и $\frac{26}{55}$ и так далее. Далее, если мы утверждаем, что при делении $10 : 5$ мы получаем тот же результат, что и при умножении $10 \times \frac{1}{5}$, это означает, в свою очередь, что при делении на данное число мы получаем такой же результат, как и при умножении на число, обратное данному. (Обратите внимание, что только делитель можно заменять на обратное число, к делимому это не относится.) Раньше мы с вами уже убедились, что $\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$. Предположим, вместо деления мы провели умножение на обратную дробь: $\frac{10}{21} \times \frac{7}{5} = \frac{70}{105}$. Теперь разделим числитель и знаменатель этой дроби на 35. Мы получим $\frac{2}{3}$, то есть именно тот результат, который и ожидали получить.

Теперь мы можем поделить $\frac{5}{7}$ на $\frac{2}{3}$, не опасаясь получить дроби внутри дробей, поскольку вместо деления мы проведем умножение на обратную дробь.

$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2}$ и получим ответ $\frac{15}{14}$.

При перемножении дробей следует помнить, что порядок, в котором перемножаются дроби, не имеет значения. Например,

$\frac{10}{21} \times \frac{7}{5}$ – это то же самое, что $\frac{10}{5} \times \frac{7}{21}$.

В первом случае мы получаем ответ $10 \times \frac{7}{21} \times 5$, а во втором – $10 \times \frac{7}{5} \times 21$, наконец, в обоих случаях мы получаем результат $\frac{70}{105}$, или (после деления на 35) $\frac{2}{3}$.

Следует отметить, что второй вариант удобнее. В первом варианте дроби $\frac{10}{21}$ и $\frac{7}{5}$ невозможно сократить, во втором варианте дроби $\frac{10}{5}$ и $\frac{7}{21}$ легко сокращаются. $\frac{10}{5}$ – это $\frac{2}{1}$, а $\frac{7}{21}$ – это $\frac{1}{3}$, таким образом, выражение $\frac{10}{5} \times \frac{7}{21}$ преобразовалось в $\frac{2}{1} \times \frac{2}{3}$.

Удобнее работать с меньшими числами, поэтому обычно числитель и знаменатель дроби делят на одно и то же число, не делая никаких перестановок.

Например, в примере $\frac{7}{10} \times \frac{17}{49}$ можно разделить числитель одной дроби и знаменатель другой на одно и то же число (7). Тогда выражение упрощается и приобретает вид: $\frac{1}{10} \times \frac{17}{7}$. Такой пример решается гораздо легче, ответ $\frac{17}{70}$, причем, разумеется, каким бы методом мы его ни решали, он не изменяется. Но второй способ, с привлечением сокращения дробей, значительно легче. Прием «сокращения» дробей при перемножении настолько удобен, что многие ученики пытаются внедрить его и при сложении. Но в этом случае прием не работает.

Сумма дробей $\frac{7}{10} + \frac{17}{49}$ – это совсем не то же самое, что $\frac{1}{10} + \frac{17}{7}$. Сумма первого выражения равна $\frac{513}{490}$, а второго – $\frac{1239}{490}$.

Трудность заключается в том, что при сложении необходимо привести дроби к общему знаменателю. В данном случае это можно сделать, умножив числитель и знаменатель первой дроби на 49, а числитель и знаменатель второй дроби — на 10. Тогда мы получим $\frac{343}{490} + \frac{170}{490}$. Как только вы привели дроби к общему знаменателю, сокращение дроби теряет всякий смысл, потому что оно приведет к тому, что знаменатели дробей опять будут различаться, то есть сложение становится невозможным. Так что при сложении дробей советую вам забыть о сокращении.

Строим дроби строго в ряд

Надо сказать, что с дробями не всегда удобно работать. Как бы ни записали дробь, 1 1/2, или $1\frac{1}{2}$, или $1^1/_2$, она нарушает стройность и логичность позиционной записи чисел.

Скажем, число $3143\frac{3}{4}$ можно расписать при помощи позиционных величин. Это три тысячи плюс одна сотня плюс четыре десятка плюс три единицы и плюс три четвертых. Пока мы не добрались до этой злополучной дроби, все было логично. При переходе слева направо каждая следующая позиция равна одной десятой предыдущей. Другими словами, $1000 \times \frac{1}{10} = 100$; $100 \times \frac{1}{10} = 10$; $10 \times \frac{1}{10} = 1$.

Все прекрасно, но почему нужно останавливаться на единице? Почему бы не продолжить этот ряд дальше направо, в область, меньшую единицы?

Он будет выглядеть вот так: $1 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$; $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$; $\frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ и так далее. Таким образом, если продлим позиционный ряд в область чисел, меньших единицы, мы получим десятые, сотые, тысячные и так далее.

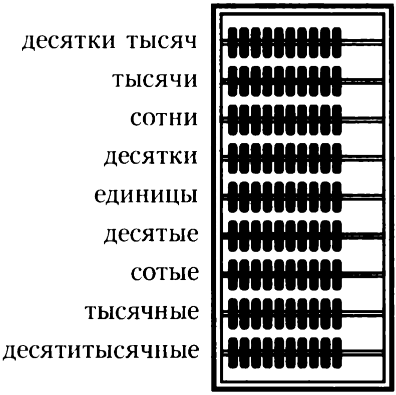
Теперь рассмотрим дробь $\frac{1}{2}$. Если мы умножим числитель и знаменатель на одно и то же число, в данном случае на 5, величина дроби при этом не изменится. В результате получим $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$. Это означает, что число, подобное $55\frac{1}{2}$, можно представить в виде $55\frac{5}{10}$, или 55,5, или пятьдесят пять целых и пять десятых. Мы опять получили позиционное число, но теперь у нас есть дробная часть, отделенная от целой части запятой. Число 55,5 позиционное, и его можно прочесть как пять десятков плюс пять единиц плюс пять десятых.

Рассмотрим еще одну дробь, $\frac{3}{4}$. Если мы умножим числитель и знаменатель на одно и то же число, в данном случае уже на 25, и при этом величина дроби не изменится. В результате получим $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$, или $\frac{70}{100} + \frac{5}{100}$, или $\frac{7}{10} + \frac{5}{100}$. Это означает, что число, подобное $55\frac{3}{4}$, можно представить в виде $55\frac{75}{100}$, или 55,75, или пятьдесят пять целых и семьдесят пять сотых. Мы опять получили позиционное число, и теперь у нас есть дробная часть, отделенная от целой части запятой. Число 55,75 позиционное, и его можно прочесть как пять десятков плюс пять единиц плюс семь десятых плюс пять сотых.

Дроби, представленные в виде определенного количества десятых, или сотых, или тысячных и так далее, то есть в виде позиционного числа, называются десятичными. Запятая, отделяющая целую часть от дробной, называется десятичной запятой.

Десятичную дробь, меньшую единицы, можно было бы записать как 7. Но существует реальная возможность того, что в процессе вычислений знак запятой потеряется и дробь превратится в целое число. Поэтому выбрали такую форму записи, когда отсутствующая целая часть заменяется нулем, и наша дробь приобретает вид 0,7 (то есть ноль единиц плюс семь десятых, но можно сказать просто семь десятых). Кроме того, $\frac{7}{10}$ можно записать как 0,70, или 0,700, или 0,7000, или 0,70000000000. Добавление сотого, тысячного, десятитысячного и так далее знаков после последнего значащего числа в десятичной дроби не изменяет ее величины.

Основное преимущество десятичных дробей заключается в том, что сложение и вычитание можно производить, не думая о дробной части, и оперировать с дробным числом как с целым. Можно воспользоваться и счетами. Для этого ряд единиц надо расположить посередине счетов, вверх идут ряды десятков, сотен, тысяч и так далее, а вниз десятые, сотые, тысячные и так далее. На таких счетах можно складывать и вычитать и сотни, и сотые, и тысячи, и тысячные и так далее.



Счеты для десятичных дробей

Те же правила справедливы при подсчетах на бумаге. Предположим, надо сложить $1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4}$, сохраняя выражение в обычных дробях. Сначала надо привести дроби к виду $\frac{3}{2} + \frac{7}{4}$, затем приводим их к общему знаменателю $\frac{6}{4} + \frac{7}{4}$, что равно $\frac{13}{4}$, или $\frac{31}{4}$.

А теперь проведем сложение в десятичных дробях.

$\frac{11}{2} = 1{,}5$, а $\frac{13}{4} = 1{,}75$.

Проведем сложение в столбик:

$$\begin{array}{r} 1{,}50 \\ +\ 1{,}75 \\ \hline 3{,}25 \end{array}$$

Обратите внимание, мы записали число 1,5 в виде 1,50 потому, что у второго числа есть значащая цифра в разряде сотых. Если мы этого не сделаем, то возникает опасность ошибки из за неправильной записи:

$$\begin{array}{r} 1{,}5 \\ +\ 1{,}75 \end{array}$$

В десятичных дробях мы получили ответ 3,25, или 3 плюс $\frac{2}{10}$ плюс $\frac{5}{100}$. Если теперь провести сложение, мы получим $3\frac{1}{4}$, то есть тот ответ, который мы признали правильным.

На практике нет никакой необходимости перескакивать от десятичных дробей к обычным дробям. Освоив однажды действия с десятичными дробями, вы сможете с их помощью проводить все расчеты быстро и относительно легко.

Американский здравый смысл и американская бессмыслица

Примером того, насколько удобна и эффективна десятеричная система, является американская денежная система. Она является десятеричной по своей природе. Рассмотрим ее, начиная с самых мелких монет, давно вышедших из обращения. 10 милей равны 1 центу, 10 центов равны 1 дайму, 10 даймов равны 1 доллару, 10 долларов равны одному иглу. (На самом деле ни мили, ни иглы практически не используются, но нам сейчас важен принцип.) Иглом (или орлом) раньше называли золотую монету номиналом в 10 долларов, которую чеканили в Соединенных Штатах. Название монета получила благодаря орлу, символу страны, изображенному на реверсе. В Великобритании золотая монета называлась совереном, поскольку на ней было изображение монарха, суверена. Сейчас золотые монеты вышли из обращения, и названия «игл» и «соверен» также постепенно забываются. А раньше имели хождение не только иглы, но и двойные иглы (20 долларов золотом), половинки иглов (5 долларов золотом) и четвертинки иглов (2,5 доллара золотом).

Десятеричная система распространяется на большие суммы. Так, единица С-ноут – это 100 долларов, а гранд – 1000 долларов.

Благодаря такой системе все денежные суммы можно всегда расписать в виде десятичных дробей. Если у вас в кармане 13,26 доллара, значит, вы имеете 1 десятидолларовый банкнот, 3 банкнота по 1 доллару, 2 десятых доллара, то есть 2 дайма, и 6 сотых доллара, то есть 6 центов.

Но, возможно, у вас другие купюры и монеты. Например, 1 пятидолларовая купюра, 1 купюра в 2 доллара, одна однодолларовая купюра, 5 полудолларов, 9 монет по четверти доллара, 4 дайма, 2 никеля и 1 пенни. Однако номиналы всех этих странных монет всегда записываются в виде десятичных дробей. Полдоллара никогда не записывается как $1/2, а только как $0,5. Четверть доллара всегда записывается как $0,25; дайм как $0,10, никель как $0,05 и, наконец, пенни как $0,01.

(Можно записывать номиналы не в долларах, а в центах, но и в этом случае десятеричная система сохраняется.)

Мы все так привыкли к удобству десятеричной системы при денежных операциях, что уже не задумываемся об этом. Однако такая система существовала не всегда. Старая британская денежная система была основана на других принципах. Самой мелкой монетой был фартинг, 4 фартинга составляли 1 пенни, 12 пенсов составляли 1 шиллинг, а 20 шиллингов – 1 фунт. Англичанам приходилось нелегко, когда надо было заниматься денежными подсчетами. Как сложить 4 фунта, 8 шиллингов, 2 пенса и 15 фунтов, 19 шиллингов и 11 пенсов? (Ответ составит 20 фунтов, 8 шиллингов, 1 пенни, но я не собираюсь объяснять, как я подсчитал эту сумму). В свое время британским школьникам приходилось тратить уйму времени для того, чтобы научиться оперировать с денежными единицами. В то же время американские школьники начинали легко осваивать арифметику, как только к ним в руки попадали первые монетки.

Однако и в Америке достаточно бессмыслицы в том, что касается единиц измерения, правда, не денежных, а единиц измерения длины, веса и объема. Большинство стран мира, за исключением Соединенных Штатов и еще нескольких государств, уже давно перешло на метрическую систему мер и весов, принятую еще в 1791 году во Франции.

Метрическая система является десятеричной. Рассмотрим для примера единицы длины. Основная единица длины в метрической системе – это метр (который равен 39,37 дюйма). От этой единицы и получила название вся система. (Слово «метр» пришло к нам из латыни (metrum), где оно означает «измерять». Приставки для различных единиц длины, о которых я расскажу ниже, также пришли из латыни и греческого. Греческие приставки используют для обозначения единиц, больших метра (дека – десять, гекто – сто и кило – тысяча), а латинские – для единиц, меньше метра (деци, санти и милли – это соответственно десять, сто и тысяча).

Десять метров составляют декаметр, десять декаметров – один гектометр, а десять гектометров – один километр. Можно пойти в сторону уменьшения. Одна десятая часть метра – это один дециметр, одна десятая часть дециметра – это один сантиметр, а одна десятая часть сантиметра – это один миллиметр.

Это означает, что если какое-то расстояние равно 2 километрам, 5 гектометрам, 1 декаметру, 7 метрам, 8 дециметрам, 2 сантиметрам и 9 миллиметрам, значит, это расстояние равно 2517,829 метра. С такими мерами просто проводить любые вычисления. Скажем, если у вас есть два объекта, один длиной 2 метра, 8 дециметров и 9 сантиметров, а другой длиной 5 метров, 5 дециметров и 5 сантиметров, то общая длина двух объектов составит 2,89 + 5,55 или 8,44 метра, или, что то же самое, 8 метров, 4 дециметра и 4 сантиметра.

А теперь давайте сравним эту систему с английской и американской системой измерения длины. Основная единица в этой системе — дюйм. 12 дюймов составляют 1 фут. 3 фута составляют

1 ярд. $5\frac{1}{2}$ ярда составляет один род, 40 родов равны 1 ферлонгу, а 8 ферлонгов — это 1 миля. Это, разумеется, слишком сложно, и роды и ферлонги в наши дни практически не используются. Было принято, что 1760 ярдов ($5\frac{1}{2} \times 40 \times 8$) составляют 1 милю. Попробуйте ка теперь подсчитать, чему будет равняться сумма 1 мили и 1632 ярдов плюс 2 мили и 854 ярда. Ответ: 4 мили и 762 ярда. Интересно, догадаетесь ли вы, как я получил эту сумму и сможете ли повторить мои расчеты.

Теперь перейдем к более мелким единицам. Попробуем сложить 3 ярда 2 фута 8 дюймов и 5 ярдов 2 фута и 7 дюймов. Ответ: 9 ярдов 2 фута и 3 дюйма. Как я это сосчитал?

Американским школьникам приходится тратить уйму времени на то, чтобы научиться обращаться с этим разнообразием единиц измерения. А ведь, помимо единиц длины, есть еще единицы объема, веса, площади, и каждая из этих систем измерения включает массу сложных и бессмысленных элементов. Разумеется, школьники никогда толком и не знают всех этих единиц и соотношений между ними.

Детям в России гораздо легче. У нас принята метрическая система, с которой нет никаких хлопот.

Почему же в Соединенных Штатах и Великобритании не переходят на удобную метрическую систему мер? Во-первых, в наши дни это потребует значительных капиталовложений, поскольку все станки, инструменты и системы конструирования придется переводить на новую систему измерений. Но основное препятствие – это приверженность традициям. Люди неохотно отказываются от привычных стереотипов, и для того, чтобы склонить их на сторону новой системы, потребовались бы принудительные меры со стороны правительства. А британцы и американцы не привыкли к принуждению. Это тоже традиция.

В то же время и британские, и американские ученые уже давно перешли на метрическую систему. Причем в Америке ее иногда применяют самым неожиданным образом. Например, когда экономистам и банковским работникам приходится проводить операции с большими суммами денег, они шутливо называют их «килобаксами» (слово «бакс», обозначающее доллар, пришло в разговорную речь из сленга игроков в покер). Миллионы баксов аналогично называют «мегабаксами». (Греческое слово «мега» означает «большой». В метрической системе это слово обозначает миллион.)

Определяем положение десятичного знака

Я думаю, вы согласитесь со мной в том, что система десятичных дробей подобна раю на земле, особенно если ее сравнить с системой обычных дробей. Но как у любого рая на земле есть оборотная сторона, так и у системы десятичных дробей есть свои недостатки. Например, необходимо очень тщательно следить за положением десятичной запятой.

Например, рассмотрим пример умножения: $0{,}2 \times 0{,}2$.

Вы можете попробовать решить этот пример по аналогии со сложением: $2 + 2 = 4$, также $2 \times 2 = 4$, тогда, поскольку $0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$. Возможно, и $0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}4$?

Нет, этого не может быть, и я сейчас докажу вам это.

Перейдем обратно к обыкновенным дробям, с которыми мы научились так хорошо обращаться. $0{,}2 = \frac{2}{10}$. Теперь перемножим дроби по старой методике: $\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$ (числитель умножаем на числитель, знаменатель на знаменатель). А $\frac{4}{100}$ в десятичных дробях — это 0,04. Следовательно, $0{,}2 \times 0{,}2$ отнюдь не равно 0,4. $0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$. Мы можем решить еще несколько примеров на умножение десятичных дробей, заменяя их на эквиваленты в обычных дробях. Например: $0{,}82 \times 0{,}21 = 0{,}1772$, а $0{,}82 \times 2{,}1 = 1{,}772$. (Это можно проверить следующим образом: $\frac{82}{100} \times \frac{21}{100} = \frac{1722}{10\,000}$, а $\frac{82}{100} \times \frac{21}{10} = \frac{1722}{1000}$.)

Теперь мы можем сформулировать общее правило: при перемножении десятичных дробей количество цифр справа от десятичной запятой в ответе равно общему количеству цифр справа от десятичной запятой в перемножаемых числах.

Так, при умножении $0,2 \times 0,2$ общее количество цифр справа от десятичной запятой в перемножаемых числах равно 2, и это означает, что $0,2 \times 0,2 = 0,04$ (ноль справа от десятичной запятой также является значащей цифрой).

Естественно, что если один из сомножителей является целым числом, то он не влияет на положение десятичной запятой. Положение десятичной запятой в произведении будет таким же, как и в том сомножителе, который является десятичной дробью.

То есть $0,2 \times 2 = 0,4$; $1,5 \times 5 = 7,5$; а $1,1 \times 154 = 169,4$.

Эти результаты соответствуют правилу умножения, и в любом случае количество цифр справа от десятичной запятой в ответе равно общему количеству цифр справа от десятичной запятой в перемножаемых числах.

Определить положение десятичной запятой в случае деления можно по аналогичной методике, действуя в обратном порядке. Но обычно при делении процедуру стараются упростить и приводят делитель или знаменатель (если деление проводят с помощью обычных дробей) к виду целого числа, не содержащего значащих чисел справа после запятой.

Предположим, нам надо 1,82 разделить на 0,2. Это выражение можно записать как $\frac{1{,}82}{0{,}2}$. Не изменяя величины дроби, умножаем числитель и знаменатель на 10. Тогда 1,82 × 10 (в соответствии с правилом определения положения десятичного знака) равно 18,20, или 18,2, поскольку ноль, стоящий справа после последней значащей цифры, не изменяет величины числа и, следовательно, его можно опустить. Точно так же 0,2 × 10 = 2,0, или просто 2 (поскольку 2 плюс ноль десятых равно 2).

Следовательно, дробь можно записать как $\frac{18{,}2}{2}$, и теперь знаменатель является целым числом, следовательно, при делении положение десятичного знака после запятой не меняется, так же как и в случае деления. Раз в числителе одна значащая цифра справа после запятой, то и результат должен иметь одну значащую цифру справа после запятой, то есть $\frac{18,2}{2} = 9,1$.

Освоив деление десятичных дробей, мы сможем переводить обычные дроби в десятичные. Предположим, нам нужно найти десятичный эквивалент для $\frac{1}{40}$. Мы можем представить эту дробь в виде $\frac{1,000}{40}$, а затем произвести деление. Поскольку мы делим на целое число, то положение десятичной запятой не меняется. Проведем деление:

$$\begin{array}{r|l} & .025 \\ \hline 40 & 1,000 \\ & \underline{80} \\ & 200 \\ & \underline{200} \\ & 0 \end{array}$$

Таким образом, мы показали, что десятичный эквивалент $\frac{1}{40}$ равен 0,025. Это можно проверить, переведя 0,025 в обычную дробь.

$$0{,}025 = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}, \text{ или } \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000},$$

или $\frac{25}{1000}$, или если произвести деление, то получим $\frac{1}{40}$, как мы и предполагали.

Передвигаем десятичную запятую

Вернемся к примерам умножения на 10. В предыдущих параграфах мы умножали 1,82 на 10 и получили 18,2. Обратите внимание, что умножение на 10 фактически просто сводится к тому, что мы перемещаем знак десятичной запятой на единицу вправо. Точно так же умножение на 100 сводится к перемещению знака десятичной запятой на две единицы вправо, а умножение на 1000 — соответственно на три единицы. В этом вы легко сможете убедиться самостоятельно.

Деление на 10 сводится к действию, обратному умножению, в данном случае к перемещению знака десятичной запятой на одну единицу влево, деление на 100 — на две единицы влево, а деление на 1000 — соответственно на три единицы влево.

Поскольку 1,82 : 10 согласно правилу обратных дробей равно также 1,82 × 0,1, что, в свою очередь, равно 0,182. Такой же ответ мы бы получили, если бы согласно правилу перемещения десятичной запятой передвинули запятую на один знак влево.

Поскольку умножение или деление на 10 приводит просто к сдвигу положения десятичной запятой, удобно перейти к процентам.

Давно стало привычным, что люди или организации, которые предоставляют деньги в долг, получают обратно помимо одолженной суммы определенную добавочную сумму в оплату за предоставление кредита. Эта сумма получила название «процент».

Эта сумма предоставляется в качестве компенсации за то, что кредитор остается на какое то время без своих денег, кроме того, она является компенсацией риска не получить своих денег назад. Например, частное лицо или организация могут попросить 6 долларов годовых процентов за каждые одолженные 100 долларов.

Поскольку очень часто эти «проценты» вычисляются из расчета на каждые 100 долларов (слово «процент» пришло к нам из латинского языка, где «per cent» означает «на сотню»).

Обычно при подсчете доходов, наценок и комиссионных, а также многих других параметров используют проценты.

Один процент — это фактически 1 доллар на каждые 100, то есть $\frac{1}{100}$. Чтобы найти один процент от любого числа, нужно передвинуть положение десятичной запятой на две единицы влево. Так, 1 процент от 1350 долларов равен 13,50 доллара. Сумма, составляющая 6 процентов от 1350, должна равняться $6 \times \times (\frac{1}{100}) \times 1350 = 6 \times 13{,}50$, или 81,00.

Десять процентов комиссионных составляют $\frac{10}{100}$ от исходного числа, то есть $\frac{1}{10}$.

В этом случае десятичная запятая передвигается на один знак влево. А 10 процентов комиссионных составят 135 долларов.

Иногда при подсчетах процентов возникают некоторые проблемы. Например, 1 процент комиссионных от суммы 675,37 доллара составит 6,7537 доллара. Для практических целей не нужно больше двух знаков после десятичной запятой, и остальные цифры округляются. После округления комиссионные равны 6,75. Все эти соотношения хорошо работают при десятичной денежной системе. Для старой британской денежной системы процентные исчисления не очень удобны. Не очень просто найти 10 процентов от 135 фунтов 10 шиллингов. По моим подсчетам, это 13 фунтов 11 шиллингов, попробуйте сосчитать и вы.

Десятичные дроби без конца

В десятичной системе возникает много серьезных проблем и помимо определения положения десятичного знака. Дело в том, что некоторые дроби невозможно представить в виде обычных десятичных эквивалентов.

Рассмотрим, например, $\frac{1}{3}$. Попробуем представить ее в виде десятичной дроби. Для того чтобы вычислить соответствующую десятичную дробь, надо записать $\frac{1}{3}$ как $\frac{1{,}00000000}{3}$ и провести деление следующим образом:

$$
\begin{array}{r|l}
 & .3333...... \\
3 & 1{,}00000000 \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\underline{9} & \\
10 & \\
\underline{9} & \\
10 &
\end{array}
$$

Нет смысла продолжать деление дальше, вы уже убедились, что его можно продолжать бесконечно.

Десятичный эквивалент для $\frac{1}{3}$ – это 0,333333333... и так далее.

В качестве следующего примера возьмем дробь $\frac{1}{7}$.

Представим ее в виде $\frac{1,00000000}{7}$ и проведем деление. (Эту операцию я полностью доверяю читателю.) Получаем следующий десятичный эквивалент:

$\frac{1}{7}$ = 0,142857142857142857142857... и так далее. Обращаю ваше внимание на то, что десятичным эквивалентом $\frac{1}{7}$ является бесконечная периодическая десятичная дробь. Десятичный эквивалент является бесконечной дробью как в случае $\frac{1}{3}$, так и в случае $\frac{1}{7}$, но в случае $\frac{1}{3}$ мы имеем бесконечное повторение цифры 3, а в случае $\frac{1}{7}$ – бесконечное повторение последовательности цифр 142857.

Это примеры периодических десятичных дробей.

По существу, все десятичные дроби можно рассматривать как бесконечные периодические, поскольку в конце любой конечной десятичной дроби можно поставить бесконечное количество нулей и ее значение при этом не изменится. Например, десятичный эквивалент $\frac{1}{2}$ равен 0,5. Но это число можно представить в виде 0,500000000000 с бесконечно повторяющимся нулем.

Иногда бесконечно повторяющуюся цифру в периодической десятичной дроби обозначают точкой, поставленной сверху. Так, $\frac{1}{3}$ можно обозначить как $0,\dot{3}$, а $\frac{1}{2}$ как $0,5\dot{0}$. Если периодически повторяется группа чисел, ее заключают в скобки и точку ставят над одной из цифр этой группы. Так, $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Действительно, любую дробь можно представить в виде бесконечного десятичного эквивалента (даже если этой бесконечно повторяющейся цифрой будет 0), и, наоборот, любая бесконечная периодическая дробь может быть представлена в виде конечной недесятичной дроби, то есть в виде соотношения целых чисел.

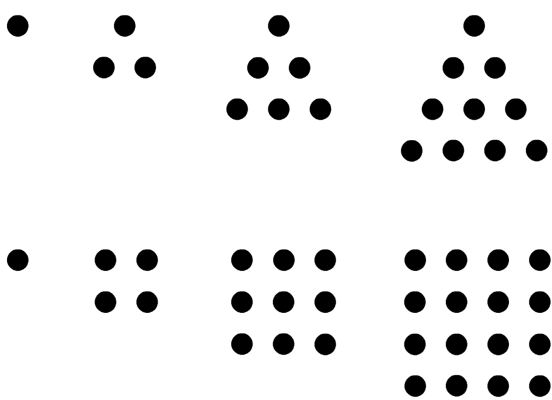
У вас, конечно, возник вопрос: а как оперировать с бесконечными периодическими десятичными дробями при арифметических действиях. Можно, например, использовать недесятичный эквивалент, скажем, вместо 0,333333... использовать $\frac{1}{3}$. Но при решении сложных научных и инженерных задач, как ни странно, бесконечные периодические десятичные дроби не создают никаких затруднений. Однако существуют другие сложные в обращении, но необходимые при решении серьезных проблем числа, и о них я вам расскажу в следующих главах.

Глава 6

ФОРМА ЧИСЕЛ

Еще немного греческих развлечений

Греческие математики занимались в основном геометрией и много времени проводили подсчитывая количество точек, расположенных на плоскости в форме различных геометрических фигур. Количество точек, которые составляют треугольник, называют треугольными числами.



Треугольные и квадратные числа

Можно представить себе сверхмикроскопический треугольник, состоящий из одной точки. Три точки также образуют треугольник, у которого по две точки на каждой стороне. Шесть точек образуют уже больший треугольник, у которого по три точки на каждой стороне, а десять точек – треугольник, у которого по четыре точки на каждой стороне.

Можно записать треугольные числа в ряд: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 и так далее. Каждое следующее треугольное число образует треугольник, у которого на каждой стороне на одну точку больше. Ряд треугольных чисел можно продолжать бесконечно.

Обратите внимание, ряд треугольных чисел образует определенную зависимость. Первое число равно 1, следующее равно 3, то есть 1 + 2, затем идет 6, то есть 1 + 2 + 3, затем 10, то есть 1 + 2 + 3 + 4, затем 15, то есть 1 + 2 + 3 + 4 + 5, и так далее. Запомнив эту зависимость, вы сможете продолжать ряд треугольных чисел сколь угодно долго, не составляя треугольников и не пересчитывая точки. Определить, является ли данное число треугольным или нет, можно, представив его в виде ряда, подобного приведенному выше. Если число можно представить в виде суммы чисел, где каждое следующее число на единицу больше предыдущего, а первое число является единицей, то это число – треугольное.

Любая группа чисел, которая может быть представлена в виде последовательности, подчиняющейся какому-то правилу, образует ряд.

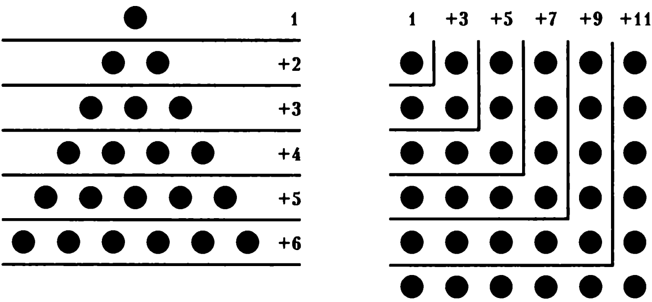
Числа, являющиеся количеством точек, из которых можно составить квадрат, тоже можно представить в виде ряда. Как и в прошлый раз, одну точку можно рассматривать как сверхмикроскопический четырехугольник. Четыре точки также образуют четырехугольник, у которого по две точки на каждой стороне. Девять точек образуют уже больший четырехугольник, у которого по три точки на каждой стороне, а шестнадцать точек – четырехугольник, у которого по четыре точки на каждой стороне.

Можно записать четырехугольные числа в ряд: 1, 9, 16, 25, 36, 49 и так далее. Каждое следующее четырехугольное число образует четырехугольник, у которого на каждой стороне на одну точку больше. Ряд четырехугольных чисел можно продолжать бесконечно.

Проанализировав числа, составляющие ряд четырехугольных чисел, мы увидим, что они тоже подчиняются определенной зависимости. Начнем с 1. Здесь нет вариантов, единица – это просто единица. Но уже 4 = 1 + 3, далее 9 = 1 + 3 + 5, 16 = 1 + 3 + 5 + 7 и так далее.

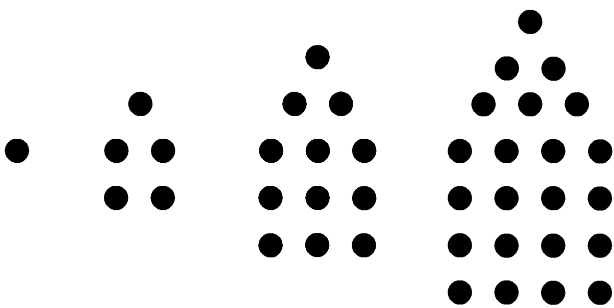
Таким образом, каждое число является суммой последовательных нечетных чисел, первое из которых единица.

Соотношение между числами треугольного и квадратного рядов показано на диаграмме.



Соотношения в рядах треугольных
и квадратных чисел

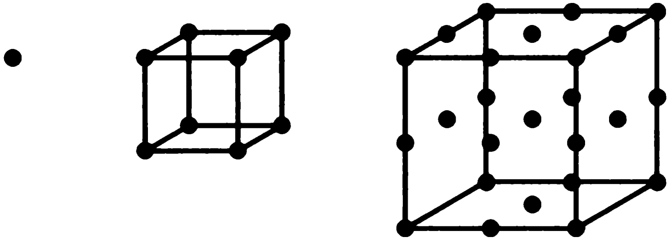
У греков был также ряд пентагональных чисел, которые представлены на рисунке. Этот ряд можно рассматривать как некий синтез треугольных и четырехугольных рядов. Если мы построим несколько пятиугольников таким же образом, как строили треугольники и четырехугольники, то получим числовой ряд вида 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 и так далее. Это ряд чисел, которые получают сложением чисел, отличающихся друг от друга на три. Первый член ряда – это единица. Второй – 5, то есть 1 + (1 + 3) = 1 + 4. Третий – 12, то есть 1 + 4 + (4 + 3) = 1 + 4 + 7, четвертый – 22, то есть 1 + 4 + 7 + 10, и так далее.



Пентагональные числа

Греки изобрели и другие геометрические фигуры, моделирующие числовые ряды. Числа, составляющие такие последовательности, называются фигурными. Некоторые фигурные числа моделируются уже не плоскими фигурами, как треугольник и квадрат, а объемными, например кубами. Такие кубы трудно изобразить на рисунке, но если вы внимательно посмотрите на числовой ряд, вы сможете составить себе какое-то представление о кубической фигуре из точек. Серия кубических чисел – это ряд 1, 8, 27, 64, 125 и так далее.

Ряд кубических чисел также представляет собой ряд сумм нечетных чисел, правда, эти суммы не начинаются с единицы. Первый член ряда – это 1, второй – 8 или 3 + 5; третий – это 27 или 7 + 9 + 11; четвертый – это 64 или 13 + 15 + 17 + + 19. Каждая группа чисел, которые надо суммировать, начинается с нечетного числа, следующего за тем, которое завершало предыдущую сумму, а количество слагаемых в каждой следующей сумме на одно больше, чем в предыдущей.



Кубы

Восклицательный знак !

Все ряды, которые мы до сих пор рассматривали, составляются при помощи повторных операций сложения. Но существуют и другие виды рядов, например ряд, который составляется при помощи повторного умножения.

Предположим, у вас есть четыре разноцветные бусины, которые надо нанизать. Сколько различных цветовых сочетаний можно составить из этих бусин?

Предположим, у нас красная, желтая, голубая и зеленая бусины (на самом деле для этого примера подошли бы любые цвета). Начать ряд можно с любого цвета, значит, у нас есть четыре возможных варианта. Выбираем одну из них, тогда нам надо нанизать еще три, следовательно, у нас есть 4 × 3, или 12 возможных вариантов. Осталось еще две бусины, и вы можете нанизать или одну из двух оставшихся бусин, что дает нам 4 × 3 × 2, или 24 возможных варианта. Теперь у нас осталась только одна бусина, следовательно, у нас есть 4 × 3 × 2 × 1, или 24 возможных варианта. На рисунке представлены все возможные 24 варианта цветовых комбинаций.

	>	ж	>	с	>	з	>	кжсз	(1)
			>	з	>	с	>	кжзс	(2)
к	>	с	>	ж	>	з	>	ксжз	(3)
			>	з	>	ж	>	ксзж	(4)
	>	з	>	ж	>	с	>	кзжс	(5)
			>	с	>	ж	>	кзсж	(6)
	>	к	>	с	>	з	>	жксз	(7)
			>	з	>	с	>	жкзс	(8)
ж	>	с	>	к	>	з	>	жскз	(9)
			>	з	>	к	>	жсзк	(10)
	>	з	>	к	>	с	>	жзкс	(11)
			>	с	>	к	>	жзкс	(12)
	>	к	>	ж	>	з	>	скжз	(13)
			>	з	>	ж	>	скжз	(14)
с	>	ж	>	к	>	з	>	сжкз	(15)
			>	з	>	к	>	сжзк	(16)
	>	з	>	к	>	ж	>	сзкж	(17)
			>	ж	>	к	>	сзжк	(18)
	>	к	>	ж	>	с	>	зкжс	(19)
			>	с	>	ж	>	зксж	(20)
з	>	ж	>	к	>	с	>	зжкс	(21)
			>	с	>	к	>	зжск	(22)
	>	с	>	к	>	ж	>	зскж	(23)
			>	ж	>	к	>	зсжк	(24)

Мы видим, что число 24 можно представить как произведение 4 × 3 × 2 × 1. Используя такой же подход, мы можем сосчитать возможные варианты комбинаций из семи бусин различных цветов. Количество таких вариантов составляет 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1, или 5040. Такой же расчет можно провести и для любого другого количества бусин.

Последовательность, составленная перемножением последовательных чисел, называется факториалом. Например, выражение «4 × 3 × 2 × 1» называется «факториал 4», по самому большому числу в этой последовательности сомножителей. Точно так же ряд 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 называется «факториал 7». Обычно для обозначения факториала используют восклицательный знак. Так, «факториал 4» – это 4!, а «факториал 7» – это 7! Использование восклицательного знака вполне обоснованно – восклицательный знак свидетельствует о том, что числа в последовательности увеличиваются очень быстро. Ряд 1!, 2!, 3!, 4! и так далее – это то же самое, что 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40 320, 362 880 и так далее. Двадцатый член этого ряда, или 20!, равен 2 432 932 008 176 640 000.

Квадраты, кубы и так далее

Теперь, если мы опять вернемся к треугольным и квадратным числам, мы легко убедимся в том, что наряду с закономерными соотношениями, включающими операции сложения, существуют закономерные соотношения на основе умножения.

Вернемся в третью главу, где я рассказывал вам о том, как определить площадь квадрата. Надеюсь, вы помните, что площадь квадрата со стороной, равной 1 (например, одному сантиметру, одному метру или любой другой единицы измерения длины), равна 1×1, то есть единице площади, одному квадратному сантиметру, одному квадратному метру или квадрату любой другой единицы измерения длины. Площадь квадрата со стороной 2 равна $2 \times 2 = 4$. Теперь, если мы рассмотрим серию квадратов со сторонами, равными 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее, то их площади будут равны соответственно 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и так далее.

Сопоставив этот ряд с теми рядами, которые мы рассматривали в предыдущих разделах этой главы, вы увидите, что перед нами ряд квадратных чисел, который записан не в прежнем виде 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 16, 1 + 3 + 5 + 7 и так далее, а в виде произведения 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5, 7 × 7 и так далее.

Теперь рассмотрим куб, то есть трехмерную фигуру, у которой есть длина, ширина и высота, причем все они равны между собой. Примером кубов для вас могут быть кубики для какой-нибудь настольной игры или игральные кости. Объем куба вычисляется перемножением длины, ширины и высоты. Доказать это можно с помощью той же методики, которой мы пользовались в третьей главе, вычисляя площадь квадрата или прямоугольника, когда перемножали длину и ширину.

Объем куба со стороной, равной единице, равен соответственно одной кубической единице (1 × 1 × 1 = 1). Объем куба со стороной, равной 2, равен соответственно 2 × 2 × 2 = 8, или восьми кубическим единицам. Можно продолжить такие вычисления, и тогда мы получим, что объем кубов со сторонами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и так далее равен соответственно 1, 8, 27, 64, 125, 216 и так далее. Эти числа можно представить в виде $1 \times 1 \times 1$; $2 \times 2 \times 2$; $3 \times 3 \times 3$; $4 \times 4 \times 4$; $5 \times 5 \times 5$; $6 \times 6 \times 6$ и так далее.

И квадраты, и кубы легко представить, так как мы часто встречаем такие фигуры в обыденной жизни. Но можно отойти от геометрических представлений и составить числовой ряд, где каждое число является произведением четырех, пяти, или шести, или любого другого количества одинаковых сомножителей.

Последовательное перемножение одного и того же числа на себя самое является операцией, которая очень часто используется в математике. В свое время, когда мы рассматривали повторные многократные операции сложения, мы ввели новое понятие и новую математическую операцию – умножение. Например, мы заменили $6 + 6 + 6 + 6$ на 6×4. Точно так же часто используемую операцию умножения $6 \times 6 \times 6 \times 6$ можно кратко записать при помощи нового символа, степенного выражения: 6^4.

Что означает 6^4? Только то, что мы перемножаем число 6 на само себя четыре раза, или $6 \times 6 \times 6 \times 6$. Число 10^5 – это $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$, а 3^2 – это 3×3.

Можно записать ряд квадратов чисел (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2 и так далее) и ряд кубов чисел (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3 и так далее).

Число, которое набрано мелким шрифтом справа вверху от основного числа, называется показателем степени, или экспонентой. Число, содержащее экспоненту, называется экспоненциальным числом. Число, которое возводят в степень, то есть умножают само на себя, называют основанием экспоненциального числа. В выражении 6^4 число 6 – это основание, 4 – экспонента.

Повторное перемножение числа на самое себя называется возведением в степень. Так, 6^4 – это шесть в четвертой степени, аналогично 10^5 – это десять в пятой степени. Можно также сказать просто: шесть в четвертой или десять в пятой. 3^2 и 3^3 можно назвать как три во второй или три в третьей, но чаще, следуя греческой традиции, их называют три в квадрате или три в кубе.

Как обойтись без умножения?

Экспоненциальные числа открывают большие возможности, они позволяют нам преобразовать умножение в сложение, а складывать гораздо легче, чем умножать.

Например, нам надо умножить 16 на 64. Произведение от умножения этих двух чисел равно 1024. Но 16 – это 4×4, а 64 – это $4 \times 4 \times 4$. То есть 16 на $64 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$, что также равно 1024.

Число 16 можно представить также в виде $2 \times 2 \times 2 \times 2$, а 64 как $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, и если произвести умножение, мы опять получим 1024.

А теперь используем экспоненциальные выражения. $16 = 4^2$, или 2^4, $64 = 4^3$, или 2^6, в то же время $1024 = 6^4 = 4^5$, или 2^{10}.

Следовательно, нашу задачу можно записать по-другому: $4^2 \times 4^3 = 4^5$ или $2^4 \times 2^6 = 2^{10}$, и каждый раз мы получаем 1024.

Мы можем решить ряд аналогичных примеров и увидим, что каждый раз правило сложения показателей степени, или экспонент, при умножении справедливо, разумеется, при том условии, что основания комплексных сомножителей равны.

Таким образом, мы можем, не производя умножения, сразу сказать, что $2^4 \times 2^2 \times 2^{14} = 2^{20}$, а $84 \times 87 = 7308$.

Это правило справедливо также и при делении, но в этом случае экспонента делителя вычитается из экспоненты делимого. Таким образом, $2^5 : 2^3 = 2^2$, что в обычных числах равно $32 : 8 = 4$, то есть 22.

С первого взгляда может показаться, что такой метод не очень удобен, ведь сначала надо представить число в экспоненциальной форме. Нетрудно представить в такой форме числа 8 и 16, то есть 2^3 и 2^4, но как это сделать с числами 7 и 17? Или как поступать в тех случаях, когда число можно представить в экспоненциальной форме, но основания экспоненциальных выражений чисел сильно различаются. Например, 8×9 – это $2^3 \times 3^2$, и в этом случае мы не можем суммировать экспоненты. Ни 2^5 и ни 3^5 не являются ответом, ответ также не лежит в интервале между этими двумя числами.

Тогда стоит ли вообще возиться с этим методом? Безусловно стоит. Он дает огромные преимущества, особенно при сложных и трудоемких вычислениях.

Для того чтобы легче было двигаться дальше, давайте подробнее рассмотрим понятие экспоненты и попробуем дать ей более обобщенное толкование.

До сих пор мы считали, что экспонента – это количество одинаковых сомножителей. В этом случае минимальная величина экспоненты – это 2. Однако если мы производим операцию деления чисел, или вычитания экспонент, то можем получить также число меньше 2, значит, старое определение нас больше не может устроить.

Возвращаемся к нулю и опускаемся ниже

Например, 16 : 8 = 2. Поскольку $16 = 2^4$, а $8 = 2^3$, следовательно, деление можно в экспоненциальном виде записать как $2^4 : 2^3 = 2$, но если мы будем вычитать экспоненты, то $2^4 : 2^3 = 2^1$. Таким образом, нам приходится признать, что 2 и 2^1 – это одно и то же, следовательно, $2^1 = 2$.

То же правило применимо и к любому другому экспоненциальному числу, таким образом, можно сформулировать правило в общем виде: любое число, возведенное в первую степень, остается без изменения. То есть $5^1 = 5$, $27^1 = 27$ и так далее.

Но дальше все становится сложнее. Чему равно 8 : 8? Конечно, единице. Но $8 = 2^3$, следовательно $2^3 : 2^3 = 1$. Но если мы вычтем экспоненты, получим ноль $2^3 : 2^3 = 2^0$. Значит ли это, что $2^0 = 1$? Кажется, так оно и есть.

Этот вывод, возможно, привел вас в изумление. Еще можно как-то понять смысл выражения $2^1 = 2$, хотя выражение «одно число два, умноженное само на себя» звучит достаточно странно. Но выражение 2^0 означает «ни одного числа два, умноженного само на себя», то есть кажется логичным, чтобы 2^0 равнялось нулю. Возможно, это и логично, но математики отнюдь не следуют правилам обычной повседневной логики. Вас это шокирует? Математики руководствуются общими закономерностями и необходимостью взаимной совместимости постулатов. Иными словами, математики могут принять самые невероятные правила, которые с обывательской точки зрения могут показаться просто безумными. Но эти правила не должны противоречить одно другому, какие бы результаты ни получались. Правило сложения и вычитания экспонент работает настолько хорошо, что если для того, чтобы его применять, необходимо, чтобы $2^0 = 1$, значит, так и должно быть. Мы просто принимаем, что утверждение $2^0 = 1$ верно.

Если мы будем не 2^3 делить на 2^3, а 6^3 будем делить на 6^3, то опять получим, что $6^0 = 1$. Мы можем проверить одно число за другим, и каждый раз будем получать один и тот же результат: любое число в степени 0 равно 1.

Пойдем дальше. При делении 64 на 128 мы получаем ответ $\frac{64}{128}$, или $\frac{1}{2}$. В экспоненциальной форме наша задача приобретает такой вид: $2^6 : 2^7$. Ответ 2^{-1}, или $\frac{1}{2}$, или, в экспоненциальной форме, $(\frac{1}{2})^1$.

Аналогично $32 : 128 = (\frac{1}{4})$. В экспоненциальной форме наша задача приобретает такой вид: $2^5 : 2^7$. Ответ 2^{-2}, или $\frac{1}{4}$, или, в экспоненциальной форме, $(\frac{1}{2})^2$. Можно привести еще множество примеров, и каждый раз мы обнаружим, что отрицательная экспонента становится положительной при переходе к обратному числу. Другими словами, $4^{-7} = (\frac{1}{4})^7$, а $10^{-3} = (\frac{1}{10})^3$. Это правило справедливо для любых чисел. $6^4 = (\frac{1}{6})^{-4}$.

Я могу привести вам несколько примеров, которые продемонстрируют, что такое толкование понятия «экспонента» непротиворечиво. Давайте проверим, равны ли выражения 6^{-4} и $(\frac{1}{6})^4$? Выражение $(\frac{1}{6})^4$ можно представить в виде $1 : 6^4$. Но 1 равна 6^0, таким образом, наше выражение приобретает вид $6^0 - 6^4$. Вычитаем экспоненты и получаем 6^{4}, как и следовало ожидать.

А как доказать, что 6^0 действительно равно 1? Как по вашему, чему равно $36 \times \frac{1}{36}$? Это очень просто: $36 \times \frac{1}{36} = 1$, это не вызывает никаких сомнений. Но $36 = 6^2$, тогда $\frac{1}{36} = (\frac{1}{36})^2$, или 6^{-2}. Теперь выражение $36 \times \frac{1}{36}$ приобретает вид $6^2 \times 6^{-2}$, и если мы сложим экспоненты, то получим 6^0, то есть 1.

Разумеется, наши примеры, строго говоря, не являются доказательствами. Математики назвали бы их просто круговыми рассуждениями. (Вот пример такого кругового доказательства. Вы утверждаете: «Кошкой называется любое животное, которое мяукает», и отсюда делаете вывод: «Животное, которое мяукает, называется кошкой».) Тем не менее эти примеры демонстрируют, что система операций с экспонентами является логичной.

Мы можем продемонстрировать это и другим путем, например составив перечень некоторых экспоненциальных чисел. Начнем с иллюстрации хорошо известного определения чисел, которые перемножаются сами на себя.

$$
\begin{aligned}
2^6 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64 \\
2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \\
2^4 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \\
2^3 &= 2 \times 2 \times 2 = 8 \\
2^2 &= 2 \times 2 = 4
\end{aligned}
$$

Теперь перемножим левый и правый столбики этих выражений, опустив средний столбик, то есть двойки, перемноженные сами на себя. Мы видим, что при уменьшении показателя степени на единицу результат уменьшается вдвое.

Давайте продолжим этот столбик вниз, в направлении уменьшения экспоненты, и получим:

$$
\begin{aligned}
2^1 &= 2 \\
2^0 &= 1 \\
2^{-1} &= \frac{1}{2} \\
2^{-2} &= \frac{1}{4} \\
2^{-3} &= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Вы видите, что, когда экспонента меньше 2, срабатывает та же самая зависимость, причем аналогичное правило справедливо при любом основании экспоненциального выражения. Вы можете легко показать, что в случае экспоненциального числа с основанием 3 уменьшение экспоненты на 1 приводит к уменьшению результата в три раза, а в случае экспоненциального числа с основанием 6 уменьшение экспоненты на 1 приводит к уменьшению результата в шесть раз. Но при любом основании общее правило будет справедливо.

Все вышесказанное означает, что у нас расширяются возможности для замены умножения на сложение. Теперь мы можем перемножить $\frac{1}{8}$ на 1024 при помощи экспонент, однако мы пока еще не выяснили, как можно перемножить 7 и 17.

Теперь мы знаем, что бывают как положительные, так и отрицательные экспоненты, и умеем с ними обращаться. А бывают ли дробные экспоненты? Прежде чем выяснить, что такое дробная экспонента, давайте разберемся с действием, обратным возведению в степень.

Глава 7

ДОКАПЫВАЕМСЯ ДО КОРНЕЙ

Спускаемся от высоких степеней к низким

Мы с вами уже уяснили себе, что каждому математическому действию соответствует аналогичное, но обратное по направлению действие.

Для сложения таким обратным действием является вычитание, для умножения — деление. Теперь попробуем выяснить, какое действие является обратным для возведения в степень. Поскольку возведение в степень — это многократное умножение, то, очевидно, обратным действием будет многократное деление.

Например, 32 можно разделить на 2 и получить 16, затем 16 разделить на 2 и получить 8; затем 8 разделить на 2 и получить 4; затем 4 разделить на 2 и получить 2; наконец, затем 2 разделить на 2 и получить 1. В краткой форме эти действия можно записать как $32 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 = 1$. (Как и в случае деления, которое мы изучали в третьей главе, наша задача заключалась в том, чтобы добраться до 1.) Поскольку мы произвели деление 5 раз и добрались до 1, то можно сказать, что 2 — это корень пятой степени из 32.

Если мы рассмотрим число 81, то увидим, что $81 : 3 : 3 : 3 : 3 = 1$, таким образом, 3 является корнем четвертой степени из 81. (Почему, собственно, корнем? Откуда взялось это слово? Это можно объяснить таким образом: число 32 растет из основания 2, а 81 — из основания 3 так же, как растение произрастает из корней.)

Такая математическая операция обозначается как $\sqrt{\ }$. На разнообразие корней указывает число в верхней левой части корня. Так, корень пятой степени из 32 можно записать как $\sqrt[5]{32}$, корень четвертой степени из 81 можно записать как $\sqrt[4]{81}$. Значок $\sqrt{\ }$ называется знаком радикала, а числа, содержащие корни, называются радикалами. Слово «радикал» пришло к нам из латыни, где оно означает просто «корень».

Мы редко встречаемся с корнями высоких степеней, чаще всего приходится иметь дело с операциями, обратными возведению во вторую степень, то есть в квадрат. Извлечение корня второй степени называется извлечением квадратного корня, а $\sqrt[2]{\ }$ называется квадратным корнем, причем двойка слева часто опускается. В дальнейшем под значком $\sqrt{\ }$ без цифры в верхнем левом углу мы всегда будем иметь в виду квадратный корень.

Что же такое квадратный корень из числа? 25 — это квадрат 5, таким образом, можно сказать, что 5 — это квадратный корень из 25, или $\sqrt{25} = 5$. Поэтому следует говорить «пять — это корень второй степени из 25», но обычно употребляют формулировку «квадратный корень». (Точно так же корень третьей степени называют кубическим корнем.)

Следующая проблема заключается в том, чтобы выяснить, как найти корень такой-то из некоего числа. Здесь можно идти путем от противоположного. Предположим, мы знаем, что $2^5 = 25$, это означает, что если 32 пять раз разделить на 2, то результатом будет 1. (Если мы возвели число в какую-то степень, нетрудно пойти в обратном порядке.)

На практике арифметический метод определения корней заключается в серии обратных действий. Попробуем извлечь квадратный корень из 625. Схема вычислений будет следующей:

```
      25
    √625
       4
  45|225
     225
     ———
       0
```

Первую цифру ответа, 2, мы получаем подбором. Мы знаем, что $2 \times 2 = 4$, это ближайшее возможное число, меньшее 6, поскольку $3 \times 3 = 9$, что больше 6. Затем проводим вычитание и выносим две цифры вместо одной, как это принято при обычном делении в столбик. (Если бы мы извлекали кубический корень, мы выносили бы три цифры, в случае корня четвертой степени — четыре цифры и так далее.) Чтобы получить следующую цифру, надо разделить 225 на 45. Цифру 45 вы получаете, удваивая первую цифру ответа, что дает вам 4. Вторая цифра должна быть равна второй цифре вашего ответа, таким образом, ее тоже можно найти подбором, так, чтобы получить число, ближайшее к 225. Цифра 5 подходит наиболее точно, так как $5 \times 45 = 225$.

Этот процесс может показаться вам очень трудным, и вы будете совершенно правы. Вычислять корни чисел арифметическим способом очень трудно, но результаты оказываются полезными при различных расчетах.

Рассмотрим следующий пример. Чему равен $\sqrt{2}$? Какое число надо возвести в квадрат, чтобы получить 2?

Мы можем сразу определить, что среди целых чисел такого числа нет, ведь $1 \times 1 = 1$, а $2 \times 2 = 4$. Первое число слишком мало, а второе слишком велико. Следовательно, ответ будет дробным числом.

А может ли вообще существовать квадратный корень в виде дробного числа? Почему же нет? Согласно нашему определению экспоненциальных выражений $(1\frac{2}{5})^2$ — это $1\frac{2}{5} \times 1\frac{2}{5}$, и ответом является число $1\frac{24}{25}$.

А это, в свою очередь, означает, что $\sqrt{1\frac{24}{25}}$ равен $1\frac{2}{5}$. Теперь мы убедились, что не только квадратный корень может быть дробным числом, но и квадрат числа также может быть дробным числом. И в обоих случаях справедливы те же правила, что и в случае целых чисел.

Кроме того, случайно оказалось, что число $1\frac{2}{5}$, будучи умноженным на себя самое, дает результат, близкий к 2. Отсюда следует, что

$1\frac{2}{5}$ близко к $\sqrt{2}$. Только $\frac{1}{25}$ отделяет нас от искомого ответа, так как $(1\frac{2}{5})^2$ – это $1\frac{24}{25}$, а нам нужно получить число $1\frac{25}{25}$, то есть 2.

Но можно получить и более точный ответ. Если помножить дробное число $1\frac{41}{100}$ на себя самое, мы получим $1\frac{9881}{10\,000}$, что гораздо ближе к 2. Может показаться, что, если делать более точные вычисления, мы рано или поздно найдем точное значение дробного числа, которое является корнем квадратным из 2, хотя, возможно, это будет очень сложное число.

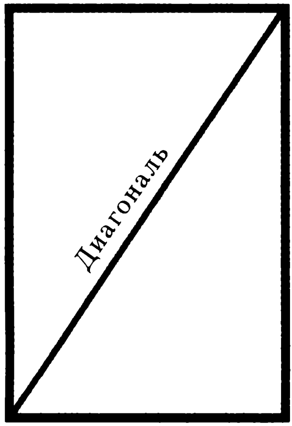
Но так ли это, вот в чем вопрос.

Сравниваем линии

Впервые поиском корня квадратного из 2 занялись еще математики Древней Греции. Как я вам уже говорил, они в первую очередь были геометрами, их интересовали соотношения длин отрезков геометрических фигур. Например, если провести диагональ в прямоугольнике, как показано на рисунке, то в каком соотношении будут находиться длина диагонали и длины сторон прямоугольника? Очевидно, что диагональ длиннее, но насколько? Древние греки хотели найти ответ на этот вопрос.

Предположим, мы сравниваем два отрезка. Длина одного из них 2 см, а длина другого — 1 см. Следовательно, мы можем сказать, что длины отрезков соотносятся как 2 к 1, или один отрезок в два раза длиннее другого. Длина одного из отрезков 4 см, а длина другого — 2 см, то можно сказать, что длины отрезков соотносятся как 4 к 2.

В обоих случаях длина одного из отрезков вдвое больше длины другого отрезка. С точки зрения математика, соотношение величин представляет гораздо больший интерес, чем их абсолютные значения. Не так важно, что в одном случае длины равны 4 и 2 см, а в другом 48 и 24 см. Математик в обоих случаях обратит внимание на то, что длина одного отрезка вдвое больше длины другого, то есть соотносятся как 2 к 1.



Прямоугольник с диагональю

Самое удобное — представить соотношение величин в виде дроби. Если длина одного отрезка равна 2 см, а длина другого — 1 см, значит, их соотношение равно $\frac{2}{1}$.

Если длина одного отрезка равна 48 см, а длина другого 24 см, значит, их соотношение равно $\frac{48}{24}$, или $\frac{2}{1}$, если мы разделим обе части на 24.

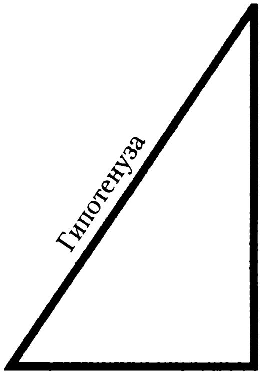
Дробь, представляющая собой отношение двух однотипных величин, называется соотношением. (Этими величинами могут быть и длины отрезков, и объемы сосудов, и веса двух человек и так далее.)

Разумеется, соотношение может не быть таким простым, как 2 : 1. Предположим, длина одного отрезка равна одному сантиметру, а длина другого — $1\frac{9}{10}$ сантиметра. Тогда соотношение равно $\frac{1\frac{9}{10}}{1}$. Это выражение можно упростить, умножив верхнюю и нижнюю части на 10. Тогда получим, что соотношение равно $\frac{19}{10}$.

Соотношение любых двух чисел, выраженных дробными числами, может быть представлено как отношение двух целых чисел. Например, у нас есть два отрезка, длина одного из них — $2\frac{4}{17}$ сантиметра, а длина другого — $1\frac{13}{15}$ сантиметра. Соотношение этих двух отрезков можно представить в виде дроби $\frac{2\frac{4}{17}}{1\frac{13}{15}}$. Если мы умножим числитель и знаменатель этой пугающе сложной дроби на $127\frac{1}{2}$, то получим то же соотношение в виде целых чисел, то есть $\frac{285}{238}$.

(Гораздо проще было бы воспользоваться десятичными дробями, но в Древней Греции они не были известны. А если мы последуем по тому же пути, по которому древние математики познавали мир, наше путешествие будет значительно интереснее.)

Теперь можно вернуться к нашему прямоугольнику. Нас интересует соотношение длин сторон прямоугольника и длин диагонали, то есть мы решаем ту же задачу, что и греческие математики в древности. Поскольку прямоугольник разделяется диагональю на две абсолютно симметричные части, мы можем упростить задачу и отбросить одну половину фигуры, предположим, левую. У нас остался так называемый прямоугольный треугольник.



Прямоугольный треугольник с гипотенузой

Еще за много столетий до наших дней египтяне на основе практического опыта установили, что если одна сторона прямоугольного треугольника равна 3 единицам, а другая — 4 единицам, то длина гипотенузы составит 5 единиц. В этом случае соотношение гипотенузы и одной из сторон равно $\frac{5}{4}$ для более длинной стороны и $\frac{5}{3}$ для более короткой.

Греки подошли к задаче с более общих позиций. Им важно было найти закономерность, то есть соотношение длин сторон прямоугольника и длин диагонали для любого прямоугольного треугольника.

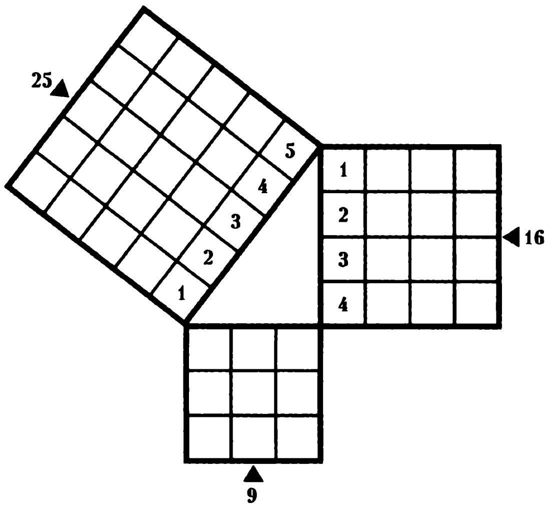
Как гласит история, великий греческий математик Пифагор такую закономерность открыл. Он установил, что для любого прямоугольного треугольника верно следующее утверждение: сумма квадратов сторон равна квадрату гипотенузы. Это утверждение получило название теоремы Пифагора. Теорема до сих пор носит имя великого грека, хотя теперь мы знаем, что еще за 600 лет до Пифагора древним китайцам уже было известно это соотношение.

Проверим теорему для треугольника со сторонами 3 и 4. Квадрат одной из сторон равен $3 \times 3 = 9$, квадрат другой стороны равен $4 \times 4 = 16$. Сумма квадратов равна: $9 + 16 = 25$, то есть квадрат гипотенузы равен 25, следовательно, гипотенуза равна 5.

Рассмотрим другой треугольник со сторонами 5 и 12.

Сумма квадратов сторон этого треугольника равна $5 \times 5 + 12 \times 12 = 25 + 144 = 169$. Следовательно, 169 — это квадрат гипотенузы. Тогда гипотенуза равна $\sqrt{169}$, или 13, поскольку $13 \times 13 = 169$.

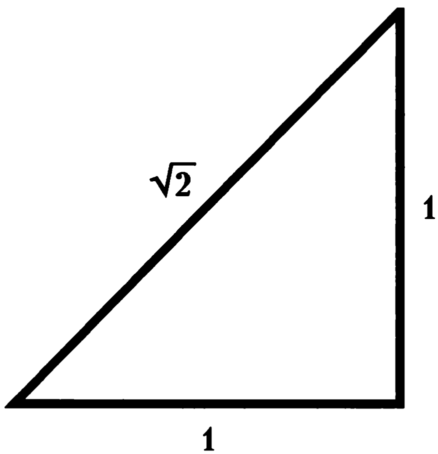
Для этого треугольника соотношение гипотенузы к стороне равно $\frac{13}{5}$ для короткой стороны и $\frac{13}{12}$ для длинной стороны.



Теорема Пифагора

Используя теорему Пифагора, можно найти соотношение гипотенузы и любой из сторон любого прямоугольного треугольника. Математики Древней Греции могли вздохнуть спокойно, задача была решена. Самое главное заключалось в том, что теорема распространялась на все прямоугольные треугольники, в том числе, разумеется, и на равносторонние, то есть на прямоугольные треугольники, у которых обе стороны равны. А нас сейчас интересуют именно такие треугольники.

Один из них представлен на рисунке.



Равносторонний прямоугольный треугольник

Максимально упростим задачу и предположим, что стороны треугольника равны 1. Тогда квадрат стороны равен 1×1, а сумма квадратов сторон равна $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$. Согласно теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен 2, а гипотенуза равна соответственно $\sqrt{2}$.

Казалось бы, теперь грекам осталось сделать совсем немного. Надо было только найти такую дробь, которая являлась бы $\sqrt{2}$, а потом представить ее в виде соотношения целых чисел, и можно праздновать победу. Но все оказалось гораздо сложнее.

Дроби, которых не существует

Ранее в этой главе мы с вами показали, что $1\frac{2}{5}$ близко к $\sqrt{2}$. Если бы оно точно равнялось $\sqrt{2}$, задача была бы решена. Тогда соотношение $\frac{1\frac{2}{5}}{1}$, которое можно превратить в соотношение целых чисел $\frac{7}{5}$, умножив верхнюю и нижнюю части дроби на 5, и было бы искомой величиной.

Но, к сожалению, $1\frac{2}{5}$ не является точной величиной $\sqrt{2}$. Более точный ответ,

$1\frac{41}{100}$, дает нам соотношение $\frac{141}{100}$. Еще большей точности мы достигаем, когда приравниваем $\sqrt{2}$ к $1\frac{207}{500}$. В этом случае соотношение в целых числах будет равно $\frac{707}{500}$. Но и $1\frac{207}{500}$ не является точным значением корня квадратного из 2. Греческие математики потратили массу времени и сил, чтобы вычислить точное значение $\sqrt{2}$, но это им так и не удалось. Они не смогли представить соотношение $\frac{\sqrt{2}}{1}$ в виде соотношения целых чисел.

Наконец, великий греческий математик Евклид доказал, что, как бы ни увеличивалась точность подсчетов, получить точное значение $\sqrt{2}$ невозможно. Не существует такой дроби, которая, будучи возведена в квадрат, даст в результате 2. Говорят, что первым к этому заключению пришел Пифагор, но этот необъяснимый факт настолько поразил ученого, что он поклялся сам и взял со своих учеников клятву хранить это открытие в тайне. Однако, возможно, эти сведения не соответствуют действительности.

Но если число $\frac{\sqrt{2}}{1}$ не может быть представлено в виде соотношения целых чисел, то и никакая дробь, содержащая $\sqrt{2}$, например $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{4}{\sqrt{2}}$, также не может быть представлена в виде соотношения целых чисел, поскольку все такие дроби могут быть преобразованы в $\frac{\sqrt{2}}{1}$, умноженное на какое нибудь число. Так, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{2}$. Или $\frac{\sqrt{2}}{1} \times 2 = 2\frac{\sqrt{2}}{1}$, что можно преобразовать, умножив верхнюю и нижнюю части на $\sqrt{2}$, и получить $\frac{4}{\sqrt{2}}$. (Не следует забывать, что независимо от того, что представляет собой число $\sqrt{2}$, если мы умножим его на $\sqrt{2}$, то получим 2.)

Поскольку число $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде соотношения целых чисел, оно получило название иррационального числа. С другой стороны, все числа, которые можно представить в виде соотношения целых чисел, называются рациональными. Рациональными являются все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные.

Как оказалось, большинство квадратных корней являются иррациональными числами. Рациональные квадратные корни есть только у тех чисел, входящих в ряд квадратных чисел, о которых мы говорили в шестой главе. Эти числа называются также идеальными квадратами. Рациональными числами являются также дроби, составленные из этих идеальных квадратов. Например, $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ является рациональным числом, так как $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$, или $1\frac{1}{3}$ (4 — это корень квадратный из 16, а 3 — корень квадратный из 9).

Тот факт, что многие квадратные корни являются иррациональными числами, нисколько не умаляет их значения, в частности, число $\sqrt{2}$ очень часто используется в различных инженерных и научных расчетах. Это число можно вычислить с той точностью, которая необходима в каждом конкретном случае. Способ вычисления был описан ранее в этой главе, и вы можете получить это число с таким количеством знаков после запятой, на которое у вас хватит терпения.

Например, число $\sqrt{2}$ можно определить с точностью до шести десятичных знаков: $\sqrt{2} = 1{,}414214$. Эта величина не очень сильно отличается от истинного значения, поскольку $1{,}414214 \times 1{,}414214 = 2{,}000001237796$. Этот ответ отличается от 2 на величину, едва превышающую одну миллионную. Поэтому значение $\sqrt{2}$, равное 1,414214, считается вполне приемлемым для решения большинства практических задач. В том случае, когда требуется большая точность, нетрудно получить столько значащих цифр после запятой, сколько необходимо в данном случае.

Однако если вы проявите редкостное упрямство и попробуете извлекать квадратный корень из числа $\sqrt{2}$ до тех пор, пока не добьетесь точного результата, вы никогда не закончите своей работы. Это бесконечный процесс. Сколько бы десятичных знаков после запятой вы ни получили, всегда останется еще несколько.

Этот факт может поразить вас так же сильно, как и превращение $\frac{1}{3}$ в бесконечную десятичную дробь 0,333333333... и так бесконечно или превращение $\frac{1}{7}$ в 0,142857142857142857... и так далее бесконечно. На первый взгляд может показаться, что эти бесконечные десятичные дроби и иррациональные квадратные корни — это явления одного порядка, но это совсем не так. Ведь у этих бесконечных дробей есть дробный эквивалент, в то время как у $\sqrt{2}$ такого эквивалента нет. А почему, собственно? Дело в том, что десятичным эквивалентом $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{7}$, а также бесконечного числа других дробей являются периодические бесконечные дроби.

В то же время десятичный эквивалент $\sqrt{2}$ является непериодической дробью. Это утверждение справедливо также для любого иррационального числа.

Проблема заключается в том, что любая десятичная дробь, которая является приближенным значением корня квадратного из 2, представляет собой непериодическую дробь. Как далеко мы ни продвинемся в расчетах, любая дробь, которую мы получим, будет непериодической.

Представьте себе дробь с огромным количеством непериодических цифр после запятой. Если вдруг после миллионной цифры вся последовательность десятичных знаков повторится, значит, десятичная дробь — периодическая и для нее существует эквивалент в виде отношения целых чисел. Если у дроби с огромным количеством (миллиарды или миллионы) непериодических десятичных знаков в какой-то момент появляется бесконечная серия повторяющихся цифр, например ...5555555555..., это также означает, что данная дробь — периодическая и для нее существует эквивалент в виде отношения целых чисел.

Однако в случае иррациональных чисел их десятичные эквиваленты полностью непериодические и не могут превратиться в периодические.

(Разумеется, вы можете задать мне следующий вопрос: «А кто может знать и сказать наверняка, что происходит с дробью, скажем, после триллионного знака? Кто может гарантировать, что дробь не станет периодической?» Существуют способы неопровержимо доказать, что иррациональные числа являются непериодическими, но такие доказательства требуют сложного математического аппарата, поэтому мы не сможем разобрать их в нашей книжке. Но если бы вдруг оказалось, что иррациональное число становится периодической дробью, это означало бы полный крах основ математических наук. И на самом деле это вряд ли возможно.)

Существование дробей

Теперь рассмотрим следующее выражение: $(2^4)^2$. Такая запись означает, что 2^4 следует возвести в квадрат. Число 2^4 —

это $2 \times 2 \times 2 \times 2$, или 16. Далее, 16 в квадрате — это 16×16, или 256. Таким образом, $(2^4)^2 = 256$. Но 256 — это также $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, или 2^8. Следовательно, $(2^4)^2 = 2^8$.

Если вы произведете подобные действия с различными экспоненциальными выражениями, различающимися как основанием, так и показателем степени, вы сможете убедиться, что существует правило, общее для всех экспоненциальных выражений: при возведении экспоненциального числа в степень показатели степени перемножаются. Это означает, что, не производя расчетов, мы всегда можем сказать следующее: $(3^5)^2 = 3^{10}$, а $(7^8)^7 = 7^{56}$ и так далее.

Если это утверждение верно, то, очевидно, оно будет верно и для дробного показателя степени. Рассмотрим число $(2^4)^{\frac{1}{2}}$. Следуя правилу перемножения экспонент, получим $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2^2$. Далее, поскольку $2^4 = 16$, а $2^2 = 4$, то мы можем утверждать, что $16^{\frac{1}{2}} = 4$.

Но мы также знаем, что 4 — это квадратный корень из 16, значит, возведение числа в степень $\frac{1}{2}$ равносильно извлечению из этого числа квадратного корня. Другими словами, $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$.

Далее, следуя этому правилу, можно утверждать, что $16^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{16}$, $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}$ и так далее. Теперь мы ввели в обиход дробные экспоненты, о которых я обещал вам рассказать еще в шестой главе. Обратите внимание, $\sqrt{2}$ невозможно представить в виде конечной дроби, но можно — в виде экспоненциального выражения с дробной экспонентой.

Что же означает дробная экспонента? Например, выражение $16^{\frac{3}{4}}$ — это то же самое, что $(16^3)^{\frac{1}{2}}$, поскольку $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3}$.

Или, обобщая, можно сказать, что в случае дробной экспоненты основание возводится в степень, равную числителю экспоненты, и из него извлекается корень, равный знаменателю экспоненты.

Следовательно, $2^{\frac{567}{235}}$ — это корень 235-й степени из 2, возведенных в 567-ю степень.

Очевидно, такие дробные экспоненты очень громоздки. А нельзя ли перейти на десятичные дроби? Ведь мы помним, что $\frac{1}{2}$ — это 0,5, так что вместо $4^{\frac{1}{2}}$ можно написать $4^{0,5}$. Любая десятичная экспонента имеет свое значение. Например, $2^{5,175}$ — это $2^{\frac{207}{40}}$, поскольку $5,175 = \frac{207}{40}$. В свою очередь, число $2^{\frac{207}{40}}$ получается при возведении 2 в степень 207 и извлечении из полученного результата корня 40-й степени. (Можно поменять местами операции. Если мы сначала извлечем из 2 корень 40-й степени, а затем возведем этот промежуточный результат в 207-ю степень, мы получим тот же окончательный результат. Это утверждение вы легко можете проверить на более простом примере, например на выражении $4^{\frac{3}{2}}$ Квадратный корень из 4^3 — это $\sqrt{64}$, что равно 8. В то же время куб $\sqrt{4}$ равен 2^3, что также равно 8.

Значение выражения $2^{\frac{207}{40}}$ (или любого другого выражения, где экспонента является целым, дробным, десятичным, положительным или отрицательным числом) может быть вычислено при помощи соответствующих математических методов. При этом вам не пришлось бы двести семь раз перемножать 2 или искать путем последовательных приближений корень сороковой степени. $2^{\frac{207}{40}} = 36{,}126$.

Эта величина приблизительная, поскольку $2^{\frac{207}{40}}$ является иррациональным числом, как и большинство выражений с дробными или десятичными экспонентами. Десятичный эквивалент $2^{\frac{207}{40}}$ — это бесконечная непериодическая дробь, но мы всегда можем получить столько десятичных знаков после запятой, сколько требуется в соответствии с требованиями по точности конкретных вычислений.

Используя любое число в виде основания экспоненциального выражения, мы можем составить соответствующее экспоненциальное выражение для любого другого числа. Теперь мы можем вернуться к моей задаче об умножении 7×17, которая возникла у нас еще в шестой главе. Число 7 можно представить как $2^{2,81}$, как $3^{1,77}$ или как $5^{1,21}$ (существуют специальные методы для вычисления экспоненциальных эквивалентов), в то же время 17 равно $2^{4,08}$, $3^{2,58}$ или $5^{1,76}$. Теперь задачу умножения можно свести к сложению: $7 \times 17 = 2^{2,81} \times 2^{4,08} = 2^{2,81+4,08} = 2^{6,89}$, или $3^{1,77} \times 3^{2,58} = 3^{4,35}$, или $5^{1,21} \times 5^{1,76} = 5^{2,97}$. Все эти числа, $2^{6,89}$, $3^{4,35}$, $5^{2,97}$, приблизительно равны между собой и приблизительно равны 119, это и есть ответ.

Конечно, было бы гораздо проще просто перемножить 7×17 вместо того, чтобы находить значения экспоненциальных выражений. Кроме того, вместо точного ответа мы получим приближенный. Однако посмотрим, что будет дальше. Возможно, этот метод окажется незаменимым. Обратим внимание на основания экспоненциальных выражений. Мы выбрали 2, 3 или 5. А почему не выбрать число 10, ведь 10 — это основа нашей системы счета.

Глава 8

ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ И ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКОЕ

Еще одно преимущество числа 10

Одной из причин, заставившей ученых настойчиво вводить экспоненциальные числа в практику, явилась необходимость работать с очень большими или очень маленькими числами. Например, масса Земли равна приблизительно 6000000000000000000000000000 грамм, а масса атома водорода — 0,00000000000000000000000166 грамма.

Вы, конечно, заметили, что при такой записи нетрудно потерять один или несколько нулей. В процессе работы ученые разработали метод выражения чисел, когда часть числа является обычным числом, а часть — экспоненциальным. Основой экспоненциальной части является число 10 (в конце предыдущей главы я намекал на эту возможность).

Число 10, возведенное в степень, позволяет представить в удобной форме как очень большие, так и очень маленькие числа. Это видно из приведенной ниже таблицы, которую вы можете проверить, произведя самостоятельные расчеты.

$1000000 = 10^6$	
$100000 = 10^5$	$0{,}1 = 10^{-1}$
$10000 = 10^4$	$0{,}01 = 10^{-2}$
$1000 = 10^3$	$0{,}001 = 10^{-3}$
$100 = 10^2$	$0{,}0001 = 10^{-4}$
$10 = 10^1$	$0{,}00001 = 10^{-5}$
$1 = 10^0$	$0{,}000001 = 10^{-6}$

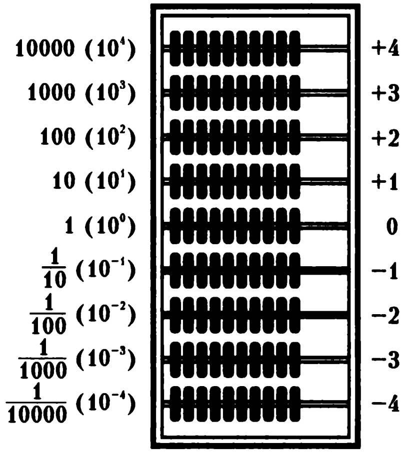
Для того чтобы убедиться в том, что число 10 хорошо вписывается в нашу систему счета, рассмотрим число 4372,654. Разобьем его на разряды и получим 4 тысячи, 3 сотни, 7 десятков, 2 единицы, 6 десятых, 5 сотых и 4 тысячные. Теперь вспомним, что $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ и так далее, и запишем число 4372,654 как $(4 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$.

Таким образом, мы записали на бумаге те операции, которые уже тысячи лет производят на счетах. Если ряд единиц на счетах пометить как «ноль», ряды, расположенные выше ряда единиц, обозначаем как 1, 2, 3 и так далее, а ряды, расположенные ниже ряда единиц, соответственно обозначаем как –1, –2, –3, то каждый ряд соответствует показателю степени числа 10.

Все положения арифметики, которые мы изучали, используя арабские числа, можно легко объяснить при помощи этих степеней, чего обычно не делают в школах.

Мы потратим немного времени на то, чтобы разобраться с экспоненциальными числами, и в будущем это значительно облегчит нам работу с числами.

Вначале рассмотрим положительные степени числа 10. Заметим, что в данном случае экспонента равна количеству нулей обычного числа. Таким образом, если число нулей в 1 000 000 равно шести, то экспоненциальная форма этого числа 10^6.



Счеты, ряды которых обозначены в соответствии с показателем степени 10

Теперь, когда нам понадобится выразить в экспоненциальной форме число, состоящее не только из единиц и нулей, нужно записать его в виде выражения, включающего 10 в какой-то степени. Например, масса Земли, как мы выяснили в начале главы, равна 6 000 000 000 000 000 000 000 000 000 грамм. Это число можно представить как 6 × × 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 грамм. Теперь самое большое число в выражении состоит из единицы и большого количества нулей, то есть его можно представить в виде степени. Поскольку количество нулей равно 27, то число можно записать в форме 10^{27}. Теперь массу Земли можно представить в экспоненциальном виде как 6×10^{27} грамм.

Экспоненциальная форма выражения больших чисел предоставляет два очевидных преимущества. Во-первых, такая запись очень компактна, а во-вторых, ее проще прочесть — нет необходимости считать огромное количество нулей.

Для обозначения малых чисел используют 10 в отрицательной степени. Как видно из таблицы, число 10, возведенное в отрицательные степени, представляет собой обычные числа, десятичные дроби, состоящие из определенного набора нулей, расположенных правее десятичного знака и заканчивающихся единицей. Численное значение отрицательной экспоненты равно количеству нулей после запятой плюс 1. Например, число 0,000001 имеет пять нулей после запятой, следовательно, в экспоненциальной форме оно будет записано как 10^{-6}.

Масса атома водорода может быть выражена в виде произведения 1,66 × × 0,000000000000000000000001 грамма. (Если вы произведете операцию умножения, то получите ту величину, которая приведена в начале главы.) Второй сомножитель представляет собой 10 в отрицательной степени, оно содержит 23 нуля справа от десятичного знака. Таким образом, в экспоненциальной форме оно будет записано как 10^{-24}. Масса атома водорода в 1,66 раза больше этой величины, следовательно, масса водорода равна $1{,}66 \times 10^{-24}$.

Числа, отличные от десяти

После того как мы научились использовать числа в экспоненциальной форме на основе 10, нам будет легко разобраться в экспоненциальной форме на основе других чисел. В начале нашей книжки я уже рассказывал вам о том, что в ряде случаев удобно использовать число 12 вместо 10, поскольку у числа 12 больше множителей, чем у числа 10. (У числа 12 есть и другие преимущества, помимо большого количества сомножителей.) Древние люди определяли время по луне. Каждые 29 или 30 дней всходила новая луна и, следовательно, начинался новый месяц. Таких месяцев в году, то есть в период от одной весны до другой, было 12, точнее, 12 месяцев и $11\frac{1}{4}$ дня. Это придало числу 12 определенное магическое значение, а в древности это было очень важно для человека. Существует 12 знаков зодиака, в каждом из которых Солнце пребывает по одному месяцу при своем кажущемся вращении вокруг Земли. Число знаков зодиака нашло свое отражение и в земных делах. Это 12 племен Израиля и 12 святых апостолов.

Если мы хотим использовать 12 как основу для счетной системы, нам понадобится двенадцать разных цифр, включая ноль. Этими цифрами у нас будут 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, @ и #. Я использую символы @ и # для обозначения тех чисел, которые в десятичной системе обозначаются как 10 и 11.

Число 222 в десятеричной системе, то есть в системе, основанной на 10, можно записать как $(2 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$. Такое же число в двенадцатеричной системе можно перевести в десятеричную систему, записав его следующим образом: $(2 \times 12^2) + (2 \times 12^1) + (2 \times 12^0)$. Проведем подсчеты и получим: 288 + 24 + 2, или 314. Другими словами, число 222 в системе, основанной на 12, то есть в двенадцатеричной системе, равно числу 314 в системе, основанной на 10, то есть в десятеричной системе.

В двенадцатеричной системе число можно записать, скажем, как 3#4. Это эквивалентно $(3 \times 12^2) + (\# \times 12^1) + (4 \times 12^0)$. Мы с вами ранее условились, что # равно 11 в десятеричной системе, следовательно, получаем 432 + 132 + 4, или 568 в десятеричной системе.

В качестве основания для системы счета можно выбрать и число меньше 10. Возьмем число 7, тогда система будет называться семеричной. Тогда нам нужно только 7 символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Число 435 в семеричной системе для перевода в десятеричную можно записать как $(4 \times 7^2) + (3 \times 7^1) + (5 \times 7^0)$, что равно 196 + 21 + 5, или 222 в десятеричной системе.

Этот метод позволяет перевести число из одной системы счета в любую другую, причем он применим даже для десятичных дробей.

Выражение 0,15 в двенадцатеричной системе может быть представлено как $(1 \times 12^{-1}) + (5 \times 12^{-2})$, или $(\frac{1}{12} + \frac{5}{144})$, что равно $\frac{17}{144}$ в десятеричной системе. В семеричной системе то же самое выражение можно представить как $(1 \times 7^{-1}) + (5 \times 7^{-2})$, или $(\frac{1}{7} + \frac{5}{49})$, что равно $\frac{12}{49}$ в десятеричной системе.

Теперь давайте выясним, как определить, сколько отдельных символов необходимо для каждой отдельной системы счета. Первое число, для которого требуется два символа, — это 10 (в любой системе). Для всех чисел, меньших 10, требуются отдельные и разные символы. Все числа, большие 10, можно записать, используя комбинации символов чисел, меньших 10. Это правило, очевидно, справедливо для десятеричной системы, с которой мы так хорошо знакомы. Можно ожидать, что в других системах это правило тоже справедливо (в чем мы можем убедиться на практике).

Хорошо, теперь давайте выясним, чему равно значение выражения 10, например, в двенадцатеричной системе. Оно равно $(1 \times 12^{-1}) + (0 \times 12^{0})$, или $12 + 0$, или 12 в десятеричной системе. Аналогично в семеричной системе выражение 10 равно $(1 \times 7^{-1}) + (0 \times 7^{0})$, или $7 + 0$, или 7. Можно провести аналогичные операции и для других систем, и мы скоро убедимся, что в системе, основанной на каком-либо числе, выражение 10 соответствует именно этому числу. (В десятеричной системе 10, естественно, равно 10.)

В двенадцатеричной системе нам нужны отдельные цифры для каждого числа, меньшего 12, то есть 12 различных цифр, включая ноль. В семеричной системе нам нужны отдельные цифры для каждого числа, меньшего 7, то есть 7 различных цифр, включая ноль. Это правило справедливо для всех счетных систем. Скажем, в системе счета, основанной на 28, нам понадобятся 28 различных цифр, включая ноль.

Чтобы помочь вам глубже разобраться в этих правилах, я привожу таблицу символов для первых тридцати чисел в двенадцатеричной системе, в семеричной системе и в так хорошо нам знакомой десятеричной системе.

Семеричная система	Десятеричная система	Двенадцатеричная система
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
10	7	7
11	8	8
12	9	9
13	10	@
14	11	#
15	12	10
16	13	11
20	14	12
21	15	13
22	16	14
23	17	15
24	18	16
25	19	17
26	20	18
30	21	19

Семеричная система	Десятеричная система	Двенадцатеричная система
31	22	1@
32	23	1#
33	24	20
34	25	21
35	26	22
36	27	23
40	28	24
41	29	25
42	30	26

Считаем при помощи единиц и нулей

Для каждой счетной системы можно составить таблицы сложения и других арифметических действий. В двенадцатеричной системе $5 + 8 = 11$, а $3 \times 4 = 10$. В семеричной системе $3 + 6 = 12$, а $5 \times 3 = 21$. Нам это может показаться странным, поскольку мы не используем подобные системы. Но если мы проводим все расчеты в рамках одной из таких систем, мы видим, что система также отвечает поставленным целям. Человечество остановилось на десятеричной системе по той простой причине, что на руках у человека десять пальцев, а вовсе не потому, что эта система более логична, чем любая другая.

Однако в отдельных случаях и для конкретных целей может оказаться, что какая-то система счета является гораздо более функциональной, нежели другие. Это справедливо в случае системы, основанной на 2, то есть двоичной системы.

Выражение 10 в двоичной системе равно 2 в десятеричной системе. Следовательно, в такой системе только две цифры, 0 и 1. На предыдущих страницах приведены символы для первых чисел такой системы и соответствующие эквиваленты десятеричной системы.

Перевод числа из двоичной системы в десятеричную не составляет труда. Рассмотрим, например, выражение 11001 в двоичной системе. Оно эквивалентно (1 × 24) + (1 × 23) + + (0 × 22) + (0 × 21) + (1 × 20), или 16 + 8 + 0 + 0 + 1, или 25, что соответствует эквиваленту, приведенному в таблице.

Двоичная система	Десятеричная система	Двоичная система	Десятеричная система
1	1	1001	9
10	2	1010	10
11	3	1011	11

Двоичная система	Десятеричная система	Двоичная система	Десятеричная система
100	4	1100	12
101	5	1101	13
110	6	1110	14
111	7	1111	15
1000	7	10000	16
10001	17	11000	24
10010	18	11001	25
10011	19	11010	26
10100	20	11011	27
10101	21	11100	28
10110	22	11101	29
10111	23	11110	30

Этот процесс можно упростить, если принять во внимание, что число 2, возведенное в степень, умножается либо на 0, и тогда результат тоже будет равен нулю и его можно не учитывать, либо на 1, и тогда это просто 2, возведенное в какую-то степень.

Таким образом, мы можем проставить порядковый номер справа налево, как это показано ниже маленькими цифрами:

11001

4 3 2 1 0

Каждое маленькое число – это степень числа 2, определяемая положением цифры в числе, представленном в двоичной системе. Следует учитывать только те показатели степени, которые стоят против единиц. Показатели, стоящие против нулей, можно опускать. Используя такой подход, можно записать число 11001 как 24 + 23 + 20, или 16 + 8 + 1, или 25.

Большие числа, такие как 1 110 010 100 001 001, можно переводить в десятеричную систему таким же образом.

1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Поскольку единицам соответствуют позиции 0, 3, 8, 10, 13, 14 и 15, то число будет равняться 215 + 214 + 213 + 210 + 28 + + 23 + 20, или 32, 768 + 16, 384 + 8, 192 + + 1, 024 + 256 + 8 + 1, или 58, 633.

Обратный перевод из двоичной системы в десятеричную не очень сложен, но более длителен. Предположим, число 1562 выражено в десятеричной системе. В двоичную систему его можно перевести следующим образом:

Наибольшее число, соответствующее двойке, возведенной в степень, и меньшее 1562, – это 210 (или 1024). Если мы вычтем 1024 из 1562, у нас останется 538. Теперь наибольшее число, соответствующее двойке, возведенной в степень, и меньшее 538, – это 29 (или 512). После вычитания этой величины из 538 у нас остается 26. Ближайшее и меньшее число теперь – 24 (или 16). После вычитания остается 10. Теперь ближайшее число – это 23 (или 8). После вычитания остается 2 или 20. Таким образом, 1562 = 210 + 29 + 24 + 23 + 21.

Теперь надо только правильно расставить по местам показатели степени справа налево. Единицы будут стоять на 1, 3, 4, 9 и 10-й позициях. На остальных позициях мы поставим нули. Таким образом, мы получаем число 11 000 011 010, двоичный эквивалент числа 1562 в десятеричной системе.

В двоичной системе очень простые таблицы сложения и умножения:

$0 + 0 = 0$	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 10$
$0 \times 0 = 0$	$0 \times 1 = 0$	$1 \times 1 = 1$

И это весь список.

Таким образом, в двоичной системе:

$$\begin{array}{r} 11 \\ +11 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 110 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 1001 \end{array}$$

Правильность этих вычислений можно, при желании, проверить, учитывая, что числа 11, 110 и 1001 в двоичной системе равны соответственно 3, 6 и 9 в десятеричной системе.

Теперь представьте себе, что у вас есть счетная электронная машина с набором переключателей (например, полупроводниковых). Каждый переключатель может находиться в одной из двух позиций – «включено» (когда ток проходит через переключатель) или «выключено» (когда ток не проходит через переключатель).

Теперь предположим, что положение «включено» соответствует 1, а положение «выключено» соответствует 0. В этом случае счетную машину можно спроектировать таким образом, чтобы переключение электрического сигнала различными переключателями подчинялось правилам сложения, умножения и другим действиям с единицами и нулями в двоичной системе.

Такая машина будет так быстро производить переключение и производить вычисления с такой скоростью, что сможет выполнить за считаные секунды такой объем вычислений, на который человеку потребовалось бы не меньше месяца.

Однако, рассматривая различные системы счета, мы сильно уклонились от основной темы нашей книги. Теперь мы возвращаемся к десятеричной системе, и вся дальнейшая информация будет подана именно в десятеричной системе.

Жонглируем экспонентами

Для того чтобы четко уяснить себе, какие действия можно производить с экспоненциальными числами на основе 10, начнем работать с относительно небольшими числами, а не с такими огромными, как масса Земли, о которой шла речь в начале главы.

Предположим, нам надо выразить в экспоненциальной форме число 3200. Мы можем использовать только целые числа, поэтому разобьем число 3200 следующим образом: (3 × 1000) + (2 × 100) или (3 × × 103) + (2 × 102). Но гораздо удобнее в тех случаях, когда это возможно, пользоваться одной экспонентой. Этого можно добиться, используя десятичные дроби. Представим 3200 в виде 3,2 × 1000 (можете самостоятельно произвести умножение и проверить правильность этого утверждения) или 3,2 × 103.

Можно, конечно, представить 3200 как 32 × 100, что в экспоненциальной форме даст 32 × 10^2. Можно выбрать такой вариант: 3200 = 0,32 × 1000 или 0,32 × 10^4. Все эти выражения идентичны. Этот факт можно подтвердить, произведя операции умножения. Для каждого отдельного случая мы получим 3200. Но этот факт можно подтвердить, не производя операций умножения.

Предположим, надо умножить 40 на 50.

$$40 \times 50 = 2000.$$

Теперь разделим один из сомножителей на 2, а другой умножим на 2. Получаем 20×100, или 80×25. И в том и в другом случае результат один и тот же, 2000. Предположим, мы умножаем один из сомножителей на 10, а другой делим на 10. Тогда мы получаем 4×500 или 400×5. И в том и в другом случае результат один и тот же, 2000.

Другими словами, при перемножении двух чисел их произведение не меняется, если один из сомножителей умножить на какое-то число, а другой разделить на это же самое число.

Теперь рассмотрим произведение $3{,}2 \times 10^3$. Умножим 3,2 на 10 и разделим 103 на 10. Как мы уже знаем, произведение от этого не изменится.

$3{,}2 \times 10 = 32$. Разделим 10^3 на 10 (или, что одно и то же, умножим на 10^{-1}) и получим 10^2. Теперь произведение выглядит как 32×10^2, при этом его величина не изменяется.

Мы можем разделить 3,2 на 10 (получаем 0,32) и умножить 10^3 на 10 (10^4). В результате получаем 0,32 × 104, при этом величина также не изменилась.

Мы видим, что выражения $0{,}32 \times 10^4$, 32×10^2, $3{,}2 \times 10^3$ являются одним и тем же числом. Тогда какой смысл менять одну форму на другую? С точки зрения корректности расчетов никакого смысла нет, а вот с точки зрения удобства проведения вычислений – безусловно есть. Целесообразно использовать такую форму экспоненциального выражения, когда неэкспоненциальная часть является числом от 1 до 10. В случае 32×10^2 неэкспоненциальная часть больше 10, в случае $0{,}32 \times 10^4$ неэкспоненциальная часть меньше 1. В случае $3{,}2 \times 10^3$ неэкспоненциальная часть находится между 1 и 10, и это как раз та форма выражения, которая обычно используется.

Для чисел, меньших единицы, это правило также справедливо, за исключением деталей, касающихся экспоненциальной части. Например, рассмотрим число

0,0054. Его можно записать как $54 \times 0{,}0001$ или как $5{,}4 \times 0{,}001$. Каждое из этих выражений после перемножения даст один и тот же результат, 0,0054. В экспоненциальной форме это выглядит как 54×10^{-4}, $5{,}4 \times 10^{-3}$ или $0{,}54 \times 10^{-2}$.

Эти выражения также эквивалентны. Как и в предыдущем примере, мы можем умножить 5,4 на 10, 10^{-3} разделить на 10. Деление 10^{-3} на 10 равноценно умножению на 10^{-1}. Деление равноценно вычитанию одного показателя степени из другого ($-3 - 1 = -4$), то есть 10^{-3} разделить на 10 равно 10^{-3-1} или 10^{-4}. Таким образом, мы превратили выражение $5{,}4 \times 10^{-3}$ в 54×10^{-4}, не изменив его величины.

При помощи аналогичных процедур мы можем превратить $5{,}4 \times 10^{-3}$ в $0{,}54 \times 10^{-2}$, не изменив его величины. Но на практике предпочтительнее использовать выражение $5{,}4 \times 10^{-3}$, поскольку в этом случае неэкспоненциальная часть находится между 1 и 10.

Продолжаем жонглировать экспонентами

К экспоненциальным числам применимы те же правила, как и к обычным числам.

В операциях сложения и вычитания участвуют только неэкспоненциальные составляющие чисел. Например, при сложении $2,3 \times 10^4$ и $4,2 \times 10^4$ получаем $6,5 \times 10^4$. (Проверьте это утверждение, преобразовав экспоненциальные выражения в неэкспоненциальные: 23 000 и 42 000. Сложив их, вы получите 65 000. Такую же операцию можно осуществить со всеми примерами, которые я привел в этой главе. Таким образом, вы не только научитесь обращаться с экспоненциальными выражениями, но и на практике сможете убедиться, что не обязательно верить всему, что вам говорят, даже если это «что-то» напечатано в типографии.)

Сумма чисел $8,7 \times 10^4$ и $3,9 \times 10^4$ равна $12,6 \times 10^4$. Ответ можно оставить в этом виде, хотя неэкспоненциальная часть больше

10. Можно также при помощи операций умножения—деления, описанных выше, привести выражение к более удобному виду: $1{,}26 \times 10^5$. Этот ответ такой же правильный, как и предыдущий.

А как поступать, когда у чисел различается экспоненциальная часть? Чему будет равна сумма $1{,}87 \times 10^4$ и 9×10^2? Для того чтобы провести сложение, потребуется привести оба числа к такому виду, когда обе экспоненциальные части одинаковы. Например, $1{,}87 \times 10^4$ можно преобразовать в $18^7 \times 10^2$. Тогда можно провести сложение: $(9 \times 10^2) + (187 \times 10^2) = (9 + 187) \times 10^2 = 196 \times 10^2$. Можно пойти другим путем и превратить 9×10^2 в $0{,}09 \times 10^4$, тогда получим $(0{,}09 \times 10^4) + (1{,}87 \times 10^4) = (0{,}09 + 1{,}87) \times 10^4 = 1{,}96 \times 10^4$.

Таким образом, мы получили два ответа: 196×10^2 и $1{,}96 \times 10^4$. Эти два выражения равноценны, но использовать предпочтительно второе.

С экспоненциальными числами также можно производить операции вычитания. На практике, однако, экспоненциальной формой редко пользуются при выполнении операций сложения и вычитания, поскольку удобнее складывать и вычитать обычные числа. А вот при операциях умножения и деления экспоненциальные числа незаменимы. Предположим, надо перемножить 6000 на 0,008. Это в общем-то нетрудно сделать в столбик:

$$\begin{array}{r} 6000 \\ \times\ 0{,}008 \\ \hline 480{,}000 \end{array}$$

В данном примере единственную трудность представляет операция с нулями. Нужно внимательно отследить положение десятичной запятой.

А теперь попробуем провести умножение, используя экспоненциальную форму выражения чисел. Переведем числа в экспоненциальную форму: $6000 = 6 \times 10^4$, $0{,}008 = 8 \times \times 10^{-3}$. Перемножим эти числа: $6 \times 10^4 \times 8 \times \times 10^{-3}$. $6 \times 8 = 48$; затем $10^4 \times 10^{-3} = 10^1$. (Складываем экспоненты $4 + (-3) = 1$.) Получаем ответ: 48×10^1, или, в более удобной форме, 48×10^2, или в виде обычного числа 480.

Как мы видим, используя экспоненциальную форму, мы значительно упрощаем задачу умножения, особенно в том случае, когда имеем дело с очень большими и очень маленькими числами.

Предположим, надо решить такую задачу. Сколько атомов водорода содержалось бы в Земле, если бы она состояла только из этих атомов водорода.

Масса Земли равна 6 000 000 000 000 000 000 000 000 000 грамм, а масса атома водорода – 0,00000000000000000000000166 грамма. Чтобы найти количество атомов водорода, надо массу Земли разделить на массу атома водорода, то есть 6 000 000 000 000 000 000 000 000 000 разделить на 0,00000000000000000000000166. Разумеется, вы можете проделать эту процедуру, если захотите, но, пожалуй, разумнее перейти к экспоненциальной форме.

При использовании экспоненциальных выражений задача сразу упрощается: $(6 \times 10^{27}) : (1{,}66 \times 10^{-24})$. Так же, как и в случае умножения, можно поделить одну неэкспоненциальную часть на другую. Таким образом, получаем частное 6 : 1,66 = 3,6 (приближенно, но достаточно для данной задачи), в то же время $10^{27} : 10^{-24} = 10^{51}$). Таким образом, количество атомов водорода в Земле (если бы она состояла из одних атомов водорода и имела бы ту массу, которую имеет сейчас) равнялось бы 3,6 × 1051). Или в виде обычного числа 3 600 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 грамм, если бы просто перемножили два обычных числа, как это делали в предыдущих разделах.

Не представляет трудности также возведение в степень экспоненциальных выражений и извлечение из них корня. Так, $(9 \times 10^4)^2$ равно $9^2 \times (10^4)^2$, что равно $81 \times (10^4)^2$, или 81×10^8, или $8{,}1 \times 10^9$. Точно так же можно извлечь корень из (9×10^4). Корень квадратный из 9×10^4 ($\sqrt{9 \times 10^4}$) равен $\sqrt{9} \times \sqrt{10^4}$, или 3×10^2.

Полностью переходим на экспоненты

Есть еще неясные моменты при использовании экспоненциальной формы записи чисел. Если мы имеем дело с числами с большим количеством нулей, все достаточно просто. Но предположим, что надо перемножить 6837 и 1822. Если мы запишем эти числа в экспоненциальной форме, то получим: $6{,}837 \times 10^3$ и $1{,}822 \times 10^3$. Перемножить экспоненциальные части несложно, а вот что делать с числами 6,837 и 1,822? Мы столкнулись с той же задачей, как и при перемножении больших чисел, с той только разницей, что надо следить за положением десятичного знака. Другими словами, нам нужно представить число в такой форме, чтобы неэкспоненциальная часть была как можно короче или равнялась 1. Поскольку речь идет о десятеричной системе, нам понадобятся десятичные экспоненты, которые мы обсуждали в конце седьмой главы.

Теперь давайте подробнее рассмотрим экспоненты на основе 10. Начнем с $10^0 = 1$ и $10^1 = 10$. А чему равны экспоненты между 0 и 1? Например, $10^{0,5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, что приблизительно равно

3,162278. Таким же способом (но с большими сложностями) можно получить значение 10 в степени от 0 до 1. Эти величины подсчитаны и собраны в специальных справочниках в виде таблиц. В нашей книжке приведена краткая таблица значений числа 10, возведенного в различные степени.

Поскольку в данном случае основанием всегда является число 10, то в таблицах обычно приводятся только показатели степени, то есть экспоненты. Отдельно записанная экспонента называется логарифмом, значение экспоненциального выражения в виде обычного числа называется антилогарифмом. Например, в выражении $10^2 = 100$ справедливы следующие обозначения:

2 — логарифм 100,
а 100 — антилогарифм 2.

Таблица, приведенная ниже, в которой приведены антилогарифмы для ряда логарифмов, называется таблицей антилогарифмов.

Краткая таблица антилогарифмов

Экспоненциальное выражение	Логарифм	Антилогарифм
$10^{0,0}$	0,0	1,000
$10^{0,1}$	0,1	1,259
$10^{0,2}$	0,2	1,585
$10^{0,3}$	0,3	1,995
$10^{0,4}$	0,4	2,512
$10^{0,5}$	0,5	3,162
$10^{0,6}$	0,6	3,981
$10^{0,7}$	0,7	5,012
$10^{0,8}$	0,8	6,310
$10^{0,9}$	0,9	7,943
$10^{1,0}$	1,0	10,000

В таблице приведены приближенные значения антилогарифмов, да и невозможно привести точные значения, потому что они существуют только для таких чисел, как $10^{0,0}$, $10^{1,0}$ и так далее. Однако величину антилогарифма можно вычислить с такой точностью (то есть до такого десятичного знака), которая требуется в данном конкретном случае.

Если мы пойдем в обратном направлении, мы можем любое число от 1 до 10 представить как 10 в какой-то степени. Другими словами, для каждого числа при помощи соответствующих методик (которые мы не будем обсуждать в нашей книжке) можно вычислить эквивалентный логарифм.

Ниже приводится краткая таблица логарифмов для ряда обычных чисел. Подробные таблицы логарифмов, в которых можно найти логарифм для любого числа, содержатся в ряде справочников.

Таблицы логарифмов уже составлены, и никому больше не нужно заниматься самостоятельными подсчетами. Эта трудоемкая работа уже проделана. Единственное, что необходимо сделать теперь, — это найти нужное значение в таблице логарифмов. Возьмем наугад какое-нибудь число, например 3,2, и найдем по таблице, приведенной ниже, значение логарифма. Логарифм 3,2 равен 0,5051. Еще один пример из таблицы: логарифм 2,4 равен 0,3802. (Разумеется, это приближенные значения логарифмов.)

Малая таблица логарифмов

Число	Логарифм	Число	Логарифм
1,0	0,0000	3,4	0,5315
1,1	0,0414	3,5	0,5441
1,2	0,0792	3,6	0,5563
1,3	0,1139	3,7	0,5682
1,4	0,1461	3,8	0,5798
1,5	0,1761	3,9	0,5911
1,6	0,2041	4,0	0,6021
1,7	0,2304	4,1	0,6128
1,8	0,2553	4,2	0,6232
1,9	0,2788	4,3	0,6335
2,0	0,3010	4,4	0,6435
2,1	0,3222	4,5	0,6532
2,2	0,3424	4,6	0,6628
2,3	0,3617	4,7	0,6721
2,4	0,3802	4,8	0,6812
2,5	0,3979	4,9	0,6902
2,6	0,4150	5,0	0,6990
2,7	0,4314	5,1	0,7076
2,8	0,4472	5,2	0,7160
2,9	0,4624	5,3	0,7243
3,0	0,4771	5,4	0,7324
3,1	0,4914	5,5	0,7404
3,2	0,5051	5,6	0,7482
3,3	0,5185	5,7	0,7559

Число	Логарифм	Число	Логарифм
5,8	0,7634	8,0	0,9031
5,9	0,7709	8,1	0,9085
6,0	0,7782	8,2	0,9138
6,1	0,7853	8,3	0,9191
6,2	0,7924	8,4	0,9243
6,3	0,7993	8,5	0,9294
6,4	0,8062	8,6	0,9345
6,5	0,8129	8,7	0,9395
6,6	0,8195	8,8	0,9445
6,7	0,8261	8,9	0,9494
6,8	0,8325	9,0	0,9542
6,9	0,8388	9,1	0,9590
7,0	0,8451	9,2	0,9638
7,1	0,8513	9,3	0,9685
7,2	0,8573	9,4	0,9731
7,3	0,8633	9,5	0,9777
7,4	0,8692	9,6	0,9823
7,5	0,8751	9,7	0,9868
7,6	0,8808	9,8	0,9912
7,7	0,8865	9,9	0,9956
7,8	0,8921	10,0	1,0000
7,9	0,8976		

Теперь, когда у нас есть значения логарифмов, то есть экспонент, можно их использовать при операциях умножения и деления.

Мы знаем, что при умножении показатели степени суммируются, значит, чтобы перемножить 3,2 и 2,4, достаточно сложить их логарифмы, 0,5051 и 0,3802, сумма которых равна 0,8853. Это пока только экспонента, то есть число, которое мы ищем, — это $10^{0,8853}$. Теперь надо опять обратиться к таблице антилогарифмов и найти антилогарифм 0,8853. Это 7,68. Таким образом, $3,2 \times 2,4 = 7,68$.

Если же мы хотим поделить 3,2 на 2,4, достаточно вычесть 0,3802 из 0,5051, что равно 0,1249. Антилогарифм этого числа равен 1,333, что и является ответом.

А теперь вернемся к примеру, с которого мы начали этот раздел: 6837×1822. Преобразуем эти числа в экспоненциальную форму и получим $(6,837 \times 10^3) \times (1822 \times 10^3)$. Логарифм 10^3 — это просто 3, так как логарифм числа — это степень, в которую надо возвести 10, чтобы получить данное число. А для того чтобы получить 10^3, очевидно, надо 10 возвести в третью степень. Точно так же логарифм 10^{12} равен 12, а логарифм 10^{-14} равен -14.

Логарифм числа 6,837 надо искать в таблице логарифмов более подробной, чем та, которая приведена в книжке. Он равен 0,83487. Тогда логарифм $6{,}837 \times 10^3$ равен 0,83487 + 3 (вспомните, при перемножении чисел мы суммируем их логарифмы), или 3,83487.

Точно так же по таблице находим логарифм 1,822, который равен 0,26055, таким образом, логарифм $1{,}822 \times 10^3$ равен 0,26055 + 3, или 3,26055.

Чтобы перемножить числа 6837 и 1822, нужно сложить их логарифмы, а затем найти антилогарифм суммы. Таким образом, логарифм произведения этих чисел равен 3,83487 + 3,26055, или 7,09542. Это число можно представить как 0,09542 + 7. Десятичная часть числа, в данном случае 0,09542, называется мантиссой, а целая, в данном случае 7, – характеристикой.

Антилогарифм числа — это просто число 10, возведенное в эту степень. Антилогарифм 0,09542 (определенный по таблице) равен 1,246, а антилогарифм 7 — это 10^7. При переходе от логарифма к антилогарифму сложение заменяется умножением. Таким образом, антилогарифм равен $1{,}246 \times \times 10^7$. Или в обычной, неэкспоненциальной форме 12 460 000.

Если вы просто перемножите 6837 на 1822 в столбик, то получите 12 457 014. Однако не следует забывать, что логарифмы — это приближенные величины, так что и результат мы можем получить только с определенным приближением.

Чтобы разделить 6837 на 1822, надо вычесть логарифм второго числа из логарифма первого, или $3{,}83487 - 3{,}26055 = 0{,}57432$. Антилогарифм этого числа равен 3,752. Это и есть искомый ответ. Если вы выполните деление в столбик, то получите более точное выражение: 3,75192. Но как мы уже знаем, логарифмы — это приближенные величины.

Возможно, такой метод расчета показался вам громоздким и неэффективным, ведь мало того, что мы получаем приближенный результат, но надо еще искать ответы в двух таблицах. Не проще ли произвести умножение в столбик? Однако при инженерных и научных расчетах часто достаточно той точности, которую дает метод логарифмов. В то же время часто приходится проводить многократные операции деления и умножения, и метод логарифмов оказывается просто незаменим. Предположим, надо решить такой пример: $(194{,}768 \times 0{,}045 \times 19{,}2^2) : (1{,}558 \times 35{,}4)$.

Вам понадобится довольно много времени, чтобы провести все необходимые операции деления и умножения, а используя метод логарифмов, если вы хорошо освоили правила работы с логарифмическими таблицами, можно решить этот пример очень быстро. Нужно будет несколько раз заглянуть в таблицы и провести несколько операций сложения и вычитания.

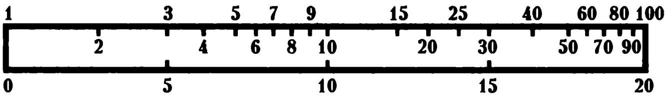
Далее, если по условиям вашей задачи вам достаточно получить ответ с определенным приближением — а в инженерных и научных расчетах именно это и требуется, — метод логарифмов дает дополнительное преимущество, поскольку он значительно сокращает время, необходимое для проведения вычислений.

Новые счеты

Ключ к сокращению времени вычислений мы найдем, если обратим внимание на характер логарифмической зависимости. Логарифм 1,0 равен 0,0000, логарифм 2,0 равен 0,3010, а логарифм 3,0 равен 0,4771. При увеличении числа от 1 до 2 величина логарифма увеличивается на 0,3010; при увеличении числа от 2 до 3 величина логарифма увеличивается на 0,1761. Логарифм 4,0 равен 0,6020, что означает увеличение на 0,1249. При увеличении числа от 9,0 до 10 логарифм увеличивается с 0,9542 до 1,0000, то есть только на 0,0458. При переходе от 19 к 20 логарифм увеличивается с 1,2788 до 1,3010, то есть только на 0,0222.

Теперь нанесем на один край линейки значения логарифмов, расположив их равномерно, а на другой край — соответствующие этим логарифмам числа (антилогарифмы).

Антилогарифмы



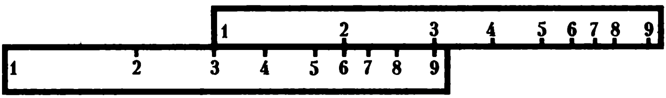
Логарифмы

Логарифмическая шкала

Мы видим, что обычные числа располагаются все более часто с увеличением числа. Это отражает тот факт, что с увеличением числа скорость увеличения логарифма снижается.

Шкала, на которой числа расположены не равномерно, а соответственно величинам их логарифмов, называется логарифмической шкалой. Эта логарифмическая шкала стала основой для изобретения одного очень полезного инструмента для вычислений — логарифмической линейки, которая еще совсем недавно была необходима каждому инженеру, до тех пор пока на смену ей не пришли калькуляторы и компьютеры.

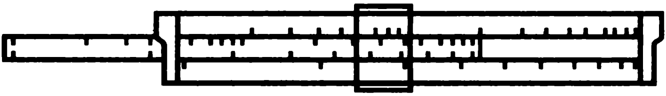
Линейка устроена следующим образом. Если две обычные линейки, на которые нанесены логарифмические шкалы, двигать друг относительно друга, можно проводить операции сложения и вычитания, а поскольку шкалы на линейках логарифмические, это означает, что мы складываем или вычитаем логарифмы чисел, то есть перемножаем или делим сами числа.



Подвижная логарифмическая шкала

Например, нам надо перемножить 2 и 3. Как показано на рисунке, устанавливаем подвижную часть линейки так, чтобы деление 1 на ней совпало с делением 3 на неподвижной части. Затем переводим взгляд на деление 2 на подвижной части и смотрим, против какого деления на неподвижной части оно установилось. Мы видим, что это 6. То есть логарифм 3 + логарифм 2 = логарифму 6, а 3 × 2 = 6.

На следующем рисунке показан эскиз настоящей логарифмической линейки с несколькими шкалами. Такая линейка позволяет быстро решать разнообразные задачи и производить сложные расчеты, точность которых зависит от размера делений шкал. Фактически такая линейка представляет собой компактную таблицу логарифмов.



Однако каждое новое достижение обычно сопровождается какими-то потерями. Точно так же дело обстоит и в случае с логарифмической линейкой. Линейка позволяет гораздо быстрее и удобнее производить вычисления, но есть и потери. При использовании таблиц логарифмов вам не надо самим определять положение десятичной запятой, оно уже указано в таблице. При расчетах на линейке вам придется определять положение десятичной запятой самостоятельно.

Для того чтобы определить положение десятичной запятой, необходимо грубо оценить ответ решаемой задачи. Например, мы вычисляем выражение, которое рассматривали ранее в этой главе:

$(194{,}768 \times 0{,}045 \times 19{,}2^2) : (1{,}558 \times 35{,}4)$.

Произведем округление чисел этого выражения и получим: $(200 \times \frac{1}{20} \times 20^2)$: : $(1\frac{1}{2} \times 35)$, что равно $(4000 : 50)$, или 80. Это означает, что ответ, который мы получим, точно решая приведенное выше выражение, будет находиться ближе к числу 80, нежели к 8 или 800. Таким образом, мы оценили положение десятичной запятой, или, другими словами, «порядок величины» будущего ответа.

Теперь, используя логарифмическую линейку, можно выполнить указанные действия. В результате мы получаем ответ 587, а поскольку мы знаем, что ответ должен находиться ближе к 80, чем к 8 или 800, то десятичную запятую можно смело ставить после второй значащей цифры слева, то есть получаем 58,7. Все расчеты при помощи логарифмической линейки, включая определение порядка величины, заняли у меня всего 35 секунд, хотя я считал не торопясь, чтобы не наделать ошибок.

Если решать этот пример, производя умножение и деление в столбик, можно получить более точный ответ. Я проделал эти вычисления и получил 58,6. Но в процессе расчетов я допустил две ошибки, которые мне пришлось исправлять, и всего мне потребовалось 20 минут. Не могу сказать, что процедура доставила мне удовольствие. Сначала я обнаружил расхождение с результатами расчета по линейке, а затем был вынужден проверить каждый этап расчета и сравнить его с результатами, полученными на линейке.

Современные карманные калькуляторы и компьютеры, разумеется, еще более упростили все возможные расчеты. Но я иногда думаю, что если современный ученый — это новое воплощение ученого древности, то карманный калькулятор — это просто новое воплощение древних счетов.

Глава 9

ОТ ЧИСЛОВОЙ ОСИ К ЧИСЛОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Вводим число «i»

До сих пор при обсуждении квадратных корней я старательно избегал упоминания об отрицательных числах. Например, я говорил, что $\sqrt{4} = 2$, потому что $2 \times 2 = 4$. Но точно так же справедливо выражение $\sqrt{4} = -2$, потому что $(-2) \times (-2) = 4$. (Надеюсь, вы не забыли, что при перемножении двух отрицательных чисел мы получаем положительное число.)

Следовательно, у числа 4 есть два квадратных корня, выражение можно записать следующим образом: $\sqrt{4} = \pm 2$. Символ «±» обозначает «или плюс, или минус».

Но если оба числа, + 2 и −2, являются корнями квадратными из 4, то какое же число будет корнем квадратным из -4? Конечно, $+2 \times -2 = -4$, но $+2$ и -2 — это не одно и то же. Так что перемножение этих двух разных чисел не является возведением в квадрат.

Очевидно, что среди положительных и отрицательных чисел не существует такого, которое, будучи возведено в квадрат, дало бы -4 или любое другое отрицательное число, но давайте проявим упорство, попробуем найти подходящее число и решить эту задачу.

Для начала упростим задачу, насколько это возможно. Любое число, скажем $\sqrt{64}$, можно разбить на множители и записать в виде $\sqrt{(16 \times 4)}$. Это выражение можно дальше преобразовать в $\sqrt{16} \times \sqrt{4}$. При этом окончательный ответ не меняется. $\sqrt{64} = 8$ и $\sqrt{16} \times \sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$.

Мы можем решить еще сколько угодно подобных примеров, и всегда это правило будет справедливо. То есть если число разбить на множители, то квадратный корень из этого числа будет равен произведению квадратных корней сомножителей. Это утверждение справедливо и для иррациональных чисел. Например, $\sqrt{15} = \sqrt{5} \times \times \sqrt{3}$. Можно заглянуть в специальные таблицы и найти там $\sqrt{15}$, равный 3,872983. В свою очередь, $\sqrt{5} = 2{,}236068$, $\sqrt{3} = 1{,}732051$ (конечно, это приближенные значения). При перемножении $2{,}236068 \times 1{,}732051$ получаем 3,872983, то есть мы доказали, что $\sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$.

Отлично, тогда мы можем предложить такую схему. Любое отрицательное число равно произведению соответствующего положительного числа на -1. Другими словами, $-64 = 64 \times (-1)$; $-276 = 276 \times (-1)$; $-1{,}98 = 1{,}98 \times (-1)$ и так далее.

Квадратный корень из любого числа, например из -172, можно разбить на сомножители: $\sqrt{-172} = \sqrt{172} \times \sqrt{-1}$. Следовательно, если мы найдем квадратный корень из -1, мы сможем найти квадратный корень любого отрицательного числа. Но тут мы опять сталкиваемся с неразрешимой, казалось бы, задачей:

$$1 \times 1 = 1; \ (-1) \times (-1) = 1.$$

Не существует такого числа, которое при перемножении на себя самое дало бы -1.

Следовательно, единственное, что мы можем сделать, — это придумать такое число. Мы можем договориться, что символ # обозначает, что # × # равно отрицательному числу. Тогда #1 × #1 = –1. Это выражение справедливо по определению, а поскольку оно не противоречит ни одному из математических постулатов, то нет никаких оснований, чтобы его не использовать.

Разумеется, такое число является нереальным, воображаемым. Мы легко можем себе представить, что такое +$1 и –$1. +$1 — это доход в $1, а –$1 — это расход в $1. Но как представить себе #1$? Математики, которые первыми стали работать с этими новыми числами, назвали их мнимыми. В отличие от мнимых чисел обычные отрицательные и положительные числа, как рациональные, так и иррациональные, называются действительными.

Математики не стали изобретать для этих чисел нового знака, наподобие знака + или –, хотя мне кажется, это было бы целесообразно. Вместо этого они обозначили $\sqrt{-1}$ буквенным символом «i». Другими словами, $i \times i = -1$, или $\sqrt{-1} = i$. Кроме того, $-i \times -i$ также равняется i^2, то есть -1. Мы также должны записать $\sqrt{-1} = -i$.

И последнее, $-i \times i = -i^2 = -(-1) = 1$.

Теперь мы легко можем извлечь квадратный корень из любого отрицательного числа.

Величина $\sqrt{-4}$ равна $\sqrt{4} \times \sqrt{-1}$, или $\pm 2 \times i$, что можно просто записать как $\pm 2i$. Точно так же величина $\sqrt{-64}$ равна $\sqrt{64} \times \sqrt{-1}$, или $\pm 8 \times i$, что можно просто записать как $\pm 8i$, а величина $\sqrt{-15}$ равна $\sqrt{15} \times \sqrt{-1}$, или $\pm 3{,}8729832 \times i$, что можно просто записать как $\pm 3{,}8729832i$.

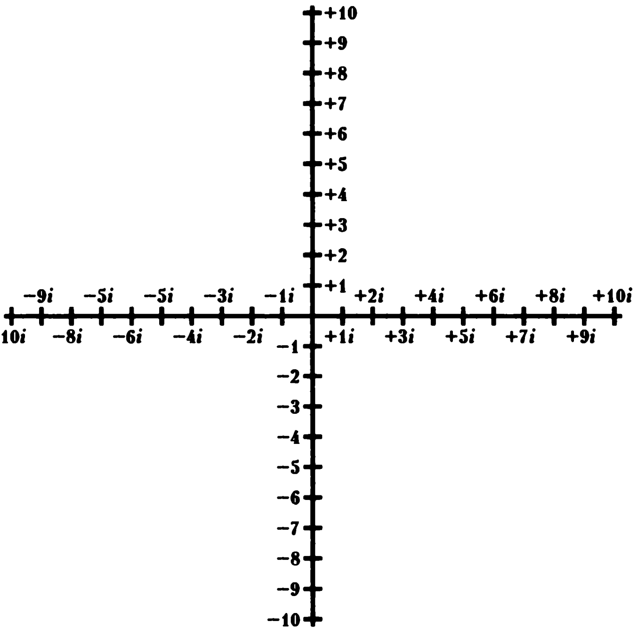
Числа и координаты по компасу

Однако теперь у нас есть отличный повод для возмущения. Что бы там ни говорили, как бы ни уславливались, совершенно непонятно, что такое эти мнимые числа, как можно их себе представить.

На самом деле такое число должно обозначать то, что мы ему приписали, то, о чем мы условились заранее. Не надо забывать, что числа — это изобретение человека и их цель — облегчить познание Вселенной, а со своими созданиями человек вправе поступать так, как считает нужным.

Вспомним, что у древних греков не было отрицательных чисел. Для них -1 была не менее таинственна и непонятна, чем для нас $\sqrt{-1}$, когда мы приступили к изучению мнимых чисел. Обратившись к отрицательным числам, мы использовали числовую ось, на которой вверх от нулевой отметки располагались положительные числа, а вниз — отрицательные (см. главу 2).

Такая схема сработала в прошлый раз, попробуем использовать ее и сейчас. Проведем через нулевую отметку еще одну линию, перпендикулярную первой числовой оси. Справа отложим через равные интервалы +1i, +2i, +3i, +4i, +5i, +6i, ..., а слева −1i, −2i, −3i, −4i, −5i, −5i... Мы получили две числовые оси:



Числовые оси для действительных и мнимых чисел

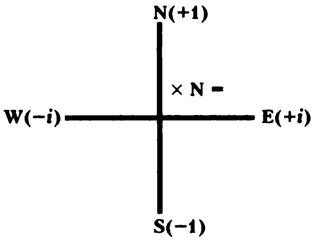
Теперь мы можем представить себе, что означает символ «i». Раньше мы с вами условились, что +1 — это 1 км на север, а −1 — это 1 км на юг. Теперь условимся также, что +1i — это 1 км на восток, а −1i — это 1 км на запад. (Это совсем не означает, что мнимые числа обозначают какие-то расстояния. У мнимых чисел нет действительного значения, но предложенная схема поможет нам лучше разобраться в абстрактных понятиях и соотношениях на конкретных примерах.)

Например, вместо знаков «+» и «−» мы можем использовать буквенные обозначения сторон света, как на компасе. Условимся, что положительные действительные числа — это N-числа, отрицательные действительные числа — это S-числа, положительные мнимые числа — это W-числа, а отрицательные мнимые числа — это E-числа.

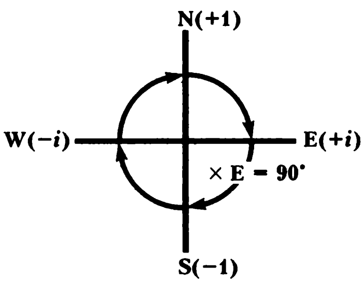
В нашей схеме совсем не нужно использовать странный термин «мнимое число», поскольку у нас все стороны света — реальны. Но у этого термина глубокие исторические корни, и теперь, пожалуй, поздновато менять название.

Теперь, используя «числа по компасу», мы можем создать свою собственную самодостаточную систему расчетов (создание такой эффективной системы — это цель многих математиков). Таблица умножения в нашей системе будет иметь такой вид:

N J N = N	S J N = S	E J N = E	W J N = W
N J S = S	S J S = N	E J S = W	W J S = E
N J E = E	S J E = W	E J E = S	W J E = N
N J W = W	S J W = E	E J W = N	W J W = S



Умножаем на N вращением в направлении 0°



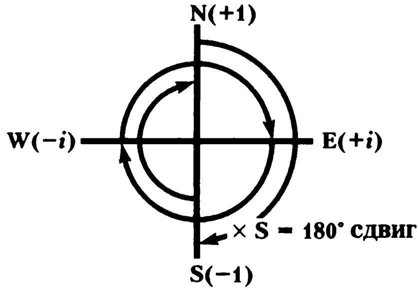
Умножаем на E вращением на 90°
по часовой стрелке

И хотя наша таблица имеет довольно странный вид, у нее есть простое геометрическое толкование, которое представлено ниже на рисунках.

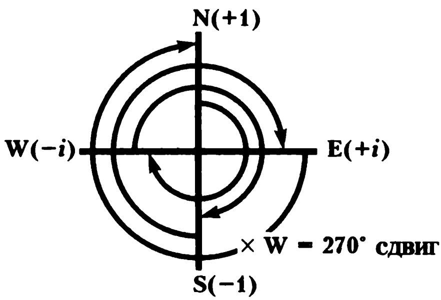
Я совсем не утверждаю, что только наша система справедлива, могут существовать и другие системы, в такой же мере справедливые и наглядные. Просто предложенная система удобна и используется.

Новые точки по компасу

Раз уж мы заговорили о севере, юге, западе и востоке, то следует вспомнить и о таких направлениях, как северо-запад, юго-восток и так далее. Поскольку результат умножения действительных чисел на мнимые никогда не будет ложиться ни на одну из осей (север—юг или восток—запад). А как обстоят дела со сложением, например, чему равна сумма 1 + i? Ученые-математики не удосужились предложить специальный символ для этого выражения, поэтому его оставляют в виде 1 + i, но в нашей системе координат его можно представить наглядно.



Умножение на S вращает ось на 180°
E × S = W
S × S = N
W × S = E
N × S = S



Умножение на W вращает ось на 270°
E × W = N
S × W = E
W × W = S
N × W = W

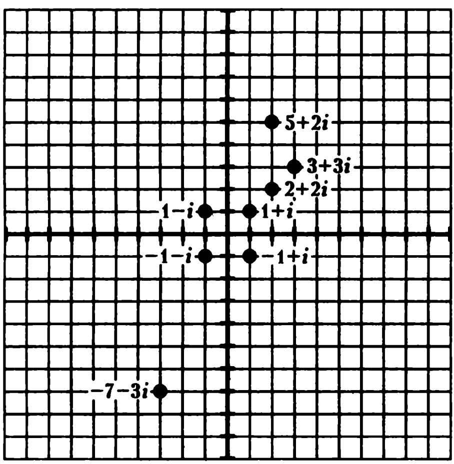
N = положительное действительное число, например +1.
E = положительное мнимое число, например +i.
S = отрицательное действительное число, например —1.
W = отрицательное мнимое число, например —i.

Теперь давайте снова построим две оси, но вместо того, чтобы проставлять значения против каждого деления, на этот раз проведем через каждое деление новую линию.

Предположим, через каждое деление на вертикальной оси, то есть на оси действительных чисел, мы проводим горизонтальную линию. Проводим линию через деление +1, и на всей протяженности этой линии значение действительного числа равно +1. Следующую горизонтальную линию проводим через +2, и на всей протяженности этой линии значение действительного числа равно +2. Следующую горизонтальную линию проводим через −3, и на всей протяженности этой линии значение действительного числа равно −3. Таких линий можно провести сколь угодно много.

Такую же процедуру можно осуществить и с горизонтальной осью, то есть с осью мнимых чисел. Через каждое деление на горизонтальной оси, то есть на оси мнимых чисел, мы проводим вертикальную линию. Так же, как и в прошлом случае на всей протяженности линии, проведенной через деление +1i, значение мнимого числа равно +1i; на всей протяженности линии, проведенной через деление +2i, значение мнимого числа равно +2i; а на всей протяженности линии, проведенной через деление −5i, значение мнимого числа равно −5i.

Теперь мы получили своеобразный шаблон шахматной доски, на котором для каждой линии, соответствующей мнимому числу, су-



Комплексные числа

ществует линия, соответствующая действительному числу, и наоборот, причем эти линии пересекаются.

Теперь мы сможем найти ответ на вопрос, чему равна сумма 1 + i. Число, соответствующее 1 + i, — это точка пересечения линий +1 и +i на нашем шаблоне. Поскольку расстояния между делениями на обеих осях одинаковы, 1 + i представляет собой число в направлении северо-восток. Точно так же и 2 + 2i, 3 + 3i, 4 + + 4i и так далее.

Число, подобное числу 1 – i, можно представить как +1 + (–i), и оно будет на нашем шаблоне представлять собой точку пересечения прямых +1 и –i, то есть в направлении северо-запад. Точно так же –1 + i — это юго-восток, а –1 – i – это юго-запад.

Другие направления можно представить такими числами, как 15 + 2i, –7 – 3i и так далее. По сути дела, каждая точка на нашем шаблоне (который, как вы уже догадались, можно расширять бесконечно) представляет собой какое-то число, которое является суммой действительного и мнимого числа. Более того, положение точки на шаблоне может соответствовать выражению, содержащему десятичную дробь или иррациональное число, например 9,54 + + 0,015i, или $2\sqrt{7}$ + $-5\sqrt{2i}$.

Числа, подобные тем, что представлены выше, состоящие из действительной и мнимой частей, называются комплексными. Любое действительное или мнимое число может быть представлено в виде комплексного, то есть 42 = 42 + 0i, а 5i = 0 + 5i.

Комплексные числа представляют интерес не только для инженеров и ученых, они представляют и чисто практический интерес в обыденной жизни, поскольку, в отличие от обычных чисел, указывающих только величину, они указывают также и направление.

Приведем пример, который продемонстрирует вам роль комплексных чисел. Рассмотрим такое физическое понятие, как сила. Сила может представлять собой толкающее усилие или тянущее усилие. Толкающее усилие — это положительная величина, тянущее — отрицательная. Кроме того, сила может изменяться по величине. Таким образом, мы можем использовать для величины силы действительные числа.

Но, кроме того, сила может быть направлена в разных направлениях. И толкающее усилие, и тянущее усилие могут быть направлены вверх, вниз, вбок и так далее. Выразить величину силы с учетом направления можно при помощи комплексных чисел. Таким образом, число i, которое большинству людей, не связанных с математикой, представляется таинственным, но совершенно бесполезным понятием, имеет простое практическое применение. Например, в области электроники никакая математическая обработка данных невозможна без применения комплексных чисел. Величина переменного тока меняется как по величине, так и по направлению, и для ее описания необходимо использовать комплексные числа.

Комплексные числа можно складывать и вычитать по таким же правилам, как обычные числа, причем действительные и мнимые числа складываются и вычитаются отдельно. Например, если к (+2 – 4i) прибавить (–5 + 7i), то получим (–3 + 3i). Если из (+2 – 4i) отнять (–5 + 7i), то получим (–7 + 11i). (Это можно продемонстрировать на нашем шаблоне, так как обычное сложение и вычитание можно показать на оси север—юг. Думаю, что теперь вы сможете это сделать самостоятельно.)

Вот при умножении комплексных чисел мы столкнемся с большими трудностями, чем в случае умножения действительных чисел. При умножении 35 на 28, как я вам уже объяснил в третьей главе, мы разбиваем числа на разряды, то есть 35 = = 30 + 5, 28 = 20 + 8. Затем числа перемножаются, каждое слагаемое одной части на каждое слагаемое другой части, а результаты умножения складываются.

Точно так же производят операцию умножения с комплексными числами. Для того чтобы умножить (3 + 5i) на (6 + i), нужно составить такую схему:

$$\begin{array}{l}
3 \quad + \quad 5i \\
6 \quad + \quad i \\
\hline
18 + 30i + 3i + 5i^2
\end{array}$$

Стрелками показано, как перемножаются составные части комплексных чисел. В соответствии со схемой:

$3 \times 6 = 18$, $3 \times i = 3i$, $5i \times 6 = 30i$ и $5i \times i = 5i^2 = -5$, поскольку i^2 равно -1.

Два из промежуточных результатов являются действительными числами, и их можно сложить, то есть $18 - 5 = 13$. Другие две составляющие являются мнимыми числами, и их также можно сложить: $30i + 3i = 33i$. Таким образом, результатом умножения является комплексное число $13 + 33i$.

Другие арифметические операции также можно продемонстрировать при помощи аналогичной схемы. Таким образом, мы видим, что с комплексными числами можно работать по тем же правилам, что и с обычными числами, а значит, комплексные числа больше не являются для нас таинственными и непостижимыми.

Докапываемся до корней. Уходим дальше вглубь

Область комплексных чисел дает возможность рассмотреть некоторые сложные случаи при извлечении корней степени больше 2.

Мы с вами уже знаем, что $\sqrt{+1}$ равен +1 или −1, $\sqrt{-1}$ равен + i или −i.

А чему равен корень четвертой степени из +1 ($\sqrt[4]{+1}$)? Очевидно, что (+1) × (+1) × (+1) × (+1) = +1, то есть +1 — это один из корней четвертой степени из +1. Точно так же (−1) × (−1) × (−1) × (−1) = +1, то есть +1 — это также один из корней четвертой степени из +1. Но мы еще не перебрали все варианты. Как насчет выражения (+i) × (+i) × × (+i) × (+i)? Результат перемножения (−i) × × (−i) — это −1. Следовательно, (−i) × (−i) × × (−i) × (−i) = (−1) × (−1) = +1. Это означает, что +i — это третий корень четвертой степени из +1. Точно так же мы можем показать, что $-i$ — это четвертый корень четвертой степени из +1.

Следовательно, наша задача имеет следующий ответ: ($\sqrt[4]{-1}$) = +1, −1, +i, −i. Точно так же мы можем показать, что ($\sqrt[4]{-1}$) равен $+\sqrt{+i}$, $-\sqrt{+i}$, $+\sqrt{-i}$ или $-\sqrt{-i}$, то есть эта задача имеет четыре равноценных решения. А что же такое $\sqrt{+i}$? Ответ прост. ($\sqrt{+i}$) — это такое число, которое, будучи умножено на себя самое, дает i. Поэтому $(+\sqrt{+i}) \times (+\sqrt{+i}) = +i$. Следовательно, $(+\sqrt{+i}) \times (-\sqrt{+i}) \times (+\sqrt{-i}) \times (-\sqrt{-i}) = (+i) \times (+i) = -1$.

Следовательно, ($+\sqrt{+i}$) является одним из корней четвертой степени из (−1), другими корнями являются $-\sqrt{+i}$, $+\sqrt{-i}$ и $-\sqrt{-i}$.

Точно таким же образом можно показать, что любое число имеет четыре корня четвертой степени.

Мы показали, что каждое число имеет два квадратных корня и четыре корня четвертой степени. Можно предположить также, что каждое число имеет три корня третьей степени, пять корней пятой степени, шесть корней шестой степени, сорок пять корней сорок пятой степени и так далее. Это утверждение абсолютно верно, но чтобы его доказать, потребуется сложный математический аппарат, которым мы не владеем, поэтому пока примем его на веру.

Правда, мы можем проверить это утверждение для корня третьей степени. Чему, например, равен корень кубический из 1, или ($\sqrt[3]{+1}$)? Во первых, $(+1) \times (+1) \times (+1) = +1$, то есть +1 является одним из кубических корней из 1.

А чему равны остальные два? Перейдем в область отрицательных чисел.

$$(-1) \times (-1) \times (-1) = (+1) \times (-1) = -1$$

Таким образом, −1 не является корнем кубическим из 1. Более того, можно показать, что ни одно действительное число, а также ни одно мнимое (будь то −i или +i), возведенное в третью степень, не дает в результате +1.

Значит, корень всего один, а других двух просто нет?

Эти два корня существуют, но в области комплексных чисел. Я просто приведу их значения, а вы сможете проверить, чему равны эти числа, возведенные в куб.

Остальные два корня кубических из $+1$ — это $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})$ и $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i})$. Давайте проверим это утверждение.

Если $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})$ — один из кубических корней $+1$, то это значит, что $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})^3$ или $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}) \times (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}) \times (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})$ равно 1. Умножение можно произвести по той методике, которая описана выше.

$$\begin{array}{c}
-\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2}\sqrt{3i} \\
-\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2}\sqrt{3i} \\
\hline
+\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4}\sqrt{3i} \quad -\frac{1}{4}\sqrt{3i} \quad + \quad \frac{3}{4}i^2
\end{array}$$

Два промежуточных мнимых результата можно сложить, сумма чисел $(-\frac{1}{4}\sqrt{3i})$ и $(-\frac{1}{4}\sqrt{3i})$ равна $(-\frac{1}{2}\sqrt{3i})$. Что касается $\frac{3}{4}i^2$, то это действительное число, равное $-\frac{3}{4}$. Теперь сложим два действительных составляющих этого выражения: $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$, таким образом, результат умножения $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}$.

Этот результат нужно снова умножить на $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})$.

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i} \\ \hline +\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3i} - \frac{1}{4}\sqrt{3i} + \frac{3}{4}i^2 \end{array}$$

Две мнимые составляющие этого выражения $(-\frac{1}{4}\sqrt{3i})$ и $(-\frac{1}{4}\sqrt{3i})$ в сумме дают 0, так что ими можно пренебречь. Число $\frac{3}{4}i^2$ является действительным числом, так как $i^2 = -1$, то есть $\frac{3}{4}i^2 = \frac{3}{4}$. Добавим к $\frac{3}{4}$ оставшийся промежуточный результат $\frac{1}{4}$ и получим 1. Итак, $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i})^3$ равно 1.

Точно так же можно возвести в третью степень число $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i})$.

$$(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}) \times (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}) \times (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}) = 1.$$

Точно так же можно показать, что у числа -1 есть три корня третьей степени, два из которых комплексные, по три кубических корня и у чисел i и $-i$.

И не только i

На нашем «шахматном» шаблоне можно изобразить также третью линию, или ось, так, чтобы помимо направлений север, юг, запад и восток у нас появились направления «внутрь» и «наружу». Таким образом, наша «шахматная доска» из плоской фигуры превращается в объемную фигуру. Теперь точно так же, как в свое время мы получили сетку на плоскости, мы можем составить мозаику из кубиков.

Третья ось состоит из гипермнимых чисел, которые обозначаются буквой j. На гипермнимой оси также имеется положительная и отрицательная области, где, соответственно, расположены положительные (+1j, +2j, +3j, +4j, +5j, +6j и т. д.) и отрицательные (−1j, −2j, −3j, −4j, −5j, −6j и т. д.).

Теперь числа располагаются в пространстве, на точках пересечения плоскостей север—юг, запад—восток и «внутрь» и «наружу». При пересечении этих плоскостей образуются кубы, принцип тот же, что и при образовании квадратов на нашем «шахматном шаблоне». Каждая точка такого пространства имеет собственные координаты, которые являются гиперкомплексным числом.

Нам легко представить себе три оси в пространстве, поскольку это привычные три измерения: длина, ширина и высота. Однако математики оперируют с большим количеством измерений. Иногда они работают даже в таких системах, где точное количество осей не определено. Тогда говорят об «n-мерном пространстве», где n – это любое число.

Глава 10

БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Каждый, кто начинает думать о числах, неизбежно приходит к выводу, что существует огромное количество чисел, и совершенно непонятно, как можно его выразить. На помощь приходит поэзия. Мы можем сказать, что чисел так же много, как песчинок в пустыне, как капель воды в океане или как мерцающих звезд на небе. Но для математика такие сравнения бесполезны. С точки зрения математика, мы можем к любому числу прибавить единицу и получить следующее число, затем к полученному числу прибавить единицу и так далее. Поскольку в математике нет никаких ограничений для операций сложения, можно сложить любые два числа, и, следовательно, этот процесс бесконечен. Таким образом, мы можем взять сколь угодно большое число, прибавить к нему единицу и получить еще большее. Мы можем представить себе число, протяженность которого равна расстоянию до дальней звезды, но и к нему можно прибавить единицу и получить еще большее число.

Последовательность целых чисел, записанных в порядке 1, 2, 3..., представляет собой бесконечность, то есть нечто, не имеющее конца. То есть, когда мы пишем 1, 2, 3..., это означает «1, 2, 3 и далее бесконечно».

Точно таким же образом мы можем записать ряд целых отрицательных чисел: –1, –2, –3..., что будет означать «–1, –2, –3 и далее бесконечно» или ряд положительных или отрицательных мнимых чисел: +1i, +2i, +3i ... или –1i, –2i, –3i...

А теперь давайте запишем другой ряд чисел, ряд четных чисел: 2, 4, 6, 8 и так далее. Сколько существует четных чисел?

С точки зрения обычного здравого смысла можно было бы сказать, что четных чисел вдвое меньше, чем всех целых чисел, вместе взятых, поскольку целые числа делятся на четные и нечетные. Скажем, из первых десяти чисел пять – четные, а пять – нечетные.

Но это не так. Ведь количество целых чисел бесконечно, и мы не можем говорить о «половине бесконечности».

Рассмотрим ряд четных чисел с другой точки зрения. Какое бы сколь угодно большое число мы ни выберем, к нему всегда можно прибавить 2 и получить число еще большее. Даже если мы представим себе гигантское четное число, цифры которого протянулись до самой дальней звезды, мы и к нему сможем прибавить 2 и получить еще большее число.

То же самое можно сказать о ряде нечетных чисел 1, 3, 5, 7... и о ряде чисел, кратных 5, то есть 5, 10, 15, 20, 25..., и о ряде чисел, кратных миллиону, то есть 1 000 000, 2 000 000, 3 000 000... Все эти ряды бесконечны, и, представляя себе такие ряды, вы составляете представление о понятии «бесконечность».

Счет без счета

Тем не менее мое объяснение может вас не удовлетворить. Ведь кажется настолько очевидным, что четных чисел должно быть вдвое меньше, чем целых чисел вообще, пусть даже их число будет бесконечно, а чисел, кратных миллиону, должно быть в миллион раз меньше, чем всех целых чисел.

Но далеко не всегда то, что кажется очевидным, соответствует истине. Казалось бы, очевидно, что, если человек стоит лицом к северу, его спина обращена к югу. Кто же станет возражать против этого? Но если он стоит на Южном полюсе, то это не соответствует истине. И его лицо, и его спина будут обращены на север.

Давайте все-таки разберемся с числами. Давайте выясним, какое соотношение существует между четными числами и всем количеством целых чисел. Как же это сделать, ведь целых чисел бесконечное количество? Тем не менее метод для такого подсчета существует.

Как мы обычно считаем объекты? Мы приписываем каждому объекту определенное число из возрастающей последовательности целых чисел. Первый объект – объект номер один, второй – номер два и так далее. Если последний объект оказывается объектом номер десять, значит, у нас всего десять объектов.

А можно ли считать, не пользуясь числами? Это почти то же самое, что спросить: «А можно ли считать, не считая?» Как ни странно, это возможно.

Представим себе, что вокруг нас стоит толпа кричащих детишек, которым мы должны раздать леденцы. Мы не знаем ни сколько детей требует леденцов, ни сколько леденцов у нас в коробке. Но делать нечего, и мы начинаем раздавать леденцы – по одному каждому малышу. Если к тому моменту, когда коробка опустеет, каждый малыш будет сосать вкусный леденец, значит, количество леденцов равнялось количеству детей. Если к тому моменту, когда мы одарим всех малышей леденцами, у нас в коробке еще останутся леденцы, значит, количество леденцов больше количества детей. Если же, напротив, у нас не хватит леденцов на всех, это будет означать, что детей больше, чем леденцов.

Такой метод подсчета, заключающийся в сравнении последовательных рядов (один леденец против одного ребенка, или одно четное число против одного целого числа), поможет выяснить, равны ли два ряда чисел, и если они не равны, то какой ряд больше.

Напишем ряд целых чисел, а под ним ряд четных чисел:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20...

Мы видим, что для каждого целого числа нашлось четное число, причем его можно получить, умножив соответствующее целое число на 2.

Мы видим, что, как бы много чисел мы ни написали, каждому целому числу соответствует определенное четное число и, наоборот, каждому четному числу соответствует определенное целое число (то есть каждому ребенку достается по одному леденцу).

Что же это означает? Можем ли мы утверждать, что количество четных чисел равно количеству целых чисел? Не совсем так. Дело в том, что, когда речь идет о бесконечности, мы не можем сказать, что одна бесконечность равна другой бесконечности. Но мы можем утверждать, что имеется соответствие один в один между последовательностью целых чисел и последовательностью четных чисел, то есть последовательность четных чисел является взаимно однозначной с последовательностью целых чисел. Это означает, что если мы сопоставим последовательность целых чисел с последовательностью четных чисел, то для каждого целого числа найдется свое четное число и наоборот.

Точно так же мы можем сравнить последовательности целых чисел и чисел, кратных миллиону. Для каждого целого числа можно написать соответствующее число, кратное миллиону, которое мы получим умножением данного целого числа на миллион. Для 1 это будет 1 000 000, для 6 это будет 6 000 000, а для 234 – 234 000 000. То есть можно сказать, что каждому целому числу соответствует число, кратное миллиону, или что эти две последовательности соответствуют друг другу «один в один» или являются взаимно однозначными. Любая последовательность чисел, взаимно однозначная с последовательностью целых чисел, называется счетной. Последовательность целых чисел также называется счетной.

Бесконечность в малом

Когда речь заходит о бесконечном, в нашем воображении возникает нечто огромное и вечное, непонятное и, пожалуй, бесполезное.

Однако, даже если мы имеем дело с малыми числами, совершенно неожиданно в нашем поле зрения вновь возникает понятие «бесконечность». Предположим, нам надо разделить 1 на $\frac{1}{10}$. Мы помним правило обратных величин и знаем, что разделить число на $\frac{1}{10}$ — это все равно что умножить его на 10. Таким образом, $1 : \frac{1}{10} = 10$, $1 : \frac{1}{100} = 100$, а $1 : \frac{1}{1000} = 1000$.

То есть чем меньше делитель при одном и том же делимом, тем больше частное от деления.

И действительно, если делить единицу или любое другое число на ряд чисел, последовательно убывающих, то есть становящихся все меньше и меньше, мы получим ряд чисел (частных от деления), которые становятся все больше и больше. А когда делитель становится бесконечно малой величиной, то частное от деления превращается в бесконечно большую величину.

Вы можете спросить: что же это такое «бесконечно малая величина»? Конечно, самой малой величиной является ноль. Но малая величина может представлять собой дробь. Скажем, $\frac{1}{10}$ — это малая величина, $\frac{1}{100}$ — еще меньше, $\frac{1}{1000}$ — еще меньше, а $\frac{1}{100000}$ — еще меньше. Не существует предела, до которого можно уменьшать величины. Но как бы вы ни увеличивали количество нулей в знаменателе, вы никогда не достигнете нуля. Таким образом, когда вы делите единицу или какое либо другое число на последовательность бесконечно возрастающих чисел, вы получаете последовательность бесконечно убывающих чисел. Когда делитель становится бесконечно большим числом, частное становится бесконечно малым.

Обратите внимание, что мы не можем делить числа на ноль. Эта операция в математике не рассматривается, и причина очень проста. Скажем, какое частное мы получим от деления 6 на 0? Другими словами, на какое число надо умножить 0, чтобы получить 6? Такого числа нет, значит, операция 6 : 0 невозможна. Любое число, умноженное на ноль, дает ноль. Это означает, что мы не можем ни одно число разделить на ноль.

Промежуток между двумя числами, скажем, между единицей и двойкой, можно разделить на любое количество долей, на миллион, триллион и так далее, бесконечно. То же самое можно проделать и с меньшим интервалом, скажем, с интервалом между $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ или между 0,0000001 и 0,00000001.

Математики доказали, что все возможные дроби (то есть все рациональные числа) можно расположить таким образом, чтобы получить взаимно однозначную последовательность по отношению к последовательности целых чисел.

Для каждого целого числа будет существовать соответствующая дробь, и, наоборот, не может быть дроби без соответствующего целого числа. Таким образом, последовательности всех возможных дробей являются счетными последовательностями.

Все ближе, и ближе, и ближе

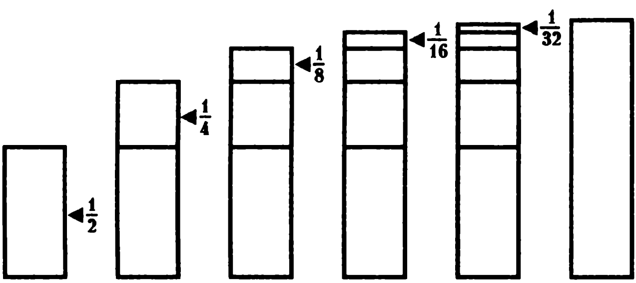
Рассмотрим бесконечную последовательность дробей:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}...$$

Обратите внимание на то, что каждая следующая дробь равна половине предыдущей, поскольку знаменатель каждый раз удваивается. (Если взять любую дробь и разделить ее на 2, например $\frac{1}{128} : 2$, то это то же самое, что умножить ее на $\frac{1}{2}$, то есть $\frac{1}{128} : 2 = \frac{1}{128} \times \frac{1}{2}$, а это значит, что знаменатель удваивается.)

Хотя дроби постоянно уменьшаются, эта последовательность также является бесконечной, ведь любую сколь угодно малую дробь из этой последовательности можно разделить на два и получить еще меньшую. Знаменатель дроби увеличивается бесконечно, но сама дробь никогда не достигнет нуля, поскольку для этого надо, чтобы знаменатель достиг бесконечности, а это невозможно.

А теперь давайте выясним, чему равна сумма этой бесконечной последовательности. С точки зрения простого здравого смысла может показаться, что сумма такой последовательности должна быть бесконечно большой величиной. Но мы уже знаем, насколько обманчив бывает так называемый «здравый смысл».



Сначала к $\frac{1}{2}$ прибавляем $\frac{1}{4}$, получаем $\frac{3}{4}$, затем к $\frac{3}{4}$ прибавляем $\frac{1}{8}$, получаем $\frac{7}{8}$, затем к $\frac{7}{8}$ прибавляем $\frac{1}{16}$, получаем $\frac{15}{16}$, прибавляем $\frac{1}{32}$, получаем $\frac{31}{32}$ и так далее. Обратите внимание, что чем больше членов последовательности мы добавляем, тем ближе сумма последовательности приближается к 1. Когда мы складываем первые два члена ряда, до единицы остается $\frac{1}{4}$, прибавляем следующий член, и до единицы остается $\frac{1}{8}$, и так далее можно дойти до одной миллионной или до одной триллионной, но единица так никогда и не будет достигнута.

Математики так формулируют это положение: «Сумма бесконечной последовательности дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$... приближается к единице, которая является пределом суммы данной последовательности».

Это пример сходящейся последовательности, то есть последовательности, состоящей из бесконечного числа членов, сумма которых приближается к какому-либо конечному числу как к пределу.

Еще в Древней Греции математики обнаружили сходящиеся бесконечные последовательности, но они были столь поражены тем, что количество членов последовательности бесконечно, что даже не могли предположить, что сумма таких последовательностей может быть не бесконечной величиной. Греческий математик и философ Зенон поставил ряд задач, называемых парадоксами, которые, казалось бы, опровергают совершенно очевидные постулаты. Один из его парадоксов служил доказательством того, что движение в принципе невозможно. Эти парадоксы считались неразрешимыми на протяжении столетий, до тех пор, пока не выяснилась правда о сходящихся бесконечных последовательностях.

Самый знаменитый парадокс Зенона называется «Ахилл и черепаха». Древнегреческий герой Ахилл славился как прекрасный бегун, а черепаха известна тем, что передвигается чрезвычайно медленно. Тем не менее Зенон продемонстрировал, что Ахилл никогда не сможет догнать черепаху в соревновании по бегу, если изначально у черепахи будет преимущество.

Предположим, что Ахилл бегает в десять раз быстрее черепахи, но к началу соревнований у черепахи будет преимущество в 100 ярдов. В несколько прыжков Ахилл преодолеет расстояние в 100 ярдов, но за это время черепаха, которая двигается в десять раз медленнее Ахилла (что очень неплохо для черепахи), пройдет 10 ярдов. Ахилл пробегает и эти 10 ярдов, но черепаха удаляется от него на 1 ярд. Тогда Ахилл пробегает один ярд, но черепаха удаляется от него на $\frac{1}{10}$ ярда, и так далее до бесконечности.

Вот видите, что происходит. Ахилл продолжает движение, но и черепаха движется, и Ахилл не может ее догнать. И более того, повторяя это рассуждение для другого первоначального разрыва между черепахой и Ахиллом, мы можем сказать, что, каким бы малым ни было изначальное преимущество черепахи, будь это один фут или один дюйм, ничего не изменится. Ахилл никогда не сможет добиться никакого преимущества, а это, в свою очередь, означает невозможность движения вообще.

Конечно, вы прекрасно знаете, что Ахилл может догнать черепаху и движение возможно, следовательно, доказательство Зенона несет в себе противоречие, то есть является парадоксом.

А теперь рассмотрим подробно задачу Зенона. Где ошибка в его рассуждениях? Предположим, Ахилл бежит со скоростью 10 ярдов в секунду, а черепаха движется со скоростью 1 ярд в секунду. Ахилл пробегает первые 100 ярдов за 10 секунд. За это время черепаха проходит 10 ярдов. Ахилл преодолевает 10 ярдов за одну секунду, а черепаха за это время проходит 1 ярд. Ахилл преодолеет этот ярд за 0,1 секунды, а черепаха удалится от него на 0,1 ярда.

Иными словами, время, которое нужно Ахиллу для того, чтобы догнать черепаху, представляет собой убывающую последовательность 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001...

Сколько времени понадобится Ахиллу для того, чтобы преодолеть бесконечную последовательность уменьшающихся расстояний? Зенон считал, что раз число членов в последовательности бесконечно, то и сумма должна быть бесконечной. Он не мог себе представить, что последовательность бесконечного количества чисел может быть сходящейся и иметь конечную сумму.

Например, если мы сложим первые два члена последовательности Зенона, мы получим 11, сумма первых трех членов равна 11,1, первых четырех — 11,11, первых пяти — 11,111, первых шести 11,1111. А если представить себе сумму всего бесконечного ряда, то мы получим 11,1111111111111111... И так до бесконечности.

А что такое 11,111111111...? Это десятичный эквивалент числа $11\frac{1}{9}$. Если перевести $11\frac{1}{9}$ в десятичную дробь, мы получим как раз 11,111111111111111111...

Таким образом, сумма последовательности в задаче Зенона составляет $11\frac{1}{9}$ секунды. Это то самое время, которое понадобится Ахиллу, чтобы преодолеть все последовательно убывающие расстояния, на которые удаляется от него черепаха. А это значит, во-первых, что Ахилл в конце концов догонит черепаху, во-вторых, что движение возможно, ну а в-третьих, что и мы можем наконец расслабиться.

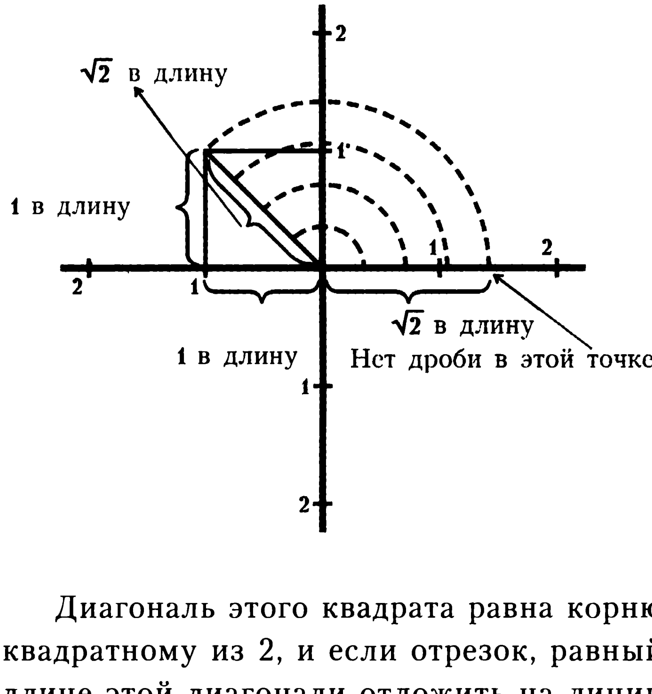
Последовательности могут стремиться к пределу, который является бесконечной десятичной дробью, причем не повторяющейся. Такие последовательности можно составлять для отображения иррациональных чисел. Прибавляя все новые и новые члены к такой последовательности, мы все ближе подходим к величине иррационального числа, хотя никогда не сможем ее достичь. Такие же сходящиеся последовательности используют для определения иррациональных чисел, например таких, как логарифмы.

Больший, чем бесконечный

Но все ли бесконечности бесконечны одинаково? Можно ли представить себе бесконечную последовательность, которая не была бы счетной бесконечной последовательности целых чисел?

Да, в общем, возможно. Представьте себе линию с делениями через равные интервалы, обозначающими числа, к такой линии мы обращались несколько раз по мере изложения материала в нашей книге. А теперь представьте себе, что все интервалы между числами разбиты на все возможные дроби. То есть интервалы между целыми числами плотно наполнены третьими долями, седьмыми долями, тысячными, миллионными и так далее. Тем не менее на прямой останутся точки, которым не будет соответствовать какая-либо дробь, даже в том случае, если дробей будет бесконечное количество. Вспомните иррациональные числа.

Например, корень квадратный из 2 не имеет точки на линии дробей, потому что его невозможно представить в виде дроби. Тем менее на линии он существует. Представьте себе квадрат со стороной от одного целого числа до другого (как на рисунке).



Диагональ этого квадрата равна корню квадратному из 2, и если отрезок, равный длине этой диагонали отложить на линии от нулевой точки, то он закончится на точке, равной корню квадратному из 2, которой не соответствует ни одна дробь. На этой точке ни одна дробь просто не может находиться. На линии также можно отметить любое другое иррациональное число, и опять-таки этой точке не будет соответствовать ни одна дробь.

Какой же вывод можно сделать из всего сказанного? Если на линии отмечены точками все рациональные числа, останется тем не менее бесконечное число точек, соответствующих иррациональным числам. Более того, две точки, соответствующие рациональным числам, никогда не будут находиться рядом. Математики доказали, что между ними всегда будет по крайней мере точка, соответствующая иррациональному числу. И наоборот, между двумя иррациональными числами всегда будет по крайней мере одно рациональное число. Если же на линии будут нанесены все рациональные и иррациональные числа, это означает, что использованы все точки. Последовательность действительных чисел, куда входят как рациональные, так и иррациональные числа, образует «континуум».

А как обстоит дело с действительными числами? Является ли последовательность действительных чисел счетной с последовательностью целых чисел, как и последовательность всех рациональных чисел? Нет, не является. Было показано, что, как бы мы ни старались расположить действительные числа таким образом, чтобы одному действительному числу соответствовало одно целое, все равно останется бесконечное количество свободных действительных чисел.

Бесконечность действительных чисел обозначают С (от латинского «continuum»). С – это бесконечность более обширная, нежели счетная бесконечность, так как бесконечной последовательности целых чисел недостаточно, чтобы сосчитать бесконечную последовательность действительных чисел.

Можно проверить, являются ли другие виды бесконечных последовательностей счетными по отношению к бесконечной последовательности действительных чисел. Например, последовательность всех комплексных чисел (то есть все точки на плоскости, а не только точки на прямой) является счетной по отношению к последовательности всех действительных чисел. Точно так же и бесконечная последовательность гиперкомплексных чисел (то есть все точки в пространстве Вселенной, которую мы тоже считаем в данном случае бесконечной) является счетной по отношению к последовательности всех действительных чисел.

Бесконечные бесконечности

В 1896 году математик Джордж Кантор выдвинул теорию «трансфинитных чисел», согласно которой существует бесконечное количество бесконечностей разного рода. Эти бесконечности он обозначил буквой «алеф» древнееврейского алфавита. Каждую такую бесконечность обозначали при помощи правого нижнего индекса при букве «алеф»:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3 \ldots$$

Первая бесконечность называется «алеф-ноль» и соответствует бесконечной последовательности целых чисел. Это означает, что бесконечность, с описания которой я начал эту главу, может быть самой малой из существующих бесконечностей. Другими словами, до сих пор не открыта такая бесконечная последовательность чего бы то ни было, которая не была бы счетной с последовательностью целых чисел по той причине, что остались бы лишние целые числа.

Считается, что следующая по порядку последовательность, «алеф-один» ($\aleph_1$), представляет собой C, или бесконечность континуума, но это положение еще не было доказано. Никому не удалось обнаружить бесконечной последовательности чего бы то ни было в промежутке между «алеф-ноль» ($\aleph_0$) и C, но никто также и не доказал, что существование такой бесконечности невозможно.

Бесконечность количества разнообразных кривых, которые можно нарисовать на плоскости, может быть бесконечностью «алеф-два» ($\aleph_2$).

Что же касается следующих по порядку бесконечностей, то для них пока не было найдено соответствия.

Тем не менее уже существует концепция бесконечного разнообразия бесконечностей, которое начинается с обычной бесконечной последовательности целых чисел, наименьшей из возможных бесконечностей.

Таким образом, человек, на заре развития научившийся различать 1 и 2, путем проб и ошибок двигался к вершинам познания и в наши дни может бесстрашно оперировать такими понятиями, как многообразие бесконечностей.

В любой книге, посвященной достижениям человечества, не следует писать слово «конец», ибо конца не существует, а процесс познания бесконечен. Нужно ставить знак

$$\aleph_{\infty}$$

Предметный указатель

Содержание

Литературно-художественное издание

ПОПУЛЯРНАЯ НАУКА ОТ АЗИМОВА

Айзек Азимов

ЧИСЛА

ОТ АРИФМЕТИКИ ДО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Ответственный редактор *Д. Байкалов*
Художественный редактор *Б. Волков*
Технический редактор *Н Носова*
Компьютерная верстка *И Онофрийчук*
Корректор *В. Чернявская*

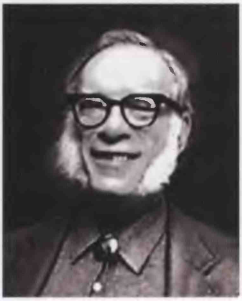
ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул Клары Цеткин, д. 18/5 Тел 411-68-86, 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Подписано в печать 26.01.2012. Формат 84x108$^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,12.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4345.

Отпечатано в ОАО «Тульская типография».
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.

ISBN 978-5-699-52723-6

9 785699 527236 >



Айзек Азимов (1920–1992) известен всему миру прежде всего как великий русско-американский (он родился под Смоленском) писатель-фантаст. Между тем он является автором нескольких сотен книг, написанных в научно-популярном жанре. Азимов был человеком поистине энциклопедических знаний и с невероятной легкостью, простотой и прозрачностью умел их излагать. В 28 лет Азимов получил докторскую степень, в 29 – начал преподавать в Бостонском университете. Там и стал профессором. На континенте науки Азимов занял свою нишу: он умело переводил научные знания на язык массовой аудитории, что позволяло ему воспламенять в читателях страсть к постижению окружающего мира. Наиболее известные научно-популярные работы фантаста относятся к естественным наукам. Но и в гуманитарной сфере Азимов не менее великолепен: его почти беллетристические изложения исторических событий и книги о религии читаются с невероятным интересом. За свои научно-популярные труды Азимов стал лауреатом рекордного количества наград. Среди них премия Фонда Томаса Эдисона, премия Говарда Блэксли от Ассоциации американских кардиологов, премия Джеймса Грэйди от Американского химического общества, Вестингаузовская премия от Американской Ассоциации поддержки науки и множество других.

Знаменитый фантаст и популяризатор науки сэр Айзек Азимов в этой книге решил окунуть читателя в магию чисел. Свой увлекательный рассказ Азимов начинает с древнейших времен, когда человек использовал для вычислений пальцы, затем знакомит нас со счетами, а также с историей возникновения операций сложения, вычитания, умножения и деления. Шаг за шагом, от простого к сложному, используя занимательные примеры, автор ведет нас тем же путем, которым шло человечество, совершенствуя свои навыки в математике.

ЭКСМО