

Қ. С. АБДУРАШИДОВ,
Б. А. ХОБИЛОВ,
Н. Ж. ТУЙЧИЕВ,
А. Ғ. РАҲИМБОВ

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ

*Ўзбекистон Республикаси Олий
ва ўрта махсус таълим вазирлиги
олий ўқув юртлари учун дарслик
сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»

Б. А. ҲОБИЛОВНИНГ умумий таҳрири остида

*Тақризчи — физика-математика фанлари доктори,
академик В. Қ. ҚОБУЛОВ*

Мухаррир — А. Ҳакимжонова

Қурилиш механикаси: Олий ўқув юрт. учун дарслик/Қ. С. Абдурашидов, Б. А. Ҳобилов, Н. Ж. Тўйчиев, А. И. Раҳимбоев; / Б. А. Ҳобиловнинг умумий таҳрири остида /.—Т.: Ўзбекистон, 1999.—384 б.

И. Қ. С. Абдурашидов ва бошқ.

Қурилиш механикаси фани иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги масалалари билан шуғулланади. Мазкур дарсликда қурилиш механикасининг асосий муаммолари тўлалигича ўз аксини топган.

Дарслик қурилиш ихтисоси бўйича ўқийдиган талабаларга мўлжалланган.

ББК 38.112я73

ISBN 5-640-02-194-2

Р 33080000000-159 — 99 © «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 1999 й
М351(04)96

КИРИШ

Умуммуҳандислик фанлари орасида назарий механика, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси сингари фанлар салмоқли ўрин тутди. Қурилиш муҳандисларининг савиясини белгилашда бу фанларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир. Ҳар қандай фанни талаба ўз она тилида осон ўзлаштира олишини яхши тушунган аллома олим академик М. Т. Ўрозбоев 1954 йилда назарий механика, 1960 йилда материаллар қаршилиги фанларидан биринчи бўлиб ўзбек тилида дарслик яратди. Орадан чорак аср ўтгач, З. А. Одилхўжаев, Т. Г. Ғуломов ва Т. К. Абдукаримовлар устоз М. Т. Ўрозбоев бошлаб берган хайрли ишни давом эттириб, ўзбек тилида илк бор қурилиш механикаси фанидан дарслик яратиб, талабаларга тортиқ этдилар.

Қурилиш механикаси фанидан ўзбек тилида дарслик чоп этилганига 10 йилдан ошди. Бу орада илм-фан тараққиёти ва ижтимоий ҳаётда жиддий ўзгаришлар рўй берди: республикамиз истиқлолга эришди, ўзбек тилига давлат тили мақоми берилди. Эндиликда ўқув-услугиёт соҳасида катта тажрибага эга бўлган моҳир устозлар ўзбек тилида дарсликлар ёзиш имкониятига эга бўлдилар. Қўлингиздаги китоб ҳам ана шундай имкониятларнинг маҳсулидир.

Мазкур дарслик юқорида қайд қилинган китобга кирмаган (иншоотлар устуворлиги ва динамикаси, чекли элементлар усули сингари) айрим мавзу ва боблар билан бойитилди. Бироқ шунга қарамай, қурилиш механикасига онд барча мавзулар тўлалигича камраб олинди, деган фикрдан йироқмиз.

Дарсликнинг 3-, 4- ва 5- боблари Қ. С. Абдурашидов, 11- ва 12- боблари Н. Ж. Тўйчиев, 2-, 8- ва 9- боблари А. Ғ. Раҳимбоевлар қаламига мансуб, қолган боблари Б. А. Ҳобилов ёзган. Иншоотлар динамикасига доир баъзи мисоллар Н. И. Безухов, Қ. С. Завриев, А. П. Филин сингари олимларнинг асарларидан олинди. Қўчишларни аниқлаш, куч усули ва устуворликка доир мисоллар У. Қ. Абдурахмонов томонидан тайёрланган.

Муаллифлар дарслик қўлёзмасини кўриб чиқиб, фойдали маслаҳатлар берганликлари учун Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси, техника фанлари доктори, профессор В. Қ. Қобуловга, техника фанлари доктори, профессор М. М. Мирсановга, қўлёзма-ни тайёрлашда кўрсатган катта ёрдами учун Захро Умаровага ўзларининг самимий миннатдорчиликларини билдирадilar.

1- боб

УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1.1. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ ФАНИ ВА УНИНГ ВАЗИФАЛАРИ

Қурилиш механикаси иншоотларнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги ҳақидаги фандир.

Иншоотларнинг **мустаҳкамлиги** деганда уларнинг юк кўтариш қобилияти тушунилади, чунки мустаҳкам иншоот ўзига қўйилган юкларни бемалол кўтариб тура олиши лозим, акс ҳолда, унинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлмайди. Курсимиз давомида иншоотларнинг мустаҳкамлиги етарли даражада бўлиши учун нималар қилиш кераклиги ҳақида батафсил тўхталиб ўтамиз.

Иншоотларнинг **устуворлиги** (устойчивость) деганда юклар таъсирида иншоот ўзининг дастлабки мувозанат ҳолатини сақлаб тура олиш-олмаслиги тушунилади.

Эксплуатация жараёнида иншоотда меъёридан ортқича кўчиш, солқилик ва оғишлар рўй бермаслиги учун уларнинг **бикирлиги** ҳисоблаш йўли билан текширилади.

Маълумки, мустаҳкамлик, устуворлик ва бикирлик масалалари билан материаллар қаршилиги фани ҳам шуғулланади. Қурилиш механикаси билан материаллар қаршилиги фани ўртасидаги фарқ шундаки, материаллар қаршилиги фани иншоотни ташкил этувчи алоҳида элементлар (балка, стержень ва ҳ. к.) нинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлигини ўрганади. Қурилиш механикасида эса алоҳида элементлар мажмуасидан ташкил топган бутун иншоотнинг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикирлиги кўриб ўтилади. Аниқроқ қилиб айтганда, яхлит иншоотлар мустаҳкамлигини, устуворлигини ва бикирлигини таъминлайдиган конун-қоидалар ва усуллар билан танишиб ўтилади. Кўриниб турибдики, қурилиш механикаси фани материаллар қаршилиги фани билан

узвий боғланган фандир. Бундан ташқари, қурилиш механикаси фани назарий механика, физика ва математика фанларига ҳам боғлиқдир. Бу ҳисобий фанлар занжирининг бир томони; занжирнинг иккинчи томонида ҳисобни якунига етказувчи фанлар — қурилиш конструкциялари фанлари (темирбетон ва ғишт-тош конструкциялари, металл, ёғоч ва пластмасса конструкциялари) туради. Ўз олдига қурилиш конструкциялари ҳисобини пухта ўзлаштиришни мақсад қилиб қўйган толиб, ана шу ҳисобий фанлар занжирини узвий равишда, бир-бирига боғлиқ ҳолда чуқур ўзлаштириши лозим.

Эластиклик назарияси, пластиклик назарияси ва тоб ташлаш назариялари юқорида қўриб ўтилган масалаларни кучли математик аппарат ёрдамида янада жиддийроқ ва янада аниқроқ ҳал этиш усуллари билан шуғулланади. Қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида қўлланилган айрим чекланишлар ва фаразлар бу фанларда қўлланилмайди. Шунинг учун ҳам ҳисоб натижалари ҳақиқатга анча яқин туради. Бироқ ҳисоблаш жараёнининг ўта мураккаблиги туфайли лойиҳа амалиётларида улардан фойдаланиш доираси анча тор.

Ҳозирги замон бинолари ҳамда иншоотлари олдиндан тайёрланган лойиҳалар асосида бунёд этилиши ҳеч кимга сир эмас. Лойиҳада бино ва иншоотларнинг умумий ўлчамлари билан бир каторда ҳар бир алоҳида элементнинг ўлчамлари ҳам тўлиқ кўрсатилади.

Конструкция элементларининг узунликлари ҳамда қўндаланг кесим ўлчамлари элементларга таъсир этувчи кучлар ва элементнинг материалга боғлиқ ҳолда ҳисоблаш йўли билан аниқланади. Ҳисоблаш усуллари эса қурилиш механикаси ва материаллар қаршилиги фанларида баён этилади.

Қурилиш механикаси фанининг асосий вазифаларидан бири ташқи кучлар (юклар) таъсирида конструкция элементларида ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишларни) аниқлашдан иборатдир. Зўриқиш ним алигини тўлиқроқ тасаввур этиш учун оддий бир мисол келтирамиз. Икки қўлингизда сув тўлдирилган икки челақни қўтариб турибсиз, дейлик. Дастлабки дақиқаларда қўлингиз толиқиш ёки оғрикни ҳис этмайди. Бироқ вақт ўтган сайин қўлингизда оғриққа ўхшаш енгил толиқиш пайдо бўлади ва у борган сари кучайиб боради. Ана шу оғриққа ўхшаш толиқиш механика тилида зўриқиш ёки ички куч деб аталади. Конструкция элементларига қўйилган ташқи

кучларнинг (масалан, челадаги сув) миқдори маълум бўлса, элементларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаш қийин эмас. Конструкция элементларининг кўндаланг кесим ўлчамлари аниқланган зўриқишларнинг миқдorigа қараб белгиланади.

Ташқи кучлар таъсирида иншоот ва унинг элементларида ҳосил бўладиган солқилик, кўчиш ва тебраниш амплитудаларини аниқлаш каби масалалар ҳам қурилиш механикаси фани доирасидаги масалалардан ҳисобланади.

Дарсликда зилзилалар содир бўлиб турадиган ҳудудлар учун муҳим аҳамиятга эга бўлган иншоотлар динамикаси масалаларига ҳам кенг ўрин ажратилган.

Назарий жиҳатдан баён этилган усулларнинг амалий тадқиқи мисол ва масалаларда ўз аксини топган.

Қурилиш механикасида яратилган ҳар қандай назарий усуллар тажрибада синаб кўрилади ва ўз навбатида, мавжуд конструкциялар устида олиб борилган тадқиқий тажрибалар асосида янги ҳисоблаш усуллари яратилади. Шунга кўра қурилиш механикаси фани тажрибавий-назарий фан саналади.

Ҳозирги кунда қурилиш механикаси фани бинокорлик ва муҳандислик амалиётида ҳар тарафлама синовдан ўтган кўплаб ҳисоблаш усулларига эга. Бу усуллар содда ва мукамал бўлиб, шу билан бирга ишончлидир. Бирок бундан қурилиш механикаси ўз вазифаларини тўлиқ бажариб бўлди, деган маъно чиқмайди, албатта. Қурилиш механикаси ҳам бошқа фанлар сингари ўсиб бораётган қурилиш саноатининг талабларига мос равишда муттасил ривожланиб, такомиллашиб бормокда.

1.2. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИНING РИВОЖЛАНИШИГА ОИД МАЪЛУМОТЛАР

Қурилиш механикаси ривожланиш жараёнининг дастлабки босқичларида мустақил фан бўлмай, умумий механиканинг таркибий қисмларидан бири бўлган. Бинобарин умумий механиканинг ибтидоий даврлардан бошлаб ҳозирги давргача бўлган тарихи қурилиш механикасига ҳам бевосита алоқадордир.

10—12 минг йил давом этган неолит (янги тош асри) даврининг охирига келиб Нил, Тигр ва Ефрат дарёлари соҳилларида дастлабки шаҳарлар пайдо бўла бошлайди. Эрампдан аввалги V — III асрларда дастлабки машина-

сув тегирмони ихтиро. қилинади. Эрадан аввалги VI аср бошларига келиб, қадимги аجدодларимиз ҳозирги замон атамаси билан айтганда гидравлика, қурилиш механикаси, статика, динамика ва коинот механикасига оид бошланғич элементар билимлардан хабардор бўлганлар. Масалан, канналлар ўтказиш, экинларни суғориш, сувни тепаликларга олиб чиқиш каби ишларни бажарганлар. Ҳозирги Покистон ҳудудига жойлашган Моҳинжа-Доро шаҳрида эрадан аввалги III асрда сув қувурлари (водопровод) ва ёмғир сувларини четга чиқарадиган канализация тармоғи бўлган. Водопровод тармоғи бундан 2500 йил муқаддам республикамиз ҳудудида жойлашган Афросиёб (қадимги Самарқанд) аҳлини зилол сув билан таъминлаб турган. Қадимда Ўрта Осиёда сув кўтариш учун шодуф-чигирдан (кудукдан сув чиқарадиган қурилма) фойдаланилган. Ўша вақтларда қалъалар, масжид ва мақбаралар, турар жой биноларининг бунёд этилиши қурилиш механикасига оид билимларни чуқур билишни, қўлланилаётган конструкция ва материалга танқидий муносабат билдириш, улар ичидан энг мақбуллари танлаб билишни тақозо этарди. Кўп асрлик тажриба асосида тош, хом ғишт ва пишиқ ғишт мустаҳкамликлари орасидаги тафовут тўла ўрганилди. Баланд биноларнинг мақбул шакллари топилди.

Механиканинг назарий асослари дастлаб қадимги Юнонистон ва Мисрда пайдо бўлган. Механикага доир илк ёзма асар Юнонистоннинг машҳур файласуфи, эра-миздан 384—322 йиллар муқаддам яшаб ижод этган буюк олим Аристотель (Арасту)нинг қаламига мансуб. «Механика» сўзини илмий атама сифатида фанга биринчи бор олиб кирган олим ҳам ана шу буюк инсондир. Механиканинг хилма-хил масала ва муаммоларини ҳал этишда қадимги замон олимлари Архимед, Герон, Платон, Аполлоний, Гиппарх, Птолемей, Никомед, Архит ва бошқаларнинг хизматлари бениҳоя каттадир.

Шарқ мамлакатларида механика фани IX — XII асрларда тараккий эта бошлади. Бу даврга келиб шарқнинг машҳур олимлари ака-ука Бану Мусолар, Собит ибн Қурра, Абу Райҳон Беруний, Абу Абдулло ал-Хоразмий, Абу Али ибн Сино, Умар Ҳайём, ал-Ҳазиний, ал-Форобий сингари улкан сиймолар табиий фанлар, хусусан, механика соҳасида баракали ижод этдилар. Дастлабки кезларда улар имл-фан, давр ва ижтимоий ҳаёт тақозоси билан Аристотель, Герон, Архимед, Филопон ва бошқаларнинг

асарларини таржима қилиш ва уларни шарҳлаш билан шуғулланганлар. Шарҳлар кўпинча мустақил асарлар даражасига кўтарилган. Ватандошимиз Абу Али ибн Сино антик олим Филопоннинг механика соҳасидаги ғояларини давом эттириб, ҳаракатдаги жисмга таъсир эттирилган куч йўқолмайди; агарда жисм ҳаракати қаршиликка учрама-са, у абадий давом этади, деган ғояни илгари сурди. Ибн Сино ўзининг «Донишнома» асарида юкларни кўтарадиган ва кўзғатадиган ускуналар ҳақида фикр юритади. Ал-Хоразмий «Фанлар калити» номли китобида механика билимларига алоҳида боб ажратди.

VII — VIII асрлардан бошлаб ислом дини кенг ёйилган мамлакатларда масжид, мадраса, макбара сингари маҳобатли бинолар қурилиши авж олади. Шарқ мамлакатлари, жумладан, Ўрта Осиёда бунёд этилган қадимий меъморчилик ёдгорликларида гумбаз, минора, айланма зина, пешток, равоқ, муқарнас каби мураккаб қурилмалар қўлланилган. Табиийки, бундай биноларни қуриш учун муҳандис, меъмор ва усталардан катта билим ва маҳорат талаб этилган. Қадимий биноларнинг шакл ва ўлчамлари асрлар мобайнида такомиллашиб борди. Бухорода Мино-рай Қалон номи билан аталувчи дунёга донғи кетган улкан минора бор. Минора асосининг диаметри 9 м, баландлиги 50 м, курсиси (цоколи) қиррадор бўлиб, миноранинг диаметри юқорига қараб ингичкалашиб боради. Минора 1127 йилда муҳандис ва меъмор Бако томонидан бунёд этилган. Минора шаклининг қурилиш механикаси нуктаи-назаридан макбул томони шундан иборатки, унинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал кучлар (зилзила ва шамол) таъсирига бардошлиги юқори даражададир. Бундан ташқари унинг шакли сиқилишга тенг қаршилик кўрсатувчи жисм шаклига яқин келади. Хулоса қилиб айтганда, қадимий меъморчилик обидаларини асрлар оша бизнинг давримизгача етиб келиши бобокалон меъморлар ва уста бинокорларнинг амалий қурилиш механикасидан чуқур хабардор эканликларидан далолат беради.

Шарқ олимларининг дунё фани олдидаги буюк хизматлари яна шундан иборатки, улар қадимги юнон олимларининг илмий меросини сақлаш ва уни ижодий ўрганиш билан бир қаторда уни ўз асарлари билан янада бойитганлар. Ана шу бой мерос кейинчалик турли йўллар билан Ғарбий Европага кириб борди.

Механиканинг эндиги ривожини Ўйғониш даврида Европага кўчди. Бу давр механикаси буюк олимлар Леонардо

да Винчи, Стевин, Коперник, Кеплер, Галилей ва Ньютонларнинг оламшумул асарлари ва ихтиролари билан бойиди, материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси-га доир биринчи китоб ўша даврда яратилди. Китобнинг номи «Икки янги фан ҳақида суҳбатлар ва математик исботлар» деб аталиб, муаллифи флоренциялик олим Галилео Галилей эди (1564—1642). 1678 йилда йирик инглиз олими Роберт Гук (1635—1703) ўзининг машҳур кунунини кашф этди, яъни чўзилиш қанақа бўлса, куч ҳам шунақа бўлади, деб таърифлайди муаллиф. Ҳозирги иборалар билан айтганда, деформация кучга тўғри пропорционалдир. Ҳозирги замон қурилиш механикаси-нинг деярли барча назария ва усуллари ана шу оддий қонунга асосланади.

XVIII асрда саноатнинг кенг ривожланиши илм-фан олдига янги-янги вазифалар қўйди. XIX асрда темир йўлларнинг пайдо бўлиши, кўприklar ва йирик саноат биноларининг қад кўтариши қурилиш механикасини янада ривожланишига туртки бўлди. Бу ва бундан кейинги даврларда қурилиш механикасининг ривожланишига чет эллик олимлардан Даламбер, Лагранж, Кулон, Ламс, Сен-Венан, Эйлер, Максвелл, Мор, Мюллер-Бреслау ва бошқалар, рус ва совет олимларидан Д. И. Журавский, Ф. С. Ясинский, Н. А. Белелюбский, В. Г. Шухов, В. Л. Кирпичев, Л. Р. Проскуряков, А. Н. Крилов, И. Г. Бубнов, Б. Г. Галёркин, кейинчалик И. М. Рабинович, В. З. Власов, К. С. Завриев, А. Ф. Смирнов, Н. И. Безухов, В. В. Болотин, А. В. Дарков ва бошқалар катта ҳисса қўшдилар. Қурилиш механикасининг оғир юқини кўтаришда ўзбек олимлари ҳам четда турмадилар: улар дунё олимлари билан ёнма-ён туриб фаннинг оғир машаққатларини енгишда ҳамдард бўлдилар.

Назарий механика ва материаллар қаршилиги курсларидан ўзбек тилида биринчи дарслик яратган олим академик М. Т. Ўрозбоев ўзбек механикларининг отаси ҳисобланади. Устознинг сафдоши академик Х. А. Рахматуллин умрининг охиригача Москва Давлат Университетида талабаларга сабоқ берди. Ўзбекистонда кибернетиканинг тараққиёти академик В. Қ. Қобуловнинг номи билан ҳамбарчас боғлиқдир. Зилзилалар тез-тез содир бўлиб турадиган бизнинг республикамизда зилзилабардош конструкциялар устида олиб борилаётган ишларнинг аҳамияти нақадар катта эканлиги сир эмас. Бу соҳанинг ўткир билимдони академик Т. Р. Рашидовнинг ер ости иншоотла-

ри сейсмик мустаҳкамлиги назариясига қўшган ҳиссаси беҳаддир. Ўзбекистон Фанлар академиясининг академиги Т. Ш. Ширинкуловнинг замин ва пойдеворлар соҳасида олиб борган илмий тадқиқотлари собиқ иттифоқ миқёсида тан олинган ва уларга юксак баҳо берилган эди.

Юқорида номлари зикр этилган устозлар яратган мактаб республикамизнинг турли билимгоҳларида ҳар томонлама тараккий этиб, такомиллашиб бормокда. Жумладан, Ўзбекистон Фанлар академиясининг Ўрозбоев номли механика ва иншоотлар зилзилабардошлиги институти, Тошкент зонал илмий-тадқиқот ва тажрибавий лойиҳалаш институти (ТашЗНИИЭП), Тошкент темир йўл транспорти институти, Тошкент ва Самарканд меъморчилик-қурилиш институтлари олимлари қурилиш механикасининг турли соҳаларида баракали ижод қилмоқдалар.

Ҳозирги даврда йирик ўлчамларга эга бўлган мураккаб қурилиш конструкцияларининг янги-янги турлари кўпайиб бормокда. Булар орасида енгил вазнли фазовий конструкциялар салмоқли ўрин тутди. Мураккаб конструкцияларнинг ҳисоби ҳам мураккаб бўлади.

Оддий конструкциялар ҳисобини қўлда бажариш мумкин бўлса, мураккаб конструкцияларнинг ҳисобини электрон ҳисоблаш машиналарисиз (ЭХМ) тасаввур этиб бўлмайди. Шу боисдан эндиликда қурилиш механикасида компьютерлардан фойдаланиш имконини берадиган аналитик усулларнинг роли ортиб бормокда.

Ҳисоблаш техникасидан кенг фойдаланиш имконини берадиган усуллардан бири матрица усулидир. Матрица ҳисобининг тили сонли ҳисоблаш машиналарига жуда қўл келади. Матрица усулининг афзалликларидан бири шундан иборатки, бунда бир хил матрица амалидан фойдаланиб, турли хил тизимларни ҳисобласа бўлади.

Истикболли усуллардан яна бири чекли элементлар усулидир. (ЧЭУ). Бу усулга кўра яхлит жисм алоҳида чекли элементларга бўлиб чиқилади; бу элементларнинг ўзаро боғланиши алоҳида нукталардаги зўриқишларнинг ўзаро таъсири орқали бурчакларга, фазовий масалаларда эса — параллелепипед ёки тетраэдрларга тақсимлаб чиқилади.

Мазкур дарсликнинг 11 ва 12-бобларида матрицалар назарияси ҳамда чекли элементлар усулига батафсил тўхтаб ўтамиз.

1.3. ИНШООТЛАР ВА УЛАРНИНГ ҲИСОБЛАШ ТАРҲЛАРИ

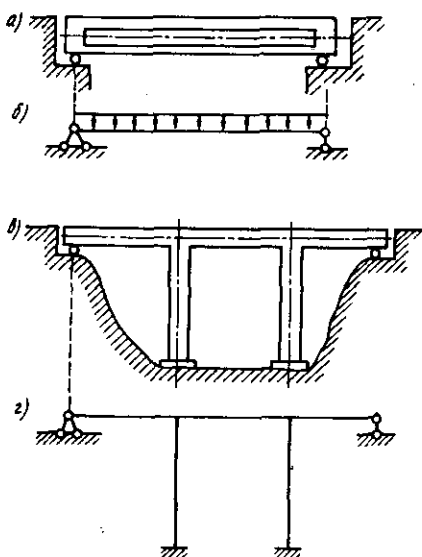
Мухандислик иншоотлари одатда стержень, балка, пластина, кобик ва ҳажмий жисмлар сингари турли конструктив элементларни тегишли равишда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинади. Демак, яхлит иншоот алоҳида элементлардан ташкил топган мураккаб система ҳисобланади.

Иншоотларни ҳисоблаганда, айрим элементларнинг ўлчам ва шакллари, улар орасидаги боғланишни аниқ ҳисобга олиш назарий жиҳатдан ё имкони йўқ, ё ўта мураккаб ишдир. Шунинг учун қурилиш механикасида бошқа фанлардаги сингари илмий абстракция усулидан фойдаланиб, мавжуд иншоот ҳисоблаш тарҳи билан алмаштирилади.

Ҳисоблаш тарҳи — иншоотнинг соддалаштирилган тасвири бўлиб, унда юк таъсиридаги иншоотнинг асосий кўрсаткичлари мужассамлашган бўлади. Ҳисоблаш тарҳларида стерженлар — ўқлар билан, пластиналар — ўрта сиртлар билан, кўндаланг кесимлар — юза ва инерция моментларининг сон қийматлари билан, реал

таъсирлар идеал таъсирлар билан алмаштирилади; юклар ўқларга қўйилган деб фараз этилади ва ҳ.к. Иншоотлар ҳисоби ана шундай ҳисоблаш тарҳлари орқали амалга оширилади.

1.1-расмда бир ораликли кўприк (а) ҳамда балка деб аталувчи унинг ҳисоблаш тарҳи (б) тасвирланган. 1.1-расм, в-да уч ораликли кўприк ҳамда рама деб аталувчи унинг ҳисоблаш тарҳи (г) берилган. Йўл қопламасининг вазни ҳамда кўприкнинг



1.1-расм

хусусий оғирлиги балкага текис ёйик куч сифатида таъсир этади. Балкада ташки кучлар ва ҳарорат таъсирида бўйлама кучлар ҳосил бўлмаслиги учун унинг таянчларидан бири кўзғалувчан, иккинчиси кўзғалмас қилиб ишланади.

Иншоотнинг ҳисоблаш тарҳини танлаш мураккаб, айти пайтда, муҳим масалалардан биридир. Ҳисобнинг сифати, яъни унинг аниқлиги кўп жиҳатдан, ҳисоблаш тарҳининг қандай танланишига боғлиқ.

Агар ҳисоб нотўғри танланган ҳисоблаш тарҳи бўйича бажарилган бўлса, у ўта аниқ усуллар билан ҳисобланган тақдирда ҳам тўғри натижа бермайди.

Маълумки, стержень ва пластиналар иншоотнинг асосий элементлари ҳисобланади. Кўндаланг кесим ўлчамлари узунликка нисбатан анча кичик бўлган элемент стержень деб аталади. Бир ўлчами (қалинлиги) қолган икки ўлчами (узунлиги ва эни)га нисбатан анча кичик бўлса, пластина деб аталади. Эгри ўкли пластина қобик (оболочка) деб аталади. Булардан ташқари ҳисоблаш тарҳлари ичида ҳажмий жисмлар деб аталувчи элементлар ҳам учрайди. Бундай элементларнинг уч ўлчами бир-бирига яқин бўлади. Бунга пойдевор блоклари, тиргак деворлар мисол бўла олади.

Алоҳида элементларнинг жойлашув тартибига қараб иншоотлар ясси ва фазовий системаларга бўлинади. Барча стерженьларнинг ўзлари бир текисликда жойлашган бўлса, бундай иншоот ясси система деб аталади. Акс ҳолда система фазовий бўлади. Ясси иншоотлар мустақил кўринишда камдан-кам учрайди. Кўпинча улар ҳисобни соддалаштириш мақсадида фазовий системалардан ажратиб олинади. Ясси системани фазовий системадан ажратиб олиниши ҳисоб аниқлигини пасайтиради. Бироқ муҳандислик амалиётида баъзан шундай қилишга тўғри келади.

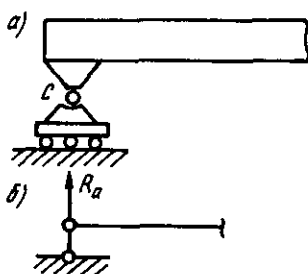
1.4. ТАЯНЧЛАР ВА ЮҚЛАР

Иншоотнинг пойдевор ёки замин билан бириккан қисми таянч деб аталади. Таянчлар уч хил бўлади: шарнирли кўзғалувчи таянч, шарнирли кўзғалмас таянч, шарнирсиз кўзғалмас таянч.

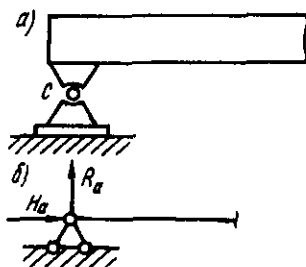
1.2-расмда шарнирли кўзғалувчи таянчнинг конструкцияси (а) ва унинг содда тасвири (б) берилган;

бунда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, горизонтал йўналишда кўзғала олади; биргина вертикал реакция вужудга келади.

1.3- расмда шарнирли кўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва тасвири (б) берилган; бу ерда стержень шарнир (с) атрофида айлана олади, бироқ горизонтал йўналишда кўзғалмасдир. Бундай таянчда ҳам горизонтал, ҳам вертикал реакциялар вужудга келади.



1.2- расм

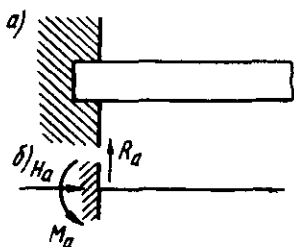


1.3- расм

1.4- расмда шарнирсиз кўзғалмас таянчнинг конструкцияси (а) ва содда тасвири (б) берилган бўлиб, бунда стержень учи таянчга мустақкам бириктирилган; стержень горизонтал йўналишда кўзғолиш ёки таянч кесими атрофида айланиш имконига эга эмас. Бундай таянчда учта реакция (R_a , H_a , M_a) вужудга келади.

Иншоотга таъсир этадиган ташқи кучлар юклар деб аталади. Юклар таъсир этиш муддати, таъсир этиш усули, вазифаси ва бошқа белгиларга қараб бир неча турга бўлинади.

Юклар иншоотга қўйилиш вакти (муддатига) қараб статик ва динамик юкларга бўлинади. Статик юклар



1.4- расм

иншоотга зарбсиз аста-секин қўйилади; юкнинг қиймати нолдан бошлаб охириги қийматига қадар бир текисда ортиб боради. Динамик юклар иншоотга бирданига қўйилади ёки вақт ўтиши билан қиймат ва йўналишини ўзгартириб туради.

Қўйилиш усулига кўра ёйик ва йиғик (тўпланган) юклар бўлади.

Ёйик юк иншоот сирти ёки узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Узунлик бўйлаб ёйилган юк интенсивлик билан ўлчанади. Интенсивлик деганда узунлик бирлигига тўғри келадиган юк миқдори тушунилади ва у кН/м билан ўлчанади. Агар юк сирт бўйлаб ёйилган бўлса, кН/м^2 билан ўлчанади.

Йиғик юк деганда бир нуктага тўпланган куч тушунилади. Аслида бундай юклар реал ҳолда камдан-кам учрайди. Ҳисоб ишларини соддалаштириш учун кўпинча ёйик юклар йиғик куч ҳолига келтириб олинади, яъни маълум бир нуктага тўпланади. Ҳозирда амалда бўлган халқаро ўлчам birlikлари тизими (СИ) бўйича кучнинг ўлчам birlikи ньютон (Н) дир. Эслатиб ўтамиз: $1 \text{ кгк} \approx 9,81 \text{ Н}$.

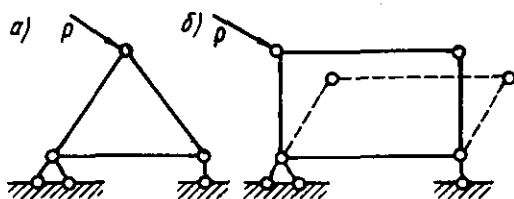
Вазифасига кўра юклар доимий, муваққат ва қўзғалувчан бўлади. Иншоотга доим таъсир этиб турувчи юк (масалан, хусусий оғирлик) доимий юк ҳисобланади. Муваққат юк иншоотга маълум даврларда таъсир этади (масалан, шамол ва қор таъсири, турли ускуна ва жиҳозлар ва ҳ.к.). Қўзғалувчан юкларга транспорт воситалари мисол бўла олади.

1.5. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ЎЗГАРМАСЛИК ШАРТЛАРИ

Қурилиш конструкцияларининг аксарияти ҳисоблаш чизмаларида стерженлардан ташкил топади (балка, ферма, рама ва ҳ.к.). Алоҳида стерженларнинг тугунларда ўзаро бириктириш йўли билан ҳосил қилинган қурилмалар стерженли система л а р деб аталади.

Ҳар қандай иншоот, яъни стерженли система геометрик ўзгармас бўлиши лозим. Бунинг маъноси шуки, ҳар қандай бино ва иншоот бунёд этилгандан кейин ўзининг дастлабки геометрик шаклини ҳеч оғишмай сақлаб туриши керак. Бинокорликда геометрик ўзгарувчан системалар қўлланилмайди, чунки бундай системалар деформацияланмаган ҳолда ўз шаклини кескин ўзгартиради. Геометрик ўзгармас системалар эса ўз шаклини стерженларнинг деформацияланиши эвазига ўзгартиради.

1.5- расмда учбурчакли (а) ва тўртбурчакли (б) иккита стерженли система тасвирланган бўлиб улардан бири геометрик ўзгармас, иккинчиси ўзгарувчандир.



1.5-расм

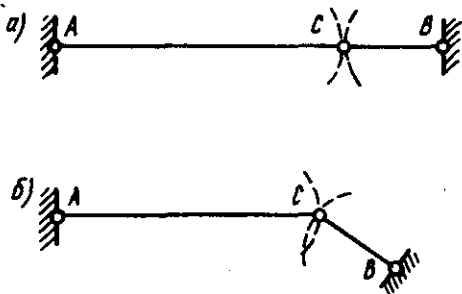
Учбурчакли системанинг шакли стерженлар деформация бергандагина ўзгаради, акс холда ўзгаришсиз тураверади. Шунинг учун у геометрик ўзгармас система саналади. Тўртбурчакли система эса ўз шаклини осонгина ўзгартиради, бунда стерженлар дастлабки узунлигини сақлаб қолади, яъни деформацияланмайди. Демак, бу геометрик ўзгарувчан системадир.

Хулоса қилиб айтганда, ўзининг геометрик шаклини алоҳида стерженларнинг деформацияланиши ҳисобига ўзгартирадиган системалар геометрик ўзгармас системалар деб аталади.

Учбурчак, система энг оддий геометрик ўзгармас система ҳисобланади. Хўш, мураккаб шаклга эга бўлган геометрик ўзгармас системалар қандай ҳосил қилинади? деган савол туғилади. Бу саволга жавоб беришга уриниб кўрамыз.

Бунинг учун аввал оний ўзгарувчан система билан танишиб чиқамиз.

Бир ўқ устида ётувчи икки стержень ва уч шарнирдан ташкил топган система билан танишиб чиқайлик (1.6-расм, а).



1.6-расм

учбурчакка бирин-кетин икки стержень оркали янги тугунларни кўшиб борамиз. Тугунларни кўшиш тартиби чизмада рақамлар билан кўрсатилган. Эътибор беринг: ҳар бир янги тугун ва икки стержень бир ўқ устида ётмайди. Шу тартибда ҳосил қилинган ферма ўзгармас бўлади.

Текшириш учун тугунларни ва уларга туташган икки стерженни тескари тартибда бирин-кетин ташлаб юборамиз. Агар ташлашлар охирида учбурчакли система қолса, у ҳолда берилган система геометрик ўзгармас бўлади. Бизнинг мисолда айнан шундай: тугунларни 9- тугундан бошлаб бирин-кетин ташлаб юборсак, охирида *abc* учбурчаги қолади. Демак яхлит ферма геометрик ўзгармас система экан.

Энди стерженли системаларнинг геометрик ўзгармаслик шартларини формула оркали ифода этишга уриниб кўрамиз.

Геометрик ўзгармас оддий ферма стерженлари сонини S , тугунлари сонини K деб белгиласак, стерженлар сони билан тугунлар сони орасидаги боғланишни қуйидаги тартибда ифодаласа бўлади: асосий учбурчак учта тугун ва учта стерженга эга: бунга келиб қўшилувчи ҳар бир янги тугун сон жиҳатдан $(K - 3)$ га тенг бўлиб, ҳар бир тугунга иккитадан стержень туташган бўлади. Натижада ферма стерженларининг умумий сони қуйидагича бўлади:

$$S = 3 + 2(K - 3)$$

ёки

$$S = 3K - 3. \quad (1.1)$$

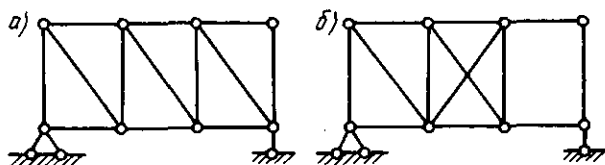
Бу ерда қуйидаги уч ҳол учраши мумкин:

1) $S < 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади; чунки стерженлар сони талаб этилган сондан кам;

2) $S = 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади; системадаги стерженлар сони талаб даражасида, ортик ҳам эмас, кам ҳам эмас;

3) $S > 3K - 3$, бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ бўлади; чунки стерженлар сони керагидан ортикча.

Кўриб ўтилган уч ҳолдан биринчиси бинокорлик учун ярамайди, қолган икки ҳол қурилиш конструкцияларини каноатлантиради. Чунки иншоотлар статик аниқ ёки



1.8- расм

ноаниклигидан қатъи назар геометрик ўзгармас бўлиши даркор.

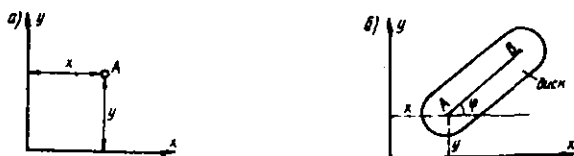
Бироқ стерженли системанинг формулани каноатлантириши масаланинг бир томони холос. Масаланинг иккинчи томони ҳам бор: системанинг геометрик ўзгармаслигини таъминлашда унинг тузилиши ҳам катта роль ўйнайди. Масалан, 1.8- расмда стерженлари сони формулани каноатлантирадиган иккита ферма тасвирланган. Формулага кўра ҳар иккалови ҳам геометрик ўзгармас система бўлиши керак. Бироқ ферманинг тузилишига кўра улардан бири (а) геометрик ўзгармас, иккинчиси (б) геометрик ўзгарувчандир. Иккинчи ферманинг охириги панели геометрик ўзгарувчан тўртбурчакли системадан ташкил топганлиги сабабли у геометрик ўзгарувчандир.

1.6. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ ЭРКИНЛИК ДАРАЖАЛАРИ

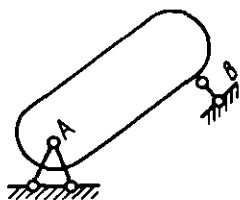
Нукта ёки системанинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрлар сони эркинлик даражаси деб аталади.

А нуктасининг ҳолатини x ва y параметрлари белгилайди (1.9- расм, а). Демак нуктанинг эркинлик даражаси иккига тенг.

Ясси диск (масалан, фанер парчаси)нинг эркинлик даражасини кўриб чиқамиз (1.9- расм, б). Дискнинг ҳолатини белгиловчи геометрик параметрларни белгилаш учун диск сиртида АВ кесмасини ўтказамиз. Бу кесманинг



1.9- расм



1.10-расм

ҳолатини x , y , φ параметрлари орқали билишимиз мумкин. Ҳаммак, АВ кесмасининг эркинлик даражаси учга тенг. АВ кесмасининг ҳолатини белгилувчи параметрлар (x , y , φ) дискнинг ҳолатини ҳам белгилайди, чунки кесма диск сиртида ётибди. Бундан дискнинг эркинлик даражаси ҳам

учга тенг бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Бунинг маъноси шуки, диск уч йўналишда эркин ҳаракат қилади: вертикал ва горизонтал йўналишларда кўчиши ҳамда бирор нуктага, масалан, А нуктасига нисбатан айланиши мумкин.

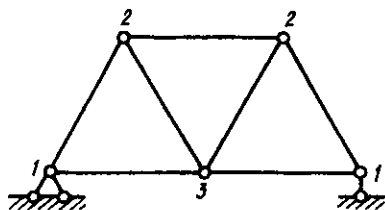
Диск ёки стерженнинг эркинлик даражасига чек қўядиган ҳар қандай қурилма боғланиш деб аталади. Шарнирлар ва таянч стерженлари боғланиш ҳисобланади. Ҳар бир шарнир иккита, ҳар бир таянч стержени эса битта эркинлик даражасига чек қўяди.

Яхлит бир диск олайлик. Агар унга ҳеч қандай боғланиш қўймасак, унинг эркинлик даражаси учга тенг бўлишини юқорида кўриб ўтдик. Энди дискка А шарнирини қўямиз (1.10-расм) (стол устида ётган фанера парчасига бир дона миҳ қоқамиз, дегандай гап). Бу билан дискнинг иккита эркинлик даражасига чек қўйилади (фанера икки йўналишда ҳаракат қилиш имкониятидан маҳрум бўлди, дегандай гап). Бироқ диск А шарнири атрофида айлана олади. Агар дискка яна бир боғланиш — таянч стержени В ни қўйсак, диск, айланиш имкониятидан ҳам маҳрум бўлади.

Мана шу мулоҳазалар асосида стерженли системаларнинг эркинлик даражасини аниқлашга доир формулани ёза оламиз. Агар системанинг эркинлик даражасини W , дисклар сонини D , шарнирлар сонини $Ш$ ва таянч стерженлари сонини C , деб олсак, стерженли системанинг эркинлик даражасини аниқлайдиган формула қуйидагича ифодаланади:

$$W = 3D - 2Ш - C, \quad (1.2)$$

Бу формуланинг замирида юқоридаги мулоҳаза ётибди, яъни ҳар бир диск учта эркинлик даражасига эга, ҳар бир шарнир иккита эркинлик даражасига чек қўяди ва ҳар бир таянч стержени битта эркинлик даражасига чек қўяди.



1.11-рasm

Шарнирлар сонини ҳисоблашда, улар иккига — оддий ва мураккаб шарнирларга ажратилади. Икки дискни бирлаштирувчи шарнир оддий, иккидан ортиқ дискни бирлаштирувчи шарнир эса — мураккаб шарнир деб аталади. Шарнирлар сони дисклар сонидан битта кам бўлади, яъни

$$Ш = Д - 1$$

Стерженли системаларнинг эркинлик даражаларини аниқлашда ҳам куйидаги учта ҳолга дуч келамиз:

1) $W = 0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик аниқ бўлади.

2) $W > 0$; бунда система геометрик ўзгарувчан, статик аниқ бўлади;

3) $W < 0$; бунда система геометрик ўзгармас, статик ноаниқ, ортиқча боғланишларга эга бўлади.

Мисол: Ясси ферманинг эркинлик даражасини аниқлаш керак (1.11-рasm).

Дисклар сони $Д = 7$;

Шарнирлар сони $Ш = 9$ (шаклда шарнирлар сони рақамлар билан кўрсатилган);

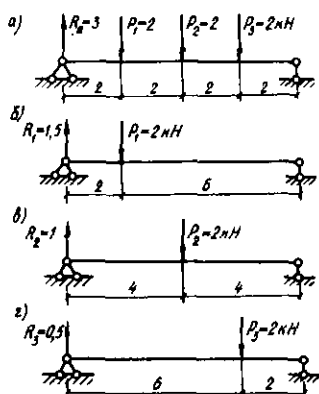
Таянч стерженлари сони $C_t = 3$; эркинлик даражаси $W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - 3 = 0$;

Демак, ферма геометрик ўзгармас, статик аниқ экан.

1.7. КУЧЛАР ТАЪСИРИНИНГ МУСТАҚИЛЛИГИ ҚОИДАСИ ВА УМУМЛАШМА ЭПЮРАЛАР

Қурилиш механикасида катта аҳамиятга эга бўлган бу қоида куйидагича таърифланади:

Агар иншоотга бир неча кучлар қўйилган бўлса, уларнинг биргаликдаги таъсиридан ҳосил бўлган натижа ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан ҳосил бўлган натижалар йиғиндисига тенг бўлади.



1.12- расм

чизмаларда берилган (1.12- расм, б, в, г). Реакциянинг тўлик қиймати алоҳида топилган реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг бўлади: $R_a = R_1 + R_2 + R_3 = 1,5 + 1 + 0,5 = 3 \text{ кН}$.

Шундай қилиб, балкага кучлар бир йўла қўйилгандаги реакциянинг қиймати кучлар алоҳида-алоҳида қўйилган ҳолдаги реакциялар қийматларининг йиғиндисига тенг чикди. Кучлар таъсирининг мустақиллиги коидаси деган иборанинг маъноси ана шундан иборат.

Кучлар таъсирининг мустақиллиги коидаси эластиклик чегарасида қўлланилади. Реакция ва ички кучларни аниқлашда иншоот деформацияланмаган деб фараз этилади. Қўлланиладиган тенгламалар чизиксиз бўлса, мазкур усулдан фойдаланиб бўлмайди.

Умумлашма эпюралар. Маълумки, қурилиш конструкцияларига турли хил юклар таъсир этади. Ҳар бир юкнинг ўзига яраша эпюралари бўлади. Шундай ҳоллар бўладикки, маълум бир кесимда энг катта момент бир хил юкдан ҳосил бўлса, бошқа кесимда бошқа юкдан ҳосил бўлади. Мухандисни эса максимал зўриқишлар қизиқтиради. Максимал ёки минимал зўриқишларни аниқлаш мақсадида умумлаштирилган эпюралар қурилади.

Кўпинча иншоотга доимий ва муваккат юклар таъсир этади. Доимий юклар иншоотга муттасил равишда таъсир этиб, муваккат юкларнинг таъсир этиш вақти, қиймати ва ўрни ўзгариб туради. Бу эса ўз навбатида иншоот кесимларидаги зўриқишларнинг ўзгаришига олиб келади. Бундай ҳолларда зўриқишларнинг максимал ёки минимал

Бу коиданинг моҳиятини ойдинлаштириш учун оддий бир мисол келтирайлик. Балканинг чап таянч реакцияси R_a ни (1.12- расм, а) икки хил йўл билан аниқлаймиз. Биринчи усул бўйича R_a таянч реакцияси учала куч (P_1 ; P_2 ; P_3) таъсирида бир йўла аниқланади: $R_a = 3 \text{ кН}$ чиқади. Иккинчи усулга кўра кучлар навбатма-навбат қўйилади ва ҳар бир кучга мос равишда реакциялар аниқланади. Топилган реакцияларнинг қиймати

кийматларини аниқлаш учун доимий ҳамда муваққат юкларнинг турли вариантлари учун алоҳида эпюралар қурилади. Доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш билан муваққат юкдан ҳосил бўлган мусбат зўриқишларнинг йиғиндиси $S_{\max}$ ни, яъни тўлиқ максимал зўриқишни, манфий зўриқишлар йиғиндиси эса $S_{\min}$ ни, яъни тўлиқ минимал зўриқишни беради;

$$\begin{aligned} S_{\max} &= S_{\text{доим}} + \Sigma(+S_{\text{мув}}) \\ S_{\min} &= S_{\text{доим}} + \Sigma(-S_{\text{мув}}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Бу ерда $S_{\text{доим}}$ — доимий юкдан ҳосил бўлган зўриқиш; $\Sigma(+S_{\text{мув}})$, $\Sigma(-S_{\text{мув}})$ — муваққат юклардан ҳосил бўлган мусбат ва манфий зўриқишлар.

Зўриқишларнинг аниқланган кийматларини ягона масштабда бир ўқ устига жойлаштирилади ва туташ чизик билан туташтирилади. Ҳосил бўлган график у м у м л а ш - м а ¹ эпюра деб аталади. Мазкур эпюрага доир мисол статик ноаниқ узлуксиз балкалар ҳисобида берилган.

Қурилиш конструкцияларини ҳисоблашда (масалан, арматуранинг кесимини танлашда) эпюрадан мутлақ киймати катта бўлган момент танлаб олинади; конструкциянинг мустаҳкамлиги ана шу момент бўйича текширилади.

2- боб

ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ НАЗАРИЯСИ

2.1. ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Замонавий иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлаш катта аҳамиятга эгадир.

Маълумки, кўприк, эстакада, кран ости балкалари сингари қатор муҳандислик иншоотларини ҳисоблашда биз қўзғалувчан юкларга дуч келамиз.

Иншоотларнинг қўзғалувчан юклар таъсирига бардошлилигини аниқлашда, асосан, қуйидаги икки масала ҳал этилади:

¹ Русчада бу атама «огибающая» ёки «объемлющая» деб юритилади. Бу сўзларнинг ўзбек тилига айнан таржимаси атама маъносига унча тўғри келмаганлиги сабабли асли маъносига яқинроқ термин қабул килдик.

1. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган зўриқишлар, иншоотнинг таянч реакциялари, эгувчи моментлари, кўндаланг ва бўйлама кучлари, ферма стерженларидаги зўриқишлар ва ҳ. к. аниқланади.

2. Ҳаракатланувчи юклар системаси таъсирида иншоот қисмларида ҳосил бўладиган энг катта зўриқишлар аниқланади, яъни ҳаракатланувчи юклар системасининг иншоотда энг нобоб жойлашуви масаласи ҳал этилади.

Иншоот бўйлаб бирлик куч ($P=1$) ҳаракатланганда, иншоот қисмларидаги куч омилларининг ўзгаришини ифодаловчи график **таъсир чизиқлари** деб аталади. Куч омиллари деганда ҳосил бўладиган ички кучлар (M, Q, N) ва таянч реакциялари тушунилади.

Иншоот бўйлаб ҳаракатланувчи бирлик кучнинг ҳолатини белгилувчи абциссани x билан, иншоотдаги зўриқишни S билан белгиласак, у ҳолда зўриқишнинг таъсир чизиқ тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$S=f(x).$$

Таъсир чизиқларини чизишнинг статик ва кинематик усуллари мавжуд.

Статик усул ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) нинг ихтиёрий ҳолати учун мувозанат тенгламаларини тузиб, улардан изланаётган зўриқишнинг аналитик ифодасини тузишга асосланган.

Бу аналитик ифода ёрдамида зўриқиш S нинг ўзгариш графиги чизилади.

Кинематик усул ёрдамида таъсир чизиқларини қуриш мумкин бўлган кўчишлар қоида­сига асосланади.

2.2. ОДДИЙ БАЛКАЛАРДА ЗЎРИҚИШЛАРНИНГ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Агар иншоотга қўзғалувчи кучлар тизими қўйилган бўлса, уларни аввало ҳаракатланувчи бирлик куч ($P=1$) таъсирига ҳисобланади.

Оддий балкаларга куч омилининг таъсир чизигини қуриш учун бирлик кучни балканинг тегишли нуқталарига жойлаштириб, бизни қизиқтираётган миқдорнинг ўзгариш қонунини ифодаловчи тенглама тузилади ва унинг графиги чизилади.

Оддий балкаларда таянч реакцияларининг таъсир чизиклари

Бирлик куч балка бўйлаб ҳаракатланганда, таянч реакцияларининг қай тарзда ўзгаришини кўриб чиқамиз. Бирлик кучни шаклда кўрсатилганидек жойлаштирамиз (2.1-расм).

R_a таянч реакциясини аниқлаш учун В таянчига нисбатан статиканинг мувозанат тенгламасини тузамиз

$$R_a \cdot l - P(l-x) = 0;$$

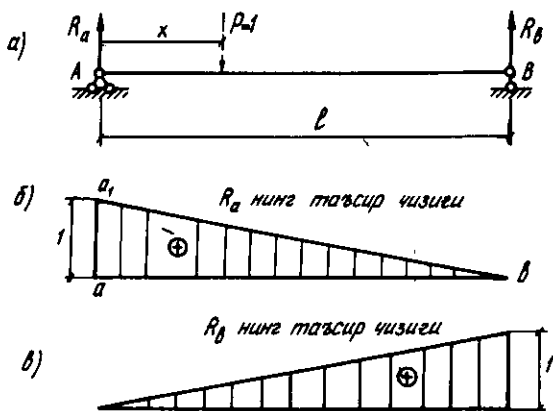
$$R_a = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}. \quad (2.1)$$

Демак, бирлик куч ($P=1$) балка бўйлаб ҳаракатланса, R_a таянч реакциясининг ўзгариши тўғри чизик бўйлаб содир бўлади. Шаклга кўра x нолдан l гача ўзгаради. Тўғри чизикни ўтказиш учун x га қийматлар берамиз:

$x=0$ бўлса $R_a=1$;

$x=l$ бўлса $R_a=0$ бўлади.

Шу икки нукта координатлари ёрдамида R_a таянч реакциясининг таъсир чизиги қурилади (2.1-расм, а).



2.1-расм

А таянчига нисбатан тузилган статиканинг мувозанат тенгламасидан R_b реакцияси топилади:

$$\Sigma M_A = 0, P \cdot x - R_b \cdot l = 0,$$

$$R_b = \frac{P \cdot x}{l} = \frac{x}{l} \cdot P. \quad (2.2)$$

Бу ерда $0 \leq x \leq l$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$x=0, R_b=0;$$

$$x=l, R_b=P \text{ бўлади.}$$

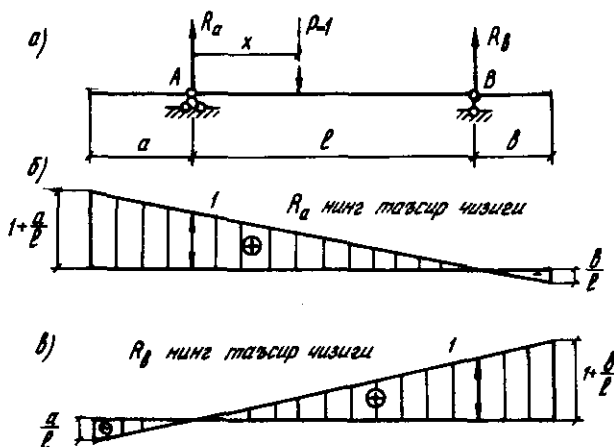
Демак R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам тўғри чизик тенгламаси орқали қурилар экан (2.1- расм, б).

R_a ва R_b таянч реакцияларининг таъсир чизиклари мусбат ишорали бўлиб, ординаталари ўлчамсиз микдордан иборатдир.

Икки консолли балка учун таянч реакциясининг таъсир чизиклари

Икки консолли балка учун (2.2- расм) таянч реакцияларининг таъсир чизикларини қуриш оддий балка учун амалга оширилган усуллар ёрдамида бажарилади.

Масалан, балканинг чап таянч реакцияси R_a нинг таъсир чизиғини қуриш учун мувозанат тенгламасидан фойдаланиб $R_a = \frac{l-x}{l}$ ни топамиз.



2.2- расм

Бу ерда x масофа куйидаги тарзда ўзгаради:

$$-a \leq x \leq l+b$$

x га кийматлар берамиз:

$$x = -a, R_a = 1 + \frac{a}{l};$$

$$x = a, R_a = 1;$$

$$x = l, R_a = 0;$$

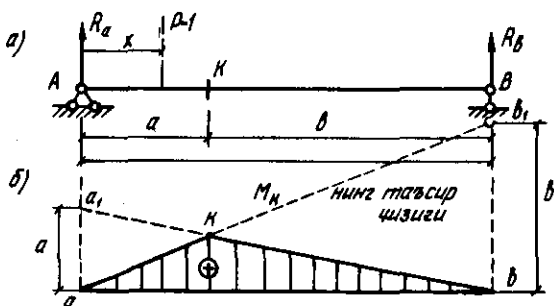
$$x = l+b, R_a = -\frac{b}{l};$$

Бу ординаталар ёрдамида қурилган R_a нинг таъсир чизиғи 2.2- расм, а, да ифодаланган. R_b таянч реакциясининг таъсир чизиғи ҳам шу тарзда чизилади (2.2, в- расм).

Демак, консолли балка таянч реакцияларининг таъсир чизиқлари оддий балка таянч реакцияларининг таъсир чизиғига асосланган бўлиб, асосий тўғри чизиқ консол учигача давом эттирилар экан.

Оддий ва консол балкаларда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизиқлари

Аввало эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизиқлари оддий балка учун қуриб олинади, кейин консолга давом эттирилади. Одатда, M ва Q нинг таъсир чизиғи бирор кесим учун қурилади. К кесимдаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини кўрайлик. Кесимгача бўлган масофалар, 2,3, а- расмда ифодаланган.



2.3- расм

Таъсир чизигини куришда мусбат ишорали ординаталар ўқдан юқорига, манфий ординаталар эса ўқдан пастга жойлаштирилади.

Бирлик куч K кесимидан ўнгга ҳаракатланса, у ҳолда чап қисм учун мувозанат тенгламаси куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_k = R_a \cdot a = \frac{l-x}{l} \cdot a, \quad (2.3)$$

Демак, эгувчи моментнинг таъсир чизиги R_a реакцияси га боғлиқ экан, яъни R_a нинг ординаталарини a га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиги келиб чиқар экан.

Таъсир чизигини куриш учун A таянч йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр ҳолатда a масофаси жойлаштирилади, топилган нўкта ўнг таянч остидаги нўкта билан туташтирилади ва шу тўғри чизикқа K кесим проекцияланади. Бу ерда kb масофа эгувчи момент таъсир чизигининг ўнг чизиги дейилади (2.3, в-расм).

Агар бирлик куч K кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда кесимнинг ўнг қисми учун мувозанат тенгламаси куйидагича бўлади:

$$M_k = R_b \cdot b = \frac{x}{l} \cdot b \quad (2.4)$$

Бу ерда ҳам эгувчи моментнинг таъсир чизиги таянч реакцияси R_b га боғлиқдир, яъни R_b нинг ординаталарини « b » га кўпайтирсак, M_k нинг таъсир чизиги келиб чиқади.

Ҳосил бўлган қийматлар бўйича M_k нинг таъсир чизигини қурамыз (2.3-расм). Бунинг учун R_b таянч реакцияси йўналиши бўйича абсцисса ўқиға перпендикуляр « b » масофа ўлчаб қўйилади, ҳосил бўлган нўкта b чап таянч билан туташтирилади ва шу тўғри чизикқа K кесим проекцияланади. Ҳосил бўлган ak узунлик, эгувчи момент таъсир чизигининг чап чизиги дейилади.

Ҳар икки ўнг ва чап тўғри чизиклар K кесим остида кесишади, чунки $x=a$ бўлганда, $M_k^{\text{чап}} = M_k^{\text{ўнг}}$ бўлади.

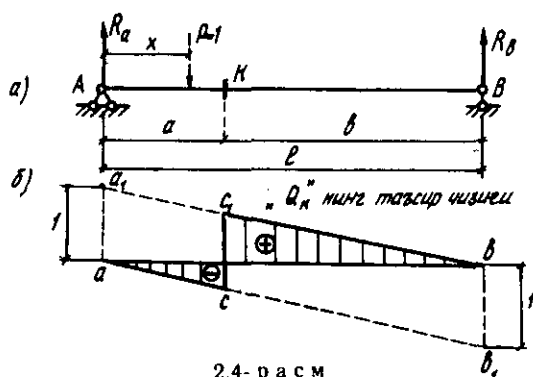
Шундай қилиб, akb синик чизиги K кесимидаги эгувчи моментнинг таъсир чизиги бўлади.

Эгувчи момент таъсир чизигининг ординаталари узунлик ўлчамида, яъни м(см) да ўлчанади. Эгувчи момент таъсир чизигининг ташки кўриниши эгувчи момент эпюраси билан маълум ўхшашликка эга, лекин шунга қарамай булар орасида кескин фарқ бор. Эгувчи момент

эпюрасидан фойдаланиб, ташки кучлар таъсирида истаган кесимда ҳосил бўлган эгувчи моментни топа оламиз. Эгувчи моментнинг таъсир чизиғи орқали эса маълум бир кесимдаги эгувчи моментнинг қийматини топа оламиз, холос.

Энди кўндаланг кучларнинг таъсир чизиғини қуришга ўтамиз.

Балканинг К кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун бирлик куч ($P=1$) нинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз (2.4. а- расм).



2.4- расм

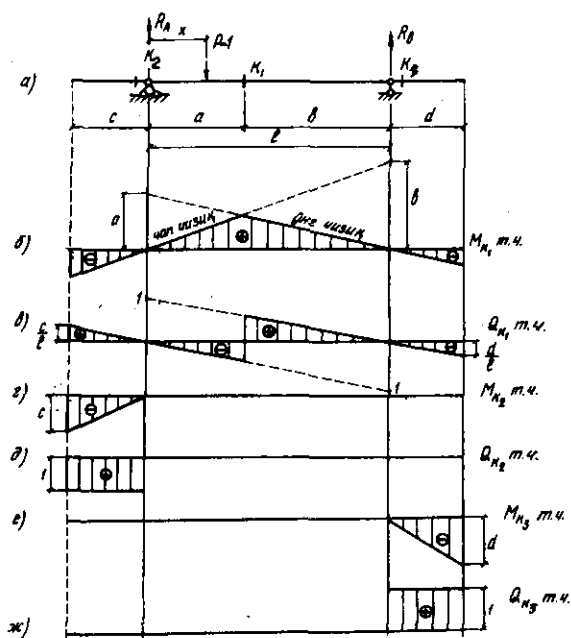
Биринчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг чап қисмида ҳаракатланади, деб фараз этайлик, у ҳолда ўнг қисм мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\Sigma Y=0, Q_k^{\text{чан}} = -R_b = -\frac{x}{l}. \quad (2.5)$$

Иккинчи ҳолат. Бирлик куч К кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланмоқда, деб қабул қилинади, у ҳолда чап қисм учун тузилган мувозанат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q_k^{\text{ўнг}} = R_a = \frac{l-x}{l}, \quad (2.6)$$

Q_k нинг таъсир чизиғини қуриш учун чап таянч остига бирор масштабда мусбат бирлик ординатани жойлаштириб, уни ўнг таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз, сўнгра ўнг таянч остига манфий бирлик ординатани жойлаштириб, уни чап таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз.



2.5-расм

Шу тарзда бир-бирига параллел бўлган чап ва ўнг тўғри чизикларга эга бўлди. Чап тўғри чизик чап таянчдан K кесимгача, ўнг тўғри чизик эса K кесимидан ўнг таянчгача бўлган ораликларда Q_k нинг ўзгаришини ифодалайди (2.4-расм, б).

Штрихланган юза Q_k нинг таъсири чизиги деб аталади.

Кўндаланг кучнинг таъсир чизиклари таянч реакцияларининг таъсир чизиклари каби ўлчамсиз бўлади.

Консол балканинг K кесими учун ички кучлар (M_k ва Q_k нинг) таъсир чизиклари қурилиши талаб қилинса, у ҳолда иш оддий балкадагига ўхшаш амалга оширилади. Бунинг учун балканинг таянчи оралиғига M_k ва Q_k нинг таъсир чизиги қурилади, сўнгра чап тўғри чизик чап консол учигача, ўнг тўғри чизик эса ўнг консол учигача давом эттирилади (2.5-расм, а, б).

Агар кесим балканинг консол қисмида берилса, эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг таъсир чизикларини кўриб ўтамиз.

K_2 кесими балканинг чап консолида жойлашган бўлсин (2.5- расм, а). M_{k_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун бирлик юкнинг икки ҳолатини қараб чиқамиз.

1. Бирлик куч ($P=1$) кесимнинг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда

$$M_{k_2}^{\text{чап}} = P(c - x_1) = -(c - x_1),$$

$$x_1 = 0, \quad M_{k_2}^{\text{чап}} = -c,$$

$$x_1 = c, \quad M_{k_2}^{\text{чап}} = 0 \text{ бўлади.}$$

Чап тўғри чизикни ўтказиш учун $x_1 = 0$ нуктасига c ординатасини маълум масштабда жойлаштирамиз, сўнгра уни $x_1 = c$ кесимидаги ноль нукта билан бирлаштирамиз (2.5- расм, г).

Бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, M_{k_2} ўнг = 0 бўлади. Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балка ўқининг устида ётади. M_{k_2} нинг чап ва ўнг тўғри чизиклари K_2 кесими остида кесишади.

Q_{k_2} нинг таъсир чизигини қуриш учун ҳам бирлик юкнинг икки ҳолатини текширамиз. Бирлик куч K_2 кесимининг чап қисмида ҳаракатланса, у ҳолда консол қисмининг мувозанат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$Q_{k_2}^{\text{чап}} = -P = -1,$$

Q_{k_2} нинг чап тўғри чизиги консол учидан балканинг абсцисса ўқига параллел бўлади (2.5- расм, д).

Қўзғалувчан бирлик куч K_2 кесимининг ўнг қисмида ҳаракатланса, у ҳолда чап қисмининг мувозанат тенгламаси $Q_{k_2}^{\text{ўнг}} = 0$ бўлади.

Демак, ўнг тўғри чизик нолга тенг бўлиб, балканинг ўқи устида ётади (2.5- расм, д). Балканинг чап консол қисмида жойлашган K_3 кесими учун M_{k_3} ва Q_{k_3} ларнинг таъсир чизиклари юқорида баён этилган тартибда амалга оширилади (2.5- расм, е).

2.3. ЗҶУРИҚИШЛАР ҚИЙМАТИНИ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ ЁРДАМИДА АНИҚЛАШ

Шу бобнинг бошланғич қисмида таъсир чизикларини қуриш тартиби билан танишиб ўтдик. Энди шу таъсир чизиклари ёрдамида зўриқишларнинг (яъни эгувчи момент, кўндаланг куч ва таянч реакцияларининг) қийматини аниқлаш масаласига тўхталамиз.

Қўзғалмас юкларнинг иншоотга йиғиқ, ёйиқ ва жуфт куч тарикасида қўйилиши бизга маълум. Кучларнинг ҳар қайси турини алоҳида равишда кўриб чиқамиз.

Иншоотга йиғиқ кучлар тизими қўйилган ҳол

Балкага P_1 кучи таъсир этади, дейлик. Бу ҳолда инсталланган зўриқиш S нинг қиймати мазкур куч билан шу куч йўналишида таъсир чизигидан олинган ординатанинг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни зўриқишнинг қиймати $P_1 \cdot y_1$ бўлади.

Агар иншоотга кучлар тизими қўйилган бўлса (2.6- расм, а) кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасига кўра тўлиқ зўриқишнинг қиймати қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

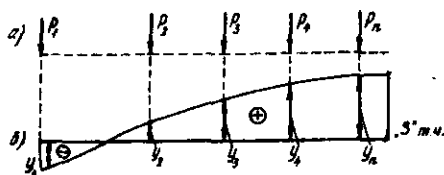
$$S = -P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4 + \dots + P_n \cdot y_n,$$

$$\text{ёки } S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i. \quad (2.7)$$

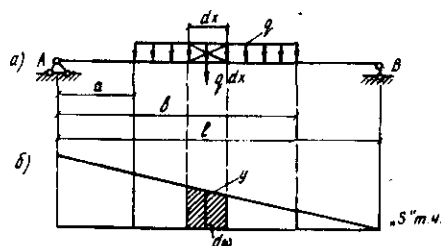
Бу ерда y_i — таъсир чизигида P_i куч йўналишидаги ордината.

Иншоотга ёйиқ юк қўйилган ҳол

Иншоотга қўйилган ёйиқ юкдан узунлиги dx бўлган кичкина бўлакча ажратамиз ва бунга мос келган ёйиқ



2.6- расм



2.7- расм

юкни элементар йиғик куч $q(x)dx$ оркали ифодалаймиз (2.7- расм). Элементар кучдан ҳосил бўлган элементар зўриқиш (2.7) формулага асосан қуйидагича аниқланади:

$$dx = q \cdot dx \cdot dy. \quad (a)$$

Зўриқишнинг тўлиқ қийматини аниқлаш учун (a) тенгликни интеграллаймиз

$$S = \int_a^b q \cdot dx \cdot dy = q \cdot \omega. \quad (б)$$

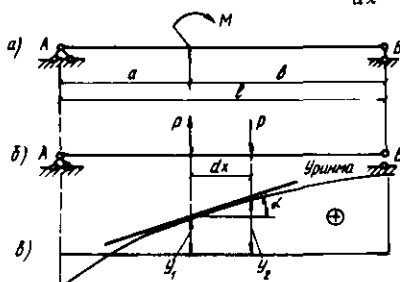
Бу ерда q — ёйик юк интенсивлиги;

ω — таъсир чизигида ёйик юк қўйилган ораликка мос келувчи юза

Иншоотга жуфт кучлар қўйилган ҳол

Моментдан ҳосил бўлган зўриқишни аниқлаш учун момент икки жуфт йиғик кучларга ажратилади (2.8- расм).

$$M = P \cdot dx, \text{ бундан } P = \frac{M}{dx}.$$



2.8- расм

Йиғик кучлар таъсирида вужудга келадиган зўриқиш (2.7) формулага асосан аниқланади:

$$S = P \cdot y_2 - P \cdot y_1 = P(y_2 - y_1) = P \cdot dy,$$

$$S = \frac{dy}{dx} \cdot M = M \cdot tq\alpha,$$

$$S = M \cdot tq\alpha.$$

Бу ерда α — момент қўйилган нуктада таъсир чизиғига ўтказилган уринма билан абсцисса ўқи орасидаги бурчак.

Агар иншоотга бир йўла йиғик куч, ёйик куч ва жуфт кучлар қўйилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган зўриқишлар миқдори таъсир чизиғи ёрдамида умумий ҳолда қуйидагича аниқланади:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i + \sum_{i=1}^n q_i \omega_i + \sum_{i=1}^n M_i \cdot tq\alpha, \quad (2.8)$$

Бу формуладан фойдаланишда қуйидаги ишора қондасига амал қилинади:

1. Юклар юкоридан пастга йўналган бўлса, улар мусбат деб қабул қилинади.

2. Момент соат стрелкаси бўйича йўналса, мусбат олинади.

3. Таъсир чизиғидан олинган ордината y_i ва юза ω_i ўз ишораси бўйича олинади.

4. Агар α бурчак соат стрелкасига тескари йўналишда ортиб борса, мусбат бўлади.

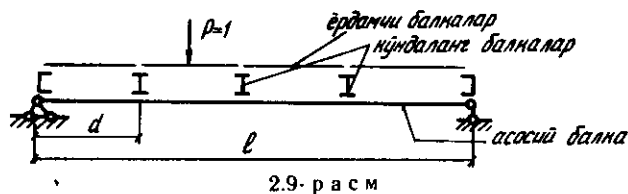
2.4. ЮК ТУГУНЛАР ОРҚАЛИ УЗАТИЛГАНДА ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИНИ ҚУРИШ

Бинокорликда шундай иншоотлар учрайдики, ташки юклар асосий балкага бевосита қўйилмай, балки бошқа ёрдамчи балкалар орқали таъсир этади (2.9- расм).

Шаклдан кўриниб турибдики, ташки юклар ёрдамчи бўйлама балкачалар бўйлаб ҳаракатланмоқда. Бундай системаларда ташки юклар асосий балкага тугунлар орқали узатилади.

Қўндаланг балканинг асосий балкага таянган жойи тугун, икки қўшни тугун оралиғи панел узунлиги деб аталади ва d ҳарфи билан белгиланади (2.9- расм).

Энди ташки юк ёрдамчи балка бўйлаб ҳаракатланиб, асосий балкага тугунлар орқали таъсир этишини кўриб ўтамыз (2.10- расм).



2.9-расм

Харакатланувчи бирлик куч 2 — ва 3 — тугунлар орасида жойлашган дейлик: агар куч 2 — таянчдан x масофада ва 3 — таянчдан $d-x$ масофада жойлашган бўлса, у ҳолда унинг иккинчи ва учинчи тугунлардаги ташкил этувчи кийматлари қуйидаги формула билан ифодаланади (2.10-расм):

$$P_2 = 1 \cdot \frac{d-x}{d} \text{ ва } P_3 = 1 \cdot \frac{x}{d}.$$

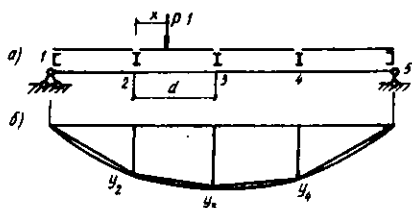
2.10-расм, б да ифодаланган эгрилик бирлик кучнинг асосий балка бўйлаб ҳаракатланишидан ҳосил бўлган таъсир чизиги десак, у ҳолда

$$S = P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 = \frac{d-x}{d} \cdot y_2 + \frac{x}{d} \cdot y_3 \quad (2.9)$$

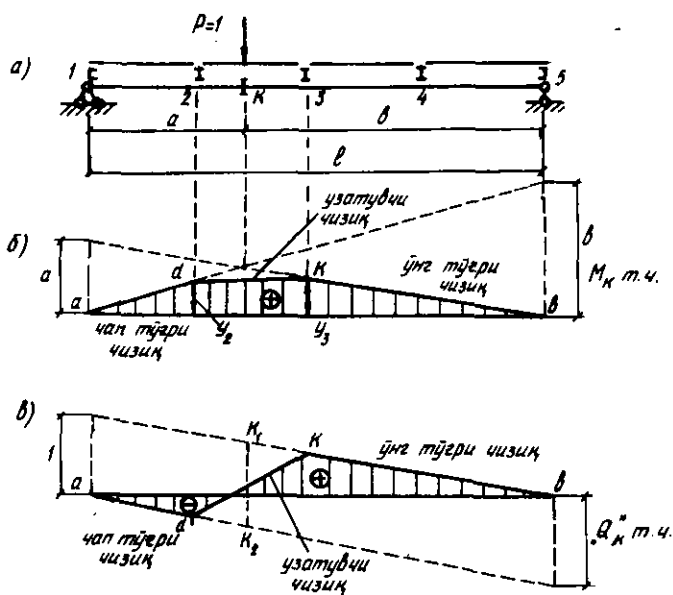
бўлади.

Зўриқиш S нинг кийматини аниқлаш учун тузилган бу тенглик тўғри чизик тенгламасини ифодалайди, шу сабабли y_2 билан y_3 ўзаро тўғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.10-расм, б).

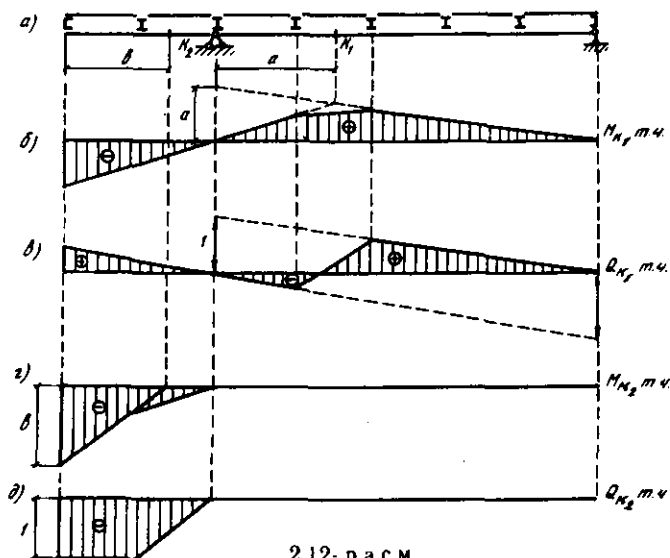
Демак, юк асосий балкага тугунлар орқали таъсир этганда, бирор кесимнинг таъсир чизигини куриш учун, аввало, ёрдамчи балкаларни эътиборга олмасдан, балки оддий балканинг шу кесими учун тегишли таъсир чизиклари курилади. Кейин чап ва ўнг тугунлар тегишли тўғри чизикларга проекцияланади. Топилган нукталар



2.10-расм



2.11- расм



2.12- расм

тўғри чизик ёрдамида туташтирилади (2.11- расм, а, б, в).

Бу расмда akb асосий балканинг K кесими учун қурилган эгувчи момент таъсир чизиги; $adkb$ юк тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун эгувчи момент таъсир чизиги (2.11- расм, б); ak_2k_1b — оддий балканинг K кесими учун қурилган қирқувчи кучнинг таъсир чизиги (2.11- расм, в); $adkb$ — юк асосий балкага тугунлар орқали таъсир этганда ҳосил бўлган қирқувчи кучнинг таъсир чизиги (2.11- расм, в).

2.12- расмда консолли балкага ташки юк тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун M ва Q нинг таъсир чизиклари тасвирланган. 2.12- расм, а да берилган балка акс этган; б ва в да K_1 кесим учун, г ва д да эса K_2 кесим учун M ва Q нинг таъсир чизиклари чизилган.

Шундай қилиб, юк асосий балкага тугунлар орқали узатишганда, зўриқишларнинг таъсир чизиклари қуйидаги тартибда қурилади:

1. Зўриқишларнинг таъсир чизиги, аввало, юк тугунлар орқали узатилишини эътиборга олмаган ҳолда асосий балка учун қурилади.

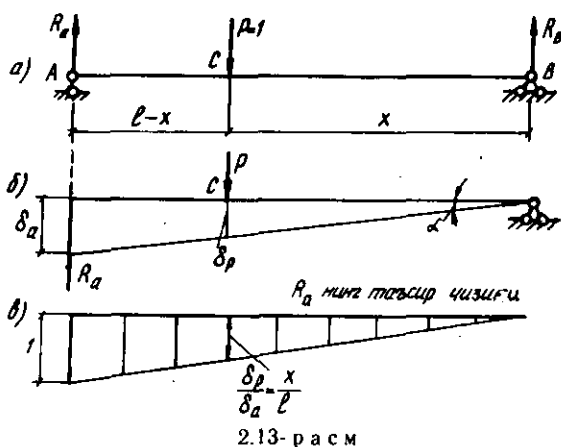
2. Кесимнинг чап ва ўнг қисмида жойлашган қўшни тугунлар тегишли чизикларга проекцияланади ва нуқталар ўзаро туташтирилади.

Ҳосил бўлган график юклар асосий балкага тугунлар орқали таъсир этган ҳол учун қурилган таъсир чизиги бўлади.

2.5. ТАЪСИР ЧИЗИКЛАРИ ҚУРИШНИНГ КИНЕМАТИҚ УСУЛИ

Таъсир чизикларини кинематик усулда қуришда кўчишлар эпюрасидан фойдаланилади. Бунинг учун асосий системада зўриқиши изланаётган боғланиш ташлаб юборилади ҳамда мумкин бўлган (жоиз) кўчишлар қондасидан фойдаланилади. Бу қондага кўра, агар система мувозанат ҳолатда бўлса, ҳар қандай кичик жоиз кўчишларнинг вужудга келишида ташки кучлар бажарадиган ишларнинг йиғиндисини нолга тенг бўлади.

Мисол тариқасида оддий балканинг R_a реакцияси учун кинематик усулда таъсир чизиги қурамиз (2.13- расм, а). А таянчини ташлаб юзориб, ўрнига R_a реакция кучини қўямиз. АВ балка чексиз кичик бурчак α га кўчди дейлик. Бурчак кичик бўлганлиги сабабли балка ўқи кўчишларини вертикал деб қабул қилса бўлади. P кучи қўйилган



2.13-расм

нуктанинг кўчишини δ_p , R_a кучи қўйилган нуктанинг кўчишини δ_a деб белгилаймиз. Жоиз кўчишлар қондасига мувофиқ балкага таъсир этувчи кучлар бажарган иш бўлади. Куч йўналиши билан кўчиш йўналиши қарама-қарши бўлганлиги сабабли R_a кучи бажарган ишнинг ишораси манфий олинган.

$$P \cdot \delta_p - R_a \cdot \delta_a = 0.$$

$P=1$ эканлигини эътиборга олсак, (а) дан

$$R_a = 1 \cdot \frac{\delta_p}{\delta_a} \quad (б)$$

келиб чиқади. Бирлик куч кўзгалувчан бўлганлиги учун δ_p кўчиш ҳам ўзгарувчан бўлади. δ_a эса ўзгармас микдордир.

Бинобарин, R_a реакциясининг таъсир чизиғи δ_p кўчишнинг эпюраси тарикасида ҳосил қилиниши мумкин. Бунда таъсир чизиғининг ординаталари кўчиш ординаталаридан δ_a маротаба кичик бўлади (2.13-расм, в).

Кинематик усулда қурилган таъсир чизиғининг статик усулдаги шакли билан бир хил эканлиги қуйидаги ифодадан кўриниб турибди (2.13-расм, б):

$$\delta_p = x \cdot t g \alpha; \quad \delta_a = l \cdot t g \alpha.$$

Буларни (б) га қўйсак, $R_a = \frac{x}{l}$ келиб чиқади.

Навбатдаги мисолда (2.14- расм, а) балканинг К кесимидаги эгувчи момент таъсир чизиғини кинематик усулда қурамыз. Балканинг К кесимига шарнир киритамиз, натижада балканинг битта боғланиши йўқолади. Йўқолган боғланишни момент M_k билан алмаштирамиз (2.14- расм, б).

К шарнири чексиз кичик масофа δ_k га кўчди дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида M_k ва P кучлари қуйидаги ишни бажаради:

$$P \cdot \delta_p - M_k \alpha - M_k \cdot \beta = 0. \quad (в)$$

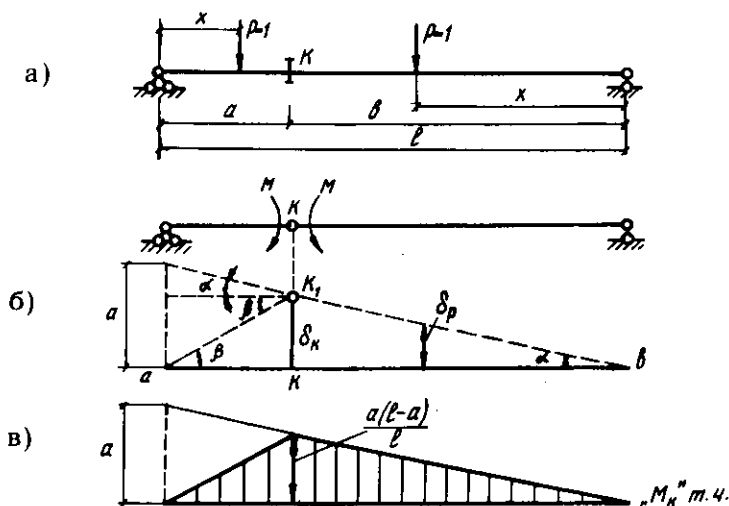
M_k нинг йўналиши бурилиш бурчаклари α ва β нинг йўналишига қарама-қарши бўлганлиги сабабли ишораси манфий олинди. (в) ифодасидан

$$M_k = \frac{P \cdot \delta_p}{\alpha + \beta} = \frac{1 \cdot \delta_p}{\delta_{xx}} \quad (г)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\delta_p = \frac{\delta_k}{l-a} \cdot x$$

$$\delta_{xx} = \frac{\delta_k}{l-a} + \frac{\delta_k}{a} \quad (д)$$



2.14- расм

(г) ифодасидан кўринадики, M_k нинг таъсир чизиги ҳам вертикал кўчишлар δ_p эпюраси каби бўлиб, қийматига кўра ундан δ_x маротаба кам бўлар экан (2.14- расм, в).

(д) ифодани (г) га қўйсак,

$$M_k = \frac{ax}{l}$$

келиб чиқади. Бу эса статик усулдаги ўнг тўғри чизикнинг тенгламасидир.

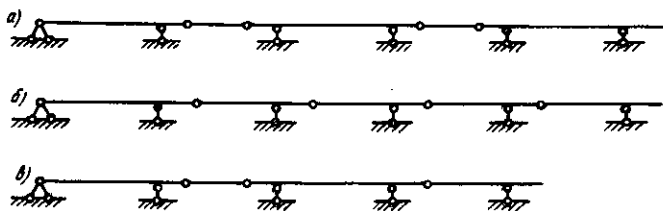
3- боб

КЎП ОРАЛИҚЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛҚАЛАР

3.1. УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Кўп ораликли статик аниқ балкалар бир ораликли консолли балкаларни шарнирлар воситасида бириктириш йўли билан ҳосил қилинади (3.1- расм). Кўп ораликли шарнирли балкалар ёндош ораликларни ёпишда қўлланилади. Бундай ораликларни ёпишда кетма-кет жойлашган бир ораликли балкалардан фойдаланса бўлмайдими, деган савол туғилиши табиий. Тўғри, назарий ва амалий жиҳатдан фойдаланса бўлади. Аммо иқтисодий жиҳатдан мақсадга мувофиқ эмас. Чунки бир хил юк таъсирида бир ораликли балкаларда кўп ораликли балкаларга нисбатан кўпроқ зўриқиш ҳосил бўлади, демак кўпроқ материал сарф бўлади, конструкция вазминлашади. Кўп ораликли шарнирли балкалар статик аниқ бўлганликлари сабабли ҳароратнинг ўзгариши ёки таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлмайди. Бу эса унинг афзаллик томонлари ҳисобланади.

Кўп ораликли балкаларда шарнирлар бўлмаса, система статик ноаниқ узлуксиз балкаларга айланиб қолади. Уларни бир-биридан фарқлаб турадиган элемент шарнир-



3.1- расм

дир. Узлуксиз балкалар хакида дарсликнинг 8- бобида муфассал маълумотлар берганмиз. Бу бобда эса асосан кўп ораликли шарнирли балкалар билан танишиб чиқамиз. Шарнирли балкани узлуксиз балкага киёслаб, уни узлукли балка деб атаса ҳам бўлади. Сабаби шуки, узлуксиз балкалар бутун яхлит конструкциядан иборат, шарнирли балкалар шарнир қўйилган ерда узилади. Шарнирнинг чизма конструкцияси 3.2- расмда берилган.



3.2- расм

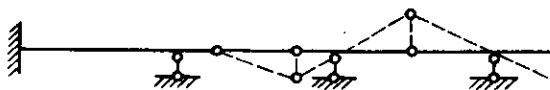
Кўп ораликли балкани статик аниқ системага айлантириб берадиган элемент ҳам шарнирдир. Демак, шарнирлар сонини шундай аниқлаш керакки, ҳосил бўлган система статик аниқ, геометрик ўзгармас бўлсин. Қуйидаги формула ёрдамида аниқланган шарнирлар сони юқоридаги талабларни қондиради:

$$\Pi = C_T - 3 \quad (3.1)$$

Бу ерда C_T — таянч стерженлари сони;

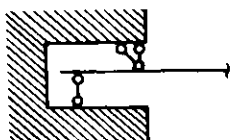
3 — статика тенгламалари сони.

Шарнирлар сонини ушбу формула билан аниқланиши зарурий, аммо етарли шарт эмас. Статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил қилиш учун шарнирларни балка бўйлаб тўғри жойлаштириш талаб этилади. 3.3- расмда тасвирланган система шарнирларнинг нотўғри жойлашти-



3.3- расм

рилишига мисолдир. Бу балкадаги шарнирлар сони талаб даражасидадир, яъни система геометрик ўзгармас бўлиши учун $\Pi = 6 - 3 = 3$ дона шарнир қўйилиши талаб этилади. Бирок ана шу учта шарнир балкада нотўғри жойлаштирилган. Шунинг учун у геометрик ўзгарувчан система бўлиб қолган. Агар иккинчи оралиқдаги икки шарнирдан бири биринчи оралиққа кўчирилса, система геометрик ўзгармас ҳолга келади. Шунини ҳам эслатиб ўтиш керакки, стерженлар сонини аниқлашда шарнирсиз кўзғолмас



3.4- расм

таянчининг стерженлари сони $C_T=3$ деб қабул қилинган (3.4- расм).

Битта ораликка учта шарнир жойлаштириш ҳам нотўғридир, чунки бунда оний ўзгарувчан система ҳосил бўлади.

Шарнирларни тўғри жойлаштиришнинг уч хил усули бор:

а) шарнирларни иккинчи ораликдан бошлаб жуфт жойлаштириш (3.1- расм, а);

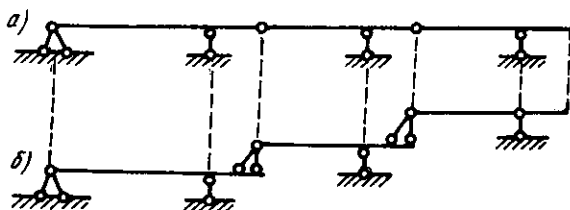
б) шарнирларни (иккинчи ораликдан бошлаб) якка тартибда жойлаштириш (3.1- расм, б);

в) юқоридаги икки усулга асосланган аралаш усул (3.1- расм, в), яъни шарнирларни жуфт ва якка тартибда жойлаштириш.

Жуфт шарнирлар иккинчи ораликдан бошлаб оралик оша қўйилади. Якка шарнирлар бирорта ораликдан бошқа ҳар бир ораликка биттадан қўйиб чиқилади. Жуфт шарнирнинг икки ёни шарнирсиз оралик бўлиши лозим, акс ҳолда система геометрик ўзгарувчан бўлиб қолади.

Қўп оралikli балканинг геометрик ўзгармаслиги масаласини тўғри ҳал этиш системанинг ишлаши тўғрисида тўлароқ тасаввурга эга бўлиш мақсадида каватлар тарҳи қурилади. Каватлар тарҳи балканинг алоҳида элементлари орасидаги боғланишни ўзида акс эттиради.

3.5- расмда тасвирланган балканинг геометрик ўзгармаслигини унинг каватлар тарҳи (3.5- расм, б) орқали таҳлил этайлик. Балкаларни туташтирувчи каватлар тарҳида шарнирлар шарнирли қўзғолмас таянчлар билан алмаштирилади. Каватлар тарҳидан қўп оралikli балка учта бир оралikli консолли балкаларнинг йиғиндисидан ташкил топганлиги намоён бўлади. Ҳар қайси оддий



3.5- расм

балка — геометрик ўзгармасдир. Геометрик ўзгармас оддий балкалар бир-бири билан шарнирлар ёрдамида уланган, Шарнирлар балкаларнинг горизонтал йўналишда қўзғалишига йўл бермайди. Балкаларнинг вертикал йўналишдаги қўзғолмаслиги таянч стерженлари орқали таъминланади. Шуларга асосланиб, берилган кўп ораликли балка геометрик ўзгармас система экан, деган хулосага келамиз.

Каватлар тарҳи икки хил балкалардан ташкил топади: асосий ва иккинчи даражали балкалар.

Асосий балкалар ўзига қўйилган юклардан ташқари иккинчи даражали балкаларга қўйилган юкларни ҳам (тўлалигича ёки қисман) қабул қилади. Асосий балкаларга таяниб турувчи балкалар иккинчи даражали (осма) балкалар дейилади. Иккинчи даражали балка синса, асосий балканинг ишига путур етмайди. Асосий балка синса, осма балка ҳам қулаб тушади.

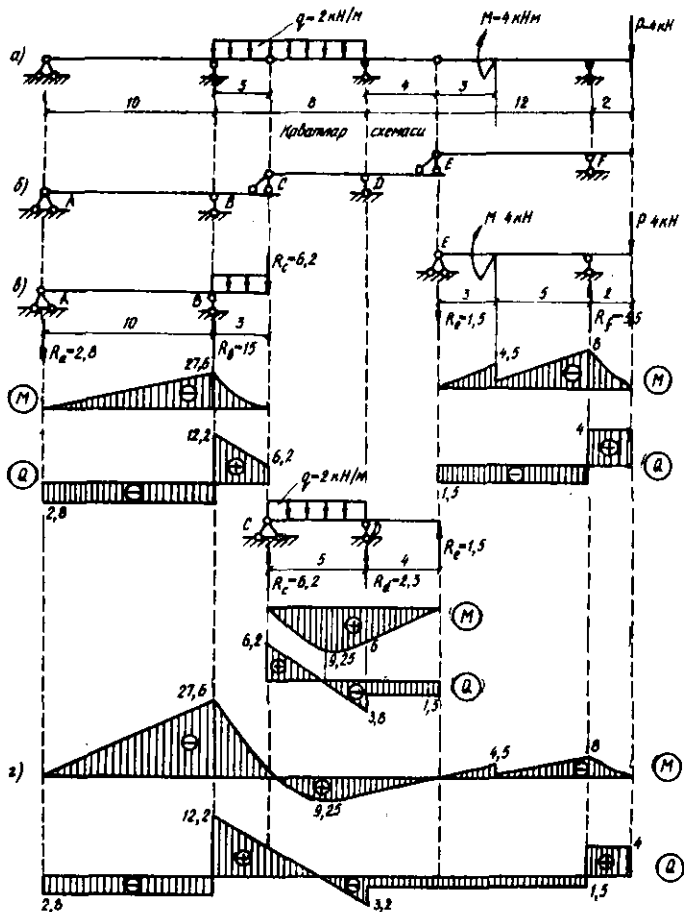
Каватлар тарҳида асосий балка биринчи каватда жойлашади (3.5- расм, б да чапдан биринчи балка). Осма балкалар асосий балканинг устига жойлашади (3.5- расм, б да чапдан иккинчи ва учинчи балкалар). Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш лозимки, ўртадаги балка чапдаги балкага нисбатан иккинчи даражали, ўнгдаги балкага нисбатан асосий балка ҳисобланади.

3.2. КўП ОРАЛИҚЛИ СТАТИҚ АНИҚ ШАРНИРЛИ БАЛКАЛАРНИ АНАЛИТИҚ УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Кўп ораликли шарнирли балкаларнинг ҳисоби уларнинг эгувчи моментлар ва қўндаланг кучлар эпюраларини қуришдан иборатдир.

Бизга материаллар қаршилиги курсидан эпюраларни қуришдан мақсад балканинг қўндаланг кесим ўлчамларини аниқлашдан иборат эканлиги маълум. Эпюраларни қуриш ҳам материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида бажарилади.

Кўп ораликли балкаларнинг ҳисоби каватлар тарҳини қуришдан бошланади. Мустақил равишда аввал иккинчи даражали (осма) балкалар, сўнгра асосий балка ҳисобланади. Осма балкалар бир нечта бўлса, ҳисоб энг устки каватдаги балкадан бошланади. Бунинг сабаби шуки, устки каватдаги юкнинг таъсири пастки каватдаги балкаларга ҳам таъсир этади. Бунинг ҳисобга олиш учун устки балканинг таянч реакциясини пастки балкага



3.6- расм

тескари йўналишда қўйилади ва пастки балкани ҳисоблашда уни ташки кучлардан бири деб қаралади. Ҳисоб охирида алоҳида қурилган эпюралар бир ўк устида жойлаштирилади.

Мисол. Қўп ораликли статик аниқ балканинг M ва Q эпюраси қурилсин (3.6- расм, а).

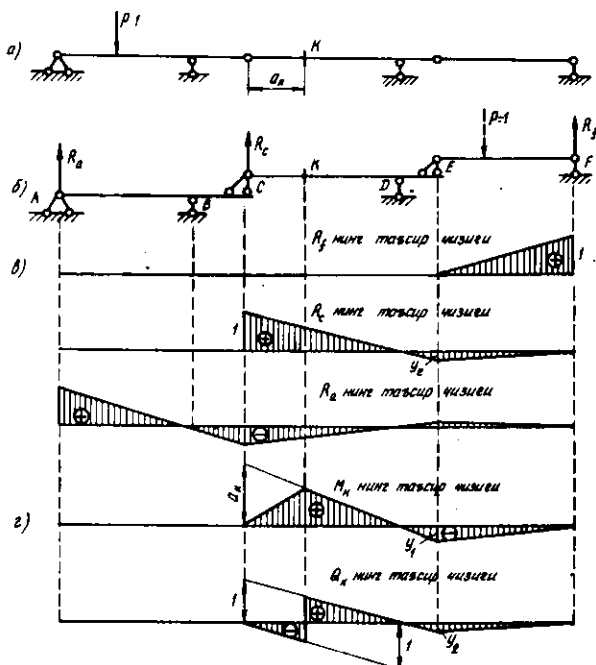
Ечиш. Берилган балканинг каватлар тарҳини қурамиз (3.6- расм, б) ва ҳисоблаш тартибини белгилаймиз.

Ҳисоб ишлари EF балкасидан бошланади. Уни асосий балкадан ажратиб олиб, мустақил равишда M ва

Q эпюралари курилади. Шундан сўнг СД балкаси ҳисобланади. ЕҒ балкасига қўйилган юкларнинг СД балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади. Ўз навбатида СД ва ЕҒ балкаларига қўйилган юкларнинг АВ балкасига бўлган таъсири R_c реакцияси орқали ҳисобга олинади (3.6- расм, в). Иккинчи даражали балкалар ҳисоби тугагач, асосий балка АВ ҳисобланади. Ҳисоб охирида алоҳида ҳисобланган эпюралар умумий ўқ устига жойлаштирилади (3.6- расм, г).

3.3. КўП ОРАЛИКЛИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАРДА ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Кўп ораликли балкаларнинг таъсир чизикларини чизиш балканинг қаватлар тарҳини куришдан бошланади (3.7- расм, а, б). Таъсир чизикларини чизишда балкага фақат ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ таъсир этади, деб фараз этилади. Графикни чизиш жараёнида доимий юклар



3.7- расм

таъсири эътиборга олинмаслигини эслатиб ўтамиз. Таъсир чизиклари чизиб бўлингандан кейин зўриқишларнинг қийматини аниқлаш жараёнида балкага қўйилган доимий юклардан фойдаланилади.

Осма балкаларда зўриқиш уларга куч қўйилган тақдирдагина пайдо бўлади. Асосий балкаларга қўйилган куч осма балкаларда зўриқишни уйғотмайди.

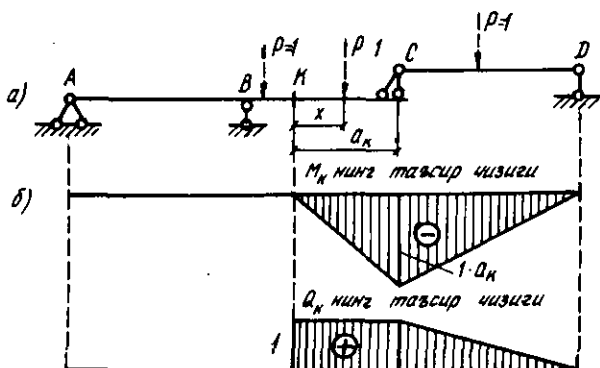
Асосий балкаларда шароит бутунлай бошқача: осма балкаларга қўйилган кучлар асосий балкада ҳам зўриқиш уйғотади. Шу қоидадан келиб чиқиб, кўп ораликли балканинг таъсир чизикларини кураимиз.

Осма балкага тегишли R_f таянч реакциясининг таъсир чизиги оддий балкаларникидан фарқ қилмайди (3.7- расм, в).

R_c реакциясининг таъсир чизигини қуришда СД консолли балкасининг ўзи берилган (унга туташган АВ ва ЕF балкалари йўқ) деб фараз қиламиз ва шу балканинг ўзи учун таъсир чизиги кураимиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч $P=1$ С нуктага келганда, R_c реакциянинг қиймати бирга тенг бўлади ($R_c=1$). Куч Е нуктасига келганда, $R_c=Y_c$ бўлади. Энди бирлик куч АВ ва ЕF балкалари бўйлаб ҳаракат қилганда, R_c реакциясининг қай тариқа ўзгаришини кўриб ўтамиз. Куч АВ балкасида юрганида R_c га таъсир этмайди, яъни $R_c=0$ бўлади. Куч ЕF балкасида юрганида, R_c га таъсир этади. Куч Е нуктасида бўлганида, R_c нинг қиймати Y_c га тенг эканлигини биламиз. Бирлик куч F таянчга яқинлашган сари унинг R_c га бўлган таъсири камаё боради. $P=1$ кучи F нуктасига келганда, $R_c=0$ бўлади, чунки кучнинг таъсирини F таянчи тўлиқ ўзига қабул қилиб олади. Шунинг учун, Y_c ординатаси F таянчи остидаги ноль нукта билан туташтирилади (3.7- расм, в).

R_a реакциясининг таъсир чизиги АВ балкасидан бошланади. Таъсир чизигининг дастлабки қисмини оддий балкага чизгандек кураимиз. Осма балкалар остидаги қисми эса юқоридаги каби мулоҳаза юритиш йўли билан қурилади (3.7- расм, в).

Энди эгувчи момент ва қирқувчи кучларнинг таъсир чизикларини кураимиз. Балканинг «К» кесими учун M_k ва Q_k нинг таъсир чизикларини қуриш талаб этилади, дейлик (3.7- расм, а). «К» кесими СД балкасига қарашли. СД балкаси АВ га нисбатан иккинчи даражали, ЕF га нисбатан эса асосий балка ҳисобланади. Бу шуни англатадики, $P=1$ кучи АВ балкаси бўйлаб ҳара-



3.8- расм

катланганда «К» кесимида M ҳам, Q ҳам ҳосил бўлмайди. Консолли СД балкаси учун таъсир чизиклари оддий балкадаги сингари қурилади. Куч ЕҒ балкасида ҳаракатланганида, СД балкасининг «К» кесимидаги ички кучларга таъсир этади. Куч Е нуктасида турганида $Q_k = Y_2$, $M_k = Y_1$ бўлади. Куч Ғ нуктасига етганида, $M_k = 0$; $Q_k = 0$ бўлади. Шунга кўра у ҳам, Y_2 ҳам ноль билан туташтирилди. Ҳосил бўлган график M_k ва Q_k нинг таъсир чизиклари деб аталади (3.7- расм, г).

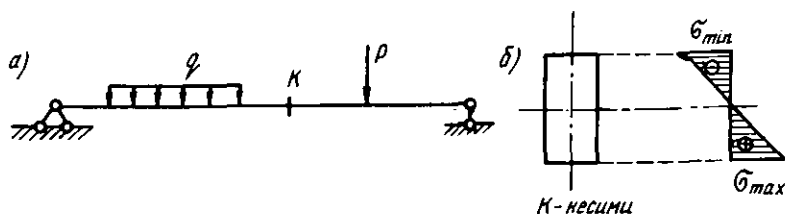
Баъзан «К» кесими балканинг консол қисмида берилиши мумкин (3.8- расм, а). У ҳолда M_k ва Q_k нинг таъсир чизиги кесимнинг консолда ётганлигини ҳисобга олган ҳолда қурилади. Бирлик куч кесимдан чапда ҳаракатланса, «К» кесимида ҳеч қандай зўриқиш ҳосил бўлмайди. Куч КС оралиғида бўлса, $M_k = -1 \cdot x$ ва $Q_k = 1$ бўлади. Куч СД балкаси устида ҳаракатланса, M_k ва Q_k учбурчак қонунини бўйича ўзгаради (3.8- расм, б).

4- боб

СТАТИК АНИҚ ФЕРМАЛАР

4.1. ФЕРМАЛАР ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Бикир тугунларни шарнирлар билан алмаштирганда, ўзининг геометрик ўзгармаслигини сақлаб қолувчи стер-
женли системалар ферма деб аталади.



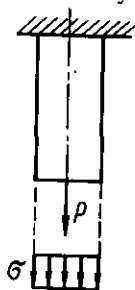
4.1-расм

Фермалар балкаларнинг такомиллашган бир кўриниши бўлиб, балкалар ўтайдиган вазифани бажаради: балкалар кичик оралиқларни ёпишда қўлланса, фермалар катта оралиқларни ёпишда қўлланилади.

Балкадан фермага ўтиш ғояси унинг ишлаш шароитини таҳлил қилиш оқибатида пайдо бўлган. Маълумки, балка эгилишга ишлайди (4.1-расм, а). Балканинг ижтиёрий кесими учун қурилган нормал кучланишлар эпюраси (4.1-расм, б) дан кўриниб турибдики, балканинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилмайди. Нормал кучланиш нейтрал ўқда ноль, ўқдан узоқлашган сари унинг қиймати ортиб боради. Энг кўп ишни ўқдан узоқда жойлашган толалар бажаради, нейтрал қатлам ва унинг атрофи деярли ишламайди. Хаттоки прокат профиллар (қўштавр, швеллер ва бурчакликлар) да ҳам ашёларнинг атиги 60-70 фоиздан фойдаланилади, холос.

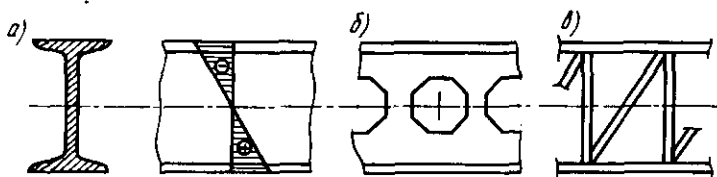
Агар элемент сиқилиш ёки чўзилишга ишласа, у ҳолда унинг ашёсидан тўлиқ фойдаланилади (4.2-расм). Нормал кучланишлар эпюрасидан кўринадики, элементнинг ҳар бир нуктаси ишлайди.

Ҳар иккала эпюрани солиштиришдан қуйидаги мулоҳаза пайдо бўлади. Шундай конструкция яратиш керакки, унда қўлланилган ашёдан тўлиқ фойдаланилсин, агар имкон бўлса, элемент фақат сиқилиш ва чўзилишга ишласин.



4.2-расм

Бу вазифа қисқа вақт ичида босқичма-босқич амалга оширилди. Дастлаб тўғри тўртбурчакли яхлит кесим ўрнига қўштавр пайдо бўлди (4.3-расм, а), кейинчалик қўштавр деворлари ўйиклар ҳисобига енгиллаштирилади (4.3-расм, б) ва нихоят, бу изланишларнинг мантикий давоми

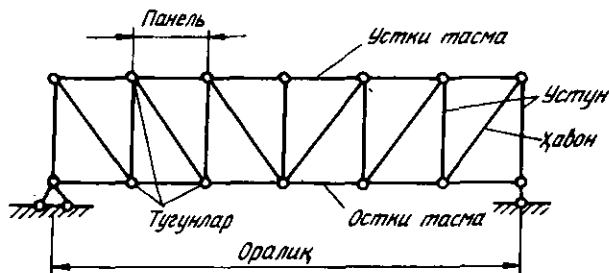


сифатида ферма конструкцияси яратилди (4.3- расм, в).
Олдий статик аниқ ферманинг ҳисоблаш тарҳи 4.4- расмда
тасвирланган.

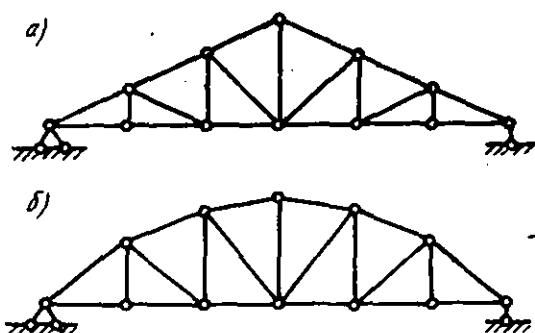
Одатда ташки кучлар ферма тугунларига қўйилади. Ферма стерженлари ташки кучлар таъсирида асосан сикилиш ва чўзилишга ишлайди. Бу ҳол ферма материалидан самарали фойдаланиш имконини беради, чунки ҳар бир стержень кўндаланг кесимида ҳосил бўладиган нормал кучланишлар эпюраси тўғри тўртбурчак шаклига эга бўлади.

Ферманинг барча стерженлари ёки уларнинг ўқлари бир текисликда жойлашса, текис ёки ясси фермалар деб, бир текисликда жойлашмаса фазовий фермалар деб аталади. Фазовий фермалар кўпинча алоҳида ясси фермаларга ажратилган ҳолда ҳисобланади.

Икки таянч орасидаги масофа **о р а л и к** (пролёт) деб аталади; ферманинг ташиқи чегарасида жойлашган стерженлар т а с м а л а р деб аталиб, улар орасида жойлашган стерженлар ферма панжараларини ташиқил этади. Панжаранинг тик элементлари устун, оғма элементлари — х а в о н деб юритилади. Ферма тугунлари орасидаги горизонтал масофа п а н е л дейилади.



4.4- р а с м



4.5- расм

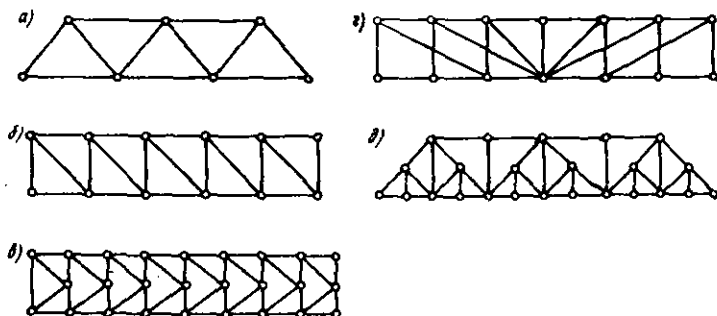
Фермалар ташқи кўриниши, панжара шакли, таянч хиллари ва ўтайдиган вазифасига қараб бир неча турга бўлинади:

а) ферма ташқи контурининг шаклига кўра параллел тасмали фермалар (4.4- расм), учбурчак шаклли фермалар (4.5- расм, а), полигонал тасмали фермалар (4.5- расм, б);

б) панжарасининг тузилишига кўра учбурчак панжарали фермалар (4.6- расм, а), ҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, б), ярим ҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, в), қўшҳавон панжарали фермалар (4.6- расм, г), қўш панжарали (шпренгелли) фермалар (4.6- расм, д);

в) таянч хилларига қараб балкасимон ёки консол фермалар;

г) ўтайдиган вазифасига кўра том, кўприк ва кран фермалари;



4.6- расм

д) кўприк фермаларида юкнинг ҳаракатланиш сатҳига қараб юк устки ёки пастки тасмадан юрадиган фермалар бўлади.

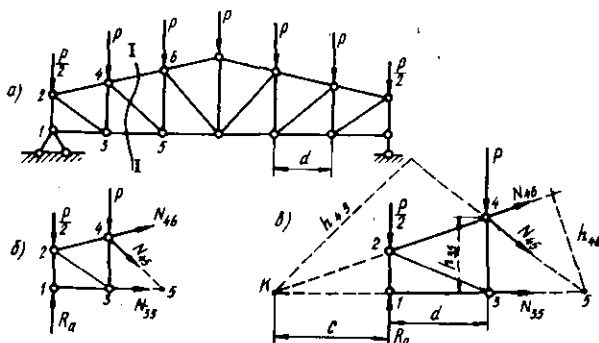
4.2. ФЕРМАЛАРНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Статик аниқ ясси фермаларни ҳисоблаш деганда ҳар бир стержендаги зўриқишларни аниқлаш тушунилади. Зўриқишларни аниқлашнинг аналитик, график ва таъсир чизиклари усули мавжуд. Мазкур параграфда аналитик усул билан танишиб чиқамиз.

Аналитик усулнинг ўзи бир-бирини тўлдирувчи учта усулга бўлинади: момент нуктаси ёки Риттер усули, проекциялаш усули ҳамда тугунларни кесиб олиш усули. Усулларнинг ичида энг қулайи Риттер усулидир, бироқ ундан ҳамма вақт ҳам фойдалана олмаймиз. Момент нуктаси усулидан фойдаланиш имкон бўлмаган ҳолларда проекциялаш ёки тугунлардан кесиб олиш усулларидан фойдаланилади. Ҳар учала усул билан бирма-бир танишиб ўтамиз.

Момент нуктаси усули. Ферманинг ҳисоби таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади (бошқа усулларда ҳам худди шундай қилинади). Ферма реакциялари оддий балка реакциялари сингари аниқланади, яхлит ферма учун статиканинг мувозанат тенгламалари тузилади ва шу тенгламалардан таянч реакциялари аниқланади ҳамда текширилади.

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлаш учун ферма хаёлан қиркилади (4.7- расм, а), ҳисоблаш учун қиркилган ферманинг бир қисми ажратиб олинади (4.7- расм, б)



4.7- расм

ва ажратилган бўлак учун мувозанат тенгламаси тузилади. Мувозанат тенгламаси таркибига ташқи кучлар ва таянч реакцияларидан ташқари номаълум зўриқишлар кириди.

Момент нуктаси усулида кесим шундай ўтказиладики, бунда кесимга кирган стерженларнинг сони учтадан ортмаслиги ва учала стержень бир нуктада кесилмаслиги керак. Кесимга кирган стерженлар жуфт-жуфт бўлиб, бир нуктада кесишади (4.7- расм, б). Ҳар бир стержень ўзининг момент нуктасига эга. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стерженнинг кесилув нуктаси момент нуктаси деб аталади. Мувозанат тенгламалари ана шу момент нукталарига нисбатан тузилади. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, тузиладиган тенгламалар ҳар сафар бир номаълумли бўлади. Бир номаълумли оддий тенгламадан изланаётган зўриқишнинг қиймати аниқланади.

Тенглама тузаётганда, номаълум зўриқишларнинг йўналишини ферманинг кесилган томонига йўналтирилади, яъни стержень чўзилувчан деб қаралади. Ҳисоб натижасида зўриқиш мусбат ишорада чикса, стерженнинг чўзилишга ишлаши тасдиқланади. Манфий чикса — стержень сикилувчан бўлади.

Ферма стерженларидаги зўриқишлар аслида ички кучлар бўлганлиги сабабли уларни N ҳарфи билан белгилаймиз ва қайси тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билиш мақсадида остига икки рақамдан иборат белги қўямиз. Масалан, N_{46} — тўртинчи ва олтинчи тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши эканини билдиради.

Энди бевосита зўриқишларни аниқлашга киришамиз. N_{35} , N_{45} ва N_{46} зўриқишларни аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бунинг учун фермани 1—1 кесими бўйича қирқамиз (4.7- расм, а). Ферманинг бир қисмини (масалан, кучлар кўп бўлганлиги учун ўнг қисмини) ташлаб юборамиз. Ҳисоблаш учун эса чап қисмини олиб қоламиз (4.7- расм, в).

Ферманинг чап қисми ташқи кучлар (R_a ; $0,5 P$; P) ҳамда ички кучлар (N_{35} , N_{45} , N_{46}) таъсирида мувозанат ҳолатида бўлиши лозим. Номаълум ички кучлар ферманинг ташлаб юборилган ўнг қисмининг таъсирини ўзида акс эттиради.

4- тугун 3—5 стержени учун момент нуктаси ҳисобланади. Номаълум зўриқиш N_{35} ни аниқлаш учун шу нуктага

нисбатан барча кучларнинг моментлари йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d - \frac{P}{2} \cdot d - N_{35} \cdot h_{35} = 0,$$

бу ердан
$$N_{35} = \frac{R_a \cdot d - 0,5P \cdot d}{h_{35}} = \frac{M_4^0}{h_{35}}.$$

Бу ерда d ва h — елкалар; M_4^0 — тўртинчи тугунга нисбатан ферманинг чап бўлагига ётган кучларнинг моментлари йиғиндисини.

Бу момент микдор жиҳатидан оддий балканинг, ферма момент нуктасига мос кесимидаги моментга тенг бўлади. Зўриқишнинг мусбат ишораси 3—5 стерженнинг чўзилувчан эканлигини англатади.

Энди 4—6- тугунлар орасидаги стерженнинг зўриқиши N_{46} ни аниқлаймиз. Кесимга кирган икки стерженнинг кесишув нуктаси (5) N_{46} учун момент нуктаси бўлади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_5 = R_a \cdot 2d - \frac{P}{2} \cdot 2d - P \cdot d + N_{46} h_{46} = 0;$$

бу ердан
$$N_{46} = -\frac{2d(P - R_a)}{h_{46}} = -\frac{M_5^0}{h_{46}}.$$

Зўриқиш ишорасининг манфий чиқиши 4—6 стерженининг сиқилувчан эканлигини билдиради. Умуман фермага қўйилган ташқи кучлар пастга йўналган бўлса, ферманинг устки тасмаси сиқилишга, остки тасмаси чўзилишга ишлайди.

Эндиги навбат N_{45} га. Кесимга кирган, зўриқиши изланмаётган икки стержень «К» нуктасида кесишади. Ана шу нукта N_{45} учун момент нуктаси ҳисобланади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_k = -R_a \cdot c + \frac{P}{2} \cdot c + P(c + d) + N_{45} \cdot h_{45} = 0;$$

бу ердан

$$N_{45} = \frac{R_a \cdot c - 0,5P \cdot c - P(c + d)}{h_{45}} = \frac{M_k^0}{h_{45}}.$$

Шундай қилиб, момент нуктаси усулида исталган стержендаги зўриқиш қуйидаги формула асосида топила экан:

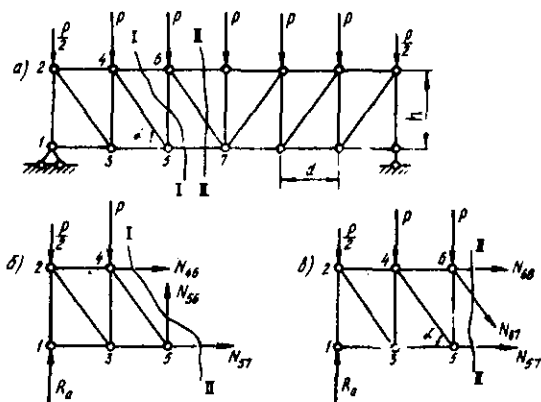
$$N = \frac{M}{h}.$$

Бу ерда M — кесилган ферманинг бир қисмида ётган қучларнинг момент нуктасига нисбатан олинган моментлари йиғиндиси;

h — изланаётган зўриқишнинг шу нуктага нисбатан елкаси.

Проекциялаш усули. Баъзан шундай фермалар учрайдики, уларда момент нуктаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда бошқа усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Параллель тасмалар ферма бунга мисол бўла олади (4.8-расм, а). Ферманинг ҳавон ва устунлари момент нуктасига эга эмас, чунки тасмалар параллел бўлганлиги сабабли ўзаро кесишмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усули жуда қўл келади.

5—6 тугунлар орасидаги устуннинг зўриқишини аниқламоқчимиз, дейлик. Бунинг учун энг аввал I—I кесим билан фермани икки қисмга ажратамиз; қучлар кўп бўлгани учун ўнг томонини ташлаб юборамиз. Кесимга кирган уч стерженнинг икkitаси ўзаро параллел, демак N_{56} нинг момент нуктаси йўқ. Шунинг учун мувозанат тенгламасини тузишда қучлар проекцияларининг йиғиндидан фойдаланамиз:



4.8-расм

$$\Sigma Y = R_a - \frac{P}{2} - P + N_{56} = 0;$$

бу ердан
$$N_{56} = -(R_a - 1,5P) = -Q.$$

Бу ерда N_{56} — оддий балкадаги кўндаланг куч.

N_{67} зўриқишни аниқлаш учун фермани II — II кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун қуйидаги проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma Y = R_a - \frac{P}{2} - P - P - N_{67} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{67} = \frac{R_a - 2,5P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Бу ерда ҳам Q оддий балканинг қирқувчи кучи.

Тугунларни кесиб олиш усули. Бу усулни проекциялаш усулининг хусусий ҳоли деса ҳам бўлади. Чунки бунда ҳам проекция тенгламаларидан фойдаланилади. Фарқи шуки, аввалги усулда яхлит фермани қирқиб, унинг бир қисми ажратиб олинган бўлса, бу сафар битта тугун кесиб олинади ва шу тугун учун мувозанат тенгламалари тузилади (4.9- расм, а, б).

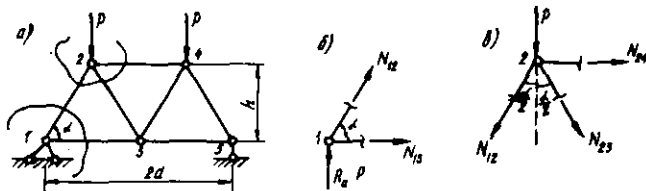
Ҳисоб ишлари икки стерженли тугундан бошланади. Нега деганда тугун мувозанатини текшириш учун ихтиёриймида фақат иккита тенглама бор. $\Sigma x = 0$; $\Sigma y = 0$.

Шунга мувофиқ яхлит фермадан I тугунни кесиб оламиз ва ундаги N_{12} ҳамда N_{13} номаълум зўриқишларни аниқлаймиз. Кучларнинг Y ўқиға бўлган проекциялари йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma y = R_a + N_{12} \cdot \sin \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{12} = -\frac{R_a}{\sin \alpha} = -\frac{P}{\sin \alpha};$$



4.9- расм

N_{13} ни аниқлаш учун кучларни X ўқиға проекциялаймиз:

$$\Sigma X = N_{13} + N_{12} \cdot \cos \alpha = 0;$$

бу ердан

$$N_{13} = -N_{12} \cdot \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Энди 2- тугунга ўтилади; бу ердаги учта зўриқишдан биттаси маълум (N_{12}), қолган икkitаси номаълум. N_{23} ни аниқлаш учун кучларни Y ўқиға проекциялаймиз (4.9- расм, в).

$$\Sigma Y = -P - N_{12} \cos \frac{\alpha}{2} - N_{23} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

бу ердан

$$N_{23} = -P(1 + \sin \alpha) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

N_{24} ни аниқлаш учун кучларни x ўқиға проекциялаймиз (4.9- расм, в)

$$\Sigma X = N_{24} - N_{12} \sin \frac{\alpha}{2} + N_{23} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

бу ердан

$$N_{24} = P \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - P \sin \frac{\alpha}{2} / \sin \alpha.$$

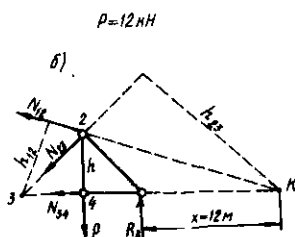
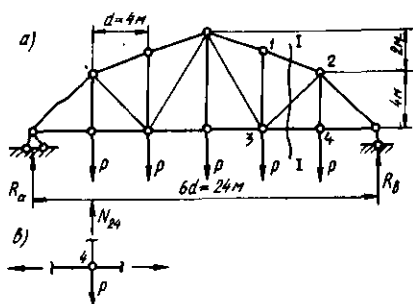
Юкоридагилардан кўриниб турибдики, тугунларни кесиб олиш усулида навбатдаги стержень зўриқиши ўзидан олдинги стерженлар зўриқишларига боғлиқ ҳолда топилади. Олдинги зўриқишни аниқлашда йўл қўйилган хато табиийки кейинги зўриқишларда ҳам такрорланади. Бу мазкур усулнинг камчиликларидан ҳисобланади. Усулнинг яна бир камчилиги шундан иборатки, унинг тенгламаларида кўплаб тригонометрик функциялар учрайди, бу эса ҳисобни мураккаблаштиради.

Ана шуларни ҳисобга олиб, фермаларни ҳисоблаганда кўриб ўтилган усуллардан қайси бири қўл келса, ўша усулдан фойдаланилади. Масалан, ферманинг баъзи зўриқишлари момент нуқтаси усулида, баъзилари проекциялаш ёки тугунларни кесиб олиш усулида аниқланиши мумкин.

Мисол. 4.10- расм, а-да тасвирланган ферманинг бешинчи панелини ташкил этган стерженлардаги зўриқишлар аналитик усулда аниқлансин.

Ечиш. Ҳисоб таянч реакцияларини аниқлашдан бошланади:

$$R_a = R_b = \frac{5P}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ кН}.$$



4.10- расм

Ферманинг 5- панелини 1—1 кесим билан кесиб, чап қисмини ташлаб юборамиз ва ўнг томони учун мувозанат тенгламаларини тузамиз (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини тузишда кесилган стерженлар чўзилишга ишлайди деб фараз этилади ва зўриқишлар тугундан ташқи томонга йўналтирилади.

N_{12} зўриқишини аниқлашда 2—3 ва 3—4 стерженларнинг кесишув нуктаси (3) момент нуктаси деб қабул қилинади. Шу нуктага нисбатан моментлар тенгласи тузилади.

$$\Sigma M_3 = -R_b \cdot 2d + P \cdot d - N_{12} \cdot h_{12} = 0.$$

Тригонометрик йўллар билан $x = 12$ м ва $h_{12} = 4,9$ м ни аниқлаймиз. У ҳолда $N_{12} = -39,6$ кН бўлади.

N_{34} зўриқишнинг момент нуктаси 2-тугунга тўғри келади. Моментлар тенгласини шу нуктага нисбатан тузамиз:

$$\Sigma M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0;$$

бундан $N_{34} = 30$ кН.

N_{23} зўриқишини ҳам аввалги зўриқишлар сингари момент нуктаси усулида аниқлаймиз. Бирок бу зўриқишнинг момент нуктаси, яъни 1—2 ва 3—4 стерженлардан ўтган ўқнинг кесишув нуктаси (К) фермадан ташқарида ётади. Мувозанат тенгласи ана шу нуктага нисбатан тузилади:

$$\Sigma M_K = R_b \cdot x - P(d + x) - N_{23} \cdot h_{23} = 0.$$

Тригонометриядан $h_{23} = \dots$ Тенгламадан $N_{23} = 11,9$ кН.

N_{24} зўриқиши тугунларни кесиб олиш усулида аниқланади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб олиб (4.10- расм, а), мувозанат тенгламаси тузилади:

$$\Sigma Y = N_{24} - P = 0; \text{ бундан } N_{24} = 12 \text{ кН.}$$

4.3. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИНГ ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИ

Баъзан фермаларга доимий юклардан ташқари қўзғалувчан юклар ҳам таъсир этади. Қўзғалувчан юклар таъсирида ферма стерженларидаги зўриқишларнинг қиймати ўзгариб боради. Зўриқишларнинг қандай ўзгаришини билиш учун таъсир чизиклари деб аталган график чизилади.

Таъсир чизикларининг тенгламалари аналитик усулдаги сингари момент нуктаси, проекциялаш ва тугунларни кесиб олиш усулларида тузилади. 4.11- расм, а да тасвирланган ферма стерженларидаги айрим зўриқишларнинг таъсир чизикларини курамыз.

Ферманинг иккинчи панелидаги N_{35} , N_{46} , N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизиклари момент нуктаси усулида, учинчи панелдаги N_{67} зўриқиш проекциялаш усулида ҳамда N_{87} зўриқишнинг таъсир чизиғи тугунни кесиб олиш усулида қурилади.

Ишни N_{35} зўриқишининг таъсир чизиғини қуришдан бошлаймиз. Бунинг учун фермани I—I кесим билан ҳаёлан қирқамиз. Ҳаракатланувчи бирлик куч кесимнинг ўнг томонида деб фараз этамиз ва шу томонни ташлаб юборамиз. Қирқимга тушган учта стерженда зўриқишларнинг йўналиши ташлаб юборилган томонга қаратилади.

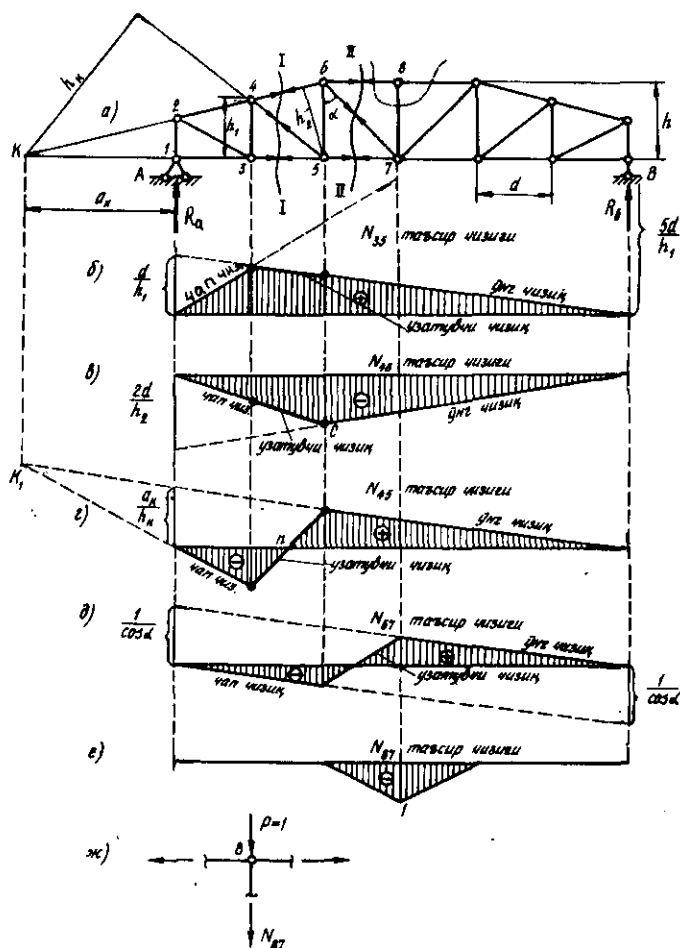
Кесимнинг чап томони учун момент нуктаси усулини қўллаб, мувозанат тенгламасини тузамиз. 3—5 стержени учун 4 нукта момент нуктаси ҳисобланади. Шу нуктага нисбатан моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$\Sigma M_4 = R_a \cdot d - N_{35} \cdot h_1 = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_a \cdot \frac{d}{h_1}.$$

Демак, N_{35} зўриқишнинг таъсир чизиғи бирлик куч кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, R_a таянч реакциясининг таъсир чизиғи сингари бўлиб, ординаталари d/h_1 микдорга фарқ қилади. Шунга кўра A таянч остида ўқдан юқорига



4.11-расм

d/h_1 масофани ўлчаб қўямиз ҳамда В таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз. Ўтказилган чизик ўнг чизик деб аталади (4.11-расм, б).

Чап чизикни ўтказиш мақсадида кесимнинг ўнг томони учун моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma M_A = N_{35} \cdot h_1 - R_b \cdot 5d = 0,$$

бу ердан

$$N_{35} = R_b \cdot \frac{5d}{h_1}.$$

Демак, N_{35} зўриқишининг таъсир чизиги бирлик куч кесимдан чапда бўлганда, тузилиши жихатидан худди R_b реакциясининг таъсир чизигига ўхшаш бўлиб, миқдор жихатдан ундан $5d/h_1$ мартаба кўп бўлади. Бунга асосан B таянч остида $5d/h_1$ масофани ўқдан юқорига ўлчаб қўямиз ва уни A таянч остидаги ноль нукта билан туташтирамиз. Бу чизик чап чизик деб аталади. Чап ва ўнг чизиклар момент нуктаси (4) остида кесишади (4.11- расм, б). Штрихланган учбурчак N_{35} зўриқишининг таъсир чизиги ҳисобланади. Мушбат ишора 3—5 стерженни қўзилишга ишлашини билдиради. 3- ва 5- тугунларни таянч чизигига туширилган проекцияларини туташтирувчи чизик — узатувчи чизик деб аталади.

N_{35} га тааллуқли узатувчи чизик бизнинг ҳолда ўнг чизик билан устма-уст тушган. Баъзи ҳолларда узатувчи чизик чап ёки ўнг чизик билан устма-уст тушмайди.

Ўнг ва чап чизикларнинг момент нуктаси остида кесишувини эътиборга олиб, таъсир чизикларини чизишни бир мунча енгиллаштириш мумкин. Бунинг учун биргина ўнг ёки чап чизик қйзилса кифоя. Иккинчиси момент нуктасининг проекцияси орқали ўтказилади.

Шу йўл билан N_{46} ва N_{45} зўриқишларнинг таъсир чизигини курамиз.

1—1 кесим ўз кучини сақлайди. 5- нукта N_{46} нинг момент нуктаси бўлади. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнг томонда ҳаракатланади, деб чап томон учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\Sigma M_5 = R_a \cdot 2d + N_{46} \cdot h_2 = 0,$$

бундан

$$N_{46} = -R_a \frac{2d}{h_2}$$

N_{46} нинг таъсир чизигини чизиш учун A таянчи йўналишида ўқдан пастга (манфий бўлганлиги учун) $2d/h_2$ масофани ўлчаб қўямиз ва B таянчи йўналишидаги ноль билан бирлаштирамиз (4.11- расм, в). Бу ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун момент нуктаси 5 ни ўнг чизикка проекциялаймиз. Топилган нукта C ни A таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Бу чизик чап чизик бўлади. Штрихланган юза N_{46} зўриқишининг таъсир чизиги ҳисобланади. Манфий ишора 4—6 стерженининг сикилишга ишлашини билдиради.

Энди ҳавондаги зўриқиш N_{45} нинг таъсир чизигини чизамиз. 1—1 кесим бу стерженни ҳам кесиб ўтган.

Кесимнинг ўнг томонини ташлаб юборамиз. Бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз. Ферманинг кесимдан чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз. Бунинг учун аввал момент нуктасини белгилаб оламиз; N_{45} зўриқишининг момент нуктаси 3—5 ва 4—6 стерженларидан ўтган ўқнинг кесилиш нуктаси К да ётади. Моментлар йиғиндисини шу нуктага нисбатан тузамиз:

$$\Sigma M_k = -R_a \cdot a_k + N_{45} \cdot h_k = 0,$$

бундан

$$N_{45} = R_a \frac{a_k}{h_k}.$$

Демак, куч ($P=1$) кесимдан ўнгда ҳаракатланганда, N_{45} зўриқишининг қиймати R_a реакциясидан a_k/h_k маротаба катта бўлар экан. Бунга асосланиб, ўқдан юқорига a_k/h_k масофани ўлчаб қўямиз; уни В таянчи йўналишидаги ноль билан туташтирамиз (4.11-расм, г), ҳосил бўлган чизик ўнг чизик бўлади. Чап чизикни ўтказиш учун ўнг чизикни чапга давом эттирамиз. Момент нуктаси — К ни унинг давомига проекциялаймиз. Улар K_1 нуктасида кесишади. K_1 нуктаси билан А таянчи остидаги ноль нуктани бирлаштирамиз ва ўнгга давом эттирамиз. Бу чап чизик бўлади. Узатувчи чизикни ўтказиш учун 4- тугунни чап, 5- тугунни ўнг чизикқа проекциялаймиз. Топилган нукталарни бирлаштирувчи чизик узатувчи чизик ҳисобланади. Штрихланган юза эса N_{45} нинг таъсир чизигидир. Бу ерда юза икки хил ишорага эга. n нуктада ордината нолга тенг. Бунинг маъноси шуки, бирлик куч n нуктасидан чапда ҳаракатланса, 4—5 стержень сикилишга, ўнгда ҳаракатланса қўзилишга ишлайди.

Энди ферма стерженларидаги зўриқишларнинг таъсир чизикларини қуришда проекциялаш усулини қўллаб қўрамиз.

4.11-расм, а да тасвирланган ферманинг учинчи ва тўртинчи панелидаги устки ва остки тасмалар ўзаро параллел. Шу боисдан мазкур панеллардаги ҳавонларга момент нуктаси усулини қўллаб бўлмайди. Бундай ҳолларда проекциялаш усулига мурожаат этилади.

Учинчи панел ҳавонидаги зўриқиш N_{67} нинг таъсир чизигини қурайлик. Бунинг учун II — II кесими бўйлаб фермани қирқамиз. Ўнг томонини ташлаб, чап томони учун тенглама тузамиз; бунда бирлик куч $P=1$ кесимдан ўнгда деб фараз этамиз

$$\Sigma Y = R_a - N_{67} \cdot \cos \alpha = 0$$

бундан

$$N_{67} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R_a.$$

Бирлик куч кесимдан чапда деб фараз этиб, ўнг томон учун проекциялар тенгламасини ёзамиз:

$$\Sigma Y = R_b + N_{67} \cdot \cos \alpha = 0,$$

бундан

$$N_{67} = -R_b \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

N_{67} зўриқишнинг таъсир чизиғи ҳам таянч реакциялари R_a ва R_b нинг таъсир чизиғи каби бўлар, миқдори эса $1/\cos \alpha$ га фарқ қилар экан. Шунга кўра реакциялар йўналишида ўқдан юқорига ва пастга $1/\cos \alpha$ ни ўлчаб кўямиз, топилган нукталарни таянчлар остидаги ноль нукталар билан бирлаштирамиз. Юқорида ўнг, пастда чап чизик ҳосил бўлади (4.11-расм, д). 6-тугунни чап, 7-тугунни ўнг чизикка проекциялаймиз ва топилган нукталарни туташтирсак, узатувчи чизик ҳосил бўлади. Штрихланган юза 6—7 ҳавондаги зўриқишнинг таъсир чизиғи бўлади.

Тугунларни кесиб олиш усулини N_{87} зўриқиши мисолида кўриб ўтамиз.

7—8-устуннинг зўриқишини аниқлашда ферма қиркимига учдан ортик (бизнинг ҳолда 4 та) стержень тўғри келади. Шунинг учун 8-тугунни шаклда кўрсатилгандек кесиб, ажратиб оламиз (4.11-расм, а ва ж).

Бирлик куч 8-тугундан бошқа туғунлар бўйлаб ҳаракатланса, устундаги зўриқиш ноль бўлади: $\Sigma Y = N_{81} = 0$.

Бирлик куч 8-туғунда бўлса,

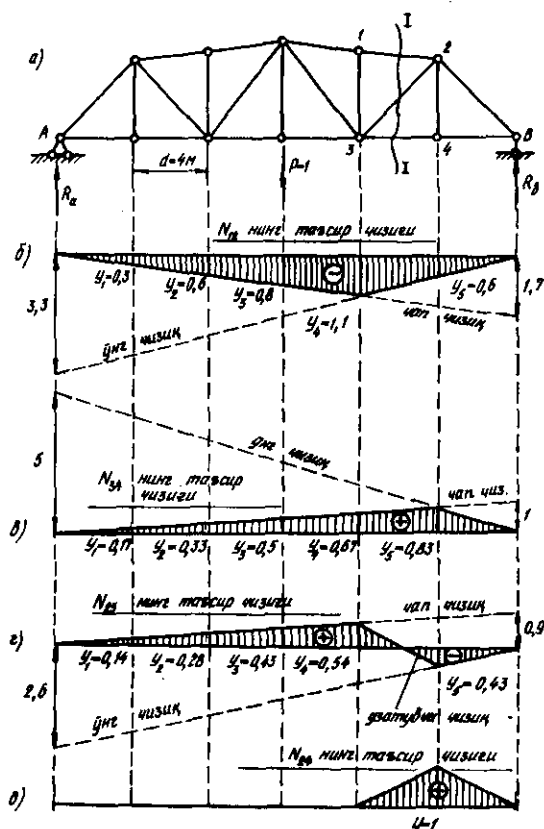
$$\Sigma Y = -N_{87} - P = 0,$$

бундан

$$N_{87} = -P = -1.$$

Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиғи 4.12-расм, е да тасвирланган.

Мисол. 4.12-расм, а да тасвирланган ферманинг бешинчи панелидаги зўриқишлар учун таъсир чизиклари чизилсин ҳамда чизилган таъсир чизикларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қиймати аниқлансин.



4.12- расм

Ечиш. Момент нуктаси усулидан фойдаланиб N_{12} зўриқишининг таъсир чизиғини чизамиз. Бунинг учун фермани 1—1 кесим билан қирқамиз. Навбатма-навбат ферманинг чап ва ўнг қисмлари учун мувозанат тенгламаларини тузамиз. Ферманинг чап қисми учун тенглама тузганда, бирлик куч $P=1$ ферманинг ўнг томонида ҳаракатланади деб фараз этамиз ва аксинча.

3- тугун N_{12} учун момент нуктаси бўлади. Шу нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (4.10- расм, б).

а) ферманинг ўнг томони тенгламаси

$$\Sigma M_3 = -R_b \cdot 2d - N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -\frac{2 \cdot 4}{4,9} \cdot R_6 = -1,7R_6.$$

Бу ифодага кўра А таянчи остига ноль, В таянчи остига — 1,7 га тенг бўлган ординаталарни ўлчаб қўямиз ва уларни бирлаштириб, чап тўғри чизикни ҳосил қиламиз (4.12- расм, б);

б) бу ишларни ферманинг чап томони учун такрорлаймиз

$$\Sigma M_3 = R_a \cdot 4d + N_{12} \cdot h_{12} = 0,$$

бундан

$$N_{12} = -3,3R_a.$$

Бу ифодага кўра ўнг тўғри чизик ўтказилади. Штрихланган юза N_{12} зўриқишнинг таъсир чизигидир (4.12- расм, б).

N_{34} зўриқишнинг момент нуктаси 2- тугун билан устма-уст ётади. Ферманинг чап ва ўнг қисмлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз ва уларнинг N_{34} га тегишли ординаталарини аниқлаймиз (4.10- расм, б):

а) ферманинг чап қисми учун

$$\Sigma M_2 = R_a \cdot 5d - N_{34} \cdot h = 0,$$

бундан

$$N_{34} = 5R_a;$$

б) ферманинг ўнг қисми учун

$$\Sigma M_2 = -R_b \cdot d + N_{34} \cdot h = 0, \quad N_{34} = R_b.$$

Штрихланган юза N_{34} нинг таъсир чизигидир (4.12- расм, в).

N_{23} зўриқишнинг момент нуктаси (К) фермадан ташқарида ётади (4.10- расм, б). Мувозанат тенгламаларини шу нуктага нисбатан тузамиз:

а) ферманинг чап қисми учун

$$\Sigma M_k = R_a(6d + x) + N_{23}h_{23} = 0; \text{ бундан } N_{23} = -2,6R_a,$$

бунга кўра ўнг (тўғри) чизик ўтказилади;

б) ферманинг ўнг қисми тенгламаси

$$\Sigma M_k = R_b \cdot x - N_{23} \cdot h_{23} = 0, \quad N_{23} = 0,9R_b.$$

Бунга асосан чап (тўғри) чизик ўтказилади.

Чап ва ўнг чизиклар узатувчи чизик ёрдамида туташтирилади. Бунинг учун 3- тугун чап ва 2- тугун ўнг чизикқа проекцияланади ҳамда топилган нукталар бирлаштирилади. Штрихланган юза N_{23} нинг таъсир чизигидир (4.12- расм, г).

N_{24} зўриқишнинг таъсир чизиги тугунларни кесиб олиш усулида курилади. Бунинг учун 4- тугунни кесиб оламиз ва унинг икки ҳолатини текширамыз (4.10- расм, в).

Биринчи ҳолатда бирлик куч 3—4 ва 4—В панеллардан ташқарида ҳаракатланади, деб фараз этамыз. Бу ҳолда мувозанат тенгламаси $\Sigma Y = 0$ дан $N_{24} = 0$ келиб чиқади.

Иккинчи ҳолатда бирлик куч 4- тугунга қўйилган деб фараз этамыз. Бу ҳол учун мувозанат тенгламаси $\Sigma Y = N_{24} - P = 0$ бўлади, бундан $N_{24} = 1$ келиб чиқади.

Бирлик куч бошқа тугунларда бўлганда, N_{24} зўриқиш нолга тенг бўлади. Мазкур зўриқишнинг таъсир чизиги 4.12- расм, д да тасвирланган.

Энди масаланинг иккинчи қисмини ҳал этишга киришамиз, яъни тайёр таъсир чизикларидан фойдаланиб, зўриқишларнинг қийматини аниқлаймыз. Фермага факат йиғик кучлар қўйилган бўлганлиги учун зўриқишлар қуйидаги формула билан аниқланади:

$$N = P \sum_{i=1}^n Y_i$$

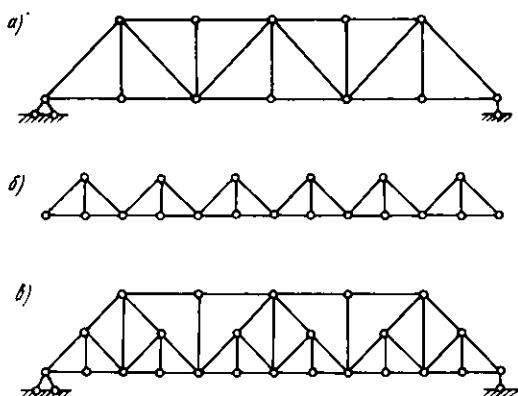
Бу формуладан фойдаланишда йиғик кучлар пастга йўналганлиги учун (4.10- расм, а) мусбат ишорада, Y_i ординатасининг ишоралари эса таъсир чизиклари ишораси бўйича олинади.

N_{12} зўриқишининг қийматини аниқлайлик. Ферма тугунларига қўйилган кўзғолмас кучларнинг қиймати $P = 12$ кН. Номатлум ординаталар (Y) нинг қиймати N_{12} зўриқишининг таъсир чизикларидан топилади. Бунинг учун учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланилади. Топилган ординаталарнинг қиймати шаклда кўрсатилган (4.12- расм, б).

Изланаётган зўриқишнинг қиймати

$$\begin{aligned} N_{12} &= P(-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5) = \\ &= -12(0,3 + 0,6 + 0,8 + 1,1 + 0,6) = -39,6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Бу қиймат аналитик усулда топилган қиймат билан бир хилдир. Қолган зўриқишларнинг қийматлари ҳам шу йўсинда аниқланади.



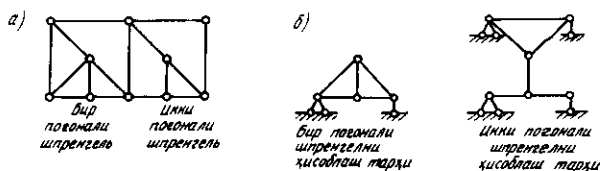
4.13-расм

4.4. ШПРЕНГЕЛЛИ ФЕРМАЛАР

Катта узунликка эга бўлган ферманинг тугунлари орасидаги масофа (панел) ҳам катта бўлади. Бунинг оқибатида тугунларга таянувчи кўндаланг балкалар устига қўйиладиган бўйлама балкаларнинг вазни ортиб кетади. Бу ҳол иқтисодий жиҳатдан самарасиздир. Панел узунлигини сақлаган ҳолда бўйлама балканинг узунлигини қискартириш учун асосий фермага (4.13-расм, а) қўшимча элементлар — шпренгеллар киритилади (4.13-расм, б). Натижада ҳосил бўлган ферма шпренгелли ферма деб аталади (4.13-расм, в).

Асосий ферма барча юкни ўзига қабул қилади, шпренгеллар эса фақат ўзига қўйилган юкни қабул қилади.

Шпренгеллар бир ва икки поғонали бўлиши мумкин (4.14-расм, а). Бир ва икки поғонали шпренгелларнинг ҳисоблаш тархлари 4.14-расм, б-да тасвирланган.



4.14-расм

Шпренгелли фермаларнинг элементлари тўрт туркумга бўлинади:

1) факат асосий фермага тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар асосий ферма ҳисобидан топилади; ферма таркибига шпренгелларнинг қўшилиши мазкур элементлардаги зўриқишларга таъсир этмайди;

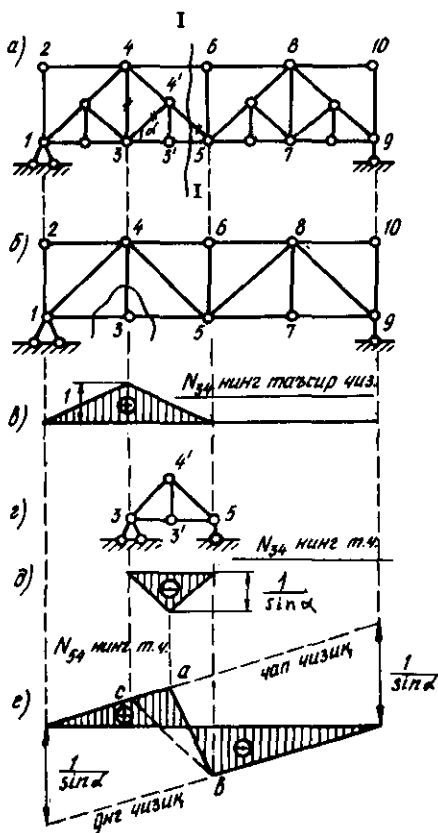
2) факат шпренгелларга, яъни қўшимча фермачаларга тегишли бўлган элементлар. Бу элементлардаги зўриқишлар шпренгелларнинг алоҳида ҳисобидан топилади;

3) бир вақтнинг ўзида ҳам асосий фермага, ҳам шпренгелга тегишли бўлган элементлар. Бундай элементдаги зўриқиш икки хил зўриқишнинг йиғиндиси сифатида аниқланади; булардан бири асосий ферма элементининг зўриқиши; иккинчиси эса шпренгелли элементнинг зўриқишидир;

4) асосий ферманиннг шундай элементларидирки, қўзғалувчан юкнинг ҳаракат сатҳига кўра, яъни юкнинг остки ёки устки тасмадан ҳаракатланишига қараб элементдаги зўриқишнинг таъсир чизиклари турлича бўлади.

1- мисол. 3—4, 3—4' ва 5—4' стерженлардаги зўриқишларнинг таъсир чизиклари қурилсин (4.15- расм).

Ишни 3—4 стерже-нидаги зўриқишнинг таъсир чизигини чизишдан бошлайлик. Авваламбор бу стержень биринчи туркумга кирадиган, яъни факат асосий фермага оид бўлган стержендир. Шунинг учун бу масалани ҳал



4.15- расм

етишда шпренгелларни олиб ташлаб, асосий ферманинг ўзини қолдирамиз (4.15- расм, б) ва ундан 3- тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаларини тузамиз, натижада 4.15- расм, в да тасвирланган таъсир чизигига эга бўламиз.

3—4¹ стержень иккинчи туркумга оид стержень эканлигини эътиборга олиб, шпренгелни асосий фермадан ажратиб оламиз ҳамда унга мустақил ферма сифатида ёндошамиз (4.15- расм, г).

Харакатланувчи бирлик куч $P=1$ 3¹ — тугунга қўйилган деб фараз этиб, 3- тугун учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum Y = \frac{1}{2} + N'_{34} \sin \alpha = 0; \text{ бундан } N'_{34} = -\frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Бирлик куч таянчларга қўйилса, 3—4¹ стерженидаги зўриқиш нолга тенг бўлади. Буларга асосан 3—4¹ стерженидаги зўриқиш учун 4.15- расм, д да тасвирланган таъсир чизигига эга бўламиз.

Учинчи туркумга оид бўлган 5—4¹ стерженидаги зўриқишни аниқлаш учун фермани 1—1 кесим бўйлаб қирқамиз ва унинг чап қисми учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

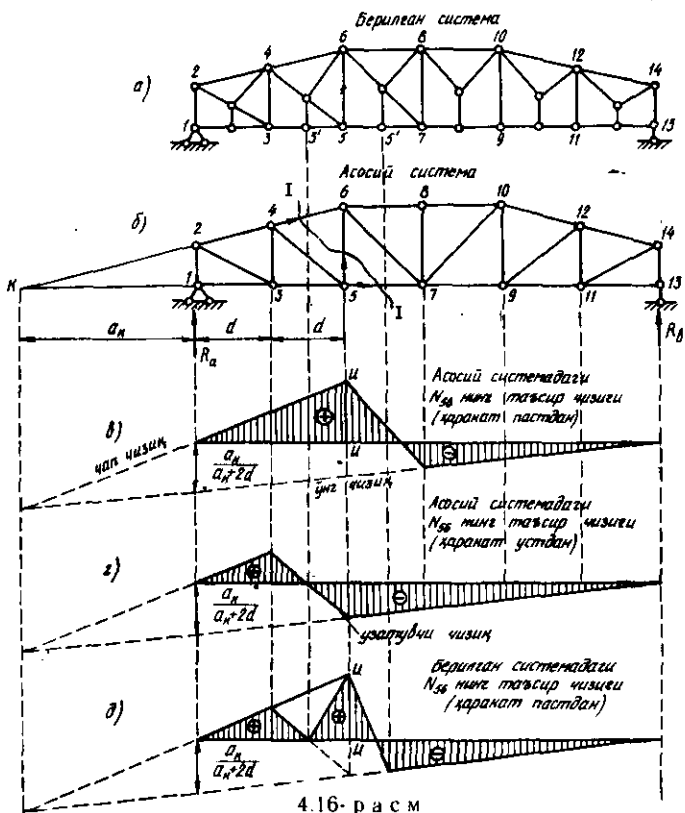
$$\sum Y = R_a + N'_{54} \sin \alpha = 0; \text{ бундан } N'_{54} = -\frac{R_a}{\sin \alpha}.$$

Бу кийматдан фойдаланиб, ўнг тўғри чизикни ўтказамиз (4.15- расм, е). N'_{34} нинг момент нуқтаси чексизликда бўлганлиги сабабли чап тўғри чизикни ўнг тўғри чизикка параллел қилиб ўтказамиз. Узатувчи чизик ab ни ўтказиш учун 5 ва 4¹ — тугунларини ўнг ва чап чизикларга проекциялаймиз. Агар шпренгел бўлмаганида, узатувчи чизик BC бўйича ўтар эди. Бу ерда abc учбурчак шпренгелнинг асосий элементга таъсирини ифодалайди.

2- мисол. Таркибида икки погонали шпренгеллар мавжуд бўлган ферманинг 5—6 устунни учун таъсир чизиклари қурилсин (4.16- расм, а).

Ферманинг бу устунни стерженларнинг тўртинчи туркумига қиради, яъни устун асосий фермага тегишли элемент бўлиб, унинг таъсир чизиклари бирлик куч қайси тасмадан ҳаракатланишига қараб турлича бўлади.

Берилган системадаги шпренгелларни ташлаб юбориш йўли билан асосий системани ҳосил қиламиз (4.16- расм, б). Асосий системанинг 5—6 стержени учун таъсир



4.16-расм

чизикларини чизамиз. Бунда юкнинг устки ва остки тасмалар бўйича ҳаракати кўриб чиқилади.

Фермани I—I кесим бўйлаб қирқамиз, бирлик куч кесимдан ўнг томонда ҳаракат қилади, деб фараз этиб, чап қисм учун K нуктага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_k = -R_a a_k - N_{56} \cdot (a_k + 2d) = 0,$$

бундан

$$N_{56} = - \frac{R_a \cdot a_k}{a_k + 2d}.$$

Бу қийматга асосан ўнг тўғри чизикни ўтказамиз. Момент нуктасидан фойдаланиб, чап тўғри чизик ўткази-

лади. Бирлик куч пастки тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун чап ва ўнг тўғри чизикларга 5 ва 7 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, в). Юк юкори тасмада ҳаракатланса, узатувчи чизикни ўтказиш учун 4 ва 6 тугунлар проекцияланади (4.16- расм, г).

Ҳар иккала таъсир чизигидан кўриниб турибдики, юк учинчи тугундан чапда ва еттинчи тугундан ўнгда ҳаракатланса, зўриқишнинг қиймати ҳаракат сатҳига боғлиқ бўлмайди.

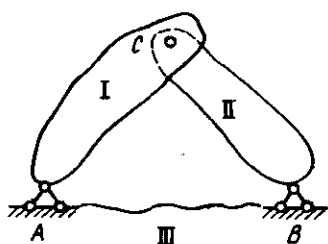
Юк $3'$ ва $5'$ тугунларга қўйилса (4.16- расм, а), унинг таъсири икки поғонали шпренгеллар орқали юкори тугунларга узатилади; гўёки ҳаракат устки тасма бўйлаб содир бўлгандек туюлади. Шу сабабга кўра, бундай ҳолда N_{56} нинг ординаталари 4.15- расм, г дан олинади. N_{56} нинг изланаётган таъсир чизигини қуриш учун аниқланган ординаталар етарли. Мазкур таъсир чизиги 4.16- расм, д да ўз аксини топган.

5- боб

УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАР ВА РАМАЛАР

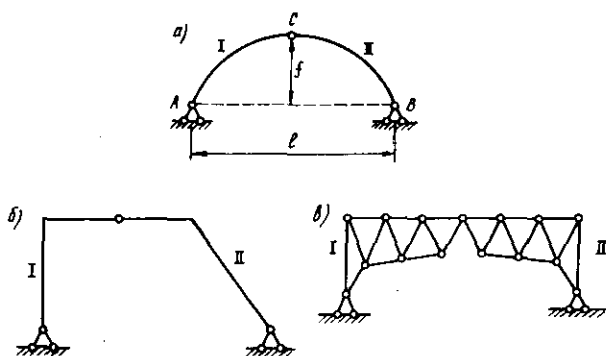
5.1. УЧ ШАРНИРЛИ СИСТЕМАЛАР

Уч дискни уч шарнир ёрдамида бириктириш туфайли ҳосил бўлган система уч шарнирли система деб аталади (5.1- расм). Бунда учинчи диск сифатида ер қабул қилинади. Уч диск бир ўк устида ётмаган уч шарнир (А, В, С) ёрдамида бирикса, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлиши бизга аввалдан маълум.



5.1- расм

Агар I ва II дисклар эгри чизикли стерженлардан иборат бўлса, бундай система уч шарнирли арка деб аталади (5.2- расм, а), агар I ва II диск синик тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган бўлса, уч шарнирли рама деб аталади (5.2- расм, б); агар I ва II диск ферма бўлса, у ҳолда система уч шарнирли аркасимон ферма деб аталади (5.2- расм, в).



5.2- расм

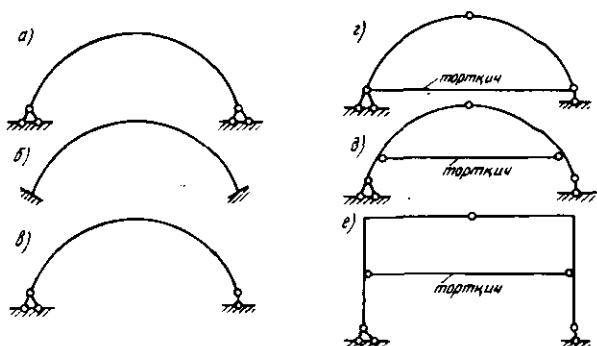
Уч шарнирли системалар вертикал ўққа нисбатан симметрик ёки носимметрик бўлиши мумкин. Симметрик системада С шарнири симметрия ўқи устида жойлашади, А ва В таянч шарнирлари бир сатҳда ётади. Носимметрик системаларда таянчлар турли сатҳда жойлашиши мумкин.

Уч шарнирли система таянчларида вужудга келадиган горизонтал босим ва унга қарши реакция керки (распор) номи билан юритилади; системанинг ўзи эса керкили система деб аталади. Аркалар керки кучининг мавжудлиги билан балкалардан фарқ қилади.

Аркининг гумбаздан фарқи шундаки, арканинг кўндаланг кесими анча кичик бўлади, шунинг учун ҳам у стерженли системалар гуруҳига киради. Гумбаз эса қобиклар гуруҳига қўшилади. Қурилишда уч шарнирли, икки шарнирли (5.3- расм, а) ва шарнирсиз (5.3- расм, б) аркалар қўлланилади. Аркаларда керки кучининг мавжудлиги сабабли уларнинг таянчлари шарнирли ёки шарнирсиз қўзғалмас таянч кўринишида ишланади. Таянчлардан бири шарнирли қўзғалувчан бўлса, у арка эмас, эгри ўқли балка деб аталади (5.3- расм, в). Бинокорликда баъзан уч шарнирли аркаларнинг бошқача хили — торткичли аркалар ҳам учраб туради (5.3- расм, г).

Торткичлар шароитга қараб таянчлардан юқорирок ўрнатилиши ҳам мумкин (5.3- расм, д). Қурилишда торткичли рамалар ҳам кенг тарқалган (5.3- расм, е). Амалда аркаларнинг қайси туридан фойдаланиш иншоотнинг конкрет иш шароитига қараб ҳал этилади.

Уч шарнирли ҳамда торткичли аркалар ва рамалар



5.3-расм

статик аник, икки шарнирли ва шарнирсиз аркалар статик ноаниқ системаларга киради. Бу бобда статик аник аркалар ва рамалар кўриб ўтилади. Статик ноаниқ аркалар билан 8- бобда танишамиз.

Аркаларнинг асосий белгилари уларнинг оралик узунлиги l ва арка баландлиги f дир. Ўртадаги C шарнири кулф-калит деб аталади.

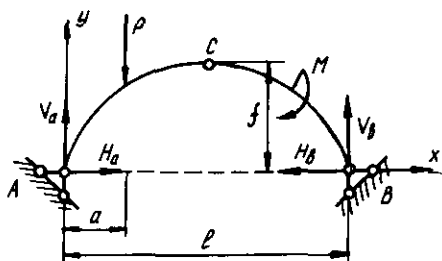
Шарнирсиз аркалар Ўрта Осиё бинокорлигида қадим замонлардан буён қўлланилиб келинади. Масжид, мадрасалар, ҳашаматли сарой ва макбаралар, ҳаммом, сардоба ва кўприкларда равок ва гумбаз кўринишида арка элементларини кўплаб учратамиз. 1502 йили Шайбонийхон томонидан Зарафшон дарёсига қурилган сув айирғич кўпригининг айрим равоклари ҳозирга қадар сақланиб қолган.

5.2. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИНГ ТАЯНЧ РЕАКЦИЯЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Ихтиёрий кучлар қўйилган уч шарнирли арканинг (5.4- расм) таянч реакцияларини аниқлаш талаб этилади.

Маълумки, уч шарнирли аркалар статик аник бўлади. Шу боисдан уларнинг таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя этади. Уч шарнирли аркаларда ташқи кучлар таъсирида иккита горизонтал (H_a , H_b) ва иккита вертикал (V_a , V_b) реакция кучлари вужудга келади. Бу номаълум таянч реакциялари қуйидаги тенгламалардан аниқланиши мумкин:

$$\sum M_A = 0; \sum M_b = 0; \sum M_c^{(чан)} = 0; \sum X = 0.$$



5.4- р а с м

В таянчидаги вертикал реакция кучи V_b ни аниқлаш учун А шарнирига нисбатан моментлар йиғиндисини тузамиз.

$$\Sigma M_a = P \cdot a + M - V_b l = 0.$$

Бундан

$$V_b = \frac{P_1 a + M}{l}.$$

Мазкур формуланинг сурати А нуқтасига нисбатан барча ташки кучлар моментлари йиғиндисини $\Sigma M_A^{\text{таш}}$ ни ифодалайди. Шунга кўра юқоридаги формулани қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$V_b = \frac{\Sigma M_A^{\text{таш}}}{l}.$$

А таянчидаги реакциянинг вертикал ташкил этувчисини ҳам шу йўсинда топа оламиз:

$$V_a = \frac{\Sigma M_b^{\text{таш}}}{l}.$$

Горизонтал реакция кучи H_b ни аниқлаш учун С шарнирига нисбатан ўнг томонда ётган кучлардан момент оламиз:

$$\Sigma M_c^{\text{ўнг}} = M - V_b \frac{l}{2} + H_b f = 0,$$

бундан

$$H_b = \frac{V_b \frac{l}{2} - M}{f} \quad \text{ёки} \quad H_b = \frac{\Sigma M_c^{(0) \text{ (ўнг)}}}{f}.$$

Бу ерда ноль индекси узунлиги ва юкланиши арка билан бир хил бўлган оддий балкадаги момент эканлигини билдиради.

А таянчидаги горизонтал реакция куч H_a икки тенгламанинг биридан, яъни $\sum M_c^{\text{чан}} = 0$ ёки $\sum x = 0$ тенгламаларидан аниқланиши мумкин. Проекция тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\sum x = H_a - H_b = 0; \text{ бундан } H_a = H_b = H.$$

Охирги ифода шуни кўрсатадики, агар аркага вертикал кучлар қўйилган бўлса, горизонтал реакциялар ўзаро тенг бўлар экан.

Уч шарнирли аркалар учун баён этилган қоидалар тўлалигича уч шарнирли рамалар учун ҳам тааллуқлидир.

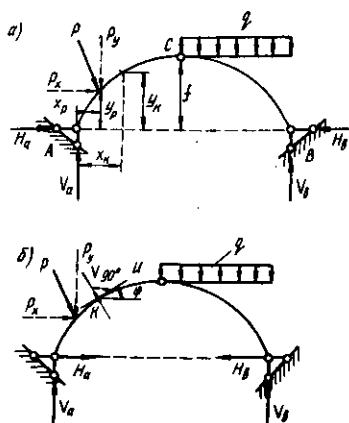
5.3. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ АНАЛИТИК УСУЛДА ҲИСОБЛАШ

Ҳисоблашдан мақсад бу ерда ҳам бошқа конструкциялардаги сингари ички кучларни аниқлашдан иборатдир. Ички кучлар деганда, арканинг қўндаланг кесимларида ташки кучлар таъсирида ҳосил бўладиган эгувчи момент M , қўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

Ички кучларни аниқлашда ишора қоидаси балкадаги қоидага ўхшашдир, яъни куч арканинг эгрилигини оширса — ишора манфий, эгрилигини камайтирса — мусбат, кесимга нисбатан куч

соат стрелкаси бўйича айлansa — мусбат, тескари йўналишда — манфий олинади. Бўйлама кучлар ишораси бошқача: куч стерженьни сикса — мусбат, чўзса — манфий олинади.

Уч шарнирли арканинг ихтиёрий K кесимида вужудга келадиган эгувчи момент M_k ни аниқлаймиз (5.5-расм, а). Бунинг учун аркани шу кесим бўйича хаёлан қирқамиз ва кесимнинг чап ёки ўнг томони учун моментлар йиғиндисини ёзамиз:



5.5-расм

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - P_y (x_k - x_p) - P_x (y_k - y_p), \quad (5.1)$$

Бу ерда x_k ва y_k — арканинг K кесими координаталари;
 P_x ва P_y — ташки куч P нинг горизонтал ва
 вертикал проекциялари;
 x_p ва y_p — куч қўйилган нуктанинг координаталари.

Агар аркага қўйилган куч оғма эмас, тик бўлса, у ҳолда P кучининг горизонтал проекцияси ноль, $P_y = P$ ва $H_a = H_b = H$ бўлади.

(5.1) ифода эса қуйидаги кўринишни олади:

$$M_k = V_a x_k - P (x_k - x_p) - H y_k \quad (5.2)$$

Бу формуладаги $V_a x_k - P (x_k - x_p)$ ифода, узунлиги ва юкланиши жиҳатидан шу арка билан бир хил бўлган оддий балканинг эгувчи моменти M_k^0 ни англатади. Буни эътиборга олсак, (5.2) формула қуйидаги содда кўринишга келади:

$$M_k = M_k^0 - H y_k. \quad (5.3)$$

Қўндаланг ва бўйлама кучларни аниқлаш учун арканинг K кесимида уринма (u) ва шу уринмага тик бўлган чизик (v) ўтказамиз (5.5-расм, б). Қўндаланг кучларни аниқлаш учун v ўқида, бўйлама кучларни аниқлаш учун u ўқида нисбатан кучлар проекцияларининг йиғиндисини оламиз:

$$\begin{aligned} Q_k &= V_a \cos \varphi - H_a \sin \varphi - P_y \cos \varphi - P_x \sin \varphi; \\ N_k &= V_a \sin \varphi + H_a \cos \varphi - P_y \sin \varphi + P_x \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Бу ерда φ — уринма билан горизонтал чизик орасидаги бурчак. Агар аркага қўйилган кучлар тик бўлса, у ҳолда (5.4) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} Q_k &= (V_a - P) \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k &= (V_a - P) \sin \varphi + H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Бу ерда $|V_a - P|$ аркага тенг кучли бўлган оддий балкадаги қўндаланг куч Q_k^0 дир. Буни эътиборга олсак, (5.5) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N_k &= Q_k^0 \sin \varphi + H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.3) ва (5.6) формулалардан фойдаланиб, арканинг бир қанча кесимлари учун эгувчи момент, қўндаланг ва

бўйлама кучлар аниқланади ҳамда M , Q ва N эпюралар курилади.

Арка моменти балка моментларидан кичик бўлиши (5.3) формуладан яққол кўриниб турибди.

5.4. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАНИНГ МАҚБУЛ ЎҚИ

Агар аркага вертикал йўналишда текис ёйик куч қўйилган бўлса, арканинг ўқини шундай олиш мумкинки, бунда арканинг барча кесимларида эгувчи момент нолга тенг бўлади. Эгувчи моментлари нолга тенг бўлган арка ўқи мақбул (рационал) ўқ деб аталади. Арканинг ўзи эса мақбул ўқли арка деб юритилади (5.6- расм).

Арканинг мақбул ўқи тенгламасини тузиш учун (5.3) формуладан фойдаланамиз. Ушбу формуладаги арка моментини нолга тенглаймиз:

$$M_x^0 - Hy = 0. \quad (a)$$

Шаклдан

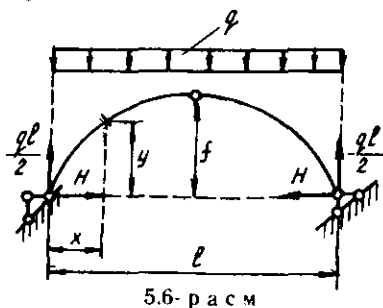
$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l-x).$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{ql}{2} \left(l - \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}. \quad (б)$$

Ифода (a) дан

$$y = M_x^0 / H \quad (в)$$

келиб чиқади. (б) да аниқланган кийматларни (в) га қўямиз:



$$\begin{aligned} y &= \frac{(qx/2)(l-x) \cdot 8f}{ql^2} = \\ &= \frac{4f}{l^2} \cdot (l-x)x. \end{aligned}$$

Шу тенглама ёрдамида чизилган парабола арканинг мақбул ўқи бўлади, мақбул ўқли аркада эгувчи момент нолга тенгдир.

5.5. УЧ. ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ ҚЎЗҒАЛУВЧИ ЮК ТАЪСИРИГА ҲИСОБЛАШ

Балка ва фермалар ҳисобида кўриб ўтганимиздек, иншоотларни қўзғалувчи юклар таъсирига ҳисоблаш учун таъсир чизиклари деб аталувчи график чизиб олинади. Таъсир чизиклари ҳар бир таянч реакцияси ва ҳар бир ички куч (M , Q , N) учун алоҳида равишда қурилади.

Таянч реакцияларининг таъсир чизиклари

Чап ва ўнг таянч шарнирларига нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз (5.7- расм, а):

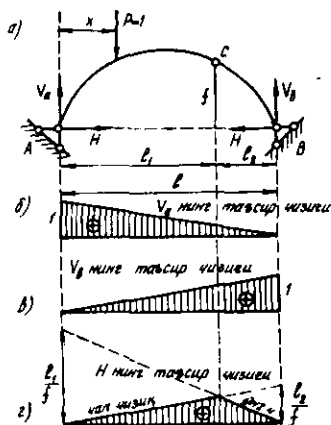
$$\sum M_b = V_a \cdot l - P(l - x) = 0;$$

$$\sum M_a = -V_b l + P \cdot x = 0.$$

Бу тенгламалардан V_a ва V_b топилади.

Топилган ифодалар балка таянч реакцияларининг ифодасидан фарк қилмайди. Демак, арка реакцияларининг таъсир чизиклари ҳам балканинг таъсир чизикларидан фарк қилмаслиги керак (5.7- расм, б, в).

Маълумки, керки кучи $H = M_c^0/f$ тенгламаси ёрдамида аниқланади. Бундан H нинг таъсир чизиги балка моменти M_c^0 нинг таъсир чизигидан $1/f$ маротаба кичик эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун H нинг таъсир чизигини қуришда A таянчи остига l_1 нинг ўрнига l_1/f ни ўлчаб қўямиз. Бу микдорни B таянч остидаги ноль билан туташтирсак, ўнг тўғри чизик келиб чиқади. Чап тўғри чизикни ўтказиш учун C шарнирни ўнг тўғри чизикка проекциялаймиз, топилган нуқтани A таянчи остидаги ноль билан туташтирамиз. Штрихланган юза керки кучи — горизонтал реакция H нинг таъсир чизигидир (5.7- расм, г). Агар $l_1 = l_2 = l/2$ бўлса, C шарнири остидаги ордината $l/4f$ бўлади.

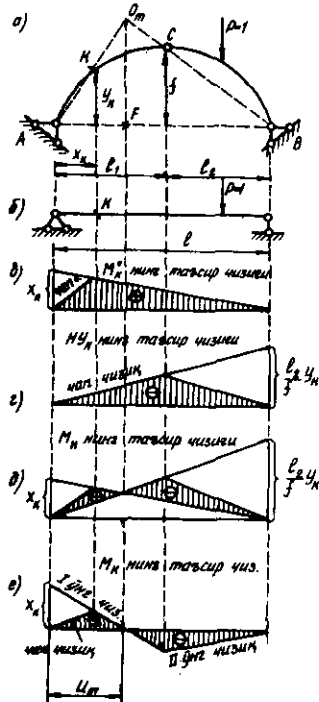


5.7 расм

Эгувчи момент M нинг таъсир чизиғи

Аркининг исталган кесимидаги эгувчи момент $M_k = M_k^0 - Hy_k$ формуласи ёрдамида аниқланишини юқорида кўриб ўтдик. Аркининг ихтиёрий K кесимидаги эгувчи момент M_k нинг таъсир чизиғини қуришда ҳам шу формуладан фойдаланамиз (5.8- расм, а).

Формулага караганда, аркининг таъсир чизиғи оддий балканинг (5.8- расм, б) K кесимидаги эгувчи момент M_k^0 нинг таъсир чизиғи билан y_k марта катталаштирилган керки кучи H нинг таъсир чизиқлари орасидаги фаркка тенг бўлади. M_k^0 ва $H y_k$ нинг таъсир чизиқлари 5.8- расм, в, г — да тасвирланган. Ҳар иккала шаклни устма-уст жойлаштириш йўли билан изланаётган таъсир чизиғини ҳосил қиламиз (5.8- расм, д). Ҳосил бўлган таъсир чизиғини тўғри ўққа жойлаштира ҳам бўлади (5.8- расм, е).



5.8- расм

5.8- расм, г — да тасвирланган M_k нинг таъсир чизиғида M_k нинг ўнг чизиғи билан $H y_k$ нинг чап чизиғи ноль нуктасида кесишади. Ушбу нуктанинг ҳолатини график усулда аниқласа бўлади. Бунинг учун BC ва AK чизиқларининг кесишув нуктаси O_m ни аниқлаймиз (5.8- расм, а). Таъсир чизиғининг 0 нуктаси ана шу нукта остида ётади.

M_k нинг таъсир чизиғини бевосита ноль нуктаси орқали курса ҳам бўлади. Бунинг учун ихтиёрий ўққа X_k масофаси ўлчаб қўйилади (5.8- расм, е). O_m нуктасини ўққа проекциялаб, ноль (0) нуктаси аниқланади. X_k нинг учи 0 билан бирлаштирилади ва C шарнирининг проекцияси билан учрашгунча давом эттирилади. Ўтказилган чизиқ I ўнг чизиқ деб аталади. II ўнг чизиқ шаклда

тилгандек ўтказилади. Чап чизик одатдагидек ўтказилади, яъни K кесимининг проекцияси билан A таянчи остидаги ноль нукта бирлаштирилади. Штрихланган юза M_k нинг таъсир чизиғи бўлади.

Ноль нуктасининг абсциссаси u_m AFO_m ва BFO_m учбурчакларидан топилади: $FO_m = \frac{y_k}{x_k} u_m = \frac{l}{l_2} (l - u)$;

$$\text{бундан } u_m = \frac{lx_k}{y_k l_2 + lx_k}$$

келиб чиқади.

Кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғи

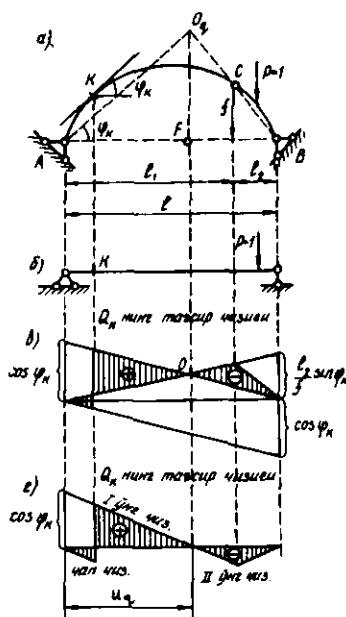
Уч шарнирли арканинг K кесимидаги кўндаланг куч Q_k нинг таъсир чизиғини куришда қуйидаги формуладан фойдаланамиз (5.9- расм, а):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k;$$

бу ерда Q_k^0 оддий балканинг K кесимидаги кўндаланг куч (5.9- расм, б); φ_k — K кесимига ўтказилган уринма билан горизонтал ўк орасидаги бурчак.

Арка бўйлаб бирлик куч ҳаракат қилганда, Q_k^0 билан H ўзгариб боради, $\cos \varphi_k$ билан $\sin \varphi_k$ эса ўзгаришсиз қолади. Бунга кўра Q_k нинг таъсир чизиғи $Q_k^0 \cos \varphi_k$ билан $H \sin \varphi_k$ нинг таъсир чизиклари алгебраик йигиндиси сифатида курса бўлади. Ана шу йигинди 5.9- расм, в-да тасвирланган, яъни икки хил таъсир чизиғи устма-уст жойлаштирилган. Микдорлари тенг, ишораси қарама-қарши бўлган ординаталар қисқариб кетган, қолганлари штрихланган. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиғидир.

Агар ҳосил бўлган шаклни горизонтал ўк устига



5.9- расм

жойлаштирсак, Q_k нинг таъсир чизиги 5.9- расм, ϵ да тасвирланган кўринишни олади.

Мазкур таъсир чизигини ноль нуктаси усулида, яъни график усулда курса ҳам бўлади. Бунинг учун аввал ноль нуктанинг ҳолати аниқлаб олинади, изланаётган нукта (O_q) икки чизикнинг кесишув нуктаси тарикасида топилади. Улардан бири BC чизиги, иккинчиси K кесимидан ўтган уринмага A шарниридан ўтказилган параллел чизикдир (5.9- расм, a). Шу нуктанинг горизонтал ўққа проекцияси (O) ноль нукта ҳисобланади.

Ихтиёрий горизонтал ўққа $\cos\varphi_k$ масофани ўлчаб кўямиз (5.9- расм, z). Масофанинг учини ноль нукта билан туташтирамиз ва уни C шарнири проекцияси билан учрашгунча давом эттирамиз. Ўтказилган кесма I ўнг чизик бўлади. II ўнг чизик шаклда кўрсатилгандек ўтказилади. Чап чизик I ўнг чизикқа параллел равишда ўтказилиб K кесимининг проекциясига қадар давом этади. Штрихланган юза Q_k нинг таъсир чизиги ҳисобланади.

Ноль нуктанинг абсциссаси AFO_q ва BFO_q учбурчаклари орқали $U_q = \frac{fl}{f + l_2 \operatorname{tg}\varphi_k}$ формуладан топилади.

Бўйлама куч N нинг таъсир чизиги

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги бўйлама куч N_k нинг таъсир чизигини қуришда $N_k = Q_k \sin\varphi_k + H \cos\varphi_k$ формуласидан фойдаланамиз (5.10- расм, a).

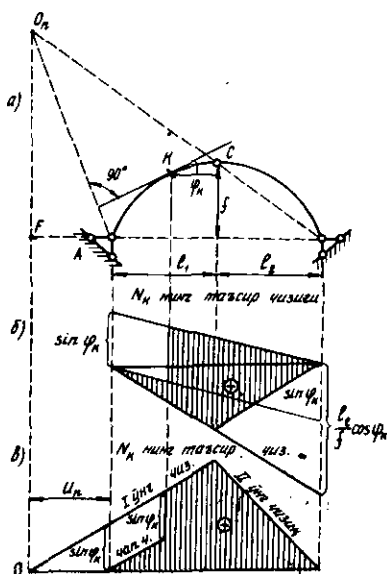
Формулага қараганда N_k нинг таъсир чизигини $Q_k^0 \sin\varphi_k$ билан $H \cos\varphi_k$ таъсир чизикларининг йиғиндиси сифатида курса бўлади. Бу ишни амалга ошириш учун аввал $Q_k^0 \sin\varphi_k$ нинг таъсир чизигини қурамиз. Сўнгра бунинг устига $H \cos\varphi_k$ нинг таъсир чизигини тескари равишда жойлаймиз (5.10- расм, b). Штрихланган юза N_k нинг таъсир чизиги бўлади.

Илгари кўриб ўтганимиздек, N_k нинг таъсир чизигини ҳам ноль нуктаси усулида қуриш мумкин. Бунинг учун аввал O_n нуктаси топиб олинади (5.10- расм, a). Бу нукта ҳам иккита чизикнинг кесишув нуктасида ётади: чизиклардан бири BC кесмаси, иккинчиси эса K кесимидан ўтказилган уринмага тик бўлган AO_n чизигидир. Топилган O_n нуктасини горизонтал ўққа проекциялаб, ноль (O) нуктасини аниқлаймиз (5.10- расм, b). А таянч остига $\sin\varphi_k$

кесма сини ўлчаб қўямиз. Кесманинг юкори учини ноль нукта билан бирлаштириб, C шарнирининг проекциясигача давом эттирамиз. Бу I ўнг чизик бўлади. Чап тўғри чизик I ўнг чизикка параллел равишда ўтказилади. Штрихланган юза N_k нинг таъсири чизигидир.

Ноль нуктасининг абсциссаси AFO_n ва BFO_n учбурчаклари орқали куйидаги формуладан топилади:

$$l_{o_n} = \frac{fl}{l_2 \operatorname{tg} \varphi_k - f}$$

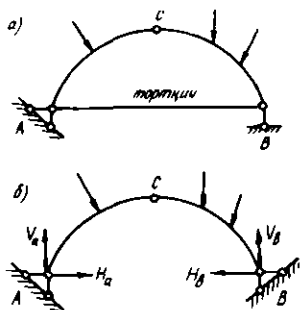


5.10-расм

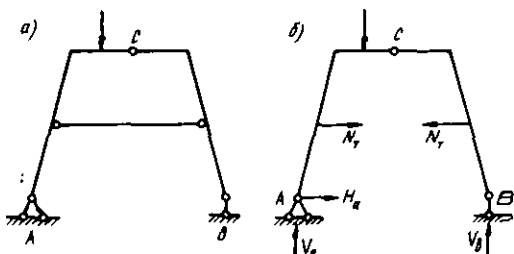
5.6. УЧ ШАРНИРЛИ ТОРТКИЧЛИ АРКА ВА РАМАЛАРНИ ХИСОБЛАШ. ЯДРО МОМЕНТЛАРИ

Уч шарнирли торткичли арка ва рамаларнинг ҳисоби торткичсиз системалар ҳисобидан биров фарқ қилади. Бу тафовутни 5.11-расм, а — да тасвирланган арка мисолида кўриб ўтамиз.

Арканинг B таянчи шарнирли қўзғалувчидир. Ўртадаги C шарнирнинг мавжудлигини инобатга олсак, бу системага торткичнинг зарурийлиги ўз ўзида аён бўлади. Чунки бу системанинг геометрик ўзгармаслигини айнан шу торткич таъминлайди. Бошқача қилиб айтганда, B таянчи горизонтал қўзғалишда торткич туфайли қўзғалмасдир. Демак, торткичнинг B таянчининг горизонтал стержени сифатида



5.11-расм



5.12-расм

талкин этса ҳам бўлади. Бу эса ҳисоб жараёнида торткичсиз арка (5.11-расм, б) учун берилган формулардан бемалол фойдаланиш имконини беради. Торткичдаги зўриқиш горизонтал таянч реакцияси H_b га тенг бўлганлиги сабабли торткичли арка кўндаланг қесимларидаги зўриқишлар торткичсиз арка кўндаланг қесимларидаги зўриқишларга тенг бўлади. Шунингдек, торткичли ва торткичсиз аркаларнинг таъсир чизикларида ҳам ҳеч қандай тафовут бўлмайди.

Баъзан уч шарнирли арка ва рамаларда торткич таянчдан юқорирокка ўрнатилади (5.12-расм, а). Торткични ташлаб юбориб, ўрнига қарама-қарши йўналган кучлар N_r қўямиз (5.12-расм, б). Кучларнинг қиймати торткичдаги зўриқишга тенг бўлади. Бу ерда асосий масала ана шу зўриқишни аниқлашдан иборатдир. Раманинг таянч реакциялари статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилади.

N_r нинг қиймати C шарнирига нисбатан чап ёки ўнг томонда жойлашган кучларнинг моментлари йиғиндисини фойдаловчи тенгламалар $\sum_{\text{чап}} M_c = 0$ ёки $\sum_{\text{ўнг}} M_c = 0$ дан топилади.

N_r аниқлангач, арка ёки раманинг исталган қесимидаги ички кучлар торткичсиз система учун берилган формулардан фойдаланиб топилади.

Ядро моментлари ва нормал кучланишлар p . Материаллар қаршилиги фанидан маълумки, номарказий сиклишда қесимнинг четки нукталарида ҳосил бўладиган энг катта ва энг кичик нормал кучланишлар қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{W}.$$

Бу ерда F — элементнинг кўндаланг кесим юзаси; W — кўндаланг кесимнинг қаршилиқ моменти; N ва M — кесимга таъсир этувчи бўйлама куч ва эгувчи момент.

Арқа кесимининг четки нукталаридаги номаълум кучланишларни аниқлашга ядро моментларидан фойдалансак, масала анча оsonлашади.

Арқа кесимининг энг четки нукталари 1 ва 2 да ҳосил бўладиган нормал кучланишларни аниқлайлик (5.13- расм, а). Арқанинг чап қисмини ўнг қисмига бўлган таъсирини m нуктага қўйилган тенг таъсир этувчи R орқали белгилайлик. Тенг таъсир этувчи куч R ни бўйлама N ва кўндаланг Q ташкил этувчиларга ажратамиз.

1- нуктадаги нормал кучланишни кесим ядроси орқали аниқлаймиз (5.13- расм, б). Маълумки, бўйлама сиқувчи куч — ядронинг ҳошиясига қўйилса, кесим қирғокларида нормал кучланиш нолга тенг бўлади. Бинобарин, бўйлама куч кесим ядросининг K_1 нуктасига қўйилса, 1- нуктадаги нормал кучланиш ноль бўлади.

Кесим ядросининг K_1 нуктасига ўзаро тенг, аммо қарама-қарши йўналган N кучини қўямиз. Бу учлардан бири m нуктасига қўйилган N кучи билан жуфт куч, яъни момент ҳосил қилади:

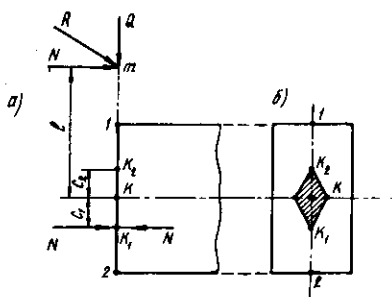
$$M_{k_1} = N(l + C_1)$$

иккинчиси эса 1 — нуктада нолга тенг бўлган кучланиш ҳосил қилади. Натижада 1- нуктадаги кучланиш σ факат эгувчи момент M_{k_1} орқали ифодаланади: $\sigma_1 = \frac{M_{k_1}}{W}$; бу ердаги M_{k_1} — ядро моменти деб аталади.

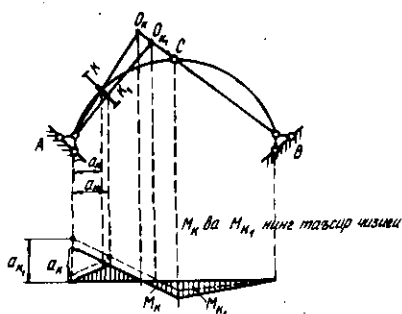
2- нуктадаги кучланишни ҳам ядро моменти орқали топса бўлади:

$$\sigma_2 = -\frac{M_{k_2}}{W}, \text{ бу ерда } M_{k_2} = N(l - C_2)$$

5.14- расмда K кесимидаги эгувчи моменти M_k ва ядро моменти M_{k_1} нинг таъсир чизиклари берилган. Ҳар иккала



5.13- расм



5.14-расм

таъсир чизиги ноль нуктаси усулида қурилган. Графикни яшаш тартиби ҳар иккала момент учун бир хил. Асосий фарк O_k нуктасини аниқлашда намоён бўлади. Агар O_k нуктасини топишда AK нукталари бирлаштирилса, O_k нуктасини топишда AK_1 нукталари туташтирилади. Шунинг эвазига ноль нукталар орасида озгина фарк бўлади. Бу фарк ўз навбатида таъсир чизиклари ординаталари орасидаги тафовутга олиб келади.

5.7. УЧ ШАРНИРЛИ АРКАСИМОН ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Аркасимон фермалар тузилиш жиҳатидан фермаларни, ишлаш жараёни жиҳатидан аркаларни эслатади. Шунинг учун ҳам уларни ҳисоблашда баъзан аркага, баъзан фермага ҳос бўлган қоидалардан фойдаланилади. Мухими шундаки, уч шарнирли аркасимон фермалар керкили (распорли) системаларга киради, яъни буларда ҳам вертикал кучлар таъсирида горизонтал реакция кучлари пайдо бўлади (5.15-расм, а). Керки кучларини шарнирли қўзғолмас таянчлар қабул қилади. Аркасимон ферманинг икки диски қулф-калит шарнири C воситасида бириктирилади. Расмдан кўриниб турибдики, дисклар яхлит эмас панжародор қилиб ферма шаклида ишланган.

5.15-расм, а — да берилган уч шарнирли аркасимон ферманинг ҳисоби билан танишиб чиқамиз.

Берилган системанинг вертикал ва горизонтал реакциялари яхлит арканинг реакциялари каби аниқланади. Масалан, чап таянчдан x масофада бирлик куч $P=1$ қўйилган бўлса, V_a ва V_b реакциялари қуйидагича топилади:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

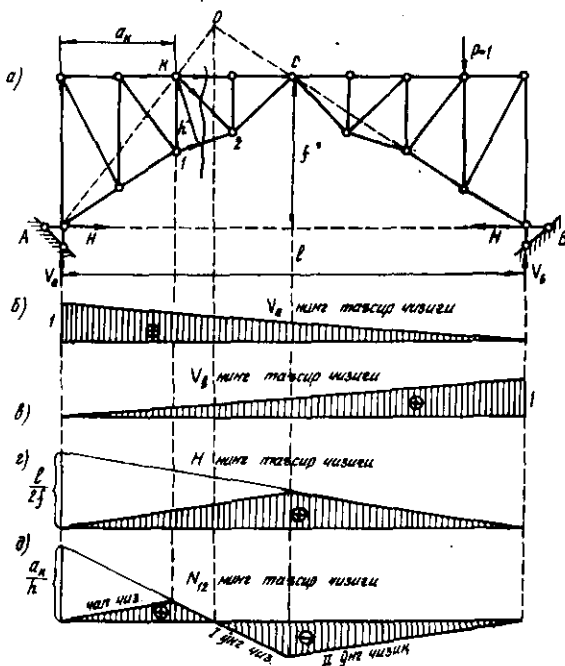
Керки кучи H куйидаги тенгламадан аниқланади:

$$H = \frac{M_c^0}{f};$$

бу ерда M_c^0 — аркага тенг узунликка эга бўлган оддий балканинг C кесимидаги момент.

V_a , V_b ва H нинг таъсир чизиклари 5.15- расм, б, в, г — да тасвирланган.

Уч шарнирли аркасимон ферманинг 1—2 стерженидаги зўриқишнинг таъсир чизигини курамиз (5.15- расм, а). Фермани 1—1 кесими бўйлаб қирқамиз. Зўриқиши изланаётган стержень (1—2) учун K нукта момент нуктаси ҳисобланади. $N_{1,2}$ ни аниқлаш учун K нуктага нисбатан чап томонда ётган қучлардан моментлар йиғиндисини



5.15- расм

ёзамиз (бунда бирлик куч кесимдан ўнгда деб фараз этамиз):

$$\Sigma M_k = V_a a_k - H y_k - N_{12} h = 0;$$

бу ердан

$$N_{12} = \frac{V_a a_k - H y_k}{h}.$$

Агар момент нуқтаси K ни арканинг K кесими деб фараз этсак ҳамда a_k ва y_k ларни шу кесимнинг координаталари деб олсак, касрнинг сурати аркавий момент M_k^{ap} бўлади. У ҳолда зўриқиш

$$N_{12} = \frac{M_k^{ap}}{h}$$

ифодаси билан аниқланади.

Демак, ферма стерженидаги зўриқиш N_{12} нинг таъсир чизиғини аркавий момент M_k^{ap} орқали курса бўлади. Бунинг учун арка моменти таъсир чизикларини h га қискартирилса кифоя.

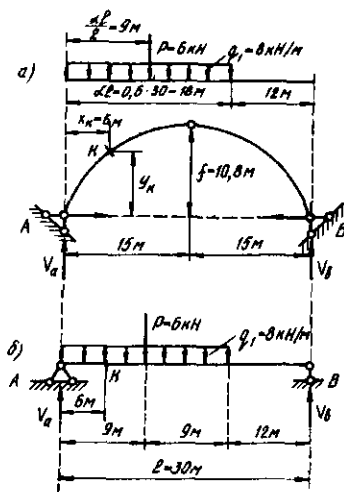
Арканинг K кесими учун моментнинг таъсир чизиғини қуришда A таянчи остига a_k масофани ўлчаб қўйилар эди. Бу сафар шу масофани h маротаба кичрайтириб қўямиз (5.15- расм, δ). Қолган ишлар уч шарнирли аркадаги ишлар билан айнан бир хилдир.

Мисол. Уч шарнирли арканинг K кесимидаги эгувчи момент, кўндаланг ва бўйлама кучлар аналитик усулда ҳисоблансин. Айни шу микдорлар таъсир чизиклари орқали ҳам аниқлансин. Арка ўқи парабола бўлиб, куч ва ўлчамлар шаклда берилган (5.16- расм, a).

Ечиш. Ҳисобни таянч реакцияларини аниқлашдан бошлаймиз:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= -V_B \cdot 30 + \\ &+ q_1 \cdot 18 \cdot 9 + P \cdot 9 = 0; \end{aligned}$$

бундан $V_B = 45$ кН;



5.16- расм

$$\Sigma M_B = V_A \cdot 30 - P \cdot 21 - q_1 \cdot 18 \cdot 21 = 0;$$

бундан $V_A = 105$ кН;

$$\Sigma M_c^{\text{чан}} = V_A \cdot 15 - P \cdot 6 - q_1 \cdot 15 \cdot 7,5 - H_A f = 0$$

бундан $H_A = 59,167$ кН.

Кучлар вертикал бўлганлиги учун $H_A = H_B = H = 59,167$ кН.

Текшириш. $\Sigma y = V_A - P - q_1 \cdot 18 + V_B = 105 - 6 - 8 \cdot 18 + 45 = 0.$

Аналитик усулда K кесимидаги ички кучлар (M_k , Q_k , N_k) ни аниқлаймиз. Эгувчи момент куйидаги формуладан (5.3) топилади:

$$M_k = M_k^0 - H y_k.$$

Арканинг ўқи парабола бўлганлиги учун y_k ординатаси куйидаги тенгламадан топилади:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x_k(l - x_k) = \frac{4 \cdot 10,8}{30^2} \cdot 6(30 - 6) = 6,912 \text{ м}.$$

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги момент

$$M_k^0 = V_A \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 = 105 \cdot 6 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 486 \text{ кНм}.$$

Уч шарнирли арканинг K кесимидаги момент

$$M_k = 486 - 59,167 \cdot 6,912 = 77,04 \text{ кНм}.$$

Кўндаланг кучни аниқлаш формуласи (5.6):

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k.$$

Арка ўқининг тенгламасидан фойдаланиб, φ_k бурчакни аниқлаймиз (5.16- расм, а):

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{dy_k}{dx_k} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 10,8}{30^2} (30 - 2 \cdot 6) = 0,864,$$

бундан $\varphi_k = 40^\circ 50'$; $\sin \varphi_k = 0,6538$; $\cos \varphi_k = 0,7566$.

Оддий балканинг (5.16- расм, б) K кесимидаги кўндаланг куч

$$Q_k^0 = V_A - q_1 \cdot 6 = 105 - 8 \cdot 6 = 57 \text{ кН}$$

Арканинг K кесимидаги кўндаланг куч:

$$Q_k = 57 \cdot 0,7566 - 59,167 \cdot 0,6538 = 4,443 \text{ кН}.$$

Аркининг K кесимидаги бўйлама кучни аниқлаймиз (5.6):

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k = 57 \cdot 0,6538 + 59,167 \cdot 0,7566 = 82,033 \text{ кН.}$$

Шундай қилиб, уч шарнирли арканинг K кесимидаги ички кучларни аналитик усулда аниқладик. Энди шу микдорларни таъсир чизиклари ёрдамида аниқлаймиз.

M_k нинг таъсир чизикларини қуриш

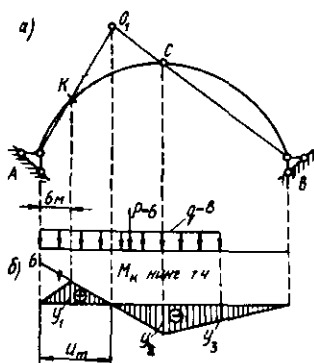
Таъсир чизигини ноль нуктаси усулида қурамиз. Бунинг учун A таянч билан K кесим тўғри чизик ёрдамида туташтирилади. B таянч C шарнир билан туташтирилади. Икки тўғри чизикнинг кесишиш нуктаси (O_1) эгувчи моментнинг ноль нуктаси бўлади, чунки $P=1$ куч шу нуктада бўлганда K кесимдаги эгувчи момент нолга тенг бўлади (5.17- расм, а).

Координата ўқининг A таянч остидаги нуктасидан K кесимигача бўлган масофа (6м) ни ўқдан юқорига масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани координата ўқидаги O_1 нуктанинг проекцияси билан туташтириб, C шарнир проекциясигача давом эттирамиз. Бу тўғри чизикқа K кесимининг проекциясини туширамиз ва уни A таянч остидаги координата ўқининг ноль нуктаси билан туташтирамиз. C шарнир остидаги ординатани B таянч остидаги координата ўқининг ноль нуктаси билан туташтирилади. Ҳосил бўлан график M_k нинг таъсир чизиги деб аталади (5.17- расм, б).

A таянчдан O_1 нуктагача бўлган масофани u_m билан белгилаб, уни қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{2fl}{1 \cdot \frac{y_c}{x_k} + 2f} = \\ &= \frac{2 \cdot 10,8 \cdot 30}{30 \cdot \frac{6 \cdot 912}{6} + 2 \cdot 10,8} = \\ &= \frac{648}{56,16} = 11,538 \text{ м} \end{aligned}$$

Таъсир чизиклари ёрдамида номаълум зўриқишлар қуйидаги формула орқали ҳисобланади:



5.17- расм

$$M = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i.$$

Бизнинг мисол учун формула куйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_k = q(\omega - \omega_1 - \omega_2) + P \cdot y.$$

Бу ерда P , q — аркага қўйилган қўзғалмас юклар:

y — таъсир чизигида P кучи остидаги ордината;

ω — шу таъсир чизигида ёйилган куч остидаги қисмининг юзаси.

Ташқи кучлар остидаги ординаталар, учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади. Масалан,

$$\frac{6}{11,538} = \frac{y_i}{5,538}; \quad \frac{6}{11,538} = \frac{y}{2,538}; \quad \frac{6}{11,538} = \frac{y_2}{3,462}; \quad \frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12};$$

$$y_1 = 2,880; \quad y = 1,320; \quad y_2 = 1,8; \quad y_3 = 1,44.$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 11,538}{2} = 16,615; \quad \omega_1 = \frac{y_2 \cdot 3,462}{2} = 3,116;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 4,860.$$

Шундай қилиб, K кесимдаги эгувчи момент:

$$M_k = 8(16,615 - 3,116 - 4,860) - 5 \cdot 1,320 =$$

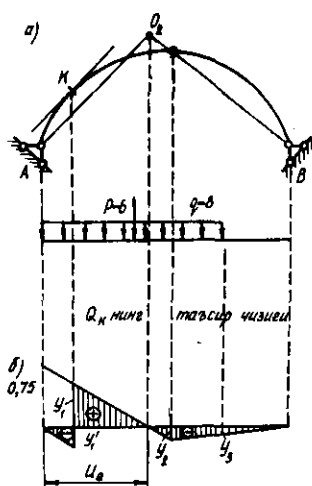
$$= 69,12 - 7,92 = 77,04 \text{ кНм}$$

(Аввалгиси билан таққосланг).

Q_k нинг таъсир чизигини қуриш (5.18- расм, а)

Қўндаланг куч учун ноль нуктаси ҳолатини аниқлаймиз. Бунинг учун K кесимга уринма ўтказамиз. Бу уринмага параллел қилиб A таянчдан тўғри чизик ўтказамиз ва бу тўғри чизикни B таянч билан C шарнирни туташтирувчи чизикдан давом эттирамиз. Кесишиш нуктаси O_2 қўндаланг кучнинг ноль нуктаси бўлади, чунки $P=1$ бирлик куч шу нуктада турганда K кесимдаги қўндаланг куч нолга айланади.

Қўндаланг куч таъсир чизигини қуриш учун ихтиёрий масофада координата ўқи олинади ва бу ўққа A , B таянчлари, C шарнири ва O_2 нуктасининг проекциялари туширилади. A таянчи остига $\cos \varphi_k = 0,7566$ ни масштаб бўйича ўлчаб қўямиз. Бу масофани нукта билан тўғри



5.18- расм

чизик ёрдамида туташтирамиз. Координата ўқининг А таянчи остида бу тўғри чизикка параллел тўғри чизик ўтказамиз ва уни К кесимга-ча давом эттирамиз. Сўнгра бу икки параллел тўғри чизикка К кесимининг проекцияси туширилади. С шарнир остидаги ордината В таянчининг ноль ординатаси билан туташтирилади. Кейин шаклда кўрсатилгандек штрихланади, ҳосил бўлган график Q_k нинг таъсир чизиги бўлади (5.18- расм, б).

Кўндаланг кучнинг ноль нуктасигача бўлган масофа u_Q қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$u_Q = \frac{2fl}{2f + l \cdot \operatorname{tg} \varphi_k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 30}{2 \cdot 10 \cdot 8 + 30 \cdot 0,864} = \frac{648}{47,52} = 13,636 \text{ м.}$$

Кўндаланг кучнинг қийматини қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз:

$$Q_k = +g(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + P \cdot y$$

Зарур ординаталарни учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_1}{7,636}; y_1 = 0,424; y'_1 = 0,7566 - y_1 = 0,3326;$$

$$\frac{0,7566}{13,636} = \frac{y}{4,636}; y = 0,257; \frac{0,7566}{13,636} = \frac{y_2}{1,364}; y_2 = 0,076;$$

$$\frac{y_2}{15} = \frac{y_3}{12}; y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,061$$

Юзалар:

$$\omega = \frac{y_1 \cdot 7,636}{2} = 1,619; \omega_1 = \frac{y_1 \cdot 6}{2} = 0,938;$$

$$\omega_2 = \frac{y_2 \cdot 1,364}{2} = 0,052; \omega_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot 3 = 0,206$$

Кўндаланг куч киймати

$$Q_k = 8(1,619 - 0,998 - 0,052 - 0,206) + 6 \cdot 0,257 = 2,904 + 1,542 = 4,446 \text{ кН.}$$

N_k нинг таъсир чизиғини куриш (5.19- расм, а).

Бўйлама кучнинг ноль нуктасини аниклаш учун A таянчидан K кесимиға ўтказилган уринмага тик чизик ўтказамиз ва уни B таянчи билан C шарнирни туташтирувчи тўғри чизик билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишув нуктаси бўйлама кучнинг ноль нуктаси (O_3) бўлади.

Ихтиёрий масофада координата ўқи олиниб, унга A , B таянчлари, C шарнири ва O_3 нуктасининг проекциялари (a , b , c ва d) туширилади. « a » нуктадан $\sin \varphi_k = 0,6538$ масофа (aa_1) ўлчанади ва бу масофа « d » нуктаси билан туташтирилади. « a_1d » чизиғини « c_1 » нуктасигача давом эттириб, бу ординатани « b » нуктаси билан бирлаштирилади. « a » нуктасидан « d » чизиғига параллел чизик ўтказиб, « ak » тўғри чизиғини ҳосил қиламиз. K кесим остида бўйлама куч $\sin \varphi_k = 0,6538$ га тенг микдорда сакрайди. Штрихланган шакл N_k нинг таъсир чизиғи бўлади (5.19- расм, б).

Бўйлама кучнинг ноль нуктасигача бўлган масофа

$$u_N = \frac{l}{\frac{l}{2f} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_k - 1} = \frac{30}{\frac{30}{2 \cdot 10,8} \cdot \frac{0,7566}{0,6538} - 1} = \frac{30}{0,6072} = 49,407 \text{ м}$$

га тенг бўлади.

Таъсир чизиғи ёрдамида бўйлама кучнинг кийматини аниқлаймиз

$$N_k = q_1(\omega + \omega_1 + \omega_2) + P \cdot y.$$

Керакли ординаталарни аниқлаймиз. Учбурчаклар ўхшашлигидан:

$$\frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_2}{64,407}; \quad \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y_2}{55,407}; \quad \frac{0,6538}{49,407} = \frac{y}{58,407};$$

$$y_2 = 0,852; \quad y_1 = 0,733; \quad y = 0,773;$$

$$y'_1 = y_1 - 0,6538 = 0,0792; \quad y_3 = 0,8 \cdot y_2 = 0,682.$$

Юзалар:

Бирор нуктанинг кўчиши деганда, иншоотнинг деформацияси жараёнида унинг (нуктанинг) координаталарининг ўзгариши тушунилади. Кўчишларни биз Гук конуни чегарасида аниқлаймиз, яъни кўчиши аниқланаётган кесимнинг кучланишлари пропорционаллик чегарасида ётади, деб фараз этамиз.

Кўчишларни аниқлашда кучлар таъсирининг мустақиллиги коидаси амал қилади. Бу коидага кўра бир неча кучларнинг бир йўла қўйилгандаги натижаси ҳар бир кучни алоҳида қўйилгандаги натижалар йиғиндисига тенг бўлади.

Ташқи кучлар иши. Кўчишларни аниқлашнинг умумий усули ташқи кучлар иши назариясига асосланади, яъни ишлар орқали кўчишларни аниқласа бўлади.

Эластик системага аста-секин (статик равишда) қўйилган ташқи куч P нинг бажарган ишини аниқлаймиз (6.1- расм, а). Деформациянинг кичик микдорларида эластик системага кучлар таъсирининг мустақиллиги коидасини қўллаш мумкин, бинобарин, алоҳида нукталарнинг кўчишлари уларни вужудга келтирувчи кучларга тўғри пропорционал бўлади. Гук конунига кўра бу боғланиш қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta = \alpha P.$$

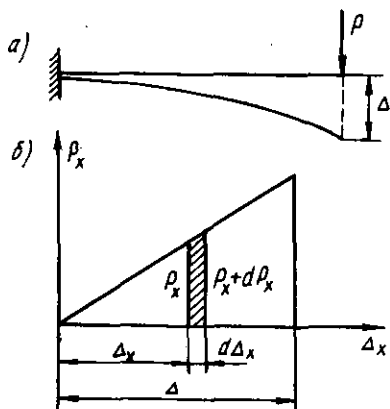
Бу ерда Δ — таъсир этувчи куч P йўналишидаги кўчиш;

α — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, иншоотнинг материали, тарҳи ва ўлчамларига боғлиқ микдордир.

P кучининг оралик қийматини P_x , унга мос бўлган кўчишни Δ_x деб белгилаймиз, (6.1- расм, б).

P кучини чексиз кичик микдор dP_x га орттирамиз. Натижада кўчиш ҳам $d\Delta_x$ масофага ортади. Бунда ташқи куч қуйидаги элементар ишни бажаради:

$$dA = (P_x + dP_x)d\Delta_x = P_x d\Delta_x.$$



6.1- расм

Ташки куч бажарган тўлик иш бу ифодани интеграллаш йўли билан аниқланади.

$$A = \int_0^P P_x d\Delta_x.$$

Гук қонунига биноан $d\Delta_x = \alpha dP_x$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$A = \int_0^P \alpha P_x dP_x = \frac{\alpha P^2}{2} = \frac{1}{2} P\Delta$$

келиб чиқади.

Демак, ташки кучлар (P) бажарган ҳақиқий иш куч билан шу куч вужудга келтирган кўчишнинг кўпайтмасини ярмига тенг экан. Бу Клапейрон теоремаси деб аталади. Агар иншоотга бир неча кучлар $P_1, P_2, \dots, P_n$ қўйилган бўлса, ташки кучлар бажарган тўлик иш қуйидагича бўлади:

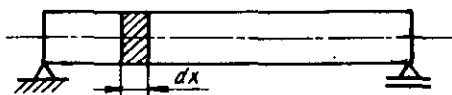
$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i.$$

Ташки кучларнинг бу иши иншоотда потенциал энергия тарзида тўпланади.

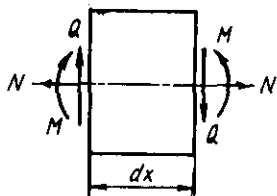
Ҳарчи Клапейрон теоремаси биргина куч мисолида берилган бўлса-да, аслида унинг қўлланиш чегараси жуда кенг. Ташки куч деганда биргина йиғиқ куч эмас, балки турли кучлар системаси тушунилади. Кўчишлар ҳам фақат чизиқли эмас, балки бурчакли бўлиши ҳам мумкин. Хулоса қилиб айтганда, куч деганда эластик системага таъсир этувчи ҳар қандай кучлар мажмуаси тушунилади ва «умумлашган куч» деб аталади. Бу куч таъсирида вужудга келган кўчиш «умумлашган кўчиш» деб юритилади.

Ички кучлар иши. Кўчишларнинг вужудга келишида ташки кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этса ҳам бўлади. Ички кучлар деганда конструкция элементларида вужудга келадиган эгувчи момент M , кўндаланг куч Q ва бўйлама куч N тушунилади.

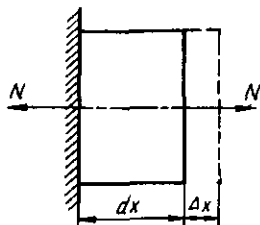
Балкадан (6.2-расм) чексиз кичик dx элементини ажратиб оламиз (6.3-расм). Ажратилган элементга M ,



6.2-расм



6.3- расм



6.4- расм

Q ва N кучлари таъсир этади. Бу кучлар бутун стерженга нисбатан ички куч, ажратилган элементга нисбатан эса ташки куч деб каралади. Буларнинг хар бирини dx элементига бўлган таъсирини алохида равишда кўриб ўтамиз.

Энг аввал ажратилган элементга бўйлама куч N нинг таъсири билан танишамиз (6.4- расм). Элементнинг чап томондаги кесими қўзғалмас деб фараз этсак, бўйлама куч таъсирида элементнинг ўнг томондаги кесими

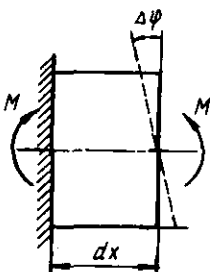
$$\Delta x = N dx - EF$$

масофага кўчади. Бу ерда EF — стержень кўндаланг кесимининг сикилиши ёки чўзилишдаги бикирлигидир.

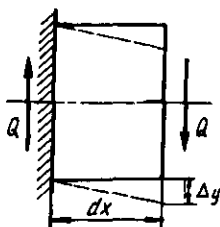
$\Delta \varphi$ бурчакли кўчишнинг вужудга келишида аста ортиб борувчи эгувчи момент қуйидаги миқдорда иш бажаради (6.5- расм):

$$dA_M = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = M \frac{M dx}{2EI}$$

Нихоят ажратилган элементга кўндаланг куч Q нинг таъсирини кўриб ўтамиз (6.6- расм). Агар элементнинг чап



6.5- расм



6.6- расм

кесимини маҳкамланган деб карасак, кўндаланг куч таъсирида унинг ўнг томондаги кесими

$$\Delta_y = \eta Q dx / GF$$

масофага силжийди. Бу ерда GF — кесимнинг силжишдаги бикирлиги. Δ_y силжишнинг вужудга келишида аста ортиб боровчи кўндаланг куч куйидаги микдорда иш бажаради:

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \Delta_y = Q \frac{Q dx}{2GF} \eta$$

Бу ерда η — стерженнинг кўндаланг кесими шаклига боғлиқ коэффицент бўлиб, куйидаги формуладан топилади:

$$\eta = \frac{F}{I^2} \int \frac{S^2}{b^2} dF.$$

Тўғри тўртбурчакли кесим учун $\eta = 1,2$. Айлана учун $\eta = 10/9$.

Ажратилган dx элементга учала куч (N , M , Q) бир вақтнинг ўзида таъсир этса, тўлиқ иш куйидагича топилади:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EI} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right).$$

Стерженларнинг барча участкалари бўйича бажарилган тўлиқ ишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаймиз:

$$A = \frac{1}{2} \left(\sum \int_0^l M \frac{M dx}{EI} + \sum \int_0^l N \frac{N dx}{EF} + \sum \int_0^l Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right) \quad (6.1)$$

ёки

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta \quad (6.2)$$

Шундай қилиб, кўчишларнинг вужудга келишида ташқи кучлар бажарган ишни ички кучлар орқали ифода этдик.

Эластик системаларда ташқи кучлар бажарган иш деформациянинг потенциал энергияси сифатида тўпланади. Ҳар қандай эластик жисм ташқи кучлар вужудга келтирган энергияни ўзида жамлаш хусусиятига эга. Жисмни юқдан бўшатиш жараёнида потенциал энергия

иш бажаради. Мана шу ишни жисмдаги ички кучлар (M , Q , N) бажаради. Энергиянинг сақланиш қонунига биноан ташқи кучлар бажарган иш система деформациясининг потенциал энергиясига (демак, ички кучлар бажарган ишга) тенг бўлади.

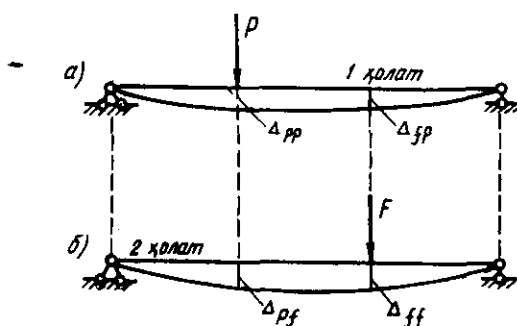
6.2. ИШЛАР ВА КЎЧИШЛАРНИНГ ЎЗАРО БОЎЛАНИШИ ҲАҚИДАГИ ТЕОРЕМАЛАР

Икки хил куч таъсирида мувозанатда бўлган эластик системанинг икки ҳолатини кўриб ўтамыз. Биринчи ҳолатда системага P кучи, иккинчи ҳолатда F кучи таъсир этади дейлик (6.7-расм).

Системанинг кўчишларини Δ_{pf} тарзида белгилаймиз. Бунда биринчи индекс кўчаётган нукта ва унинг йўналишини, иккинчи индекс эса кўчишни вужудга келтираётган сабабни англатади. Ўқилиши бундай: P кучи қўйилган нуктанинг шу куч (яъни P кучи) йўналишида F кучи таъсирида вужудга келган кўчиш.

Δ_{pp} — P кучи йўналишида шу куч таъсирида вужудга келган кўчиш дейлик. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи бажарган иш A_{pp} бўлсин. Худди шунингдек, Δ_{ff} кўчишнинг вужудга келишида F кучи бажарган ишни A_{ff} деб белгилайлик. Агар ҳар иккала куч балкага статик таъсир этса, бу кучлар бажарган иш қуйидаги формуладан топилади:

$$A_{pp} = \frac{1}{2} P \Delta_{pp} \text{ ва } A_{ff} = \frac{1}{2} F \Delta_{ff}.$$



6.7-расм

Агар ҳар иккала ишни ички кучлар орқали ифодаласак

$$A_{pp} = \sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N_p^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_p^2 dx}{2GF} \eta;$$

$$A_{ff} = \sum \int_0^l \frac{M_f^2 dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N_f^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_f^2 dx}{2GF} \eta$$

келиб чиқади.

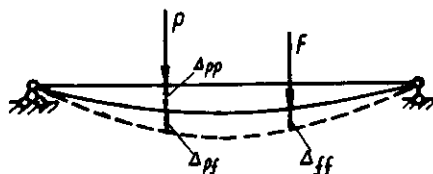
Энди ўша (6.7- расм) системага P ва F кучларининг олдинма-кейин қўйилиш жараёнини кўриб ўтайлик.

Аввал системага статик ортиб боровчи P кучи қўйилади, дейлик (6.8- расм). P кучи ўзининг тугал қийматига эришганда, системада 6.7- расм, a — да кўрсатилгандек вазият вужудга келади, яъни P кучи остида Δ_{pp} кўчиш ҳосил бўлади. Бу кўчишнинг вужудга келишида P кучи $A_{pp} = P\Delta_{pp}/2$ га тенг бўлган иш бажаради. Шундан сўнг солки системага F кучи қўйилади. Бу куч таъсирида система солкиланишда давом этиб, 6.7- расм, b — да кўрсатилган вазият вужудга келади. Бунда P кучи остида Δ_{pf} га тенг бўлган қўшимча солкилик ҳосил бўлади. F кучининг қиймати нолдан ўзининг тугал қийматига қадар ортиб борганда, P кучининг қиймати ўзгармасдан, $A_{pf} = P\Delta_{pf}$ га тенг бўлган қўшимча иш бажаради. F кучининг ўзи эса $A_{ff} = F\Delta_{ff}/2$ миқдорида иш бажаради. Шундай қилиб, системага кетма-кет равишда P ва F кучлари қўйилса, уларнинг бажарган тўлиқ иши

$$A = A_{pp} + A_{pf} + A_{ff} = \frac{1}{2}P\Delta_{pp} + P\Delta_{pf} + \frac{1}{2}F\Delta_{ff} \quad (a)$$

га тенг бўлади.

Агар кучларнинг қўйилиш тартибини ўзгартирсак, яъни аввал F ва сўнгра P кучларини қўйсак, у ҳолда тўлиқ иш қуйидаги кўринишда ифодаланади:



6.8- расм

$$A = \frac{1}{2} F \Delta_{ff} + F \Delta_{fp} + \frac{1}{2} P \Delta_{pp}.$$

Бирок кучларнинг қўйилиш тартиби ўзгариши билан бажарилган тўлиқ ишнинг миқдори ўзгармайди. Шунга кўра (а) ва (б) ифодаларни тенглаштириб, қуйидаги хулосага эга бўламиз:

$$P \Delta_{pf} = F \Delta_{fp}.$$

Бу ерда $P \Delta_{pf}$ биринчи ҳолатдаги P кучининг шу йўналишда, иккинчи ҳолатдаги F кучидан ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир. $F \Delta_{fp}$ эса иккинчи ҳолатдаги F кучининг шу куч йўналишида, биринчи ҳолатдаги P кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчишнинг вужудга келишида бажарган ишидир (6.7- расм).

Шундай қилиб, биринчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида иккинчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган иши иккинчи ҳолатдаги кучларнинг шу кучлар йўналишида биринчи ҳолат кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларнинг вужудга келишида бажарган ишига тенгдир.

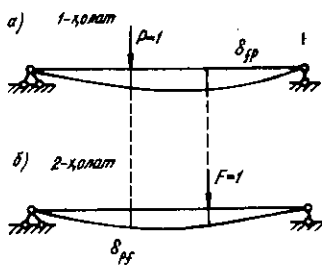
Бу хулоса ишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки унинг муаллифи Италия олими Энрико Бетти (1823—1892) теоремаси номи билан машҳурдир.

Энди кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема билан танишиб чиқамиз.

Бунинг учун яна балканинг икки ҳолатини кўриб ўтамиз. Биринчи ҳолатда балкага $P=1$ кучи, иккинчи ҳолатда эса $F=1$ кучи қўйилган (6.9- расм).

Балкага қўйилган кучларнинг қиймати бирга тенг бўлганлиги сабабли балканинг ҳолатини бирлик ҳолат деб айтамыз.

Бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар δ ҳарфи билан, бирдан фарқли кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар эса Δ ҳарфи билан белгиланади. Шунга биноан биринчи ҳолатдаги кўчишни δ_{fp} , иккинчи ҳолатдаги кўчишни эса δ_{pf}



6.9- расм

тарзида белгиладик. Ҳар иккаласи ҳам бирлик кучлардан ҳосил бўлган бирлик кўчишлардир.

Бу икки ҳолат учун Бетти теоремаси қуйидагича ёзилади:

$$P\delta_{pf} = F\delta_{fp}$$

Агар $P=F=1$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\delta_{pf} = \delta_{fp} \text{ келиб чиқади.} \quad (6.5)$$

Бу тенглик кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги теорема ёки Максвелл теоремаси деб аталади.

Мазкур тенглик $P=F \neq 1$ бўлганда ҳам ўз кучини саклайди ва қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta_{pf} = \Delta_{fp}. \quad (6.6)$$

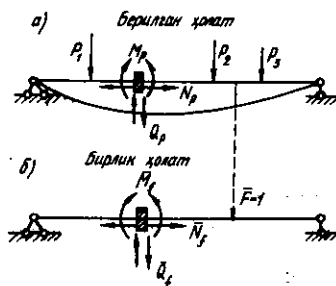
6.3. КЎЧИШЛАРНИ АНИҚЛАШ УЧУН МОР ФОРМУЛАСИ ВА ВЕРЕШЧАГИН УСУЛИ

Кўчишларни аниқлайдиган формулани келтириб чиқаришда бевосита ишлар учун чиқарилган формулалардан фойдаланамиз.

Бирор эластик системанинг, масалан, балканинг икки ҳолатини кўриб чиқамиз. Биринчи, яъни берилган ҳолатда балкага исталганча кучлар қўйилиши мумкин (6.10- расм, а). Иккинчи ҳолатда балкага бирлик куч $\bar{F}=1$ қўйилади (6.10- расм, б).

Берилган кучлар таъсирида ҳосил бўлган Δ_{fp} кўчишнинг вужудга келишида иккинчи ҳолатдаги $\bar{F}=1$ кучи қуйидаги ишни бажаради:

$$A_{fp} = \bar{F}\Delta_{fp} = 1\Delta_{fp} = \Delta_{fp}.$$



6.10- расм

A_{Ip} ни ички кучлар оркали ифода этсак,

$$\Delta_{Ip} = A_{Ip} = \sum \int_0^l \bar{M}_I \frac{M_p dx}{EI} + \sum \int_0^l \bar{N}_I \frac{N_p dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_I \frac{Q_p dx}{GF} \eta \quad (6.7)$$

кўринишдаги кўчишларни аниқлаш формуласига, яъни Мор формуласига эга бўламиз.

Бу ерда M_p , N_p ва Q_p — берилган кучлардан ҳосил бўлган, $\bar{M}_I$, $\bar{N}_I$ ва $\bar{Q}_I$ — бирлик кучдан ҳосил бўлган ички кучлардир.

Бирлик куч одатда кўчиши аниқланаётган нуктага кўйилади. Агар чизикли кўчиш (масалан, бирор нуктанинг солқилиги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ куч қабул қилинади, агар бурчакли кўчиш (масалан, бирор кесимнинг оғиш бурчаги) аниқланадиган бўлса, бирлик куч сифатида ўлчамсиз йиғиқ момент қабул қилинади. Ҳар иккала ҳолда ҳам бирлик куч кўчиши изланаётган нуктага қўйилади.

Балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама ва кўндаланг кучлар таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади:

$$\Delta_{Ip} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I M_p}{EI} dx. \quad (6.8)$$

Оддий аркаларнинг кўчишларини аниқлашда эгувчи момент билан бўйлама кучнинг таъсири эътиборга олинса кифоя

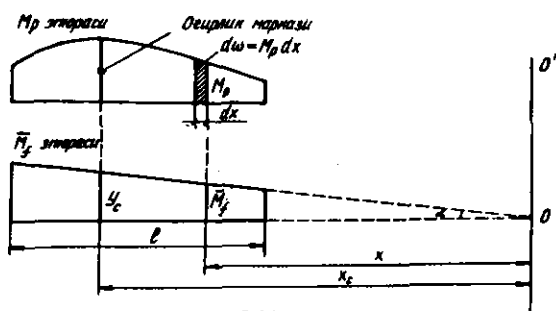
$$\Delta_{Ip} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I M_p}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_I N_p}{EF} dx. \quad (6.9)$$

Фермаларнинг кўчишларини аниқлашда бўйлама кучларнинг таъсири эътиборга олинади, холос

$$\Delta_{Ip} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_I N_p}{EF} dx. \quad (6.10)$$

Верешчагин усули. Маълумки, балка ва рамаларнинг кўчишларини аниқлашда Мор формуласининг биринчи ҳадидан фойдаланилади (6.8):

$$\Delta_{Ip} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_I M_p}{EI} dx. \quad (a)$$



6.11- расм

Интеграл чегарасида кесим ўзгармас бўлса, эгилишдаги бикирликни интегралдан ташқарига чиқариш мумкин

$$\Delta_{sp} = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_f M_p dx. \quad (6)$$

Бу ерда M_p ва $\bar{M}_f$ — берилган ва бирлик кучлардан ҳосил бўлган эгувчи моментлар (6.11- расм). Кўпинча икки эпюранинг бири тўғри чизикли бўлади. Бундай ҳолларда

$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx$ интегрални осонгина ечилади; аниқроғи мазкур интегрални интегралсиз ифода билан алмаштириш имкони туғилади.

Шаклдан (6.11- расм):

$$\bar{M}_f = x t_q \alpha \text{ ва } d\omega = M_p dx$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l \bar{M}_f M_p dx = t_q \alpha \int_0^l x M_p dx = t_q \alpha \int_0^l x d\omega$$

келиб чиқади.

Бу ерда $\int_0^l x d\omega$ интегрални M_p эпюрасининг юзаси ω_p дан $0-0'$ ўқига нисбатан олинган статик моментдир, яъни

$$\int_0^l x d\omega = \omega_p \cdot x_c.$$

Ўрнига қўямиз

$$\int_0^l \bar{M}_p M_p dx = x_c \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega_p; \quad (\text{a})$$

бирок $x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$ эканлигини назарда тутсак,

$$\int_0^l \bar{M}_p M_p dx = \omega_p y_c \quad (\text{b})$$

келиб чиқади, натижада интеграл функция интегралсиз ифода билан алмашади.

(в) ифодасини (б) га қўйсак, куйидаги формула келиб чиқади:

$$\Delta_{fp} = \frac{1}{EI} \sum \omega_p y_c \quad (\text{г})$$

Бу ерда ω_p — эгувчи моментлар эпюрасининг юзаси;

y_c — биринчи эпюранинг оғирлик марказига мос келган иккинчи эпюрадаги ордината.

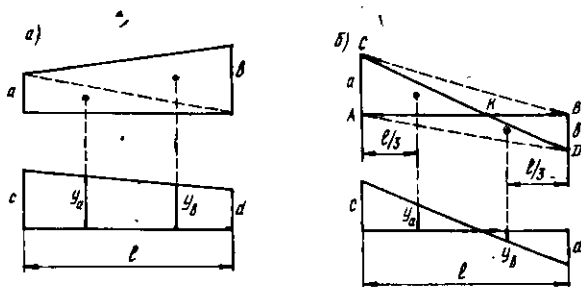
Қўчишларни аниқлашнинг бу усулини 1925 йилда Москва темирйўллар транспорти муҳандислари институти-нинг толиби А. Н. Верешчагин таклиф этган.

(г) дан кўринадики, ҳар иккала эпюра ўқнинг бир томонида жойлашса, кўчишнинг ишораси мусбат, ўқнинг турли томонларида жойлашса, ишора манфий бўлади. Шунинг ҳам қайд этиш лозимки, y_c ординатаси албатта тўғри чизикли эпюрадан олинishi зарур. Агар ҳар иккала эпюра тўғри чизикли бўлса, у ҳолда ординатани қайси эпюрадан олиншининг фарқи йўқ.

Трапеция шакли икки эпюра кўпайтириладиган бўлса, улардан бирининг оғирлик марказини топиш ўрнига трапециялардан бирини иккита учбурчакка ажратган кулай. Бунда ажратилган учбурчаклардан юза олинib, трапециядан шу учбурчакларнинг оғирлик марказларига мос бўлган ординаталар олинади (6.12-расм, а). Бу ҳол учун тайёр формула бор:

$$\frac{a l}{2} y_c + \frac{b l}{2} y_b = \frac{l}{b} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

Қавс ичида куйидаги микдорларнинг йиғиндиси берилган: эпюралар чап ординаталари кўпайтмасининг иккилангани, ўнг ординаталар кўпайтмасининг иккилангани, биринчи эпюра чап ординатасини иккинчи эпюра ўнг ординатасига кўпайтмаси, шунингдек биринчи эпюра ўнг



6.12- расм

ординатасини иккинчи эпюра чап ординатасига кўпайтмаси.

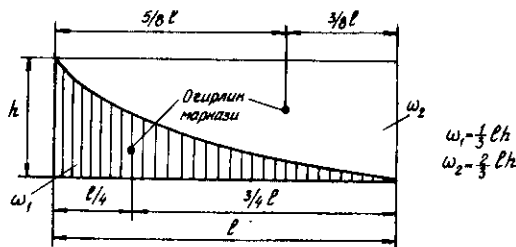
Кўпайтириладиган эпюралардан бири ёки ҳар иккаласи турли ишорали учбурчаклардан ташкил топса, яна юқоридаги усулдан фойдаланилса бўлади (6.12- расм, б). Бунинг учун эпюралардан бирини ABC ва ABD учбурчакларига тўлдирамиз. Хосил бўлган СВК ва АКД учбурчакларининг ординаталари тенг ва ишоралари карама-қарши бўлганлиги учун ҳисоб натижаларига таъсир этмайди.

Эпюралар кўпайтмаси (6.12- расм, б) қуйидаги формуладан топилади:

$$\frac{al}{2}y_a + \left(-\frac{bl}{2}\right)(-y_b) = \frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b.$$

Кўчишларни Верешчагин усулида аниқлаганда, турли шаклларнинг юзалари ва оғирлик марказларини топишга тўғри келади.

Оддий геометрик шаклларнинг юза ва оғирлик марказларини аниқлаш ўқувчига ўрта мактабдан маълум. 6.13- расмда параболик эпюранинг юзаси ва оғирлик марказлари берилган.



6.13- расм

Верешчагин усулини бикирлиги ўзгармас бўлган балка ва рамаларда қўллаш мақсадга мувофиқдир. Агар бикирлик элементнинг узунлиги бўйлаб ўзгарувчан бўлса, у ҳолда EJ ни интегралдан ташқарига чиқариб бўлмайди, шу сабабли Верешчагин формуласидан фойдаланиб бўлмайди. Бундай ҳолларда кўчишлар Мор интегралини бевосита ечиш йўли билан аниқланади.

6.4. ҲАРОРАТНИНГ ЎЗГАРИШИДАН ВА ТАЯНЧЛАРНИНГ ЧЎКИШИДАН ҲОСИЛ БЎЛАДИГАН КЎЧИШЛАР

Статик аниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши стерженда кўчишлар пайдо бўлишига олиб келади. Масалан, ҳарорат таъсирида стержень узайиши, қисқариши ва қийшайиши мумкин. Ҳароратнинг ўзгариши статик аниқ системаларда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди.

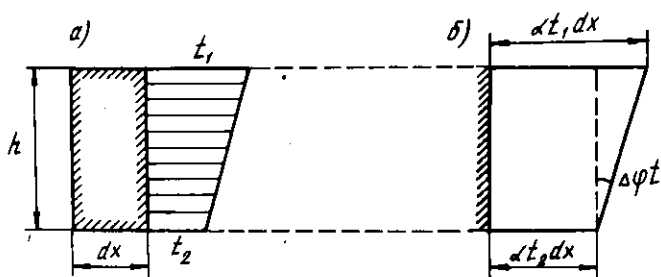
Юқорида кўриб ўтилган Мор формуласини (6.7) ҳарорат таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни аниқлаш масаласига татбиқ этамиз.

Ҳарорат таъсирида бўлган иншоотдан бирор dx бўлакчани ажратиб олайлик. Бўлакчанинг устки толаларининг ҳарорати t_1 пастки толаларининг ҳарорати эса t_2 бўлсин. Ҳарорат бўлакчанинг кўндаланг кесимида бир текисда тўғри чизик конуни бўйича тарқалган дейлик (6.14- расм, а).

Ҳарорат таъсиридаги чизикли кенгайиш коэффициенти α бўлса, бўлакчанинг устки толаси $\alpha t_1 dx$ га, пастки толаси эса $\alpha t_2 dx$ масофага узаяди (6.14- расм, б).

Агар кесим горизонтал ўққа нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бўлакчанинг ҳарорат таъсирида ўртача узайиши

$$\Delta_{x1} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx$$



6.14- расм

бўлади. Бўлакчанинг кўндаланг кесимлари бир-бирига нисбатан

$$\Delta_{\varphi l} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$$

бурчакка оғади.

Харорат таъсирида силжиш деформацияси рўй бермайди.

Буларни эътиборга олсак, Мор формуласи (6.7) куйидаги кўринишга келади:

$$\Delta_{\rho l} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_{\rho} dx + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_{\rho} dx \quad (6.11)$$

Агар стерженларнинг кўндаланг кесимлари ўзгармас бўлса, интеграллар бирлик эпюраларининг юзалари сифатида ҳисоблаб топилиши мумкин, у ҳолда ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишларни аниқлаш формуласи куйидаги содда кўринишни олади:

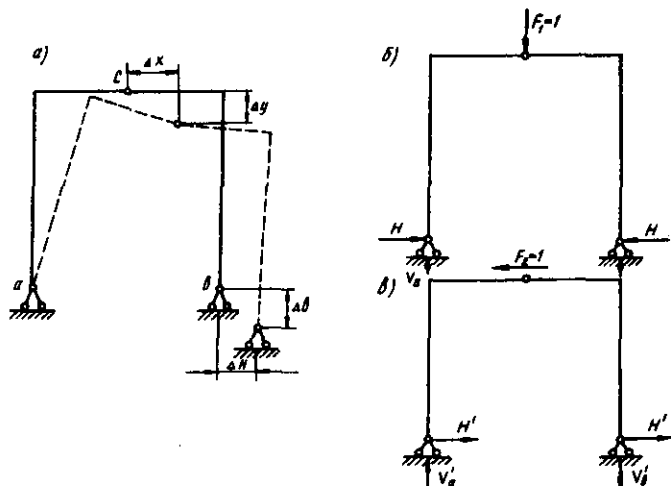
$$\Delta_{\rho l} = \Sigma \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\bar{M}} + \Sigma \bar{M} + \Sigma \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \omega_{\bar{N}} \quad (6.12)$$

Бу ерда $\omega_{\bar{M}}$ ва $\omega_{\bar{N}}$ — бирлик эпюралар $\bar{M}$ ва $\bar{N}$ нинг юзалари.

(6.12) формула таркибидаги ҳадларнинг ишораси деформациянинг йўналишига боғлиқ: агар ҳарорат таъсирида вужудга келган кўчишнинг йўналиши бирлик куч таъсирида вужудга келган кўчиш йўналиши билан бир хил бўлса, ишора мусбат, акс ҳолда манфий олинади.

Таянчларнинг чўкишидан ҳосил бўладиган кўчишлар. Статик аниқ системаларда таянчларнинг чўкиши иншоотда қўшимча зўриқишлар пайдо қилмайди. Таянчларнинг кўчиши эса тупрокнинг ўтириши, сув босиши ёки силжиши сингари турли сабаблар таъсирида рўй бериши мумкин.

Мисол тариқасида 6.15-расмда тасвирланган уч шарнирли рамани кўриб ўтамыз. Раманинг В таянчи чўкди деб фараз этайлик. Чўкишнинг вертикал Δ_b ва горизонтал Δ_n ташкил этувчилари маълум деб қарайлик. Ўртадаги С шарнирининг ҳолатини аниқлаш талаб этилади (6.15-расм, а). Шарнирнинг вертикал кўчишини Мор формуласи бўйича аниқлаш учун С нуктасига вертикал йўналишда бирлик куч $F_1=1$ ни кўямиз. (6.15-расм,



6.15-расм

б). Бирлик ҳолат кучларининг ҳақиқий ҳолат кўчишларини вужудга келишида бажариши мумкин бўлган ишлари йиғиндиси қуйидагича ифодаланади:

$$1\Delta_y - V_b\Delta_b - H\Delta_H = 0.$$

Бу тенгламадан изланаётган кўчиш аниқланади

$$\Delta_y = V_b\Delta_b + H\Delta_H.$$

Демак, мазкур кўчиш таянчларнинг чўкишига бевосита боғлиқ экан.

Горизонтал кўчиш Δ_x ни аниқлаш учун С шарнирига $F_2=1$ кучини қўямиз (6.15-расм, в). Мор теоремаси асосида қуйидаги ишлар тенгламасини тузамиз:

$$1 \cdot \Delta_x + V'_b \cdot \Delta_b + H' \Delta_H = 0, :$$

бу ердан

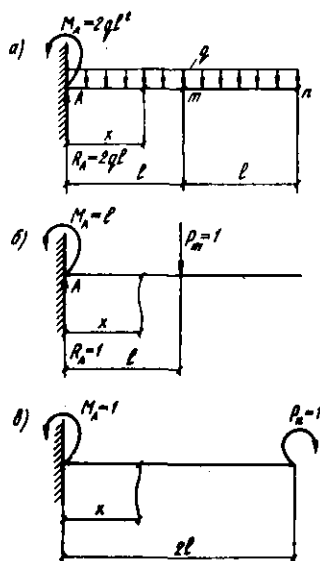
$$\Delta_x = -V'_b \Delta_b - H' \Delta_H$$

келиб чиқади.

Қуйида кўчишларни аниқлашга доир мисолларни кўриб ўтамиз.

1-мисол. Балканинг m кесимидаги чизикли кўчиш ва n кесимидаги бурчакли кўчиш Мор формуласи ёрдамида аниқлансин (6.16-расм, а).

Ечиш. Кўчишлар Мор формуласи (6.8) ёрдамида қуйидаги тартибда аниқланади:



6.16- расм

1. Энг аввал исталган кесим учун эгувчи моментлар тенгламасини тузамиз:

$$M_p = -2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2}.$$

2. Балканинг m кесимидаги вертикал кўчишни аниқлаш учун уни берилган юклардан озод қилиб, ўрнига изланаётган йўналишда бирлик $P_m = 1$ куч қўямиз ва унинг таъсирида эгувчи моментлар ифодасини тузамиз (6.16- расм, б):

$$\bar{M}_m = -P_m l + x = -l + x.$$

3. Бурчакли кўчишни аниқлаш учун балканинг n кесимида бирлик $P_n = 1$ момент қўямиз ҳамда эгувчи моментлар ифодасини тузамиз (6.16- расм, в);

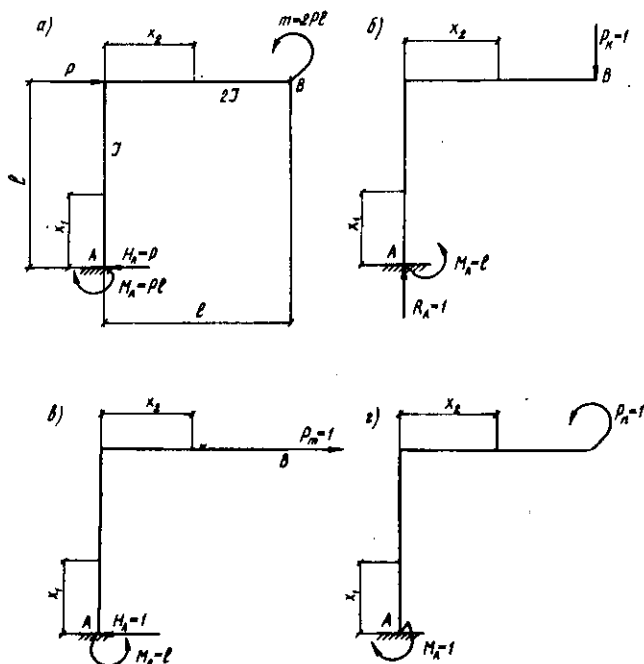
$$\bar{M}_n = -1.$$

4. Мор формуласи ёрдамида « m » кесимининг вертикал Δ_{mp} кўчишини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \Delta_{mp} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_m dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(-2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2})(-l + x) dx}{EJ} = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^l (2ql^3 - 2ql^2x + \frac{qex^2}{2} - 2ql^2x + 2qlx^2 - \frac{qx^3}{2}) dx = \\ &= \frac{1}{EJ} (2ql^3x \Big|_0^l - ql^2x^2 \Big|_0^l + \frac{qlx^3}{6} \Big|_0^l - ql^2x \Big|_0^l + \\ &\quad + \frac{2qlx^3}{3} \Big|_0^l - \frac{qx^4}{4} \Big|_0^l) = \\ &= \frac{1}{EJ} (2ql^4 - ql^4 + \frac{ql^4}{6} - ql^4 + \frac{2ql^4}{3} - \frac{ql^4}{8}) = \frac{17}{24} \cdot \frac{ql^4}{EJ}. \end{aligned}$$

5. Мор формуласи ёрдамида « n » кесимнинг бурчакли кўчишини аниқлаймиз:

$$\Delta_{np} = \int_0^{2l} \frac{M_p M_n dx}{EJ} = \int_0^{2l} \frac{(-2ql^2 + 2qlx - \frac{qx^2}{2})(-1) dx}{EJ} =$$



6.17- расм

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \left(2ql^2 x \Big|_0^{2l} - 2ql \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2l} + \frac{qx^3}{6} \Big|_0^{2l} \right) = \\
 &= \frac{1}{EI} \left(4ql^3 - 4ql^3 + \frac{8ql^3}{6} \right) = \frac{4}{3} \frac{ql^3}{EI}.
 \end{aligned}$$

2- мисол. Берилган юклар таъсирида раманинг «В» кесимидаги вертикал, горизонтал ва бурчакли кўчишлар Мор формуласи ёрдамида аниқлансин (6.17- расм, а).

Ечиш.

1. Рамани алоҳида участкаларга (кесмаларга) ажратамиз. Ҳар бир кесма учун ташки юк ва бирлик кучлардан эгувчи моментлар ифодаларини тузамиз:

1 кесма учун:

$$\begin{aligned}
 M_p &= Pl + Px_1; & (6.17- \text{ расм, а}) \\
 \bar{M}_k &= -l; & (6.17- \text{ расм б}) \\
 \bar{M}_m &= -l + x_1; & (6.17- \text{ расм в}) \\
 \bar{M}_n &= 1; & (6.17- \text{ расм, г})
 \end{aligned}$$

II кесма учун

$$M_p = 2Pl; \quad (6.17\text{- расм, а})$$

$$\bar{M}_k = -l + x_2; \quad (6.17\text{- расм, б})$$

$$\bar{M}_m = 9; \quad (6.17\text{- расм, в})$$

$$\bar{M}_n = 1 \quad (6.17\text{- расм, г})$$

2. Мор формуласи ёрдамида изланаётган кўчишларни аниқлаймиз:

а) вертикал кўчиш

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{вер}} &= \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_k dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1)(-l) dx}{EJ} + \int_0^l \frac{2Pl(-l + x_2) dx_2}{2EJ} = \\ &= -\frac{Pl^2 x_1}{EJ} \Big|_0^l - \frac{Plx_1^2}{2EJ} \Big|_0^l - \frac{Pl^2 x_2^2}{EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_2^2}{2EJ} \Big|_0^l = \\ &= -\frac{Pl^3}{EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ} - l \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ} = -\frac{2Pl^3}{EJ}; \end{aligned}$$

б) горизонтал кўчиш

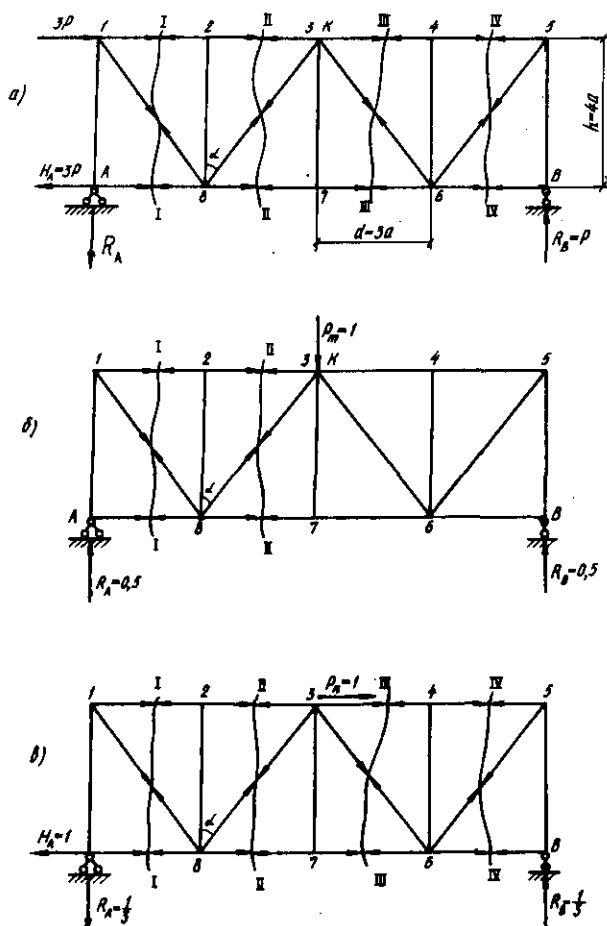
$$\begin{aligned} \Delta_{\text{гор}} &= \sum \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_m dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1)(-l + x_1) dx_1}{EJ} + \int_0^l \frac{2Pl \cdot 0 \cdot dx_2}{2EJ} = \\ &= -\frac{Pl^2 x_1}{EJ} \Big|_0^l - \frac{Plx_1^2}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_1}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Px_1}{3EJ} \Big|_0^l = \\ &= \frac{Pl^3}{EJ} - \frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{3EJ} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}; \end{aligned}$$

в) бурчакли кўчиш

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{бур}} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n dx}{EJ} = \int_0^l \frac{(Pl + Px_1) \cdot 1}{EJ} dx_1 + \int_0^l \frac{2Pl \cdot 1}{2EJ} dx_2 = \\ &= \frac{Plx_1}{EJ} \Big|_0^l + \frac{Px_1^2}{2EJ} \Big|_0^l + \frac{Plx_2}{EJ} \Big|_0^l = \frac{Pl^2}{EJ} + \frac{Pl^2}{2EJ} + \frac{Pl^2}{EJ} = \frac{5Pl^2}{2EJ}. \end{aligned}$$

3- мисол. 6.18- расм, а да берилган ферманинг «К» тугунидаги вертикал ва горизонтал кўчишлар аниқлансин. Стерженлар бикирлиги ўзаро тенг деб қабул қилинсин.

Ечиш. Мор формуласи $\Delta_{ip} = \sum \frac{N_i^0 \cdot \bar{N}_i^k l_i}{EJ}$ га кўра қуйидаги амалларни бажаришимиз зарур:



6.18-расм

1. Ташки кучдан ферма стерженларидаги зўрикишларни аниқлаймиз. Таянч реакциялари $R_A=P$; $R_B=P$; ва $H_A=3P$ қийматларига эга. Ҳисоблаш учун зарур бўладиган ферманинг геометрик параметрлари:

$$l_{18}=l_{38}=l_{36}=l_{56}=\sqrt{h^2+d^2}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5a;$$

$$\cos\alpha=\frac{l_{28}}{l_{38}}=\frac{4a}{5a}=0,8.$$

А, 2, 7, 4 ва В тугунларнинг мувозанат шартларидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар топилади:

$$N_{1A}=P; N_{8A}=3P; N_{5B}=-P; N_{28}=0; N_{37}=0; \\ N_{46}=0; N_{6B}=0; N_{12}=N_{23}; N_{78}=N_{6-7}; N_{34}=N_{45}.$$

I — I кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{18} \cdot \cos \alpha + P=0; N_{18}=-\frac{P}{\cos \alpha}= \\ =-\frac{P}{0,8}=-1,25P;$$

$$\Sigma m_8=0; -N_{12} \cdot h - R_b \cdot 3d=0; N_{12}=\frac{-R_b \cdot 3d}{h}= \\ =-\frac{3 \cdot 3a}{4a}P=2,25P; \\ N_{23}=-2,25P.$$

II — II кесимининг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{38} \cdot \cos \alpha - a=0; N_{38}=\frac{P}{\cos \alpha}=1,25P; \\ \Sigma m_3=0; N_{78} \cdot h - P \cdot 2d=0; N_{78}=\frac{2Pd}{h}=\frac{2P \cdot 3a}{4a}=1,5P; \\ N_{78}=1,5; N_{67}=1,5P.$$

III — III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{36} \cdot \cos \alpha + P=0; N_{36}=-\frac{P}{\cos \alpha}=-1,25P; \\ \Sigma m_0=0; N_{34}h + P \cdot d=0; N_{34}=-\frac{Pd}{h}=-\frac{P \cdot 3a}{4a}=0,75P; \\ N_{45}=-0,75P.$$

IV — IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{56} \cdot \cos \alpha - P=0; N_{56}=\frac{P}{\cos \alpha}=1,25P.$$

2. Ферманинг К тугунига вертикал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиган зўриқишларни аниқлаймиз (6.18- расм, б).

Таянч реакциялари $R_A=R_B=\frac{1}{2}=0,5; H_A=0$ бўлади.

Бу ерда ферма ва юкнинг симметриклиги эътиборга олинади. А, 2, 7, 4 тугунлар мувозанатидан фойдаланиб, қуйидаги зўриқишлар аниқланади:

$$N_{1A} = N_{5B} = -0,5; N_{8A} = N_{6B} = 0; N_{28} = 0; N_{37} = 0; N_{46} = 0;$$

$$N_{12} = N_{23} = N_{34} = N_{45}; N_{78} = N_{67}; N_{18} = N_{56}; N_{38} = N_{36}.$$

I — I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; N_{18} \cos \alpha - 0,5 = 0; N_{18} = \frac{0,5}{\cos \alpha} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625;$$

$$\Sigma m_8 = 0; N_{12} \cdot h + 0,5 \cdot d = 0; N_{12} = \frac{0,5d}{h} =$$

$$= -\frac{0,53a}{4a} = -0,375;$$

$$N_{23} = N_{34} = N_{45} = N_{12} = -0,375.$$

II — II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y = 0; N_{38} \cdot \cos \alpha + 0,5 = 0; N_{38} = -\frac{0,5}{\cos \alpha} =$$

$$= -0,625; N_{38} = -0,625;$$

$$\Sigma m_3 = 0; N_{7-8} \cdot n - 0,5 \cdot 2d = 0; N_{78} = \frac{0,5 \cdot 2 \cdot 39}{4a} =$$

$$= 0,75; N_{76} = 0,75.$$

3. Ферманинг К тугунига горизонтал йўналишда қўйилган бирлик куч таъсирида стерженларда ҳосил бўладиغان зўриқишларни аниқлаймиз (6.18- расм, в).

Таянч реакциялари:

$$\Sigma x = 0; H_A - 1 = 0; H_A = 1,$$

$$\Sigma m_A = 0; R_B \cdot 4d - P_1 \cdot h = 0; R_B = \frac{P_1 h}{Hd} = \frac{Pn4a}{4 \cdot 3a} = \frac{Pn}{3} = \frac{1}{3};$$

$$\Sigma y = 0; R_A - R_B = 0; R_A = R_B = \frac{1}{3}.$$

А, 2, 7, 4, В тугунлар мувозанатидан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$N_{1-A} = R_A = \frac{1}{3}; N_{5-B} = -R_B = -\frac{1}{3}; N_{8-A} = H_1 = 1;$$

$$N_{6-B} = 0.$$

$$N_{28}=0; N_{3-7}=0; N_{46}=0;$$

$$N_{12}=N_{23}; N_{34}=N_{45}; N_{7-8}=N_{6-7}.$$

I — I кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{18}\cos\alpha + \frac{1}{3}=0; N_{18}=-\frac{1}{3\cos\alpha}=-$$

$$=-\frac{1}{3\cdot 0,8}=-\frac{1,25}{3}=-\frac{1,25}{3}=-0,417;$$

$$\Sigma m_8=0; N_{12}\cdot h - \frac{1}{3}d=0; N_{12}=\frac{d}{3h}=\frac{3a}{3\cdot 4a}=$$

$$=0,25; N_{23}=0,25.$$

II — II кесимнинг чап қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{38}\cdot \cos\alpha - \frac{1}{3}=0; N_{38}=\frac{1}{3\cos\alpha}=\frac{1}{3\cdot 0,8}=$$

$$=\frac{1,25}{3}=0,417.$$

III — III кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{36}\cos\alpha + \frac{1}{3}=0; N_{36}=-\frac{1}{3\cos\alpha}=$$

$$=-\frac{1}{3\cdot 0,8}=-0,417;$$

$$\Sigma m_6=0; N_{34}\cdot h + \frac{1}{3}d=0; N_{34}=-\frac{d}{3h}=-\frac{3a}{3\cdot 4a}=$$

$$=-0,25; N_{45}=-0,25;$$

$$\Sigma m_8=0; N_{67}\cdot h - \frac{1}{3}2d=0; N_{67}=\frac{2d}{3h}=$$

$$=\frac{2\cdot 3a}{3\cdot 4a}=0,5; N_{78}=0,5.$$

IV — IV кесимнинг ўнг қисми мувозанатидан:

$$\Sigma y=0; N_{56}\cos\alpha - \frac{1}{3}=0; N_{56}=\frac{1}{3\cos\alpha}=\frac{1}{3\cdot 0,8}=0,417$$

4. Ҳисобнинг давоми 6.1-жадвалда келтирилган

	N_{pi}	l_i	$\bar{N}_m$	$\bar{N}_n$	$N_{ip}N_{im}l_i$	$N_{ip}N_{in}l_i$
N_{12}	-2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53Pa	1,69Pa
N_{23}	-2,25P	3a	-0,375	0,25	2,53Па	1,69Pa
N_{34}	-0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84Pa	0,56Pa
N_{45}	-0,75P	3a	-0,375	-0,25	0,84Pa	0,56Pa
N_{8A}	3P	3a	0	1	0	9Pa
N_{78}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375Pa	2,25Pa
N_{67}	1,5P	3a	0,75	0,5	3,375Pa	2,25Pa
N_{6B}	O	3a	0	0	0	0
N_{1A}	P	4a	-0,5	1/3	-2Pa	1,33Pa
N_{28}	O	4a	0	0	0	0
N_{37}	O	4a	0	0	0	0
N_{46}	O	4a	0	0	0	0
N_{5B}	-P	4a	0,5	-1/3	2Pa	1,33Pa
N_{18}	-1,25P	5a	0,625	-0,417	-3,9Pa	2,6Pa
N_{38}	-1,25P	5a	-0,625	0,417	-3,9Pa	2,6Pa
N_{36}	-1,25P	5a	-0,625	-0,417	3,9Pa	1,6Pa
N_{56}	1,25P	5a	0,625	0,417	3,9Pa	2,6Pa
					13,49Pa	24,3Pa

Ферма тугунининг вертикал кўчиши

$$\Delta_{mp} = \sum \frac{N_{pi}N_{mi}l_i}{EF} = \frac{13,49Pa}{EF} \text{ ва горизонтал кўчиши}$$

$$\Delta_{np} = \sum \frac{N_{pi}N_{ni}b_i}{EF} = \frac{24,3Pa}{EF} \text{ бўлади.}$$

4- мисол. Берилган юklar таъсирида балканинг n кесимининг вертикал кўчиши ва «К» кесимининг бурчакли кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин. Балканинг бикирлиги унинг бутун узунлиги бўйича ўзгармас (6.19- расм, а).

Ечиш. 1. Берилган юklar таъсирида балканинг эгувчи моментлар эпюраси M_p ни курамиз (6.19- расм, б). M_p эпюрасини оғирлик маркази аниқ бўлган ва юзаларини

$y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6$) ординаталарни аниқлаймиз (6.19- расм е, ж).

3. Верешчагин коидасига (6.11) амал қилиб, кўчишларни аниқлаймиз. Балканинг n кесимидаги вертикал кўчиш

$$\begin{aligned}\Delta_{np} &= \sum \int \frac{M_p \cdot \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_{iyi} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l \right) + \\ &+ \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{q}{3} l + \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} ql^2 2l \cdot \frac{1}{2} l - \\ &- \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{ql^4}{EJ} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{3ql^4}{EJ};\end{aligned}$$

Балканинг K кесимидаги бурчакли кўчиш

$$\begin{aligned}\Delta_{kp} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_{y_i'} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} 2ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} - \right. \\ &- \frac{2}{3} ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{5}{6} + 4ql^2 \cdot l \cdot 1 \left. \right) = \frac{ql^3}{EJ} \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \right. \\ &- \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3} + 4 \left. \right) = \frac{23}{6} \frac{ql^3}{EJ}.\end{aligned}$$

5- мисол. Раманинг K нуктасининг вертикал кўчиши ва n нуктасининг горизонтал кўчиши Верешчагин усулида аниқлансин (6.20- расм, а).

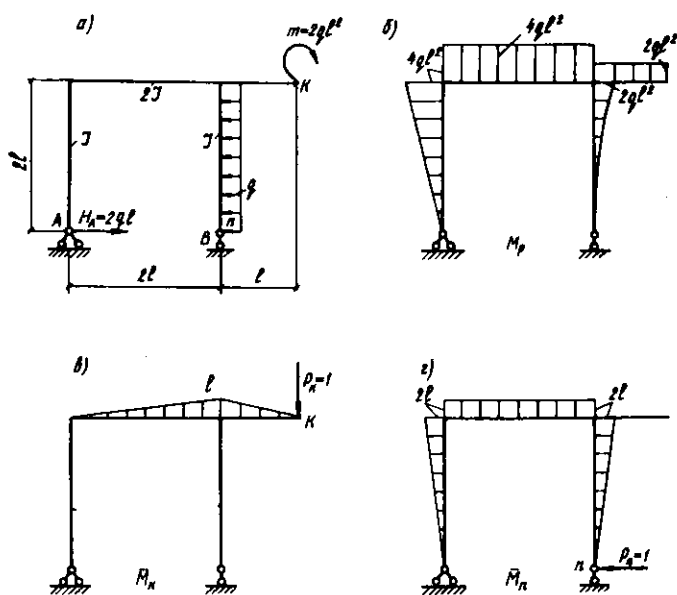
Ечиш. Берилган юклардан эгувчи моментлар эпюраси M_p ни курамиз (6.20- расм, б). Изланаётган йўналишларда бирлик кучлар (P_k, P_n) қўйиб, бирлик эгувчи момент эпюралари $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ ни курамиз (6.20- расм, в, г).

M_p эпюрасини алоҳида равишда $\bar{M}_k$ ва $\bar{M}_n$ эпюраларига кўпайтириб, изланаётган кўчишларни аниқлаймиз. Вертикал кўчиш

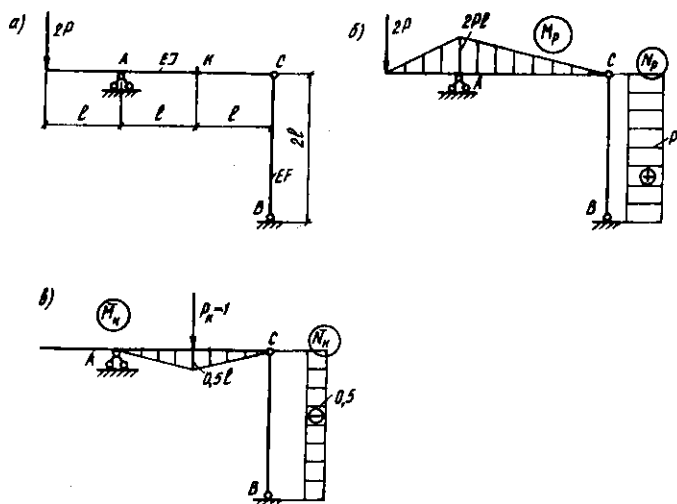
$$\begin{aligned}\Delta_{pk} &= \sum \int \frac{M_p \bar{M}_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_{y_i} = \frac{1}{2EJ} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} l + \\ &+ \frac{1}{2EJ} 2ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = \frac{2ql^4}{EJ} + \frac{ql^4}{2EJ} = \frac{5}{2} \frac{ql^4}{EJ}.\end{aligned}$$

Горизонтал кўчиш

$$\Delta_{np} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \sum \omega_{y_i} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 4ql^2 \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l +$$



6.20- расм



6.21- расм

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2EI} 4ql^2 \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{EI} \frac{2}{3} \cdot 2ql^2 \cdot 2l \frac{3}{4} 2l = \\
& = \frac{16}{3} \frac{ql^4}{EI} + \frac{8ql^4}{EI} + \frac{4ql^4}{EI} = \frac{52}{3} \frac{ql^4}{EI}.
\end{aligned}$$

6- мисол. «К» нуктасининг вертикал кўчиши аниқлансин. Балка А нуктада шарнирли қўзғалмас таянч ва С нуктада ВС стержень (торткич) ёрдамида маҳкамланган. Балканинг бикирлиги EI , стерженнинг бикирлиги EF (6.21- расм, а).

Ечиш. Балка эгилишга, стержень эса чўзилишга ишлайди. Кўчишни аниқлашда Мор формуласининг икки ҳадидан фойдаланамиз:

$$\Delta_{kp} = \int_0^{2l} \frac{M_p \bar{M}_k dx}{EI} + \int_0^l \frac{N_p \bar{N}_k dx}{EF}.$$

Берилган кучдан эгувчи момент (M_p) ва бўйлама кучлар (N_p) эпюраларини кўрамиз (6.21- расм, б, в).

Изланаётган кўчиш йўналишида балкага бирлик куч ($P_k=1$) қўйиб бирлик эгувчи моментлар ($\bar{M}_k$) ва бирлик бўйлама кучлар ($\bar{N}_k$) эпюраларини курамиз: (6.21- расм, в).

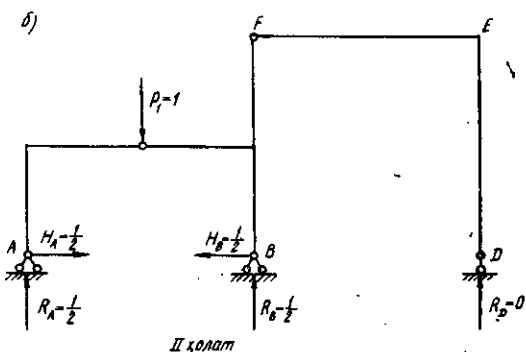
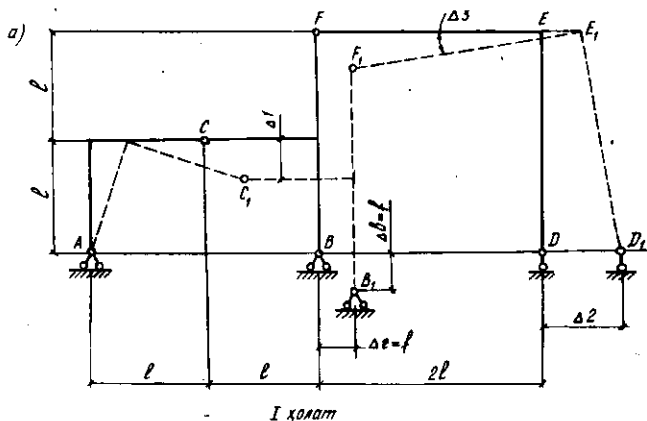
Кўчишни Верешчагин коидаси ёрдамида аниқлаймиз:

$$\begin{aligned}
\Delta_{kp} &= \frac{-1}{EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot 2l \frac{1}{2} 2Pl - \frac{1}{EI} P \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{Pl^3}{EI} - \frac{1}{2} \frac{Pl}{EF} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Pl^3}{EI} + \frac{Pl}{EF} \right).
\end{aligned}$$

Демак, К кесимининг кўчиши икки хил деформациянинг йиғиндисидан ташкил топар экан. Буларнинг биринчиси ригелнинг эгилиши (кавсдаги биринчи ҳад), иккинчиси эса устуннинг чўзилиши (кавсдаги иккинчи ҳад).

7- мисол. 6.22- расм, а — да кўрсатилган рама «В» таянчининг горизонтал Δ_2 ва вертикал Δ_6 силжишидан ҳосил бўлган С шарнирнинг вертикал кўчиши, Д таянчнинг горизонтал кўчиши ва Е тугуннинг буралиш бурчаги аниқлансин. Рама В таянчининг силжишидан кейинги ҳолат пунктир чизик билан кўрсатилган.

Ечиш. Мисолни ечишда ишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги теоремага, яъни Бетти теоремасига асосланамиз. Бу теорема бўйича системанинг икки ҳолати кўриб ўтилади.

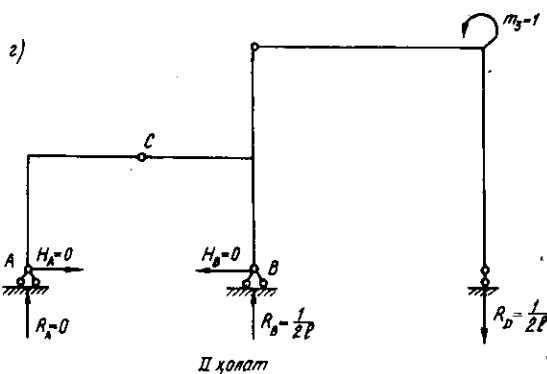
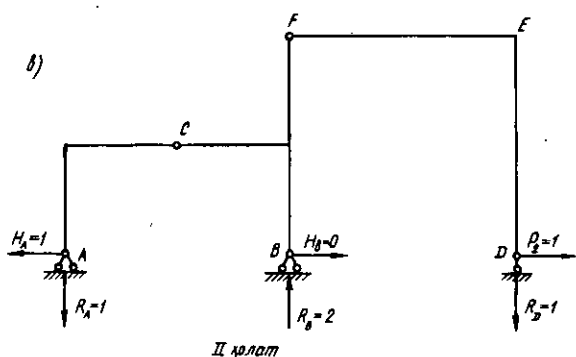


6.22-расм

Раманинг биринчи ҳолатида ташки кучлар нолга тенг бўлишига қарамай, кўчишлар мавжуд (6.22-расм, а). II ҳолатлар сони аникланаётган кўчишлар сонига тенг бўлиб, барчасида таянчлари силжимаган рама тасвирланган. С шарнирининг вертикал кўчишини аниқлашда шу нуктага вертикал бирлик куч қўйилади (6.22-расм, б). Д таянчнинг горизонтал кўчишини аниқлашда раманинг Д нуктасига горизонтал бирлик куч қўйилади (6.22-расм, в).

Е тугуннинг бурилиш бурчагини аниқлашда раманинг Е нуктасига бирлик момент қўйилади (6.22-расм, г).

Барча II ҳолатларда В таянчдаги вертикал ва горизонтал реакция кучлари аникланади.



1. С шарнирининг вертикал кўчишини аниқлаш.

Ишни таянч реакцияларини аниқлашдан бошлаймиз (6.22- расм, а):

$$\sum M_F^{\text{yul}} = 0; R_D \cdot l = 0; R_D = 0;$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 2l - 1 \cdot l = 0; R_B = \frac{1}{2};$$

$$\sum M_C^{\text{yul}} = 0; R_B \cdot l - H_B \cdot l = 0; H_B = R_B = \frac{1}{2}.$$

Бетти теоремасига асосан

$$P_1 \Delta_1 - R_D f - H_B \cdot f = 0;$$

$$1 \cdot \Delta_1 - \frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f = 0;$$

бу ердан вертикал кўчиш $\Delta_1 = f$ топилади.

2. Д таянчининг горизонтал кўчишини аниқлаш.

Таянч реакцияларини 6.22- расм, в-дан аниқлаймиз:

$$\Sigma M_F^{\text{ўнг}} = 0; R_P \cdot 2l - P_1 \cdot 2l = 0; R_P = P_2 = 1;$$

$$\Sigma M_A = 0; R_B \cdot 2l - R_P \cdot 4l = 0; R_B = 2R_D = 2;$$

$$\Sigma M_C^{\text{ўнг}} = 0; H_B \cdot l - R_B \cdot l - P_2 \cdot l + R_D \cdot 3l = 0;$$

$$H_B + P_2 - 3R_D = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Бетти теоремасига асосан

$$\Delta_2 P_2 - R_B f - H_B f = 0;$$

$$\Delta_2 l - 2f - 0f = 0;$$

бундан горизонтал кўчиш $\Delta_2 = 2f$ топилади.

3. Е тугуннинг бурилиш бурчагини аниқлаш (6.22- расм, г).

Реакцияларни аниқлаймиз:

$$\Sigma M_F^{\text{ўнг}} = 0; R_D \cdot 2l - m_3 = 0; R_A = \frac{m_3}{2l} = \frac{1}{2l};$$

$$\Sigma M_A = 0; R_B - 2l - R_D \cdot 4l + m_3 = 0;$$

$$2R_B l - \frac{1}{2l} 4l + 1 = 0; R_B = \frac{2-1}{2l} = \frac{1}{2l}.$$

$$\Sigma M_C^{\text{ўнг}} = 0; H_B \cdot l - R_B \cdot l + R_D \cdot 3b - m_3 = 0;$$

$$H_B \cdot l - \frac{1}{2l} l + \frac{1}{2l} 3b - 1 = 0;$$

$$H_B \cdot l - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 0; H_B = 0.$$

Бетти теоремасига асосан

$$m_3 \Delta_3 - R_B \cdot f = 0;$$

$$1 \cdot \Delta_3 - \frac{1}{2l} f = 0;$$

бундан Е тугуннинг бурилиш бурчаги топилади:

$$\Delta_3 = \frac{f}{2b}.$$

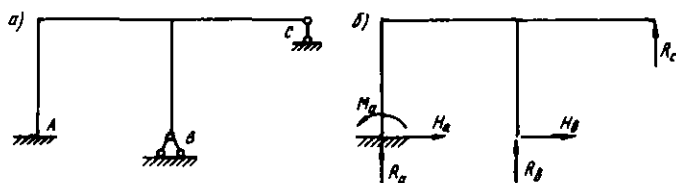
СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

7.1. СТАТИК НОАНИҚ СИСТЕМАЛАР ҲАҚИДА ТҲШУНЧА

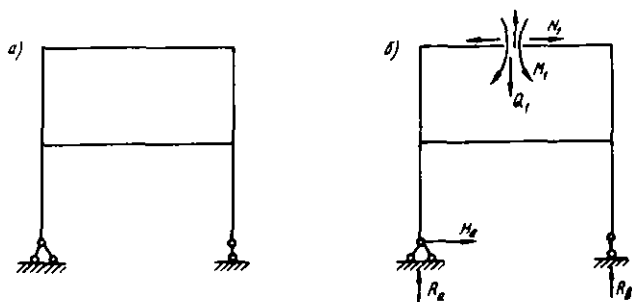
Бинокорликда шундай конструкциялар учрайдики, уларни ҳисоблаш учун, яъни ички кучларини аниқлаш учун статиканинг мувозанат тенгламалари кифоя қилмайди. Чунки уларда ортикча боғланишлар мавжуд бўлиб, ҳар бир боғланишда номаълум реакциялар вужудга келади. Номаълумлар сонини тенгламалар сонига тенглаштириш учун қўшимча тенгламалар тузиш талаб этилади. Ана шундай системалар статик ноаниқ системалар деб аталади.

Боғланиш деганда нукталар ва кесимларнинг ўзаро қўзғалишига қаршилиқ кўрсатувчи ҳар қандай тўсик тушунилади. «Ортикча» боғланиш атамаси боғланишнинг «кераксизлигини» эмас, балки «керагидан ортикча» эканлигини англатади. Агар статик ноаниқ системадаги ортикча боғланишлар ташлаб юборилса, у ҳолда статик аниқ, геометрик ўзгармас система ҳосил бўлади. Демак, ортикча боғланишлар сони системанинг статик ноаниқлик даражасини белгилар экан.

Системалар шартли равишда ташки ва ички статик ноаниқ системаларга ажратилади. 7.1-расмда ташки, 7.2-расмда ички статик ноаниқ рама тасвирланган. Буларнинг фаркига етиш учун ҳар иккала раманинг номаълум реакцияларини таҳлил этамиз. 7.1-расм, б-да олти номаълум таянч реакциялари кўрсатилган. Шунлардан учтаси статиканинг мувозанат тенгламаларидан топилса, қолган учтаси статика учун «ортикча» бўлиб қолади. Раманинг В ва С таянчларини ортикча боғланиш деб қабул қилиб, уларни ташлаб юборилиши раманинг



7.1-расм



7.2- расм

геометрик ўзгармаслигига путур етказмайди, айти пайтда статик аниқ система ҳосил бўлади. Ортиқча боғланишлар ўрнига реакция кучлари (H_b , R_b , R_c) ни қўямиз. Бу номаълум реакция кучларини аниқлаш учун қўшимча тенгламалар тузиш тақозо этилади. Хуллас бу раманинг статик ноаниқлиги ташқаридан кўзга ташланиб турибди.

7.2- расмдаги раманинг статик ноаниқлиги кўзга яққол ташланмайди. Бир карашда статик аниқ рамадай туюлади. Аслида бу рама ҳам статик ноаниқдир.

Геометрик ўзгармас, статик аниқ система ҳосил қилиш учун берилган раманинг бирор еридан қирқамиз (яъни ортиқча боғланишларни ташлаб юборамиз). Қирқимга тушган кесимнинг қўзғолмаслигини таъминлаш учун шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучларни ташқи реакция кучлари кўринишида тасвирлаймиз (7.2- расм, б). Бу учала куч (M_1 , Q_1 , N_1) ҳам номаълум. Номаълум таянч реакциялари (H_a , R_a , R_b) статика тенгламаларидан топилса, номаълум ички кучлар қўшимча тенгламалардан топилади. Демак, шарнирларга эга бўлмаган ҳар бир ёпик контур уч марта статик ноаниқ бўлар экан.

Рамаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формуладан аниқланади:

$$C_H = 3K - Ш,$$

бунда K — ёпик контурлар сони;

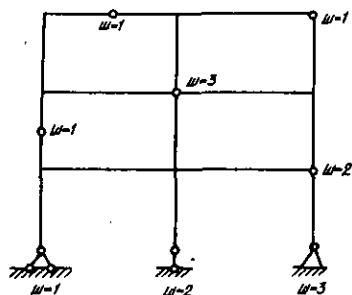
$Ш$ — оддий шарнирлар сони.

Оддий шарнирлар сони дисклар, яъни стерженлар сонидан битта кам бўлади. Қуйида рамаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашга доир бир неча мисол кўриб ўтамиз.

1- мисол. 7.1- расм, а-да берилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Контурлар сонини белгилашда А, В, С таянчлари хаёлан туташтирилади. У ҳолда $K=2$ бўлади.

Шарнирлар сонини белгилашда шарнирли қўзғалмас таянчда $Ш=1$ деб, қўзғалувчи таянчда эса, $Ш=2$ деб олинади:



7.3- расм

$$C_H = 3 \cdot 2 - 3 = 3.$$

Демак, мазкур рама уч марта статик ноаниқ экан.

2- мисол. 7.2- расм, а-да тасвирланган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони $K=2$; оддий шарнирлар сони $Ш=2+1=3$; $C_H=3 \cdot 2 - 3 = 0$.

Демак, бу рама ҳам уч марта статик ноаниқ экан.

3- мисол. 7.3- расмда кўрсатилган раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ёпиқ контурлар сони $K=6$; оддий шарнирлар сони (шаклда кўрсатилган) $Ш=12$;

$$C_H = 3 \cdot 6 - 12 = 6.$$

Демак, рама олти марта статик ноаниқ экан.

Статик ноаниқ системалар қуйидаги хоссаларга эгадир:

1. Статик ноаниқ системалар таркибида ортиқча боғланишларнинг мавжудлиги туфайли ўзига мос статик аниқ системага нисбатан бикирлиги юқорирок бўлади.

2. Статик ноаниқ системалар ўзига мос статик аниқ системаларга нисбатан тежамлироқ бўлади.

3. Статик ноаниқ системаларда бирор ортиқча боғланишнинг шикастланиши иншоотнинг бутунлай ишдан чиқишига олиб келмайди. Статик аниқ системаларда бирорта боғланиш бузилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади.

4. Статик ноаниқ системаларда ҳароратнинг ўзгариши ва таянчларнинг чўкиши натижасида қўшимча зўриқишлар пайдо бўлади. Система элементларининг узунлигидаги фарқлари, элементларни йиғишда йўл қўйилган

баъзи ноаниқликлар ҳам системада қўшимча зўриқишлар уйғотади.

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашни кучлар усулидан бошлаймиз. Бу усул қадимий ва пухта ишланган усуллардан бири бўлиб, камровининг кенглиги, ўзлашуви-нинг осонлиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради.

7.2. КУЧЛАР УСУЛИНИНГ АСОСИЙ СИСТЕМАСИНИ ТАНЛАШ

Ҳар қандай статик ноаниқ системанинг ҳисоби унинг ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади. Шундан сўнг асосий система танланади. Берилган системанинг асосий системалари бир нечта бўлиши мумкин. Ҳисоблаш учун шуларнинг ичидан энг қулайи танлаб олинади. Кейинги ҳисоблар ана шу танланган система устида олиб борилади.

Хўш, асосий системанинг ўзи нима ва у қандай ҳосил қилинади?

Асосий система статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлиб, у берилган системадаги ортиқча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинади.

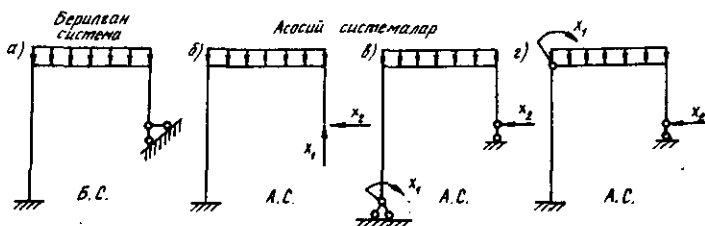
Асосий система ҳосил қилишнинг уч хил йўли бор:

а) ортиқча деб қабул қилинган таянчлар ёки таянч стерженлари ташлаб юборилади;

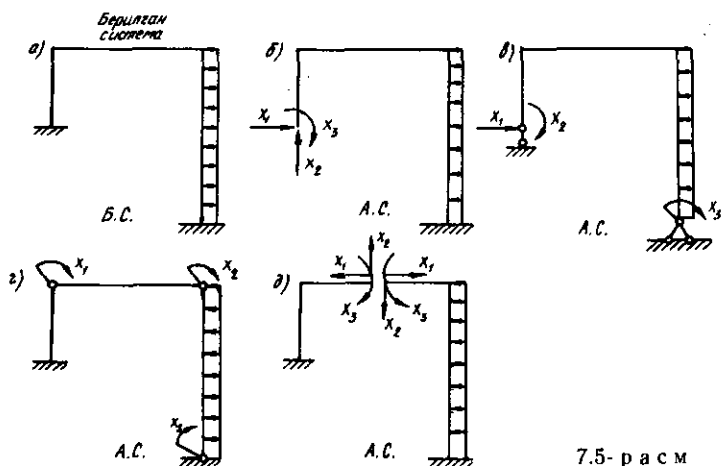
б) берилган системага шарнирлар киритилади;

в) берилган системанинг бирор қисми қирқилади.

Ҳар учала ҳолда ҳам амалда ортиқча боғланишлар ташлаб юборилган деб ҳисобланади. Шундан сўнг, берилган системанинг дастлабки мувозанат ҳолатини тиклаш мақсадида йўқотилган боғланишлар ўрнига уларнинг вазифасини бажарувчи номаълум кучлар (X_1 , X_2 , X_3 ва х. к.) қўйилади. 7.4-расмда икки номаълумли, 7.5-расмда уч номаълумли раманинг турли асосий системалари акс эттирилган.



7.4-расм

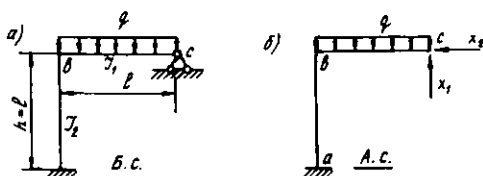


7.5- расм

Расмларга изох берамиз. 7.4- расм, б, в, г-да 7.4- расм, а-да берилган раманинг уч хил асосий системаси тасвирланган. Расм б-да шарнирли кўзгалмас таянч ташлаб юборилиб, унинг ўрнига таянч реакциялари X_1 ва X_2 қўйилган. Расм в-да чапдаги шарнирсиз таянч шарнирли кўзгалмас таянч билан, ўнгдагиси эса шарнирли кўзгалувчи таянч билан алмаштирилган. Инкор этилган боғланишлар ўрнига реакция кучлари тасвирланган. Расм г-да раманинг чапки бикир тугунига шарнир киритилган ва шарнир туфайли йўқотилган боғланиш ўрнига момент X_1 қўйилган. Раманинг ўнг таянчидаги горизонтал стержень ташлаб юборилиб, ўрнига реакция кучи X_2 қўйилган.

Учала асосий система ҳам геометрик ўзгармас, статик аниқдир. Ҳисоб ишлари учун улар ичидан исталган системани танлаб олиш мумкин. Учала ҳолда ҳам ҳисоб натижалари бир хил чиқаверади. Бирок, 7.4- расм, б-да тасвирланган асосий система булар ичида энг мақбулидир. Чунки бундай системанинг M эпюраларини куриш ва кўчишларини аниқлаш бошқаларига нисбатан бирмунча қулай.

7.5- расмда уч номаълумли раманинг тўрт хил асосий системаси тасвирланган. Буларнинг дастлабки учтаси (7.5- расм, б, в, г) аввалги раманикига ўхшаш. Охиригиси (7.5- расм, д) қиркиш усулида ҳосил килинган. Қиркилган кесимга ташки кучлар таъсирида шу кесимда ҳосил бўладиган ички кучлар — бўйлама куч X_1 , кўндаланг куч



7.6- расм

X_2 ва эгувчи момент X_3 лар қўйилган. Бу тўрт асосий системанинг биринчиси ва охиргиси ҳисоблаш учун қулайдир.

7.3. КУЧЛАР УСУЛИНИНГ КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

Асосий системаларда ортиқча боғланишлар номаълум кучлар билан алмаштирилишини олдинги параграфда кўриб ўтдик. Эндиги вазифа ана шу номаълум кучларни аниқлашдан иборат. Бунинг учун статика тенгламаларига қўшимча равишда к а н о н и к¹ деб аталувчи тенгламалар тузамиз. Каноник тенгламаларни тузиш тартибини икки номаълумли рама мисолида кўриб ўтамиз. Берилган раманинг (7.6- расм, а) асосий системасини синик консол кўринишида (7.6- расм, б) танлаймиз. Ташлаб юборилган таянч ўрнига номаълум кучлар қўямиз, сўнгра куч усулининг каноник тенгламаларини тузамиз.

Берилган рамада шарнирли қўзғалмас таянчнинг маркази С вертикал ва горизонтал йўналишларда қўзғалмасдир, яъни унинг шу йўналишлардаги кўчишлари нолга тенгдир. Бундай шарт асосий системада ҳам сақланиб қолиши лозим, яъни С нуктасининг вертикал ва горизонтал кўчишлари нолга тенг бўлиши зарур. Бу шартни қисқа кўринишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\Delta_{x_1}=0; \quad \Delta_{x_2}=0; \quad (7.1)$$

бу ерда Δ_{x_1} — стержень учи С нинг X_1 куч йўналишидаги кўчиши;

Δ_{x_2} — шу нуктанинг X_2 кучи йўналишидаги кўчиши.

¹ Канон — қонуни, қонда, каноник тенглама маълум қонуният асосида тузилган тенглама.

Ҳар иккала кўчиш x_1 ва x_2 кучлари ҳамда ташқи юклар таъсирида вужудга келади.

Кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасидан фойдаланиб, (7.1)ни алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида ифодалаймиз.

$$\begin{aligned}\Delta_{x_1 x_1} + \Delta_{x_1 x_2} + \Delta_{x_1 p} &= 0; \\ \Delta_{x_2 x_1} + \Delta_{x_2 x_2} + \Delta_{x_2 p} &= 0.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Бу ерда кўчишларга қўйилган биринчи индекслар кўчишнинг йўналишини, иккинчи индекслар эса шу кўчишни юзага келтирувчи сабабни билдиради.

Энди x_1 ва x_2 кучлари таъсирида ҳосил бўлган кўчишларни Гук қонунига асосан бирлик кўчишлар орқали ифода этамиз.

$$\Delta_{x_1 x_1} = x_1 \delta_{11}; \quad \Delta_{x_1 x_2} = x_2 \delta_{12}; \quad \Delta_{x_2 x_1} = x_1 \delta_{21}; \quad \Delta_{x_2 x_2} = x_2 \delta_{22}$$

Буларни (7.2) тенгламага қўйсак, икки номаълумли система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари келиб чиқади;

$$\begin{aligned}x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0;\end{aligned}\quad (7.3)$$

Бу ерда δ_{11} — x_1 кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_1=1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

δ_{12} — x_1 кучи қўйилган нуктанинг шу куч йўналишида $x_2=1$ кучи таъсирида ҳосил бўлган кўчиши;

Δ_{1p} — x_1 кучи йўналишида, Δ_{2p} — x_2 кучи йўналишида ташқи кучлар таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Агар (7.3) да ифодааланган каноник тенгламаларнинг тузилишига жиддий эътибор берсак, унинг ёзилишида маълум қонуният борлигини пайкаш қийин эмас. Шу қонуниятдан фойдаланиб системанинг статик ноаниклик даражасига қараб, каноник тенгламаларни керагича туза оламиз. Бинобарин, система (масалан, рама) неча номаълумли бўлса, тенгламалар сони ўшанча бўлади. Масалан, уч номаълумли рама учун каноник тенгламалар қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned}X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \text{ ва х.к.}\end{aligned}\quad (7.4)$$

(7.3) ва (7.4) да ифодаланган каноник тенгламаларда номаълум сифатида кучлар ($X_1, X_2, X_3 \dots$) турибди. Мазкур усулнинг «кучлар» усули деб аталишининг сабаби ҳам айнан ана шунда. Ушбу тенгламалардаги бирлик кўчишлар (δ_{ik}) — коэффициент, ташки кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар (Δ_{ip}) эса озод ҳад вазифасини ўтайди. Кўчишларнинг ўзаро муносабати ҳақидаги Максвел теоремасига биноан $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ бўлади.

Бир хил индексли бирлик кўчишлар (δ_{11}, δ_{22}) нинг ишоралари ҳамيشа мусбат бўлади. Шу сабабли улар ҳеч қачон нолга айланмайди ва ҳамма вақт тенглама таркибида иштирок этади. Шу сабабли улар бош кўчишлар деб аталади.

Турли индексли кўчишлар ($\delta_{12}, \delta_{13} \dots$) эса мусбат ва манфий ишораларга эга бўлиши ва демак, ноль бўлиши ҳам мумкин. Шунинг учун булар иккинчи даражали кўчишлар деб аталади.

7.4. КАНОНИК ТЕНГЛАМА КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ ВА ОЗОД ҲАДЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Кучлар усулининг каноник тенгламаларини ечиш учун, яъни улардаги номаълум кучлар ва моментларни аниқлаш учун аввал тенгламаларнинг коэффицентлари ва озод ҳадлари топилади.

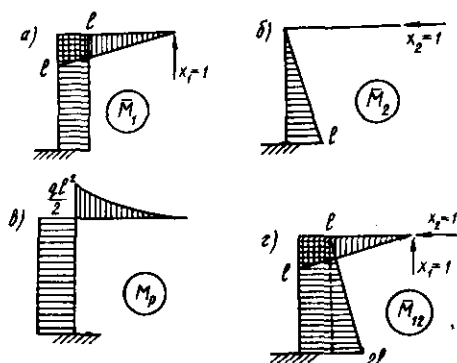
Маълумки, каноник тенгламаларнинг коэффицент ва озод ҳадлари кўчишлардир. Шунинг учун уларни аниқлашда 6-бобда баён этилган кўчишлар назариясидан фойдаланамиз.

7.6- расмдаги раманинг кўчишларини аниқлаймиз. Бунинг учун бирлик кучлар таъсирида эгувчи моментларнинг бирлик эпюраларини (7.7- расм, а, б) қуриб оламиз. Ташки кучлар таъсиридаги M_p эпюраси 7.7- расм, в-да акс эттирилган.

Бирлик кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\delta_{11} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx;$$

$$\delta_{22} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx.$$



7.7- расм

Бу ерда $\bar{M}_1$ — асосий системанинг исталган кесимда бирлик куч $x_1=1$ дан ҳосил бўлган момент;

$\bar{M}_2$ — ўша кесимда $x_2=1$ кучидан ҳосил бўлган момент;

n — рама стерженлари сони.

Ташқи юклардан ҳосил бўлган кўчишлар қуйидаги формулалардан топилади:

$$\Delta_{1P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx \quad \delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx.$$

Верешчагин формуласидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюраларидан (7.7- расм, а, б) қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EJ}; \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{5ql^4}{8EJ}; \quad \Delta_{2P} = -\frac{ql^4}{4EJ}.$$

Бу ерда $J_1=J_2=J$ деб олинган.

Тўғри ечимга эга бўлиш учун кўчишлар тўғри топилган бўлиши керак. Буларнинг тўғри ёки нотўғри топилганлигини текшириб кўrsa бўлади. Икки хил текшириш бор: каторма-катор текшириш ва ялпи текшириш.

Текшириш учун бирлик эпюраларни кўшиб, йиғинди эпюра ($\bar{M}_{12}$) курилади (7.7- расм, г). Каторма-катор текшириш қуйидаги формула асосида амалга оширилади:

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EJ} dx; \quad (7.7)$$

яъни каноник тенгламанинг биринчи каторидаги коэффициентлар йиғиндиси $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг чикса, у ҳолда бу кўчишлар тўғри топилган бўлади.

Худди шунингдек, тенгламанинг иккинчи катори куйидагича текширилади:

$$(\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_{12}}{EI} dx \quad (7.8)$$

яъни кўчишлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси $\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасига тенг бўлади.

Ялпи текширишда барча коэффициентлар йиғиндиси, $(\bar{M}_{12}) \cdot (\bar{M}_{12})$ кўпайтмасига тенг бўлиши зарур, яъни

$$(\delta_{11} + \delta_{12}) + (\delta_{21} + \delta_{22}) = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EI} dx \quad (7.9)$$

Топилган коэффициентларни тўлиқ текшираимиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12}^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l^3 \cdot \frac{3}{2} l + \frac{l^2}{2} \cdot \frac{5}{3} l \right) = \frac{8l^3}{3EI}.$$

Бирлик кўчишлар йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{4}{3} l^3 + \frac{1}{3} l^3 + l^3 \right) = \frac{8l^3}{3EI}.$$

Кўпайтма йиғиндига тенг чикди. Демак, кўчишлар тўғри топилган.

Энди биринчи катор коэффициентларини текшираимиз:

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{11l^3}{6EI}.$$

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_{12}$ эпюраларининг кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$\sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_{12}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot \frac{23}{2} l \right) = \frac{11l^3}{6EI}$$

Бу ерда ҳам йиғинди кўпайтмага тенг чикди. Шундай бўлиши ҳам керак эди.

Нихоят озод ҳадларни текшираимиз:

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \sum_n \int_0^l \frac{\bar{M}_{12} M_P}{EI} dx; \quad (7.10)$$

яъни озод ҳадлар йиғиндиси $\bar{M}_{12}$ эпюраси билан M_p эпюрасининг кўпайтмасига тенг бўлиши керак. Бу шартнинг бажарилиши озод ҳадларнинг тўғри топилганлигини англатади.

Кўчишлар, яъни коэффициент ва озод ҳадлар тўғри топилганига ишонч ҳосил қилинганча, уларни каноник тенгламаларга қўямиз. Тенгламаларни биргаликда ечиб, номаълум кучларни аниқлаймиз:

$$X_1 \cdot \frac{4l^3}{3} + X_2 \cdot \frac{l^3}{2} - \frac{5ql^4}{8} = 0;$$

$$X_1 \cdot \frac{l^3}{2} + X_2 \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{4} = 0.$$

Бу ердан

$$X_1 = \frac{3ql}{7} \text{ ва } X_2 = \frac{3ql}{28}$$

келиб чиқади.

7.5. СТАТИК НОАНИК РАМАЛАРНИНГ M, Q ВА N ЭПЮРАЛАРИНИ ҚУРИШ

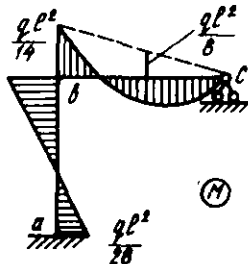
Каноник тенгламалардан ортиқча номаълумлар ($X_1, X_2, \dots$) аниқланганча, раманинг натижавий, яъни тугал M эпюраси қурилади. Исталган кесимдаги моментнинг қиймати қўшиш усулида аниқланади:

$$M = M_p + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + \dots + X_n \bar{M}_n \quad (7.11)$$

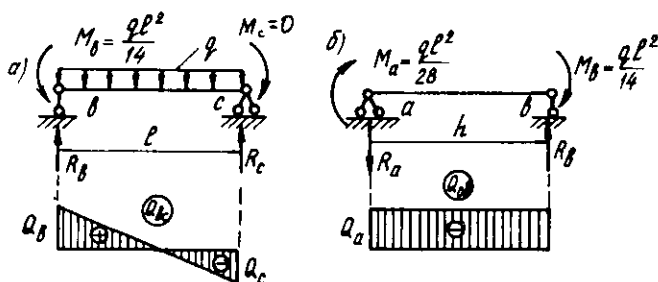
Бу ерда M_p — статик аниқ асосий системада ташқи юклардан ҳосил бўлган момент; $\bar{M}_1$ — асосий системада $X_1 = 1$ кучидан ҳосил бўлган момент.

X_1 кучининг ҳақиқий қиймати таъсирида ҳосил бўлган моментни топиш учун $\bar{M}_1$ моментини X_1 га кўпайтирамиз, яъни X_1 таъсиридаги ҳақиқий момент $X_1 \bar{M}_1$ бўлади. Бу қоида бошқа номаълумлар ($X_2, X_3, \dots, X_n$) га ҳам тегишлидир.

7.6-расмда берилган икки номаълумли раманинг мазкур усулда қурилган M эпюраси 7.8-расмда акс этган. Расмда ригелнинг ўртасидаги момент ҳам кўрсатилган. Раманинг эгувчи моментлар эпюраси ҳамма вақт стержен-



7.8-расм



7.9- расм

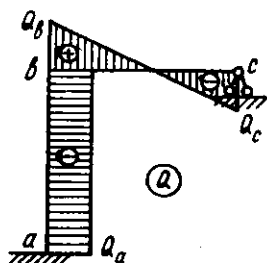
нинг толалари чўзилган томонга чизилишини эслатиб ўтамиз.

Статик ноаниқ раманинг якунловчи M эпюрасини қуриб бўлдик. Бу билан ҳисобнинг энг муҳим ва мураккаб қисми тугади. Энди кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраларини қуришга киришсак бўлади. Нега деганда M эпюраси асосида Q эпюраси, Q эпюраси асосида N эпюраси қурилади.

Q эпюрасини қуриш учун раманинг стерженларини алоҳида бўлақларга ажратамиз ва уларни бир ораликли статик аниқ балкалар сифатида ҳисоблаймиз. Бунда балкаларга ташқи кучлардан ташқари раманинг M эпюрасидан олинган тугун моментлари ҳам қўйилади. 7.9- расмда 7.6- расм, а-да берилган раманинг алоҳида балкаларга ажратилиши ва тегишли эпюралари тасвирланган. 7.9- расм, а-да bc ригели, 7.9- расм, б-да ab устуни балка кўринишида акс эттирилган ҳамда ташқи куч ва тугун моментлари кўрсатилган. Оддий балканинг Q эпюраси материаллар қаршилиги курсида баён этилган қоидалар асосида қурилади.

Ишнинг охирида алоҳида балкалар учун қурилган Q эпюраси рама ўкига тўпланади (7.10- расм).

Энди Q эпюраси асосида N эпюрасини қурамиз. Бунда ригелга қўйилган кўндаланг кучлар устун учун бўйлама куч, устунга қўйилган кўндаланг кучлар эса ригел учун бўйлама куч бўлади деган қоидага асосланамиз. Бўйлама куч



7.10- расм

стерженни чўзса — мусбат, сикса — манфий ишора олинади.

Бўйлама кучларни аниқлаш учун Q эпюраси қурилган раманинг тугунлари бирин-кетин қирқиб олинади ва тугуннинг мувозанати текширилади. Энг аввал икки стерженли, кейин ундан ортиқ стерженли тугунлар қирқилади. Икки стерженли тугуннинг (7.11- расм, а) мувозанат шартларидан N_1 ва N_2 бўйлама кучлари аниқланади:

$$\sum Y = N_1 - Q_1 = 0; N_1 = Q_1;$$

$$\sum X = P + Q_2 - N_2 = 0; N_2 = -(P + Q_2).$$

Уч стерженли тугуннинг (7.11- расм, б) мувозанат шартидан N_3 аниқланади:

$$\sum Y = Q_3 - Q_1 - N_3 = 0; N_3 = Q_1 - Q_3.$$

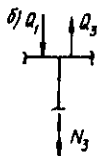
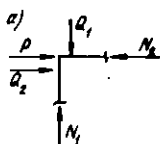
Қолган стерженлардаги бўйлама кучлар ҳам шу тартибда аниқланади.

Биз текшираётган раманинг (7.6- расм) бўйлама кучлар эпюрасини қуриш учун унинг Q эпюрасидан b тугунни қирқиб оламиз (7.12- расм, а) ва мувозанат шартларини ёзамиз:

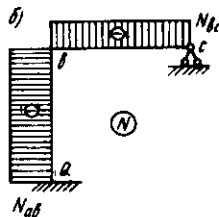
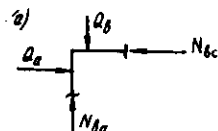
$$\sum X = Q_a - N_{bc} = 0; \text{бу ердан } N_{bc} = Q_a;$$

$$\sum Y = N_{ba} - Q_b = 0; \text{бу ердан } N_{ba} = Q_b.$$

Аниқланган қийматлар бўйича раманинг N эпюраси қурилади (7.12- расм, б).



7.11- расм



7.12- расм

Текшириш. Рамаларнинг статик ноаниклик даражаси ортган сари ҳисоблаш ишлари мураккаблашиб бораверади. Бундай ҳолларда ҳисоб натижаларини текшириш муҳим аҳамият касб этади. Олдинги параграфда каноник тенглама коэффицентлари ва озод ҳадларини текширишни ўрганган эдик. Бу сафар тугал M , Q ва N эпюраларини текширишни ўрганамиз. M , Q , N эпюраларини текширишнинг икки усули бор: статик текшириш ва деформацион текшириш. Эпюраларни статик текширганда, яхлит рама ёки унинг айрим қисмлари ва тугунлари учун мувозанат шартлари тузилади. Бунда раманинг барча таянч реакцияларини вертикал ўққа бўлган проекциялари йиғиндиси ташқи юкларнинг вертикал проекциялари билан мувозанатда бўлиши лозим: бирор нуктага нисбатан таянч реакцияларидан олинган моментлар йиғиндиси шу нуктага нисбатан ташқи кучлардан олинган моментлар йиғиндисига тенг бўлиши зарур.

Раманинг ҳар бир тугуни эгувчи моментлар таъсирида мувозанатда ётиши керак, бунинг учун бир тугунга туташган ригель ва устундаги ординаталар ўзаро тенг бўлиши лозим. Тугунлардаги кўндаланг ва бўйлама кучлар алоҳида қаралганда, мувозанатда бўлмайди, бироқ биргаликда қаралганда тугун мувозанатда ётиши зарур. M , Q ва N эпюраларини статик текшириш уларнинг тўғри қурилганига кафолат бўлаолмайди, чунки статик мувозанат шартлари номаълумлар хато топилган тақдирда ҳам бажарилаверади. Бунинг сабаби шундаки, раманинг тугал M эпюраси статик аниқ асосий система учун қурилган. Агар ташқи юк ва аниқланган номаълумлар таъсирида эпюра тўғри қурилса, у ҳолда номаълумларнинг исталган қийматида рама статик мувозанат ҳолатида бўлаверади. Натижада номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хато очилмай қолаверади.

Деформацион текшириш ортикча номаълумларни аниқлашда йўл қўйилган хатоларни пайқаш имконини беради. Ҳисоб натижаларини деформацион текширишда асосий системаларга қурилган бирлик эпюралар (M_1 , M_2) раманинг тугал M эпюраси билан навбатма-навбат кўпайтирилади. Агар ортикча номаълумлар тўғри аниқланиб, эпюралар тўғри қурилган бўлса, бундай кўпайтма нолга тенг чиқади.

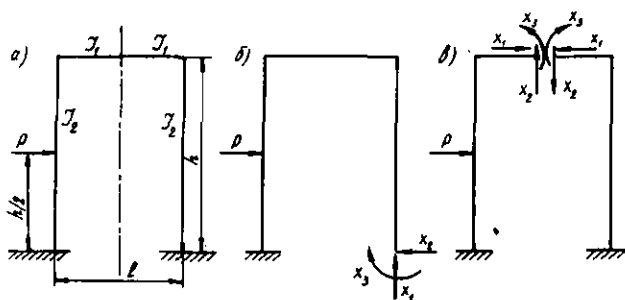
7.6. СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА СОДДАЛАШТИРИШ УСУЛЛАРИ

Каноник тенгламалар сони системадаги ортиқча номаълумлар сонига тенг бўлишини илгари айтиб ўтган эдик. Демак, системанинг статик ноаниқлик даражаси ортгани сари каноник тенгламалар ҳам ортиб боради, уларни биргаликда ечиш учун тобора кўпроқ вақт ва меҳнат талаб этилади. Аниқ усулларда берилган системадаги номаълумлар сонини камайтириб бўлмайди, бироқ ҳисоблаш ишларини бирмунча осонлаштириш имконини берадиган соддалаштириш усуллари мавжуддир. Қуйида ана шу усулларнинг баъзилари билан танишиб чиқамиз.

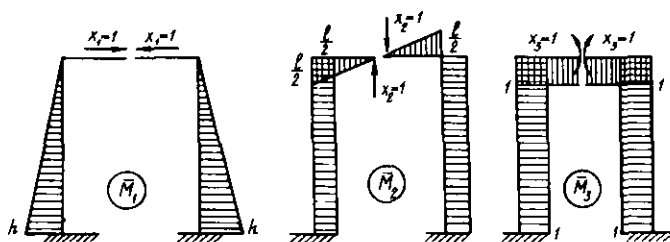
Системаларнинг симметриклигидан фойдаланиш

Симметрик рамалар фақат геометрик шаклига кўра эмас, балки таянчлари ва бикирликлари бўйича ҳам симметрик бўлиши лозим. Шунда уларнинг симметриклигидан фойдаланиб баъзи соддалаштиришларга эришиш мумкин. 7.13-расм, а-да симметрик статик ноаниқ рама тасвирланган. Рама битта вертикал симметрия ўқиға эға. Раманинг чап ва ўнг таянчлари бир хил. Раманинг ҳар иккала устун, шунингдек ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бир хил инерция моментига эға, бу ҳар иккала устун бир хил бикирликка эға, ригелнинг чап ва ўнг қисмлари бикирликлари ўзаро тенг демакдир.

Агар раманинг асосий системасини 7.13-расм, б-да кўрсатилгандек олсак, ҳисоб жараёнида ҳеч қандай



7.13-расм



7.14- р а с м

соддалашувга эришмаймиз, уч номаълумли учта каноник тенгламалар системаси ўзгаришсиз қолаверади:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Агар раманинг асосий системасини 7.13- расм, в-даги кўринишда олсак, каноник тенгламалар системаси анча ихчамлашади. Раманинг асосий системасини ҳосил қилишда уни симметрия ўқи ўтган кесимдан қирқдик. Бу асосий системанинг бирлик эпюраларини қурсак, симметрик ($\bar{M}_1$, $\bar{M}_3$) ва тескари симметрик ($\bar{M}_2$) эпюралар ҳосил бўлади (7.14- расм).

Тўғри ва тескари симметрик эпюраларнинг кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Бу қоида каноник тенглама коэффициентларини аниқлашда жуда қўл келади. Чунончи, δ_{12} коэффицентини аниқлашда $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюралар Верещагин формуласи бўйича ўзаро кўпайтирилиши керак. Бирок эпюраларнинг бири симметрик, иккинчиси тескари симметрик бўлгани учун кўпайтма ноль чиқишини олдиндан биламиз. Шундай қилиб,

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0.$$

$\bar{M}_2$ ва $\bar{M}_3$ эпюраларининг кўпайтмасидан $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ келиб чиқади. Бунинг оқибатида каноник тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0; \end{aligned}$$

яъни яхлит тенгламалар системаси (7.12) иккита мустакил тенгламалар системасига ажралиб кетди: булардан бири

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0; \end{aligned} \quad (7.13)$$

иккинчиси

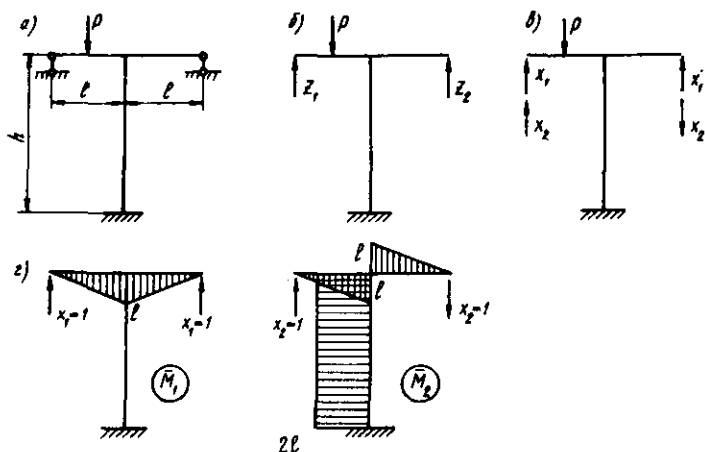
$$X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0. \quad (7.14)$$

Шундай қилиб, асосий система танлаш жараёнида раманинг симметриклик хусусиятларидан фойдаланиб, уч номаълумли яхлит тенгламалар системасини иккита мустакил тенгламалар системасига ажратдик, буларнинг бири икки номаълумли иккита тенглама, иккинчиси бир номаълумли битта тенглама. Натижада ҳисоб ишларини анча қисқартириш имкониятига эга бўлдик.

Номаълумларни гуруҳлаш

Қўп ораликли симметрик рамаларни ҳисоблашда тўғри ва тескари симметрик бўлган эпюралар ҳосил қилиш учун номаълумлар сифатида алоҳида кучлар эмас, балки кучлар гуруҳи қабул қилинади. Икки номаълумли рама мисолида усулнинг моҳиятини баён этамиз (7.15- расм, а).

Берилган рама икки ораликли бўлиб, шарнирли қўзғалувчан таянчлар устунга нисбатан симметрик жой-



7.15- расм

лашган. Раманинг асосий системасини таянчларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қиламиз. Йўкотилган боғланишлар ўрнига номаълум реакция кучларини қўямиз (7.15- расм, б). Бироқ асосий системани бундай олиниши ҳисоб ишларини соддалаштиришга олиб келмайди, каноник тенгламалар системаси яхлитлигича қолаверади:

$$Z_1\delta_{11} + Z_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$Z_1\delta_{21} + Z_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Ҳисоб жараёнида маълум даражада соддалашувга эришиш мақсадида Z_1 реакциясини X_1 ва X_2 номаълумларининг йиғиндиси билан, Z_2 реакция кучини эса X_1 ва X_2 номаълумларининг айирмаси билан алмаштирамиз (7.15- расм, в). Натижада якка кучлар кучлар гуруҳи билан алмашади. Бунинг оқибатида тўғри ($\bar{M}_1$) ва тескари ($\bar{M}_2$) симметрик эпюраларга эга бўламиз (7.15- расм, г). Маълумки, бундай эпюралар қўпайтмаси нолга тенг бўлади, Шунга кўра $\delta_{12} = 0$. Каноник тенгламалар системаси эса алоҳида иккита мустақил тенгламаларга ажралиб кетади:

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{1p} = 0; \quad X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

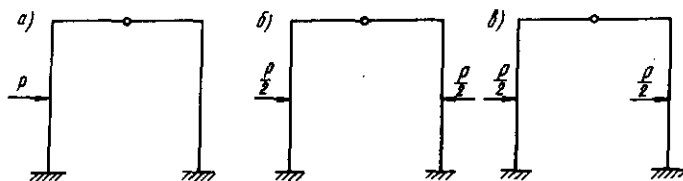
Мазкур тенгламалардан X_1 ва X_2 номаълумлари аниқланади, сўнгра яқунловчи M эпюраси курилади.

$$M = M_p + X_1\bar{M}_1 + X_2\bar{M}_2.$$

Носимметрик юкларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш

Агар статик ноаник симметрик рамаларга қўйилган юклар носимметрик бўлса, уларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли билан ҳисоб ишларини бир мунча соддалаштирса бўлади.

Симметрик рамага носимметрик P кучи қўйилган бўлсин (7.16- расм, а). Шу кучни иккига бўлиб, тўғри ва тескари симметрик кучларга ажратамиз (7.16- расм, б, в). Кучлар шундай ажратилиши керакки, уларни қайтадан қўшганда, дастлабки куч ҳолати келиб чиқсин. Масалан, раманинг чап устунига (расм, б, в) бир йўналишда миқдори $P/2$ бўлган иккита куч қўйилган, буларнинг йиғиндиси P га тенг бўлади. Раманинг ўнг устунига эса ўша кучлар карама-қарши йўналишда қўйилган, бу



7.16- расм

кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади, натижада дастлабки куч ҳолати келиб чиқади.

Шундай қилиб, тўғри ва тескари симметрик кучлар қўйилган иккита рамага эга бўлдиқ (7.16- расм, б, в). Энди бу рамалар алоҳида равишда ҳисобланади, тўғри симметрик кучлардан $M_{\text{тўғ}}$ эпюраси, тескари симметрик кучлардан $M_{\text{тес}}$ эпюраси курилади. Раманинг берилган кучдан ҳосил бўладиган ҳақиқий M эпюраси тўғри ва тескари симметрик эпюралар йиғиндисидан иборат бўлади.

Носимметрик равишда жойлашган турли хил ташқи кучларни тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратиш йўли 7.17- расмда кўрсатилган.

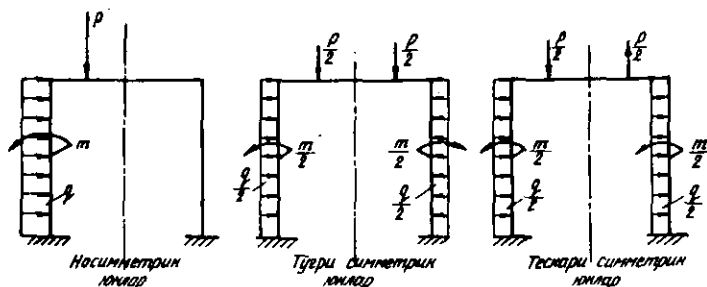
Мисол. 7.18- расм, а-да кўрсатилган рама куч усулида ҳисоблансин. Рама элементларининг ўлчамлари шаклда кўрсатилган.

Ечиш. Статик ноаниқ рамани куч усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

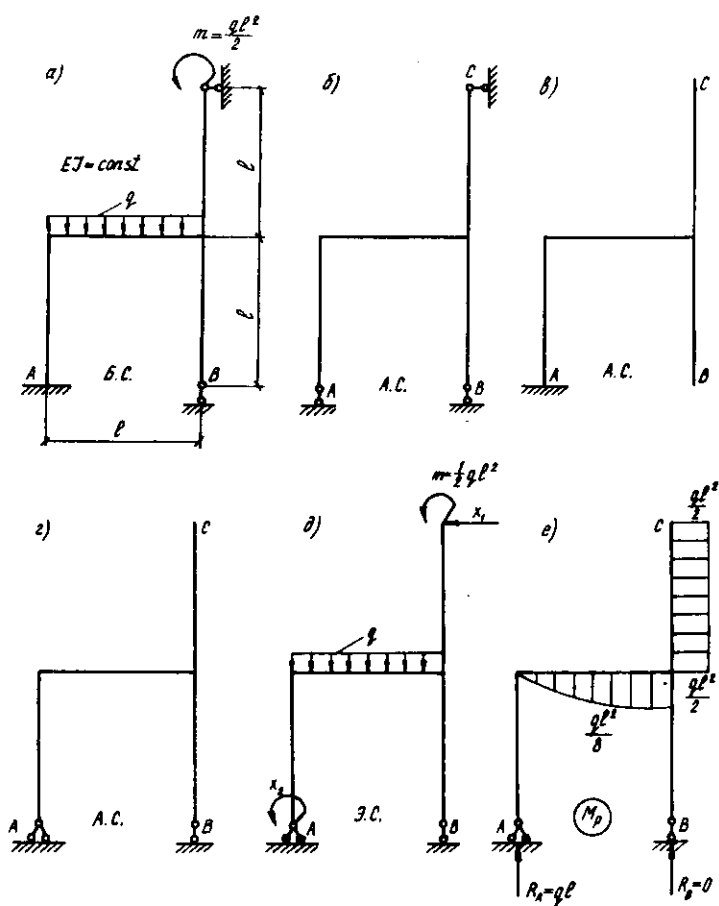
1. $L=3K-\text{Ш}$ формуласи ёрдамида раманинг статик ноаниқлик даражаси аниқланади.

Контурлар сони $K=2$, шарнирлар сони $\text{Ш}=4$, $L=3 \cdot 2 - 4 = 2$. Берилган раманинг статик ноаниқлик даражаси 2 га тенг экан.

2. Асосий система танланади. Асосий система вариантлари б, в, г шаклларда кўрсатилган. Ҳисоблаш учун



7.17- расм

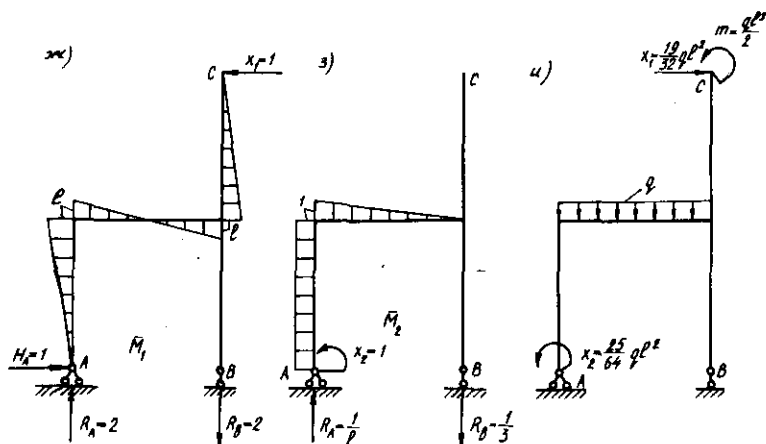


улар ичидан энг кулайини танлаб оламиз. Булар ичида «Г» варианты энг кулайидир.

3. Асосий системага ташки куч ҳамда X_1 ва X_2 зўриқишларни қўйиб, эквивалент система ҳосил қиламиз (7.18- расм, д). Ортикча боғланишлар йўналишидаги кўчишлар нолга тенглигини ифодаловчи каноник тенгламалар тузамиз:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$



7.18. расм

4. Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системада ташки куч ва бирлик кучлардан эгувчи моментлар эпюраларини курамыз (е, ж, з шакллар).

5. Кўчишларни аниқлашда Верещагин кондасидан фойдаланамиз (6.11).

$$\delta_{11} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{7}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} l \cdot 2 =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ} = \frac{l^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} l \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l}{EJ} + \frac{l}{3EJ} = \frac{4l}{3EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{1}{3} l =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l^2}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{l^2}{EJ} - \frac{1}{6} \frac{l^2}{EJ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l^2}{EJ};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} l + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l =$$

$$= 0 = \frac{1}{2} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{ql^4}{12EJ} + 0 = \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{ql^4}{EJ};$$

$$\Delta_{2p} = \frac{-1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= -\frac{1}{12} \frac{ql^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI} = -\frac{3}{24} \frac{ql^3}{EI} = -\frac{1}{8} \frac{ql^3}{EI}.$$

6. Топилган коэффициент ва озод ҳадларни каноник тенгламаларга қўйиб, X_1 ва X_2 номаълумларини аниқлай-
миз: $X_1 = \frac{19}{32} ql^2$, $X_2 = \frac{25}{64} ql^2$.

7. Асосий системага ташқи кучлар ҳамда топилган X_1 ва X_2 реакция кучларини қўйиб (7.18- расм, и) эгувчи моментлар (M), кўндаланг (Q) ва бўйлама (N) кучлар эпюраларини қурса бўлади.

8. Натижавий M эпюрасини, кучлар таъсирининг мустикаллиги кондасидан фойдаланиб куришимиз ҳам мумкин:

$$M = M_p + M_{x1} + M_{x2} = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Формуланинг иккинчи ва учинчи ҳадларини ҳосил қилиш учун $\bar{M}_1$ эпюра ординаталарини X_1 га кўпайтирамиз. Ҳосил бўлган эпюралар тузатилган эпюралар деб аталади (7.19- расм, а, б). Натижавий M эпюраси 7.19- расм, в да берилган.

9. Кўндаланг кучлар эпюраси Q ни қуйидаги формула асосида курамиз:

$$Q = Q_x^0 + \frac{M_{\text{ўнг}} - M_{\text{чап}}}{l}.$$

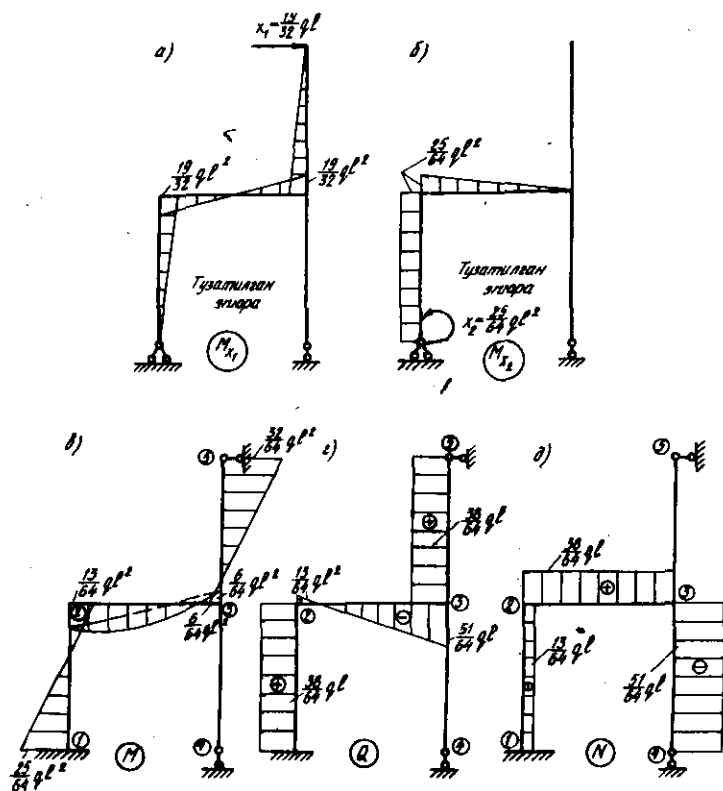
Бу ерда Q_x^0 — оддий балканинг ихтиёрий кесимидаги кўндаланг куч;

$M_{\text{ўнг}}$ $M_{\text{чап}} - M_p$ эпюрасидаги ораликнинг ўнг ва чап ординаталари.

$$Q_{12} = \frac{\frac{13}{64} ql^2 - \left(-\frac{25}{64} ql^2\right)}{l} = \frac{38}{64} ql;$$

$$Q_2 = \frac{ql}{2} + \frac{-\frac{6}{64} ql^3 - \frac{13}{64} ql^2}{l} = \frac{13}{64} ql;$$

$$Q_3 = -\frac{ql}{2} + \frac{-\frac{6}{64} ql^3 - \frac{13}{64} ql^2}{2} = -\frac{51}{64} ql;$$



7.19- расм

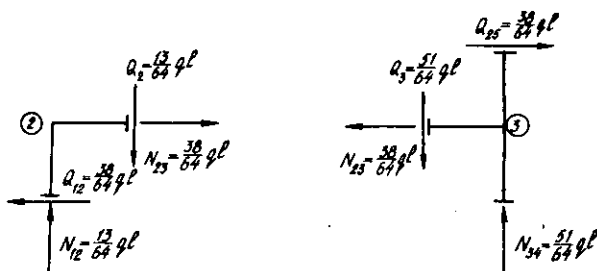
$$Q_{34} = 0;$$

$$Q_{35} = \frac{\frac{32}{64}ql^2 - \left(-\frac{6}{64}ql^2\right)}{l} = \frac{38}{64}ql;$$

Топилган ординаталар бўйича аввал Q , сўнгра N эпюралари қурилади (7.19- расм, г, д).

10. Бўйлама кучлар эпюраси N ни қуришда тугунлар мувозанатидан фойдаланамиз. Биринчи навбатда икки элементни бириктирувчи тугуннинг мувозанати қўрилади.

Мусбат ишорали қўндаланг кучлар тугунни соат стрелкаси йўналишида айлантиради (7.20- расм).



7.20- расм

2- тугун мувозанатидан

$$\Sigma y = 0; N_{12} - Q_2 = 0; N_{12} = Q_2 = \frac{13}{64}ql;$$

$$\Sigma x = 0; N_{23} - Q_{12} = 0; N_{23} = Q_{12} = \frac{38}{64}ql.$$

3- тугун мувозанатидан

$$\Sigma y = 0; N_{34} - Q_3 = 0; N_{34} = Q_3 = \frac{51}{64}ql;$$

$$\Sigma x = 0; N_{23} - Q_{35} = 0; N_{23} = Q_{35} = \frac{38}{64}ql.$$

11. Текшириш.

Ҳисоб натижалари икки хил йўл билан текширилади. Улардан бири деформацион текшириш деб аталади. Бунда натижавий М эпюраси текширилади. Бунинг учун натижавий эпюра бирорта бирлик эпюра билан кўпайтирилади. Агар кўпайтма ноль чикса, демак ҳисоб тўғри бажарилган бўлади.

Верешчагин формуласидан (6.11) фойдаланиб, натижавий М эпюрасини аввал M_1 , сўнгра M_2 бирлик эпюралари билан кўпайтираамиз.

$$\begin{aligned} \Delta_1 = (M\bar{M}_1) &= \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{25}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot \\ &\cdot l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{13}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{6}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l + \\ &+ \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \frac{8}{64} ql^2 \cdot l \cdot 0 - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{6}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \\ &+ \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \frac{32}{64} ql^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l = \frac{ql^4}{64EJ} \left(\frac{125}{6} - \frac{25}{6} - \frac{13}{6} - \frac{6}{6} + \right. \\ &\left. + 0 - \frac{12}{6} + \frac{32}{6} \right) = \frac{ql^4(57-57)}{384EJ} = 0; \end{aligned}$$

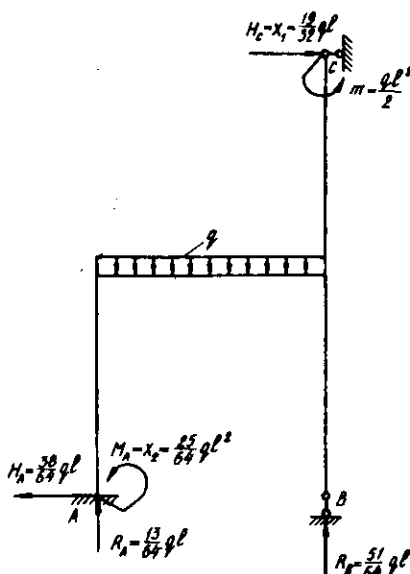
$$\begin{aligned}\Delta_2 = (M \cdot \bar{M}_2) &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{64} q l^2 \cdot l \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} q l^2 \cdot l \cdot \\ &\cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} q l^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} q l^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} l - \frac{1}{EJ} \cdot \\ &\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{64} q l^2 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{q l^3}{64 EJ} \left(\frac{25}{2} - \frac{13}{2} - \frac{13}{2} - \frac{13}{3} + 1 - \frac{8}{3} \right) = \\ &= \frac{q l^3 (75 - 39 - 26 + 6 - 16)}{384 EJ} = \frac{q l^3 (81 - 81)}{384 EJ} = 0.\end{aligned}$$

Кўчишларнинг нолга тенг келиши ҳисобнинг тўғри бажарилганлигини ифодалайди.

Энди системанинг мувозанат ҳолатини текшираемиз (статик текшириш). M , Q , N эпюраларидан системанинг таянч реакцияларини аниқлаймиз (7.21- расм):

$$M_A = X_2 \frac{25}{64} q l^2; R_A = \frac{13}{64} q l; H_A = \frac{38}{64} q l;$$

$$R_B = \frac{51}{64} q l; H_c = -X_1 = -\frac{19}{32} q l.$$



7.21- расм

$$1. \Sigma X = 0; H_A - H_c = 0; \frac{38}{64}ql - \frac{19}{32}ql = \frac{(38-38)ql}{64} = 0;$$

$$2. \Sigma Y = 0; R_A + R_B - ql = 0; \frac{13}{64}ql + \frac{51}{64}ql - ql = 0;$$

$$3. \Sigma m_A = 0; M_A + m - N_c \cdot 2l + R_B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\frac{25}{64}ql^2 + \frac{qt^2}{2} - \frac{19}{32}ql \cdot 2l + \frac{51}{64}ql \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0;$$

$$\frac{qt^2}{64}(25 + 32 - 76 + 51 - 32) = 0.$$

Мувозанат тенгламаларининг каноатлантирилиши системанинг мувозанатда эканлигини билдиради. Бу эса ҳисобнинг тўғрилигини тасдиқлайди.

8- боб

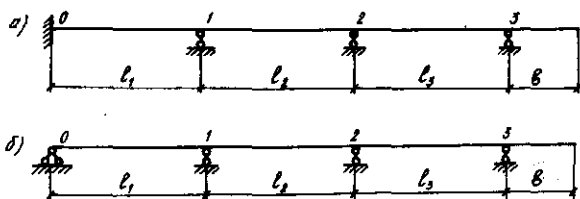
КУЧЛАР УСУЛИНИ СТАТИК НОАНИК БАЛКА, ФЕРМА ВА АРКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

8.1. УЗЛУКСИЗ БАЛКАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Бир неча ораликлардан ташкил топган ва чекка таянчлардан бири шарнирли кўзғалмас ёки бикир бўлган балка — узлуксиз балка деб аталади (8.1- расм.)

Мазкур параграфда узлуксиз балкалар ҳисобига кучлар усулининг тадбиқини кўриб ўтаёмиз. Иш узлуксиз балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини аниқлашдан бошланади:

$$n = 2Ш + C_m - 3D$$



8.1- расм

Бу ерда Ш — дискларни туташтирувчи оддий шарнирлар сони;

C_r — таянч стерженлари сони.

Узлуксиз балка яхлит балкадан ташкил топганлиги сабабли $D=1$; $Ш=0$ бўлади. У ҳолда юқоридаги формула қуйидаги кўринишга келади

$$n = C_r - 3 \quad (8.1)$$

8.1- расмда кўрсатилган балкалар статик аниқмасдир, чунки уларнинг ҳар бири учун номаълум таянч реакцияларининг сони статиканинг мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ.

Расмдаги балкаларнинг статик ноаниқлик даражасини (8.1) формула ёрдамида аниқлаймиз:

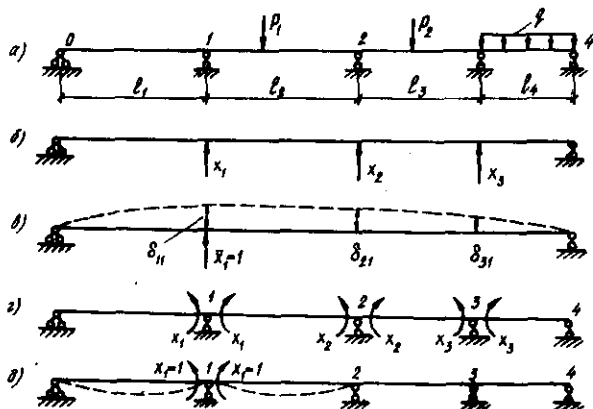
$$n = 6 - 3 = 3, \quad n = 5 - 3 = 2.$$

Демак, а- расмдаги балка уч марта, б- расмдагиси эса икки марта статик ноаниқ экан.

Узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражаси аниқланганидан сўнг унинг асосий системаси танланади.

8.2- расм, б-да тавсия этилган асосий система ташқи таянчларига кўра 8.2- расм, г-да тавсия этилган асосий система эса ички боғланишларига кўра ҳосил қилинган.

Ҳар иккала асосий система талабга тўлиқ жавоб беради, чунки ҳар иккаласи ҳам геометрик ўзгармас ва статик аниқдир.



8.2- расм

Узлуксиз балкаларни ҳар иккала асосий система бўйича ҳисобласа бўлади.

Умуман асосий системани шундай танлаш керакки, каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга айлансин ва танланган асосий система ҳар томонлама қулай бўлсин. Чунки асосий система ҳар томонлама қулай танланса, кейинги ҳисоб ишлари анча соддалашади. Шу нуктаи назардан юқоридаги икки асосий системани таҳлил қилиб кўрайлик.

Биринчи вариантда ифодааланган асосий системада номаълумларнинг йўналиши бўйича мавжуд бўладиган чизиқли кўчишлар нолга тенг бўлмайди, шу сабабли каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари ҳам тўлиқ сақланади.

Иккинчи вариант асосида танланган асосий система мустақил оддий статик аниқ балкалардан иборат бўлиб, айрим бурчакли кўчишлар нолга тенг бўлиши туфайли каноник тенгламанинг айрим ёрдамчи коэффициентлари нолга тенг бўлишига олиб келади.

Юқорида бажарилган таҳлил узлуксиз балкаларни ҳисоблашда иккинчи вариант максадга мувофиқ эканлигини кўрсатади.

Уч моментлар тенгламаси

Узлуксиз балканинг асосий системасини оддий бир оралиқли балкаларнинг йиғиндиси сифатида қабул қиламиз (8.3- расм, а).

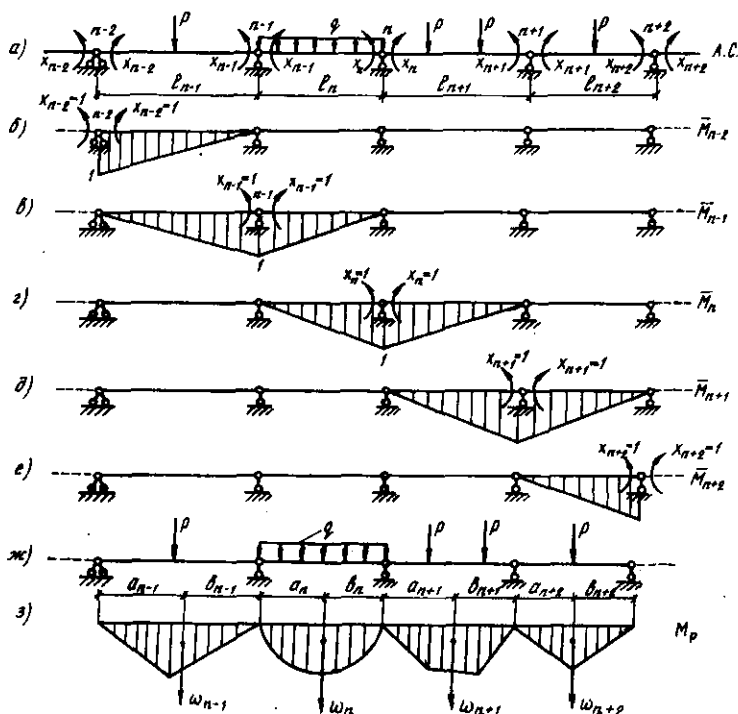
Бу асосий системада номаълумлар сифатида таянч кесимларида вужудга келадиган эғувчи моментлар (X_{n-2} , X_{n-1} , X_n , X_{n+1} , X_{n+2}) қабул қилинади. Номаълумларнинг йўналишини олдиндан айтиш қийин. Шу сабабли уларни пастки толачаларни чўзади деб шартли равишда қабул қиламиз. Номаълумларнинг ҳақиқий йўналиши тенгламанинг ечими натижасида ҳал этилади.

Каноник тенглама системасидан бирор каторини ёзамиз:

$$\dots + \delta_{n, n-2} \cdot X_{n-2} + \delta_{n, n-1} \cdot X_{n-1} + \delta_{n, n} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \delta_{n, n+2} X_{n+2} + \dots + \Delta_{np} = 0.$$

Бу ерда $\delta_{n, n} X_n$ — таянчнинг бурчакли кўчиши.

Каноник тенгламанинг коэффициент ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системани бирлик ва ташқи кучлар



8.3- расм

билан юклаймиз. Бирлик ва ташки кучлар таъсирида эгувчи момент эюпралари курилади (8.4- расм, б, в, г, д, е, ж, з).

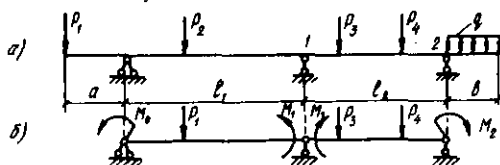
Эпюралардан фойдаланиб, каноник тенгламанинг айрим коэффицентлари (масалан, $\delta_{n,n-2}$, $\delta_{n,n+2}$) нолга тенг эканлигини билиб оламиз.

У холда n — таянч учун каноник тенглама куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{np} = 0.$$

Каноник тенгламанинг коэффиценти ва озод ҳадларини Мор интегралли, Верещчагин ёки Симпсон усулида аниқлаймиз.

$$\delta_{n,n-1} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n-1}}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \ln \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{\ln}{6EJ},$$



8.4-расм

$$\delta_{n,n} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} l_n \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \right] = \\ = \frac{1}{EI} \left[\frac{2l_n}{6} + \frac{2l_{n+1}}{6} \right] = \frac{2}{6EI} [l_n + l_{n+1}];$$

$$\delta_{n,n+1} = \Sigma \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n+1}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6EI};$$

$$\Delta_{np} = \Sigma \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EI} dx = \frac{1}{EI} [\omega_n \cdot y_c + \omega_{n+1} \cdot y_c] = \frac{1}{EI} \\ \left[\omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \omega_{n+1} \cdot \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}} \right];$$

Топилган озод хад ва коэффициентлар тенгламага кўйилиб, умумий махражга келтирилгандан сўнг у куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x_{n-1} \cdot l_n + 2x_n(l_n + l_{n+1}) + x_{n+1}l_{n+1} = \\ = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right);$$

Агар $x_{n-1} = M_{n-1}$, $x_n = M_n$, $x_{n+1} = M_{n+1}$ тарзида ал-маштирилса, у ҳолда куйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = \\ = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (8.2)$$

(8.2) уч моментлар тенгламаси деб аталиб, ҳар бир оралик таянчи учун алоҳида равишда тузилади. Тузиладиган тенгламалар сони узлуксиз балканинг статик ноаниқлик даражасига тенг бўлади.

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмини куйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n\phi \quad (8.3)$$

Бу ерда $R_n^\phi = A_n^\phi + B_n^\phi$,

$$A_n^\phi = \frac{\omega_n a_n}{l_n}, \quad B_{n+1}^\phi = \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}};$$

белгилари қабул қилинган.

Хусусий ҳоллар

1. Агар берилган узлуксиз балканинг консол қисми бўлса, у ҳолда консол таянч моментлари билан алмаштирилади.

Масалан, 8.4-расм, а-да берилган бир номаълумли узлуксиз балка учун уч моментлар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6R_1\phi.$$

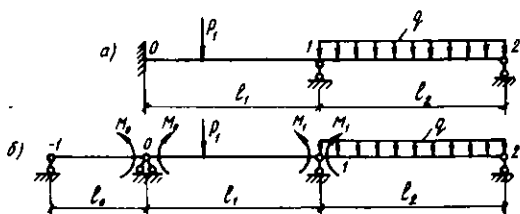
Шаклдан: $M_0 = -P_1 \cdot a$

$$M_2 = -\frac{qb^2}{2}$$

эканлиги кўриниб турибди.

Узлуксиз балканинг асосий системаси 8.4-расм, б-да тасвирланган.

2. Агар берилган балканинг чекка таянчларидан бири шарнирсиз бикир бўлса, (8.5-расм, а), у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча сохта оралик қўшилади. Бу ораликнинг узунлиги нолга тенг ва бикирлиги чексиз деб қабул қилинади (8.5-расм, б).



8.5-расм

Уч моментлар тенгламасидан номаълум таянч моментлари аниқлангандан сўнг берилган балканинг эгувчи момент ва қирқувчи куч эпюралари қурилади.

Эпюраларни қуриш учун асосий системадан ҳар бир оддий балка ажратиб олинади, ажратилган балкалар ташқи куч ва аниқланган таянч моментлар билан юкланади, сўнг эгувчи момент ва қўндаланг куч эпюралари қурилади.

Алоҳида қурилган эпюралар ягона ўқ устига жойлаштирилади. Натижада узлуксиз балканинг эгувчи момент ва қўндаланг куч эпюралари ҳосил бўлади.

8.2. УЗЛУКСИЗ БАЛКАЛАРНИ МОМЕНТ ФОКУСЛАРИ УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

Оралиқлари сони уч ва ундан ортиқ бўлиб, айрим оралиқлари ташқи кучлар билан юкланган бўлса, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш анча қулай бўлади.

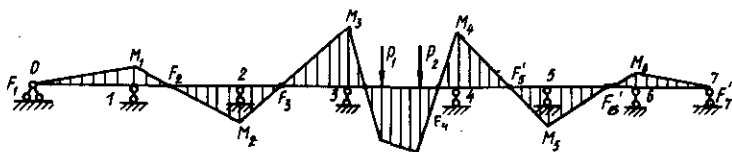
Бу усулни амалга ошириш учун уч моментлар тенгламасидан фойдаланиб, эгувчи момент эпюрасини қурамиз (8.6-расм).

Бу эпюра асосида қуйидаги ҳулосаларни келтириш мумкин: юк қўйилмаган оралиқларда эгувчи момент оғма чизиқлардан иборат бўлиб, балканинг ўқини кесиб ўтади ва ноль нуқталарни ҳосил қилади. Бу нуқталар момент фокуслари деб аталади.

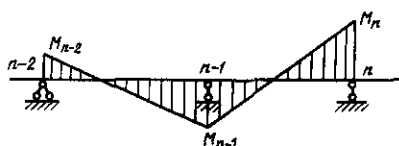
Агар ноль нуқталар юк қўйилган оралиққа нисбатан чап томонда жойлашган бўлса — чап момент фокуси деб аталади ва $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ деб белгиланади.

Агар ноль нуқталар юк қўйилган оралиқнинг ўнг томонида жойлашган бўлса — ўнг момент фокуси деб аталади ва $F'_1, F'_2, F'_3 \dots F'_n$ билан белгиланади.

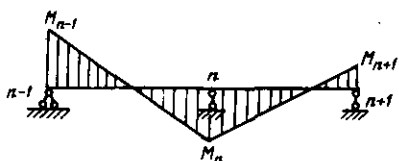
Узлуксиз балканинг юкланмаган оралиғидаги таянч моментларининг абсолют қийматлари нисбати — фокуслар нисбати деб аталади.



8.6-расм



8.7- расм



8.8- расм

Юк қўйилган ораликларда фокусларнинг ҳолати фокуслар нисбатлари орқали аниқланади. Фокус нисбатлари ўз навбатида чап ва ўнг нисбатларга бўлинади.

Масалан, 8.6- расмда тасвирланган эгувчи момент эпюрасидан чап ва ўнг фокус нисбатлари қуйидагича аниқланади:

Чап фокус нисбатлари, яъни

$$\frac{M_1}{M_0} = -K_1, \frac{M_2}{M_1} = -K_2, \frac{M_3}{M_2} = -K_3 \quad \text{бўлади.}$$

Ўнг фокус нисбатлари:

$$\frac{M_4}{M_5} = -K_5^I, \frac{M_5}{M_6} = -K_6^I, \frac{M_6}{M_7} = -K_7^I \quad \text{бўлади.}$$

Таянч моментлари ҳар хил ишорали бўлгани учун фокус нисбатлари манфий ишорага эга бўлади.

Шунга ўхшаш узлуксиз балканинг юкланмаган n — оралиғи учун чап фокус нисбати қуйидагича аниқланади (8.7- расм):

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = -K_n. \quad (8.4)$$

Агар узлуксиз балканинг юкланмаган « n » оралиғи юк қўйилган ораликка нисбатан ўнг томонда бўлса, у ҳолда шу оралик учун ўнг фокус нисбати қуйидагича ифодаланади (8.8- расм):

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -K_n^I. \quad (8.5)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган n — ораликнинг чап томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи чап фокусдан ўтади: юкланмаган ораликнинг таянч моментлари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}}. \quad (8.6)$$

Агар юкланмаган оралик юк қўйилган ораликнинг ўнг томонида жойлашган бўлса, у ҳолда эгувчи моментлар эпюрасининг чизиғи ўнг фокусдан ўтади ва номаълум таянч моментлари қуйидаги ифодадан аниқланади:

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}}. \quad (8.7)$$

Демак, узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш учун биринчи навбатда, фокус нисбатлари ва юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари аниқланган бўлиши керак. Чап фокус нисбатларини аниқлаш учун юк қўйилган ораликдан чап томонда жойлашган ораликлар учун уч моментлар тенгламасини тузамиз. Узлуксиз балканинг биринчи таянчи учун (8.7- расм) уч моментлар тенгламаси (8.2- расм) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0.$$

Шаклдан $M_0 = 0$ ва тенгламанинг ўнг қисми ноль эканлиги кўриниб турибди. У ҳолда:

$$\frac{M_2}{M_1} = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad \text{бўлади.}$$

(8.4) формулага асосан $\frac{M_2}{M_1} = -K_2$ деб белгиласак,

$$K_2 = 2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad (8.8) \quad \text{келиб чиқади.}$$

Энди иккинчи таянч учун ($n=2$) уч моментлар тенгламасини ёзамиз:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = 0.$$

Тенгламанинг барча ҳадларини M_2 га бўлсак,

$$\frac{M_1}{M_2} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) + \frac{M_3}{M_2} \cdot l_3 = 0.$$

келиб чиқади.

Бу тенгламадаги таянч моменти нисбатларини (8.6) формулага асосан чап фокус нисбатлари оркали ифодалаймиз:

$$-\frac{1}{K_1} \cdot l_2 + 2(l_2 + l_3) - K_2 l_3 = 0.$$

Бу тенгламадан иккинчи оралик учун чап фокус нисбати аниқланади:

$$K_2 = \left[2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{K_1} \right) \right] \quad (8.9)$$

Буларни умумлаштириб, n — нчи оралик учун фокуслар нисбати K_n ни қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$K_n = \left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right]. \quad (8.10)$$

Шу тартибда ўнг фокус нисбатлари аниқланади:

$$K_n^I = \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}^I} \right) \right]. \quad (8.11)$$

Чап фокус нисбатларини аниқлаш узлуксиз балканинг биринчи оралиғидан, ўнг фокус нисбатларини ҳисоблаш эса охириги оралиғидан бошланади.

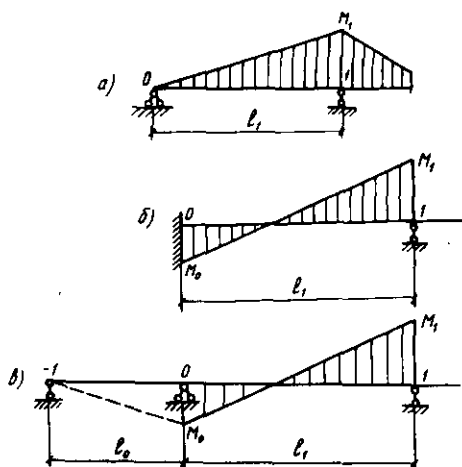
Биринчи ва сўнгги оралиқларнинг фокус нисбатлари таянчлар хилига боғлиқ ҳолда аниқланади.

Агар балканинг биринчи таянчи шарнирли бўлса, у ҳолда биринчи оралик учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишга эга бўлади (8.9- расм, а):

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty.$$

Шаклдан $M_0 = 0$ эканлиги кўриниб турибди.

Агар берилган балканинг биринчи таянчи шарнирсиз бикир бўлса, (8.9- расм, б) у ҳолда шу бикир таянч шарнирли таянч билан алмаштирилиб, орасига қўшимча



8.9- расм

сохта оралик қўшилади (8.9- расм, в) ва шу оралик учун чап фокуслар нисбати қуйидаги кўринишда аникланади:

$$K_0 = -\frac{M_0}{M_1} = -\frac{M_0}{0} = \infty.$$

(8.10) формулага кўра биринчи оралик учун фокуслар нисбати $K_1 = 2 + l_0/l_1 \left(2 - \frac{1}{K_0}\right)$ бўлгани учун $K_1 = 2$ бўлади. Бу ерда $l_0 = 0$ ва $K_0 = \infty$.

Демак, балканинг биринчи таянчи шарнирли қўзғалмас бўлса, биринчи оралик учун чап фокуслар нисбати $K_1 = \infty$; шарнирсиз бикир бўлса, $K_1 = 2$ га тенг бўлади.

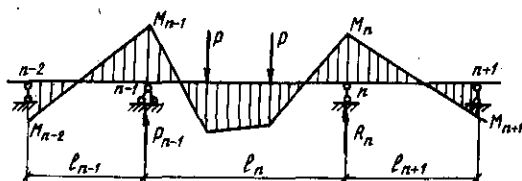
Узлуксиз балканинг чап ва ўнг фокус нисбатлари аниқлангандан сўнг юк қўйилган ораликдаги таянч моментлар аникланади.

Узлуксиз балканинг « n » оралиғи ташқи юклар таъсирида деб фараз қиламиз (8.10- расм).

Юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари M_{n-1} , M_n ларни аниқлаш учун балканинг $n-1$ ва n — нчи таянчларига тегишли уч моментлар тенгламасини ёзамиз (8.10- расм):

$$M_{n-2}l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6R_{n-1};$$

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6R_n. \quad (8.12).$$



8.10-расм

Тузилган тенгламалар каторида тўртта таянч моментлари M_{n-2} , M_{n-1} , M_n , M_{n+1} мавжуддир. Булардан икkitаси (M_{n-1} , M_n) изланаётган моментлар, қолган икkitаси (M_{n-2} , M_{n+1}) фокуслар нисбати орқали аниқланадиган таянч моментларидир.

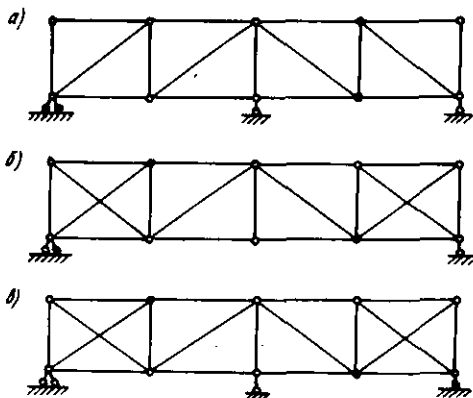
$$(8.6) \text{ формулага асосан } M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}};$$

$$(8.7) \text{ формулага асосан } M_{n+1} = -\frac{M_n}{K_{n+1}^1}.$$

Уч моментлар тенгламасининг ўнг қисмидаги сохта таянч реакциялари қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$R_{n-1}^\Phi = A_n^\Phi, R_n^\Phi = B_n^\Phi.$$

Чунки бу ерда 8.10-расмга асосан $B_{n-1}^\Phi = 0, A_{n+1}^\Phi = 0$ тенгдир. M_{n-2} , M_{n+1} ва R_{n-1} , R_n ларнинг қийматларини (8.12) тенгламага қўямиз:



8.11-расм

$$-\frac{M_{n-1}}{K_{n-1}} \cdot l_{n-1} + 2M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + M_n l_n = -6A_n^\Phi$$

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{M_n}{K_{n+1}} \cdot l_n = -6B_n^\Phi$$

Бу тенгламаларнинг барча ҳадларини l_n га бўлиб юборсак,

$$M_{n-1} \left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n-1}} \right) \right] + M_n = -\frac{6A_n^\Phi}{l_n};$$

$$M_{n-1} + M_n \left[2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K_{n+1}} \right) \right] + M_n = -\frac{6B_n^\Phi}{l_n}$$

келиб чиқади.

(8.10) ва (8.11) формулаларга асосан тенгламалар қуйидаги кўринишга келади:

$$M_{n-1} \cdot K_n + M_n = -\frac{6A_n^\Phi}{l_n};$$

$$M_n + M_{n+1} K_n = -\frac{6B_n^\Phi}{l_n}.$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, юк қўйилган ораликнинг таянч моментларини аниқлаймиз:

$$M_{n-1} = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(A_n^\Phi \cdot K_n - B_n^\Phi)}{(K_n K_{n-1} - 1)};$$

$$M_n = -\frac{6}{l_n} \cdot \frac{(B_n^\Phi \cdot K_n - A_n^\Phi)}{(K_n K_{n+1} - 1)}. \quad (8.13)$$

Узлуксиз балкаларни момент фокуслари усулида ҳисоблаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Ҳар бир оралик учун чап ва ўнг фокус нисбатлари (8.10) ва (8.11) формулаларга асосан топилади.

2. Юк қўйилган ораликдаги таянч моментлари (8.13) формула бўйича аниқланади.

3. Юк қўйилмаган ораликлардаги таянч моментлари (8.6) ва (8.7) формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар узлуксиз балканинг бир неча оралиги ташқи юклар таъсирида бўлса, у ҳолда ҳар бир юк қўйилган

оралик учун балка алоҳида равишда ҳисобланади, сўнгра таянч моментларининг алгебраик йиғиндилари бўйича умумий эпюра қурилади.

8.3. СТАТИК НОАНИҚ ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблашда ҳам статик аниқ фермаларни ҳисоблашда қабул қилинган айрим чекланишлардан фойдаланилади. Масалан, қўзғалмас юклар ферма тугунларига қўйилган стерженлар фақат сиқилиш ёки чўзилишга ишлайди, деб қаралади.

Статик ноаниқ фермаларни асосан уч гуруҳга ажратиш мумкин:

1. Таянч реакциялари сонига кўра статик ноаниқ фермалар (8.11- расм, а).

2. Ферма стерженларидаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.11- расм, б).

3. Таянч реакциялари сони ва стерженлардаги зўриқишларга кўра статик ноаниқ фермалар (8.11- расм, в).

Фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

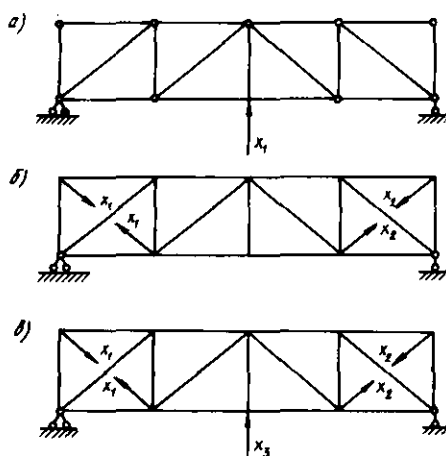
$$n = C + C_0 - 2Y. \quad (8.14)$$

Бу ерда n — ферманинг статик ноаниқлик даражаси;
 C — фермани ташкил этувчи стерженлар сони;
 C_0 — таянч стерженлари сони;
 Y — тугунлар сони.

Статик ноаниқ фермаларни ҳисоблаш тартиби статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашдан кам фарқ қилади. Бу ерда ҳам биринчи навбатда, (8.11- расм) фермаларнинг статик ноаниқлик даражаси аниқланади ва ундан сўнг асосий система қабул қилинади. Бунинг учун ортиқча боғланишлар ташлаб юборилади. Ташлаб юборилган ортиқча боғланишлар номаълум зўриқишлар билан алмаштирилади (8.12- расм, а, б, в). Сўнгра каноник тенгламалар тузилади. Каноник тенгламалар сони берилган ферманинг статик ноаниқлик даражаси сонига тенг бўлади. 8.12- расм, а-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

8.12- расм, б-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари иккита тузилади:



8.12-расм

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$

8.12-расм, в-да ифодаланган асосий система учун кучлар усулининг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Тенгламаларнинг ҳар бири ўз навбатида, асосий системада ташқи юк ва номаълум зўриқишлар таъсирида ҳосил бўладиган кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлишини ифодалайди.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланади:

$$\delta_{ki} = \sum \frac{N_k N_i}{EF} \cdot S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k N_i}{F} S;$$

$$\delta_{kk} = \sum \frac{N_k^2}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k^2}{F} S; \quad (8.15)$$

$$\Delta_{kp} = \sum \frac{N_k N_p}{EF} S = \frac{1}{E} \sum \frac{N_k N_p}{F} S.$$

Бу ерда:

$\bar{N}_i$ — ферма стерженларида $X_i = 1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар;

$\bar{N}_k$ — ферма стерженларида $X_k = 1$ бирлик куч таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар;

N_p — ташки кучлар таъсирида асосий системада ҳосил бўладиган зўриқишлар;

S — ферма стерженининг узунлиги;

E — ферма материалынинг эластиклик модули;

F — ферма стерженининг кўндаланг кесим юзаси.

Зўриқишлар N_p , $\bar{N}_k$ ва $\bar{N}_i$ ларнинг қийматлари аналитик ёки график усуллар орқали аниқланади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадларини жадвал ёрдамида аниқлаш тавсия этилади.

Номаълумлар (X_1, X_2, X_3) топилгандан кейин ферма стерженларидаги зўриқишларнинг якунловчи қийматлари осонлик билан топилади:

$$N = N_p + \bar{N}_i \cdot X_1 + \bar{N}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{N}_n \cdot X_n$$

Бу ерда N_p — ташки кучлар таъсирида ферма стерженларида ҳосил бўладиган зўриқиш:

$\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_n$ — бирлик кучларнинг таъсирида ($X_1 = 1; X_2 = 1; \dots, X_n = 1$) шу элементларда мавжуд бўладиган зўриқишлар.

Мисол. 8.13- расмда берилган статик ноаниқ ферманинг стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин. Ферма стерженларининг бикирлиги EF ўзгармас.

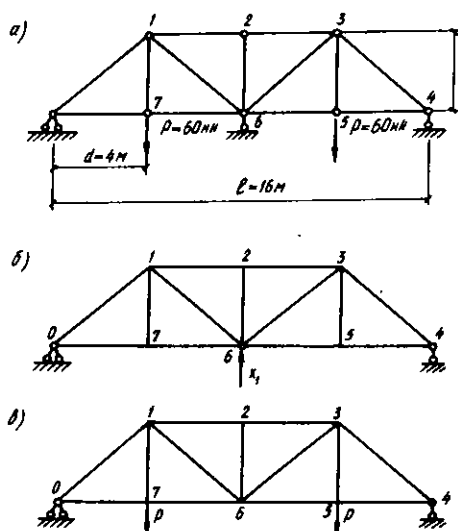
Ечиш. Ферманинг статик ноаниқлик даражасини (8.14) формулага асосан белгилаб оламиз. У бир марта статик ноаниқ бўлиб, битта ортикча таянч боғланишига эга.

Ферманинг ўртадаги таянчини ташлаб юбориб, асосий системани танлаймиз (8.13- расм, б). Номаълум таянч реакциясини аниқлаш учун кучлар усулининг каноник тенгламасини тузамиз:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Бу тенгламадаги δ_{11} ва Δ_{1p} кўчишлар (8.15) формула ёрдамида аниқланади. Ферма стерженларида бирлик куч $X_1 = 1$ ва ташки юқлар таъсирида ҳосил бўладиган зўриқишлар 4- бобда баён этилган усуллардан фойдаланиб аниқланади (8.13- расм, в).

Ферма ва унга қўйилган юқлар симметрик бўлганлиги сабабли ферманинг ярмини ҳисоблаш kifоя, чунки,



8.13-расм

0—7 стержендаги зўриқиш 5—4 стержендаги зўриқишга тенг ($N_{70} = N_{45}$), шунга ўхшаш $N_{12} = N_{23}$, $N_{10} = N_{34}$, $N_{76} = N_{65}$, $N_{16} = N_{63}$ бўлади. Фермани ҳисоблаш натижалари 8.1-жадвалда келтирилган.

8.1-жадвал

Стер- жен- лар	Стер- жень узун- лиги l_k (см)	Зўри- қиш	$\frac{\bar{N}_1^2 l}{EF}$	N_p кн	$\frac{N_1 N_p l}{EF}$	N кн	$\frac{N_1 N l}{EF}$ тек- шириш
1	2	3	4	5	6	7	8
01	500	0,825	1,74	— 100	—208	— 39,8	—82,3
1—2	400	1,333	3,56	—80	—213	16,2	43
0—7	400	—0,667	0,89	80	—107	31,8	—42,5
7—6	400	—0,667	0,89	80	—107	31,8	—42,5
1—6	500	—0,825	1,74	0	0	— 60,1	124
1—7	300	0,00	0	60	60	60	0
$\delta_{11} = 8,82,$				$\Delta_{1p} = -635$		$167 - 167,3 = 0$	

Топилган кўчишларни каноник тенгламаларга қўйиб, номаълум реакция кучи X_1 ни аниқлаймиз:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{635}{8,82} = 72,2 \text{ кН.}$$

Ташқи юк ва аниқланган таянч реакцияси X_1 таъсирида статик ноаниқ ферманинг стерженларида ҳосил бўлган зўриқишлар (8.4) формула ёрдамида ҳисобланади.

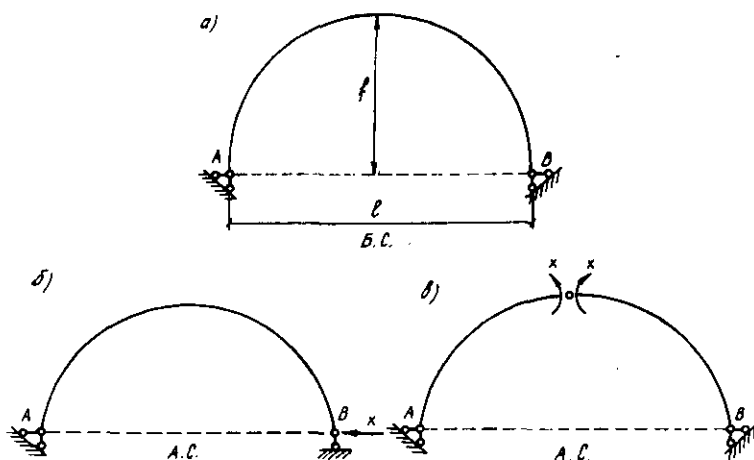
$$N_{01} = N_p + \overline{N}_{01} X_1 = -100 + 0,825 \cdot 72,2 = -40,44 \text{ кН;}$$

$$N_{12} = N_p + \overline{N}_{12} X_1 = -80 + 1,33 \cdot 72,2 = 16,24 \text{ кН.}$$

8.4. ИККИ ШАРНИРЛИ АРКАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Икки шарнирли аркалар асосан кўприк конструкцияларида ва иморатлар томини ёпишда ишлатилади.

Икки шарнирли арка (8.14- расм, а) бир марта статик ноаниқдир. Асосий система танлашда унинг битта ортиқча боғланиши ташлаб юборилади. 8.14- расм, б, в-да асосий система икки хил нусхада тавсия этилган. Асосий системанинг бирида В таянчининг горизонтал стержени номаълум реакция кучи X билан алмаштирилган. Иккинчи асосий система эса қўшимча шарнир киритиш йўли билан ҳосил қилинган.



8.14- расм

Номатълум X_1 ни аниқлаш учун куч усулининг каноник тенгламасини тузамиз

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0; X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Бу ерда δ_{11} — бирлик куч йўналиши бўйича ва шу бирлик куч ($P=1$) таъсиридан ҳосил бўлган бирлик кўчиш;

Δ_{1p} — асосий системага қўйилган ташки юклардан ҳосил бўладиган горизонтал кўчиш.

Кўчишлар қуйидаги формулалардан фойдаланиб топилади:

$$\Delta_{1p} = \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_1 N_p}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_p}{GF} ds;$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{EF} ds + \int \eta \frac{\bar{Q}_1^2}{GF} ds.$$

Қиёсий ҳисоблар қуйидаги ҳулосага келиш имконини беради: а) агар $f < \frac{1}{3}l$ ва $\kappa < \frac{1}{10}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг кучни, Δ_{1p} ни аниқлашда эса бўйлама ва кўндаланг кучларни инобатга олмаса бўлади, яъни

$$\Delta_{1p} = \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} ds;$$

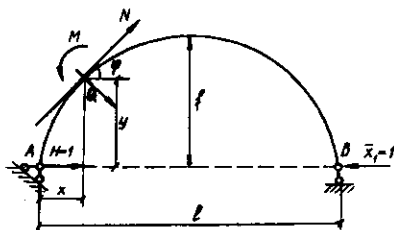
$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{EF} ds.$$

8.15- расмдан

$$\bar{M}_1 = -Y, \bar{N}_1 = -\cos\varphi.$$

Буларни кўчишлар формуласига кўямиз:

$$\Delta_{1p} = - \int_A^B \frac{Y M_p ds}{EI} = - \frac{1}{EI_0} \int_A^B Y \cdot M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds.$$



8.15- расм

Бу ерда J_0 — кўндаланг кесимнинг энг кичик инерция моменти:

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{y^2 ds}{EI} + \int_A^B \frac{\cos^2 \varphi}{EI} ds = \frac{1}{EI_0}$$

$$\left[\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds \right];$$

$$x_1 = \frac{\int_A^B Y \cdot M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds + \int_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} ds};$$

б) агар $\frac{1}{3}l > f > \frac{1}{5}l$ ва $k < \frac{1}{10}l$ бўлса, δ_{11} ни аниқлашда кўндаланг ва бўйлама кучлар инобатга олинмайди:

$$x_1 = \frac{\int_A^B y M_p \cdot \frac{J_0}{J} ds}{\int_A^B y^2 \cdot \frac{J_0}{J} ds}.$$

Горизонтал реакция кучи X_1 аниқлангандан сўнг арканинг ихтиёрий К кесимидаги зўриқишлар қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K;$$

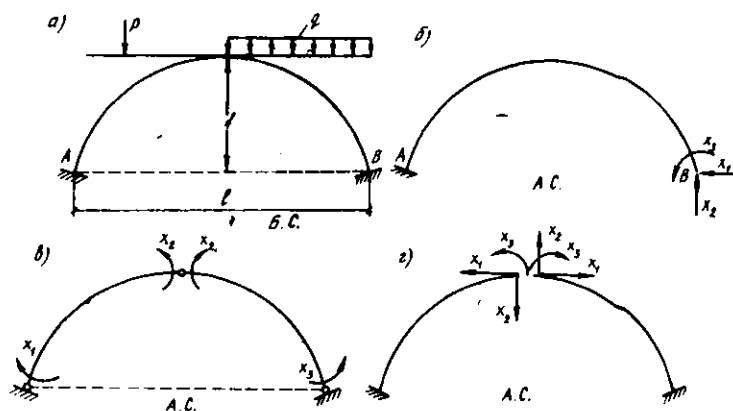
$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi;$$

$$N_K = Q_K^0 \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi.$$

Бу формулалардан H — керки кучи бўлиб, унинг қиймати горизонтал реакция кучи X_1 га тенгдир.

8.5. ШАРНИРСИЗ АРКАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

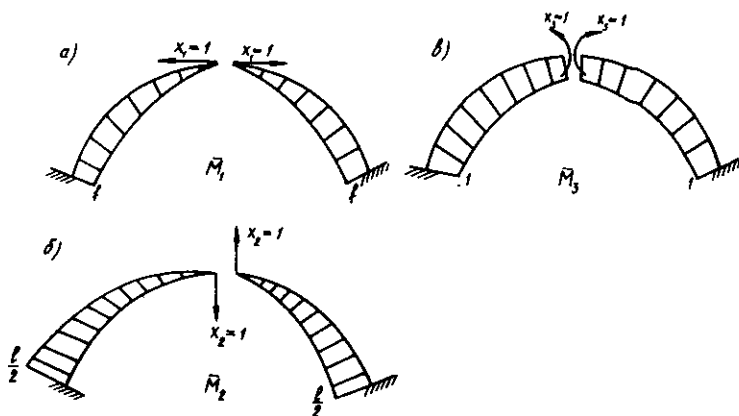
Шарнирсиз аркалар асосан кўприк конструкциялари ҳамда бинокорликда катта ораликларни ёпишда ишлатилади. Шарнирсиз аркалар (8.16- расм) уч марта статик ноаниқ бўлади. Асосий система ҳосил қилиш учун аркадан



8.16-расм

учта ортикча боғланиш олиб ташланади. Асосий система-нинг бир неча нусхаси 8.16-расм, б, в, г-да тасвирланган. Аркани ҳисоблаш учун тавсия этилган нусхалардан бири танлаб олинади. Маълумки, асосий система қулай танлан-са, каноник тенгламанинг баъзи ёрдамчи коэффициентла-ри нолга айланади. 8.16-расм, г-да тавсия этилган асосий система бу талабга тўлиқ жавоб беради, чунки бу асосий система айрим коэффициентларнинг нолга тенг бўлишини таъминлайди.

Асосий системадаги номаълум ички кучлар (X_1 , X_2 , X_3) куч усулининг каноник тенгламаларидан топилади:



8.17-расм

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари-ни аниқлаш учун бирлик кучлардан эгувчи момент эпюралари қурилади (8.17-расм).

Бу ерда $\bar{M}_1$, $\bar{M}_3$ симметрик, $\bar{M}_2$ эса тескари симметрик эпюрадир (8.17-расм, а, б, в), Шунинг учун $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ва $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ бўлади. У ҳолда кучлар усулининг каноник тенгламалари икки мустақил тизимга ажралиб, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Каноник тенгламаларнинг биринчи гуруҳида симметрик номаълумлар (X_1 , X_3), иккинчи гуруҳида эса тескари симметрик номаълум (X_2) иштирок этади.

Каноник тенгламанинг коэффициенти ва озод ҳадлари Мор формуласи ёрдамида аниқланади.

$$\delta_{kn} = \sum \int \frac{M_k M_n}{EI} ds + \sum \int \frac{N_k N_n}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_k Q_n}{GF} ds$$

Каноник тенгламанинг нолга тенг бўлмаган ёрдамчи коэффициентларини ($\delta_{13} = \delta_{31}$) нолга тенглаш учун асосий системани биров ўзгартириб, номаълум зўриқишларни биқир консоллар учига кўчирамиз (8.18-расм).

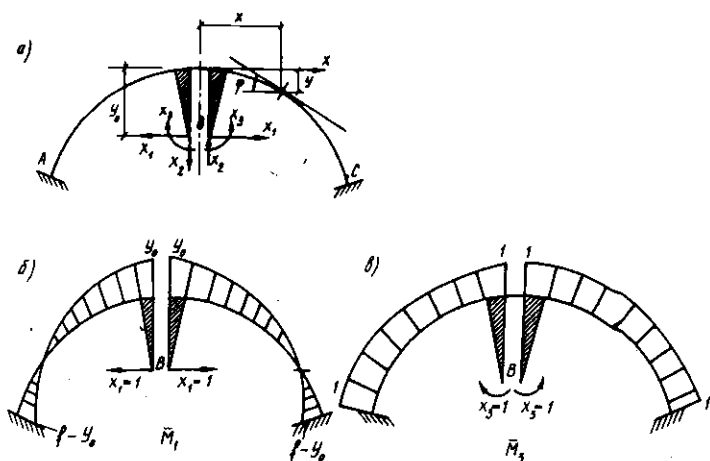
Абсолют биқир консолнинг учи эластик марказга жойлашган бўлиши лозим. Биқир консол узунлиги, яъни эластик марказнинг ўрни арканинг геометрик ўлчамларига боғлиқдир.

Асосий системанинг ихтиёрий кесими учун моментлар тенгламасини ёзамиз (8.18-расм, а):

$$M_1 = 1(y_0 - y);$$

$$M_3 = -1 \cdot x.$$

Бу ерда y_0 — консол узунлиги.



8.18- рас-м

Бўйлама ва кўндаланг кучлар тенгламаси:

$$N_1 = -\cos\varphi; N_2 = \sin\varphi; N_3 = 0;$$

$$Q_1 = \sin\varphi; Q_2 = \cos\varphi; Q_3 = 0.$$

Энди консол узунлиги y_0 қийматини аниқлайми.
Бунинг учун δ_{13} ни нолга тенглаштирамиз:

$$\begin{aligned} \delta_{13} &= \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_3}{EF} ds + \int \eta \frac{Q_1 Q_3}{GF} ds = \\ &= \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} ds = 0. \end{aligned}$$

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_3$ нинг қийматларини тенгламага жойлаштирамиз:

$$2 \int_A^B \frac{1(y_0 - y)}{EI} ds = 0 \text{ ёки } y_0 \int_A^B \frac{ds}{I} - \int_A^B \frac{y ds}{I} = 0;$$

бундан

$$y_0 = \frac{\int_A^B \frac{y ds}{I}}{\int_A^B \frac{ds}{I}} = \frac{\int_A^B y \cdot \frac{I_0}{I} ds}{\int_A^B \frac{I_0}{I} ds}$$

Бу ерда $\int_A^B y \cdot \frac{J_0}{J} ds$ — арканинг келтирилган узунлиги

десак, $\int_A^B \frac{J_0}{J} \cdot y$ — келтирилган узунликнинг статик момен-

ти, y_0 эса келтирилган контур оғирлик марказининг координати бўлади. Шунга асосан, В нукта эластик марказ деб аталади.

Эластик марказнинг текисликдаги ўрнини график равишда аниқласа ҳам бўлади. Бунинг учун интеграл кўринишдаги формула йиғинди орқали ифодаланади:

$$y_0 = - \frac{\sum_A^B y \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S}{\sum_A^B \frac{J_0}{J} \Delta S},$$

Арка симметрик бўлганлиги сабабли ҳисоб ишларини унинг бир бўлаги учун амалга оширса бўлади. Арканинг ўқи тенг бўлақларга бўлиниб, бўлақларнинг оғирлик марказига горизонтал сохта юklar жойлаштирилади (8.19- расм).

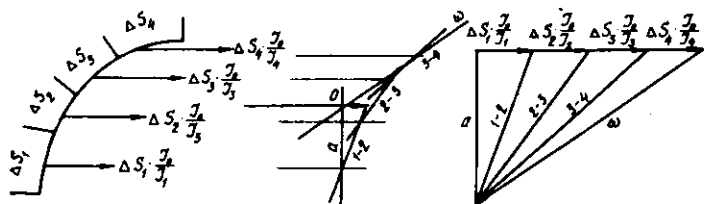
Куч ва аркон кўпбурчаги қурилади ҳамда уларнинг ёрдамида сохта юklarнинг тенг таъсир этувчиси аниқланади. Арканинг симметрия ўқи билан тенг таъсир этувчи юкнинг кесишган нуктаси «В» эластик марказ деб аталади.

Бикир консол учларини шу нуктага жойлаштирилса, каноник тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$



8.19- расм

Бунда ҳар бир тенглама мустақил бўлиб, номаълумлар осонлик билан аниқланади:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Агар координата бошини эластик марказга жойлаштирилса, бош кўчишлар куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C \frac{J_0}{J} \Delta S;$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_0} \left[\sum_A^C y^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \sum_A^B \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \right. \\ \left. + \mu \cdot \frac{E}{G} \sum_A^C \sin^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S \right];$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_0} \left[\sum_A^C X^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S + \sum_A^B \sin^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S + \right. \\ \left. + \mu \cdot \frac{E}{G} \sum_A^C \cos^2 \varphi \cdot \frac{J_0}{F} \Delta S \right];$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C \frac{J_0}{J} \Delta S; \quad \delta_{22} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C y^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S;$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_0} \sum_A^C X^2 \cdot \frac{J_0}{J} \Delta S.$$

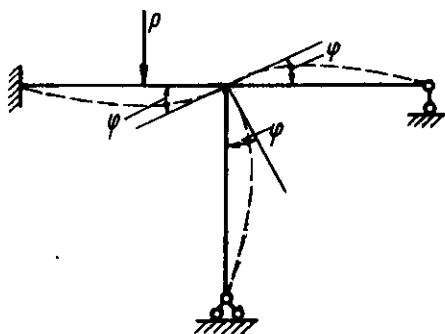
9- боб

СТАТИК НОАНИК РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ

9.1. УСУЛНИНГ МОҲИЯТИ

Маълумки, статик ноаник рамаларни кучлар усулида ҳисоблаганда, номаълумлар сифатида ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари қабул қилинган эди.

Ортиқча боғланишлардаги зўриқиш кучлари аниқлангандан сўнг ички кучларнинг қийматлари (M , Q , N) ва кўчишлар осонлик билан аниқланади.



9.1- расм

Демак, статик ноаниқ рамаларни куч усулида ҳисоблашда аввал зўриқиш кучлари аниқланади, ундан сўнг кўчишлар аниқланади.

Бу масалани бошқа йўл билан ҳам ечиш мумкин. Бунда аввал статик ноаниқ рамалардаги кўчишлар топилади, ундан сўнг ихтиёрий кесимдаги ички кучлар аниқланади. Статик ноаниқ рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда, айнан шундай қилинади.

Бу усулга кўра номаълумлар сифатида рама тугунларидаги чизиқли ва бурчакли эластик кўчишлар қабул қилинади.

Кўчиш усули қуйидаги фаразларга асосланади:

1. Икки ва ундан ортиқ стерженлар келиб туташган раманинг бикир тугуни бир хил бурчакка бурилади (9.1- расм).

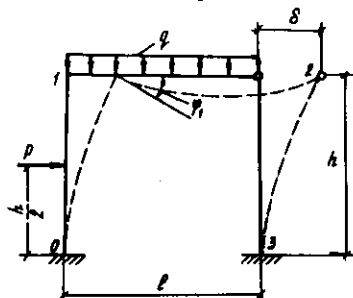
2. Рама деформацияларини ҳисоблашда Q ва N нинг таъсири ҳисобга олинмайди.

3. Деформация натижа-сида тугунлар орасидаги ма-софа ўзгаришсиз қолади.

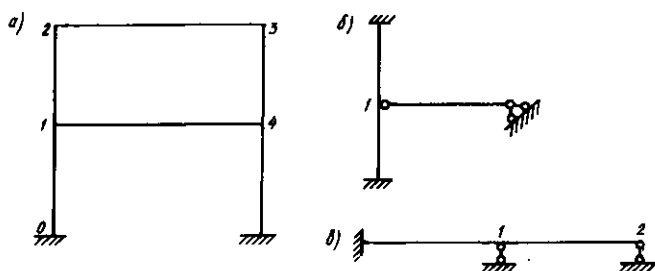
4. Бурчак кичик бўлган-лиги сабабли унинг танген-сини бурчакнинг ўзига тенг деб оламиз, яъни

$$\operatorname{tg} \varphi = \varphi$$

9.2- расмда тасвирланган рама ташки кучлар таъсири-



9.2- расм



9.3- расм

да деформацияланиб, унинг тугунлари бурчакли ва чизикли кўчишлар олади.

Раманинг 1 тугуни ϕ бурчакка бурилади ва горизонтал йўналишда δ масофага кўчади.

Кўчишлар усулида номаълум сифатида рама тугунларининг чизикли (δ) ва бурчакли (ϕ) эластик кўчишлари қабул қилинади.

Кўчишлар усулида рамаларнинг кинематик ноаниклик даражаси қуйидаги формуладан топилади:

$$n = n_{\phi} + n_{\delta}$$

Бу ерда

n_{ϕ} — бикир тугунлар сони ёки бикир тугунларнинг бурчакли кўчишлари сони;

n_{δ} — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони.

Номаълум деб қабул қилинган бурчакли кўчишлар сони « n_{ϕ} », раманинг таркибидаги бикир тугунлар сонига тенг деб қабул қилинади. Икки ва ундан ортиқ стерженларнинг мустаҳкам туташган жойи бикир тугун деб аталади.

Мисол: 9.3- расм, а — да 1, 2, 3, 4 — тугунлар, 9.3- расм, б — да 1- тугун, 9.3- расм, в — да 1, 2 — тугунлар бикир тугунлар саналади.

Чизикли кўчишлар сонини аниқлаш учун берилган раманинг бикир тугунларига ва таянчларига шарнирлар киритиб, геометрик ўзгарувчан система ҳосил қилинади. Бу ҳосил бўлган шарнирли системанинг эркинлик даражаси — раманинг чизикли кўчишлари сонига тенг бўлади.

Шарнирли системани геометрик ўзгармас системага айланиши учун керакли бўлган кинематик боғланишлар сони раманинг чизикли кўчишлар сонини ифодалайди.

Чизикли кўчишлар сони қуйидаги формулалар ёрдамида ҳам аниқланади:

$$n_q = 2Ш - С - С_m;$$

$$n_q = 2Т - С.$$

Бу ерда:

Ш — шарнирлар сони;

С — рама стерженлари сони;

Ст — таянч стерженлари сони;

Т — тугунлар сони.

Мисол. 9.4- расм, а — да ифодааланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқлансин.

Ечиш. Раманинг бурчакли кўчишлар сони $n_6 = 2$. Рама тугунларининг чизикли кўчишлари сонини аниқлаш учун унинг бикир тугунларига шарнир киритиб, геометрик ўзгарувчан шарнирли системага келтирилади (9.4- расм, б) ва шу схеманинг эркинлик даражаси аниқланади. Бу схеманинг эркинлик даражаси $n_q = 1$, чунки унинг геометрик ўзгармас бўлиши учун унга битта кўшимча стержень — боғловчи киритилса кифоя (9.4- расм, в).

Берилган раманинг жами номаълумлари сони

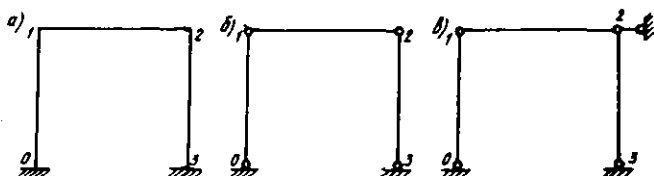
$$n = n_6 + n_q = 2 + 1 = 3.$$

Демак раманинг кинематик ноаниқлик даражаси учга тенг экан.

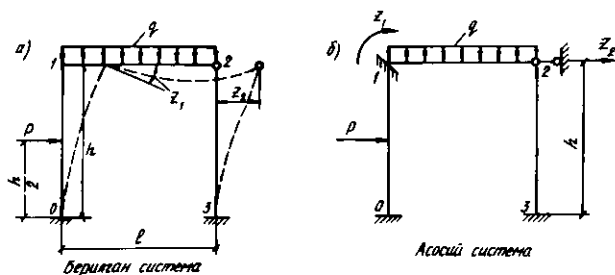
9.2. КЎЧИШЛАР УСУЛИНИНГ АСОСИЙ СИСТЕМАСИ ВА КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

Куч усулининг асосий системаси берилган системадаги ортикча боғланишларни ташлаб юбориш йўли билан ҳосил қилинлар эди. Асосий система — статик аниқ ва геометрик ўзгармас бўлади.

Кўчишлар усулида асосий система, аксинча, рамага кўшимча боғланишлар киритиш йўли билан ҳосил қилинади. Кўшимча боғланишлар икки хил (бурчакли ва чизикли) бўлади.



9.4- расм



9.5- расм

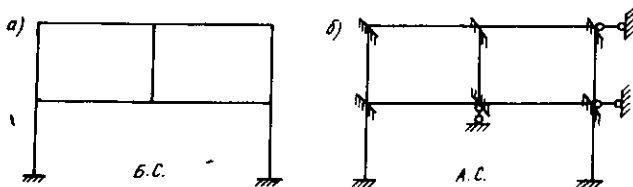
Рама тугунларининг бурчакли кўчишларига қаршилиқ кўрсатувчи боғланишлар — бурчакли боғланишлар деб аталади. Рама тугунларини чизикли кўчишларига қаршилиқ кўрсатувчи боғланишлар — чизикли боғланишлар деб аталади.

Рамага қўшимча боғланишлар киритилиши натижасида рама алоҳида бир ораликли статик ноаниқ балкаларнинг йиғиндисига айланиб қолади.

9.5- расм, а — да тасвирланган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси 2 га тенг. У битта бурчакли (Z_1), битта чизикли (Z_2) кўчишга эга. Бу кўчишларга чек қўйиш учун рамага битта бурчакли боғланиш (биринчи тугун) ҳамда битта чизикли боғланиш (иккинчи тугун) киритилди. Бу раманинг асосий системаси 9.5- расм, б — да берилган. 9 марта кинематик ноаниқ раманинг (9.6- расм, а) асосий системаси (9.6- расм, б) тасвирланган. Раманинг бурчакли кўчишлари сони олтига тенг ($n_6=6$), чизикли кўчишлари сони эса учга тенг ($n_4=3$).

Кўчишлар усулининг каноник тенгламалари. Каноник тенгламалар тизимини тузиш коидаси берилган система билан асосий система орасидаги фарқни йўқотишга асосланган.

Асосий системалар берилган системадан қўшимча боғланишлари борлиги билан фарқ қилади. Маълумки,



9.6- расм

бурчакли боғланишларда реактив момент, чизикли боғланишларда эса реактив кучлар ҳосил бўлади.

Реактив момент ва кучларни полга тенглаш мумкин. Бунинг учун қўшимча боғланишларга берилган системада вужудга келадиган миқдорда чизикли ва бурчакли қўчишлар берамиз.

Бурчакли ва чизикли боғланишлардаги реактив момент ва кучларни инкор этиш қўчиш усули каноник тенгламасининг асосини ташкил этади.

Умумий кўринишда қўчиш усулининг каноник тенгламалари қуйидагича ёзилади (9.7- расм);

$$R_1 = 0; R_2 = 0$$

Бу ерда R_1 ва R_2 — қўшимча боғланишларда ташқи кучлар ҳамда боғланишларнинг бурчакли ва чизикли қўчишлари натижасида ҳосил бўладиган реактив момент ва реактив кучларнинг алгебраик йиғиндисидир.

Тузиладиган тенгламалар сони берилган раманинг кинематик ноаниклик даражасига тенг бўлади.

Каноник тенгламалар системасини тузиш тартибини 9.7- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтамыз.

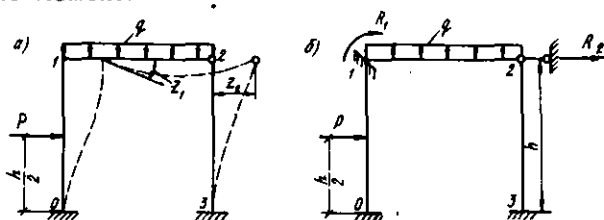
Биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда вужудга келадиган тўлиқ момент R_1 қуйидаги ҳадлардан ташкил топади:

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}.$$

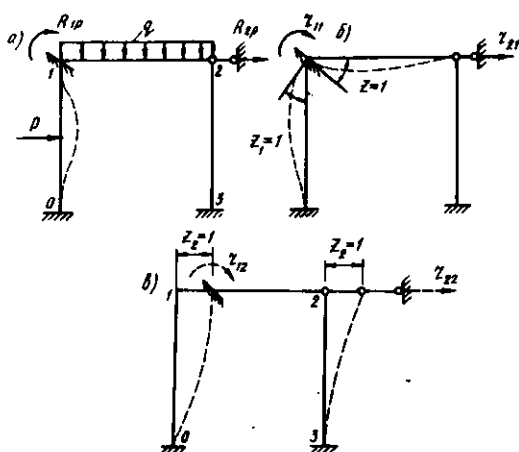
Бу ерда R_{1p} — қўшимча боғланишда ташқи юклар таъсирида вужудга келадиган реактив момент (9.8- расм, а);

R_{11} — биринчи боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурилиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент;

R_{12} — раманинг 1,2— тугунларини $Z_2=1$ масофага қўчиши натижасида биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент.



9.7- расм



9.8-расм

R_{11} ва R_{12} реактив моментларни бирлик кўчиш натижасида вужудга келадиган реактив моментлар орқали ифодаalayмиз:

$$R_{11} = r_{11} \cdot Z_1 \text{ ва } R_{12} = r_{12} \cdot Z_2.$$

Бу ерда: r_{11} — биринчи боғланишни бир бирликка ($Z_1 = 1$) бурганимизда шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8-расм, б); r_{12} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага силжитганимизда биринчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив момент (9.8-расм, в);

У ҳолда дастлабки тенглама куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0. \quad (9.4)$$

Шу тарзда иккинчи тенгламани ҳам тузса бўлади:

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \quad (9.4)$$

Бу ерда r_{21} — биринчи боғланишни $Z_1 = 1$ бурчакка кўчиши натижасида иккинчи боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8-расм, б);

r_{22} — иккинчи боғланишни $Z_2 = 1$ масофага кўчиши натижасида шу боғланишда ҳосил бўладиган реактив куч (9.8-расм, в);

R_{2p} — ташқи кучлар таъсирида иккинчи боғланишда вужудга келадиган реактив куч (9.8-расм, а).

Шундай қилиб, биринчи тенглама биринчи тугунга киритилган қўшимча боғланишда реактив моментнинг нолга тенглигини, иккинчи тенглама эса иккинчи боғланишдаги реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Ҳар икки тенглама қўчиш усулининг каноник тенгламаси деб аталади.

Агар система тўрт маротаба кинематик ноаниқ бўлса, у ҳолда юқорида баён этилган тартиб асосида тўртта каноник тенглама тузилади ва у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{14} \cdot Z_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{34} \cdot Z_4 + R_{3p} = 0;$$

$$r_{41} \cdot Z_1 + r_{42} \cdot Z_2 + r_{43} \cdot Z_3 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4p} = 0.$$

Бош диагональ бўйича жойлашган коэффициентлар (r_{11} , r_{22} , r_{33} , r_{44}) бош коэффициентлар, қолганлари ёрдамчи коэффициентлар деб аталади; озод ҳадлар R_{1p} , R_{2p} , R_{3p} , R_{4p} — юк реакциялари деб аталади.

Бу тенгламаларда ҳам куч усулидаги сингари бош диагональга нисбатан симметрик равишда жойлашган коэффициентлар ўзаро тенг бўлади, яъни $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$.

Бош коэффициентлар ҳамма вақт нолдан катта бўлади $r_{ii} > 0$.

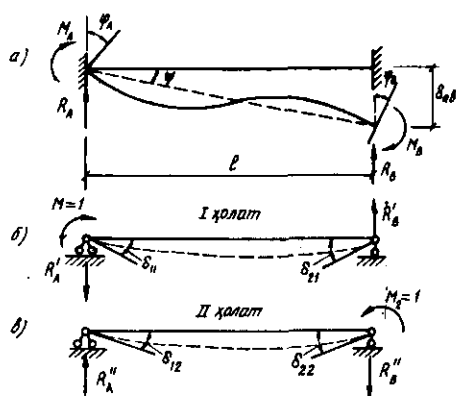
Ёрдамчи коэффициентлар эса $r_{ki} \geq 0$ бўлиши мумкин.

Куч усулининг каноник тенгламалари қўчишларнинг нолга тенглигини ифодалайди. Қўчиш усулининг каноник тенгламалари эса рама тугунларига киритилган қўшимча боғланишлардаги реактив момент ва реактив кучларнинг нолга тенглигини ифодалайди.

9.3. РЕАКЦИЯЛАР ВА ҚЎЧИШЛАР ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

Тўғри стерженлардан ташкил топган рамаларни қўчишлар усулида ҳисоблашда киритилган қўшимча боғланишлардаги реакциялар бир оралиқли статик ноаниқ балкалар учун берилган формулалардан фойдаланиб аниқланади.

Бир оралиқли биқир таянчли статик ноаниқ балкани мисол тариқасида кўриб чиқамиз (9.9- расм).



9.9-расм

Фараз қиламиз, чекка кесимлар φ_A ва φ_B бурчакларга бурилган бўлсин. AB тўғри чизик ψ бурчакка бурилган дейлик.

9.9-расм, а — да кўрсатилган M_A , M_B , φ_A , φ_B , R_A , R_B ларнинг йўналишлари мусбат ишорага мос келади деб қабул қилайлик. M_A ва M_B таянч моментларини аниклаш учун куч усули бўйича асосий системалар ку-

рилади (9.9-расм, в) сўнгра ишлар ҳақидаги Бетти теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} M_A \cdot \delta_{11} - X_2 \delta_{21} &= 1 \cdot \varphi_A - \frac{1}{l} \delta_{ab} \\ M_A \cdot \delta_{12} - X_2 \delta_{22} &= -1 \cdot \varphi_B + \frac{1}{l} \delta_{ab} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Берилган система ва ҳар икки бирлик ҳолат бўйича аниқланган кўчиш ва зўриқишларнинг қийматлари 9.1-жадвалда ифодаланган.

9.1-жадвал

Ҳолат	Моментлар	Кучлар	Кўчишлар	
			Бурилиш бурчаклари	Оғиш бурча- ги
Берилган	M_A, M_B	R_A, R_B	φ_A, φ_B	0; δ
I ҳолат	$M_1=1, M_2=0$	$R_A^I = \frac{1}{e}, R_B^I = \frac{1}{e}$	$\delta_{11}, -\delta_{21}$	0; 0
II ҳолат	$M_1=0, M_2=-1$	$R_A^{II} = \frac{1}{e}, R_B^{II} = \frac{1}{e}$	$\delta_{12}, -\delta_{22}$	0; 0

Материаллар каршилиги фанига асосан

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{M_1 \cdot l}{6EI} = \frac{l}{6EI}; \quad (9.5.)$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{M_2 l}{3EI} = \frac{l}{3EI}. \quad (9.6)$$

Бу кийматларни биринчи тенгликка жойлаштириб, куйидагиларга эга бўламиз:

$$M_A \cdot \frac{l}{3EI} - M_B \cdot \frac{l}{6EI} = \varphi_A - \psi; \quad (9.7)$$

$$M_A \cdot \frac{l}{6EI} - \frac{l}{3EI} = -\varphi_B + \psi.$$

Бундан

$$M_B = 2 \cdot \frac{EI}{l} (2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi);$$

$$M_B = 2 \cdot \frac{EI}{l} (\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \quad (9.8)$$

Агар $\frac{EI}{l} = i$ деб белгиласак, у ҳолда

$$M_A = 2i(2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi);$$

$$M_B = 2i(\varphi_A + 2\varphi_B - 3\psi). \quad (9.10.)$$

бўлади. Бу ерда i — стерженнинг нисбий бирлиги.

Хусусий ҳоллар:

Агар $\varphi_A = \varphi_B = 0$ бўлса, (9.10) формула куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_B = M_A = -6i\psi \quad (9.11.)$$

Агар $\varphi_A = \psi = 0$ бўлса,

$$M_A = 2i\varphi_A;$$

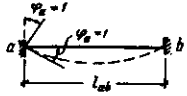
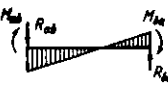
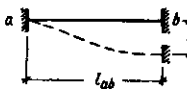
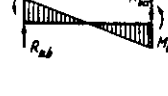
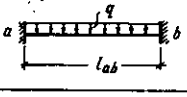
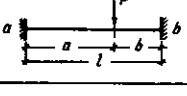
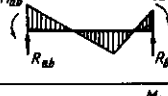
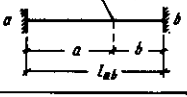
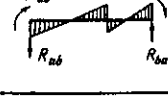
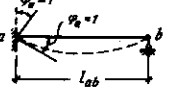
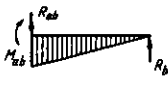
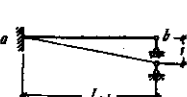
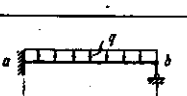
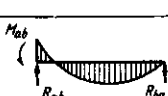
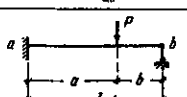
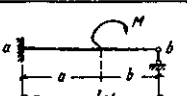
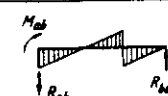
$$M_B = 4i \cdot \varphi_B \quad \text{бўлади.} \quad (9.12.)$$

Агар $\varphi_B = \psi = 0$ бўлса, у ҳолда формула куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$M_A = 4i\varphi_A;$$

$$M_B = 2i\varphi_B. \quad (9.13.)$$

Турли хил таъсирлар остида бўлган стерженларнинг чекка қесимларидаги таянч моментлари ва реакцияларини аниқлаш формулалари 9.2- жадвалда берилган.

Баға ба уңа тағыр қылуың ома	Зыуыч момент зптрсы	Тағыч реактыв моменттары	Тағыч реактывлары
		$M_{ab} = 4i_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ba}$	$R_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{L}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{L}$ $M_{ba} = -\frac{6i_{ba}}{L}$	$R_{ab} = \frac{12i_{ab}}{L}$ $R_{ba} = -R_{ab}$
		$M_{ab} = -\frac{qL^2}{12}$ $M_{ba} = \frac{qL^2}{12}$	$R_{ab} = \frac{qL}{2}$ $R_{ba} = \frac{qL}{2}$
		$M_{ab} = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_{ba} = \frac{Pa^2b}{L^2}$	$R_{ab} = \frac{Pb^2}{L^2} \left(1 + \frac{2a}{L}\right)$ $R_{ba} = \frac{Pa^2}{L^2} \left(1 + \frac{2b}{L}\right)$
		$M_{ab} = \frac{Mb}{L^2} (2L - 3b)$ $M_{ba} = \frac{Ma}{L^2} (2L - 3a)$	$R_{ab} = -\frac{6ab}{L^3} \cdot M$ $R_{ba} = \frac{6ab}{L^3} \cdot M$
		$M_{ab} = 3i_{ab}$	$R_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{L_{ab}}$ $R_{ba} = \frac{3i_{ba}}{L_{ab}}$
		$M_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{L}$	$R_{ab} = -R_{ba} = \frac{3i_{ab}}{L}$
		$M_{ab} = -\frac{qL^2}{8}$	$R_{ab} = \frac{5}{8} qL$ $R_{ba} = \frac{3}{8} qL$
		$M_{ab} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{2L^3}$	$R_{ab} = \frac{Pb(3L^2 - b^2)}{2L^3}$ $R_{ba} = \frac{Pa^2(3L^2 - a^2)}{2L^3}$
		$M_{ab} = -\frac{M(L^2 - 3b^2)}{2L^3}$	$R_{ab} = -\frac{3M(L^2 - b^2)}{2L^3}$ $R_{ba} = \frac{3M(L^2 - b^2)}{2L^3}$

9.4. КАНОНИК ТЕНГЛАМА КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ ВА ОЗОД ХАДЛАРИНИ АНИҚЛАШ. СТАТИК УСУЛ

Каноник тенгламанинг коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлаш учун асосий системада бирлик кўчишлар ва ташки кучлар таъсиридан ҳосил бўладиган момент эпюралари курилади.

Эгувчи момент эпюраларини куриш ва каноник тенгламаларнинг коэффицентларини аниқлаш тартибини 9.10- расмда тасвирланган рама мисолида кўриб ўтамиз.

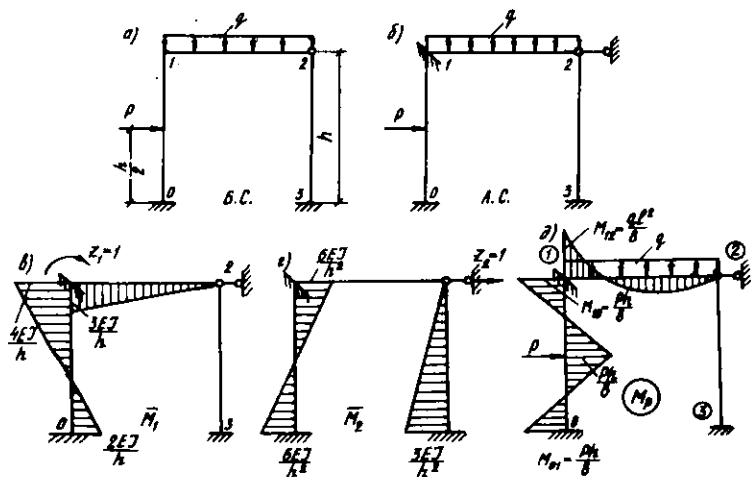
Берилган раманинг кинематик ноаниқлик даражаси $n=2$ бўлгани учун иккита каноник тенглама тузилади:

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} &= 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Каноник тенгламани ечиш учун аввал унинг коэффицентлари ва озод ҳадларини топиб олишимиз керак.

M_1 эпюрасини ҳосил қилиш учун биринчи тугунга киритилган боғланишни $Z_1=1$ бурчакка бурамиз (9.10- расм, в). Шаклда келтирилган моментларнинг қиймати 9.2- жадвалдан олинади.

M_2 эпюраси иккинчи боғланишнинг $Z_2=1$ масофага кўчишидан ҳосил бўлган (9.10- расм, г). Бу ерда ҳам стержень учларидаги моментларнинг қиймати 9.2- жадвалдан олинган.



9.10- расм

M_p эпюраси ташки кучлардан қурилган (9.10-расм, *д*). Табиийки бу эпюрада ҳам моментларнинг қийматлари ўша жадвалдан олинган.

Эгувчи момент эпюралари қурилгандан сўнг каноник тенгламаларнинг коэффицентлари ва озод ҳадларини аниқлашга ўтилади.

Каноник тенгламаларнинг коэффицент ва озод ҳадлари иккита гуруҳга бўлинади:

1) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив моментлар;

2) қўшимча боғланишларда вужудга келадиган реактив кучлар.

Аниқланаётган коэффицент ёки озод ҳад реактив момент бўлса, у ҳолда асосий системадан тегишли қўшимча боғланиш кесиб олинади ҳамда мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum M = 0.$$

Агар аниқланаётган коэффицент ва озод ҳадлар реактив куч бўлса, у ҳолда асосий системанинг устунлари ва иккинчи боғланиш орқали кесим ўтказилади. Шундан сўнг тенглама тузилади:

$$\sum T = 0.$$

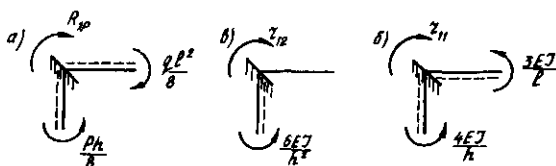
T — ўkning йўналиши тенгламалар тузишга қулай ҳолатда ўтказилади.

Каноник тенгламанинг биринчи каторидаги озод ҳадлар ва коэффицентларни аниқлайлик.

R_{1p} нинг қийматини аниқлаш учун « M_p » эпюрасидан биринчи тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламасини ёзамиз (9.11-расм, *а*):

$$\sum M_1 = R_{1p} + \frac{qt^2}{8} - \frac{ph}{8} = 0.$$

Бундан $R_{1p} = \frac{ph}{8} - \frac{qt^2}{8}.$



9.11-расм

r_{11} , r_{12} ларни аниқлаш учун $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ бирлик эгувчи момент эпюраларидан 1-тугунни кесиб олиб, мувозанат тенгламаси ёзилади (9.11-расм, в, б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EI}{l} - \frac{4EI}{h} = 0; \quad \sum M_1 = r_{12} + \frac{6EI}{h^2} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{3EI}{l} + \frac{4EI}{h}; \quad r_{12} = -\frac{6EI}{h^2}.$$

Каноник тенгламанинг иккинчи каторидаги r_{21} , r_{22} , R_{2p} лар реактив кучлардан иборатдир.

Иккинчи боғланишдаги реактив куч R_{2p} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланиш ажратиб олинади (9.12-расм, а). Бу ажратилган бўлак учун статиканинг мувозанат тенгламасини ёзамиз:

$$\sum X = P + R_{2p} - \frac{P}{2} = 0.$$

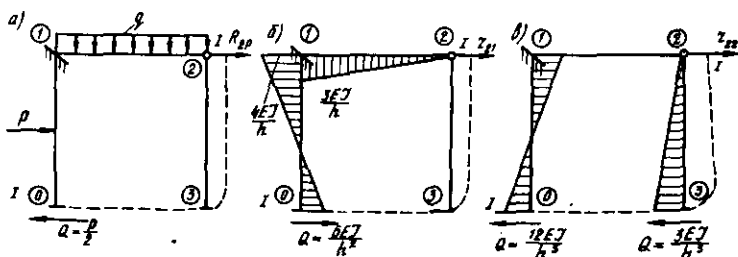
Бундан
$$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$

r_{21} ни аниқлаш учун асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригелни ва иккинчи боғланишни ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текшираемиз (9.12-расм, б):

$$\sum X = \frac{6EI}{h^2} + r_{21} = 0;$$

бундан
$$r_{21} = -\frac{6EI}{h^2}.$$

r_{22} ни аниқлаш учун ҳам асосий системанинг устунларини 1—1 кесим бўйича кесиб, ригель ва иккинчи боғланишни



9.12-расм

ажратамиз ҳамда унинг мувозанатини текшираамиз (9.12- расм, в);

$$\sum X = r_{22} - \frac{12EI}{h^3} - \frac{3EI}{h^3} = 0;$$

бундан

$$r_{22} = \frac{15EI}{h^3}.$$

Эпюраларни кўпайтириш усули

Агар берилган раманинг устунлари ўзаро параллел бўлмаса, у ҳолда статик усул анча мураккаб тус олади. Чунки оғма устунли раманинг асосий системаси учун мувозанат тенгламаси тузилганда, унинг горизонтал ўқиға кўндаланг кучлар билан биргаликда бўйлама кучлар ҳам проекцияланади.

Бу усул билан коэффициентлар ва озод ҳадларни ҳисоблаш мураккаблашади. Бундай ҳолларда эпюраларни кўпайтириш усулидан фойдаланилади. Бу усул ташқи ва ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган ишлар ҳақидаги Бетти теоремасига асосланади:

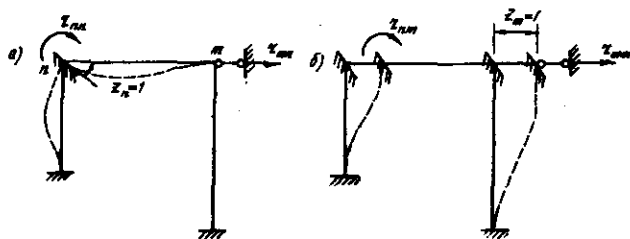
$$T_{nm} = U_{mn}. \quad (a)$$

T_{nm} « m » ҳолатдаги ташқи кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши;

U_{mn} « n » ҳолатдаги ички кучларнинг бажариши мумкин бўлган иши.

Статик ноаниқ рамани икки ҳолатда тасвирлаймиз: биринчи ҳолатда « n » тугунни $Z_n = 1$ бурчакка бурамиз (9.13- расм, а) иккинчи ҳолатда « m » тугунни $z_m = 1$ масофаға кўчираамиз (9.13- расм, б). Шакллардан фойдаланиб, ташқи кучлар бажариши мумкин бўлган иш ифодасини ёзамиз:

$$T_{nm} = r_{mn} \cdot 1. \quad (б)$$



9.13- расм

Маълумки, ички кучлар бажариши мумкин бўлган иш куйидаги формуладан аникланади:

$$r_{mn} = \sum \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EJ} dx, \quad (8)$$

(a) ифодага кўра

$$r_{mn} = \sum \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n}{EJ} dx. \quad (9)$$

Демак, кўчиш усули каноник тенгламаларнинг коэффициентларини аниклаш учун куч усулидаги сингари иккита бирлик эпюрани бир-бирига кўпайтирилса кифоя экан.

Кўчиш усули каноник тенгламаларининг озод ҳадларини ҳам эпюраларни кўпайтириш усулида топса бўлади. Бунинг учун куйидаги формуладан фойдаланилади:

$$R_{np} = - \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p}{EJ} dx$$

Бу ерда $\bar{M}_n$ — бирлик эгувчи момент эпюраси;

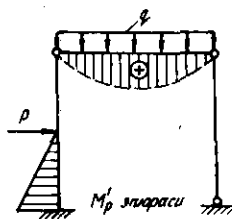
M'_p — статик аниқ системада ташки кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси.

Масалан, 9.10-расм, а — да берилган статик ноаниқ рама учун M'_p эпюраси 9.14-расмда кўрсатилгандек бўлади. $\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ бирлик эпюралари ўзгаришсиз қолади (9.10-расм, в, з). R_{1p} ни аниклаш учун M'_p билан $\bar{M}_1$ эпюраси, R_{2p} ни аниклаш учун эса M'_p билан $\bar{M}_2$ эпюралари кўпайтирилади. Кўпайтириш ишлари Верещагин қондаси бўйича амалга оширилади.

Кўчиш усули каноник тенгламалари системасининг коэффициентлари ва озод ҳадлари куч усулидаги каби текширилади.

Бунинг учун аввал $\bar{M}$, йиғинди эпюраси чизиб олинади:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n.$$



9.14-расм

Бу эпюра билан истаган бирлик эпюранинг кўпайтмаси, куч усулидаги сингари, тегишли катор коэффициентларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\begin{aligned} r_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EJ} dx = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) dx}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} + \dots + \\ &+ \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n dx}{EJ} = r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}. \end{aligned}$$

Каноник тенгламанинг озод хадлари куйидагича текширилади:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}'_p}{EJ} dx &= - \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \bar{M}'_p}{EJ} dx = \\ &= \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}'_p dx}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}'_p dx}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}'_p dx}{EJ} \right) = \\ &= R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}. \end{aligned}$$

Демак, озод хадлар тўғри топилган бўлса, уларнинг йиғиндиси икки эпюранинг ($\bar{M}_s$ ва $\bar{M}'_p$ эпюраларининг) кўпайтмасига тенг бўлади.

9.5. РАМАНИНГ M, Q ВА N ЭПЮРАЛАРИНИ ҚУРИШ

Каноник тенглама коэффициентлари тўғри топилганга ишонч ҳосил қилганимиздан сўнг коэффициентларни тенгламага қўйиб, ундаги номаълумлар ($z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$) ни аниқлаймиз ва ундан сўнг «M» эпюрасини қуришга ўтамиз. Эпюра куйидаги қоида асосида қурилади:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n;$$

бу ерда M — статик ноаник раманинг исталган кесимидаги эгувчи момент;

M_p — асосий системада ташки кучдан қурилган M эпюрасининг ординатаси;

$\bar{M}_1, \bar{M}_2$ — бирлик эпюраларнинг ординаталари;

Z_1, Z_2 — каноник тенгламалардан топилган бурчакли ёки чизикли кўчинлар.

Якунловчи M эпюраси қурилгандан сўнг шу эпюра асосида «Q» ва «N» эпюралари қурилади.

9.6. КЎЧИШЛАР УСУЛИДА СОДДАЛАШТИРИШЛАР

Симметрик рамаларни кўчиш усулида ҳисоблаганда ҳам куч усулидаги сингари номаълумларни гуруҳлаш йўлидан фойдаланса бўлади.

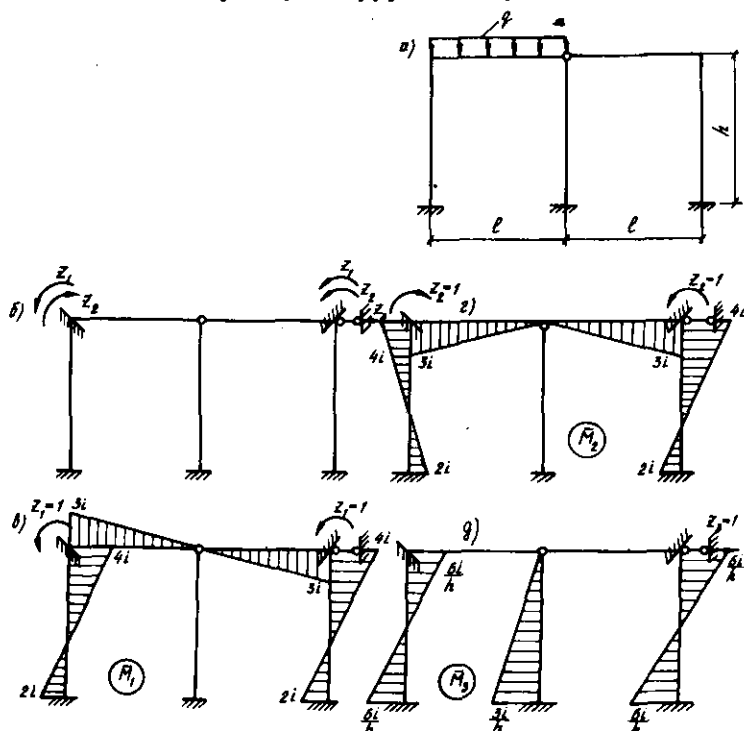
Мисол тарикасида 9.15-расм, а — да тасвирланган рамани кўриб ўтамиз. Рама иккита бурчакли ва битта чизикли кўчишга эга, яъни унинг кинематик ноаниклик даражаси $n=3$. Раманинг тўлиқ каноник тенгламаси куйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0.$$

Берилган рама симметрия ўқиға эга бўлганлиги сабабли номаълумларни гуруҳлаш йўли билан каноник



9.15- расм

тенгламанинг айрим коэффициентларини нолга тенглаштириш мумкин.

Номаълумларни гуруҳлаш натижасида икки хил: тўғри симметрик ва тескари симметрик эпюралар ҳосил бўлади. Маълумки, бундай эпюралар кўпайтмаси 0 га тенг бўлади. Натижада каноник тенглама иккита системага ажралиб кетади. Бу эса ҳисоблаш ишларини анча енгиллаштиради.

Номаълумларни гуруҳлаш 9.15- расм, б — да кўрсатилган шаклда амалга оширилади. Бирлик M эпюралари 9.15- расм, в, г, д — да тасвирланган. Бу ерда M_1 тескари, M_2 эса тўғри симметрик эпюра бўлиб, буларнинг кўпайтмасидан топиладиган $r_{12} = r_{21} = 0$ бўлади, Шунингдек $r_{23} = r_{32}$ ҳам нолга тенгдир. У ҳолда юкоридаги каноник тенглама куйидаги кўринишга келади:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1q} \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3q} \end{aligned} \right\} \text{ тескари симметрик тенглама,}$$

$$r_{22} \cdot Z_2 + R_{2q} = 0 \text{ симметрик тенглама.}$$

9.7. СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ АРАЛАШ ВА КОМБИНАЦИЯ УСУЛЛАРИДА ҲИСОБЛАШ

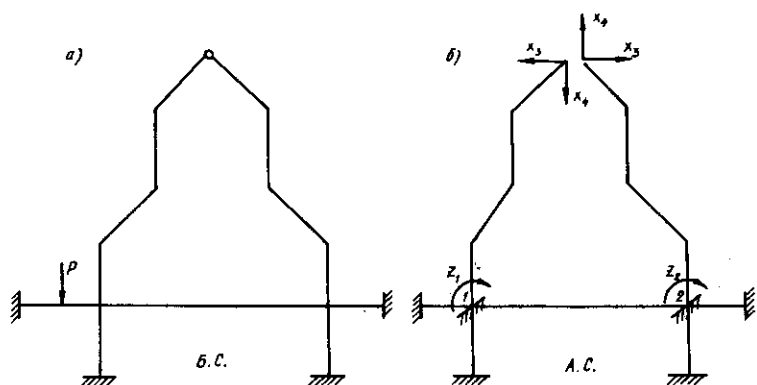
Бинокорликда шундай рамалар учрайдики, уларни ҳар канча соддалаштирганда ҳам умумий ечими мураккаблигича қолаверади. Бундай рамаларнинг ечилишини соддалаштириш мақсадида кўч ва кўчиш усулларида бир йўла фойдаланиш тавсия этилади. Бунда раманинг бир қисми кучлар усулида, иккинчи қисми эса кўчишлар усулида ҳисобланади. Бундай ҳисоблаш усули аралаш усул деб аталади. Аралаш усулга доир мисол кўриб ўтамиз (9.16- расм).

Берилган раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражалари куйидаги жадвалда берилган:

Қаватлар	Статик ноаниқлик даражаси	Кинематик ноаниқлик даражаси
Биринчи	9	2
Иккинчи	2	12
Жами	11	14

Жадвалдан кўринадикки, агар рамани куч усулида ишласак, у 11 номаълумли, кўчиш усулида эса 14 номаълумли бўлади. 11 ёки 14 номаълумли тенгламаларни ечиш осон масала эмаслиги ҳаммага аён.

Агар раманинг биринчи қаватини кўчиш, иккин-



9.16- расм

чи қаватини кучлар усулида ечилса, ҳисоб анча енгиллашади. Демак, рамани аралаш усулда ҳисоблаш мақсадга мувофиқдир. Бу усулга кўра номаълумлар сони 4 га тенг бўлади.

Аралаш усулнинг асосий системаси 9.16- расм, б — да тесвирланган.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot X_3 + r_{14} \cdot X_4 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot X_3 + r_{24} \cdot X_4 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41} \cdot Z_1 + \delta_{42} \cdot Z_2 + \delta_{43} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Каноник тенгламалар системасининг 1—2 қаторлари асосий системанинг биринчи ва иккинчи қўшимча боғланишларида ташки юк ва номаълумлардан ҳосил бўлган реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди. 3—4 тенгламалар эса асосий системада ташки юк ва номаълумлардан X_3 ва X_4 йўналишлари бўйича кўчишларнинг йиғиндиси нолга тенглигини ифодалайди.

Шундай қилиб, аралаш усул каноник тенгламаларининг бир қисми кўчишлар усулига, иккинчи қисми эса кучлар усулига тегишли шартларни ифодалайди.

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари системасидаги коэффициентлар тўрт гуруҳга бўлинади:

1. Асосий системада бирлик кўчишлар ($Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар $r_{11} \cdot r_{12}$; $r_{21} \cdot r_{22}$.

2. Асосий системанинг қўшимча боғланишларида бирлик кучлар ($X_3=1$, $X_4=1$) дан ҳосил бўлган реакцияларни ифодаловчи коэффициентлар r_{13} , r_{13} , r_{23} , r_{24} .

3. Асосий системада номаълум зўриқишлар йўналишида бирлик кўчишлардан ҳосил бўлган кўчишларни ифодаловчи коэффициентлар δ_{31} , δ_{32} , δ_{41} , δ_{42} .

4. Асосий системада номаълум куч (X_3 ва X_4) лар йўналишларида бирлик кучлардан ҳосил бўлган кўчишлар: δ_{33} , δ_{34} , δ_{43} , δ_{44} .

Каноник тенгламаларнинг коэффициентлари ва озод ҳадлари куч ва кўчиш усулларида баён этилган коидалар асосида топилади.

Аралаш усулда ҳам қуйидаги теоремалар амал қилади:

$$\begin{aligned}r_{mn} &= r_{nm}; \\ \delta_{mn} &= \delta_{nm}; \\ r_{mn} &= -\delta_{np}.\end{aligned}$$

Аралаш усулнинг каноник тенгламалари биргаликда ечилади ва z_1 , z_2 , x_3 ва x_4 номаълумлар аниқланади. Эгувчи моментлар эпюрасини қуриш учун қуйидаги формулалардан фойдаланамиз:

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \bar{M}_4 \cdot X_4.$$

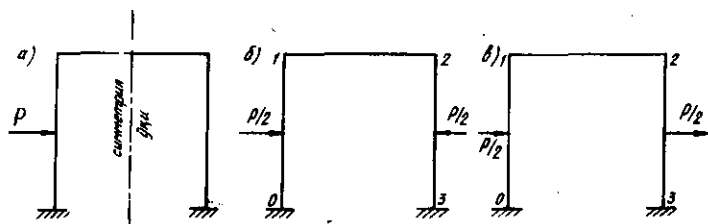
Статик ноаниқ рамаларни комбинация усулида ҳисоблаш ҳам симметрик рамалар ҳисобини осонлаштириш мақсадини кўзда тутди. Бу усулга кўра рамага юklar тўғри ва тескари симметрик юкларга ажратилади.

Симметрик юкланган рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки бунда симметрик тугунларнинг бурилиш бурчаклари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескари бўлади, уларнинг қизикли кўчишлари эса нолга тенг бўлади.

Тескари симметрик юкланган рамаларни куч усулида ҳисоблаш тавсия этилади, чунки куч усулининг асосий системасида симметрик номаълумлар нолга тенг бўлади. Симметрик рамаларни ҳисоблашда уларга қўйилган ташки юкларни симметрик ва тескари симметрик юкларга ажратилади (9.17- расм, б, в).

9.18- расмда симметрик юкланган раманинг кўчиш (а) ва куч (б) усули бўйича танланган асосий системалари тасвирланган. 9.19- расмда худди шунинг ўзи тескари симметрик юкланган рама учун бажарилган.

Ҳар иккала ҳол учун раманинг статик ва кинематик ноаниқлик даражаси, яъни номаълумлар сони аниқланиб, у



9.17-расм

9.2 а — жадвалда акс эттирилган. Шу жадвалнинг охириги устунида қабул қилинган усул кўрсатилган.

Жадвалга кўра симметрик юкланган рама — кўчиш, тескари симметрик юкланган рама — куч усулида ишланиши мақсадга мувофиқ экан.

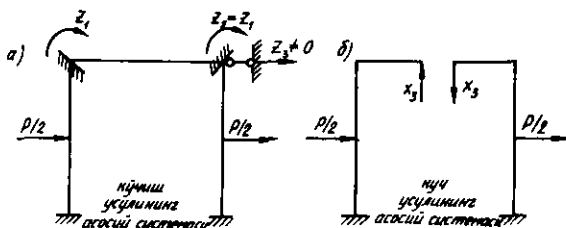
9.2.а-жадвал

Юкланиш тартиби	Номаълумлар сони		Қабул қилинадиган усул
	Куч усули	Кўчиш усули	
Симметрик	2	1	кўчиш усули
Носимметрик	1	2	куч усули

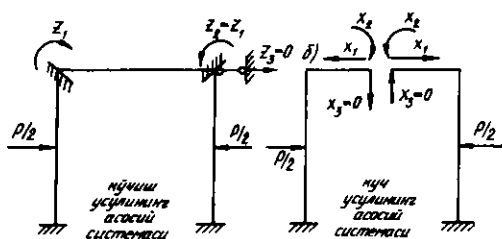
Рамаларни ҳисоблашнинг бу йўли комбинация усули деб ном олган.

Энди статик ноаниқ рамани кўчиш усулида ҳисоблашга доир бир мисол ечамиз. Раманинг юкланиши ва ўлчамлари 9.20-расм, а — да кўрсатилган.

Рама қуйидаги тартибда ҳисобланади:



9.18-расм



9.19-расм

1. Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси аниқланади:

$$n = n_6 + n_4;$$

n_6 — рама тугунларининг бурчакли кўчишлари сони;

n_4 — рама тугунларининг чизикли кўчишлари сони; (бу сон бикир тугунларни шарнир билан алмаштирилганда раманинг эркинлик даражасига тенг бўлади);

$$n_4 = 1.$$

Раманинг кинематик ноаниқлик даражаси

$$n = 1 + 1 = 2 \text{ бўлади.}$$

2. Асосий система тузилади (9.20-расм, б) ва рама элементларининг нисбий бикирликлари аниқланади:

$$i_{13} = \frac{EI}{2l} = 0,5 \frac{EI}{l} = 0,5i; \frac{EI}{l} = i;$$

$$i_{34} = \frac{EI}{l} = i;$$

$$i_{45} = \frac{EI}{l} = i;$$

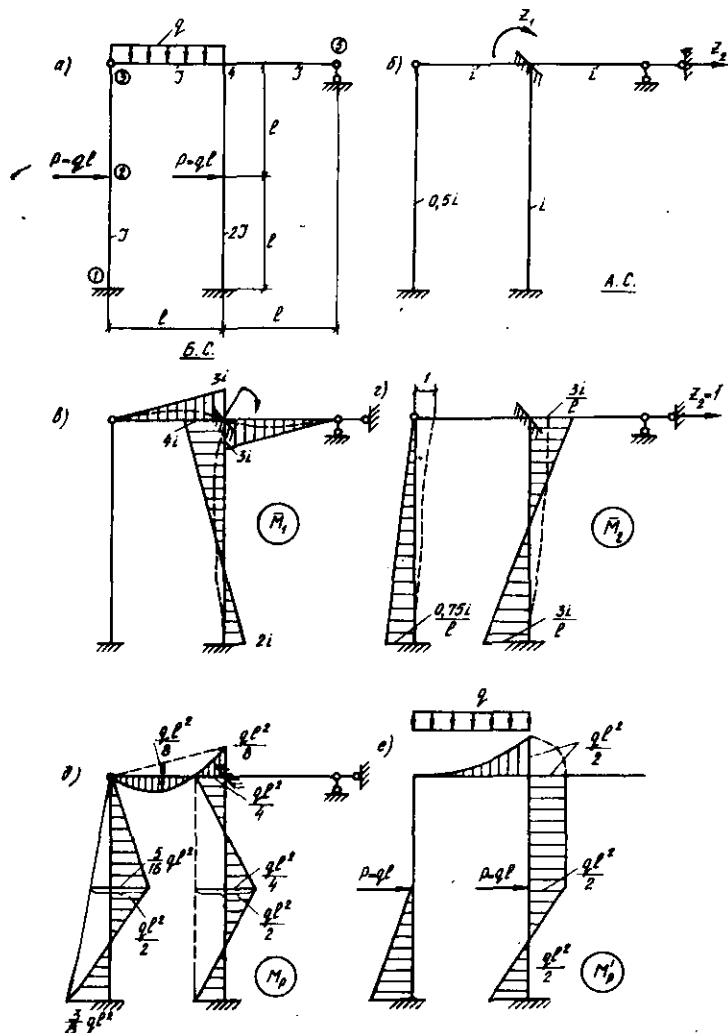
$$i_{47} = \frac{2EI}{2l} = i.$$

3. Каноник тенгламалар системаси тузилади:

$$r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0.$$

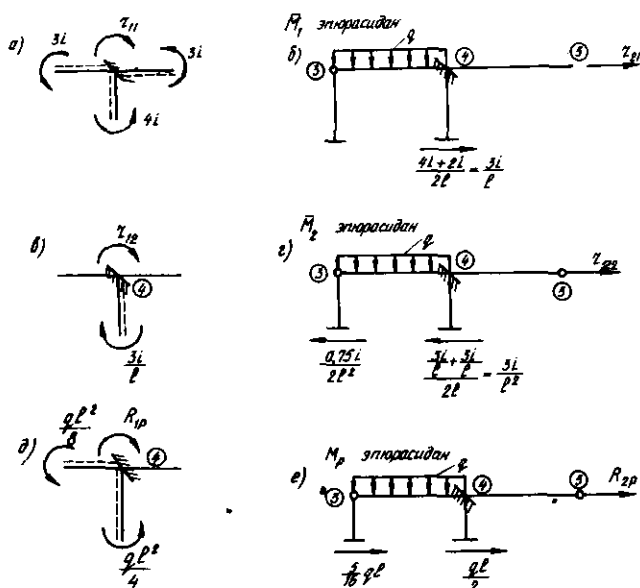
4. Асосий системада ташки кучлардан ва бирлик кўчишлардан алоҳида-алоҳида эгувчи моментлар эпюралари қурилади (9.20-расм, в, г, д).



9.20- расм

Эпюраларни куришда махсус жадвалдан фойдаланилади (9.2- жадвал).

5. Каноник тенгламалар тизими коэффицентлари ва озод ҳадлари аникланади.



9.21-расм

Статик усул

а) 4 — тугун мувозанатидан куйидагилар топилади: (9.21-расм).

$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21-расм, а): $r_{11} - 2(3i) - 4i = 0$;
 $r_{11} = 10i$.

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21-расм, в): $r_{12} + \frac{3i}{l} = 0$; $r_{12} = -\frac{3i}{l}$;

M_p эпюрасидан (9.21-расм, д):

$R_{1p} - \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = 0$; $R_{1p} = 0,375 ql^2$.

б) раманинг юкори кисми мувозанатидан куйидагилар топилади:

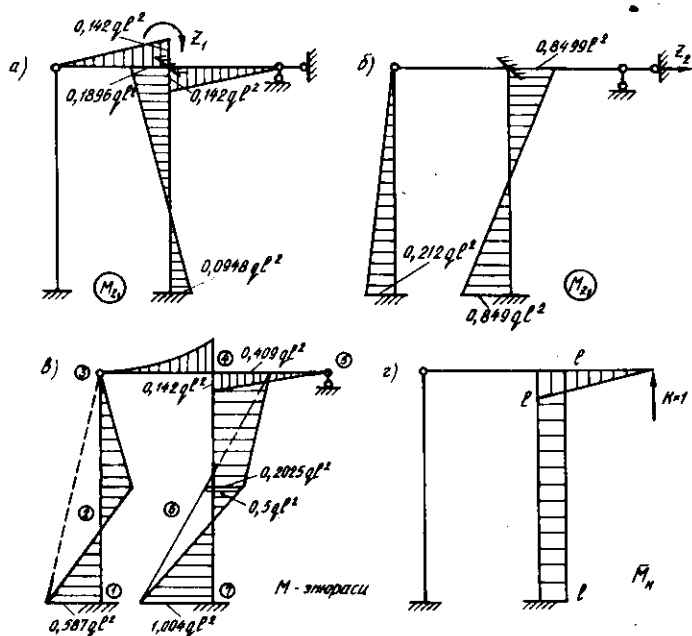
$\bar{M}_1$ эпюрасидан (9.21-расм, б) $r_{21} + \frac{3i}{l} = 0$; $r_{21} = -\frac{3i}{l}$;

$\bar{M}_2$ эпюрасидан (9.21-расм, г)

$r_{22} - \frac{0,75i}{2l^2} - \frac{3i}{l^2} = 0$; $r_{22} = 3,375i-l^2$;

M_p эпюрасидан (9.21-расм, е)

$R_{2p} + \frac{5}{16}ql + \frac{ql}{2} = 0$; $R_{2p} = -\frac{13ql}{16} = -0,81ql$.



9.22- расм

Эпюраларни кўпайтириш усули

Статик усулда топилган коэффициент ва озод хадларни эпюраларни кўпайтириш усулида тонса ҳам бўлади. Кўпайтириш амаллари Верешчагин усулида (9.22- расм) амалга оширилади:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3i \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i \cdot 2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 4i \cdot \frac{1}{3} \cdot 2i \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2i \cdot 2l \left(\frac{2}{3} \cdot 2i - \frac{1}{3} \cdot 4i \right) = \frac{l \cdot i^2}{EI} (6 + 2 + 2) = 10i ; \\
 r_{22} &= (\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0.75i}{l} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0.75i}{l} + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \times \\
 &\quad \times \frac{3i}{l} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{3i}{l} \cdot 2 = \frac{i^2}{EI \cdot l} (0.375 + 3) = \frac{3.375i^2}{i \cdot EI} = \\
 &\quad = \frac{3.375i \cdot \frac{EI}{l}}{l \cdot EI} = \frac{3.375i}{l^2} ;
 \end{aligned}$$

$$r_{21}=r_{12}=\bar{M}_1\bar{M}_2=-\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4i2l\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3i}{l}-$$

$$-\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2i\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3i}{l}=-\frac{3i^2}{EJ}=-\frac{3i\cdot EJ}{EJ\cdot l}=-\frac{3i}{l};$$

Озод ҳадларни аниқлаш учун берилган системадан статик аниқ система ҳосил қилинади ва ташқи кучлардан эгувчи моментлар эпюраси қурилади (9.20- расм, е):

$$R_{1p}=-[M'_p\bar{M}_1]=-\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{4}\cdot 3i+$$

$$+\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4i\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}+$$

$$+\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2i\cdot 2l\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}+\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot 2l\cdot\frac{1}{2}(4i-2i)=$$

$$=\frac{ql^3}{EJ}\cdot i[-0,375+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0,25]=0,375\cdot\frac{ql^3}{EJ}\cdot i=0,375ql^2.$$

$$R_{2p}=-[M'_p\bar{M}_2]=-\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot ql^2\cdot l\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{0,75i}{l}-$$

$$-\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3i}{l}\cdot 2+\frac{1}{2EJ}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot 2l\cdot 0=$$

$$=-\frac{ql^2}{EJ}\cdot i\left[\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\right]=-\frac{13}{16}ql=-0,8125ql.$$

Ҳар иккала усулда топилган коэффицент ва озод ҳадлар мос равишда бир-бирига тенг чиқди.

6. Номаълумлар аниқланади. Бунинг учун топилган коэффицент ва озод ҳадлар каноник тенгламага қўйилади:

$$10i\cdot Z_1-\frac{3i}{l}\cdot Z_2+0,375ql^2=0;$$

$$-\frac{3i}{l}\cdot Z_1+\frac{3,375i}{l^2}\cdot Z_2-0,8125ql=0.$$

Тенгламалар биргаликда ёчилиб, номаълум бурчакли ва чизикли кўчишлар аниқланади:

$$Z_1=0,0474\frac{ql^2}{i}; Z_2=0,283\cdot\frac{ql^3}{i};$$

7. Куйидаги формула асосида тузатилган эпюралар қурилади (9.22- расм, а, б):

$$M_{z_1} = \bar{M}_1 \cdot z_1; \quad M_{z_2} = \bar{M}_2 \cdot z_2$$

8. Натижавий эгувчи моментлар эпюраси қуйидаги формула асосида қурилади (9.22- расм, в):

$$M = M_p + M_{z_1} + M_{z_2}$$

9. Натижавий M эпюраси текширилади. Бунинг учун статик аниқ системага бирлик кучдан $\bar{M}_k$ эпюраси қурилади (9.22- расм, г) ва шу эпюра натижавий M эпюраси билан кўпайтирилади:

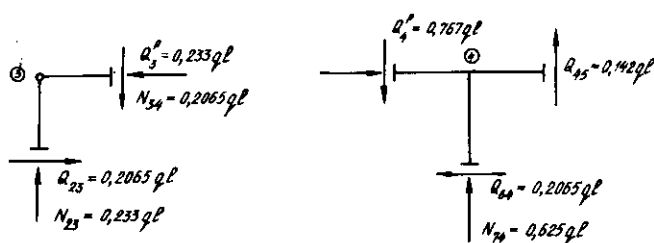
$$\begin{aligned} \Delta_{kp} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,142ql^2 \cdot l \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,409ql^2 \times \\ &\times 2l \cdot l + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5ql^2 \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,004ql^2 \cdot 2l \cdot l = \\ &= \frac{ql^4}{EI} [0,0473 + 0,2045 + 0,25 - 0,502] = \\ &= \frac{ql^4}{EI} [0,5018 - 0,502] = -\frac{0,0002}{EI} ql^4. \end{aligned}$$

$$\text{Хатоси } \delta\% = \frac{0,0002 \cdot 100}{0,502} = 0,04\% < 1\%$$

Рухсат этилган чегарада.

10. Қўндаланг кучлар эпюраси Q қурилади. Бунинг учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x^0 + \frac{M_{yнг} - M_{чан}}{l}; \\ Q_{12} &= \frac{0,2065ql^2 - (+0,582ql^2)}{l} = 0,7935ql; \\ Q_3^{пу2} &= \frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = 0,233ql; \\ Q_4^{пу2} &= -\frac{ql}{2} + \frac{-0,267ql^2 - 0}{l} = -0,767ql; \\ Q_{45} &= \frac{0 - 0,142ql^2}{l} = -0,142ql; \\ Q_{64} &= \frac{0,409ql^2 - 0,2025ql^2}{l} = 0,2065ql; \\ Q_{76} &= \frac{0,2025ql^2 - (-1,004ql^2)}{l} = 1,2065ql. \end{aligned}$$



9.23- расм

11. Бўйлама кучлар эпюраси N қурилади. Бунинг учун раманинг 3 ва 4 тугунлари мувозанати кўриб чиқилади (9.23- расм). 3 тугун мувозанатидан:

$$\sum x = 0; \quad N_{34} - Q_{23} = 0; \quad N_{34} = Q_{23} = 0,2065 \, ql;$$

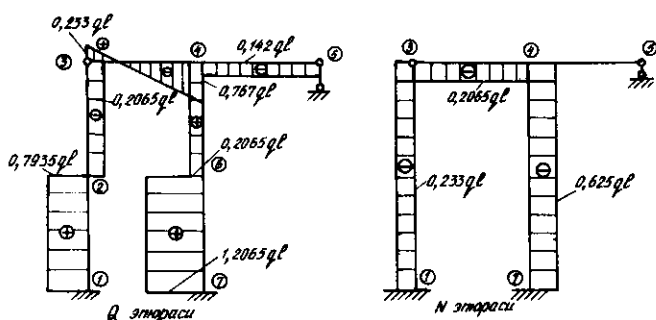
$$\sum y = 0; \quad N_{13} - Q_{31}^q = 0; \quad N_{13} = Q_{31}^q = 0,233 \, ql.$$

4 тугун мувозанатидан:

$$\sum y = 0; \quad N_{74} - Q_{41}^q + Q_{45} = 0;$$

$$N_{74} = Q_{41}^q - Q_{45} = 0,767 \, ql - 0,142 \, ql = 0,625 \, ql.$$

Топилган ординаталар бўйича кўндаланг ва бўйлама кучлар эпюраси қурилади (9.24- расм).



9.24- расм

СТАТИК НОАНИҚ РАМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

10.1. ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Ҳисоблаш усулларини аниқ ва тақрибий усулларга бўлишнинг ўзи шартлидир. Негаки, «аниқ» усулларда ҳам айрим фаразларга йўл қўйилади. Масалан, материални идеал эластик ва бир жинсли деб қаралади, бунда раманинг фазовий иши ҳамда таянчларининг қайишқоклиги эътиборга олинмайди ва ҳ.к. Тақрибий усулларда эса ҳисобни енгиллаштирадиган фараз ва соддалаштиришга кўпроқ ўрин берилади.

Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашда тақрибий усуллар кенг қўлланилади. Маълумки, қурилиш конструкцияларининг ҳисоби уларнинг кўндаланг кесимини дастлабки танловдан бошланади. Бу ишларни тез ва соз амалга оширишда муҳандисга тақрибий усуллар жуда қўл келади.

Тақрибий усулларнинг қўшимча фаразлари иншоотнинг тарҳини янада соддалаштиришга, ички кучлар тақсимотига, берилган юкларни соддароқ юклар билан алмаштиришга ва шунинг сингари катор амалларга асосланади.

Бу борада ҳисоблаш тарҳини янада соддалаштириш асосий йўллардан бири ҳисобланади. Агар ҳисоблаш тарҳи кўпол фаразларга асосланса, у ҳолда ҳисоб натижалари биринчи яқинлашув учун тўғри деб қабул қилинади, танланган кесим эса дастлабки нусха сифатида қаралади, зарурат туғилса, кейинчалик аниқроқ тарҳи бўйича қайта ҳисобланади.

Масалан, рама ригелининг кўндаланг кесими ўлчамларини дастлабки танлашда уни оддий балка кўринишида олиш мумкин: бунда ригель моменти балка моменти M_0 нинг $0,6—0,7$ улушини ташкил этади:

$$M = (0,6—0,7) M_0$$

Рама устунларининг кесимини танлашда ригеллар устунга шарнирли бириккан деб фараз этилади ва шу асосда устунга таъсир этувчи бўйлама кучлар аниқланади. Бунини ҳисобга олиб, ҳисобий қаршиликлар $20—50$ фоизга камайтирилади.

Аниқроқ ҳисоблаш тарҳлари бўйича бажарилган ҳисоб дастлабки танланган кесимни оидинлаштириш имконини беради. Баъзан қайта аниқланган кесим кейинги аниқ ҳисобларга асос қилиб олинади.

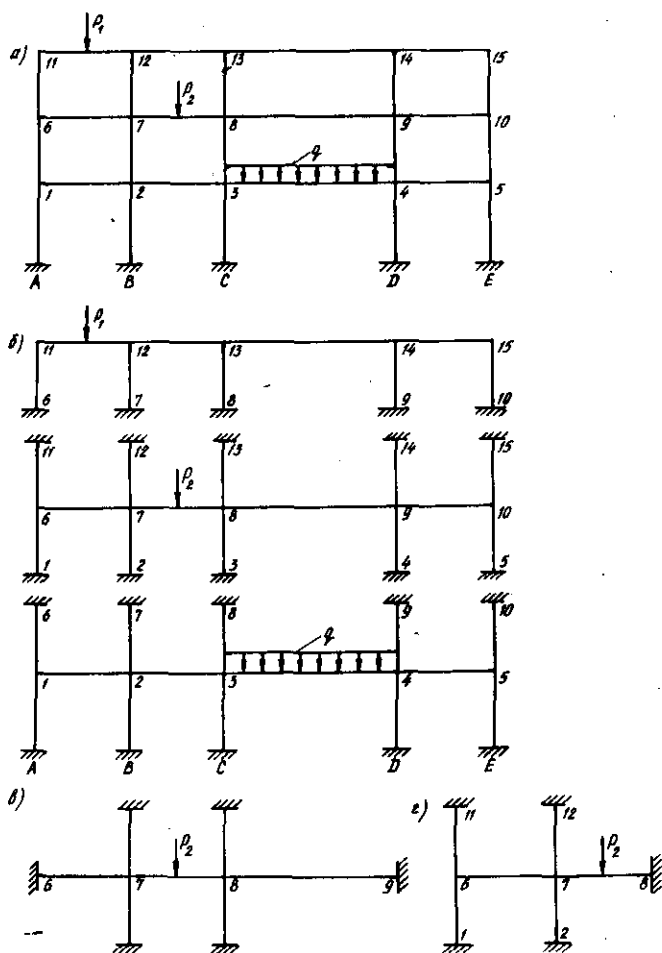
Амалий ишларда тақрибий усулларнинг аҳамияти бениҳоя каттадир.

10.2. РАМАЛАРНИ ВЕРТИКАЛ ЮКЛАР ТАЪСИРИГА ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Аниқ ҳисобларнинг далолат беришича, бирор қаватнинг ригелига қўйилган юк бошқа қават ригелларида вужудга келадиган эгувчи моментларга айтарли таъсир этмайди. Бу ҳол 10.1-расм, *а* — да берилган рамани 10.1-расм, *б* — да кўрсатилган тарзда алоҳида рамаларга ажратиш имконини беради. Раманинг ҳар бир қисми мустақил рама сифатида қурилади. Алоҳида эпюралар раманинг дастлабки тарҳига устма-уст жойлаштирилади, сўнгра кўндаланг ва бўйлама кучлар ҳисобланади. Ҳисоб тақрибий бўлганлиги сабабли рама тугунлари тўлиқ мувозанатга эга бўлмайди.

Ҳисобни бундан ҳам соддалаштирса бўлади. Бунинг учун раманинг уч ригелдан иборат бўлган бўлаги ажратиб олинади (10.1-расм, *в*) ва мустақил равишда ҳисобланади. Раманинг чекка қисми 10.1-расм, *г* — да кўрсатилган тарзда ажратилади.

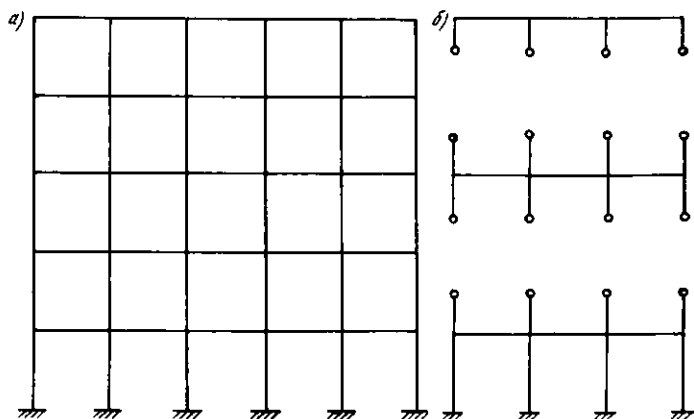
Бинокорликда оралиқлари тенг ҳамда бир хил юкланган кўп қаватли рамалар кўп учрайди. Бундай рамаларни вертикал юklar таъсирига ҳисоблаганда янада соддарок тарҳлар танлаш мумкин. Масалан, 10.2-расм, *а* — да тасвирланган кўп қаватли кўп оралиқли рамалар ҳисоби, 10.2-расм, *б* — да кўрсатилганидек учта уч оралиқли рамалар ҳисобига келтирилиши мумкин, яъни берилган раманинг ички кучлари ҳақида тақрибий маълумотга эга бўлиш учун юқори, ўрта ва биринчи қават рамалари ҳисобланса кифоя. Рама устунчасининг баландлиги қават баландлигининг ярмига тенг бўлиб, учлари шарнирли деб қабул қилинади. Бунга сабаб шуки, горизонтал кўчишлар йўқ деб фараз этилса, бир ўқ устида жойлашган тугунлар деярли бир хил бурчакка бурилади. Бинобарин, устунларнинг тугундаги моментлари ҳам ўзаро тенг бўлади, натижада ноль нуқталар устуннинг ўрталарида ҳосил бўлади.



10.1-расм

10.3. РАМАЛАРНИ ГОРИЗОНТАЛ ЮКЛАР ТАЪСИРИГА ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

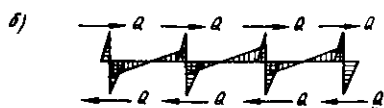
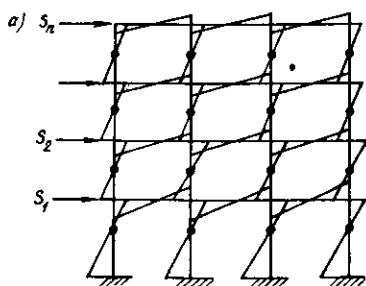
Рамаларни горизонтал юклар (шамол ва сейсмик кучлар) таъсирига тақрибий ҳисоблаганда, юклар йиғик куч сифатида тугунларга қўйилган деб қаралади. Аниқ ҳисобларнинг кўрсатишича, юклар тугунларга қўйилса, эгувчи моментларнинг ноль қийматлари устуннинг ўрта



10.2- расм

кисмида, биринчи қаватда эса устун баландлигининг тахминан учдан икки қисмида жойлашади (10.3- расм, а). Шунга кўра, ноль нуқталарга шарнирлар киритиш воситасида раманинг статик ноаниқлик даражасини пасайтирса бўлади.

Қават учун аниқланган умумий кўндаланг куч Q рама устунларига маълум тартибда тақсимланади. Ҳар бир устунга таъсир этувчи кўндаланг куч топилгач, эгувчи моментларни аниқлаш ва M эпюрасини қуриш учун



10.3- расм

рамадан бир бўлаги ажратиб олинади (10.3- расм, б). Устун учларига Q кучларини қўйиб, устун учун M эпюраси қурилади. Тугундаги мувозанатлашмаган момент ригелдаги момент билан мувозанатлаштирилади. M эпюраси асосида Q ва N эпюралари қурилади.

Қаватлар кўндаланг кучлари қуйидаги тартибда аниқланади: биринчи қават учун

$$Q_1 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n;$$

иккинчи қават учун

$$Q_2 = S_2 + S_3 + \dots + S_n \quad (10.1)$$

Маълум қават чегарасида устунларнинг кўндаланг кесимлари бир хил бўлса, у ҳолда кўндаланг куч устунларга қуйидаги тартибда тақсимланади:

қаватнинг ўртадаги устунлари учун

$$Q_{yp} = \frac{Q}{m-2(1-\beta)}; \quad (10.2)$$

қаватнинг четки устунлари учун

$$Q_{чет} = \beta Q_{yp} \quad (10.3)$$

Бу ерда m — битта қаватдаги устунлар сони;

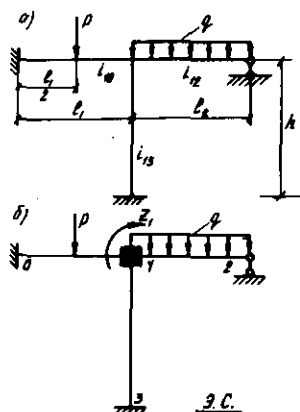
β — четки устунлар биқирлигини камайтириш коэффициенти; биринчи қават учун $\beta = 0,9$; қолган қаватлар учун $\beta = 0,54 \dots 0,79$.

10.4. ТУГУНЛАРНИ МУВОЗАНАТЛАШ УСУЛИ

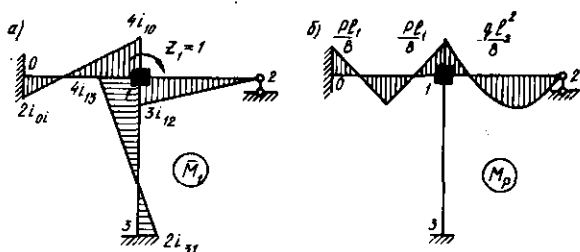
Мазкур усулнинг замирида кўчиш усули ётади. Бирок бунда каноник тенгламалар тузилмай, оддий арифметик ҳисоблар амалга оширилади. Усул тақрибий бўлишига қарамай, ҳисоб ишлари керакли аниқликкача олиб борилиши мумкин. Мазкур усулни айрим муаллифлар моментларни тақсимлаш усули ёки кетма-кет яқинлаштириш усули деб атайдилар.

Тугунларни мувозанатлаш усули 1929 йилда Тошкентлик муҳандис Н. М. Бернадский томонидан ишлаб чиқилган. Шунга ўхшаш усулни 1930 йилда америка олими Харди Кросс ҳам тақлиф этган.

Тугунларни мувозанатлаш усулида рамалар озод ва озодмас рамаларга ажратилади. Чизикли кўчиш имкониятига эга бўлган рамалар озод, эга бўлмаганлари — озодмас рамалар деб аталади.



10.4-расм



10.5-расм

Усулнинг моҳияти билан 10.4-расм, а — да тасвирланган озодмас рама мисолида танишиб ўтамиз. Берилган рамага эквивалент бўлган система кўчиш усулида 10.4-расм, б — да кўрсатилган. Кўчиш усулининг каноник тенгламаси эса қуйидаги кўринишга эга:

$$Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0. \quad (10.4)$$

Бу тенгламадан номаълум бурчакли кўчиш z_1 аниқланади:

$$Z_1 = -R_{1p} : r_{11}. \quad (10.5)$$

Раманинг биринчи тугунида ҳосил бўладиган реактив моментлар r_{11} ва R_{1p} бирлик кўчиш ва ташқи кучлардан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюралари M_1 ва M_p дан топилади. (10.5-расм, а, б):

$$r_{11} = 4(i_{10} + i_{13} + \frac{3}{4}i_{12}); \quad i_{12}^1 = \frac{3}{4}i_{12} \text{ деб олсак};$$

$$r_{11} = 4(i_{10} + i_{13} + i_{12}^1); \quad (10.6)$$

$$R_{1p} = \frac{pl}{8} - \frac{pl_2^3}{8} \text{ бўлади.} \quad (10.7)$$

Бу ерда R_{1p} раманинг биринчи тугунига киритилган қўшимча боғланишдаги мувозанатлашмаган момент бўлиб, уни $M_1^{\text{неур}}$ деб белгилаймиз, яъни $R_{1p} = M_1^{\text{неур}}$

(«неур» → неуровновешанный — мувозанатлашмаган сўздан олинган). Буни инобатга олсак, (10.5) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$Z_1 = -\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}}. \quad (10.8)$$

Бурчакли кўчиш z_1 аниқлангач, қуйидаги формуладан фойдаланиб, стержень учларидаги моментлар аниқланади:

$$M_{ki} = M_{ki}^p + \bar{M}_{ki} z_1. \quad (10.9)$$

Раманинг 0—1 стерженини чап учигаги момент

$$\begin{aligned} M_{01} &= -\frac{Pl_1}{8} + 2i_{01} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \\ &= \frac{Pl_1}{8} - \frac{2i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{Pl_1}{8} - \frac{1}{2} K_{01} \cdot M_1^{\text{неур}} \end{aligned}$$

бўлади. Шу стерженнинг ўнг учигаги момент куйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} M_{10} &= \frac{Pl_1}{8} + 4i_{10} \left(-\frac{M_1^{\text{неур}}}{r_{11}} \right) = \\ &= \frac{Pl_1}{8} - \frac{4i_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}}{4(i_{10} + i_{13} + i_{12})} = \frac{Pl_1}{8} - K_{10} \cdot M_1^{\text{неур}}. \end{aligned}$$

Бу ерда куйидаги белгилаш қабул қилинган:

$$K_a = K_{10} = \frac{i_{10}}{i_{10} + i_{13} + i_{12}}$$

ва унга таксимлаш коэффициенти деб ном берилган. Таксимлаш коэффициенти умумий кўринишда

$$K_{ki} = \frac{i_{ki}}{\sum_{i=1}^n i_{ki}} \quad (10.10)$$

тарзида ифодаланади.

Қолган стерженлардаги моментлар ҳам шу тарика аниқланади:

$$M_{12} = -\frac{ql_2^2}{8} - K_{12} \cdot M_1^{\text{неур}};$$

$$M_{21} = 0;$$

$$M_{13} = 0 - K_{13} \cdot M_1^{\text{неур}};$$

$$M_{31} = 0 - \frac{1}{2} K_{13} \cdot M_1^{\text{неур}}.$$

Бир тугунда учрашувчи стерженларнинг таксимлаш коэффициентлари йиғиндиси бирга тенг бўлади.

$$K_{10} + K_{12} + K_{13} = 1. \quad (10.11)$$

Биринчи тугуннинг мувозанатини текширамыз. Бунинг учун шу тугундаги моментлар йиғиндисини ёзамиз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - K_{01}M_1^{\text{неур}} \right) + \left(-\frac{ql_2^2}{8} - K_{12}M_1^{\text{неур}} \right) + (-K_{13}M_1^{\text{неур}}).$$

Кавсларни очиб, гуруҳлаймыз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = \left(\frac{Pl_1}{8} - \frac{ql_2^2}{8} \right) - (K_{10} + K_{12} + K_{13})M_1^{\text{неур}}. \quad (10.12)$$

Биринчи кавсдаги ифода $M_1^{\text{неур}}$ га, иккинчи кавс эса бирга тенг эканлигини ҳисобга олсак, тугуннинг мувозанатини белгиловчи тенгламага эга бўламыз:

$$M_{10} + M_{12} + M_{13} = 0. \quad (10.13)$$

(10.12) тенгламадаги биринчи кавснинг ўрнига $M^{\text{неур}}$ ни қўйиб иккинчи кавсни очиб ёзамиз:

$$\begin{aligned} M_{10} + M_{12} + M_{13} &= M_1^{\text{неур}} + (-K_{10}M_1^{\text{неур}}) + \\ &+ (-K_{12}M_1^{\text{неур}}) + (-K_{13}M_1^{\text{неур}}) = \\ &= M_1^{\text{неур}} + M_{10}^{\text{ур}} + M_{12}^{\text{ур}} + M_{13}^{\text{ур}} = 0. \end{aligned}$$

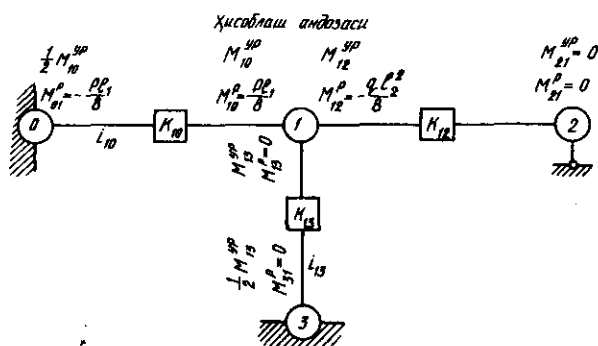
Бу ерда қуйидаги белгилаш қабул қилинди:

$$M_{ki}^{\text{ур}} = -K_{ki} \cdot M_1^{\text{неур}} \quad (10.14)$$

$M_{ki}^{\text{ур}}$ — ki стерженнинг «К» учидаги мувозанатлашган момент («ур» — уравновешанный сўзидан олинган)

(10.14) формуланинг маъноси: бикир тугунга киририлган қўшимча боғланиш олиб ташланса, яъни тугун бўшатилса, у z_1 бурчакка бурилади. Натижада тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_1^{\text{неур}}$ шу тугунга келиб туташган стерженларга уларнинг тақсимлаш коэффициентларига пропорционал равишда тақсимланиб кетади. Манфий ишора мувозанатлашган момент билан мувозанатлашмаган моментнинг йўналиши қарама-қарши эканлигини билдиради.

(10.14) формула ёрдамида топилган мувозанатлашган моментларнинг қийматини берилган рама шаклида чи-



10.6- расм

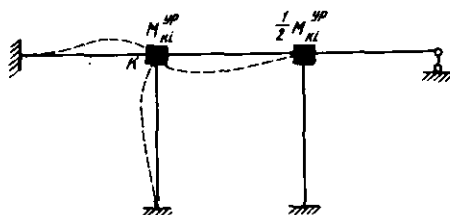
зилган ҳисоблаш андозасига жойлаштирамиз (10.6- расм). Ҳар қайси стержен учидagi натижавий моментнинг қиймати ҳисоблаш андозасига ёзилган тегишли моментларнинг йиғиндисига тенг бўлади.

Мазкур мисолда бикир тугуни битта бўлган рама, яъни бир номаълумли рама кўриб ўтилди. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент стерженларга тўла тўқис ва қолдиқсиз тақсимланиб кетди. Шу сабабли ҳисоб аниқ бўлди. Агар бикир тугунлар сони бирдан ортик бўлса, у ҳолда ечим тақрибий бўлади.

Раманинг бикир тугуни бирдан ортиқ бўлган ҳол

Юқорида раманинг бикир тугуни битта бўлган ҳолни кўриб ўтдик. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг тўла ва аниқ тақсимланганининг гувоҳи бўлдик. Агар раманинг бикир тугунлари иккита ва ундан ортик бўлса, у ҳолда вазият бироз бошқача бўлади.

Мисол тариқасида бикир тугуни иккита бўлган статик ноаниқ рамани (10.7- расм) кўриб ўтайлик. Раманинг «К» ва «i» тугунлари қўшимча боғланиш билан маҳкамланган. Ҳисобни исталган тугундан бошлаш мумкин. Раманинг «К» тугунидаги мувозанатлашмаган момент $M_k^{неур}$ ни аниқладик, дейлик. Энди «К» тугунини бўшатамиз. Бунда тугундаги мувозанатлашмаган момент $M_k^{неур}$ шу тугунга туташган стерженларга тақсимланиб кетади. Тақсимот натижасида $k-i$ стерженининг «К» учига $M_{ki}^{ур}$ моменти тегади, «i» учига эса шу моментнинг ярми,



10.7- расм

яъни $1/2 M_{kl}^{yp}$ тегади. Шу билан битта жараён тугайди. Шундан кейин «К» тугунини қайта маҳкамлаб, «i» тугунини бўшатамиз. Бунда стерженнинг «i» учига M_{kl}^{yp} моменти, «К» учига эса шунинг ярми, яъни $1/2 M_{kl}^{yp}$ тегади. Шу йўсинда «К» тугунига бошқа карама-карши тугунлардан ҳам (агар мавжуд бўлса) яримталиқ моментлар келиб қўшилади, натижада «К» тугунининг дастлабки мувозанати бузилади. Бирок энди бу сафар «К» тугунидаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати аввалгисидан кичикроқ бўлади. Ҳисобнинг навбатдаги жараёнида бу моментни яна қайта таксимлаймиз. Қайта таксимлаш амали бир неча марта такрорланганда, тугундаги мувозанатлашмаган моментнинг қиймати тобора нолга яқинлашиб боради. Қайта таксимлаш амали тугагач, стержень учигаги моментлар йиғиндиси топилади. Ана шу йиғинди момент натижавий момент ҳисобланади.

Тугунларни бирин-кетин мувозанатлаш усулининг моҳияти ана шундан иборат.

1- боб

ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИГА МАТРИЦАЛАР НАЗАРИЯСИНING ТАДБИКИ

11.1. МАТРИЦАЛАР ҲАҚИДА ТЎШУНЧА

Устун ва каторлари сони m ва n бўлган жадвал кўринишидаги ифодаalar тизими матрица A деб аталади.

Ўлчами $m \times n$ бўлган матрица A қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрицалар ҳар хил хусусий кўринишга эга бўлиб, турли номлар билан юритилади. Масалан, устунлар сони $n=1$ бўлган, яъни якка устундан ташкил топган матрица — устун матрица деб аталади.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Каторлари сони $m=1$ бўлган матрица эса катор матрица деб юритилади:

$$A_1 = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

Элементлар устун ва каторлар тартиби $m=n$ бўлган матрицалар m тартибли квадрат матрица деб юритилади. Квадрат матрица тартибига тенг бўлган аниқловчи матрица аниқловчиси деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$[A] \rightarrow D(A) \quad (11.1)$$

Агарда $D(A)=0$ бўлса, A матрицани хусусий, бошка ҳолларида нохусусий, яъни расмий матрица деб юритилади. Олий математика курсида баён этилган тушунчага биноан аниқловчи қуйидаги формуладан топилади:

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}. \quad (11.2)$$

бу ерда

$$a_{ii}^{(i-1)} = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} a_{ji}^{(j-1)}$$

$$a_{ij}^{(j-1)} = a_{ij} - \sum_{R=1}^{j-1} \frac{a_{RR}^{(R-1)}}{a_{RR}^{(R-1)}} a_{Ri}^{(R-1)}$$

$$a_{ji}^{(j-1)} = a_{ji} - \sum_{R=1}^{j-1} \frac{a_{jR}^{(R-1)}}{a_{RR}^{(R-1)}} a_{Ri}^{(R-1)}$$

Масалан, иккинчи ва учинчи тартибли аникловчилар қуйидагича ёйилади:

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Агар тўртбурчакли матрица $(m \times n)$ нинг баъзи қатор ҳамда устунларини ўчирсак, ҳар хил тартибли квадрат матрицалар ҳосил бўлади.

Масалан, берилган A матрицадан $(m=3, n=4)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

тўртта III — тартибли, ўн саккизта II — тартибли ва ўн иккита I — тартибли матрицалар ҳосил қилиш мумкин.

Матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчи сифати деб, $D(A)$ аникловчидан a_{ij} элементли қатор ва устунларни ўчириб, топилган $(-1)^{i+j}$ ишорали аникловчига айтилади.

Агар иккита бир хил тартибли A ва B матрицаларнинг бир хил жойлашган ҳар бир элементи ўзаро тенг бўлса, яъни

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = B$$

бу ерда $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$)

у ҳолда бу матрицаларни тенг матрицалар дейиш мумкин.

Агар A матрицанинг қаторларини устунга, устунларини эса қаторга айлантириб ёзсак, у ҳолда A матрицага нисбатан A^1 — транспонирланган матрица ҳосил бўлади, яъни

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Устуни матрица A нинг транспонирланган кўриниши қатор матрица бўлади:

$$A^1 = [a_1 \ a_2 \dots a_m]$$

11.2. ҚУРИЛИШ МЕХАНИКАСИ МАСАЛАЛАРИДА УЧРАЙДИГАН МАТРИЦА ВА ВЕКТОРЛАР

Қурилиш механикасида матрицалар статик аниқ ва ноаниқ балка, ферма, арка, рама ва бошқа конструкцияларни ҳисоблашда кенг қўлланилади.

Матрицалар энг мураккаб ҳисобларни ЭҲМ га программалаштиришда ўзининг ихчам ва яхлитлиги ҳамда универсаллиги билан ажралиб туради. ЭҲМ ва ҳисоблаш математикаси ривожланган сари матрицалар қурилиш механикасининг барча бўлимларига жадал суръатда кириб бормокда.

Юқорида келтирилган кўчишларнинг ўзаро боғланиши ҳақидаги Максвел теоремасига асосан қурилиш механикаси масалаларида учрайдиган матрицаларнинг кўшни элементлари $a_{ij} = a_{ji}$ бўлади. Натижада бу матрица симметрик бўлиб, квадрат кўринишига эга бўлади.

Қурилиш механикасида диагональ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

лентасимон

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & a_{m-1, m-2} & a_{m-1, m-1} & a_{m-1, m} \\ & & & & & & a_{mm} & a_{m, m-1} \end{bmatrix}$$

бирлик ва ноллик

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad A=0$$

$$a_{ij}=0 \quad i=j=\overline{1, m}$$

матрицалардан кенг фойдаланилади.

Ундан ташқари юқори ёки пастки учбурчак матрицалардан

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & \dots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ҳам фойдаланилади.

Юқори тартибли статик ноаниқ масалаларни умуман катта тартибли тенгламаларни ЭХМ да ечишни осонлаштириш учун блоксимон ва квази матрицалар қўлланилади.

Блоксимон матрица ҳосил қилиш учун матрица A дан горизонтал ва вертикал чизиқлар ўтказиб бир неча блокларга бўлинади:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array} \right]$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{44} \\ a_{54} \\ a_{64} \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \\ a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

У ҳолда матрица A нинг элементларини матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Бундай матрица блоксимон матрица деб қабул қилинган.

Агар блоксимон матрицанинг қўшни элементлари ноль бўлса, бундай матрицалар квазидиагонал:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & \\ & A_{12} & & & \\ & & A_{13} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_{RR} \end{bmatrix}$$

баъзилари ноль бўлса,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & & \\ & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & A_{R-1} & A_{RR} \end{bmatrix}$$

квазилентасимон матрица деб юритилади.

Илгари кўриб ўтилган куч ёки кўчишлар усулининг каноник тенгламалари тизимини матрица кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Ax + B = 0 \text{ ёки } Kz + P = 0 \quad (11.3)$$

бу ерда A, K — тенгламалардаги коэффициентлар матрицаси;

x, z — номаълум куч ва кўчишлар матрицаси;

B, P — озод ҳадлар матрицалари.

Шу кўринишга эга бўлган тенгламаларни ЭХМ да матрицалар ёрдамида ҳисоблаш кенг имкониятларга эга. Бу имкониятлар қуйидагилардан иборат:

- юқори тартибли статик ноаниқ масалаларни ечиш;
- иншоотга бир неча хил ташқи кучлар таъсир этса, тенгламаларни тескари матрицалар орқали бир марта ечиш;
- ҳисоб ишларини соддалаштириш ҳамда натижасини ҳақиқатга яқинлаштириш каби имкониятларга эга.

Бунинг учун, яъни номаълум векторларни

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ёки} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ z \end{bmatrix}$$

топиш учун, қуйидаги матрица амаллари бажарилади:

$$x = -A^{-1}B \quad \text{ёки} \quad z = -K^{-1}P \quad (11.4)$$

A^{-1}, K^{-1} кўринишига эга бўлган тескари матрицадан фойдаланилади.

Тескари матрицаларни топиш ёки математик ибора билан айтганда, матрицаларни алмаштириш — чизикли алгебранинг энг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

11.3. МАТРИЦАЛАР УСТИДАГИ АМАЛЛАР

A ва B матрицаларни қўшиш ёки айириш амалларини фақат уларнинг тартиблари бир хил, яъни қатор ва устунлари сони тенг бўлгандагина бажариш мумкин:

$$C = A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

бу ерда $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$; $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$

Матрица устидаги кўшиш ва айириш амаллари куйидаги алгебрик боғланишларга эга:

$$A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C); A + 0 = A$$

$A(m \times p)$ матрицасини $B(p \times n)$ матрицасига кўпайтириш учун A матрицанинг устунлар сони B матрицанинг каторлар сонига тенг бўлиши шарт. Буларнинг кўпайтмасидан ҳосил бўлган $C = A \cdot B$ матрица элементлари куйидаги кўпайтмалар йиғиндисига тенгдир:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

Яна шунга эътибор бериш керакки, A ва B матрицалар ўзаро мос бўлгандагина кўпайтириш мумкин.

Масалан:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ва } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

бу ерда

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{31} \text{ ва х.к.}$$

Агарда A ва B матрицаларининг тааллуқли тартиблари тенг бўлмаса, уларни кўпайтириб бўлмайди ва бундай матрицалар мос бўлмаган матрицалар дейилади.

Масалан, юкоридаги B ва A матрицалар ўзаро мос эмас, чунки уларни $B \cdot A$ кетма-кетликда кўпайтириб бўлмайди. Аксинча, икки матрица A ва B ўзаро мос бўлиб, уларнинг кўпайтмалари мавжуд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Чунки матрица амалларида $AB \neq BA$ бўлади.

Бу тенгсизлик икки матрица квадрат ва тенг тартибли (мос матрицалар) бўлганда ҳам сақланади.

Квадрат матрицалар учун куйидаги кўпайтмалар бўлиши мумкин:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A^{n-1} = A, \quad R - \text{бутун сон}$$

A матрицасини α микдорга кўпайтириш куйидагича бажарилади:

$$C = \alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \dots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \dots \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} \dots \alpha a_{nn} \end{bmatrix}$$

Умуман матрицаларни кўпайтиришда куйидаги алгебрик боғланишлардан фойдаланиш мумкин:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = (\alpha B)A$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$AE = A$$

Матрицаларни кўпайтиришда куйидаги хусусий ҳолатлар бўлиши мумкин:

1. Ҳадлари бир хил бўлса, ҳосил бўлган матрица куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$c = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \dots 0 \\ 0 & \beta \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \beta \end{bmatrix} = \beta A = BA$$

2. Икки диагонал матрицалар кўпайтмаси

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \dots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \beta_n \end{bmatrix} = BA$$

коммутацион хусусиятга эга.

3. Тенг тартибли устун матрица A ни катор матрица B га кўпайтмаси шу тартибга тенг квадрат матрица ҳосил қилади:

$$c = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \dots b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \dots a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \dots a_2 b_n \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 \dots a_n b_n \end{bmatrix}$$

4. Тенг тартибли катор матрица A ни устун матрица B га кўпайтмаси скаляр C га тенгдир,

$$c = [a_1 \ a_2 \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

5. Квадрат матрица A нинг вектор устун B матрицага кўпайтмаси устун матрица C га тенгдир:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$$

Қурилиш механикасида қўлланиладиган матрицаларнинг аксарияти тенгламалар тизимида тузиш ва уларни ечишга қаратилган. Агар A ва B матрица уларнинг кўпайтмаси AB ва BA бирлик матрицага тенг бўлса, улар тескари матрица ҳисобланади: $AB = BA = E$

Чизикли математикада A матричасининг тескари кўринишини A^{-1} деб, ёки $B=A^{-1}$ деб қабул қилинган.

Хар қандай тўлиқ квадрат матрица ўзининг тескари матричасига эгадир ва у қуйидагича ифодаланади:

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \quad (11.5)$$

Бу ерда A_{ij} — A матрица аникловчисининг алгебрик тўлдирувчисидир.

A_{ij} — матричасининг элементлари A матричасининг аникловчисига i — қатор ва j — устунларни ўчирганда ҳосил бўлган аникловчига (-1) ни кўпайтириб ҳисобланади.

Шунга эътибор бериш керакки, қурилиш механикаси масалаларини ечаётганда ва текшираётганда, қуйидаги боғланишлардан фойдаланиш мумкин:

$x = -A^{-1}AE$ бу эса $A^{-1}A = E$ — бирлик матричасидир.

Юқорида кўрсатилганидек, номаълум ҳадлар матричаси $x = -A^{-1}B$ (11.4) тескари A^{-1} матричаси орқали топилади.

A матрица $D(A) = 0$ бўлгандагина тескари A^{-1} матричасига эга бўла олади.

Мисол. A матрицанинг тескари қиймати алгебрик тўлдирувчилар орқали топилсин.

Берилган:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Алгебрик тўлдирувчилар қуйидагича аниқланади:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Демак, тескари матрица A нинг тўлдирувчиси

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{vmatrix}$$

куйидаги аникловчига эга бўлиб:

$$D(A) = 16 + 6 + 4 - 30 = -4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{vmatrix} \text{ га тенгдир.}$$

Тўртинчи ва ундан юқори тартибли матрицаларни алмаштириш ва уларни тескари кийматларини аниклаш анча мураккаб масала ҳисобланади.

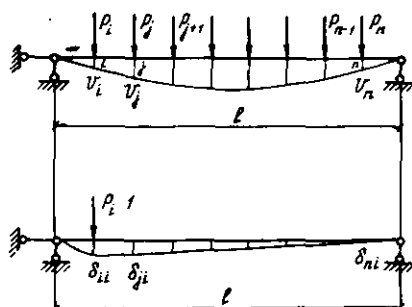
Шунинг учун бундай масалаларни ечишда ЭХМ ва матрица амалларидан фойдаланилади. Замонавий ЭХМларда тартиби 50—100, ҳаттоки 500—700 ва ундан юқори бўлган матрицаларнинг тескари кийматларини аниклаш имкониятига эга бўлган стандарт дастурлар мавжуддир.

11.4. МАТРИЦАЛАРНИ СТАТИК АНИҚ БАЛКАЛАР ҲИСОБИГА ТАДБИҚИ

Конструкцияларни матрицалар ёрдамида ҳисоблашда барча бошланғич ахборот матрица кўринишига келтирилади.

Масалан, элементнинг ва элементлар йиғиндисининг эластиклик хусусияти мойиллик ёки бикирлик матрицалари орқали ифодаланади. Бу матрицалар ташқи куч билан шу кучлар йўналиши бўйлаб элементда ҳосил бўлувчи кўчишларнинг ўзаро боғлиқлигини ифодалайди.

Агар кўчишлар кучлар орқали ифодаланса, у ҳолда бу матрица мойиллик, аксинча, кучлар кўчишлар орқали ифодаланса, бикирлик матрицаси деб аталади.



11.1-расм

Содда балка ёрдамида (11.1-расм) мойиллик матричасини келтириб чиқаришни кўрсатамиз. Балканинг $i, j \dots n$ кесимларига қўйилган P_i, P_j ва P_n ташки кучлардан балканинг кесимларида $v_i, v_j, \dots v_n$ кўчишлар ҳосил бўлади ва улар P_i ларнинг миқдориға боғлиқ бўлади.

Агарда кучлар таъсирининг мустақиллиги қондасидан фойдалансак, ихтиёрий кесимнинг P_i йўналиши бўйича кўчиши барча ташки кучларнинг шу йўналиш бўйича кўчишлари йиғиндисига тенг бўлади, яъни

$$v_i = \delta_{ii}P_i + \delta_{ij}P_j + \dots + \delta_{in}P_n;$$

бу ерда δ_{ii} — i кесимнинг $P=1$ йўналиши бўйлаб кўчиши;
 δ_{ij} — i кесимнинг P_j йўналиши бўйлаб $P_j=1$ кучидан ҳосил бўлган кўчиши.

Қолган j ва n кесимларининг кўчишлари айнан юқоридагидек топилади:

$$\begin{aligned} v_j &= \delta_{ij}P_i + \delta_{jj}P_j + \dots + \delta_{jn}P_n; \\ v_n &= \delta_{ni}P_i + \delta_{nj}P_j + \dots + \delta_{nn}P_n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Агарда матрица кўринишида ёзсак:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ii} & \delta_{ij} & \dots & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} & \dots & \delta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

бу ерда $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ бўлиб, матрицанинг каторлар сони устунлар сонига тенг.

(11.7) ифоданинг содда кўриниши қуйидагича:

$$v_q = \delta_q \cdot P_q \quad (11.8)$$

бу ерда v_q — q — элементнинг кўчишлар матричаси;

P_q — ташки куч матричаси;

δ_q — элементнинг мойиллик матричаси.

Элементлар йиғиндисидан ташкил топган конструкциянинг кесимларидаги кўчишларини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & \delta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_R \end{bmatrix}$$

ёки қисқа қилиб ёзганда,

$$v = f \cdot P$$

бу ерда v — элемент тугунларининг кўчиш матрицаси;

f — квазидиагонал мойиллик матрицаси;

P — куч матрицаси.

11.5. ТАЪСИР ЧИЗИҚЛАРИНИНГ МАТРИЦА ИФОДАСИ. ТАЪСИР МАТРИЦАСИ

Таъсир чизиклари оркали ички кучларни топишда матрица ифодаларидан* фойдаланиш бирмунча қулайликларга эга.

Агар балканинг ихтиёрий ($r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$) кесимларида ташки кучлардан ҳосил бўлган ички куч $S_k(M_k$ ва $Q_k)$ ларни топиш зарур бўлса, у ҳолда куч матрицасини қуйдагича аниқлаш мумкин:

$$\bar{S}_k = b \bar{P} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1R} & b_{2R} & \dots & b_{nR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_R \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

бу ерда b — таъсир матрицаси ҳисобланиб, ҳаракатланувчи бирлик кучдан R кесими учун чизилган таъсир чизиклари ординаталарини ифодалайди.

$P = [P_1, P_2, \dots, P_R]$ — юк матрицаси.

Таъсир матрицаси эгувчи момент, қирқувчи куч ёки таянч реакцияларига тааллуқли бўлиши мумкин.

Масалан, берилган балка $k = (1, 2, 3, 4) \frac{l}{5}$ масофадаги кесимларга бўлиниб, $n = 1, 2, 3, 4$ нукталарга ташки кучлар қўйилган бўлсин. Ҳар бир кесим учун таъсир чизиклари (11.2- расм) чизилиб, улардан ҳосил бўлган ординаталар қуйидаги матрицаларни ташкил қилади:

$$\begin{aligned} b_{1i} &= [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1] & b_{2i} &= [3 \quad 6 \quad 4 \quad 2] \\ b_{3i} &= [2 \quad 4 \quad 6 \quad 3] & b_{4i} &= [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \end{aligned}$$

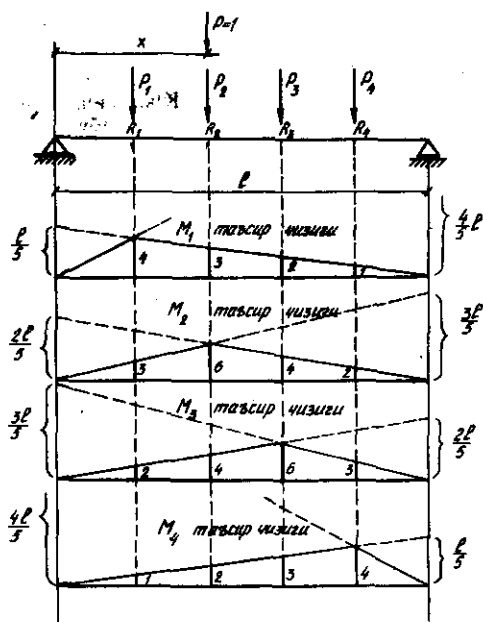
Бунинг маъноси шуки, биринчи кесимда эгувчи момент куйидагига тенг бўлса:

$$M_1 = \frac{l}{25} (4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4)$$

матрица кўринишида куйидагича аниқланади:

$$M_1 = \frac{l}{25} [4 \quad 3 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} P \\ P \\ P \\ P \end{bmatrix}$$

Кўрилатган мисол учун эгувчи моментнинг таъсир матрицаси куйидагича бўлади:



11.2-расм

$$L_M = \frac{l}{h^2} L = \frac{l}{25} L = \frac{l}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

бу ерда m — тенг бўлақлар сони.

Таъсир матрицаси симметрик бўлса, ЭХМ ёрдамида бир нечта ҳаракатланувчи кучлар таъсир чизиклари чизмасидан бир йўла M_k ва Q_k ларни топиш мумкин.

Мисол. 11.2-расмда кўрсатилган балкага $P_1=50$ кН, $P_2=2P_1$, $P_3=3P_1$, $P_4=P_1$ ташки кучлар таъсир этиб, $l=10$ м бўлса, $k=1,2,3,4$ кесимлардаги ички куч M_i топилсин.

Юқорида келтирилган умумий формуладан фойдалансак, қуйидаги келиб чиқади:

$$M = \frac{10}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 50 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 100 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 150 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 590 \\ 620 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ кН}$$

Кўриниб, турибдики, таъсир матрицаси ички кучларни аниқлашда талай қулайликларга эга.

11.6. ФЕРМА СТЕРЖЕНЛАРИДАГИ ЗЎРИҚИШЛАРНИ МАТРИЦАЛАР ЁРДАМИДА АНИҚЛАШ

Электрон ҳисоблаш машиналарининг кенг қўлланилиши конструкцияларни матрицалар ёрдамида ҳисоблашни чуқур ўрганишга олиб келади. Айниқса, мураккаб, юқори тартибли статик ноаниқ масалаларнинг матрица кўринишида ЭХМ ёрдамида ҳисобланиши ниҳоятда самарали бўлади.

Ихтиёрий n — та стержень ва q — та тугундан ташкил топган статик аниқ ясси ферма берилган бўлсин. Бу ферманинг элементларидаги зўриқишларни топиш учун ферманинг ҳар бир тугунига алоҳида, кетма-кет $P_1=1$, $P_2=1 \dots P_i=1 \dots P_q=1$ бирлик кучлар қўямиз ва ҳар бирдан ферманинг ҳамма элементларида ҳосил бўладиган кучларни аниқлаймиз. Ферманинг ихтиёрий i — элементида бирлик $P_i=1$ кучидан ҳосил бўлган ички кучни b_{ij} деб белгилаймиз. У ҳолда қатори q — га ва устуни n —

га тенг бўлган бирлик кучлар матрицаси b ни ҳосил қиламиз:

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

Агарда тугунларга қўйилган ташки кучларни q — тартибли устун матрица ёрдамида ифодаласак,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

у ҳолда ферманинг ҳамма стерженларидаги ички кучлар матрицаси қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix}$$

Ички кучларнинг ўзи қуйидаги матрица амалидан келиб чиқади:

$$S = b \cdot p \quad (11.10)$$

Агар фермага бир неча ташки куч таъсир этса, ташки куч ва ички куч матрицалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$P_{qk} = \begin{bmatrix} P_1^I & P_1^{II} & \dots & P_1^k \\ P_2^I & P_2^{II} & \dots & P_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_q^I & P_q^{II} & \dots & P_q^k \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1^I & S_1^{II} & \dots & S_1^k \\ S_2^I & S_2^{II} & \dots & S_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n^I & S_n^{II} & \dots & S_n^k \end{bmatrix} = b P_{qk}$$

Ферма элементларининг чўзилиши ёки сиқилиш деформациясини z_i деб белгиласак, у ҳолда ихтиёрий i — элементнинг деформацияси куйидагича аниқланади:

$$z_i = S_i l_i / E_i F_i = \delta_i S_i$$

бу ерда $\delta_i = \frac{l_i}{E_i F_i}$ i — элементнинг мойиллиги,

Ферманинг ҳамма элементларидаги чўзилишлар куйидагича аниқланади:

$$z_1 = \delta_1 S_1$$

$$z_2 = \delta_2 S_2$$

$$\dots$$

$$z_n = \delta_n S_n$$

ёки матрица кўринишида

$$z = \delta S_p$$

бу ерда

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{матрица устун — ферма стерженларидаги чўзилишлар.}$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & & \delta_n \end{bmatrix} \quad \text{диагонал матрица, ферманинг мойиллик матрицаси.}$$

Агар фермага турли хил ташки куч таъсир этса, у ҳолда

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} z_1^I & z_1^{II} & \dots & z_1^K \\ z_2^I & z_2^{II} & \dots & z_2^K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n^I & z_n^{II} & \dots & z_n^K \end{bmatrix}$$

бўлади.

Ферма тугунларининг деформацияси, яъни кўчишини топиш учун Мор ёки Верещчагин усулларида фойдаланиб, шу тугунда изланаётган кўчиш z_j йўналиши бўйлаб $P_i=1$ куч қўйилади.

Кўчиш z_j қуйидаги амалдан фойдаланиб топилади:

$$z_j = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{S_{ij} S_{ip} t_i}{E_i \Delta_i} = \sum_{i=1}^n S_{ij} v_{ip} \quad (11.11).$$

бу ерда S_{ij} — ферманинг i — элементида j — йўналиши бўйлаб $P_j=1$ кучидан ҳосил бўлган куч;

v_{ip} — ферманинг i — элементидаги ташки кучдан ҳосил бўлган кўчиш.

Бу формуланинг матрица кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$z_j = S^I \bar{v}_p,$$

бу ерда S_j^I юқоридаги S_i матрицанинг транспонирланган кўриниши.

Агарда $\bar{v}_p$ — учун юқорида топилган матрицадан фойдаланилса,

$$z = S^I \delta S_p$$

келиб чиқади.

Агар ферманинг ҳар бир тугунининг кўчиши аниқкланиши зарур бўлса, у ҳолда ҳар бир тугунга изланаётган кўчиш йўналиши бўйлаб $P_k=1$ кучи қўйилади. Сўнгра ҳар қайси куч таъсирида ферманинг барча элементларида ҳосил бўладиган ички кучлар топилади.

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1k} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nk} \end{bmatrix}$$

Бу матрицанинг ҳар бир устуни ферманинг элементларида i — тугунга қўйилган $P_i=1$ кучдан ҳосил бўлган кучларни ифодалайди.

Демак, ферманинг барча тугунларида кўчишлар қуйидагича топилади:

$$\bar{z} = S'_i \delta S_p$$

бу ерда

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_k \end{bmatrix}$$

— ферма тугунларидаги изланаётган кўчишлар матрицаси; $S'_i - S_i$ нинг транспонирланган кўриниши.

Агар тугун кўчишларини ташқи кучларга боғласак, у ҳолда

$$\bar{z} = S_i \delta b P$$

бўлади.

Шуни айтиш керакки, кўчишлар йўналиши ташқи куч йўналишларига мос келса,

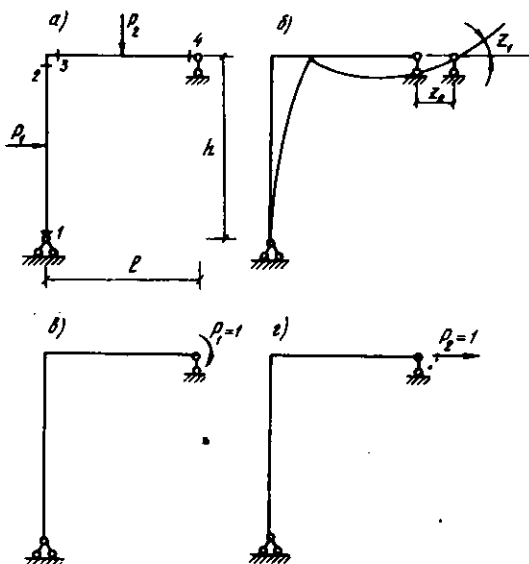
$$\bar{z} = b' \delta b P$$

кўринишда осон топилади.

11.7. Кўчишларни аниқлашнинг матрица усули

Мураккаб конструкциялардаги кўчишларни топиш матрицалар ёрдамида бажарилгани маъқулроқдир, чунки бу амал бир мунча осон, аниқ ва ЭХМ га ниҳоятда мосдир. Статик аниқ рамалар мисолида (11.3- расм, а) ташқи P_k кучидан ҳосил бўлган кўчишларни аниқлашни кўриб чиқамиз. Системанинг деформацияси тугунларнинг кўчиши орқали ифодаланади (11.3- расм, б).

Чизмада келтирилган раманинг В нуктасидаги бурилиш бурчаги ҳамда шу нуктанинг чизикли кўчиши (Z_1, Z_2) ни аниқлаш талаб этилади. Бунинг учун рамага ҳар бир изланаётган кўчиш йўналиши бўйлаб бирлик ($P=1$) кучларни қўямиз (11.3- расм, в, г).



11.3- расм

Кўчишлар юқорида келтирилган (11.8) формула

$$v = fP$$

оркали топилади.

Келтирилган конструкциянинг мойиллик матрицаси унинг таркибий элементларининг мойиллик матрицалари δ_i оркали ифодаланади. Бунда туташтирилган элементларнинг квазидиагонал кўринишига эга бўлган мойиллик матрицасидан фойдаланилади:

$$F = \begin{bmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \delta_i \end{bmatrix}$$

Бу ерда

$\delta_i = \frac{l_i}{6EI_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — раманинг i — элементи учун мойиллик матрицасидир.

Икки хил мойиллик матрицаларининг боғланишини таъминловчи куч матрицаси b — дан фойдаланамиз:

$$F = b'Db \quad (11.12).$$

бу ерда b — характерли кесимлардаги бирлик кучлардан ҳосил бўлган куч матрицаси;

b' — характерли кесимдаги изланаётган йўналишда қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган куч матрицаси.

Агар конструкцияга бир хил ташқи куч таъсир этса,

$$S_p = bP$$

кўчиш матрицаси матрица устун кўринишига

$$v = b'DS_p \quad (11.13)$$

хар хил ташқи кучлар таъсир этса, кўчиш матрицаси тўртбурчак матрица кўринишига эга бўлади:

$$v = b'DbP.$$

Агарда кўчишлар фақат ташқи куч қўйилган нуктада шу куч йўналиши бўйлаб топилаётган бўлса, у ҳолда $b' = b$ бўлади.

Юкорида кўрсатилган чизмадаги рама учун эса

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = b'DbP = [b'_1 b'_2 b'_3 b'_4] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Ясси рама, ферма ҳамда балкалардаги кўчишларни аниқлашни осонлаштириш учун қуйида уларга мос мойиллик матрицаларини келтирамиз.

1. Рама элементининг мойиллик матрицаси:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{l}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EF} \\ 0 & \frac{l}{3EI_y} & \frac{l}{6EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{3EI_y} & -\frac{l}{6EI_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{6EI_y} & \frac{l}{3EI_z} & 0 \\ \frac{l}{EF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{6EI_k} \end{bmatrix}$$

2. Ферма элементининг мойиллик матрицаси:

$$\delta_k = \frac{l_k}{EF_k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Балка элементининг эгилишга доир мойиллик матрицаси:

$$\delta_k = \frac{l_k}{6EI^k} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Шуни айтиб ўтиш керакки, элементнинг мойиллик матрицасининг тескари киймати шу элементнинг бикирлик матрицасини ифодалайди:

$$\delta^{-1} = \frac{\delta}{|\delta|} = \frac{\frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{3 \left[\frac{l}{EI} \right]^2} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = k$$

11.8. СТАТИК НОАНИҚ СИСТЕМАЛАРНИ КУЧЛАР УСУЛИ БИЛАН ХИСОБЛАШНИНГ МАТРИЦА КЎРИНИШИ

Кучлар усулининг матрица кўриниши, асосан шу усулнинг ҳамма амалларини матрица амаллари орқали ифодалашдан иборатдир.

Куч усулидаги каноник тенгламалар системасини матрица кўринишида ёзсак, қуйидаги матрица кўринишидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$Ax + B = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{bmatrix}$$

Бу ерда A — конструкциянинг мойиллик матрицаси;

x — номаълум кучлар матрицаси;

B — ташки юкдан ҳосил бўлган кўчишлар матрицаси.

Кучлар усулида бирлик кўчишлар δ_{ij} ҳар хил усуллар ёрдамида (Верещагин, Мор, Костельяно ва бошқалар)

топилган бўлса; матрица кўринишида шу кўчишларни ифодаловчи мойиллик матрицаси қуйидагича аникланади:

$$A = b'Db \quad (11.14)$$

бу ерда: b — таъсир матрицаси;

D — туташтирилган элементларнинг мойиллик матрицаси;

b' — транспонирланган таъсир матрицаси.

Раманинг таъсир матрицаси асосий системада бирлик кучлардан ҳосил бўлган M эпюраси ординаталарини ифодалайди:

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

бу ерда b_{ij} — асосий системанинг i кесимидаги j кесимга қўйилган бирлик куч таъсирида ҳосил бўлган ички кучлар. Бу матрицанинг устунлар тартиби ноаниқлик даражаси n — га, қаторлар тартиби эса характерли кесимлар ($k = 1, 2, \dots, m$) га тенгдир.

Раманинг туташтирилмаган элементларининг мойиллик матрицаси квазидиагонал матрицадир:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & D_n \end{bmatrix}$$

Бу ерда D_k k — элементнинг мойиллик матрицаси.

Элементнинг мойиллик матрицаси бирлик кучдан ҳосил бўлган элемент учларининг кўчишларини ифодаловчи матрицадир. Узунлиги l , бикирлиги ўзгармас EI бўлган балканинг мойиллик матрицаси қуйидагича ифодаланади:

$$D_i = \frac{l}{6EI_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Бунинг маъноси шуки, агар балканинг бир учига бирлик куч қўйилган бўлса, шу учида $\frac{l}{3EI}$ ва иккинчи учида $\frac{l}{6EI}$ га тенг бўлган кўчиш ҳосил бўлади.

Асосий системада ташки кучдан ҳосил бўлган кўчишлар матричасини қуйидагича топиш мумкин:

$$B = B_p P = b' D P$$

Бу ерда: B_p — асосий системада бирлик кучдан ҳосил бўлган кўчиш

$$B_p = b' D$$

P — ташки куч матричаси.

Юқоридаги матрица кўринишидаги тенгламадан номаълум куч матричаси қуйидагича топилади:

$$x = -A^{-1} B = -(b' D b)^{-1} B_p P = -(b' D b)^{-1} b' D P \quad (11.17)$$

Бу ерда $A^{-1} - A$ матричасига нисбатан тескари матрица.

Раманинг характерли кесимларида ҳосил бўлган ички куч матричаси қуйидагича аниқланади:

$$S = P + b x \quad (11.18)$$

Мазкур ифода (11.17)-ни эътиборга олинса; қуйидаги кўринишга келади:

$$S = P - b (b' D b)^{-1} B_p P = [1 - b (b' D b)^{-1} B_p] P$$

Матрица ҳисоби натижаларини қуйидагича текшириш мумкин:

$$b' D S = 0 \quad (11.19)$$

Агар конструкцияга таъсир этувчи ташки кучларни t гуруҳларга бўлинса, у ҳолда D матричаси ўзгармай $b_1 x$ ва S матрицаларида ҳар бир ташки куч учун устунлар ҳосил бўлади. Бунга сабаб канолик тенгламада ҳар бир ташки кучнинг озод ҳади ($\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$) ва номаълум кучлари ($x_1, x_2, \dots, x_n$) бордир. Шунинг учун умумий ҳолда кучлар усулининг канолик тенгламаси қуйидаги матрица кўринишига келтирилган:

$$A x = -B_p^t P$$

Бу ерда

$$x = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(t)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(t)} \end{bmatrix}; B_p^t = \begin{bmatrix} \Delta_{1p}^{(1)} & \Delta_{1p}^{(2)} & \dots & \Delta_{1p}^{(t)} \\ \Delta_{2p}^{(1)} & \Delta_{2p}^{(2)} & \dots & \Delta_{2p}^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{np}^{(1)} & \Delta_{np}^{(2)} & \dots & \Delta_{np}^{(t)} \end{bmatrix}$$

$x_1^{(s)}, x_2^{(s)} \dots x_n^{(s)}$ — ташки кучдан ҳосил бўлган
ортикча номаълум куч;

$\Delta_{1p}^{(s)}, \Delta_{2p}^{(s)} \dots \Delta_{np}^{(s)}$ — ташки кучнинг бирлик
кийматидан ҳосил бўлган озод ҳадлар.

Агарда ташки кучлар алоҳида таъсир этса,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & P_t \end{bmatrix}$$

бир вақтда таъсир этса,

$$P = [P_1 P_2 \dots P_t]$$

кўринишда ёзилади.

Кучлар усулининг матрица кўринишида ҳисоблаш тартиби қуйидагилардан иборат:

1. Асосий система танланиб, номаълум кучларнинг йўналишлари белгиланади.

2. Ҳар қайси ортикча номаълум кучларнинг бирлик кийматларидан M эпюраси қурилади.

3. Асосий системага нисбатан таъсир матрицаси b тузилади.

4. Таъсир матрицаси транспонирланади — b'

5. Ташки юк матрицаси P тузилади, кучлар бир нечта (t) бўлганда P^t матрицаси тузилади.

6. Асосий системага нисбатан бирлик ташки кучдан B_p матрицаси тузилади.

7. Конструкциянинг туташтирилмаган элементлари учун мойиллик матрицаси тузилади.

8. Агар D матрицани b' матрицага кўпайтириш жараёнида уларнинг тартиблари мос келмаса, у ҳолда D ёки B матрицаларнинг тартиблари келтирилади.

9. Раманинг мойиллик матрицаси аниқланади:

$$A = b'Db$$

10. Мойиллик матрицасига тескари бўлган матрица A^{-1} аниқланади:

$$A^{-1} = (b'Db)^{-1}$$

11. Ташқи юк матрицаси аниқланади:

$$B' = B_p P' = b' D P'$$

бу ерда t — матрицанинг устунлар тартибини билдириб, 1, 2 ... t хил ташқи юкларни ифодалайди.

12. Номатълум кучлар матрицаси аниқланади:

$$x' = -A^{-1}B' = -(b'Db)^{-1}B_p P' = -(b'Db)^{-1}b'DP$$

13. Раманинг характерли кесимларидаги ички кучлар матрицаси аниқланади:

$$S' = (1 - bx')P'$$

14. Топилган матрицалар текширилади:

$$b'DS = 0$$

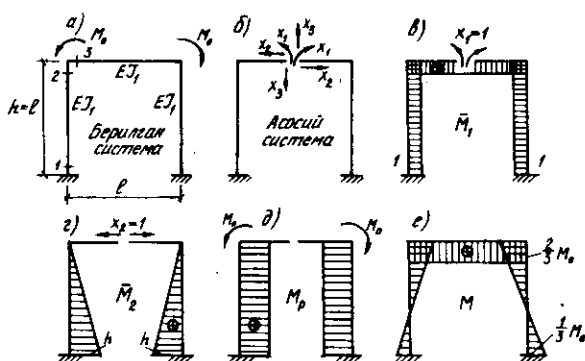
Демак, агар рамага ўзгармас вақтинча ва бошқа t хил ташқи кучлар таъсир этса, у ҳолда ички куч матрицаси S' тескари A^{-1} матрицадан фойдаланиб топилади. Келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, рамаларни ЭХМда ҳисоблаш дастури тузилади.

Ҳисоблаш намунаси

1- мисол. Юқорида келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, содда раманинг ҳисобини кўриб ўтамыз (11.4- расм, а).

1. Асосий система танлашда берилган раманинг ва ташқи юкларнинг симметриклигини инобатга олиб, ўхшаш икки қисмга бўламиз (11.4- расм, б). Номатълумларни асосий системанинг бир қисми учун аниқлаймиз.

2. Номатълум кучларнинг бирлик қийматларидан M_i эпюраларини курамиз (11.4- расм в, г). Берилган рамада $X_3 = 0$ эканлиги эпюралардан кўриниб турибди.



11.4-расм

3.4. Эпюралардан фойдаланиб, характерли кесимлар учун таъсир матрицалари b , b' ни аниқлаймиз:

$$b = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6. Фақат биргина M_0 ташқи юк таъсир этаётгани учун:

$$P = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Туташтирилган элементларнинг мойиллик матрицаси:

$$D = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & . & . \\ 1 & 2 & . & . \\ . & . & 1 & 0,5 \\ . & . & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

8. D матрицанинг тартиби b матрицанинг тартибига мос келганлиги учун унинг тартибини ўзгартириш, яъни камайтириш талаб этилмайди.

9. Берилган рама бир қисмининг мойиллик матрицаси:

$$A = b'Db = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 9 & 3l \\ 3l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

10. A матрицанинг тескари киймати:

$$A' = \frac{6EI}{ql^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -3l \\ -3l & 9 \end{bmatrix}$$

11. Ташқи юк матрицасининг ҳисоби:

$$\begin{aligned} B = B^p P = b' D P &= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1,5 & 1,5 \\ 2l & l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{M_0 l}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

12. Номаълум куч вектор матрицаси:

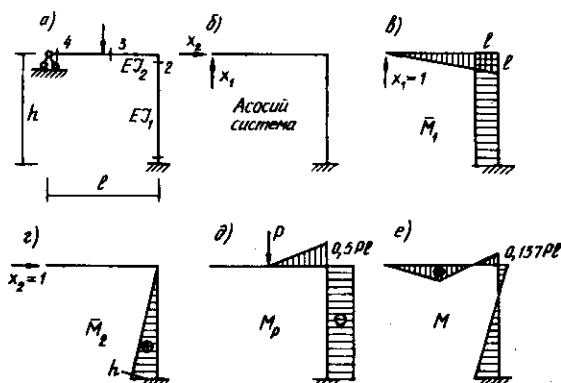
$$x = -\frac{6EI}{ql^3} \begin{bmatrix} -2l^3 & -3l \\ -3l & 9 \end{bmatrix} \frac{M_0 l}{EI} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5l \end{bmatrix} = \frac{M_0}{ql} \begin{bmatrix} 3l \\ 9 \end{bmatrix}$$

13. Рама элементлари учун изланаётган ички куч матрицаси:

$$S = \frac{M_0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

14. Топилган кийматларни текшириш:

$$\begin{aligned} b'DS &= \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1,5 & 1,5 \\ 2l & l & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_0}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{M_0 l}{18EI} \begin{bmatrix} -3+6-1,5-1,5 \\ -2l+2l-0-0 \end{bmatrix} = \frac{M_0 l}{18EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$



11.5-расм

2-мисол. Матрица кўринишидаги баъзи хусусий ҳолларни кўрсатиш мақсадида 11.5-расмда келтирилган рамани ҳисоблаймиз.

Раманинг таъсир матричаси:

$$b = \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 0,5l & 0 \end{bmatrix}.$$

Туташган элементларнинг мойиллик матричаси 1—4 қисми орасидаги характерли элементлардан тузилган:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix} \quad D_1 = \frac{l}{6EI_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = D_3 = \frac{l}{12EI_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Агар $h=0,5l$ $EI=EI_1=EI_2$ бўлса, у ҳолда

$$D = \frac{0,5l}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Юқорида зикр қилинганидек, D матрицаси тартиби-ни камайтириб, b матрицанинг тартибига мос келтира-миз. Бунинг учун D матрицасининг D_2 ва D_3 қийматлари-ни D_1 томонга диагонал бўйлаб суриб, сўнг қўшамиз:

$$D = \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ташки юк матрицаси (11.5- расм, д).

$$P = 0,5p \begin{bmatrix} -l \\ -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ташки юк орқали B ни топамиз:

$$\begin{aligned} B = b'DP &= \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ l & l & 0,5l & 0 \end{bmatrix} \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 4 & & \\ & & 4 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h & h & 0 & 0 \\ 3l & 5,5l & 3l & 0 \end{bmatrix} 0,5Pl \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{Pl^2}{24EI} \begin{bmatrix} -3h \\ -8,5l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Раманинг мойиллик матрицаси (11.5- расм, в, г) қуйидагига тенг:

$$\begin{aligned} A = b'Db &= \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h & h & 0 & 0 \\ 3l & 5,5l & 3l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l}{12EI} \begin{bmatrix} 2h^2 & 3hl \\ 3hl & 10l \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Агарда $h=0,5$ лигини инобатга олсак, у ҳолда

$$B = -\frac{Pl^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix} \quad A = \frac{l^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Демак, тенгламалар системасининг матрица кўриниши куйидагича бўлади:

$$\frac{l^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} x = \frac{Pl^3}{24EI} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix}$$

Агарда соддалаштирилса:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix}$$

келиб чиқади:

Матрица A нинг тескари кийматини топиш учун, яъни

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\text{Det}A}$$

аниклаш учун алгебрик тўлдирувчи A ҳамда аниқловчи $\text{Det}A$ нинг кийматидан фойдаланамиз.

Маълумки,

$$\tilde{A} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

бўлиб, M_{ij} аниқловчи минорлар куйидагиларга тенг:

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 3 & 20 \end{bmatrix} = 20 \quad M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = -3 \quad M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 3 & 20 \end{bmatrix} = 1$$

Аниқловчининг

$$\text{Det}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 11$$

эканлиги ҳам бизга маълум. У ҳолда A матрицанинг тескарис

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}A} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

бўлади.

Номатълум кучлар эса куйидагича топилади:

$$x = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 1,5 \\ 8,5 \end{bmatrix} = \frac{P}{11} \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix}$$

Характерли кесимлардаги эгувчи моментлар матрицаси куйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} M &= 0,5 Pl \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & l \\ 0 & l \\ 0 & 0,5l \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{P}{11} \begin{bmatrix} 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix} = \\ &= 0,5 Pl \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{Pl}{11} \begin{bmatrix} 6,25 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = Pl \begin{bmatrix} 1,160 \\ -0,137 \\ 0,181 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Топилган қийматлар асосида қурилган эгувчи момент эпюраси (11.5- расм, е) да кўрсатилган.

11.9. РАМАЛАРНИ КЎЧИШЛАР УСУЛИДА ҲИСОБЛАШНИНГ МАТРИЦА ҚЎРИНИШИ

Кўчишлар усулининг матрица кўриниши ўзининг соддалиги билан куч усулидан фарқ қилади. Кўчиш усулининг матрица кўринишида ҳеч қандай эпюралардан фойдаланилмайди.

Матрица кўринишида ҳам кўчишлар усулидаги ғоя сақланиб, берилган рамани қўзғалмайдиган ҳолга келтирувчи асосий система танланади.

Матрица кўринишидаги кўчишлар усулининг тенгламалар системаси куйидагича ифодаланади:

$$k \cdot z + R_p = 0 \quad (11.20)$$

Бу ерда

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \quad R_p = \begin{bmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \vdots \\ R_{mp} \end{bmatrix}$$

K — асосий системадаги рама тугунларида бирлик кўчишдан ҳосил бўлган реакциялар матрицаси ёки раманинг бикирлик матрицаси;

z — шу тугунлардаги ҳақиқий кўчишлар ёки номаълумлар матрицаси;

R_p — асосий системада ташки юклардан рама тугунларида ҳосил бўладиган реакциялар матрицаси.

Умуман K — матрицаси бикирлик матрицаси деб аталиб, қуйидаги матрица амаллари орқали топилади:

$$K = d' R d \quad (11.21)$$

Бу ерда d — реакция матрицаси;

R — раманинг туташтирилмаган элементларининг бикирлик матрицаси;

d' — транспонирланган реакция матрицаси.

d — матрицасининг элементлари асосий системадаги тугунларда ҳосил бўлган реакциялардан ташкил топади:

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

бу ерда d_{ij} — i кесимда j йўналишда қўшимча боғланишларнинг бирлик кўчишларидан ҳосил бўлган реакциялардир. Устунлар тартиби ноаниклик даражасига, қаторларники эса кесим $R=1,2,\dots$ лар сонига тенгдир.

Туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матрицаси квазидиагонал матрица бўлиб, қуйидаги кўринишга эгадир:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix}$$

бу ерда R_i — i элементнинг бикирлик матрицаси;

n — элементлар сони.

Элементнинг бикирлик матрицаси куч усулидаги мойиллик матрицасидан фарқ қилади, яъни:

$$K = D^{-1}$$

Элементнинг учдаги бикирлик кўчишлардан ҳосил бўлган реакциялар матрицасидир. Узунлиги l , бикирлиги

EI бўлган, икки учи мустаҳкам балканинг бикирлик матрицаси:

$$R_i = \frac{2EI}{l_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Бир учи мустаҳкам иккинчи учи эса шарнирли кўзғолмас таянчга таянган балканинг бикирлик матрицаси:

$$R_{io} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.23)$$

Кўчиш усулининг тенгламалар системаси (11.20) худди куч усулидагидек ечилади:

$$z = -K^{-1}R_p = -(d'Rd)^{-1}R_p \quad (11.24)$$

Ички кучлар матрицаси куйидагича топилади:

$$S = Rdz = -RdK^{-1}R_p = -Rd(d'Rd)^{-1}R_p \quad (11.25)$$

Аниқланган микдорларни текшириш учун куйидаги матрица кўринишидаги тенгламадан фойдаланиш мумкин:

$$K_z = d'S \quad (11.26)$$

Ҳисоблаш алгоритми

Рамаларни ЭХМда кўчишлар усулининг матрица кўринишида ҳисоблаш алгоритми куйидагилардан иборат:

1. Раманинг асосий системаси танланади.
2. Ҳар бир киритилган қўшимча боғланишга алоҳида бирлик кўчишлар берилади.
3. Бирлик кўчишлардан ҳосил бўлган реакция матрицаси d — ни аниқланади.
4. d — матрицани транспонирланади.
5. Ҳар қайси t — хил ташки юклардан озод ҳад матрицалари топилади.
6. Туташтирилмаган элементлар бикирлик матрицасини келтириб чиқарилади:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix}$$

бу ерда $R_i = \frac{2EI_i}{l_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — икки учи мустаҳкам элементнинг бикирлиги.

$R_{io} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1,5 & \\ & 0 \end{bmatrix}$ — бир учи мустаҳкам, иккинчи учи шарнирли бўлган балканинг бикирлиги.

7. Раманинг бикирлик матрицаси ҳисобланади:

$$K = d' \cdot R d$$

8. Бикирлик матрицасининг тескари қиймати топилади:

$$K K^{-1} = E$$

9. Номаълум кўчишлар матрицаси ҳисобланади:

$$z' = -K^{-1} R_p'$$

бу ерда z — номаълумлар матрицасининг устунлар тартиби t — га, қаторлар тартиби ноаниклик даражаси m — га тенгдир.

10. Раманинг ҳарактерли кесимларида ҳосил бўлаётган ички куч матрицаси аниқланади:

$$S' = R d z' = -R d K^{-1} R_p'$$

11. Топилган микдорлар текширилади:

$$K_z = d' S$$

Кўчишлар усулининг матрица кўриниши кучлар усулидаги матрица кўринишидан анча соддалиги кўриниб турибди.

Лойиҳалаш тажрибасида кенг қўлланилаётган ЭХМ даги дастурларнинг кўплари айнан шу усулга асосланган.

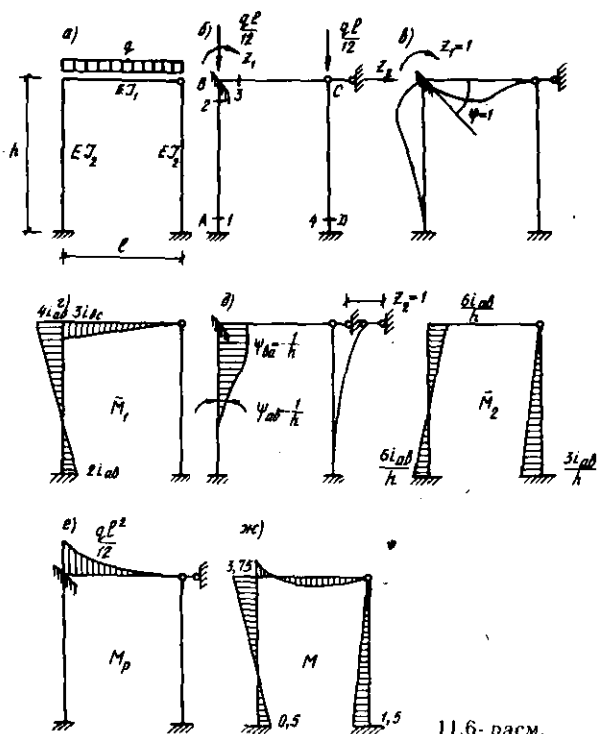
Ҳисоблаш намунаси:

3- мисол: 11.6- расмда кўрсатилган рама ҳисоблансин.

Юқорида кўрсатилган тартибдан фойдаланиб, масаланинг ечимини кидирамиз.

1. Асосий система танлаб, бурчакли ва чизикли боғланишларни киритамиз.

2. В тугунга бирлик бурчакли кўчиш, С тугунга эса бирлик чизикли кўчиш берамиз.



11.6- расм.

3. Тугунларнинг бирлик кўчишлардан (11.6- расм, *г*, *д*) элемент кесимларида ҳосил бўлган кўчишлар матрица-си d — ни тузамиз:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ -1 & -\frac{1}{l} \\ -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

4. Матрица d' — нинг қийматини аниқлаймиз:

$$d' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

5. Факат бир ташки куч таъсир этаётгани учун $t = 1$ бўлади.

6. Туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матричасини тузамиз:

$$R = \begin{bmatrix} R_I & & \\ & R_{II} & \\ & & R_{III} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & \\ & & 3 \\ & & 2 \\ & & 3 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

чунки

$$R_I = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_{II} = R_{III} = \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Раманинг бикирлик матричасини аниқлаймиз

$$\begin{aligned} K = d'Rd &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \frac{2EI}{l} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \\ & & & 2 \end{bmatrix} d = \\ &= \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{l} & -\frac{3}{l} & 0 & -\frac{3}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ 1 & -\frac{1}{l} \\ 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3,5 & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{1,5}{2l^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8. Матрица K — нинг тескари қийматини аниқлай-
миз:

$$K^{-1} = \frac{l^2}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} & 1 \\ 1 & \frac{2}{8}l \end{bmatrix}$$

9. Номалум кўчиш z — яъни устун матрица қуйида-
гича аниқланади:

$$\begin{aligned} z = -K^{-1}R_p &= -\frac{l^2}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} & 1 \\ 1 & \frac{7}{8}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{l^2 C_0}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{бу ерда } C_0 = \frac{ql^2}{12}$$

10. Икки куч матрицасини бир мунча енгил топиш
мумкин. (11.6- расм, ж).

$$S = Rdz$$

11. Топилган қийматлар $K = d'Rd$ ҳақиқатдан ҳам
(11,26) тенгламани

$$\begin{aligned} \frac{2EI}{l} \begin{bmatrix} 3,5 & -\frac{3}{l} \\ -\frac{3}{l} & \frac{1,5}{2l^2} \end{bmatrix} (-1) \frac{l^2 C_0}{11,5EI} \begin{bmatrix} \frac{2,5}{l} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = \frac{2C_0}{11,5l} \begin{bmatrix} (8,75l - 3l) \\ -7,5 + 7,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

қаноатлантиради.

ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ

12.1. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ (ЧЭУ) ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Статик ноаниқ системаларни ҳисоблашда юқорида кўрсатилган усуллардан ташқари аралаш, тақрибий ва бошқа усуллар ҳам мавжуд. Бу усуллар қурилиш механикаси масалаларини аниқроқ ечиш вазифасини ўзида мужассамлаштирган бўлиб, улар ичида чекли элементлар усули (ЧЭУ) ўзининг самарадорлиги билан бошқалардан ажралиб туради. ЧЭУ бир қатор қулайликларга эга бўлгани учун ҳозирги кунда кенг қўлланилмоқда.

ЧЭУ нинг асосий афзалликларидан бири унинг кенг миқёслилигидир. Агар ҳар хил қурилиш конструкцияларини ЭХМда ҳисоблаш учун ҳар қайсисига алоҳида дастурлар тузилган бўлса (масалан, ферма учун алоҳида, балка учун алоҳида) ЧЭУ деярли ҳамма қурилиш конструкцияларини ЭХМда ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури асосида ҳисоблаш имконини беради. Бу лойиҳачи — муҳандиснинг ишини анча енгиллаштиради. Ягона ҳисоблаш алгоритми ва дастури ҳисоблаш вақтини тежайди, ҳисобнинг аниқлик даражасини оширади. Бу усулнинг афзаллиги ҳам шунда.

Умуман конструкцияларни ЭХМда ҳисоблашда ўта аниқлик ва универсал усуллардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Олдинги усуллар ҳамма вақт ҳам бу талабларга жавоб бермайди. Шунинг учун ҳам машинабоп усуллар яратилишига эҳтиёж туғилди. Айниқса, ҳисоблашдаги бир неча хил мураккабликларни, яъни конструкцияларнинг чизикли ва чизиксиз ишлаш хусусиятларини, ерга эластик таяниши, устуворлик ва бошқа шартларни бир йўла ҳисобга оладиган усул керак эди. Чекли элементлар усули (ЧЭУ) шундай самарали усуллардан бири сифатида юзага келди.

ЧЭУ ғояси берилган системани, хусусан, рамани чекли элемент деб аталувчи алоҳида содда элементларга ажратишдан иборатдир. Чекли элементлар аниқ геометрик, физик ва механик ўлчамларга эга бўлиши шарт.

Пластина ва қобик конструкцияларини ҳисоблашда чекли элемент сифатида учбурчак, кўпбурчак ва тўғри бурчакли пластиналар қабул қилиниши мумкин, массив

конструкциялардан кичик ҳажмий бўлак тетраэдр ва х.к. чекли элемент деб қабул қилинади.

Стерженлар системасида чекли элемент сифатида доимий бикирликка эга бўлган стержень қабул қилинади. Шундай қилиб ЧЭУ берилган конструкцияларни содда, чекли элементларга бўлиб, қурилиш механикаси қоидалари асосида ҳисоблайди.

Содда кўринишга эга бўлган чекли элементнинг ташқи таъсирларга қаршилиқ кўрсатиш имкониятлари олдиндан аниқланади. ЧЭУ куч усули ёки кўчиш усулларига асосланиши мумкин. Чекли элементлар усулида ҳам асосий система танланиб, тенгламалар тизими тузилади. Асосий система — берилган раманинг энг содда чекли элементлари йиғиндисидир. Тенгламалар тизими чекли элементларнинг узлуксизлигини таъминловчи шартни ифодалайди.

Демак, системани содда бўлакларга бўлиш ғояси, мураккаб конструкцияни содда «чекли» элементлар орқали ифодалаш имконини беради. Қиритилувчи узлуксизлик ва бошқа статик шартлар эса чекли элементларнинг берилган система каби ишлашини таъминлайди. Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда номаълум сифатида куч ёки кўчиш усулларидагидек ички кучлар ёки кўчишлар қабул қилинади.

Ҳисоб куч усули асосида бажарилса, чекли элементларнинг уланиш жойида номаълум сифатида куч қабул қилинади, агарда кўчиш усули асосида олиб борилса, у ҳолда номаълум сифатида тугунларнинг кўчиши қабул қилинади. Умумий ҳолда аралаш усулдан фойдаланса ҳам бўлади. ЧЭУ бўйича ҳисоблашда асосий ролни мойиллик матрицаси ёки бикирлик матрицаси ўйнайди. Агар ҳисоб куч усулида бажарилса мойиллик матрицасидан, кўчиш усулида бажарилганда эса бикирлик матрицасидан фойдаланилади.

Куч усулида номаълум кучлар чекли элементларнинг уланиш жойидаги кўчишларнинг тенглигини ифодаласа, кўчиш усулидаги номаълум кўчишлар — тугунларнинг мувозанатини ифодалайди.

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблаганда бир вақтнинг ўзида ҳар бир элементнинг икки учидаги ички кучлар M , Q , N ларни аниқлаш мумкин. ЧЭУ ни матрица кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқ бўлиб, ҳисоб охирида кўчишлар ҳамда ички кучлар ҳам матрица кўринишида аниқланади.

Чекли элементнинг кўчиш усулига асосланган умумлаштирилган тенгламаси куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$R \cdot Z + R_p = 0 \quad (12.1)$$

бу ерда $\bar{R}$ -- конструкциянинг, хусусан, раманинг бикирлик матрицаси;

R_p -- юк матрицаси.

Бу тенглама асосий системага киритилган ҳар бир қўшимча боғланишда бирлик буралиш, силжиш ва чўзилиш, шунингдек, ташқи кучлар таъсиридан ҳосил бўлган тугунлардаги реакцияларнинг йиғиндиси нолга тенг эканлигини ифодалайди.

Номаълум кўчиш матрицасини аниқлаш учун худди кўчиш усулида кўриб ўтганимиздек, куйидаги амалдан фойдаланамиз:

$$z = -\bar{R}^{-1}R_p = (\Pi^1 R \Pi) R_p, \quad (12.2)$$

бу ерда Π -- косинуслар матрицаси элементнинг координата ўқларига нисбатан бурчагини ифодалайди;

R -- туташтирилмаган элементлар матрицаси.

Агарда ички куч матрицасини аниқлаш зарур бўлса, у ҳолда куйидаги амалдан фойдаланамиз:

$$S = Q \cdot Z = R \Pi (\Pi^1 R \Pi)^{-1} R_p. \quad (12.3)$$

Чекли элементлар усулининг кўчиш усулидан асосий фарқи шундан иборатки, бу усулда деформацияларнинг барча тури инобатга олинади ва ҳар бир тугунда умумлаштирилган кўчишлар аниқланади. Шунинг учун ҳам бу фарқлар бикирлик матрицаларида яққол кўзга ташланади.

12.2. СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИ ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ ТАРТИБИ

Чекли элементлар усули ёрдамида статик ноаник системаларни хусусан, рамаларни ҳисоблаш бошқа усуллarga нисбатан қулайдир.

ЧЭУ ёрдамида стерженли системаларни ҳисоблаш тартиби куйидагича:

-- асосий система танлаш, номаълум кўчишларни белгилаш;

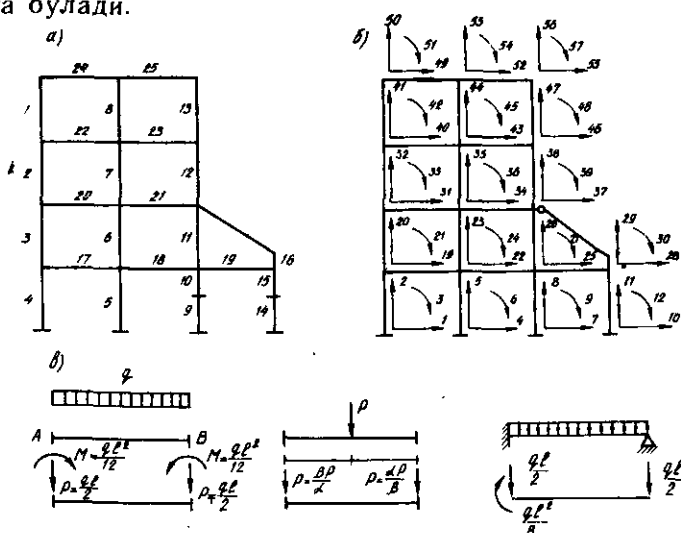
-- бикирлик матрицасини аниқлаш;

- куч матричасини аниқлаш;
- тенгламалар тизимини тузиш;
- тенгламалар тизимини ечиш, тугунлардаги кўчишларни аниқлаш, умумий ички куч матрицаларини топиш.

Асосий система танлаш, номатълум кўчишларни киритиш

Асосий система конструкциянинг кўринишига, унинг элементларининг сонига, ташқи куч ҳамда зарурий аниқликларга боғлиқдир.

Рамаларни ҳисоблашда чекли элемент сифатида кўндаланг кесими ўзгармас бўлган алоҳида стержень қабул қилинади. 12.1- расм, а да келтирилган асосий тизми раманинг тугун ва кўндаланг кесими ўзгарган жойларига нисбатан танланган. Шартли равишда киритилган квадратлар берилган рамани чекли элементларга бўлиб, ҳар икки учда учтадан кўчишлар кўрсатилган (12.1- расм, б). Агар бирор ерда рама элементининг кўндаланг кесими ўзгарса ёки элемент оралиғида йиғиқ куч қўйилган бўлса, у ҳолда кесимларга ҳам квадратлар киритилади. Раманинг ноаниқлик даражаси ҳар бир тугунга ва кесимга киритилган кўчишлар сонига тенг. Аксарият мунтазам рамаларда ҳар бир квадрат учтадан номатълум кўчишларга эга бўлади.



12.1- расм

Рамага қўйилган ҳар бир ташки куч унинг квадратлар киритилган тугунларига келтирилади.

Демак, раманинг асосий системаси бикирликлари ўзгармас бўлган IM — та чекли элементларга бўлиниб, MM та номаълум — умумий кўчишларга эга бўлади.

12.3. СТЕРЖЕННИНГ БИКИРЛИК МАТРИЦАСИНИ АНИҚЛАШ

Бикирлик матрицаси (БМ) чекли элемент учларидаги бирлик кўчишлардан вужудга келувчи реактив кучларни ифодалайди.

Умуман, бикирлик матрицасининг формуласини бир марта аниқлаб олинса kifоя. БМ тартиби ҳисобга олиниши зарур бўлган чекли элемент учларидаги кўчишлар сонига ҳамда ҳисобга олинаётган бошқа омилларга боғлиқ. Агар кўндаланг ва бўйлама кўчишлар ҳисобга олинса, текисликдаги элементнинг БМ тартиби олтига тенг бўлади.

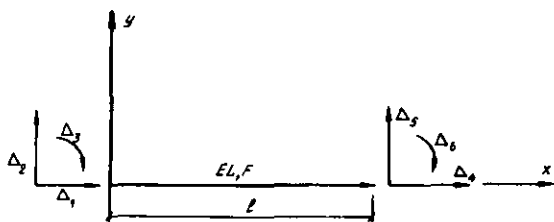
Аввало чекли элементнинг хусусий ўқларга нисбатан БМ ни келтириб чиқарамиз. Ўзгармас кўндаланг кесимли элементнинг БМ си бош координата ўқларига нисбатан 12.2- расмда кўрсатилгандек топилади.

Маълумки, стержень учларининг кўчишлари унинг узунлиги ва бикирлигига боғлиқдир. Шунинг учун уларнинг ўзаро боғлиқликларини аниқлаймиз. Чекли элементнинг ихтиёрий нуктасининг тутган ўрни қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x \\ v(x) &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \end{aligned} \quad (12.4)$$

бу ерда $u(x)$, $v(x)$ — бўйлама ва кўндаланг кўчишлар;

α_i — киритилган боғланишни ифодаловчи тенглама коэффиценти.



12.2- расм

12.2- расмда кўрсатилган элемент учун чегара шартлари қуйидагича белгиланади:

$$\begin{aligned}x = 0; u(0) &= \alpha_1 = \Delta_1 \\v(0) &= \alpha_3 = \Delta_3 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_4 = \Delta_4\end{aligned}\quad (12.5)$$

$$\begin{aligned}x = l; u(l) &= \alpha_1 + \alpha_2 l = \Delta_2 \\v(l) &= \alpha_3 + \alpha_4 l + \alpha_5 l^2 + \alpha_6 l^3 = \Delta_3 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha_4 + 2\alpha_5 l + 3\alpha_6 l^2 = \Delta_6\end{aligned}$$

Бу тенгламалардан коэффициентлар топилади:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \Delta_1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{l} (\Delta_2 - \Delta_1) \\ \alpha_3 &= \Delta_3 \\ \alpha_4 &= \Delta_4 \\ \alpha_5 &= \frac{1}{l^2} (-3\Delta_3 - 2\Delta_4 l + 3\Delta_5 - \Delta_6 l) \\ \alpha_6 &= \frac{1}{l^3} (2\Delta_3 + \Delta_4 l - 2\Delta_5 + \Delta_6 l)\end{aligned}\quad (12.6)$$

Топилган қийматларни (12.5) формулага қўйсак ва соддалаштирсак, қуйидаги функцияларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{s=1,4} \Theta_s(x) \Delta_s; \\ v(x) &= \sum_{s=2,3,5,6} \Theta_s(x) \Delta_s.\end{aligned}\quad (12.7)$$

Киритилган коэффициент $\Theta_s(x)$ — Эрмит функцияси деб юритилади ва қуйидагича топилади:

$$\begin{aligned}\Theta_1(x) &= 1 - \frac{1}{l}x & \Theta_2(x) &= \frac{1}{l}x \\ \Theta_3(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3 & \Theta_4(x) &= x - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \\ \Theta_5(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} & \Theta_6(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\end{aligned}\quad (12.8)$$

Чекли элементлар учун керак бўлган БМни потенциал энергия ифодасидан фойдаланиб топамиз.

Потенциал энергиянинг мумкин бўлган кўчишлар орқали ифодаси

$$U = \frac{1}{2}EF \int_0^l (u'(x))' dx + \frac{1}{2}EI \int_0^l (v'(x))' dx \quad (12.9)$$

бўлади.

Агар кўчишлар кийматини (12.7) формуладан (12.9) формулага қўйсак.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum R_{ik} \Delta_i \Delta_k \quad (12.10)$$

энергия формуласи келиб чиқади.

Бу ерда

$$K_{ik} = \begin{cases} EF \int_0^l \Theta_i''(x) \Theta_k''(x) dx; & i, k = 1, 4 \\ EI \int_0^l \Theta_i''(x) \Theta_k''(x) dx; & i, k = 2, 3, 5, 6 \end{cases} \quad (12.11)$$

K_{ik} — чекли элементнинг бикирлик матрицаси.

Агар топилган (12.11) формулага (12.8) да кўрсатилган ифодаларни киритсак, у ҳолда

$$\begin{aligned} K_{11} &= EF \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' dx \\ K_{14} &= EI \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)'' \left(\frac{x}{l}\right)'' dx \end{aligned} \quad (12.12)$$

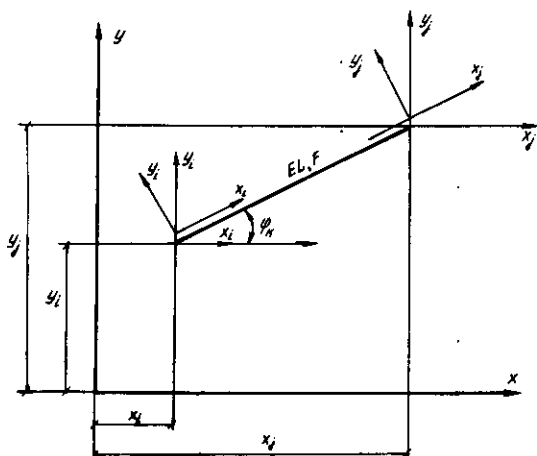
келиб чиқади.

Келтириб чиқарилган (12.12) формуладан фойдаланиб, икки учи маҳкамланган элементнинг (12.13), шунингдек бир учи маҳкамланган, иккинчи учи шарнирли бириктирилган элементнинг бикирлик матрицаси (12.14) жадвал кўринишида берилган.

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} \quad (12.14)$$



12.3- расм

Бикирлик матричасининг физик маъноси: икки учи маҳкамланган балкага уч йўналиш бўйлаб бирлик кўчишлар Δ ; берилганда, таянчларда ҳосил бўладиган реакциялар БМ нинг элементларини ташкил этади.

Лойиҳалаш амалиётида ҳар доим ҳам рама элементлари координата ўқларига мос келавермайди, баъзи элементлар ўққа нисбатан оғма ҳолатда жойлашуви мумкин. Бундай ҳолларда ОХ ўқига нисбатан ҳосил бўлган бурчакни — m , ОУ ўқига нисбатан ҳосил бўлган бурчакни — n деб белгиласак (12.3- расм), қуйидаги янги боғловчи косинус матрицаси келиб чиқади:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \Pi_0 \end{bmatrix} \quad \Pi_0 = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица Π — квазидиагонал матрица бўлиб, ихтиёрий равишда учраши мумкин бўлган чекли элементнинг БМ сини тузишда фойдаланилади. Бунинг учун хусусий ўқларга нисбатан топишган БМ ни боғланиш матрицасига кўпайтириб, умумий ўқларга нисбатан бикирлик матрицаси топилади:

$$\bar{R} = \bar{\Pi}^T R \Pi \quad (12.15)$$

Матрица R , Π кийматларини (12.15) формулага қўйиб, қуйидаги кўринишга эга бўлган БМ ни ҳосил қиламиз:

(12.16)

$\frac{12EI}{l^3}n^2 + \frac{EF}{l}m^2$	$\left(\frac{EF}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right)mn$	$-\frac{6EI}{l^2}m^2 - \frac{12EI}{l^3}$	$\frac{EF}{l}m^2 + \frac{12EI}{l^3}n^2$	$-\frac{EF}{l}mn + \frac{12EI}{l^3}mn$	$-\frac{6EI}{l^2}n$
	$\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$\frac{6EI}{l^2}m$	$-\frac{EF}{l}mn + \frac{12EI}{l^3}mn$	$-\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$\frac{6EI}{l^2}m$
		$\frac{4EI}{l}$	$\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{2EI}{l}$
			$\frac{EF}{l}m^2 + \frac{12EI}{l^3}n^2$	$\frac{EF}{l}mn - \frac{12EI}{l^3}mn$	$\frac{6EI}{l^2}n$
				$\frac{EF}{l}n^2 + \frac{12EI}{l^3}m^2$	$-\frac{6EI}{l^2}m$
					$\frac{4EI}{l}$

R=

Юкорида келтирилган ЧЭУ нинг умумий формуласи (12.1) яхлит система ёки рама учун берилган бўлса, топилган R , R_0 Q лар фақат биргилла чекли элементга тегишлидир. Агар (12.2) боғланишини топилган БМ ва КМ оркали ифодаласак, (12.3) формулага эга бўламиз.

R — квазидиагонал квадрат матрица бўлиб, унинг тартиби рама элементларининг сони — IM га тенг бўлади; уни раманинг бикирлик матрицаси деб ҳам юритилади. Конструкция чекли элемент усули бўйича ЭХМ да ҳисобланадиган бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси автоматик равишда махсус индекс матрицаси ёрдамида тузилади.

Тенгламалар системаси куйидаги шартларни қаноатлантириши зарур:

1. Тугун ва элементларнинг мувозанат шарти;
2. Тугунларнинг узлуксизлик шарти.
3. Қўчиш ва кучлар боғланишини ифодаловчи шартлар.

Тенгламалар системасини тузиш учун куйидаги маълумотлар керак:

- конструкция элементларининг ўзаро боғланиши;
- конструкциянинг геометрик, физик ва механик кўрсаткичлари.

12.4. РАМАЛАРНИ ЧЭУ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Рамаларни ЧЭУ ёрдамида ҳисоблашда ички кучлар матрицасини куйидаги матрица амали оркали топамиз:

$$S = Q \cdot Z = -Q \cdot \bar{R}^{-1} R_p.$$

Бу ерда Q — куч матрицаси.

Умумий координата ўқларига нисбатан куч матрицаси куйидагича аниқланади:

$$Q_0 = RII_z.$$

Элементнинг хусусий ўқига нисбатан куч матрицаси унинг бикирлик матрицасига тенг. Умумий координата ўқларига нисбатан куч матрицаси (12.17)-жадвал кўринишига эга:

— ташқи кучнинг қўйилиш жойи, йўналиши ва сон киймати.

$$Q_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{EF}{l^3} m & \frac{EF}{l^3} n & 0 & -\frac{EF}{l^3} m & -\frac{EF}{l^3} n & 0 \\ \hline -\frac{12 EI}{l^3} n & \frac{12 EI}{l^3} m & \frac{6 EI}{l^2} & \frac{12 EI}{l^3} n & -\frac{12 EI}{l^3} m & \frac{6 EI}{l^2} \\ \hline -\frac{6 EI}{l^2} n & \frac{6 EI}{l^2} m & \frac{4 EI}{l} & \frac{6 EI}{l^2} n & -\frac{6 EI}{l^2} m & \frac{2 EI}{l} \\ \hline -\frac{EF}{l^3} m & -\frac{EF}{l^3} n & 0 & \frac{EF}{l^3} m & \frac{EF}{l^3} n & 0 \\ \hline -\frac{12 EI}{l^3} n & -\frac{12 EI}{l^3} m & \frac{6 EI}{l^2} & -\frac{12 EI}{l^3} n & \frac{12 EI}{l^3} m & -\frac{6 EI}{l^2} \\ \hline -\frac{6 EI}{l^2} n & \frac{6 EI}{l^2} m & \frac{2 EI}{l} & \frac{6 EI}{l^2} n & -\frac{6 EI}{l^2} m & \frac{4 EI}{l} \\ \hline \end{array} \quad (12.17)$$

Бу маълумотлар махсус матрицалар орқали ифодаланиб, индекс матрицаси $\{TT\}$, конструкция параметр матрицаларини ифодаловчи $\{PP\}$ матрицаси ва ташки кучларни ифодаловчи $\{ЮК\}$ матрицаси деб номланади.

Аввало статик ноаниқ конструкциянинг асосий системасида қабул қилинган кетма-кетлик бўйича $\{TT\}$ матрицаси, кейин $\{PP\}$ ҳамда $\{ЮК\}$ матрицалари тузилади. Сўнгра қабул қилинган тартиб бўйича ҳар бир элемент учун параметр матрицаси $\{PP\}$ дан фойдаланиб БМ — топилади. $\{TT\}$ матрицаси ёрдамида R_0 массивидан керакли ҳадларни танлаб олиб, қолган элементларнинг тегишли ҳадларига қўшиш йўли билан (12.11) тенгламалар тизими тузилади.

ЧЭУ да тенгламалар системасини тузиш кўчиш усулидаги каби бўлиб, бу усулда бурчакли кўчишдан ташқари бўйлама ва кўндаланг кўчишлар ҳам ҳисобга олинади.

Тенгламалар системасининг озод ҳадлари осон топилади. Берилган барча ташки кучлар тугунларга тўпланиб, номаълум кўчишлар йўналишига келтирилади (12.1- расм, в).

$\{ЮК\}$ матрицасида ташки кучларнинг қиймати ва йўналиши ифодаланади. Тенгламаларни тузганда, шу йўналиш бўйлаб тенгламада жой ажратилади.

Тенгламаларнинг тартиби киритилган квадратлар, шарнирлар ва талаб қилинган кўчишлар сонига қараб

аниқланади. Тенгламанинг кўриниши лентасимон бўлиб, унинг симметриклиги ҳисобга олинса, диагоналнинг бир томонини аниқлаш кифоя қилади.

Тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$(II'RII)z + R_p = 0. \quad (12.18)$$

Тенгламалар системасини ечиш — тугунлардаги кўчишларни аниқлаш, умумий ички куч матрицаларини топишдан иборат. Лентасимон диагонал тенгламаси очилса, ҳақиқий кўчиш матрицаси топилади. Агар лента тузилишини ҳисобга олсак, юқори даражали тенгламалар системасини ечиш учун Гаусс ёки бошқа тақрибий усулни қўллаш мақсадга мувофиқдир.

Ечишни R^{-1} матрицасига алмаштириш усулидан фойдаланиб, амалга ошириш мумкин:

$$\bar{R}^{-1} = (II^{-1}RII)^{-1} \quad (12.19)$$

Тенгламалар системасининг ечими кўчиш матрицасини ифодалайди. Номаълум матрица z аниқлангандан сўнг элементнинг учларидаги ички кучларнинг қийматини аниқлаш қийин эмас. Агар БМ ва КМ эгувчи момент, қирқувчи ва бўйлама кучларни ҳисобга олиб тузилган бўлса, у ҳолда охириги элементнинг иккала учлари учун M , Q , N ички кучларини аниқлаб олиш мумкин:

$$S = \bar{Q} \cdot z.$$

Юқорида айтилганидек, раманинг элементлари мунтазам, яъни катъий горизонтал ва вертикал бўлганида, ички кучлар қуйидагича топилади:

$$S = R \cdot z.$$

12.5. ҲИСОБЛАШ НАМУНАСИ

Умуман ЧЭУ ЭХМ га мослашган бўлгани учун конструкцияларни қўлда шу усул бўйича ҳисоблаш бошқа усулларга нисбатан бирмунча мураккабдир. Шунинг учун ҳам оддий мисолларда усулнинг барча имкониятларини тўлалигича очиб бериш қийин. Қуйида ЧЭУ нинг баъзи имкониятларини ва кетма-кетлигини кўрсатиш мақсадида энг содда мисоллар келтирилган.

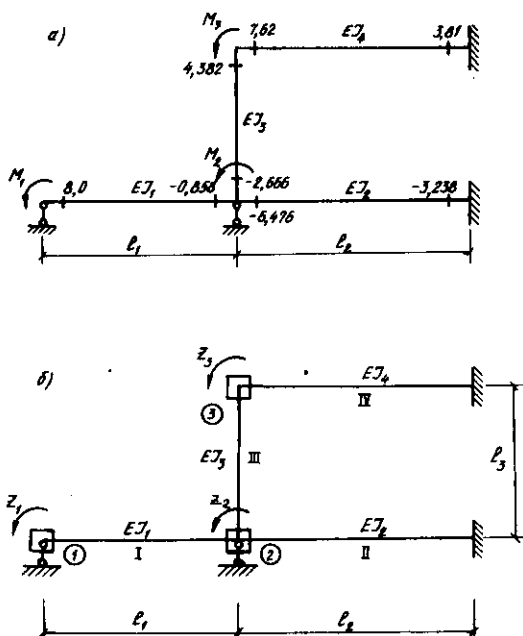
Чекли элементлар усули асосида ЭХМларга бир неча ҳисоблаш дастурлари яратилган. Бу усул асосида Тошкент архитектура ва қурилиш институтининг мутахассислари

томонидан эластик конструкцияларни ҳисоблаш ва оптималлаштириш дастури КРОУС — IV яратилган ва ЕС — ЭХМ машиналарига ва шахсий компьютер IBM га мослаштирилган. Бу КРОУС дастури турли даражада мураккабликка эга бўлган стерженлардан ташкил топган конструкцияларни ҳисоблаш ва лойиҳалаш имконини беради.

1- мисол.

12.4- расм, а да кўрсатилган раманинг тугунларига таъсир этаётган эгувчи моментлардан ҳосил бўлган тугунлардаги кўчишлар аниқлансин.

Ҳисобни асосий система танлашдан бошлаймиз. (12.4- расм, б), тугунлардаги бурчакли кўчишлар сони 3- га, чекли элементлар сони $IM = 4$ - га тенг. Элементлар тартибини рим раками (I, II, ... IV) билан, номаълум кўчишларни 1, 2, 3 оркали белгиласак, индекс матричаси $\{TT\}$ куйидаги кўринишда бўлади:



12.4- расм

$$\{TT\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметр матрицаси ҳар бир элементнинг бикирлигини EI_i , узунлигини l_i ва n орқали XOY ўқларига боғлиқликларини ифодалайди.

$$\{PAR\} = \begin{bmatrix} EI_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ EI_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ EI_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ EI_4 & l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix}$$

Юк матрицасини $\{ЮК\}$ ташкил қилиш учун тугунлардаги номаълум кўчишлар йўналишидан фойдаланилади.

$$\{ЮК\} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Раманинг бикирлик матрицасини аниқлашда $\{TT\}$ ҳамда $\{PAR\}$ матрицаларидан фойдаланилади, яъни $R = \Pi K \Pi$. Тенгламалар системасини тузишда эса юк матрицаси озод ҳад сифатида катнашади:

$$R_p = \{ЮК\}.$$

Бу ерда Π — косинус матрицаси бўлиб, $\{PAR\}$ матрицасидан келтириб чиқарилади.

ЭХМ да ҳисоб аввало ҳар бир чекли элементнинг бикирлик матрицасини R_1 , R_2 , R_3 ва R_4 аниқлашдан бошланиб, сўнгра раманинг туташтирилмаган элементлари бикирлик матрицаси тузилади.

Умумий туташтирилмаган элементларнинг бикирлик матрицалари қуйидагича бўлиб,

$$K = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & R_3 & \\ & & & R_4 \end{bmatrix}$$

тенгламалар системаси тузилади:

$$\begin{aligned} \frac{4EF_1}{l_1} z_1 + \left(\frac{2EI}{l_1} \right) Z_2 &= M_1 \\ \frac{2EI_1}{l_1} z_1 + \left(\frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3} \right) Z_2 + \frac{2EI_3}{l_3} Z_3 &= -M_2 \\ \frac{2EI_3}{l_3} z_2 + \left(\frac{4EI_3}{l_3} + \frac{4EI_4}{l_4} \right) Z_3 &= M_3. \end{aligned}$$

Тенгламаларни очиб, номаълум Z_i кўчишларни аниқлаймиз;

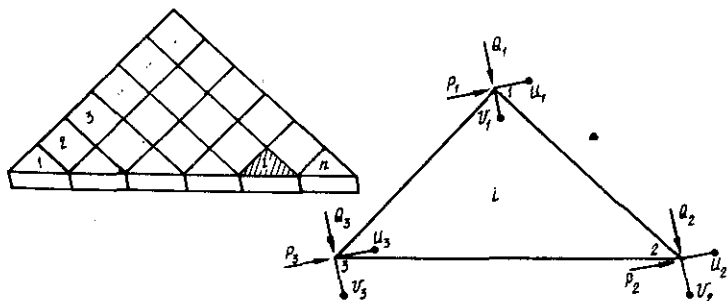
$$z_1 = \frac{1}{l} 2.809; z_2 = -\frac{1}{l} 1.619; z_3 = \frac{1}{l} 1.905.$$

Бўйлама ва кўндаланг деформациялар ҳам худди юқорида кўрсатилгандек ҳисобга олиниши мумкин.

12.6. ПЛАСТИНАСИМОН КОНСТРУКЦИЯЛАРНИ ЧЭУ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Икки ўлчамли ясси жисмлар учбурчак ёки тўртбурчак шаклидаги чекли элементларга бўлинади. Ҳар бир учбурчак ёки тўртбурчак чекли элемент ҳисобланади (12.5, 12.6-расмлар).

Унинг бажарган ишини тақрибий формула орқали ифодалаш мумкин. Масалан, учбурчак учларини 1, 2, 3 рақамлари билан белгилаб, шу рақам орқали ҳар бир учбурчакдаги микдорни белгилаб оламиз. Учбурчак учларида X ва Y ўқлари йўналиши бўйича u ва v кўчишла-



12.5-расм

ри содир бўлиши ёки шу йўналишларда P ва Q ташки кучлари таъсир қилиши мумкин (12.5-расм).

Юкорида қабул қилинганидек, (12.4), кўчишларни ифодаловчи чизикли функциялар киритамиз.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (12.20)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_6$ коэффициентларни шундай олиш керакки, учбурчак учларидаги кўчишларнинг қиймати масаланинг шартини қаноатлантирсин.

Кўчишлар векторини матрица ифодасига келтирсак

$$\vec{z}(x, y) = N(x, y) \alpha, \quad (12.21)$$

бу ерда

$$\vec{z}(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad N(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}; \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Эластиклик назариясидаги Коши формуласи

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots \quad (12.22)$$

ҳисобга олинса, деформациялар қуйидаги боғланишга эга бўлади:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{\alpha}$$

$$\text{ёки} \quad \vec{\epsilon} = B \vec{\alpha}. \quad (12.23)$$

Пластина учун Гук қонун

$$\vec{\sigma} = D \vec{\epsilon} \quad (12.24)$$

эканлигини ҳисобга олиб, (12.23) ни (12.24) га қўйсак,

$$\vec{\sigma} = D B \vec{\alpha}$$

келиб чиқади.

Потенциал энергияни пластинадаги мумкин бўлган кўчишлар орқали ифодаси қуйидаги кўринишга эга.

$$U = \frac{1}{2} \iint_F \sigma_{\varepsilon} dx dy = \frac{1}{2} a R^* \bar{a} \quad (12.25)$$

бўлиб, R^* — биз кидирган бикирлик матрицасидир.

$$R^* = h \iint_F B^T D B dx dy. \quad (12.26)$$

Учбурчак кўринишига эга бўлган чекли элементнинг (12.5- расм) бикирлик матрицасининг энг содда кўриниши қуйидагичадир:

$$R^* = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}$$

бу ерда h — пластина калинлиги

$$\beta = b/a.$$

Умуман пластинанинг бикирлик матрицаси

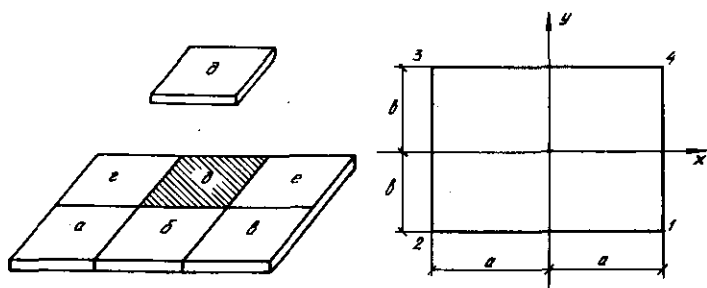
$$R = \Pi^T R^* \Pi$$

кўринишда аниқланади.

Пластиналарни ҳисоблашда чекли элемент тўғри бурчакли тўртбурчак кўринишида бўлиши ҳам мумкин (12.6- расм). Бундай ҳолатдаги кўчишларни қуйидагича белгилаймиз:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$



12.6- расм

Буни матрица кўринишида ёзамиз:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Ораликдаги амалларни ташлаб ўтилса, чекли пластининг бикирлик матрицаси куйидаги умумий кўринишга эга бўлади:

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & C_{13} & D_{14} \\ B_{21} & A_{22} & D_{23} & C_{24} \\ C_{31} & D_{32} & A_{33} & B_{34} \\ D_{41} & C_{42} & B_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Энг содда квадрат кўринишга эга бўлган чекли пластина учун

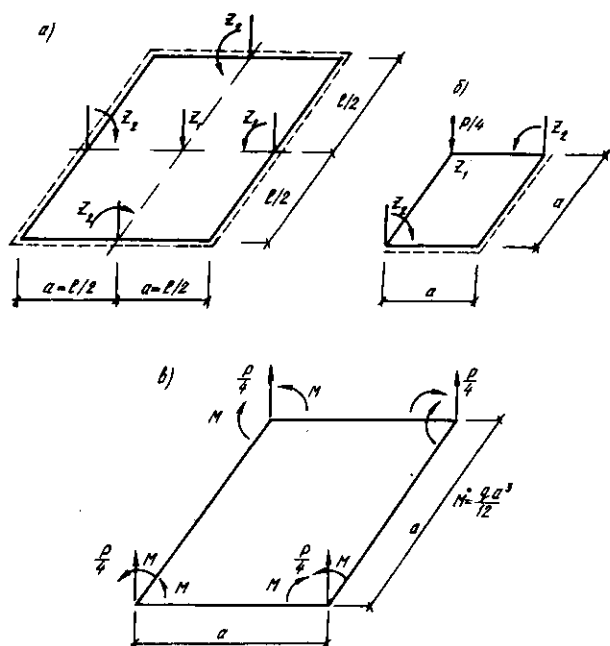
$$A_{11} = \begin{bmatrix} 52,8 & 12,2a & 12,2a \\ & 7,6a^2 & 1,5a^2 \\ & & 7,5a^2 \end{bmatrix} \quad B_{12} = \begin{bmatrix} -22,8 & 10,7a & 2,8a \\ & 3,1a^2 & 0 \\ & & 2,4a^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = \begin{bmatrix} -7,2a & 4,3a & 4,3a \\ & 1,9a^2 & 0 \\ & & 1,9a^2 \end{bmatrix} \quad D_{14} = \begin{bmatrix} -22,8 & -2,8a & 10,7a \\ & 2,4a^2 & 0 \\ & & 3,1a^2 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 52,8 & -42,2a & 12,2a \\ & 7,6a^2 & -1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix} \quad D_{23} = \begin{bmatrix} -22,8 & -2,8a & 10,7a \\ & 2,4a^2 & 0 \\ & & 3,1a^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{24} = \begin{bmatrix} -7,2a & 4,3a & 4,3a \\ & 1,9a^2 & 0 \\ & & 1,9a^2 \end{bmatrix} \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 52,8 & -12,2a & -12,2a \\ & 7,6a^2 & 1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix}$$

$$B_{34} = \begin{bmatrix} -22,8 & -10,7a & -2,8a \\ & 3,1a^2 & 0 \\ & & 2,4a^2 \end{bmatrix} \quad A_{34} = \begin{bmatrix} 52,8 & 12,2a & -12,2a \\ & 7,6a^2 & -1,5a^2 \\ & & 7,6a^2 \end{bmatrix}$$



12.7- расм

Юкорида келтирилган учбурчак ва тўртбурчак шаклидаги чекли элементлар бикирлик матрицалари ҳар хил кўриниш ва ўлчамга эга бўлган текис юзалик плита — пластиналарни ҳисоблаш учун асос бўла олади.

Чекли элементнинг хили, уларнинг ҳисоб жараёнидаги қабул қилинган сонлари масалани аниқлик даражасини белгилайди. Берилган конструкция канча кўп чекли элементларга бўлинса, ҳисобнинг аниқлиги шунча юкори бўлади.

Мисол. Квадрат (12.7- расм) кўринишига эга бўлган, шарнирли таянган пластинани текис ёйик куч таъсирига ҳисоблансин.

Берилган мисолнинг асосий системаси 12.7- расм, а да кўрсатилган бўлиб, пластина симметрик бўлганлиги учун у иккита номаълум кўчишга эга: z_1 — пластина ўртасидаги солкилик, z_2 — чеккадаги бурилиш бурчаги. Демак, тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Rz + R_p = 0; \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Юкоридаги квадрат матрица БМ дан фойдалансак,

$$R_{11}=52.8 \quad D/5a^2 R_{12}=R_{21}=-21.4D/5a$$

$$R_{22}=15.2D/5$$

келиб чиқади.

Юк матрицасини тузиш учун текис ёйиқ ташки кучни тугунларга тўплаймиз. Бунда юк матрицаси куйидаги кўринишга келиб,

$$R_p = \begin{bmatrix} -\frac{5qa^4}{4D} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

тенгламалар системасининг ечими

$$W_{\max} = Z_1 = 0,003446 \frac{ql^4}{D}; \quad M_{\max} = 0,0572 \, ql^2;$$

$$Z_2 = 0,00970 \frac{ql^3}{D}.$$

бўлади.

Агар берилган пластинани $a = \frac{l}{4}$ деб, тўртга бўлганда $W_{\max} = Z_1 = 0,003939 \frac{ql^4}{D}$, $M = 0,04873ql^2$ кийматига эга бўлардик. Бу солкиликнинг аниқ микдори $W_{\max} = 0,004062 \frac{ql^4}{D}$, $M_{\max} = 0,0479ql^2$ ни инобатга олсак, юкоридаги хулоса тасдиқланади. Агарда бу пластинани $a = \frac{l}{2}$ деб, тугунлардаги моментларни $\left(M = -\frac{qa^2}{12}\right)$ ҳам инобатга олиб ҳисобланса, у ҳолда $W_{\max} = 0,004259 \frac{ql^4}{D}$ бўлиб, аниқлик 4,75 фоизга тенг бўлади.

Шундай қилиб, чекли элемент усули бошқа ҳамма усулларга нисбатан ўзининг универсаллиги, машина-боплиги ва самарадорлиги билан ажралиб туради. Бу усул кўп омилларни ҳисобга олиш имконини беради. Ҳозир кенг қўлланилаётган дастурлар шу усулга асосланган.

12.7. МУРАККАБ КОНСТРУКЦИЯЛАРНИ СУПЕР ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШГА ДОИР ТУШУНЧАЛАР

Электрон ҳисоблаш машиналарининг, хусусан, ўрта имкониятли кичик ва микро ЭХМ ларнинг хотиралари чегараланган бўлгани учун юқори даражада мураккаб конструкцияларни ҳисоблаш имконияти ҳам чегаралангандир.

Бундай мураккаб масалаларни ечиш учун «диокоптика» усулидан, яъни мураккаб конструкцияларни содда бўлакларга бўлиш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Ҳисобнинг бу йўли супер элемент усули деб юритилади. Бу усулга кўра мураккаб статик ноаниқ конструкция соддарок ноаниқ конструкцияларга ажратилади.

Супер элемент усулининг ҳисоблаш қондаси юқорида кўриб ўтилган ЧЭУ га ўхшашдир, бу ерда чекли элемент ўрнига супер элемент, яъни содда статик ноаниқ элемент қабул қилинади.

Супер элемент усулининг математик талқини қуйидагича бўлиши мумкин:

$$\{R\} \{\Delta\} = \{P\} \quad (12.27)$$

Бу ерда $\{\Delta\}$, $\{P\}$ — кўчиш ва куч матрицалари.

Конструкциянинг бикирлик матрицаси $[R]$ ни блок матрицаси кўринишида ёзамиз:

$$[R] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{in} \\ K_{ni} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (12.28)$$

Бу ерда: K_{ii} , K_{nn} — супер элементларнинг хусусий бикирликларини ифодаловчи матрицалар;

K_{in} , K_{ni} — элементларнинг ўзаро муносабатини ифодаловчи бикирлик матрицалари.

Агарда умумий тенгламани соддарок кўринишда ёзсак:

$$\begin{aligned} [K_{ii}]\{\Delta_i\} + [K_{in}]\{\Delta_n\} &= \{P\} \\ [K_{ni}]\{\Delta_i\} + [K_{nn}]\{\Delta_n\} &= \{P\} \end{aligned} \quad (12.29)$$

келиб чиқади.

Бу ерда Δ_i — супер элементларнинг туташган нукталаридаги кўчишлар матрицаси;

Δ_n — конструкция тугунларидаги ташки кўчишлар матрицаси.

Уларни аниқлаш учун қуйидаги амалларни бажариш кифоя:

$$\begin{aligned}\{\Delta_i\} &= ([K_{ii}] - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} [K_{ni}]) (\{P_i\} - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} \{P_n\}) \\ \{\Delta_n\} &= ([K_{nn}] - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} [K_{in}]) (\{P_n\} - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} \{P_i\})\end{aligned}\quad (12.30)$$

Агарда қуйидаги белгилашлар киритилса:

$$\begin{aligned}[K_{nn}^*] &= [K_{nn}] - [K_{ni}] [K_{ii}]^{-1} [K_{in}]^{-1} \\ \{P_n^*\} &= \{P_n\} - [K_{in}] [K_{ii}]^{-1} \{P_i\} \\ [K_{ii}^*] &= [K_{ii}] - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} [K_{ni}]^{-1} \\ \{P_i^*\} &= \{P_i\} - [K_{in}] [K_{nn}]^{-1} \{P_n\}\end{aligned}\quad (12.31)$$

у ҳолда супер элемент усулининг хусусий тенгламаси келиб чиқади:

$$\begin{aligned}[K_{nn}^*] \{\Delta_n\} &= \{P_n^*\}; \\ [K_{ii}^*] \{\Delta_i\} &= \{P_i^*\}\end{aligned}\quad (12.32)$$

Кўриниб турибдики, иккита тенгламанинг тартиби умумий тенглама (12.27) дан анча кам бўлиб, Δ_i ва Δ_n кўчишларни алоҳида, бир-бирига боғланмаган ҳолда аниқлаш имконини беради.

Шундай қилиб, супер элемент — бу бикирлиги аниқ бўлган кичик система бўлиб, берилган мураккаб системанинг таркибий қисми ҳисобланади.

Супер элемент усулининг ҳисоблаш тартиби қуйидагича:

1. Берилган конструкцияни супер элемент усулига мос бўлақларга бўлувчи ҳисоблаш тарҳи танланади.

2. Қабул қилинган ҳисоблаш тарҳига доир системани бир чеккадан содда супер элемент (СЭЛ) ларга бўлинади.

3. Икки хил кўчишларга доир тенгламалар тизими тузилади ва ечилади.

4. Топилган ички Δ_i ва ташқи Δ_n кўчишлар орқали ички кучлар аниқланади:

$$\{S\}^t = [K_i] \{\Delta_i\}^{pt}$$

Бу ерда

$$\{\Delta_i\}^{pt} = C\{\Delta_n\}^{pt} = C([K_n]^{pt})^{-1}\{P\}^{pt}$$

Матрица С — бирлаштириш матрицаси бўлиб, конструкция элементларининг ўзаро боғланишларини ифодалайди.

Супер элемент усули машинабоп усул бўлиб, энг мураккаб конструкцияларни ЭХМда ҳисоблаш имконини беради. Бу усул қуйидаги имкониятларга эга:

— ҳар хил конструкциядан (ферма, рама, арка ва б.) ташкил топган мураккаб иморат ва иншоотларни ҳисоблаш;

— устуворлик, мустаҳкамлик ва динамика масалаларини ҳал қилиш;

— конструкциянинг ўзига хос хусусиятларини, чиқисиз деформацияларни ва бошқа омилларни инобатга олиш;

— ер ости ва устидаги конструкцияларнинг бирга ишлашини инобатга олиш;

— ҳар хил мураккабликдаги конструкцияларнинг чидамлилигини аниқлаш;

— конструкция параметрларининг энг мақбул — оптимал ечимларини топиш;

Умуман супер элемент усули кема, тайёра ва космик кемалар каби жуда мураккаб конструкцияларни ҳисоблашда кенг қўлланилади.

13-боб

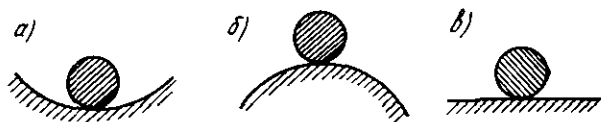
СТЕРЖЕНЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ

13.1. АСОСИЙ ТЎШУНЧАЛАР

Устуворлик деганда, иншоотнинг ташқи кучлар таъсирида ўзининг дастлабки ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туриш хоссаси тушунилади.

Иншоотларнинг устуворлиги ҳам мустаҳкамлиги сингари ташқи кучларнинг миқдорига боғлиқ. Куч маълум миқдорга етгунча иншоот ўзининг устувор ҳолатини ёки деформациясининг дастлабки шаклини сақлаб туради. Куч маълум миқдордан ошганда, иншоотнинг устуворлиги бузилади, яъни дастлабки ҳолати ёки деформация шакли ўзгаради.

Фикримизни мисоллар ёрдамида равшанлаштирамиз. 13.1-расмда ботик, қабарик ва текис сиртга ўрнатилган оғир шарча тасвирланган. Агар шарчани бироз оғдириб, сўнг ўз холига қўйсак, қуйидаги вазият юзага келади: биринчи ҳолда шарча ўзининг дастлабки ҳолатига қайтиб



13.1-расм

келади. Унинг бу ҳолати устувор мувозанат ҳолати деб аталади. Бу ҳолда шарча энг кичик потенциал энергияга эга бўлади. Иккинчи ҳолда шарча дастлабки ҳолатига қайтмайди. Бу ҳол ноустувор мувозанат ҳолатига киради. Бунда шарчанинг потенциал энергияси энг катта қийматга эга бўлади. Учинчи ҳолда шарча озгина юриб тўхтади, дастлабки ҳолатига қайтмайди. Бундай ҳолат бефарқ мувозанат деб юритилади. Бунда потенциал энергия ўзгармас бўлади.

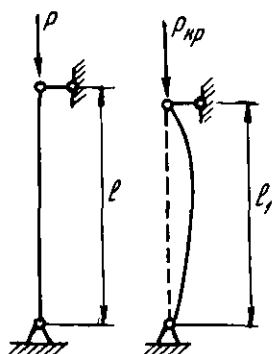
Келтирилган мисол каттик жисм ҳолатининг устуворлигига доир. Биз бу мисол ёрдамида устувор, ноустувор ва бефарқ мувозанатлар қандай бўлишини билиб олдик. Энди мана шу вазиятлар эластик системаларда қай тарика содир бўлишини кўриб ўтайлик.

Маълумки, ташки кучлар таъсирида эластик системаларда эластик деформациялар ҳосил бўлади. Ташки кучларнинг миқдори орта бориб, маълум қийматга етганда, деформация шакли ноустувор бўлиб қолади; бошқача қилиб айтганда, ташки кучларнинг маълум қийматида эластик системанинг дастлабки деформация шакли ўз устуворлигини йўқотади. Система устуворлиги йўқолганда, ташки ва ички кучлар орасидаги мувозанат ҳам бузилади.

Устувор ва ноустувор ҳолат орасидаги чегара системанинг бефарқ ҳолати деб аталади.

Устувор мувозанат ҳолатидаги системани кичик массага оғдирилса, оғдирувчи сабаб йўқолгач, система дастлабки ҳолатига қайтади. Ноустувор мувозанатда қўшимча юк қўйилмаса ҳам деформация давом этади. Бефарқ мувозанатда эса система оғганича қолаверади.

Амалда устуворлик бузилиши (йўқолиши)нинг икки тури мавжуд. Устуворлик бузилишининг биринчи турида, яъни куч аста ортиб борганда, деформациянинг дастлабки шакли йўқолиб, унинг ўрнига янги шакли ҳосил бўлади ва ривожланиб боради.



13.2- расм

Деформацияни бир шаклдан иккинчи шаклга ўтказувчи куч критик куч¹ деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи турига мисол келтирамиз (13.2- расм). Агар $P < P_{кр}$ бўлса, устун тўғри чизикли ҳолатини саклайди. Мувозанатнинг бу кўриниши устувор мувозанат саналади. Агар устунни тўғри чизикли ҳолатидан чиқарилса (масалан, озгина туртки берилса), стержень тебрана бошлайди ва ички кучларнинг қаршилиги туфайли яна дастлабки тўғри чизикли ҳолатига қайтади.

Сиқувчи куч P нинг қиймати орта бориб, критик қийматга етганда мувозанатнинг тўғри чизикли шакли ноустувор бўлиб қолади. Кучнинг бу қийматида берилган озгина туртки устунда деформациянинг янги шаклини — эгилиш деформациясини ҳосил қилади.

$P = P_{кр}$ бўлганда, устуннинг тўғри чизикли деформацияси ноустувор, эгри чизикли деформацияси эса устувор бўлади. Кучнинг қиймати критик қийматдан яна бироз ошса, эгилиш деформацияси тез ўсиб бориб, устун бутунлай ишдан чиқади.

Устуворликнинг бузилиши (йўқолиши)нинг иккинчи турини кўриб ўтамиз. Устуворлик бузилишининг иккинчи турида деформациянинг янги шакли пайдо бўлмай, дастлабки деформация кескин равишда ўсиб боради (13.3- расм, а).

Маълум чегарада C шарнирга қўйилган P кучининг ортиши билан солкилик y_c ҳам мос равишда ортиб боради. Бунда ташки ва ички кучлар орасидаги мувозанат сакланади. Бироқ бу жараён давомида шундай ҳолат вужудга келадики, бунда ташки куч P нинг қиймати ортмаса ҳам солкилик y_c ортиб бораверади (13.3- расм, б). Деформациянинг узлуксиз равишда ўсиб боришига олиб келувчи ўзгармас куч критик куч деб аталади. $P = P_{кр}$ бўлганда, ташки ва ички кучлар орасидаги мувозанат ноустувор бўлади. $P > P_{кр}$ бўлганда, мувозанат

¹ Критик куч — танг ҳолатни вужудга келтирувчи куч.



13.3- р а с м

умуман мавжуд бўлмайди. Бу ходиса устуворлик бузилишининг иккинчи тури деб аталади.

Иншоотларни устуворликка ҳисоблашда баъзи чекла-нишлар ва фаразларга йўл қўйилади. Масалан, рамаларни ҳисоблашда система мутлақ тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган деб фараз этилади.

Устуворлик бузилганда стержендаги силжиш ва бўйла-ма деформациялар ҳисобга олинмай, факат эгилиш деформацияси текширилади. Бунда стержень эгилган ўқининг қуйидаги тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланилади:

$$EIy'' = -M_x.$$

Ваҳоланки, дифференциал тенгламанинг аниқ ифодаси қуйидаги кўринишга эга:

$$EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = -M_x.$$

Икки учи шарнирли маҳкамланган стерженнинг усту-ворлиги масаласини биринчи бўлиб 1744 йилда Леонард Эйлер ҳал этган. Уша даврлардан буён иншоотлар устуворлиги масаласи ривожлана бориб, ҳозирги даврда қурилиш механикасининг катта соҳасига айланди.

Критик кучларни аниқлашда статик, динамик ва энергетик деб аталувчи асосий усуллар қўлланилмоқда.

Статик усул замирида стерженли системанинг устуворлиги йўқолгандан кейинги деформацияланган ҳолати ётади, яъни стерженнинг эгилган ҳолати учун мувозанат тенгламалари тузилади ва улардан системани шу ҳолатда ушлаб тура оладиган кучнинг қиймати аниқланади. Бу куч критик куч бўлади.

Динамик усулга кўра берилган система учун хусусий тебраниш тенгламаси тузилади ва бу тенгламадан

хусусий тебранишлар частотаси нолга тенглиги шартидан фойдаланиб, критик кучнинг қиймати $P_{кр}$ аниқланади.

Энергетик усул Дирихле қондасига асосланади. Бу қондага биноан устувор мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси Π минимал қийматга эга бўлади, бефарқ мувозанат ҳолатида эса потенциал энергиянинг икки қўшни қийматлари орасидаги фарқ $\Delta\Pi$ нолга тенг бўлади:

$$\Delta\Pi = \Delta v - \Delta E = 0,$$

бу ерда v — ички кучлар потенциал энергияси;

E — ташқи кучлар потенциал энергияси.

Бундан $\Delta^* = \Delta E$ келиб чиқади.

Бу қондага асосланиб системалар учун аниқ тенгламалар тузилади ва улардан критик кучнинг қиймати аниқланади.

Иншоотга таъсир этувчи юк орта бориб, ўзининг критик қийматига эришганда, иншоотда танг (критик) ҳолат вужудга келади, юк яна бироз оширилса, иншоот бутунлай ишдан чиқади (бузилади). Тарихда сикилган стерженлар устуворлигининг йўқолиши оқибатида иншоотларнинг кулаб тушиш ҳолати кўп учрайди. Масалан, 1907 йили АҚШнинг Шимолий Лаврентия дарёсига қурилган металл кўприк кулаб тушиб, 74 киши ҳалок бўлган. Бу фожиага сикилишга ишлайдиган стерженлар устуворлигининг нотўғри ҳисобланганлиги сабаб бўлган.

Шунга ўхшаш фалокат 1891 йили Швейцарияда рўй берган, 12 вагонли пассажир поезда кўприкдан ўтаётганда, кўприк босиб қолган. Фалокат натижасида 74 киши ўлиб, 200 киши тан жароҳати олган. Кўприк фермасининг сикилувчи ховонларидан бирининг устуворлигини йўқолиши кўприкни ҳалокатга олиб келган.

Бинокорлик ва кўприксозлик тарихида бунга ўхшаш мисоллар оз эмас. Бирок иншоотлар устуворлиги масаласини тўғри ҳал этилиши инсонлар учун нақадар катта аҳамиятга эга эканлиги юқоридаги икки мисолдан яққол кўриниб турибди.

13.2. СИКИЛГАН СТЕРЖЕНЛАР УЧУН ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСИ

Икки учи шарнирли маҳкамланган стерженга марказий P кучи қўйилган (13.4- расм). Сикувчи кучнинг қиймати $P_{кр}$ дан кичик бўлса, стержень бирдан-бир тўғри чизикли

мувозанат шаклига эга бўлади. $P = P_{кр}$ бўлганда, стержень икки хил: тўғри чизикли ва эгри чизикли мувозанат шаклига эга. Бунда тўғри чизикли мувозанат — ноустувор, эгри чизиклиси — устувор хисобланади. Критик кучни аниклаш учун солкиликнинг дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EJ_{\min} y'' = -M_x, \quad (13.1)$$

бу ерда x — стержендаги ихтиёрий нуктанинг координати;

y — шу нуктанинг солкилиги;

E — эластиклик модули;

$J_{\min}$ — стержень кўндаланг кесимининг минимал инерция моменти;

$EJ_{\min}$ — стерженнинг эгилишга бўлган минимал бикирлиги;

M — ташқи кучлар эгувчи моменти.

Бизнинг ҳолда $M_x = P_y$.

Моментнинг қийматини (13.1) га қўямиз

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_{\min}} = -\frac{P_y}{EJ_{\min}}.$$

Қуйидаги белгилашни қабул қилсак:

$$\alpha^2 = -\frac{P}{EJ_{\min}}, \quad (13.2)$$

тенглама ихчамлашади

$$y'' + \alpha^2 y = 0. \quad (13.3)$$

Мазкур тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

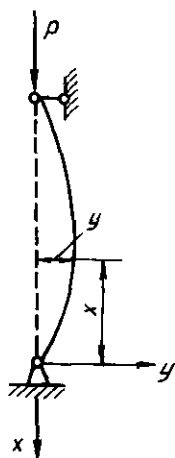
$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x.$$

Ихтиёрий ўзгармаслар A ва B қуйидаги чегаравий шартлардан топилади: $x=0$ бўлганда, $y=0$ ҳамда $x=l$ бўлганда, $y=0$.

Биринчи шартдан $B=0$ келиб чиқади. Бинобарин стержень эгилган ўқининг тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$y = A \sin \alpha x. \quad (13.4)$$

Демак, стержень синусоида шаклида эгилар экан.



13.4-расм

Иккинчи шартдан $A \sin \alpha l = 0$ ҳосил бўлади. Бу шарт қуйидаги икки ҳолга тўғри келади:

1) $A=0$, бунда стержень эгилмайди, чунки (13.4) га биноан барча кесимлардаги солкилик нолга тенг.

2) $\sin \alpha l = 0$, бундан $\alpha l = \pi; 2\pi; \dots n\pi$ эканлиги келиб чиқади.

Натижада αl нинг бу қийматлари ҳамда (13.2) ифода асосида критик кучларни аниқлаш учун қуйидаги катор формулаларга эга бўламиз:

$$P_{1kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2};$$

$$P_{2kp} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2};$$

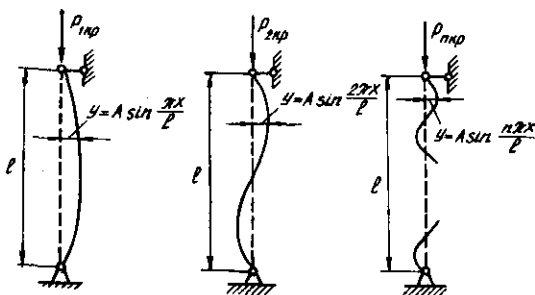
$$P_{nkp} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_m}{l^2}.$$

Критик кучнинг ҳар бир қиймати ўзининг эгилиш шаклига эга. Биринчи ҳолда стержень синусоиданинг битта ярим тўлкини бўйлаб, иккинчи ҳолда иккита ярим тўлқин бўйлаб эгилади ва ҳоказо (13.5-расм).

Амалда критик кучларнинг энг кичиги (биринчиси) қўлланилади, қолганлари фақат назарий аҳамиятга эга:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \quad (13.5)$$

Бу формула ўз муаллифи номи билан — Эйлер формуласи деб аталади.



13.5-расм

Демак, критик куч стерженнинг бикирлигига тўғри пропорционал, стержень узунлиги квадратига тескари пропорционал.

Критик ҳолатдаги стерженнинг эгилиши тўсатдан содир бўлади, шунинг учун ҳам унинг олдини олиш қийин. Чўзилган стерженларнинг узилишини олдиндан пайқаса бўлади, бироқ сиқилган стерженнинг устуворлиги йўқолишини олдиндан илғаб бўлмайди. Унинг хавфли томони ҳам айнан шундан иборат.

Эгилган ўқ тенгламаси (13.4) даги ихтиёрий ўзгармас A нинг физик моҳиятини аниқлаш учун тенгламага $\alpha = \frac{\pi}{l}$ ва $x = \frac{l}{2}$ қийматларни қўямиз. Бунда $\sin 90 = 1$ ва $y_{\max} = A$ келиб чиқади. Демак, A стерженнинг ўртасидаги солкилик экан.

Агар критик куч P_{kp} ни стерженнинг қўндаланг кесим юзаси F га бўлсак, устуворлик йўқоладиган даражадаги критик кучланиш келиб чиқади:

$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E r_{\min}^2}{l^2},$$

бу ерда $r_{\min}^2 = \frac{J_{\min}}{F}$ кесимнинг минимал инерция радиусининг квадрати.

$\frac{l}{r_{\min}} = \lambda$ деб белгиласак (буни стерженнинг эгилувчанлиги деб аталади), критик кучланиш формуласи қуйидаги кўринишга келади:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Шуни назарда тутиш керакки, Эйлер формуласини чиқараётганда кучланиш пропорционаллик чегараси σ_n дан ортиб кетмайди, деб қабул қилинган, акс ҳолда эгилган ўқ эластик чизик бўлмас эди.

Шундай қилиб, Эйлер формуласи қуйидаги чегарада қўлланиши мумкин:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda} \leq \sigma_n.$$

Бу формуладан стержень эгилувчанлигининг чегаравий қийматини аниқлаш мумкин:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_n}}.$$

Мисол. Ст.3 маркали пўлат учун $E=2,1 \cdot 10^6$ кгк/см², пропорционаллик чегараси $\sigma_n=2000$ кгк/см². Бу кийматларни формулага қўйиб, эгилувчанликни аниқлаймиз:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2100000}{2000}} = 100.$$

Ст. 5 маркали пўлат учун $\lambda=90$ бўлади.

Ёғоч учун $E=100000$ кгк/см² ва $\sigma_n=175$ кгк/см².

Биобарин ёғоч стерженлар учун чегаравий эгилувчанлик қуйидаги кийматга тенг бўлади:

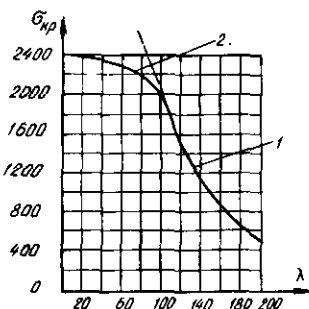
$$\lambda = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 100000}{175}} = 75.$$

Шундай қилиб, эгилувчанлик пўлат стерженлар учун 100 дан, ёғоч стерженлар учун 75 дан кам бўлмаса, Эйлер формуласидан фойдаланиш мумкин.

Ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган стерженлар учун, яъни эластиклик чегарасидан ташқарида ишлайдиган стерженлар учун олимлар тажрибалар асосида критик кучни аниқлайдиган катор формулалар таклиф этганлар.

Критик кучланиш σ_{kp} ни топадиган формулани чизмада тасвирласак (13.6- расм), эластиклик чегарасида ишловчи сиқилган стерженларнинг критик кучланишларини аниқлаш имкониятига эга бўламиз.

Расмда эгилувчанлиги $\lambda \geq 100$ бўлган стерженлар учун Эйлер эгри чизиги 1 рақамли туташ чизик билан берилган.



13.6- расм

Эгилувчанлик $\lambda < 100$ бўлган ҳолларни ўзида акс эттирган пунктир чизик тўғри натижа бермайди. Шунинг учун ҳам ўртача ва кичик эгилувчанликка эга бўлган пўлат стерженларда критик кучланишларни аниқлаш учун бир катор тажрибалар асосида (расмда 2 рақами билан белгиланган) ёрдамчи эгри чизик ўтказилган. Бу чизик Эйлер эгри чизигининг узвий давоми сифатида акс этган.

13.3. УЧЛАРИ ТУРЛИЧА МАҲКАМЛАНГАН СТЕРЖЕНЛАР УЧУН КРИТИК КУЧ ИФОДАСИ

Қурилиш конструкцияларида стержень учларини маҳкамлаш (бириктириш)нинг 13.7- расмда тасвирланган тўрт тури кенг қўлланилади. Олдинги параграфда икки учи шарнирли бириктирилган стержень учун критик кучни аниқлаб, бунда чегаравий шартларни танлашда стержень учларининг бириктирилиш тури муҳим роль ўйнашининг гувоҳи бўлдик. Агар ўша усулда қолган схемалар учун ҳам критик кучларни аниқласак, тузилиши жиҳатидан умумий бўлган қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$P_{kp} = m \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

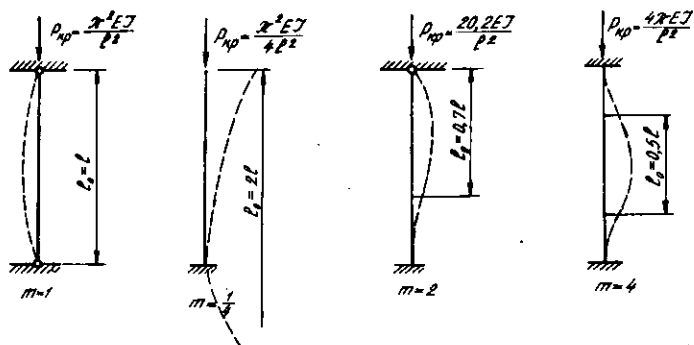
Тўрт хил схема учун чиқарилган критик куч ифодалари бир-биридан тузатувчи коэффициент m билан фарқ қилиб, биринчи схема учун $m=1$, иккинчиси учун $m=1/4$, учинчиси учун $m=2$ ва тўртинчи схема учун $m=4$.

Формула шаклини ўзгартирамиз:

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{\sqrt{m}}\right)^2}.$$

$\frac{l}{\sqrt{m}} = l_0$ — стерженьнинг келтирилган (эркин) узунлиги дейилади. Буни формулага қўйсак, Эйлер формуласининг дастлабки кўринишига эга бўламиз.

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$



13.7- расм

Келтирилган узунликлар тўрттала ҳол учун қуйидаги қийматларга эга:

$$\text{биринчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{1}} = l;$$

$$\text{иккинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2l;$$

$$\text{учинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{2}} \approx 0,7l;$$

$$\text{тўртинчи ҳол } l_0 = \frac{l}{\sqrt{m}} = \frac{l}{\sqrt{4}} = 0,5l.$$

13.4. СИҚИЛГАН СТЕРЖЕНЛАРНИ АМАЛИЙ ҲИСОБЛАШ

Сиқилишга ишлайдиган пўлат стерженлар икки сабабга кўра ишдан чиқади: биринчидан, материалдаги кучланиш σ оқиш чегараси σ_T га етганда мустаҳкамлик бузилади; иккинчидан, материалдаги кучланиш критик қиймат σ_{kp} га етганда устуворлик йўқолади. Ҳар иккала сабаб стерженнинг ишдан чиқишига олиб келади. Шунга кўра сиқилган стерженларнинг ҳисобий чегаравий юк кўтариш қобилияти қуйидаги икки шарт бўйича ифодаланади:

а) мустаҳкамлик шarti $\sigma \leq \sigma_T$;

б) устуворлик шarti $\sigma \leq \sigma_{kp}$.

Критик кучланиш σ_{kp} оқиш чегараси σ_T дан кичик бўлганлиги сабабли, уларни бирдан кичик бўлган мослаштирувчи коэффициент φ_1 ёрдамида ўзаро боғлаш мумкин: $\sigma_{kp} = \sigma_T \varphi_1$. Бунда устуворлик шarti қуйидаги кўринишни олади:

$$\sigma \leq \sigma_T \varphi_1.$$

Курилиш нормаларида оқиш чегарасининг энг кичик миқдори сифатида ҳисобий қаршилиқ R қўлланишини эътиборга олсак, юқоридаги шарт қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sigma \leq R \varphi_1, \text{ бу ерда } \varphi_1 = \frac{\sigma_{kp}}{\sigma_T}.$$

Реал конструкцияларда сиқувчи кучларнинг аниқ маркази бўлмайди, улар ҳамма вақт маълум елкага эга бўлади, бу эса критик кучланишнинг камайишига олиб

келади. Буни эътиборга олиб, нормаларда яна бир коэффициент киритилган:

$$\varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}},$$

бу ерда σ_{kp}^e — тасодифий елка «е» оркали кўйилган сикувчи кучдан ҳосил бўлган критик кучланиш. Унинг қиймати назарий ёки тажриба йўли билан аниқланади.

Натижада бўйлама эгилиш коэффициенти куйидаги кўринишни олади:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{\sigma_{kp}}{\sigma_T} \cdot \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_{kp}} = \frac{\sigma_{kp}^e}{\sigma_T}.$$

Шундай қилиб, сиқилган стерженларнинг устуворлик шарти куйидаги формула билан ифодаланади:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq R\varphi;$$

бу ерда P — ҳисобий сикувчи куч;

F — стерженнинг кўндаланг юзаси;

R — материалнинг сиқилишга бўлган ҳисобий қаршилиги.

Металл конструкцияларида қўлланиладиган пўлатнинг турли маркалари учун бўйлама эгилиш коэффициенти φ нинг қиймати эгилувчанлик λ га боғлиқ ҳолда 13.1-жадвалда берилган.

Темир-бетон, ёғоч, ғишт каби бошқа материаллар учун ҳам φ коэффициенти ҳисоблаб чиқилган.

Стерженли системаларни устуворликка ҳисоблашда уч масала ҳал этилади:

1) агар R , φ , F маълум бўлса, сиқилган стерженнинг юк кўтариш қобилияти аниқланади;

2) агар P , F , R , φ маълум бўлса, стерженнинг устуворлиги текширилади; $\sigma = P/F \leq R\varphi$;

3) агар P , R , φ маълум бўлса, стерженнинг кўндаланг кесим юзаси аниқланади $F \geq P/R\varphi$.

Юқорида айтиб ўтилгандек, φ коэффициенти жадвалдан эгилувчанлик λ оркали топилади. λ нинг ўзи эса кесим юзаси F ва инерция моменти I га боғлиқ микдордир:

$$\lambda = \frac{l}{r} = \frac{l}{\sqrt{\frac{I}{F}}}.$$

**Марказий сиқилган стерженлар учун
бўйлама эгилиш коэффициентлари**

Эгилувчан- лик λ	Турли маркали пўлат элементлар учун ф нинг қийматлари			
	Ст. 3 ва Ст. 4	Ст. 5	14Г2, 15ТС 10Г2С, 10Г2СД 15ХСНД	10 ХСНД
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,98
20	0,97	0,96	0,95	0,95
30	0,95	0,93	0,92	0,92
40	0,92	0,89	0,89	0,88
50	0,89	0,85	0,84	0,82
60	0,86	0,80	0,78	0,77
70	0,81	0,74	0,71	0,68
80	0,75	0,67	0,63	0,59
90	0,69	0,69	0,54	0,50
100	0,60	0,50	0,46	0,43
110	0,52	0,43	0,39	0,36
120	0,45	0,37	0,33	0,31
130	0,40	0,32	0,29	0,27
140	0,36	0,28	0,25	0,23
150	0,32	0,25	0,23	0,20
160	0,29	0,23	0,21	0,18
170	0,26	0,21	0,19	0,16
180	0,23	0,19	0,17	0,14
190	0,21	0,17	0,15	0,12
200	0,19	0,15	0,13	0,11
210	0,17	0,14	0,12	0,10
220	0,16	0,13	0,11	0,09

Шу боисдан изланаётган юзани аниқлашдан илгари бирор юзани тусмоллаб қабул қилинади ҳамда шу юза бўйича λ ва φ топилади, сўнгра қабул қилинган юза шарт бўйича текширилади. Агар шарт каноатлантирилса, ўша юза қолдирилади, каноатлантирилмаса, шу жараён яна такрорланади.

Металл конструкцияларини ҳисоблашда кўпинча φ коэффициенти аввал тусмоллаб танланади, кейин юза аниқланади ва шарт бўйича текширилади.

Элементнинг кўндаланг кесимини танлашда мустаҳкамлик шarti билан бир қаторда бикирлик шартини ҳам каноатлантириш талаб этилади. Шу муносабат билан қурилиш конструкцияларининг турли элементлари учун чегаравий эгилувчанликлар белгиланган. Масалан, ферманинг ҳовонлари, устунчалари ва асосий устунлар учун рухсат этилган энг юқори эгилувчанлик $\lambda = 120$. Ферманинг бошқа элементлари ва иккинчи даражали устунлар учун чегаравий эгилувчанлик $\lambda = 150$. Металл конструкцияларининг қолган элементлари учун $\lambda = 200$.

13.5. СИҚИЛГАН СТЕРЖЕНЛАРДА БИРЛИК КЎЧИШДАН ҲОСИЛ БЎЛГАН РЕАКЦИЯЛАРНИ АНИҚЛАШ

Бундан кейинги параграфда рамалар устуворлигини ҳисоблашда кўчишлар усулининг татбиқини кўриб ўтамиз. Тўққизинчи бобда танишиб ўтганимиздек, статик ноаниқ системаларни бу усулда ҳисоблаганда, қўшимча равишда киритилган боғланишларда бирлик кўчишлар натижасида вужудга келадиган реакцияларни аниқлай билиш талаб этилади. Қуйида ана шундай реакциялар аниқланади.

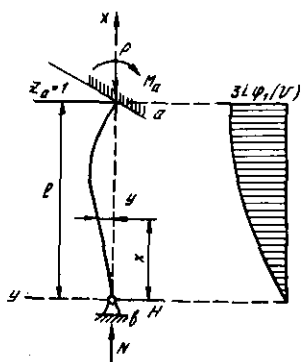
Бу масалани ҳал этишда ҳам солкиликнинг тақрибий дифференциал тенгламасидан фойдаланамиз:

$$EIy'' = -M_x.$$

Бир учи мустаҳкам, иккинчи учи шарнирли бириктирилган стерженни кўриб ўтамиз. 13.8- расмда тасвирланган ҳол учун таянч реакцияларини аниқлаб, эгувчи момент M эпюрасини қурамиз.

Агар горизонтал реакция кучи H маълум бўлса, а таянчини бир бирликка буришдан ҳосил бўлган реактив момент

$$M_a = HI \quad (13.6)$$



13.8-р а с м

лама куч N стерженни сикади. Сикса мусбат, чўзса, манфий олинади.

Шу кесим учун солкиликнинг дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$EIy'' = -(Hx + Ny),$$

$$\text{ёки } y'' + \frac{N}{EI}y = -\frac{H}{EI}x.$$

$\alpha^2 = \frac{N}{EI}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{H}{EI}x \quad (13.7)$$

келиб чиқади. Бу тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{H}{\alpha^2 EI}x. \quad (13.8)$$

A ва B ўзгармаслари чегаравий шартлардан топилади: $x=0$; $y=0$ бўлса, $B=0$ бўлади. $x=l$ бўлса, $y=0$ ва

$$A = \frac{H \cdot l}{\alpha^2 EI} - \frac{1}{\sin \alpha l}$$

бўлади.

Натижада стержень эгилган ўкининг тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$y = \frac{Hl}{\alpha^2 EI} \cdot \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} = \frac{Hl}{\alpha^2 EI} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} - \frac{x}{l} \right). \quad (13.9)$$

бўлар эди. Бироқ, N нинг ўзи номаълум. Эндиги вазифа унинг қийматини топишдан иборат.

Элементнинг исталган кесимидаги эгувчи момент

$$M_x = Hx + Ny.$$

Ишорага изох: y ўқи чапга йўналган, стерженнинг кабариги ўkning мусбат томонига қараган. Шунинг учун Hx мусбат олинди. Иккинчи ҳаднинг мусбат олиншига сабаб, бўй-

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9973	0,9980	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,4	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9326	0,9840
0,6	0,9856	0,9881	1,0061	0,9941	0,8557	0,9641
0,8	0,9566	0,9787	1,0111	0,9895	0,7432	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,95,90	1,0209	0,9798	0,5131	0,8789
1,2	0,8998	0,9511	1,0251	0,9751	0,4198	0,8557
1,3	0,8814	0,9424	1,0298	0,9715	0,3181	0,8307
1,4	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,5	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,6	0,8153	0,9116	1,0463	0,9566	-0,0380	0,7432
1,7	0,7891	0,8998	1,0529	0,9509	-0,1742	0,7100
1,8	0,7609	0,8871	1,0600	0,9448	-0,3191	0,6747
1,9	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
2,0	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,1	0,6597	0,8437	1,0805	0,9240	-0,8103	0,5565
2,2	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,3	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,4	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3895	0,4198
2,5	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,6	0,4234	0,7531	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,7	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,8	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,9	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
3,0	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,1	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0207
3,2	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,3	-0,1847	0,5991	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,4	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3,5	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457

13.3- жадвалл инг давоми

V	$\varphi_1(V)$	$\varphi_2(V)$	$\varphi_3(V)$	$\varphi_4(V)$	$\eta_1(V)$	$\eta_2(V)$
3,6	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3,7	-0,9270	0,4256	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,8	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,9	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
4,0	-2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,1	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,2	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,3	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,4	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-27,781	-0,9931
4,5	227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	221,05	-1,0884
4,6	14,669	-0,0808	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861
4,7	7,8185	-0,1646	1,9919	0,5543	0,4553	-1,2865
4,8	5,4020	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3895
4,9	4,1463	-0,3612	2,2377	0,5054	-3,8570	-1,4954
5,0	3,3615	-0,4772	2,3924	0,4793	-4,9718	-1,6040
5,1	2,8130	-0,6100	2,5757	0,4520	-5,8570	-1,7155
5,2	2,3986	-0,7630	2,7961	0,4234	-6,6147	-1,8299
5,3	2,0668	-0,9423	3,0648	0,3935	-7,2965	-1,9473
5,4	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679
5,5	1,5455	-0,4181	3,8234	0,3291	-8,5379	-2,1917
5,6	1,3265	-0,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189
5,7	1,1235	-2,1804	5,1346	0,2580	-9,7056	-2,4495
5,8	0,9302	-2,7777	0,2140	0,2195	-10,283	-2,5838
5,9	0,7421	-3,6678	7,8726	0,1790	-10,863	-2,7218
6,0	0,5551	-5,1589	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639
6,1	0,3659	-8,2355	16,739	0,0906	-12,038	-3,0102
6,2	0,1700	-18,591	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609
2,0	0,0000	—	—	0,0000	-13,033	-3,2898

13.6. РАМАЛАР УСТУВОРЛИГИ

Рамаларни устуворликка ҳисоблашда кучлар ёки кўчишлар усулидан фойдаланилади. Булардан кейингиси ўзининг қулайлиги ва соддалиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради. Қуйида рамалар устуворлигини ҳисоблашда кўчишлар усулидан фойдаланишни кўриб чиқамиз.

Аввало бинокорликда кенг тарқалган тўғри чизикли стерженлардан ташкил топган раманинг тугунларига бўйлама кучлар қўйилган ҳолни кўриб ўтамыз. Кучларнинг критик кийматида рамада критик (танг) ҳолат вужудга келади. Бунда раманинг тўғри чизикли мувозанати ноустувор ва эгри чизикли мувозанати устувор бўлиб қолади. Ҳисобни соддалаштириш мақсадида стерженлардаги бўйлама деформацияларни эътиборга олмаймиз.

Раманинг асосий системаси аввалгисидан, яъни мустақкамликка ҳисоблашдаги схемадан фарқ қилмайди.

Каноник тенгламалар тизими раманинг деформацияланган ҳолати учун тузилади. Тугунларга қўйилган ташқи кучлар асосий системага киритилган қўшимча боғланишларда ҳеч қандай реакция уйғотмайди, шунинг учун ҳам тенгламалар бир жинсли бўлади:

[illegible]

Бу ерда $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — номаълум эгилиш бурчаклари ва чизикли кўчишлардир.

Тенгламаларнинг физик маъноси ҳам ўша-ўша, яъни исталган кўшимча боғланишдаги реакциялар йиғиндиси нолга тенг.

Бирок (13.11) тенгламанинг коэффициентлари r_{ik} реактив момент ва реактив кучлар кўчиш усулининг аввалги оддий коэффициентларидан биров фарк қилади. Аввалги коэффициентлар ташқи кучларга боғлиқ бўлмас эди. Устуворлик масаласидаги коэффициентлар эса бўйлама кучларга боғлиқ: олдинги параграфда кўриб ўтганимиздек, коэффициентларнинг қийматини аниқлашда тугунларга қўйилган бўйлама кучларнинг таъсири ҳам ҳисобга олинади.

Яна шуни ҳам эслатиб ўтиш лозимки, устуворлик тенгламаларида ҳам Релей теоремаси ўз кучига эга, яъни $r_{ik} = r_{ki}$.

Каноник тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимга эга бўлишлиги учун, яъни рама тўғри чизикли мувозанатдан ташқари эгри чизикли мувозанатга ҳам эга бўлишлиги учун (13.11) системанинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$D = \begin{bmatrix} r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n} \\ r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n} \\ \vdots \\ r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nn} \end{bmatrix} = 0. \quad (13.12)$$

Аниқловчини очиб, устуворлик тенгламасини ҳосил қиламиз. Сўнгра ундан критик куч топилади. Бирлик эластик реакциялар бўйлама кучнинг функцияси бўлиб, v параметрига боғлиқдир. Шунинг учун ҳам аниқловчини очганда, v га нисбатан трансцендент тенглама ҳосил бўлади. Тенглама катор илдизларга эга бўлиб, уларнинг ичидан энг кичиги танлаб олинади. Тенгламанинг ўзи эса танлаш ёки кетма-кет яқинлашув усулида ечилди.

Умуман рамада қанча сикилган стержень бўлса, ўшанча $v = l \sqrt{N/EI}$ бўлади. Бирок, $v_1, v_2, \dots$ ларни бирорта v_n орқали ифодаб олса бўлади. Бунда барча r_{ik} битта параметрнинг функциясига айланиб қолади:

$$r_{ik} = f_{ik}(v_n),$$

критик ҳолат тенгламаси эса қуйидаги кўринишни олади:

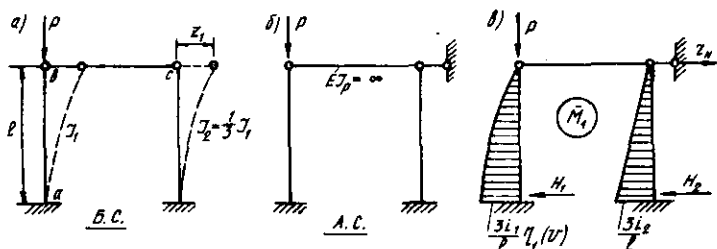
$$D = (v_n) = |f_{ik}(v_n)| = 0.$$

Мазкур аниқловчи тенгламанинг энг кичик илдизи $v_{n, kp}$ ни аниқлаш имконини беради. Параметр $v_{n, kp}$ асосида n -, стержендаги бўйлама кучнинг критик қиймати аниқланади:

$$N_{n, kp} = v_{n, kp}^2 \frac{EI_n}{l_n^2}. \quad (13.13)$$

Шу стерженнинг ҳисобий узунлиги қуйидаги формуладан топилади:

$$l_{0,n} = \pi \sqrt{\frac{EI_n}{N_{n, kp}}} = \frac{\pi}{v_{n, kp}} l_n. \quad (13.14)$$



13.9- расм

Кейин v лар орасидаги боғланишлардан фойдаланиб, раманинг қолган стерженлари учун v_{kp} ва N_{kp} аниқланади.

Баён этилган умумий мулоҳазаларни аниқ мисоллар асосида тушунтирамиз.

1- мисол. Раманинг ab устунчаси учун критик куч ва ҳисобий узунлик аниқлансин (13.9- расм, а). Ригель чексиз катта биқирликка эга. $J_2 = J_1/3$.

Номаълумлар сони бирга тенг. Асосий система ва бирлик эпюра $\bar{M}_1$ 13.9- расм, б, в да тасвирланган. P кучидан $P \cdot y$ моменти келиб қўшилганлиги сабабли сикилган стерженнинг эпюраси эгри чизикли кўринишга эга. Реакцияларни аниқлашда бу эгрилик тузатувчи коэффициент $\eta_1(v)$ орқали ҳисобга олинади. $\bar{M}_1$ эпюрасини куришда 13.2- жадвалдан фойдаланилади.

Тугунлардаги кучлар учун v параметрлари:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_1}} = v,$$

$v_2 = 0$, чунки иккинчи тугунда куч йўқ.

Берилган рама учун устуворлик каноник тенгламаси Z $r_{11} = 0$ бўлади. $Z_1 \neq 0$ бўлгани учун критик ҳолат тенгламаси куйидагича ифодаланади: $r_{11} = 0$.

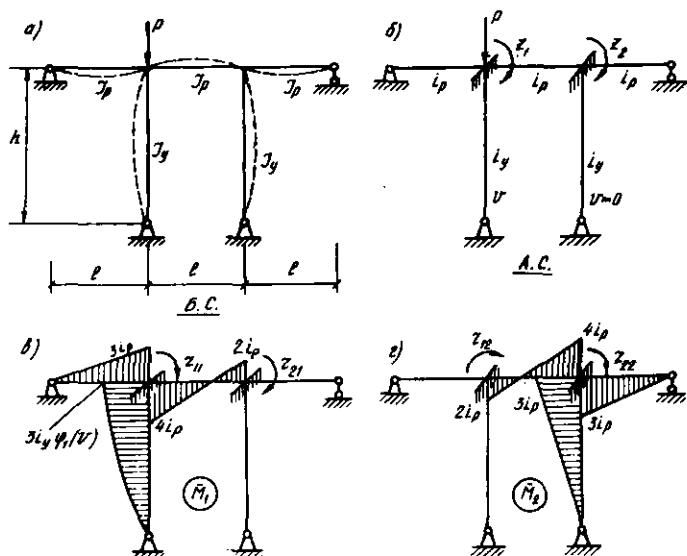
$\bar{M}_1$ эпюрасидан реакциянинг қийматини топамиз:

$$r_{11} = H_1 + H_2 = \frac{3i_1}{l} \eta(v) + \frac{3i_2}{l} = 0; i_2 = \frac{1}{2}i_1.$$

Бу ердан $\eta_1(v) = -0,333$; 13.3- жадвалдан $v_{kp} = 1,81$.

Критик куч

$$P_{kp} = v_{kp}^2 \frac{EJ_1}{l^2} = 3,28 \frac{EJ_1}{l^2}.$$



13.10-расм

Ҳисобий узунлик

$$l_0 = \frac{\pi}{v_{kp}} l = \frac{3,14}{1,81} l = 1,73l.$$

2- мисол. Шаклда кўрсатилган озодмас рама учун критик куч ва ҳисобий узунлик аниқланиши керак (13.10- расм, а).

Раманинг устунчаси, ригели ҳамда инерция моментлари орасидаги боғланиш куйидагича: $l = 2/3 h$; $J_p = 2J_y$; $i_p = 3i_y$. Асосий система ва бирлик эпюралар 13.10- расм, б, в, г да тасвирланган. Раманинг критик ҳолат тенгламаси

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Бирлик эпюралардан фойдаланиб, эластик реакцияларни аниқлаймиз:

$$r_{11} = 3i_y \varphi_1(v) + 3i_p + 4i_p = 3i_y [\varphi_1(v) + 7];$$

$$r_{12} = 3i_y + 3i_p + 4i_p = 24i_y;$$

$$r_{12} = r_{21} = 2i_p = 6i_y; \quad v = h \sqrt{p/EJ_y}.$$

Топилган қийматларни тенгламага қўямиз:

$$D = 3i_y [\varphi_1(v) + 7] \cdot 24i_y - 6 \cdot 6i_y^2 = 0,$$

бу ердан $\varphi_1(v) = -6,5$.

13.3- жадвалдан $v_{kp} = 4,29$. Бунга мос бўлган критик

$$\text{куч } P_{kp} = v_{kp}^2 \frac{EJ_y}{h^2} = 18,4 \frac{EJ_y}{h^2},$$

ҳисобий узунлик

$$h_0 = \frac{\pi}{v_{kp}} h = \frac{3,14}{4,29} h = 0,732h$$

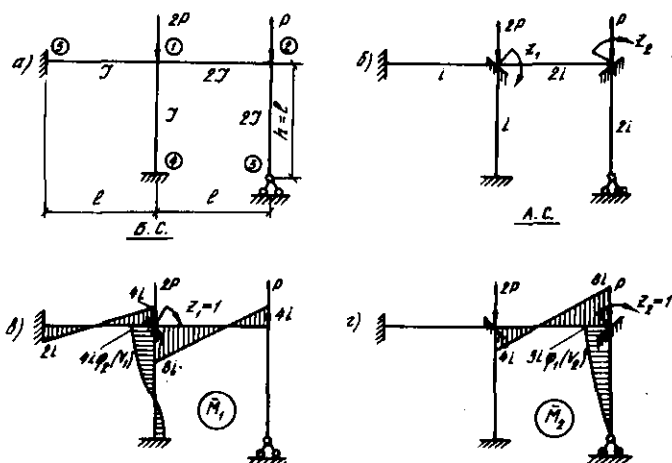
бўлади.

3- мисол. 13.11- расм, а да тасвирланган раманинг устуналарига қўйилган кучнинг критик қиймати аниқлансин.

Мазкур раманинг асосий системаси ва бирлик эпюралари ($\bar{M}_1, \bar{M}_2$) 13.11- расм, б, в, г да кўрсатилган. Тугунларга қўйилган куч рамада эгувчи момент ҳосил қилмайди, шунинг учун $M_p = 0$ бўлади. У ҳолда кўчиш усулининг каноник тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$z_1 r_{11} + z_2 r_{12} = 0;$$

$$z_1 r_{12} + z_2 r_{22} = 0.$$



13.11- расм

Ушбу тенгламалар системаси икки ечимга эга:

а) $z_1=0; z_2=0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йўкотмайди.

б) $z_1 \neq 0; z_2 \neq 0$ — бу ечим бўйича система устуворлигини йўкотади.

Ана шу шартдан келиб чикиб критик кучнинг қиймати-ни аниқлаймиз. Бу шарт каноатлантирилиши учун юқоридаги тенглама коэффициентларидан тузилган аниқловчи нолга тенг бўлиши керак:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Охирги тенглама устуворлик тенгламаси деб аталади.

$\bar{M}_1$ ва $\bar{M}_2$ эпюраларидан каноник тенглама коэффициентларини аниқлаймиз:

$$r_{11} = 4i + 8i + 4i\varphi_2(v_1) = 12i + 4i\varphi_2(v_1);$$

$$r_{12} = r_{21} = 4i;$$

$$r_{22} = 8i + 3i\varphi_1(v_2).$$

$\varphi_2(v_1)$ ва $\varphi_1(v_2)$ сингари мураккаб функциялар махсус китобларда бериладиган жадваллардан топилади (бизда 13.3- жадвал), v_2 параметрини v_1 орқали ифодаalayмиз:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{2P}{EJ}}; v_2 = l \sqrt{\frac{P}{2EJ}};$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 2; v_1 = 2v_2; v_2 = 0,5v_1.$$

Топилган коэффициентларни устуворлик тенгламасига қўямиз:

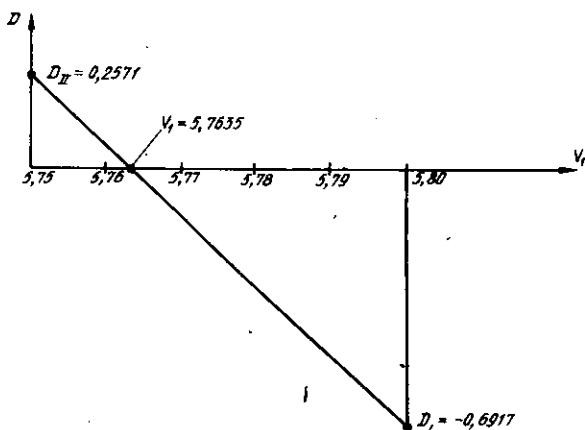
$$D = [12i + 4i\varphi_2(v_1)] [8i + 3i\varphi_1(v_2)] - (4i)^2 = 0 \text{ ёки}$$

$$D = [3 + \varphi_2(v_1)] [2,6667 + \varphi_1(0,5 - v_1)] - 1,3333 \neq 0.$$

Тенгламани кетма-кет яқинлашув усулида ечамиз.

I яқинлашув. $v_2 = 2,9$; $v_1 = 2 \cdot 2,9 = 5,8$ деб қабул қиламиз ва 13.3- жадвалдан шуларга мос бўлган φ_1 ва φ_2 ни аниқлаймиз:

$$\varphi_1(2,9) = 0,2195; \varphi_2(5,8) = -2,7777.$$



13.12- расм

Буларни устуворлик тенгласига кўямиз:

$$D_I = (3 - 2,7777) \cdot (2,6667 + 0,2195) - 1,3333 = -0,6917.$$

Чиккан қиймат нолдан анча фарк қилади, Шунинг учун иккинчи яқинлашувни бажарамиз.

II яқинлашув. $v_2 = 2,875$; $v_1 = 2,875 \cdot 2 = 5,75$ деб қабул қиламиз.

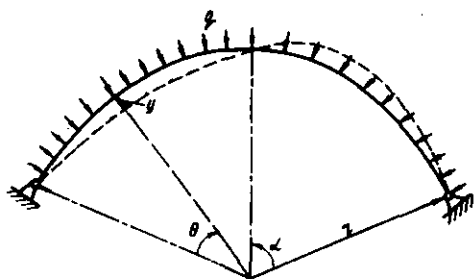
13.3- жадвалдан $\varphi_1(2,875) = 0,2388$; $\varphi_2(5,75) = -2,4526$. Устуворлик тенгласи.

$$D_{II} = (3 - 2,4526) \cdot (2,6667 + 0,2388) - 1,3333 = 0,2571.$$

Иккита яқинлашувдан кўриниб турибдики, устуворлик тенгласининг ечими (илдизи) $v_1 = 5,75$ билан $v_1 = 5,8$ оралигида ётади. Масофа кичик бўлгани учун бу ораликда $D(v_1)$ функциясини чизикли деб қабул қилса бўлади. Бундай вазият тенглама ечимини график усулда аниқлаш имконини беради (13.12- расм). Маълум масштабда горизонтал ўққа v_1 нинг қийматлари, вертикал ўққа D_I ва D_{II} нинг қийматлари ўлчаб қўйилади ва ўзаро туташтирилади. Туташтирувчи чизик горизонтал ўқни кесиб ўтган нукта тенгламанинг илдизи бўлади, яъни v_1 нинг биз излаётган қиймати бўлади: $v_1 = 5,7635$.

Критик куч

$$P_{kp} = \frac{5,7635^2 EJ}{l^2} = 33,218 \frac{EJ}{l^2}$$



13.13-расм

13.7. АРКАЛАР УСТУВОРЛИГИ

Аркаларнинг энг содда вакили — айлана бўйлаб чизилган икки шарнирли аркани кўриб ўтамиз. Аркага текис ёйилган, радиус бўйлаб йўналган юк қўйилган (13.13-расм). Биқирлиги EI — ўзгармас. Агар $q < q_{кр}$ бўлса, арканинг барча кесимларида бир хил қийматга эга бўлган бўйлама куч N ҳосил бўлади. Арка ўкига тик йўналган кўчишни y деб белгиласак, устуворлик бузилганда бўйлама кучдан ҳосил бўладиган момент $M = Ny$ бўлади. Бўйлама куч билан радиал юк орасидаги боғланиш $N = qr$ кўринишида ифодаланади.

Арка эгилган ўкининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + k^2 y = 0,$$

бу ерда

$$k^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI}.$$

Дифференциал тенгламанинг ечими

$$y = A \cos k\theta + B \sin k\theta$$

бўлади. Бу ерда θ — радиал бурчак.

Устуворлик тенгламасига эга бўлиш учун қуйидаги чегаравий шартларни қабул қиламиз:

$$\theta = 0; y = 0;$$

$$\theta = \alpha; y = 0.$$

Биринчи шартдан $A=0$, иккинчисидан $B\sin k\alpha=0$ келиб чиқади. Бу ерда $B \neq 0$ бўлганидан, $\sin k\alpha=0$ бўлади. Охириги тенглама устуворлик бузилишининг характеристик тенгламаси деб аталади.

Устуворлик бузилишининг биринчи шакли учун $k\alpha=\pi$ бўлади. Бундан фойдаланиб минимал критик юкни аниқлаймиз:

$$1 + \frac{qr^3}{EI} = \frac{\pi^2}{\alpha^2},$$

бу ердан

$$q_{kp} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right).$$

Агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлса, яъни арка ярим айлана шаклида бўлса,

$$q_{kp} = \frac{3EI}{r^3} \text{ бўлади.}$$

Арқаларнинг бошқача турларини текширганда ҳам мувозанатнинг тегишли дифференциал тенгламасига эга бўлиш мумкин. Аммо уларнинг ечими бирмунча мураккаброк бўлади. Шунинг учун ҳам уларни ечишда тақрибий усулларни қўллаш мақсадга мувофиқдир.

14- боб

ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ АСОСЛАРИ

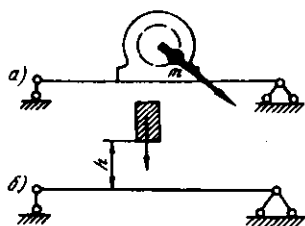
14.1. ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИНING ВАЗИФАЛАРИ ВА АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Иншоотлар динамикаси қурилиш механикасининг махсус бўлими бўлиб, унда иншоотларга динамик кучларнинг таъсири кўриб ўтилади.

Иншоот массаларида тезланиш уйғотадиган кучлар динамик кучлар деб аталади. Иншоот қисмларига аста-секин қўйиладиган кучлар статик кучларни ташкил этади. Динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган кучланиш, деформация ва қўчишлар вақт ўтиши билан ўзгариб туради. Статик кучлар таъсирида эса бундай ўзгаришлар содир бўлмайди.

Динамик кучларнинг қуйидаги хиллари мавжуд:

1. Қўзғалмас даврий кучлар. Бундай кучлар иншоотнинг бирор ерига ўрнатилган, айланувчи қисмида



14.1-расм

• мувозанатлашмаган массаси бўлган механизмлар таъсирида вужудга келади (14.1-расм, а).

Агар даврий кучлар синус ёки косинус қонуни бўйича бетўхтов таъсир этса, у ҳолда бундай кучлар вибрацион ёки гармоник кучлар деб аталади.

2. Зарбий куч. Иншоотга (14.1-расм, б) зарб билан

урилувчи механизмлар бундай кучга мисол бўла олади.

3. Қисқа муддат таъсир этувчи кучлар (импульслар). Бундай кучлар бирдан пайдо бўлиб, бирдан сўнади. Портлаш натижасида ҳосил бўладиган куч қисқа муддат таъсир этувчи куч ҳисобланади.

4. Қўзгалувчи кучлар. Иншоот устида ҳаракатланувчи транспорт воситалари қўзгалувчи кучларни ҳосил қилади.

5. Сейсмик кучлар. Зилзила жараёнида бино ва иншоотларга таъсир этувчи кучлардир.

Сейсмик кучлар катталигини тўғри аниқлай билиш иншоотларнинг сейсмик мустаҳкамлигини таъминлашда катта аҳамиятга эга.

Динамик кучлар ўз табиатига кўра статик кучларга нисбатан бирмунча мураккаб бўлади, чунки бундай кучлар катталиги, йўналиши ва қўйилиш нуктаси билангина эмас, вақт бўйича ўзгариши билан ҳам характерлидир. Шунинг учун ҳам иншоотларни динамик кучлар таъсирига ҳисоблаш мураккаб жараён саналади.

Иншоотлар динамикаси қуйидаги икки асосий масала:

- 1) динамик кучлар таъсирида иншоотда ҳосил бўладиган максимал деформация ва кучланишларни аниқлаш;
- 2) иншоотда етарли даражада кичик деформация ва кучланиш ҳосил бўлишини таъминлайдиган геометрик ўлчамлар танлаш масаласи билан шуғулланади.

Тебраниш турлари. Тебраниш турлари бениҳоя кўп бўлиб, инсон юрагининг уриши, ўпканинг нафас олиши, совуқдан қалтираш, ёруғлик ва товуш тўлқинлари, кадам ташлаб юришимиз, электр қўнғироғининг жиринглаши, автомобиль ҳаракати, ер қимирлаш каби ҳодисаларнинг барчаси тебранишга жонли мисол бўла олади.

Бирок мазкур курсимизнинг мақсади тебраниш ҳодисаларини тўлиқ, ҳар тарафлама ўрганиш эмас, балки муҳандиснинг меҳнат фаолиятида кўп учрайдиган механик тебранишларни таҳлил этишдан иборатдир.

Тинч турган механик системага (масалан, балка ёки математик тебрангичга) ташқаридан куч таъсир этирилиб, шу захоти олинса, система тебранма ҳаракатланади. Системанинг бундай тебраниши эркин ёки хусусий тебраниш деб аталади.

Агар тебранаётган система доим кўзгатувчи куч таъсири остида бўлса (14.1- расм, а), системанинг бундай тебраниши мажбурий тебраниш деб аталади.

Системанинг эркин тебранишига тикловчи (эластик) кучлар билан бирга қаршилик кўрсатувчи (диссипатив¹) кучлар ҳам таъсир этади. Диссипатив кучлар тебранишнинг сўнишига сабаб бўлади. Системаларнинг бу хил тебранишлари сўнувчи тебранишлар деб аталади. Муҳитнинг қаршилиги, ички ишқаланиш кучлари, таянчлардаги қуруқ ишқаланиш диссипатив кучлардир.

Айрим масалаларни тақрибан ечишда диссипатив кучлар эътиборга олинмайди. Тебранишнинг бундай тури сўнмайдиган эркин тебраниш деб ном олган.

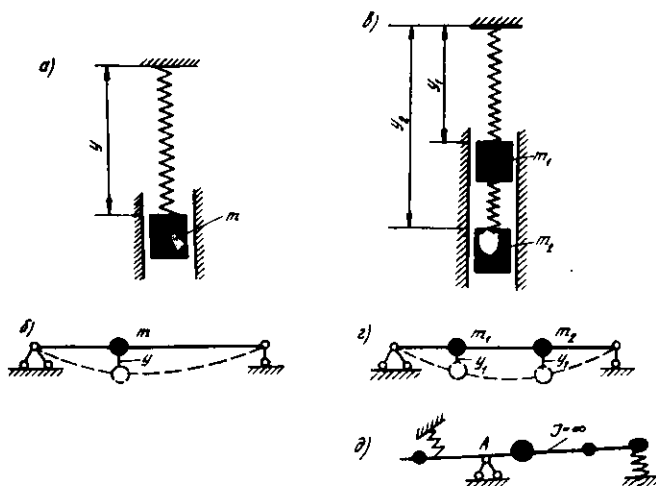
Маълум вақт ичида узлуксиз такрорланиб турадиган тебранишлар даврий тебранишлар деб аталади. Тўла тебраниш учун кетган вақт тебраниш даври (T) дейилади.

Системанинг эркинлик даражаси. Иншоотлар статикасидаги каби динамикасида ҳам «система» деганда стерженли системалар, яъни иншоотлар тушунилади. Динамик ҳисоблаш жараёнида иншоотнинг динамик ҳисоблаш тархидан фойдаланилади. Динамик ҳисоблаш тархларида иншоот массаси айрим нуқталарга тўпланган ёки система бўйлаб тарқалган деб қаралади. Массаларнинг қандай олинishiга қараб системанинг эркинлик даражаси турлича бўлади.

Система деформацияланганда барча массаларнинг ҳолатини (ўрнини) белгиловчи геометрик параметрлар соғи системанинг эркинлик даражаси деб аталади.

Вазнсиз пружинага осилган m массанинг (14.2- расм, а) эркинлик даражаси бирга тенг, чунки унинг ҳолатини биргина параметр (y — координатаси) билан аниқлаш мумкин. Худди шундай бир массали балканинг (14.2- расм, б) эркинлик даражаси ҳам бирга тенг. 12- расм, в ва г, л арда эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системалар

¹ *Диссипатив* — лотинча сочилиш деган маънони англатади.

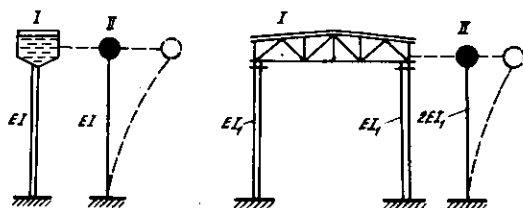


14.2- расм

тасвирланган. Тўпланма (йиғик) массалар бикирлиги чексиз катта стержень устида жойлашган бўлса, системанинг ҳолати стерженнинг ҳолати билан белгиланади. Масалан, 14.2- расм, д даги системанинг эркинлик даражаси, масса ва пружиналарнинг сонидан катъи назар, бирга тенг бўлади. Чунки массаларнинг ҳолатини стерженнинг А таянчи атрофида оғиш бурчаги билан белгилаш мумкин.

Аслида реал конструкцияларда масса бутун элемент ҳажми бўйлаб ёйилган бўлади. Бу эса массаларнинг сони чексиз кўп демакдир. Шундай экан, массаларнинг ҳолатини белгилловчи параметрлар ҳам чексиз кўп бўлади. Шунга кўра гап реал конструкциялар устида борганда, уларнинг эркинлик даражаси чексиз кўп деб юритилади. Бирок, системанинг эркинлик даражаси канча кўп бўлса, ҳисоб ишлари шунча мураккаблашади. Шу сабабли кўпинча техник ҳисобларда, унча жузъий бўлмаган хатоликка йўл қўйилган ҳолда, системанинг эркинлик даражаси чекли равишда олинади. Бунда массалар системанинг айрим нукталарига, масалан, иншоотдаги оғир юклар жойлашган ерларга тўпланadi.

14.3- расмда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг конструкцияси ва ҳисоблаш тарҳи тасвирланган. Шаклдаги сув босими минораси ва бир қаватли рамада масса асосий юк жойлашган ёрга тўпланган.



14.3-расм

14.2. ИНШООТЛАР ДИНАМИКАСИ УСУЛЛАРИ

Иншоотлар динамикасида статик ва энергетик усул деб аталувчи икки асосий усул кенг қўлланилади.

Статик усулнинг моҳияти шундан иборатки, бунда динамика масалалари Даламбер қондаси асосида шаклан статика масалаларига келтирилади, яъни динамика тенгламалари статика тенгламаларига келтирилади.

Даламбер қондасига кўра динамиканинг мувозанат тенгламалари қуйидагича ифодаланади:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X + \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= 0 \\ \Sigma Y + \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= 0 \\ \Sigma Z + \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14.1)$$

бу ерда m — мувозанати текширилаётган жисмнинг массаси; x, y, z — жисмнинг координата ўқлари бўйлаб чизикли кўчишлари; $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ — жисмга таъсир этаётган кучлар проекцияларининг йиғиндиси, қавсдаги ҳадлар массанинг инерция кучини ифодалайди.

Вакт бўйича олинган ҳосилани нукта билан белгиласак, тенглама қуйидаги содда кўринишни олади:

$$\Sigma X - m\ddot{x} = 0; \Sigma Y - m\ddot{y} = 0; \Sigma Z - m\ddot{z} = 0. \quad (14.2)$$

Динамика масалаларини ҳал этишда энергетик усулдан кенг фойдаланилади. Бу усул системанинг тебранма ҳаракатида энергиянинг сақланиш қонунига асосланади.

Мазкур конунга биноан потенциал Π ва кинетик K энергиялар йиғиндиси ўзгармас миқдордир.

$$\Pi = K = \text{const.}$$

Системанинг потенциал энергияси қурилиш механикасининг қуйидаги формуласидан топилади:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{EF} + \sum \int_0^l \mu \frac{Q^2 dx}{GF} \right], \quad (14.4)$$

бу ерда M , N , Q — эгувчи момент, бўйлама ва кўндаланг кучлар; J , F — инерция моменти ва кўндаланг кесим юзи; E , G — сикилиш (чўзилиш) ва силжишдаги эластиклик модули; μ — кўндаланг кесимнинг шаклига боғлиқ бўлган коэффициент (бу коэффициент уринма кучланишларни кесим бўйлаб нотекис тарқалишини ҳисобга олади).

Системанинг кинетик энергияси қуйидаги формуладан топилади:

$$K = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} + \sum \int m(x) dx \frac{v^2}{2}, \quad (14.5)$$

бу ерда v — тезлик; m_i — йиғиқ массалар; $m(x)$ — ёйиқ массалар.

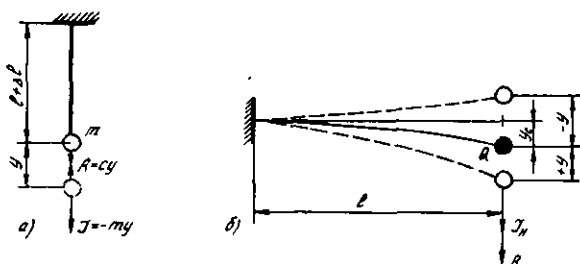
Формуланинг биринчи ҳади йиғиқ массаларга, иккинчи ҳади эса ёйиқ массаларга тегишлидир.

15-боб

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИРГА ТЕНГ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

15.1. СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Системанинг эркин тебранишини абстракт ва реал ҳоллар учун кўриб ўтамиз. Абстракт ҳолда система тебранишига қаршилик кўрсатувчи кучлар эътиборга олинмайди, реал ҳолда эса тебранма ҳаракатни сўнишга олиб келувчи қаршилик кучлари ҳисобга олинади.



15.1-расм

Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол. Бир массали эластик системаларнинг (15.1-расм, а ва б) вертикал йўналишдаги эркин тебранишини кўриб ўтамыз. Эластик системаларнинг мувозанати бир зумга қўйиб олинган ташқи куч таъсири остида бузилди деб фараз этайлик. Бунинг оқибатида стерженли системалар эркин тебранама ҳаракатга келади.

Стерженлар учига вазни $Q = mg$ бўлган юк қўйилган. m — юк массаси, g — эркин тушиш тезланиши. Юк Q таъсирида балка $y_{ст}$ масофага солқиланади (15.1-расм, б) Вертикал стержень эса Δl масофага оғади, натижада улар **тикловчи** (кайтарувчи) куч R ва **инерция** кучи J_n таъсирида бўлади. Мувозанат тенгламасини тузишда пастга йўналган куч, кўчиш, тезлик ва тезланишнинг ишорасини мусбат деб қабул қиламиз.

Тикловчи куч R системанинг эластик реакция кучи бўлиб, масса m статик мувозанат ҳолатдан четга чиққанда, уни дастлабки вазиятига қайтаришга интилади. Бу куч кўчишга нисбатан тескари йўналганлиги учун унинг ишораси манфий бўлади. Тикловчи куч масса тўпланган нуктанинг солқилиги y га пропорционал бўлади, яъни.

$$R = -cy. \quad (15.1)$$

Пропорционаллик коэффиценти c масса тўпланган нукта бирлик кўчиш олганда балкада ҳосил бўладиган реакция кучидир. Бу кучнинг миқдори системанинг эластик ва геометрик характеристикаларига боғлиқ бўлиб, кўчиш тенгламасидан фойдаланиб аниқланади:

$$c\delta_{11} = 1, c = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (15.2)$$

бу ерда δ_{11} — масса тўпланган нуктанинг бирлик куч таъсирида кўчиши.

Масалан, вертикал стержень учун бирлик куч таъсирида кўчиши $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l}{EF}$; консоль балка учун $\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{3EI}$ бўлади. (15.2) га асосан стержень учун $c = EF:l$ ва балка учун $c = 3EI:l^3$ бўлади. Баъзан c система бикирлиги деб ҳам юритилади.

Инерция кучи J Даламбер коидасига кўра масса m билан тезланишнинг кўпайтмасига тенг. Тезланишни аниқлаш учун эса кўчиш y дан вақт t бўйича икки марта ҳосила олинади. Инерция кучи тезланишга нисбатан тескари йўналганлиги учун ишораси манфий олинади:

$$J_n = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\ddot{y}. \quad (15.3)$$

Бир массали системанинг динамик мувозанат шартини ёзамиз

$$\Sigma Y = J_n + R = 0.$$

Кўчишлар нолдан эмас, статик мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобланганлиги (15.1-расм, б га қаранг) сабабли Q куч тенгламага киритилмаган. R ва J_n нинг (15.1) ва (15.3) да келтирилган ифодасини тенгламага қўямиз, тенглама ҳадларини m га бўлиб, ишорасини ўзгартирамиз:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0. \quad (15.4)$$

Ҳосил бўлган иккинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенглама қаршилиқ ҳисобга олинмаганда бир массали системанинг сўнмайдиган эркин тебранишини ифодалайди.

$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

деб олсак, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (15.5)$$

Бу ерда $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ система тебранишининг доиравий такрорлиги (частотаси).

(15.5) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (15.6)$$

унинг ҳосиласи тебраниш тезлигини ифодалайди:

$$\dot{y} = v = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t. \quad (15.7)$$

C_1 ва C_2 доимий сонлар бошланғич шартлардан топилади. Тебранишнинг $t=0$ лаҳзасида бошланғич солқилик y_0 ва бошланғич тезлик v_0 маълум деб фараз этайлик. У ҳолда (15.6) ва (15.7) тенглама асосида

$$C_1 = y_0 \text{ ва } C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

топилади.

Буларни (15.6) га қўйсак, тебранишнинг исталган лаҳзаси учун, яъни t нинг ихтиёрий қиймати учун дифференциал тенгламанинг ечимига эга бўламиз:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (15.8)$$

Қуйидаги белгилашни киритиб

$$y_0 = A \sin \lambda; \quad \frac{v_0}{\omega} = A \cos \lambda$$

тенгламани янада ихчамлаштирамиз:

$$y_0 = A \sin \lambda \cos \omega t + A \cos \lambda \sin \omega t \quad (15.9)$$

ёки

$$y_0 = A \sin(\omega t + \lambda), \quad (15.10)$$

бу ерда A — амплитуда, α — бошланғич фаза.

(15.10) тенглама эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг даврий хусусий (эркин) тебранишини ифодалайди. Унинг графиги 15.3- расм, а да тасвирланган.

Давр ва такрорлик орасидаги боғланишни кўриб чиқамиз. Агар вақтнинг t лаҳзасида солқилик y бўлса,

$$t_1 = t + \frac{2\pi}{\omega}$$

ёки

$$\omega t_1 = \omega t + 2\pi$$

дақиқада ҳам (15.10) га биноан ўшанча солқилик ҳосил бўлади. Бундан кўринадики, тебраниш даври, яъни тебранишнинг бир цикли учун кетадиган вақт

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15.11)$$

бўлади.

Агар T вақт ичида система битта тебранса, 2π с ичида ω марта тебранади; ω нинг до и р а в и й т а к р о р л и к деб

аталишининг сабаби ҳам шунда. Бир секунддаги тебранишлар сони t техник такрорлик деб аталади:

$$t = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{1}{c} \right) \quad (15.12)$$

Кўриб ўтилган тенгламалар асосида такрорлик ва давр учун қуйидаги формулаларни берамиз: доиравий такрорлик

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_n}} = \sqrt{\frac{a}{my_{ct}}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ct}}} \left(\frac{1}{c} \right); \quad (15.13)$$

давр

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{m\delta_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_{ct}}{g}} (c). \quad (15.14)$$

Бир минутдаги тебранишлар сони қуйидаги формуладан аникланади:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{ct}}}.$$

Агар $g = 981 \approx (10\pi)^2$ деб олсак, амалда кенг қўлланиладиган

$$n = \frac{300}{\sqrt{y_{ct}}} \quad (15.15)$$

формула келиб чиқади. Бунда y_{ct} см да ўлчанади.

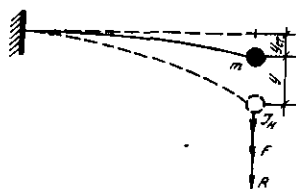
Қаршилик кучлари ҳисобга олинган ҳол

Абстракт ҳолда системанинг эркин тебраниши ўзгармас амплитудада бетўхтов давом этишини кўриб ўтдик. Бирок амалда эркин тебранишлар сўнувчан бўлади, яъни тебраниш амплитудаси тўхтовсиз камая бориб, нолга интилади. Реал конструкцияларнинг тебранишига тикловчи R ва инерция кучлари J_n дан ташқари қаршилик кучлари F ҳам таъсир этади (15.2- расм).

Қаршилик кучи турли ташқи ва ички сабаблар: ташқи муҳит қаршилиги, элементларнинг туташуш жойлари ва таянчлардаги ишқаланишлар, материалнинг ички ноэластик қаршилиги каби сабаблар таъсирида вужудга келади.

Қаршилик кучи тебраниш тезлиги y га пропорционал (бу фаразни 1890 йилда Фойгт киритган) ва ҳаракатга

карама-карши йўналган деб олинади: $F = -\beta y$. Бу ерда β — пропорционаллик коэффициент.



Қаршилик кучи ҳисобга олинганда системанинг динамик мувозанати тенграмаси қуйидагича ифодаланади:

$$\Sigma y = C_n + F + R = 0.$$

15.2-расм

J_n , F ва R нинг қийматларини ўрнига қўйсак,

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}y + \frac{c}{m}y = 0 \quad (15.16)$$

келиб чиқади. Бу дифференциал тенглама қаршилик ҳисобга олинган ҳол учун системанинг эркин тебранишини ифодалайди.

$$2\alpha = \frac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \quad (15.16)'$$

деб белгилаб,

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (15.17)$$

га эга бўламиз. Бу тенгламага мос характеристик тенглама

$$z^2 + 2\alpha z + \omega^2 = 0$$

кўринишида бўлиб, унинг илдизлари

$$z_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}; \quad z_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

бўлади. Бу ерда $\alpha \geq \omega$ бўлиши мумкин.

1-ҳол: $\omega > \alpha$. Бу ҳолда илдизлар комплекс сонлар бўлиб:

$$z_1 = -\alpha + i\omega_1; \quad z_2 = -\alpha - i\omega_1; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

бўлади.

(15.17) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t). \quad (15.18)$$

Бу ерда

$$\alpha = \frac{\beta}{2m} = \frac{\beta \delta_1 \omega^2}{2}.$$

(15.18) да келтирилган кавсдаги ифода даврий функциядир, чунки t га $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ микдорнинг кўшилиши билан функциянинг киймати ўзгармайди.

Демак, сўнувчи эркин тебранишларни

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}$$

даврили даврий тебранишлар деб аташ мумкин экан.

Агар $\alpha \rightarrow 0$ бўлса, яъни қаршилиқ кучи камая бориб нолга айланса, қаршилиқ ҳисобга олинмаган ҳолдаги давр келиб чиқади:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} < T_1.$$

Аввалгига ўхшаб, $A = C \cdot \cos \alpha$ ва $B = C \cdot \sin \alpha$ деб белгилаб олсак, (15.18) тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$y = e^{-\alpha t} C \sin(\omega_1 t + \lambda), \quad (15.19)$$

бу ерда λ — бошланғич фаза бўлиб, массанинг ҳаракат бошидаги ғишини ҳисобга олади; $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ — бошланғич амплитуда;

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{B}{A}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}. \quad (15.20)$$

Қурилиш конструкцияларида α доиравий такрорлик ω дан анча кичик бўлади. Шу сабабли (15.20) ни қуйидагича олиш мумкин:

$$\omega_1 \approx \omega.$$

Сўнувчи эркин тебранишлар графиги 15.3- расм, б да тасвирланган.

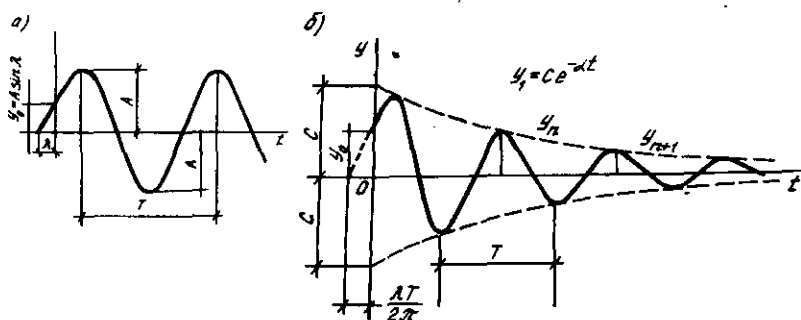
Сўниш жараёни амалда тебранишнинг логарифмик декременти ёки энергиянинг ютилиш коэффициентини ψ орқали ҳисобга олинади.

2- ҳол. $\alpha > \omega$ Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил:

$$z_1 = -\alpha + C O_2 < 0; \quad z_2 = -\alpha - \omega_2 < 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Бу ҳол учун 15.17 тенгламанинг ечими

$$y = l^{-\alpha t} (A \sinh \omega_2 t + B \cosh \omega_2 t)$$



15.3- расм

бўлади. Бундай ҳолда ҳаракат тебранма характерга эга бўлмайди. Оғдирилган масса аста-секин ўзининг дастлабки вазиятига қайтади.

3- ҳол: $\alpha = \omega$.

Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг:

$$z_1 = -\alpha; z_2 = -\alpha.$$

(15.17) тенгламанинг интегралли

$$y = e^{-\alpha t} (A + Bt)$$

бўлади. Бу ҳолда ҳам ҳаракат нодаврий характерга эга.

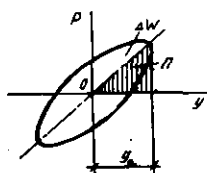
Умуман, тебраниш чекланиши зарур бўлган система-ларда $\alpha \geq \omega$ олинади.

Кетма-кет қўшни амплитудалар нисбатининг логарифми тебранишларнинг логарифмик декременти деб аталади ва қуйидагича ифодаланади:

$$\delta = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \alpha T_1. \quad (15.21)$$

$\alpha = \frac{\delta}{T_1}$ нисбат сўниш коэффициентини деб аталиб, тебранишнинг сўниш тезлигини характерлайди.

Тебранишнинг сўнишини характерлайдиган микдорлардан яна бири энергиянинг ютилиш коэффициенти ёки сочилиш (диссипация) коэффициенти деб аталади ва ψ ҳарфи билан белгиланади. Бу коэффициент гистерезис сиртмоғи номи билан юритилади.



15.4-расм

ган графикдан аникланади (15.4-расм). Гистерезис сиртмоги ташки куч P ва деформация y орасидаги муносабатни ифодаловчи график бўлиб, системани юклаш ва юкдан бўшатиш жараёнида ҳосил бўлади. Идеал эластик материалларда юкланиш чизиги билан юкдан

бўшатиш чизиги устма-уст тушади, гистерезис сиртмоғининг юзаси нолга тенг бўлади, яъни юкланиш чоғида материалда тўпланган энергия юк олингандан кейин системани дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла-тўқис сарф бўлади. Ҳақиқатда эса юклаш чоғида реал материалларда тўпланган энергия юк олингандан сўнг тўла қайтмасдан, яъни материални дастлабки ҳолатига қайтаришга тўла сарф бўлмасдан, энергиянинг бир қисми эластик бўлмаган (қолдик) деформацияга сарф бўлади. Натижада юкланиш ва юкни олиш чизиклари орасида юза ҳосил бўлади. Қолдик деформацияга сарф бўлган энергиянинг миқдори гистерезис сиртмоғининг юзи ($\Delta\Pi$) га тенг бўлади. OAB учбурчагининг юзи эса тебраниш чоғидаги системанинг потенциал энергияси Π га тенгдир. Қуйидаги нисбат:

$$\psi = \frac{\Delta\Pi}{\Pi} \quad (15.22)$$

энергиянинг ютилиш коэффициенти деб аталади.

Чексиз қисқа вақт dt мобайнида энергиянинг ютилиши $d\Pi$, T вақт ичида эса

$$\psi = - \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{d\Pi}{\Pi}$$

бўлади. Бундан

$$\psi = \ln\Pi(t_1) - \ln\Pi(t_1+T) = \ln \frac{\Pi_n}{\Pi_{n+1}}$$

келиб чиқади.

$$\Pi_n = \frac{cy_n^2}{2} \text{ ва } \Pi_{n+1} = \frac{cy_{n+1}^2}{2}$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\psi = 2 \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} \text{ ёки}$$

$$\psi = 2\delta \quad (15.23)$$

бўлади.

δ ва ψ тажриба йўли билан аникланади.

Мисол. 15.1- расм, а да кўрсатилган балканинг ўртасига ўрнатилган двигателнинг вазни $Q=4$ кН. Узунлиги 3 м бўлган пўлат балка ($E=2,1 \cdot 10^8$ кН/м²) 12- номерли қўштаврдан ($J_x=350 \cdot 10^{-8}$ м⁴) ясалган. Балканинг хусусий огирлигини ҳисобга олмай, тебраниш такрорлиги ва даври аниклансин.

Ечиш. Двигатель огирлигидан балка ўртасида ҳосил бўладиган солжилнк:

$$y_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Тебраниш такрорлиги

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 48 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 350 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3^3}} = 56,6 \text{ с}^{-1}.$$

Тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{56,6} = 0,11 \text{ с}.$$

Бир минутдаги тебранишлар сони

$$n = \frac{60}{T} = 545,5.$$

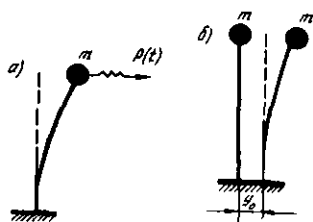
15.2. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР

(Қаршилик кучлари ҳисобга олинмаган ҳол)

Олдинги бобда системанинг эркин тебранишларини кўриб ўтган эдик, унда бутун тебраниш жараёнида системага ташки (уйғотувчи) кучлар таъсир этмаслиги қайд этилганди (тебраниш бошидаги таъсир бундан мустасно). Мазкур бобда эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системаларга вақтнинг ўтиши билан ўзгариб боровчи кучлар таъсирини кўриб чиқамиз.

Бундай кучлар уйғотувчи кучлар, улар таъсиридаги тебранишлар эса мажбурий тебранишлар деб аталади.

15.5- расмда мажбурий тебранишларнинг икки хили тасвирланган. Уларнинг бирида (15.5- расм, а) m массанинг тебраниши уйғотувчи ташки куч $P(t)$ таъсирида,



15.5- расм

иккинчисида эса (15.5- расм, б) таянчнинг қўзғалиши натижасида ҳосил бўлади. Мажбурий тебраниш масалаларида тебранишнинг амплитудасини аниқлаш асосий вазифа ҳисобланади, чунки тебранаётган иншоотда ҳосил бўладиган кучланишлар ана шу амплитудаларга боғлиқдир.

Мажбурий тебранишларнинг умумий тенгламаси ва унинг ечими. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системага

$$P = P(t)$$

уйғотувчи куч таъсир этаяпти деб фараз қилайлик (15.6- расм).

Вақтнинг t лаҳзасида массага таъсир этувчи кучлар шаклда кўрсатилган. Бу ҳол учун ҳаракат тенгламаси куйидагича бўлади:

$$-c(y + y_{\text{ст}}) + mg + P(t) = m\ddot{y},$$

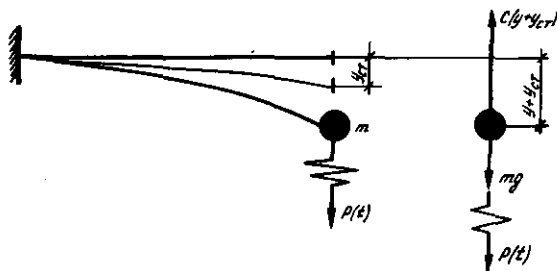
агар $mg = cy_{\text{ст}}$ ва $\omega^2 = \frac{c}{m}$ эканлигини ҳисобга олсак, мажбурий тебранишнинг асосий тенгламаси

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m} \quad (15.24)$$

кўринишни олади.

Оғирлик mg ва статик реакция $cy_{\text{ст}}$ эътиборга олинмаган тақдирда ҳам, яъни куч ва кўчишлар системанинг статик мувозанат ҳолатидан бошлаб ҳисобланганида ҳам худди ана шу (15.24) натижага келган бўлур эдик.

Бир жинсли бўлмаган (15.24) тенгламанинг ечимини икки: 1) эркин тебраниш тенгламасининг (бир жинсли



15.6- расм

тенглама) интегралли ва 2) берилган тенглама (15.24) нинг бирор хусусий интегралли йиғиндисини кўринишида излаш зарур. Хар бир конкрет ҳол учун тенгламанинг ўнг томонига мос хусусий ечим танлаш ўрнига, ихтиёрий доимийларни вариациялаш усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулнинг афзаллиги шундан иборатки, шу йўл билан уйғотувчи куч исталган конун бўйича ўзгарганда, тегишли ечимга эга бўламиз.

Бу усулга кўра (15.24) тенгламанинг хусусий ечими

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (15.25)$$

кўринишида изланади. Бирок бу ҳолда C_1 ва C_2 нинг қийматлари ўзгарувчи деб қаралиши керак. Шундай қилиб, $y(t)$ функциясини аниқлаш масаласи $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини аниқлаш масаласи билан алмаштирилади. Ихтиёримизда фақат биргина (15.24) тенглама бўлганлиги сабабли $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ функцияларини яна бир ихтиёрий тенглама билан боғлаймиз. Бунинг учун (15.25) дан вақт бўйича ҳосил оламиз:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega t + \dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t$$

ҳамда $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ ни қуйидаги ифода билан боғлаймиз:

$$\dot{C}_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \cos \omega t = 0. \quad (15.26.)$$

У ҳолда юқоридаги тезликни аниқлаш тенгламаси бирмунча соддалашади:

$$\dot{y} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t.$$

Тезланишни топамиз:

$$\ddot{y} = -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t + \dot{C}_1 \omega \cos \omega t - \dot{C}_2 \omega \sin \omega t \quad (15.27)$$

(15.25) ва (15.27) ифодаларни (15.24) тенгламага қўйиб,

$$\dot{C}_1 \cos \omega t - \dot{C}_2 \sin \omega t = \frac{1}{m\omega} P(t) \quad (15.28)$$

ни ҳосил қиламиз.

(15.26) ва (15.28) тенгламалардан қуйидаги ҳосилаларни аниқлаймиз:

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{m\omega} P(t) \cos \omega t; \quad \dot{C}_2 = -\frac{1}{m\omega} P(t) \sin \omega t.$$

Уни интеграллаб:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \cos \omega \tau d\tau + B_1 \\ C_2 &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau + B_2 \end{aligned} \right\} \quad (15.29)$$

ни тонамиз. Бу ерда B_1 ва B_2 бошланғич шартларга боғлиқ бўлган доимий сонлардир.

Интеграллаш жараёнида ўзгариб боровчи вақтни 0 дан t гача, интегралнинг ўзгармас деб қаралувчи, юқори чегараси t дан фарқ қилиш учун τ деб белгилаш қабул қилинган.

(15.29) ифодани (15.25) тенгламага қўйиб, берилган (15.24) тенгламанинг умумий интегралига эга бўламиз:

$$y = \frac{1}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t P(\tau) \cos \tau d\tau + \cos \omega t \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] + B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$

$\sin \omega t$ ва $\cos \omega t$ ни интеграл остига киритиб ихчамлаштирсак, масаланинг умумий ечими келиб чиқади:

$$y = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.30)$$

Бундан ҳосила олиб, тезлик тенгламасига эга бўламиз:

$$\dot{y} = B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t + \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.31)$$

B_1 ва B_2 доимийларнинг қиймати ҳаракат бошидаги шартларга боғлиқ. Агар ҳаракат бошида, яъни $t = 0$ бўлганда $y = y_0$, $\dot{y} = v_0$ бўлса, (15.30) ва (15.31) тенгламалардан

$$B_1 = \frac{v_0}{\omega} \text{ ва } B_2 = y_0$$

келиб чиқади.

У ҳолда юқоридаги ечим қуйидаги кўринишни олади:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Бу ердаги дастлабки икки ҳад бошланғич кўчиш y_0 ва бошланғич тезлик v_0 таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди.

Бошланғич шартлар y_0 ва v_0 ноль бўлса, қуйидаги асосий формула келиб чиқади:

$$y = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (15.32)$$

Зарбий куч таъсиридаги мажбурий тебранишлар. Тинч ҳолатдаги системага вақтнинг τ лаҳзасида зарбий куч берилди дейлик. Бу лаҳзада системада кўчиш бўлмайди:

$$y(\tau) = 0,$$

бирок системада, ҳаракат миқдори қонунига биноан, зарбий куч таъсирида

$$v(\tau) = \frac{S}{m}$$

тезлик ҳосил бўлади. Вужудга келган тебранишни эркин тебраниш деб қараш мумкин. У ҳолда кўчиш ва тезлик учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$y = A \sin(\omega t + \lambda);$$

$$v = y = A \omega \cos(\omega t + \lambda).$$

Ифодаларнинг чап томонига бошланғич шартларни, ўнг томонидаги t ҳарфи ўрнига τ ни қўйсак,

$$0 = A \sin(\omega \tau + \lambda),$$

$$\frac{S}{m} = A \omega \cos(\omega \tau + \lambda)$$

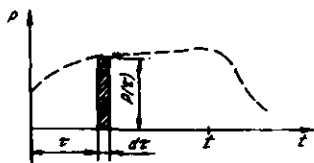
келиб чиқади. Бу тенгламалардан

$$A = \frac{S}{m\omega} \text{ ва } \lambda = -\omega \tau$$

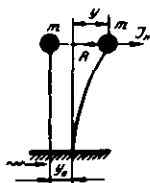
топилади. Буларни ўз ўрнига қўйсак, зарбий куч таъсир этган ҳол учун ҳаракат қонуни келиб чиқади:

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (15.33)$$

Бу ҳолни уйғотувчи куч $P(\tau)$ таъсир этган ҳол билан боғлаймиз. Бунинг учун уйғотувчи кучни чексиз кичик



15.7- расм



15.8- расм

зарблар $P(\tau)d\tau$ нинг кетма-кетлиги деб фараз этамиз. (15.7- расм). Битта зарбий куч таъсирида вақтнинг $t \geq \tau$ лаҳзасида (15.33) формулага асосан

$$\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t-\tau)$$

кўчиш ҳосил бўлади.

Вақтнинг $0 \div t$ оралиғида зарбий кучларнинг кетма-кет таъсири остида ҳосил бўладиган кўчишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаш зарур. Бу эса (15.32) формулага олиб келади.

Замин тебранишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишлар. Мажбурий тебранишлар системанинг асоси (таянчи) қўзғалиши натижасида ҳам вужудга келиши мумкин (15.8- расм). Ер (бино замини) қимирлаганда бино ва иншоотларнинг тебраниши бунга мисол бўла олади.

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг таянчи қўзғалганида унга инерция кучи $J_n = -m\ddot{z}$ ва тикловчи куч $R = -cy$ таъсир этади.

Системанинг динамик мувозанат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{z} + cy = 0. \quad (15.34)$$

Система массасининг тўлиқ кўчиши таянчнинг кўчиши $y_0(t)$ ва массанинг таянчга нисбатан кўчиши $y(t)$ дан ташкил топади:

$$z = y_0 + y; \quad \ddot{z} = \ddot{y}_0 + \ddot{y}. \quad (15.35)$$

z нинг қийматини (15.34) тенгламага қўйиб, унинг барча ҳадларини m га бўлсак,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \quad (15.36)$$

Бу ердаги дастлабки икки ҳад бошланғич кўчиш y_0 ва бошланғич тезлик v_0 таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди.

Бошланғич шартлар y_0 ва v_0 ноль бўлса, қуйидаги асосий формула келиб чиқади:

$$y = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (15.32)$$

Зарбий куч таъсиридаги мажбурий тебранишлар. Тинч ҳолатдаги системага вақтнинг t лаҳзасида зарбий куч берилди дейлик. Бу лаҳзада системада кўчиш бўлмайди:

$$y(\tau) = 0,$$

бирок системада, ҳаракат миқдори конунига биноан, зарбий куч таъсирида

$$v(\tau) = \frac{S}{m}$$

тезлик ҳосил бўлади. Вужудга келган тебранишни эркин тебраниш деб қараш мумкин. У ҳолда кўчиш ва тезлик учун қуйидаги ифодаларга эга бўламиз:

$$y = A \sin(\omega t + \lambda);$$

$$v = y = A\omega \cos(\omega t + \lambda).$$

Ифодаларнинг чап томонига бошланғич шартларни, ўнг томонига t харфи ўрнига τ ни қўйсак,

$$0 = A \sin(\omega \tau + \lambda),$$

$$\frac{S}{m} = A\omega \cos(\omega \tau + \lambda)$$

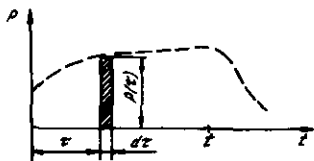
келиб чиқади. Бу тенгламалардан

$$A = \frac{S}{m\omega} \text{ ва } \lambda = -\omega \tau$$

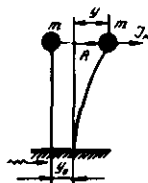
топилади. Буларни ўз ўрнига қўйсак, зарбий куч таъсир этган ҳол учун ҳаракат конуни келиб чиқади:

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (15.33)$$

Бу ҳолни уйғотувчи куч $P(\tau)$ таъсир этган ҳол билан боғлаймиз. Бунинг учун уйғотувчи кучни чексиз кичик



15.7- расм



15.8- расм

зарблар $P(\tau)d\tau$ нинг кетма-кетлиги деб фараз этамиз. (15.7- расм). Битта зарбий куч таъсирида вақтнинг $t \geq \tau$ лаҳзасида (15.33) формулага асосан

$$\frac{P(\tau)d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$$

кўчиш ҳосил бўлади.

Вақтнинг $0 \div t$ оралиғида зарбий кучларнинг кетма-кет таъсири остида ҳосил бўладиган кўчишни аниқлаш учун юқоридаги ифодани интеграллаш зарур. Бу эса (15.32) формулага олиб келади.

Замин тебранишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишлар. Мажбурий тебранишлар системанинг асоси (таянчи) қўзғалиши натижасида ҳам вужудга келиши мумкин (15.8- расм). Ер (бино замини) қимирлаганда бино ва иншоотларнинг тебраниши бунга мисол бўла олади.

Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг таянчи қўзғалганида унга инерция кучи $J_n = -m\ddot{z}$ ва тикловчи куч $R = -cy$ таъсир этади.

Системанинг динамик мувозанат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{z} + cy = 0. \quad (15.34)$$

Система массасининг тўлиқ кўчиши таянчнинг кўчиши $y_0(t)$ ва массанинг таянчга нисбатан кўчиши $y(t)$ дан ташкил топади:

$$z = y_0 + y; \quad \ddot{z} = \ddot{y}_0 + \ddot{y}. \quad (15.35)$$

z нинг қийматини (15.34) тенгламага қўйиб, унинг барча ҳадларини m га бўлсак,

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \quad (15.36)$$

келиб чиқади. Бу тенглама замин кўзғалишидан вужудга келган мажбурий тебранишларни ифодалайди. Бу тенглама ихтиёрий уйғотувчи куч $P(t)$ таъсирида вужудга келган мажбурий тебранишлар тенграмаси (15.24) га ўхшашдир.

(15.36) тенграманинг ечими йиғинди кўринишида ($y = y_1 + y_2$) ифодаланиши мумкин. Бунда y_1 бир жинсли тенграманинг ечимидан топилади, бу эса эркин тебранишлар учун чиқарилган қуйидаги ечимдан фойдаланиш имконини беради (15.10):

$$y_1 = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (15.37)$$

(15.36) нинг хусусий интегрални қуйидаги кўринишга эга:

$$y_2 = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (15.38)$$

Шундай қилиб, (15.36) тенграманинг ечими

$$y = A \sin(\omega t + \lambda) - \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{y}_0(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (15.39)$$

бўлади.

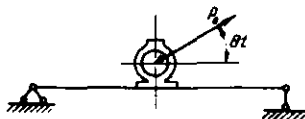
Гармоник куч таъсири. Резонанс. Саноат биноларида баъзан мувозанатлашмаган айланувчи қисми бўлган машиналар ўрнатилади (15.9-расм). Мувозанатлашмаган массанинг ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган марказдан қочма куч P таъсирида балка тебранади. Бу кучнинг вертикал таъсир қилиши

$$P = P_0 \sin \Theta t \quad (15.40)$$

бўлади. Бу ерда Θ ротор айланишининг бурчак тезлиги. Формуладан кўриниб турибдики, уйғотувчи кучнинг балкага таъсири гармоник қонун асосида ўзгаради.

Бундай куч таъсирида вужудга келадиган тебраниш жараёнини математик кўринишда ифодалаш учун (15.32) формуладан фойдаланамиз:

$$y = \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin \Theta t \sin \omega(t - \tau) d\tau, \quad (15.41)$$



15.9-расм

$\omega \neq 0$ хол учун интегралнинг ечими

$$y = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \Theta^2)} \left(\sin \Theta t - \frac{\Theta}{\omega} \sin \omega t \right)$$

бўлади.

Бу формулага $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ва $y_{\text{ст}} = \frac{P_0}{c}$ белгилаш киритсак,

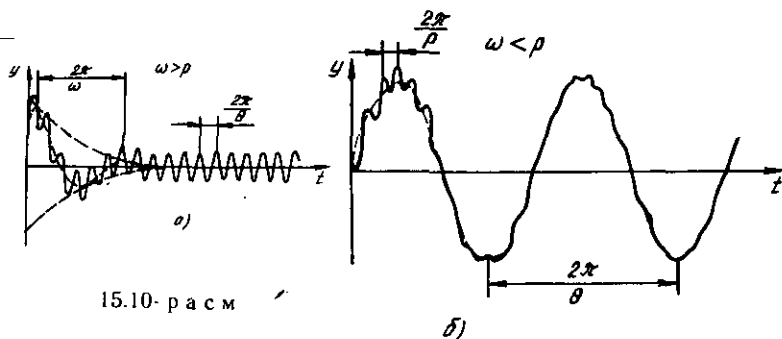
$$y = \frac{y_{\text{ст}}}{1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2}} \left(\sin \Theta t - \frac{\Theta}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (15.42)$$

келиб чиқади. Бу ерда $y_{\text{ст}}$ — статик куч P_0 таъсирида ҳосил бўлган солқилик.

(15.42) формуланинг таҳлили, бошланғич шартлар ноль бўлганда, системада икки қисмдан иборат мураккаб тебраниш вужудга келишини кўрсатади: кавс ичидаги биринчи ҳад уйғотувчи куч такрорлиги бўйича бўладиган тебранишни; иккинчи ҳад эса хусусий тебраниш такрорлиги ω билан бўладиган тебранишни ифодалайди. Шунга кўра биринчиси — мажбурий, иккинчиси — эркин тебраниш деб аталади.

Реал конструкцияларда нозластик қаршилик кучлари таъсирида эркин тебранишлар (иккинчи ҳад) вақт ўтиши билан сўниб боради: мажбурий тебранишлар эса аввалги амплитуда билан давом этаверади.

Вақт ўтиши билан эркин тебранишларнинг сўниб бориши (б) ҳамда икки хил тебранишнинг қўшилиш жараёни (а) 15.10-расмда тасвирланган. Шаклдан кўри-
ниб турибдики, $0 > \omega$ ёки $\Theta < \omega$ бўлишидан қатъи назар, эркин тебранишлар жараённинг бошидаёқ сўниб қолади. Шунинг учун ечимнинг доимий — сўнмайдиган қисмини таҳлил қилиш билан чегараланамиз:



15.10-расм

$$y = \frac{y}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t. \quad (15.43)$$

Бинобарин, мажбурий тебранишлар уйғотувчи куч частотаси билан тебранади ва бу куч гўё система ҳаракатини «ўз амрига бўйсундиргандек» кўринади. Мажбурий тебраниш амплитудаси (динамик солқилик)

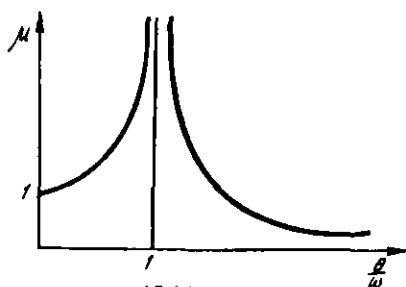
$$A = \frac{y_{\text{ст}}}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|} \quad (15.43')$$

уйғотувчи куч P_0 нинг статик таъсирида ҳосил бўлган солқилик $y_{\text{ст}}$ дан фарқ қилади. Уйғотувчи куч таъсирининг динамик эффекти динамик коэффициент деб аталувчи қуйидаги нисбат билан аниқланади:

$$\mu = \frac{A}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|}. \quad (15.44)$$

Динамик коэффициент такрорликлар нисбати $\frac{\theta}{\omega}$ га боғлиқ микдордир. 15.11-расмда μ билан $\frac{\theta}{\omega}$ орасидаги боғланиш график кўринишда тасвирланган.

Уйғотувчи куч такрорлиги θ хусусий тебраниш такрорлиги ω дан анча кичик бўлса, $\mu \rightarrow 1$, динамик солқилик A статик солқилик $y_{\text{ст}}$ га яқинлашади. $\theta < \omega$ чегарада θ нинг ўсиши билан динамик коэффициент μ нинг қиймати тез ўсиб боради; бу ҳол тебраниш амплитудаси A нинг ўсишини билдиради. Агар $\theta > \omega$ бўлса, (15.44) формулага



15.11-расм

биноан $A < 0$ бўлади; бу эса тебраниш амплитудаси уйғотувчи кучга карама-қарши йўналганлигини билдиради.

Уйғотувчи куч такрорлиги билан хусусий тебраниш такрорлиги тенг бўлган ҳол ($\theta = \omega$) резонанс дефаталади. Бунда $\frac{\theta}{\omega} = 1$ бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси чексизликка интилади. Қаршилиқ (диссипатив) кўрсатувчи кучлар ҳисобга олинмаганлиги туфайли шундай ҳулосага келинди. Бироқ реал конструкцияларда қаршилиқ кўрсатувчи кучларнинг мавжудлиги амплитуданинг чекли бўлишига олиб келади; амплитуда чекли, айни бир вақтда катта кийматга эга бўлади. Шунинг учун резонанс ҳолати иншоот учун хавфли саналади.

Осма кўприк сингари баъзи реал иншоотларда энергиянинг сочилиши (қаршилиқ кўрсатувчи кучлар) жуда кичик бўлади. Бундай ҳолларда унча катта бўлмаган уйғотувчи куч иншоотда хавфли резонанс тебранишларини уйғотиш мумкин. Масалан, шахдам қадам ташлаб келаётган пиёда аскарлар кўприкка етганда қадамларини ўзгартириб тартибсиз юра бошлайдилар. Чунки қадам зарби кўприкнинг хусусий тебраниш такрорлиги билан бир хил бўлиб қолса, кўприк резонанс тебранишларига учраб, бузилиш мумкин. Тарихда бундай ҳоллар учраб туради. 1831 йили Манчестрда (Англия) Ирвель дарёсига қурилган осма кўприк 60 кишининг қадами зарбидан бузилиб тушган. 1868 йилда Чатамада Британия денгиз пиёда аскарлари ўтаётганда кўприк босиб қолган. 1850 йилда Анжердаги осма кўприкда катта фожиа рўй берган; 500 кишида иборат француз пиёда аскарлари батальони ўтаётганда кўприк бузилиб, 226 киши ҳалок бўлган.

Резонанс тебранишларини сўндиришнинг икки хили йўли бор: бири иншоотнинг хусусий тебраниш такрорлигини уйғотувчи куч такрорлигидан фарқли қилиб танлаш иккинчиси, иншоотда демпфер (сўндиргич)ларни кўпайтириш.

15.3. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАРГА ҚАРШИЛИК КУЧЛАРИНИНГ ТАЪСИРИ

Қаршилиқ кучларининг эркин тебранишларга сезиларли даражада таъсир этишини олдинги саҳифаларда кўриб ўтган эдик. Мазкур сарлавҳада қаршилиқ кучлар мажбурий тебранишларга қай даражада таъсир этишини кўриб ўтамиз.

Аввал ҳаракат дифференциал тенгламасининг умумий ечими билан танишиб чикамиз, сўнгра системага кўрсатиладиган гармоник куч таъсирини батафсил кўриб ўтамиз.

Қаршилиқ кучлари эътиборга олинса, мажбурий тебранишларнинг асосий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{m}. \quad (15.45)$$

Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишлар тенгламаси (15.17) дан баробарнинг ўнг томони билан, қаршилиқ ҳисобга олинмаган мажбурий тебранишлар тенгламаси (15.24) дан чап томондаги иккинчи ҳад билан фарқ қилади. Система тебранишига қаршилиқ кучларининг таъсири ана шу иккинчи ҳад орқали ҳисобга олинади.

Олдинги параграфдаги сингари уйғотувчи куч $P(t)$ ни чексиз кичик зарблар $P(\tau)d\tau$ кетма-кетлиги деб қабул қилсак, у ҳолда юқоридаги дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишни олади:

$$y(t) = \frac{1}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin [\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} (t - \tau)] d\tau \quad (15.46)$$

Бу формула $P(t)$ ҳар қандай қонун бўйича ўзгарганда ўз кучини саклайди; $\alpha=0$ бўлганда (15.32) формула келиб чиқади.

(15.46) формулани уйғотувчи ташки кучнинг гармоник қонуни бўйича:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t$$

ўзгарувчи ҳолга татбиқ этамиз.

Бундай ҳол учун дифференциал тенглама

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m} \quad (15.47)$$

кўринишга эга бўлади. Маълумки, бундай тенгламанинг интегралли икки қисмдан иборат бўлади: 1) бир жинсли тенгламанинг интегралли (яъни, тенгликнинг ўнг томони ноль бўлган ҳол); 2) умумий тенгламанинг (15.47) хусусий интегралли.

Бир жинсли тенгламанинг ечимини (15.18) илгари кўриб ўтган эдик. Бу тенглама сўнувчи эркин тебранишларни ифодалашини ва эркин тебранишлар жараёни-

нинг бошидаёк сўниб қолишини биламиз. Шунга кўра, мажбурий тебранишларнинг стационар қисмини ифода этувчи (15.47) тенгламанинг хусусий ечими билан чекланамиз:

$$y = a \sin \theta t + b \cos \theta t. \quad (15.48)$$

Шуни назарда тутиш керакки, a ва b нинг қийматлари тегишлича танланган тақдирдагина (15.48) ифода (15.47) тенгламанинг ечими бўла олади. Бунинг учун (15.48) дан икки марта ҳосила олиб:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a\theta \cos \theta t - b\theta \sin \theta t; \\ \ddot{y} &= -a\theta^2 \sin \theta t - b\theta^2 \cos \theta t; \end{aligned}$$

(15.47) га қўямиз:

$$\begin{aligned} -a\theta^2 \sin \theta t - b\theta^2 \cos \theta t + 2a\theta\alpha \cos \theta t - 2b\theta\alpha \sin \theta t + a\omega^2 \sin \theta t, \\ + b\omega^2 \cos \theta t = \frac{P_0}{m} \sin \theta t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ёки} \quad & \left(-a\theta^2 - 2b\theta\alpha + \theta\omega^2 - \frac{P_0}{m} \right) \sin \theta t + \\ & + (-b\theta^2 + 2a\theta\alpha + b\omega^2) \cos \theta t = 0. \end{aligned}$$

Кавс ичидаги ҳадлар алоҳида олинганда нолга тенг бўлсагина ҳосил бўлган тенглама t нинг ҳар қандай қийматида қаноатлантирилади. Бу эса ўз навбатида қуйидаги икки тенгламага олиб келади:

$$a(\omega^2 - \theta^2) - 2b\theta\alpha = \frac{P_0}{m};$$

$$b(\omega^2 - \theta^2) + 2a\theta\alpha = 0;$$

бу ердан

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{P_0(\omega^2 - \theta^2)}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + \theta^2\alpha^2];} \\ b &= \frac{2P_0\theta\alpha}{m(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2\alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.49)$$

a ва b доимий сонларнинг мана шу қийматларида (15.48) ифода (15.47) нинг ечими ҳисобланади.

a ва b ни бошқа ўзгармовчилар A ва γ билан алмаштирсак, (15.48) ечим янада ихчамлашади:

$$\left. \begin{aligned} a &= A \cos \gamma \\ b &= -A \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (15.50)$$

Буни (15.48) га қўямиз:

$$y = A \sin \theta t \cos \gamma - A \sin \gamma \cos \theta t = A \sin (\theta t - \gamma) \quad (15.51)$$

(15.49) ва (15.50) ифодалардан фойдаланиб A ва γ нинг қийматини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{y_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{20\alpha}{\omega^2 - \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (15.52)$$

Бу ерда γ — бошланғич фаза.

Биринчи формулада $\frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{C} = y_{\text{ст}}$ эканлиги ҳисобга олинган.

Мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг статик солкилик $y_{\text{ст}}$ га нисбати, аввал (15.44) кўриб ўтганимиздек, динамик коэффициент деб аталади:

$$\mu = \frac{A}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\theta^2\alpha^2}{\omega^4}}} \quad (15.53)$$

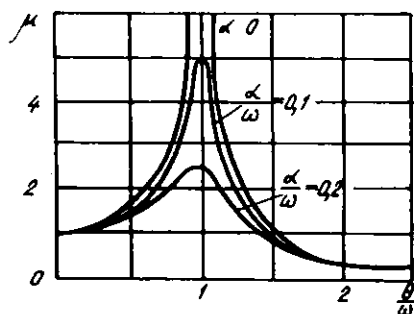
Динамик коэффициент μ нинг бу қиймати билан аввалги (15.44) қийматининг фарқи шундаки, бу қийматда система тебранишига қаршилик килувчи кучларнинг таъсири ҳисобга олинган. Ўйғотувчи куч такрорлиги θ га ҳар қандай қиймат берганда ҳам μ ҳеч қачон чексиз бўлмайди. μ нинг қиймати энди θ/ω дан ташқари α/ω га ҳам боғлиқ. Буларнинг ўзаро муносабати 15.12-расмда график кўринишда тасвирланган.

$\alpha = 0$ бўлганда 15.11-расмдаги ҳол келиб чиқади, яъни $\mu = \infty$ бўлади. Аммо $\alpha \neq 0$ бўлганда μ нинг энг катта қиймати ҳам чекли бўлади. Қаршилик кучлари резонанс зонасида ўзининг таъсирини кучлироқ намоён қилади.

$\omega = 0$ деб олсак, 15.53 формуладан динамик коэффициентнинг юқори қиймати келиб чиқади:

$$\mu_{\text{max}} = \frac{\omega}{2\alpha} \quad (15.54)$$

Бундан маълум бўлишича, динамик коэффициент сўниш коэффициенти α га тескари пропорционал экан.



15.12-расм

Мавзуимиз охирида замин кўзгалишидан ҳосил бўлган мажбурий тебранишларга қисқача тўхталиб ўтамиз. Маълумки, қаршилик кучлари эътиборга олинмаган ҳолда тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (15.36) кўринишида ва унинг ечими (15.39) кўринишида берилган эди. Юқорида

кўриб ўтилган тенгламалар (15.45) ва (15.39) га қаршилик кучларини ифода этувчи ҳадлар ($2\alpha\dot{y}$) ҳамда ($e^{-\alpha t}$) ни киритсак, тебраниш тенгламаси

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 \quad (15.55)$$

кўринишни, унинг ечими эса

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \gamma) - \frac{1}{\omega} \int_0^t y_0(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (15.56)$$

кўринишни олади.

Мисол. Узунлиги $l=3$ м бўлган балканинг ўртасига ўрнатилган мувозанатлашмаган двигателнинг вазни $Q=4$ кН, айланишлар сони $n=450$ айл/мин. Двигателдан ҳосил бўладиган марказдан қочма кучнинг вертикал ташкил этувчиси $P \sin \theta t$ бўлиб, $P=1$ кН. Балка 12-номерли пўлат қўштаврдан ясалган. Двигатель тўхтовсиз ишлаганда ҳосил бўладиган мажбурий тебранишлар амплитудаси ва кучланишлар аниқлансин (15.1-расм, а га қаранг).

Ечиш. Шу балканинг хусусий тебранишлари такрорлиги аввалги мисолда топилган эди:

$$\omega = 56,6 \text{ с}^{-1}.$$

Мажбурий куч такрорлиги

$$\theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 450}{30} = 47,1.$$

Динамик коэффициент

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{47,1}{56,6}\right)^2} = 3,25$$

Демак, динамик кучдан ҳосил бўладиган кучланиш ва деформация статик кучланиш ва деформациядан 3,25 марта катта бўлар экан.

Балка ўртасининг максимал солкилиги

$$y_{\max} = y_{\text{ст}(Q)} + \mu y_{\text{ст}(P)} = \frac{Ql^3}{48EI} + \mu \frac{Pl^3}{48EI} = \\ = 0,306 + 3,25 \cdot 0,077 = 0,556 \text{ см.}$$

Балка ўртасидаги максимал кучланиш

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ст}(a)} + \mu \sigma_{\text{ст}(p)} = \frac{Ql}{4W} + \mu \frac{Pl}{4W} = 93049,1 \text{ кН/м}^2.$$

СГС бирликлар системасида $\sigma_{\max} = 930,5 \text{ кГ/см}^2$.

16- боб

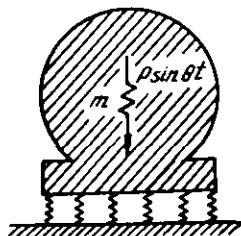
ТЕБРАНИШЛАР НАЗАРИЯСИНING ТЕХНИКАГА ТАДБИҚИ

Тебранишларнинг техникадаги ўрни ҳақида гап борганда уларнинг фойдали ва зарарли турлари мавжуд эканлигини таъкидлаб ўтмоқ зарур. Мутахассислар тебранишнинг зарарли кўринишига қарши кураш воситаларини яратиш билан бирга, унинг фойдали томонини инсон манфаатига бўйсундиришга интилиб келадилар. Қуйида ана шулар ҳақида баъзи маълумотларни баён этамиз.

16.1. ТЕБРАНИШНИ ЮТУВЧИ АМОРТИЗАТОРЛАР

Бирор m массага қўйилган вертикал титратувчи кучнинг таъсирини юмшатиш мақсадида масса билан таянч орасига юмшок қайишқок қатлам (амортизаторлар) жойланади (16.1- расм).

(15.43) формулага кўра массанинг тебраниш амплитудаси кичик бўлиши учун пружинанинг хусусий тақорлиги таъсир



16.1- расм

этаётган куч такрорлигидан анча кичик бўлиши керак.

Масалан, $\frac{\theta}{\omega} = 10$ деб олсак, энг катта амплитуда

$$A = \frac{y_{\text{ст}}}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right|} = \frac{y_{\text{ст}}}{|1 - 10^2|} = \frac{y_{\text{ст}}}{99}.$$

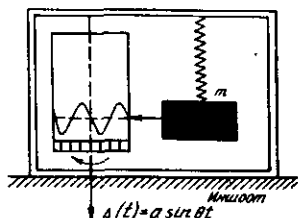
бўлади. Бу эса статик солкиликнинг атиги бир фоизини ташкил этади. Қаршилиқ, кучлари ҳисобга олинса, амплитуда янада кичраяди.

16.2. ВИБРОГРАФ

Виброграф иншоотлар тебранишини ёзиб оладиган асбобдир. Назарий жиҳатдан у эркинлик даражаси битта бўлган система бўлиб, унинг тарҳи 16.2- шаклда тасвирланган. Кути кўринишидаги корпуснинг юқори қисмига юмшоқ пружина ёрдамида осиб қўйилган оғир масса m вибрографнинг асосий элементи ҳисобланади. Массага маҳкамланган қалам айланувчи барабанга тегиб туради. Виброграф тебранувчи иншоотга шундай ўрнатиладики, барабаннинг ўқи тебраниш йўналиши билан бир хил бўлсин. Асбоб корпуси иншоот билан бирга тебранади, масса эса пружина бўлганлиги туфайли деярли қўзғалмас, бўлиб тураверади. Шунда қалам барабанга ўралган лентага тебранишнинг эгри чизигини чизади.

Массанинг қўзғалмаслигини таъминлаш учун (15.43) формуладаги θ/ω нисбатни мумкин қадар катта олиш лозим. Агар, аввалгидаги сингари, $\theta/\omega = 10$ деб олинса, у ҳолда асбоб орқали олинган тебраниш ёзувида йўл қўйилган хатолик бир фоизни ташкил этади:

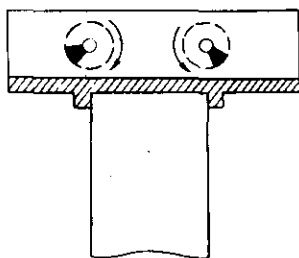
$$A = \frac{1}{99} a \sin \theta t.$$



16.2- расм



16.3- расм



16.4- расм

16.3. ТАҚРОРЛИК ЎЛЧАГИЧИ (ЧАСТОТОМЕТР)

16.3- расмда резонанс қондасига асосланган частотометр (такрорлик ўлчагич) нинг тарҳи тасвирланган. Частотометр асосий корпусга маҳкамланган ҳар хил узунликдаги юпка пластинкачалардан ташкил топган. Пластинкачаларнинг учига қўшимча массалар маҳкамланган. Пластинкачаларнинг узунликлари ҳар хил бўлганлиги сабабли хусусий такрорликлари ҳам ҳар хил бўлади, улар олдиндан ҳисоблаб қўйилади. Частотометрнинг корпуси тебранаётган объектга ўрнатилади. Натижада кинематик таъсир остида пластинкачалар тебранади. Хусусий такрорлиги объект такрорлигига яқин бўлган пластинкача катта амплитуда билан тебрана бошлайди, яъни резонансга тушади. Ўлчанаётган тебраниш такрорлиги шу йўсинда аниқланади.

16.4. ПОЙДЕВОР ҚОЗИҚЛАРИНИ ВИБРАЦИОН УСУЛДА ҚОҚИШ

Узунлиги бир неча метр бўлган металл ёки темир-бетон қозикларни ерга зарб билан қоқиш кўп вақт талаб қиладиган мураккаб жараёндир. Тебранма ҳаракатга асосланган вибрацион усул эса қозикни қисқа вақт ичида керакли чуқурликкача осонгина қоқиш имконини беради.

Қозикнинг юқори учига тебраниш уйғотувчи оғир вибратор ўрнатилади (16.4- расм). Вибраторнинг параллел жойлашган иккита вали қарама-қарши йўналишда айланади. Валнинг ҳар бирига дебаланс ўрнатилган. Валлар айланганда марказдан қочма кучлар ҳосил бўлади. Дебаланслар бир-бирига нисбатан шундай жой-

лаштириладики, бунда марказдан қочма кучларнинг горизонтал тузувчилари ўзаро мувозанатлашади, вертикал тузувчилари эса бир томонга йўналганлиги туфайли қўшилади.

Шундай қилиб, вибратор вақт ўтиши билан синус конуни бўйича ўзгарадиган қўшимча вертикал кучлар уйғотади. Тадқиқотларнинг кўрсатишича, козиқни ерга киритувчи асосий сабаб — оғирлик кучи бўлиб, тебранишлар қаршилик кучини камайтириб беради холос.

16.5. ВИБРАЦИОН СУВ КЎТАРГИЧЛАР

Баъзан чуқур кудуклардан сув тортиб чиқаришда оддий насослар ўрнига вибрацион сув кўтаргич (водоподъемник) лардан фойдаланилади (16.5- расм).

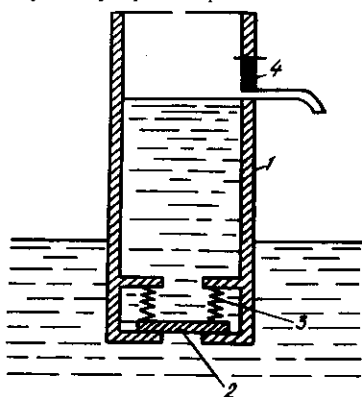
Тик ўрнатилган труба 1 нинг туби кудукдаги сувга ботиб туради. Труба тубидаги тешик пружинали 3 копкок 2 билан беркитилади. Трубанинг юкори қисмига сув оқиб тушадиган жўмрак 4 ўрнатилади. Шу жўмраккача сув қуйилади. Агар трубани катта тезлик билан пастга силжитсак, у ҳолда ташқи босим остида копкок очилади, трубага сув қиради, кўтарилган сув жўмрак орқали ташқарига оқиб тушади.

Сув кўтаргич ўз иши жараёнида узлуксиз равишда юкорига ва пастга кўтарилиб тушиб туради. Кўтарилиш ва тушиш масофаси мумкин қадар қиска олинади. Ҳар бир циклда остки тешикдан маълум миқдор сув кириб, шунча сув жўмрак орқали ташқарига чиқади. Цикллар даврий равишда такрорлангани сабабли сув жўмракдан тўхтовсиз тушади.

Трубани ҳаракатга келтириш учун дебалансли ёки электромагнитли вибраторлардан фойдаланилади.

Техникада вибрацион сув кўтаргичларнинг бошқа хиллари ҳам ишлатилади.

Биз вибротехник жараёнларнинг айрим хиллари билан танишиб чиқдик. Аммо тебранишларнинг техникада қўлланилиш қўлами анча кенг ва ранг-барангдир. Маса-



16.5- расм

лан, улар оғма новдан тушаётган жисмнинг ҳаракатини, шунингдек бетоннинг бункердан тушишини тезлатиш, сочилувчан жисмларни пастдан юқорига ташиш, қаттиқ жисмларни майдалаш, ҳар хил материалларни навларга ажратиш, турли жисмларни аралаштириш каби ишларда самарали фойдаланилади.

17- боб

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ БИР НЕЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

17.1. ҚАРШИЛИКСИЗ МУҲИТДА СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Бир неча йиғиқ массаларга эга бўлган эластик консолнинг эркин тебраниши билан танишиб чиқамиз (17.1- расм). Бу масалани ҳал этишда ҳам бир массали системадаги сингари Даламбер коидасидан фойдаланамиз: консол балка тебранганда $m_1, m_2, \dots, m_n$ массалар йўналишида

$$-m_1\ddot{y}_1; -m_2\ddot{y}_2; \dots, -m_n\ddot{y}_n$$

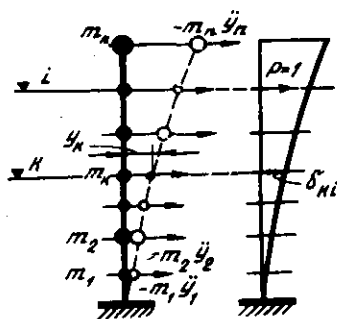
инерция кучлари ҳосил бўлади.

Ҳисоб ишларини осонлаштириш мақсадида, қурилиш механикасида кенг қўлланадиган, бирлик кўчиш δ_{ki} тушунчасидан фойдаланамиз. δ_{ki} — балка k нуктасининг кўчиши бўлиб, бу кўчиш балканинг i нуктасига қўйилган бирлик куч $P=1$ таъсирида ҳосил бўлади. Агар ташки куч $P_i \neq 1$ бўлса, у ҳолда P_i таъсиридаги тўлиқ кўчишни аниқлаш учун бирлик кўчиш ташки кучга кўпайтирилади.

$$y_k = P_i \delta_{ki} \quad (17.1)$$

Бир вақтнинг ўзида балкага бир қанча кучлар $P_1, P_2, \dots, P_n$ қўйилган бўлса, балка k нуктасининг тўлиқ кўчиши алоҳида кўчишлар йиғиндиси сифатида аниқланади.

$$y_k = P_1 \delta_{k1} + P_2 \delta_{k2} + \dots + P_n \delta_{kn}. \quad (17.2)$$



17.1- расм

Биз текшираётган системада (17.1-расм) ташқи кучлар P_i ўрнида инерция кучлари ($-m_n \ddot{y}_n$) турибди. Шунга кўра, бу система учун (17.2) формула куйидагича ёзилади:

хар бир массанинг кўчиши кўйидагича топилади:

Бу тенгламалар системасининг хусусий интегралли

кўринишда қабул қилиниши мумкин.

(17.4) ифодани тенгламалар системаси (17.3) га қўйиб, номаълум амплитуда A_k ва такрорлик (ω) га нисбатан бир жинсли алгебрик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$A_1=A_2=...=A_n=0$ бўлганда (17.5) тенгламалар системаси қаноатланса-да, қўйилган масалага ечим бўла олмайди, чунки бунда балка тинч ҳолатда бўлади.

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 & \dots & m_n\delta_{1n}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) & \dots & m_n\delta_{2n}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & \dots & (m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (17.6)$$

332

$$1 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \dots + (-1)^n a_n\omega^{2n} = 0. \quad (17.7)$$

Бу тенглама такрорликлар тенгламаси ёки асрий тенглама деб аталиб, n та ҳақиқий ва мусбат илдизга эга бўлади. Илдизларни $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ деб белгилаймиз ва такрорликлар учун қуйидаги n та жавобга эга бўламиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_1^2}; - \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_2^2}; + \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_n &= \sqrt{\omega_n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Система эркин тебранишларининг барча такрорликлари мажмуаси такрорликлар спектори деб аталади. Буларнинг ичида энг кичиги биринчи ёки асосий такрорлик дейилади. Амалий ишларда дастлабки уч такрорлик муҳим аҳамиятга эга бўлади.

(17.3) тенгламалар системасининг умумий ечими (17.4) кўринишдаги хусусий ечимларнинг йиғиндисидан иборат:

$$y_k = A_{k1}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{k2}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{kn}\sin(\omega_n t + \lambda_n). \quad (17.9)$$

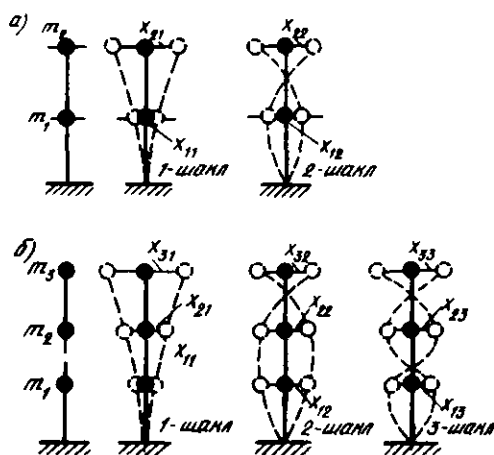
Буни ҳар бир масса кўчиши учун алоҳида ёзамиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{1n}\sin(\omega_n t + \lambda_n); \\ y_2 &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{2n}\sin(\omega_n t + \lambda_n); \\ y_n &= A_{n1}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{n2}\sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{nn}\sin(\omega_n t + \lambda_n). \end{aligned} \quad (17.10)$$

A_{ki} нинг биринчи индекси координатани, иккинчиси — такрорлик номерини билдиради.

(17.10) тенгламалардан кўриниб турибдики, ҳар бир масса мураккаб ҳаракатда бўлиб, бу ҳаракат такрорлиги турлича бўлган тебранишларнинг (синусоидаларнинг) йиғиндисидан ташкил топади. Кўшилувчиларнинг сони хусусий такрорликлар сонига, яъни системанинг эркинлик даражасига тенг.

Умуман олганда система тебранишининг формаси (солкилик шакли) ўзгарувчан бўлиб, амплитудалар



17.2- расм

нисбати узлуксиз равишда ўзгариб боради. Бирок ҳамма вақт система ҳаракатининг бошланғич шартларини, барча массаларни маълум бир такрорлик ω бўйича тебранадиған қилиб олиш мумкин. Бундай тебраниш асосий ёки нормал тебраниш деб, тебраниш шакли эса асосий шакл деб аталади. Айрим муаллифлар буни хусусий шакл деб атайдилар.

Тебранишнинг асосий шаклларида исталган массанинг амплитудалари нисбати ҳар доим ўзгармас бўлиб, вақтга боғлиқ бўлмайди. Бинобарин, асосий шакллар амплитудалар ёки уларнинг нисбатлари орқали аниқланади.

Аксарият ҳолда эркин тебранишлар асосий шаклдаги тебранишларнинг комбинациясидан иборат бўлади. Ўз навбатида ҳар бир хусусий такрорлик ўзига мос асосий тебраниш шаклига эга, яъни биринчи такрорликка — биринчи, иккинчи такрорликка — иккинчи шакл ва ҳоказо мос келади (17.2- расм). Системанинг эркинлик даражаси ортган сари тебраниш шаклидаги тўлқинлар сони ҳам ортиб бораверади. Қисқаси, асосий шакллар сони системанинг эркинлик даражаси n га тенг бўлади.

Системанинг мураккаб тебранма ҳаракатига ҳар бир тебраниш шаклининг улуши, эркин тебранишларни вужудга келтирган бошланғич шартларга боғлиқ.

Тебраниш асосий шакллариининг муҳим хоссларидан бири уларнинг ортогоналлигидир. Бу хоссага кўра бир

У ҳолда (17.11) тенгламалар бир жинсли системага айланади:

Бүвинг ечими:

ДЕМАК

Бошланғич фазанинг бу кийматида (17.11) тенгламалар қўйидаги кўринишни олади:

Бошланғич кўчишлар $y_1(0)$, $y_2(0)$, ..., $y_n(0)$ маълум бўлса, номаълум n та амплитудалар A_{11} , A_{12} , ... қуйидаги тенгламалардан топилади:

336

17.2. ҚАРШИЛИКЛИ МУҲИТДА СИСТЕМАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШИ

Эркинлик даражаси бир неча бўлган системанинг сўнувчи тебранишларини кўриб чиқамиз. Масса m_k ҳаракатига қаршилик қилувчи кучларни ҳаракат тезлигига пропорционал деб оламиз. Тебраниш тенгламаси сифатида (17.2)¹ дан фойдаланамиз; бироқ бу тенгламага қаршилик кучларини ҳисобга олувчи $2\alpha_i m_i \dot{\delta}_{ki} \dot{y}_i$ ҳад киритамиз:

$$y_k = -m_1 \delta_{k1} (\ddot{y}_1 + 2\alpha_1 \dot{y}_1) - m_2 \delta_{k2} (\ddot{y}_2 + 2\alpha_2 \dot{y}_2) - \dots - m_n \delta_{kn} (\ddot{y}_n + 2\alpha_n \dot{y}_n). \quad (17.16)$$

Бу ерда (15.16)¹ га биноан

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{2m_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\beta}{2m_2}; \quad \dots; \quad \alpha_n = \frac{\beta}{2m_n}.$$

Одатда, сўниш коэффициенти α_i барча шакллар учун бир хил олинади, шунга кўра $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ бўлади. Буни эътиборга олсак, ҳаракатнинг дифференциал тенгламалар системаси қиска кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$y_k + m_1 \delta_{k1} (\ddot{y}_1 + 2\alpha \dot{y}_1) + m_2 \delta_{k2} (\ddot{y}_2 + 2\alpha \dot{y}_2) + \dots + m_n \delta_{kn} (\ddot{y}_n + 2\alpha \dot{y}_n) = 0, \\ (k = 1, 2, \dots, n). \quad (17.17)$$

Бу тенгламаларнинг ечими

$$y_k = A_k e^{-\alpha t} \sin(\omega_i t + \lambda_i) \quad (17.18)$$

кўринишда аниқланади.

Бундан кейинги амаллар қаршиликсиз, муҳитдаги системадаги каби бўлади. Натижада кўп массали системанинг сўнувчи тебранишлари учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$y_k = A_{k1} e^{-\alpha t} \sin(\bar{\omega}_1 t + \lambda_1) + A_{k2} e^{-\alpha t} \sin(\bar{\omega}_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{kn} e^{-\alpha t} \sin(\bar{\omega}_n t + \lambda_n). \quad (17.19)$$

Бу ерда

$$\bar{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}. \quad (17.20)$$

17.3. ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ИККИТА ВА УЧТА БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

Эркинлик даражаси иккита ва учта бўлган системалар эркинлик даражаси бир нечта бўлган системаларнинг хусусий ҳолидир. Аммо бундай системалар учун тузиладиган тенгламалар оддий бўлганлиги туфайли ечимларни тугал кўринишгача етказса бўлади. Шу сабабли бундай системалар устида алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Эркинлик даражаси иккита бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Тебранишлар каноник тенгламаси (17.5) икки массали система учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2m_2\delta_{12}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Аниқловчи (17.6) эса қуйидагича ифодаланади:

$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (17.22)$$

Аниқловчини ёйганда келиб чиқадиган такрорлик тенгламаси биквадрат кўринишда бўлади.

$$\begin{aligned} \omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 - \omega^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 &= 0. \\ \omega^2 = Z \text{ деб белгиласак,} & \end{aligned} \quad (17.23)$$

$$z^2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_1m_2 - z(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0$$

келиб чиқади. Бунинг ечими

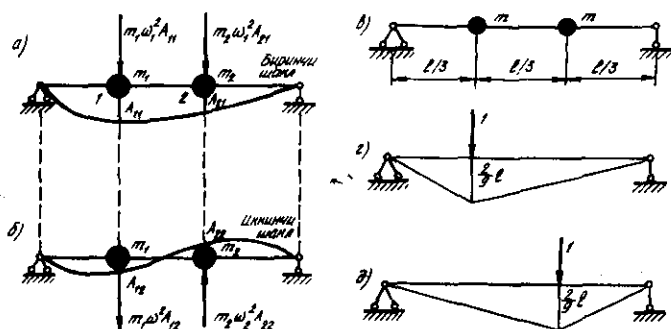
$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}$$

бўлади. Илдиз остини ўзгартирамиз:

$$z_{1,2} = \frac{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \mp \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (17.24)$$

Бундан биринчи ва иккинчи такрорлик келиб чиқади:

$$\omega_1 = \sqrt{z_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{z_1}.$$



17.3- расм

z_1 ни аниқлашда (17.24) ифода «минус», z_2 ни аниқлашда эса «плюс» ишора билан олинади.

Эркин тебранишлар дифференциал тенгламаларининг умумий ечими (17.10) га кўра

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_2 &= A_{21}\sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22}\sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.25)$$

кўринишга эга.

Хар бир тебраниш шакли ўз такрорлигига эга: A_{11} , A_{21} — такрорлиги ω_1 бўлган биринчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3- расм, а), бу ерда биринчи индекс — координата номерини, иккинчи индекс — такрорлик номерини билдиради. A_{12} , A_{22} — такрорлиги ω_2 бўлган иккинчи шакл тебранишларининг амплитудаси (17.3- расм, б).

Тебранишнинг асосий шакли деганда, $\sin(\omega_i t + \lambda_i) = 1$ бўлганда, бирор хусусий такрорлик билан тебранаётган система деформациясининг шакли тушунилади.

Бинобарин, хар бир асосий шаклни юқори инерция кучлари таъсирида ҳосил бўладиган солкилик сифатида аниқлаш мумкин: биринчи шакл 17.3- расм, а да, иккинчи шакл эса 17.3- расм, б да тасвирланган кучлар таъсирида ҳосил бўлади. Хар иккала асосий шакл ўзаро ортогоналдир, яъни биринчи шакл кучларининг иккинчи шакл кўчишларида бажариши мумкин бўлган иш нолга тенг.

Биринчи гармоника амплитудалари нисбатини $x_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$, $x_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}}$ деб белгиласак, (17.25) тенглама

қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_2 &= x_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + x_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.26)$$

Бу ерда хусусий такрорликлар ω_1 ва ω_2 ҳамда тебраниш шаклининг характеристикаси деб аталувчи амплитудалар нисбати x_{21} ва x_{22} фақатгина тебранаётган системанинг параметрларига боғлиқ бўлган микдорлардир. A_{11} , A_{12} , λ_1 ва λ_2 нинг қийматлари ҳаракат бошидаги кўчиш ва тезликни ифодаловчи бошланғич шартлардан топилади.

Масалан, $t=0$ бўлганда

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0; \\ \dot{y}_1(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= v_0; \end{aligned}$$

яъни ҳаракат иккинчи массага зарб берилишдан бошланди, дейлик. У ҳолда (17.26) тенгламадан

$$\begin{aligned} y_1(0) &= A_{11} \sin \lambda_1 + A_{12} \sin \lambda_2 = 0; \\ y_2(0) &= x_{21} A_{11} \sin \lambda_1 + x_{22} A_{12} \sin \lambda_2 = 0; \\ \dot{y}_1(0) &= A_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 + A_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = 0; \\ \dot{y}_2(0) &= x_{21} A_{11} \omega_1 \cos \lambda_1 + x_{22} A_{12} \omega_2 \cos \lambda_2 = v_0. \end{aligned}$$

келиб чиқади. Юқоридаги икки тенгламадан $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; пастдаги икки тенгламадан эса

$$A_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{x_{21} - x_{22}}; \quad A_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{x_{22} - x_{21}}$$

эканлиги маълум бўлади.

Бошланғич шартларни махсус танлаш йўли билан ҳар иккала массани бир хил такрорликда тебранишига эришиш мумкин. Масалан, $A_{12}=0$ бўлганда тебраниш битта гармоника бўйича содир бўлади:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1); \\ y_{21} &= x_{21} A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

ҳамда биринчи асосий тебраниш деб аталади. x_{21} тебранишларнинг биринчи асосий шаклини ифодалайди.

Агар $A_{11}=0$ бўлишига эришилса, иккинчи асосий тебраниш содир бўлади

$$\begin{aligned} y_{12} &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2); \\ y_{22} &= x_{22} A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \quad (17.28)$$

Бу ерда X_{22} тебранишларнинг иккинчи асосий шаклини ифодалайди.

Тебранишларнинг биринчи асосий шаклида ҳар иккала масса ω_1 такрорлик билан бир йўналишда тебранади. Иккинчи асосий шаклда эса массалар ω_2 такрорлик билан қарама-қарши йўналишда тебранади.

Мисол. Иккита бир хил массали вазнсиз балканинг эркин тебранишлари такрорлиги аниқлансин (17.3- расм, в).

Ечиш. Моментларнинг бирлик эпюраларидан Верешчагин қондаси бўйича қўпайтириш йўли билан бирлик қўчишларни топамиз (17.3- расм, г, д).

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{243EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{486EJ}.$$

(17.24) формула берилган масала учун қуйидаги қўринишни олади:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(\delta_{11}^2 - \delta_{12}^2)_m} [2\delta_{11} \pm \sqrt{4\delta_{11}^2 - 4(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2)}],$$

бундан

$$\omega_1 = 5,69 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \quad \text{ва} \quad \omega_2 = 22 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

аниқланади.

Эркинлик даражаси учта бўлган системаларнинг эркин тебранишлари

Уч массали системанинг хусусий тебранишлари тенгламаси (17.5) га асосан қуйидагича бўлади:

$$\left. \begin{aligned} A_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + A_2m_2\delta_{12}\omega^2 + A_3m_3\delta_{13}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{21}\omega^2 + A_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + A_3m_3\delta_{23}\omega^2 &= 0; \\ A_1m_1\delta_{31}\omega^2 + A_2m_2\delta_{32}\omega^2 + A_3(m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.29)$$

Бу тенгламаларнинг аниқловчиси (17.6) га кўра қуйидагича ифодаланади:

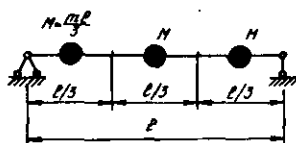
$$D = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) & m_2\delta_{12}\omega^2 & m_3\delta_{13}\omega^2 \\ m_1\delta_{21}\omega^2 & (m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) & m_3\delta_{23}\omega^2 \\ m_1\delta_{31}\omega^2 & m_2\delta_{32}\omega^2 & (m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (17.30)$$

Амплитуда коэффициентлари $X_{kn} = \frac{A_{kn}}{A_{1n}}$ куйидаги тенгламалардан топилади:

$$\left. \begin{aligned} (m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + x_{2n}m_2\delta_{12}\omega^2 + x_{3n}m_3\delta_{13}\omega^2 &= 0; \\ m_1\delta_{21}\omega^2 + x_{2n}(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + x_{3n}m_3\delta_{23}\omega^2 &= 0; \\ m_1\delta_{31}\omega^2 + x_{2n}m_2\delta_{32}\omega^2 + x_{3n}(m_3\delta_{33}\omega^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.31)$$

Бу тенгламалардан бирортаси ташлаб юборилиб, қолган иккитасидан x_{2n} ва x_{3n} номаълум коэффициентлар аниқланади.

Уч массали балка тебранишининг такрорликлари ва асосий шакллари аниқлашга доир мисолни кўриб ўтамиз (17.4-расм).



17.4-расм

Балканинг бирлик кучлар таъсиридаги кўчишлари берилган дейлик:

$$\delta_{11} = \frac{25l^3}{3888EI}; \quad \delta_{22} = \frac{81l^3}{3888EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{39l^3}{3888EI}; \quad \delta_{23} = \delta_{12};$$

$$\delta_{13} = \frac{17l^3}{3888EI}; \quad \delta_{33} = \frac{25l^3}{3888EI}.$$

Балка тебранишларининг каноник тенгламаси (17.29) га кўра

$$\begin{aligned} \left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EI} M - 1 \right) A_1 + \frac{39l^3\omega^2}{3888EI} MA_2 + \frac{17l^3\omega^2}{3888EI} MA_3 &= 0; \\ \frac{39l^3\omega^2}{3888EI} MA_1 + \frac{39l^2\omega^2}{3888EI} MA_2 + \left(\frac{25l^3\omega^2}{3888EI} M - 1 \right) A_3 &= 0; \\ \frac{17l^3\omega^2}{3888EI} MA_1 + \left(\frac{81l^3\omega^2}{3888EI} M - 1 \right) A_2 + \frac{39l^3\omega^2}{3888EI} MA_3 &= 0. \end{aligned}$$

$K_n = \frac{3888EI}{l^3\omega^2 M}$ деб олсак, тенглама ихчамлашди:

$$\left. \begin{aligned} (25 - K_n) A_1 + 39 A_2 + 17 A_3 &= 0; \\ 39 A_1 + (81 + K_n) A_2 + 39 A_3 &= 0; \\ 17 A_1 + 39 A_2 + (25 - K_n) A_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Тенгламалар аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$D = \begin{vmatrix} (25 - K_n) & 39 & 17 \\ 39 & (81 + K_n) & 39 \\ 17 & 39 & (25 - K_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Бунинг ёйилмаси

$$K_n^3 - 132K_n^2 + 1344K_n - 2880 = 0.$$

Тенгламанинг илдизлари: $K_1=120$, $K_2=8$, $K_3=3$.
Эркин тебраниш такрорликлари

$$\omega_n^2 = \frac{3888EI}{l^3 MK_n} = \frac{3888EI}{l^3 \frac{ml}{3} K_n}$$

дан аникланади:

1) биринчи асосий шакл такрорлиги ($K_1=120$)

$$\omega_1 = \sqrt{3888EI \cdot \frac{1}{3} ml^4 \cdot 120} = \frac{9,859}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

2) иккинчи асосий шакл такрорлиги ($K_2=8$)

$$\omega_2 = \sqrt{3888EI \cdot \frac{1}{3} ml^4 \cdot 8} = \frac{38,184}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

3) учинчи асосий шакл такрорлиги ($K_3=3$)

$$\omega_3 = \sqrt{3888EI \cdot \frac{1}{3} ml^4 \cdot 3} = \frac{62,354}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Топилган такрорликлар бўйича (17.31) дан фойдаланиб, асосий шаклларни аниқлаймиз. Бунинг учун (а) тенгламанинг барча ҳадларини A_1 га бўлиб, тенгламани қайта ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} (25 - K_n) + 39x_{2n} + 17x_{3n} &= 0; \\ 39 + (81 - K_n)x_{2n} + 39x_{3n} &= 0; \\ 17 + 39x_{2n} + (25 - K_n)x_{3n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Биринчи асосий шаклни аниқлаш учун (б) тенгламада $K_1 = 120$ деб олинади:

$$\left. \begin{aligned} (25 - 120) + 39x_{21} + 17x_{31} &= 0; \\ 39 + (81 - 120)x_{21} + 39x_{31} &= 0; \\ 17 + 39x_{21} + (25 - 120)x_{31} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Тенгламаларнинг биттаси ортиқча. Учинчисини ташлаб юбориб, колган икkitасидан

$$x_{21} = \frac{95 \cdot 39 + 39 \cdot 17}{39 \cdot 39 + 39 \cdot 17} = 2 \quad \text{ва} \quad x_{31} = \frac{-39 \cdot 39 + 39 \cdot 95}{39 \cdot 39 + 39 \cdot 17} = 1$$

аниқланади. Шундай қилиб, биринчи асосий шаклни қуйидаги микдорлар белгилайди: $A_{21} = 2A_{11}$; $A_{31} = A_{11}$ (17.5-расм, а).

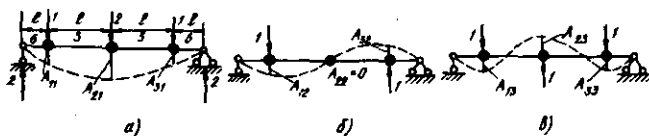
Иккинчи асосий шаклни аниқлашда (б) тенгламадаги K нинг қийматини 8 га тенг деб оламиз:

$$\left. \begin{aligned} (25 - 8) + 39x_{22} + 17x_{32} &= 0; \\ 39 + (81 - 8)x_{22} + 39x_{32} &= 0; \\ 17 + 39x_{22} + (25 - 8)x_{32} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Дастлабки икки тенгламадан

$$x_{22} = \frac{-17 \cdot 39 + 17 \cdot 39}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = 0 \quad \text{ва} \quad x_{32} = \frac{-39 \cdot 39 + 73 \cdot 17}{39 \cdot 39 - 73 \cdot 17} = -1$$

топилади. Асосий шаклни белгиловчи кучлар тархи 17.5-расм, б да берилган.



17.5-расм

$$\begin{aligned}
 y_1 &= A_1 \sin \theta t \\
 y_2 &= A_2 \sin \theta t \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_n &= A_n \sin \theta t
 \end{aligned}
 \tag{17.34}$$

(17.34) ифодаларни (17.33) тенгламага қўйсак, тебраниш амплитудалари $A_1, A_2, \dots, A_n$ ни аниқлайдиган тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= A_1 m_1 \delta_{11} \Theta^2 + A_2 m_2 \delta_{12} \Theta^2 + \dots + A_n m_n \delta_{1n} \Theta^2 + P_k \delta_{1k}; \\
 A_2 &= A_1 m_1 \delta_{21} \Theta^2 + A_2 m_2 \delta_{22} \Theta^2 + \dots + A_n m_n \delta_{2n} \Theta^2 + P_k \delta_{2k}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_n &= A_1 m_1 \delta_{n1} \Theta^2 + A_2 m_2 \delta_{n2} \Theta^2 + \dots + A_n m_n \delta_{nn} \Theta^2 + P_k \delta_{nk};
 \end{aligned} \right\}
 \tag{17.35}$$

Тенглама коэффициентлари (масса m_i , кўчиш δ_{ik} , такрорлик Θ) маълум қийматлар бўлганлиги сабабли, тенгламалар системасини биргаликда ечиб, номаълум n та амплитудани аниқласа бўлади. Амплитудаларнинг аниқланиши ҳар бир массада вужудга келадиган инерция кучларини аниқлаш имконини беради:

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= m_1 A_1 \Theta^2; \\
 J_2 &= m_2 A_2 \Theta^2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 J_n &= m_n A_n \Theta^2.
 \end{aligned} \right\}
 \tag{17.36}$$

Инерция кучлари J_n аниқлангач, динамик эгувчи моментлар эпюрасини қуриш қийин эмас.

18- боб

ЭРКИНЛИК ДАРАЖАСИ ЧЕКСИЗ БЎЛГАН СИСТЕМАЛАР

Юқорида кўриб ўтилган тархларда массали элементлар сони чекли деб қаралди. Иншоотларни бу тарзда тархлаштириш ҳақиқий ҳолатни тўлиқ эътирмайди; реал объектларнинг барча элементлари деформацияланади ва айни пайтда маълум массага ҳам эга. Шунга кўра конструкция тебранишини тадқиқ этишда, унинг массасини узлуксиз тарқалган деб олинса, ҳақиқатга анча яқин бўлади. Бундай ҳолда системанинг эркинлик даражаси чексиз деб қаралади.

Олдинги бобда баён этилганидек, хусусий такрорликлар сони ва уларга мос бўлган тебранишнинг асосий шакллари системанинг эркинлик даражаси сонига тенг бўлади, бинобарин, массаси узлуксиз тарқалган системаларнинг, яъни эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларнинг хусусий такрорликлари ҳамда тебраниш шакллари сони чексиз бўлади.

Эркин тебранишга оид масалаларда системаларнинг хусусий такрорликлари ва уларга мос бўлган тебраниш шакллари аниқлаш амаллари асосий ўрин тутди.

18.1. БАЛКАЛАРНИНГ КЎНДАЛАНГ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Бинокорликда ишлатиладиган тўсинни кўз олдингизга келтиринг. Унинг массаси тўсин узунлиги бўйлаб ёйилган бўлади. Бундай конструкциялар эркинлик даражаси чексиз бўлган системаларга яққол мисол бўла олади.

Балкалар тебранганда уларнинг солқилиги икки ўзгарувчи: кесим координати z ҳамда вақт t нинг функцияси бўлади, яъни

$$y = F(z, t).$$

Материаллар қаршилиги курсидан маълумки, солқилик y билан эгувчи момент M куйидаги дифференциал боғланишга эга:

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -M.$$

Бу ифодани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = - \frac{d^2 M}{dz^2} = -P(z, t). \quad (18.1)$$

Бу ерда $P(z, t)$ — балкага таъсир этувчи кўндаланг куч бўлиб, у куйидаги омиллардан ташкил топади:

- 1) интенсивлиги $q(z, t)$ бўлган актив ёйик куч;
- 2) интенсивлиги $m\ddot{y}$ бўлган инерция кучлари;
- 3) интенсивлиги $r(z, t)$ бўлган ҳаракатга қаршилиқ кўрсатувчи кучлар:

$$P(z, t) = q(z, t) + m\ddot{y} + r(z, t). \quad (18.2)$$

(18.2) ни (18.1) га қўйсак, балка тебранма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial y^2}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(z, t) = -q(z, t) \quad (18.3)$$

келиб чиқади.

(18.3) тенгламада $q(z, t) = 0$ деб олинса, эркин тебранишлар дифференциал тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EJ \frac{\partial y^2}{\partial z^2} \right) = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + r(z, t) = 0. \quad (18.4)$$

Агар балканинг биқирлиги ўзгармас бўлиб, муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса (18.4), тенглама қуйидаги ихчам кўринишга келади:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0. \quad (18.5)$$

18.2. БАЛКАНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ

1. Эгилиш тебранишлари. Балка эркин тебранишлари дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий ечимини бири z га, иккинчиси t га боғлиқ бўлган, икки хил функциянинг кўпайтмаси кўринишида излаймиз:

$$y(z, t) = Z(z) \cdot T(t). \quad (18.6)$$

(18.6) функциядан ҳосила олиб, (18.5) га қўямиз

$$Z(z) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{EI}{m} T(t) \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} = 0. \quad (18.7)$$

(18.7) тенгламанинг барча ҳадларини $T(t) \cdot Z(z)$ га бўламиз ва ҳадлардан бирини ўнг томонга ўтказамиз:

$$\frac{EI d^4 Z(z)}{m dz^4} = - = - \frac{d^2 T(t)}{T(t)}. \quad (18.8)$$

Шу йўл билан ўзгарувчиларни икки қисмга ажратдик — чап томондаги функция фақат Z га, ўнгдагиси эса фақат t га боғлиқ. Ҳар иккала функция маълум бир ўзгармас сонга тенг бўлгандагина улар орасидаги тенглик мавжуд бўлади, ана шу ўзгармас сонни ω^2 деб қабул қиламиз. Бунда иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0; \quad \frac{d^4 Z(z)}{dz^4} - \omega^2 \frac{m}{EI} Z(z) = 0. \quad (18.9)$$

Биринчи тенгламанинг ечими:

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \lambda) \quad (18.10)$$

бўлиб, балканинг тебранма ҳаракатда эканлигини билдиради. Бу ечимдан ω нинг физик маъноси — тебраниш такрорлиги эканлиги ҳам кўриниб турибди. Иккинчи тенгламадан тебраниш шакли аниқланади. Унинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$Z(z) = D_1 \sin u z + D_2 \cos u z + D_3 \sinh u z + D_4 \cosh u z, \quad (18.11)$$

бу ерда

$$u = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{EJ}}.$$

D_1, D_2, D_3, D_4 доимийлари балканинг икки учига боғлиқ бўлган чегаравий шартлардан топилади. Чегаравий шартлар эса D_1, D_2, D_3, D_4 ни ўз ичига олган тўртта чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалардан иборат. Бизни системанинг нолдан фарқли бўлган ечими кизиқтиради, чунки $Z(z) = 0$ бўлганда балка тебранмайди. Тенгламалар системасининг аниқловчиси нолга тенг бўлгандагина тенгламаларнинг ечими нолдан фарқли бўлади.

$D_1, \dots, D_4$ ни ўз ичига олган тенгламалар системасининг аниқловчисини нолга тенглаш йўли билан ҳосил қилинган тенглама u га нисбатан трансцендент бўлади, яъни тригонометрик ва гиперболик функциялардан ташкил топади. Бу тенгламани ечиб, ҳар бирининг ўзига мос такрорлиги ва шакли бўлган, чексиз кўп илдизлар топилади.

Шундай қилиб, эркинлик даражаси чексиз бўлган системанинг эркин тебраниши дифференциал тенгламаси (18.5) нинг умумий интегралли қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_{1n} \sin u_n z + D_{2n} \cos u_n z + D_{3n} \sinh u_n z + D_{4n} \cosh u_n z) \sin(\omega_n t + \lambda). \quad (18.12)$$

Мисол. Икки учи шарнирли бириктирилган балканинг эркин тебранишлари такрорликлари ва шакллари топилсин.

Ечиш. $y(z, t)$ функцияси учун чегаравий шартларни белгилаймиз:

$$y(z, t) \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{d^2 y(z, t)}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad y(z, t) \Big|_{z=l} = 0; \quad \frac{d^2 y(z, t)}{dt^2} \Big|_{z=l} = 0;$$

$Z_n(z)$ функция учун балка учлари шарти қуйидагича бўлади:

$$Z_n(z) \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{d^2 Z_n(z)}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad Z_n(z) \Big|_{z=l} = 0; \quad \frac{d^2 Z_n(z)}{dt^2} \Big|_{z=l} = 0;$$

Бу шартлар ёйик кўринишда $z=0$ бўлган ҳол учун

$$D_{2n} + D_{4n} = 0; \quad -D_{2n}U^2 + D_{4n}U^2 = 0$$

бўлади. Бундан

$$D_{2n} = D_{4n} = 0 \quad (a)$$

келиб чиқади.

Чегаравий шартлар, (a) ни эътиборга олганда $z=l$ бўлган ҳол учун, қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} D_{1n} \sin u_n l + D_{3n} \operatorname{sh} u_n l &= 0; \\ -D_{4n} u_n^2 \sin u_n l + D_{3n} u_n^2 \operatorname{sh} u_n l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Системанинг нолдан фаркли ечимига эга бўлиши учун унинг аниқловчисини нолга тенглаймиз:

$$\left| \begin{array}{cc} \sin u_n l & \operatorname{sh} u_n l \\ -\sin u_n l & \operatorname{sh} u_n l \end{array} \right| = 0; \quad 2 \sin u_n l \cdot \operatorname{sh} u_n l = 0.$$

Бу ўринда $\operatorname{sh} U_n = 0$ шартидан фойдаланиб бўлмайди, чунки мазкур шарт $U=0$ бўлгандагина бажарилиши мумкин. Бу эса такрорлик ω нинг нолга тенг бўлишига, яъни тебранишнинг бўлмаслигига олиб келади. Шу сабабли $\sin U_n l = 0$ деб олаемиз, ўз навбатида

$U_n \frac{n\pi}{l}$. Айни вақтда $\sin U_n l = 0$ ва $\operatorname{sh} U_n l \neq 0$ бўлганлиги сабабли, (b) тенглама шартлари каноатлантирилиши учун $D_{3n} = 0$ бўлиши зарур. Шундай қилиб нолдан фаркли интеграл доимийси биргина D_{1n} қолди.

Демак,

$$Z_n(z) = D_{1n} \sin U_n z = D_{1n} \sin \frac{n\pi}{l} z.$$

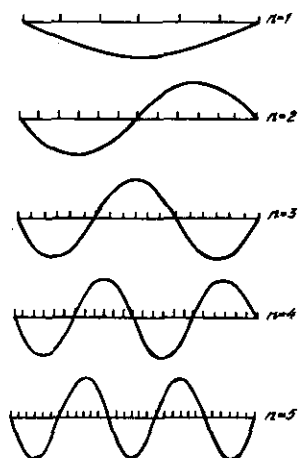
Хусусий тебраниш так-
рорликлари куйидаги форму-
ладан топилади:

$$\begin{aligned}\omega_n &= U_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m^2}} = \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.\end{aligned}$$

18.1-расмда $\sin \pi z/l$ функ-
цияси бўйича қурилган теб-
раниш шакллари тасвирлан-
ган.

Қуйидаги ифода (18.5)
тенгламанинг ечими ҳисобла-
нади:

$$y(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin U_n z \sin(\omega_n t + \lambda).$$



18.1-расм

2. Силжиш тебранишлари. Кўпинча реал биноларнинг тебранишида кўндаланг кучлар таъсири эгувчи моментга нисбатан салмоқли бўлади. Шу сабабли биноларда силжиш деформацияси вужудга келади. Бундай ҳол учун тебранишнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{\alpha GF} \cdot \frac{dQ(z)}{dz} = - \frac{q(z)}{\alpha GF} \quad (a)$$

кўринишга эга бўлади.

Бу ерда $Q(z)$ — кўндаланг куч; $q(z) = \frac{dQ(z)}{dz}$ — ёйик куч; α — системанинг кўндаланг кесимига боғлиқ бўлган коэффицент; F — кўндаланг кесим юзаси; G — силжиш модули.

Агар $q(z) = -m(z) \frac{d^2 y}{dt^2}$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда (a) -тенглама

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{m}{\alpha GF} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (б)$$

кўринишга келади.

Сўнгги тенглама ечимини $y(z,t) = Z(z) \cdot T(t)$ кўринишида излаймиз. Бу ечимнинг иккинчи тартибли ҳосиласини (б) тенгламага қўйсақ, ечимлари қуйидагича бўлган, иккита дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} T(t) &= A \sin(\omega t + \lambda); \\ Z(z) &= C_1 \sin \lambda z + C_2 \cos \lambda z. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

Бу ерда $\lambda = \frac{m\omega^2}{\alpha GF}$.

Мисол. Консол балканинг — силжиш тебраниши такрорликлари аниқлансин.

Консол балканинг чегаравий шартлари: $z(0) = 0$; $Z'(0) = 0$; $Z''(l) = 0$; $Z'''(l) = 0$. Бундан $C_2 = 0$ ва $Z(z) = C_1 \sin \lambda z$ келиб чиқади.

Агар $Z = l$. $Z'''(l) = 0$ бўлса, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$C_1 \lambda^3 \cos \lambda l = 0.$$

C_1 ва λ нолдан фарқли миқдорлар бўлганлиги сабабли, $\cos \lambda l = 0$; $\lambda l = \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$ ва ҳоказо бўлади.

Буларга мос такрорликлар

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}; \quad \omega_2 = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}};$$

$$\omega_3 = \frac{5\pi}{2l} \sqrt{\frac{\alpha GF}{m}}$$

ва ҳоказо.

3. Эгилиш-силжиш тебранишлари. Баъзан бино ва иншоотлар тебранишини ўрганишда эгилиш ва силжиш деформацияларини бир йўла ҳисобга олиш зарурати туғилади. Бундай ҳолда система тебранишининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EI} - \frac{q(z)}{\alpha GF} \quad (\text{г})$$

бўлади.

Аввал кўриб ўтганимиздек, $q(z)$ ни инерция кучи орқали ифодалаб, (г) тенгламани z бўйича икки марта дифференциалласак,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{m}{EI} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{m}{\alpha GF} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \cdot \partial z^2} = 0$$

келиб чиқади.

Мазкур тенгламанинг ечими тебраниш формулалари ва хусусий тақрорликларини аниқлайдиган қуйидаги ифодаларни беради:

$$Z(z) = C_1 \left[\sin \lambda_i z - \frac{C_2}{C_1} (\cos \lambda_i z - ch \bar{\lambda}_i z) - \frac{C_3}{C_1} Sh \bar{\lambda}_i z \right];$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EI \lambda_i^4}{m(1 + K \lambda_i^2)}} \quad \text{ёки} \quad \omega = \sqrt{\frac{EI \bar{\lambda}_i^4}{m(1 - K \lambda_i^2)}}$$

Бу ерда $K = \frac{EI}{\alpha GF}$; $(l \bar{\lambda}_i)^2 = \frac{(l \lambda_i)^2}{1 + K \lambda_i^2}$.

Бир учи мустаҳкам бириктирилган, иккинчи учи озод стержень учун

$$\lambda_i = \frac{\pi}{2l}, \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{l}, \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{l}, \dots$$

бўлади.

18.3. МАЖБУРИЙ ТЕБРАНИШЛАР

Вазнга эга бўлган призма шаклидаги балканинг мажбурий тебранишлари масаласи қуйидаги тенгламани ечиш билан чамбарчас боғлиқдир:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = q(z, t) \quad (18.13)$$

Бу ерда $q(z, t)$ — тебраниш уйғотувчи ёйик куч интенсивлиги. (18.13) тенглама чизикли бўлганлиги сабабли, унинг умумий ечими ўзига мос бир жинсли тенглама (18.5) нинг умумий ечими ва мазкур бир жинсиз тенгламанинг хусусий ечимидан ташкил топади. Бир жинсли тенглама (18.5) нинг умумий ечими аввалги параграфда кўриб ўтилган эди. (18.13) тенгламанинг хусусий ечимига тўхталиб ўтамиз. Шу мақсадда хусусий ечим ва $q(z, t)$ функциясини қуйидаги кўринишда ифода-лаймиз:

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) Z_n(z); \quad q(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) \cdot Z_n(z) \quad (18.14)$$

Бу ерда Z_n — балканинг тебраниш шаклини ифода-
ловчи функция. (18.14) ни (18.13) га қўйиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{S}_n(t) + \frac{EJ}{m} \frac{n^4 \pi^4}{l^4} S_n(t) \right] \sin \frac{n\pi z}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \sin \frac{n\pi z}{l}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ердан

$$\ddot{S}_n = \frac{EJ}{m} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cdot S_n = H_n \quad (18.15)$$

келиб чиқади.

Бир жинсли тенгламанинг бошланғич шартлари ~~хусу-~~сий ечимини ҳам қаноатлантиради; шу сабабли унинг, шунингдек, S_n функциясининг бошланғич шартлари бир жинсли бўлади.

$$S(0) = 0; \quad \dot{S}(0) = 0.$$

Шундай қилиб,

$$S_n = \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \int_0^l H_n(\tau) \sin \sqrt{\frac{EJ}{m}} (t - \tau) d\tau. \quad (18.16)$$

$H_n \tau$ функцияси Фурье қатори коэффицентларини аниқ-
лайдиган оддий формуладан топилади.

$$H_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (18.17)$$

Қуйидаги ифодани (18.17) ни (18.16) га қўйиб
топилади:

$$S_n = \frac{2l}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \int_0^l d\tau \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{EJ}{m}} (t - \tau) dx. \quad (18.18)$$

(18.18) ни (18.14) га қўйсак, $y(z, t)$ келиб чиқади.

ИНШООТЛАР ТЕБРАНИШНИ ТАДҚИҚ ЭТИШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

Аввалги бобларда иншоотлар тебранишини тадқиқ этишнинг айрим аник усуллари билан танишиб чиккан эдик. Бирок улар кўпинча ҳисоб ишларида математик жихатдан анча мураккаб қийинчиликлар туғдиради. Иншоотларни лойihalаш жараёнида баъзан уларнинг динамик хоссаларини, тақрибан бўлса ҳам, тезда аниқлаш зарурати учраб туради. Бундай ҳолларда системаларни таҳлил қилишнинг тақрибий усуллари жуда қўл келади. Бунда гап система тебранишининг хусусий такрорликлари ва шакллари аниқлаш ҳамда иншоотларнинг динамик мустаҳкамлигини текшириш ҳақида боради, албатта. Мазкур бобда ана шундай усуллар билан танишиб чиқамиз.

19.1. ЭНЕРГЕТИК УСУЛ

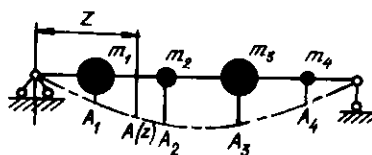
Энергетик усул қаршиликсиз муҳитда эркин тебраниш жараёнида системаларнинг потенциал ва кинетик энергиялари йиғиндиси ўзгармас миқдор эканлигига асосланади. Эркин тебраниш жараёнида системанинг кинетик энергияси эластик потенциал энергияга, потенциал энергия эса кинетик энергияга ўтиб туради. Муҳит қаршилиги ҳисобга олинмаса, энергиянинг сақланиш қонунига биноан

$$K + \Pi = C = \text{const} \quad (19.1)$$

бўлади, бу ерда K — кинетик энергия, Π — потенциал энергия.

Тебранаётган системанинг оғиши юқори бўлганда кинетик энергия нолга тенг бўлади, чунки бу вазиятда тебранаётган массаларнинг тезлиги ноль бўлади, система дастлабки мувозанат вазиятидан ўтаётган лаҳзада потенциал энергия нолга тенг, чунки бунда система деформацияланмаган ҳолатда бўлади. Потенциал энергия ноль бўлганида, кинетик энергия ўзининг энг катта қийматига ($K_{\max}$) эришади. Кинетик энергия ноль бўлганда эса потенциал энергия ($\Pi_{\max}$) максимум бўлади. Бу мулоҳазалардан $K_{\max} = \Pi_{\max}$ (19.2) келиб чиқади.

Кўп массали балка (19.1-расм) қуйидаги қонуният бўйича эркин тебраништи дейлик:



19.1-расм

$$y(z, t) = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (19.3)$$

бу ерда $y(z, t)$ — абсиссаси z бўлган нуктанинг t лаҳзадаги кўчиши; $A = A(z)$ — тебраниш шакли, яъни энг катта солқилик.

(19.3) тенглама барча нукталар битта фазада бир хил такрорлик билан тебранишини, яъни барча нукталар статик мувозанат ҳолатини бир вақтда босиб ўтиб, бир вақтнинг ўзида максимал солқиликка эришишини англатади.

Балка тебранаётган пайтда нукталарнинг тезлиги

$$\dot{y}(z, t) = A(z) \omega \cos(\omega t + \lambda)$$

тенгламадан топилади. Юкори кўчиш ва юкори тезлик

$$y_{\max} = A(z) \quad \dot{y}_{\max} = \omega A(z)$$

бўлади.

Балканинг солқилиги (кўчиши) юкори бўлгандаги потенциал энергия:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (A'')^2 dz. \quad (19.4)$$

Тезлик юкори бўлгандаги кинетик энергия:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} \sum m_i (A_i \omega)^2, \quad (19.5)$$

бу ерда A_i — i -масса кўчишининг амплитудаси.

(19.2) га асосан (19.4) ни (19.5) га тенглаштирамиз ва бундан такрорликни аниқлаш формуласини (Рэлей формуласини) келтириб чиқарамиз:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ (A'')^2 dz}{\sum m_i A_i^2}. \quad (19.6)$$

Агар балкага узлуксиз ёйик масса қўйилган бўлса, маҳраждаги йигинди интеграл билан алмаштирилади.

Агар тебранишларнинг ҳақиқий шакли $A=A(z)$ маълум бўлса, у ҳолда Релей формуласи аниқ натижа беради. Бироқ $A(z)$ олдиндан маълум бўлмаганлиги сабабли, уни ўзимиз ихтиёрий равишда қабул қиламиз. Бунинг оқибатида ҳисоб тақрибий тус олади. (19.6) дан топилган такрорликнинг қиймати ҳамма вақт ҳақиқий қийматдан ортиқроқ юради.

$A(z)$ функциясини шундай танлаш керакки, тахмин қилинган тебраниш шакли ҳақиқий тебраниш шаклига мумкин қадар яқин келсин. Чегаравий шартларга қатъий амал қилиш зарур. Тахминий шакл ҳақиқий шаклга қанча яқин бўлса, ҳисоб шунча аниқ бўлади.

Мисол. Ўзаро тенг учта массага эга бўлган балканинг (19.2-расм) хусусий такрорлиги энергетик усулда аниқлансин.

Ечиш. Тебраниш шаклини

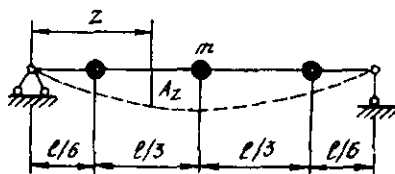
$$A = a \sin \frac{\pi z}{l}$$

қўринишда қабул қиламиз. Бу ифода барча чегаравий шартларни қаноатлантиради. Чунончи, $z=0$; ва $z=l$ бўлганда, $A=0$ ва $A''=0$; айни пайтда $A' \neq 0$; $A''' \neq 0$. Ифодадаги a миқдор аниқсизлигича қолаверади, чунки у қасрнинг сураида ҳам маҳражда ҳам қатнашмаганлиги учун қисқариб кетади, ҳисоб натижасига таъсир этмайди.

Берилган ифодадан икки марта ҳосила оламиз ва уни квадратга оширамиз:

$$A'' = -a \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l};$$

$$(A'')^2 = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi z}{l}.$$



19.2-расм

(19.6) формуланинг сурати

$$\int_0^l EJ (A'')^2 dz = \frac{a^2 \pi^4 EJ}{2l^3} \text{ га тенг.}$$

Формула махражига кирувчи кўчишларни ҳисоблаймиз:

$$A_1 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{6} = \frac{a}{2};$$

$$A_2 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{l}{2} = a;$$

$$A_3 = a \sin \frac{\pi}{l} \cdot \frac{5l}{6} = \frac{a}{2}.$$

(19.6) формуланинг махражи

$$\sum m A_i^2 = m \left(\frac{a}{2} \right)^2 + m a^2 + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} m a^2.$$

Такрорлик квадрати

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EJ}{3ml^3}.$$

Такрорлик

$$\omega = \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}.$$

Такрорликнинг бу киймати аниқ усулда топилган

$$\omega = \frac{5,692}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}$$

кийматидан жуда оз фарқ қилади.

(19.6) формуладан фойдаланишнинг бошқача йўллари ҳам бор. Масалан, тебраниш шакли $A(z)$ ни тахминий олмасдан, балкага ихтиёрий статик кучлар қўямиз ва бу кучлардан ҳосил бўлган солкиликни тебраниш шакли деб қабул қиламиз. Бу усулнинг қулайлиги шундаки, чегаравий шартлар ўз-ўзидан қаноатлантирилади.

Такрорлиги изланаётган балкага ихтиёрий $P_1, P_2, \dots$ кучлар системаси қўйилган дейлик. Бунда системанинг потенциал энергияси ташқи кучлар иши орқали осонгина топилади:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \sum P A_i. \quad (19.7)$$

бу ерда A_i — қабул килинган кучлар системаси таъсирида ҳосил бўлган кўчишлар.

Потенциал энергиянинг янги ифодасини (19.6) формулага қўйсак:

$$\omega^2 = \frac{\sum P_i A_i}{\sum m_i A_i} \quad (19.8)$$

келиб чиқади. Агар $P_i = m_i g$ эканлиги эътиборга олинса, такрорлик формуласи янада соддалашади:

$$\omega^2 = g \frac{\sum m_i A_i}{\sum m_i A_i^2} \quad (19.9)$$

Масаланинг шартида берилган ташқи кучларни ихтиёрий кучлар сифатида қабул қилса ҳам бўлади.

(19.6) формуладан фойдаланишнинг яна бир йўли билан танишиб ўтамиз. Бунда тебраниш шаклини аниқлаш учун балканинг ихтиёрий бир нуктасига биргина ташқи куч қўямиз. A_0 — куч қўйилган нуктанинг («келтирилган нукта») шу куч таъсирида ҳосил бўлган кўчиши дейлик. У ҳолда балкада тўпланган юқори потенциал энергия

$$P_{\max} = \frac{1}{2} c A_0^2 \quad (19.10)$$

бўлади. Бу ерда c — балканинг биқирлик коэффициенти. (19.10) ифодани (19.5) ифодага теглаштириб,

$$\omega^2 = \frac{c A_0^2}{\sum m_i A_i} \quad (19.11)$$

формулага эга бўламиз.

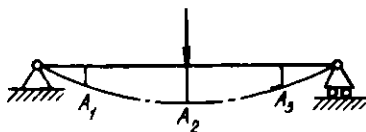
Қуйидаги ифода

$$m_0 = \frac{\sum m_i A_i^2}{A_0^2} \quad (19.12)$$

системанинг келтирилган массаси деб аталади.

Буни эътиборга олсак, (19.11) формула янада ихчамлашади:

$$\omega^2 = \frac{c}{m_0} \quad (19.13)$$



19.3- р а с м

Мисол. Юкорида кўриб ўтилган балканинг такрорлигини (19.13) формула ёрдамида аниқлаймиз. Бунинг учун аввал йиғиқ куч таъсирида балканинг кўчишларини топамиз. Келтирилган нукта балканинг ўртасида деб олсак, у ҳолда қуйидаги кўчишларга эга бўламиз (19.3- расм);

$$A_1 = A_3 = \frac{39}{81} A_0, A_2 = A_0;$$

(кучнинг қиймати ва A_0 нинг масштаби аҳамиятга эга эмас).

(19.12) формуладан келтирилган массани топамиз:

$$m_0 = m \left(\frac{39}{81} \right)^2 + m + m \left(\frac{39}{81} \right)^2 = 1,4636m.$$

Берилган балканинг бикирлик коэффиценти

$$c = \frac{48EI}{l^3}.$$

(19.13) формулага биноан такрорликнинг квадрати

$$\omega^2 = \frac{48EI}{1,4636ml^3} = 32,79 \frac{NJ}{ml^3};$$

такрорлик

$$\omega = \frac{5,726}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}.$$

Такрорликнинг бу қиймати аниқ ечимдан 0,6 % фарк қилади.

19.2. БУБНОВ — ГАЛЁРКИН УСУЛИ

Агар қуйидаги дифференциал тенглама:

$$(E\tau y_i^{(1)})'' = m\omega_i^2 y_i(z) = 0 \quad (19.14)$$

системанинг эркин тебранишини ифодаласа, унинг ечимини

$$y_i(z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \quad (19.15)$$

кўринишда олиш мумкин. Бу ерда $\varphi_i(z)$ — барча чегаравий шартларни қаноатлантирувчи, танланувчи функция; a_i — номаълум коэффициентлар. (19.15) ни (19.1) га қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) = 0.$$

Бу айнинг ҳар қандай ихтиёрий функция $\varphi_k(z)$ га кўпайтирилганда ҳам ўз кучини сақлаб қолади:

$$\left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) = 0.$$

Тенгламанинг интегралини тузамиз:

$$\int_0^l \left\{ \left[EJ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i''(z) \right]'' - \omega_i^2 m \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(z) \right\} \varphi_k(z) dz = 0. \quad (19.16)$$

(19.16) тенглама Бубнов—Галёркин усули тенгламаси деб аталади. Мазкур тенглама a_i коэффициентларига нисбатан бир жинслидир. Тенгламанинг нолдан фаркли ечимига эга бўлиши учун унинг аникловчиси нолга тенглаштирилади. Ҳосил бўлган тенгламанинг энг кичик илдизи системанинг хусусий такрорлиги бўлади.

Биринчи яқинлашувда, яъни $n=1$ бўлганда, каноник тенглама C_{11} $a_1=0$ бўлади. $a_1 \neq 0$ бўлгани учун

$$C_{11} = \int_0^l \{ [EJ \varphi_1''(z)]'' \varphi_1(z) - \omega_1^2 m \varphi_1^2(z) \} dz = 0. \quad (19.17)$$

Бу ердан такрорлик квадратини аниклайдиган

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l [EJ \varphi_1''(z)]'' \varphi_1(z) dz}{\int_0^l m \varphi_1^2(z) dz} \quad (19.18)$$

формула келиб чиқади. $\varphi_i(z)$ функция тебранишнинг асосий шаклига канча яқин танланса, ҳисоб аниқлиги шунча ортади.

Мисол. Бир учи шарнирли кўзгалмас, иккинчи учи шарнирли кўзгалувчан таянчга эга бўлган, текис ёйик массали балканинг биринчи такрорлиги тақрибий усулда аниқлансин ва аниқ ечим билан таққослансин.

1. Танланувчи функцияни $\varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{l}$ кўри нишда, яъни тебраниш биринчи шаклининг аниқ ифодаси бўйича оламиз. (19.18) га кўра

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^l \left[EJ \left(-\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \right) \right]'' \sin \frac{\pi z}{l} dz}{\int_0^l m \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz} = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}.$$

Биринчи такрорликнинг аниқ қийматига эга бўлдик.

2. Танланувчи функцияни балканинг ёйик кучдан ҳосил бўлган солкилиги кўринишида қабул қиламиз:

$$\varphi_1(z) = A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right), \text{ бу ерда } A = \frac{q l^4}{24 EJ}.$$

(19.18) формулага кўра

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{\int_0^l \left[EJ \frac{A}{l^2} \left(-\frac{12z}{l} + \frac{12z^2}{l^2} \right) \right]'' A \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz}{\int_0^l m A^2 \left(\frac{z}{l} - \frac{2z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right) dz} = \\ &= \frac{97,55}{l^4} \cdot \frac{EJ}{m}; \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{9,877}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}; \text{ аниқ қиймати } \omega_1 = \frac{9,8696}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

19.3. КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШУВ УСУЛИ

Бир неча массага эга бўлган система тебранганда ҳар бир массада (система энг катта солқиликка эришганда)

$$J_{ni} = m_i A_i \omega^2$$

инерция кучи ҳосил бўлади. Агар бу кучларнинг миқдори маълум бўлганида тебраниш шакли ва такрорлигини осонгина аниқласа бўларди. Бироқ кучларнинг миқдори такрорликка боғлиқ бўлгани учун номаълумдир. Бундай ҳолларда масалани ҳал этишда кетма-кет яқинлашув усули жуда қўл келади.

Кетма-кет яқинлашув усулининг Стодола таклиф этган вариантыни кўриб ўтамиз. Биринчи яқинлашувда балканинг солқилиги A_1 ни ихтиёрий қабул қиламиз. Бунга мос инерция кучи

$$J_{ni}^{(1)} = m_i A_1 \omega_1^2$$

бўлади; ω_1^2 — ҳозирча номаълум миқдор.

ω_1^2 марта кичрайтирилган $J_{ni}^{(1)}$ кучидан (яъни $m_i A_1$) кучидан ҳосил бўладиган солқилик A_{12} ни аниқлаймиз; $J_{ni}^{(1)}$ дан ҳосил бўладиган ҳақиқий солқилик ω_1^2 марта катта бўлади:

$$A_{12} \omega_1^2.$$

Агар A_1 солқилик аниқ танланса, у ҳолда A_2 солқилик A_1 га айнан ўхшаш бўлади ва

$$A_{11} = A_{12} \omega_1^2$$

тенглик бажарилади. Бу ердан

$$\omega_1^2 = \frac{A_{11}}{A_{12}}.$$

Тебраниш шакли A_1 тақрибан қабул қилинганлигидан ҳисоб натижаси ҳам тақрибий бўлади. Шу сабабли, A_{11} A_{12} нисбат ҳам турли нукталар i учун турлича қийматга эга бўлади, такрорлик квадратининг тақрибий қиймати учун эса солқилик энг юқори бўлган нуктанинг амплитудалари олинади:

$$\omega_1^2 = \frac{A_{1\max}}{A_{2\max}}$$

Шундай қилиб, такрорликнинг тақрибий қиймати икки солкиликнинг характерли ординаталари нисбатига тенг экан: солкиликларнинг бири A_1 қабул қилинадиган миқдор бўлиб, иккинчиси $m_i A_{11}$ кучи таъсирида ҳисоблаб топиладиган A_2 солкиликдир. Агар $\frac{A_1}{A_2}$ нисбат барча нукталар i учун бир хил қийматга эга бўлса, натижа каноатланарли бўлади, борди-ю нисбат турли қийматга эга бўлса, у ҳолда иккинчи яқинлашувни бажариш зарур. Бунда A_2 ни бошланғич шакл сифатида қабул қилиб, $m_i A_{12}$ кучи топилади ва унинг таъсирида ҳосил бўладиган солкилик A_3 аниқланади. Иккинчи яқинлашувда такрорлик квадрати

$$\omega_2^2 = \frac{A_{2\max}}{A_{3\max}}$$

нисбатдан топилади.

Яқинлашувлар барча нукталар учун бир хил нисбатлар ҳосил бўлгунга қадар шу йўсинда давом эттирилаверади.

19.4. ДУНКЕРЛАЙ ФОРМУЛАСИ

Дункерлай формуласи эркинлик даражаси бир неча бўлган системаларнинг биринчи такрорлигини тақрибан аниқлашда қўлланилади.

Агар балкага бирин-кетин массалар юкласак, ҳар бир қўйилган ҳол учун тебраниш такрорлиги

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{m_i \delta_{ii}}}$$

бўлади; бунда

$$\frac{1}{\omega_i^2} = m_i \delta_{ii}, \quad (19.19)$$

бу ерда δ_{ii} — йиғик масса m_i жойлашган нуктага қўйилган бирлик кучдан ҳосил бўлган кўчиш.

Дункерлай формуласига кўра, қолган массаларнинг система тебранишига бўлган таъсири, уларнинг (19.19) формуладан топилган қийматларини қўшиш орқали ҳисобга олинади, яъни

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

ёки

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n m_j \delta_{jj}}} \quad (19.20)$$

Энергетик усулда такрорлик орттирилган кийматда топилган бўлса, Дункерлай формуласи такрорликнинг кичрайган кийматини беради. Такрорликнинг аниқ киймати шу икки киймат орасида ётади. Бироқ тақрибий ҳисобларнинг аниқлик даражаси амалий талабларни тўла қаноатлантиради.

Мисол. Энергетик усулда ҳисобланган уч массали балканинг (19.2- расмга қаранг) такрорлиги Дункерлай формуласи ёрдамида аниқлансин.

Бир массали системанинг такрорлиги аввалдан маълум формула $\omega^2 = \frac{c}{m}$ дан топилади. Бизнинг ҳолда биқирлик

коэффициенти $C = \frac{3EI(a+b)}{A^2b^2}$ ифодадан аниқланади. Бу ерда: a — массадан чап таянчгача бўлган масофа, b — массадан ўнг таянчгача бўлган масофа.

Чапдаги ва ўнгдаги массалар учун тебраниш такрорлиги бир хил бўлади:

$$\omega_1^2 = \omega_3^2 = \frac{3 \cdot 1296EI}{25ml^3} = 155,5 \frac{EI}{ml^3}$$

Иккита четки массани йўқ деб фараз қилиб, фақат ўртадаги массанинг ўзини олсак, тебраниш такрорлиги

$$\omega_2^2 = \frac{48EI}{ml^3}$$

бўлади. Дункерлай формуласига кўра:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{ml^3}{155,5EI} + \frac{ml^3}{48EI} + \frac{ml^3}{155,5EI} = 0,03368 \frac{ml^3}{EI}$$

Бундан

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{0,03368ml^3}} = \frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EI}{ml}}$$

Бу натижа такрорликнинг аниқ кийматидан 5,5 % камрокдир.

Шундай қилиб, такрорликнинг аниқ қиймати энергетик усул ва Дункерлай формуласи билан топилган қийматларнинг оралиғида ётишига ишонч ҳосил қилдик, яъни

$$\frac{5,449}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}} < \omega_0 < \frac{5,696}{l} \sqrt{\frac{EJ}{ml}}$$

19.5. СПЕКТРАЛ ФУНКЦИЯ УСУЛИ

С. А. Бернштейн ўзининг бу усулида изланаётган хусусий такрорлик квадратининг юкори ва қуйи чегараларини белгилаб беради:

$$\frac{1}{\sqrt{B_{12}}} < \omega_j^2 < \frac{2}{1 - B_{11} + \sqrt{2 \frac{B_{12}}{B_1^2} - 1}} \quad (19.21)$$

Эркин тебранишларнинг биринчи такрорлигини аниқлашда B_{11} ва B_{12} қуйидаги формулалар орқали топилади:

$$B_{11} = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{jj} = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{nn};$$

$$B_{12} = \sum_{i=1}^n m_i^2 \delta_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^n m_i m_k \delta_{jk}^2 (j \neq k).$$

Хусусий тебранишларнинг иккинчи такрорлиги (ω_2)ни аниқлашда қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

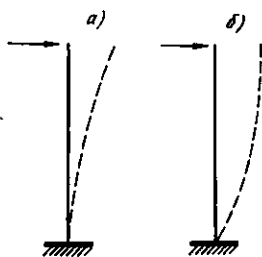
$$B_{21} = B_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}; \quad B_{22} = B_{12} - \frac{1}{\omega_1^4}.$$

Такрорликнинг ҳисобий қиймати сифатида тенгсизликнинг чап ва ўнг томонидаги натижаларнинг ўртача арифметик қиймати олинади.

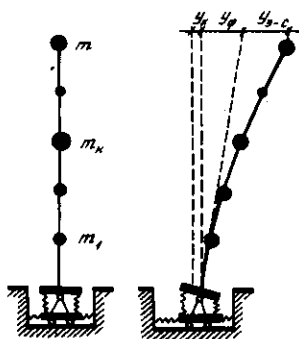
19.6. «ИНШОТ — ЗАМИН» СИСТЕМАСИНING ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ¹

Реал бино ва иншоотларнинг тебранишида ҳар бир нуктанинг умумий кўчиши икки хил кўчишнинг йиғиндисидан — бинонинг эластик деформацияси оқибатидаги

¹ Мазкур параграфда баён этилган усул Б. А. Хобилов ва В. П. Цой томонидан ишлаб чиқилган.



19.4- расм



19.5- расм

кўчиш ҳамда заминнинг деформацияланиши натижасида юзага келадиган кўчишлардан ташкил топади. Ўз навбатида, иншоотлар тузилиши, массаси ва ўлчамларига қараб эгилиш (19.4- расм, а) ёки силжиш (19.4- расм, б) деформацияси бўйича тебранади. Кўпинча иншоотлар тебранишида деформациянинг ҳар иккала хили барабар иштирок этади. Бундай тебранишлар эгилиш-силжиш тебранишлари деб аталади.

Иншоот кўчишларида замин (ер)нинг қайишқоклиги (эластиклиги) ҳам сезиларли роль ўйнайди. Ҳар қандай бино тебраниш жараёнида замин устида чайкалиши (оғишма ҳаракатда бўлиши) ҳамда замин бўйлаб силжиши (сирпанма ҳаракатда бўлиши) мумкин. Демак, заминнинг қайишқоклиги ҳам иншоотлар тебранишида икки хил — *чайқалма* ва *сирпанма кўчишларни* юзага келтирар экан.

Тебраниш жараёнида ана шу тўрттала омил эътиборга олинadиган ҳисоблаш моделини илмий адабиётда «*иншоот-замин*» системаси деб юритилади.

Ҳозир кўриб ўтиладиган усулда ҳар қандай системанинг эркин тебраниши тақрорлиги ва шаклини аниқлашда юқорида санаб ўтилган тўрттала кўчиш ҳисобга олинади. Бу усулга кўра бинонинг замин устидаги оғишма ва сирпанма тебранишлари аниқланаётганда бино абсолют каттиқ жисм деб фараз этилади. Бинонинг эластик эгилиш-силжиш тебранишлари эса каттиқ жисмга боғланган координата системаси орқали аниқланади. Бундай ҳолатни акс эттирувчи динамик ҳисоблаш тарҳи 19.5- расмда тасвирланган. Усулнинг замирида тебраниш

шакллари кетма-кет яқинлаштириш усули билан солкиликни аниқлашнинг графоаналитик усули ётади.

Усулларнинг биринчисига кўра, массалар тўпланган нукталарнинг қабул қилинган солкиликлари мос равишда, массаларга ва такрорликнинг квадратига кўнгайтирилади. Ҳосил бўлган кўпайтма инерция кучини беради. Бу куч таъсирида вужудга келган солкилик графо-аналитик усул бўйича аниқланади. Шу йўл билан топилган солкиликларни биринчи яқинлашувдаги тебраниш шакллари деб қаралади. Изланаётган такрорликларнинг тақрибий қийматлари иккита кетма-кет яқинлашувдаги солкиликларнинг тенглиги шартидан фойдаланиб топилади. Агар қабул қилинган тебраниш шакллари (солкилик) ҳисоблаш натижасида топилган шакллarga етарли даражада яқин бўлса, такрорликларнинг тақрибий қийматлари ҳам бир хил бўлади. Изланаётган такрорлик тақрибий қийматларнинг ўртача арифметик миқдори сифатида аниқланади.

Усулнинг тафсилотини тўрт массали системанинг мисолида баён этамиз. Иншоотнинг ҳисоблаш тарҳи 19.5- расмдаги сингари бўлади. Системанинг асосий (биринчи) тебраниш шакли ва шунга мос такрорлигини аниқлаш талаб этилади, дейлик.

Ҳисоб ишлари жадвал кўринишида бажарилади. 1- жадвалда эгилиш, 2- жадвалда эса силжиш тебранишлари ҳисобланади. Иккала ҳолда ҳам таянч қайишқоқлиги ҳисобга олинмаган.

1- жадвалнинг дастлабки устунда механик миқдорлар, охирида ҳисоблаш алгоритми (тартиби) келтирилган. Охиридан битта олдинги устундаги «кўпайтувчилар» ҳисоб ишларини соддалаштириш мақсадида киритилган. Бу миқдорлар арифметик амалларда қавсдан тапқарига чиқарилган сон вазифасини ўтайди. Ўртадаги устунларда ҳисоблаш тарҳи тасвирланган. Агар берилган система кўп қаватли бино бўлса, у ҳолда массалар қаватлараро ёпмалар сатҳида тўпланади. Массаларни тўплашда бинонинг ҳам вертикал, ҳам горизонтал элементлари вазни йиғиб чиқилади. Қаватлар вазни йиғиқ куч сифатида жадвалнинг биринчи каторида келтирилган.

Жадвалнинг иккинчи каторида иншоот вертикал элементларининг эгилишдаги бикирлиги берилган. Қулайлик учун EI «кўпайтувчи» устунига чиқарилган. Тебраниш шакллари $z_i^{(0)}$ нолинчи яқинлашувда ихтиёрий

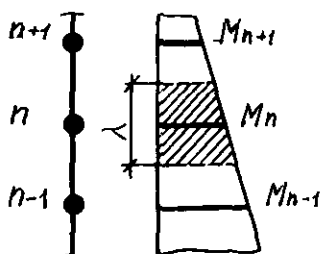
ЭГИЛИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик микдорлар						Қўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
1	Йигиқ куч	300	300	300	300	300	18 · 10 ⁶	кабул қилинади (1)(3) Σ(4)→ Σ(5)→ (6)(2) М эпюраси юзаси ←Σ(8) ←Σ(9) (γ ₁)(γ ₄)
2	Бикирлик EJ	1	1	1	1	1	Z ₄	
3	Тебраниш шакли Z _i ⁽⁰⁾	1,0	0,8	0,5	0,1	0,0	ω ² Z ₄ ·g	
4	Инерция кучи	300	240	150	30	0,0	— « —	
5	Қўндаланг куч Q	300	540	690	720	2250	λ ω ² Z ₄ ·g	
6	Эгувчи момент M	0	300	840	1530	2250	λ ² ω ² Z ₄ ·gEJ	М эпюраси юзаси ←Σ(8) ←Σ(9) (γ ₁)(γ ₄)
7	Фиктив куч интенсивли- ги	0	300	840	1530	2250	λ ³ ω ³ Z ₄ ·EJg	
8	Йигиқ фиктив куч	0	337,5	840	1530	2250	— » —	
9	Солкилик бурчаги φ	4957,5	4620	3780	2250	0,0	λ ³ ω ³ Z ₄ ·EJg	
10	Солкилик γ _i	15607,5	10650	6030	2250	0,0		
11	Тебраниш шакли Z _i ⁽¹⁾	1,0	0,68	0,39	0,14	0,0		ω _{др} = 20,45
12	Тебраниш такрорлиги ω _i	20,5	20,4	20,7	20,2	0,0		

равишда қабул қилинади (3- қатор). Бунда, ҳисобнинг талаб этилган аниқлик даражасига қараб, камдан-кам ҳолларда кейинги яқинлашув амаллари бажарилади. Қўпинча такрорлик биринчи яқинлашувнинг ўзида етарли даражада аниқликка эга бўлади.

Инерция кучи (4- қатор) қабул қилинган солқиликлар $z_i^{(0)}$ ни тегишли масса ва изланаётган такрорликнинг квадратиға кўпайтириш орқали топилади. Бу ўринда ҳисоблаш алгоритмида (1)·(3) амали ёзилган. Бунинг маъноси: тўртинчи қатор микдорларини аниқлаш учун 1- қатор сонларини 3- қатор сонларига кўпайтириш зарур, демакдир. Қўндаланг кучлар $\Sigma \rightarrow (4)$ алгоритми бўйича топилади, яъни 4- қатордаги сонларнинг чапдан ўнгга томон йиғиндиси олинади. 5- қатор сонларининг йиғиндиси эса эғувчи моментларни беради. $M:EI$ ни фиктив куч интенсивлиги деб қабул қилинади. Фиктив ёйиқ кучларни ёйиқ кучға келтириш учун, яъни фиктив қўндаланг кучларни аниқлаш учун, эғувчи моментларнинг трапеция шаклидаги юзалари қўшиб чиқилади; бунда эпюранинг учбурчакли юзаси охиридан битта олдинги массанинг эпюрасига қўшилади (19.6- расм). 8- қатор сонларини ўнгдан чапға қараб қўшиб чиксак, солқилик бурчаги φ топилади. Худди шундай, 9- қатор сонларининг йиғиндиси солқилик y ни беради. Барча солқиликларни охириги массанинг солқилигига (бизда y_4) бўлсак, биринчи яқинлашувдаги тебраниш шакли $z_i^{(1)}$ келиб чиқади (19.7- расм, 1- пункт чизик). Биринчи шакл бўйича эғилиш тебранишлари такрорликлари қуйидаги формуладан топилади:

$$\omega_{is} = \sqrt{\frac{z_i EJg}{y_i \lambda^3}}, \quad (19.22)$$



19.6- расм

бу ерда y_i — масса тўпланган нукталарнинг солқиликлари; λ — ёйиқ массалар орасидаги масофа; z_i — тебранишларнинг биринчи шакли ординаталари; i — массанинг тартиб номери.

$z_i^{(0)}$ қийматлари билан $z_i^{(1)}$ қийматлари орасидаги тафовутнинг катта ёки кичиклиги, шунингдек, массаларнинг

тегишли такрорликлари ўзаро якин ёки йироқлиги навбатдаги яқинлашувни бажариш ёки бажармаслик масаласини ҳал этади. Агар такрорликлар орасидаги фарқ катта бўлса, у ҳолда навбатдаги яқинлашувни амалга ошириш лозим. Бунда дастлабки шакл сифатида $z^{(1)}$

қабул қилиниб, 4 дан 12- гача бўлган амаллар (1- жадвал) кўриб ўтилган тартибда такроран бажарилади.

Такрорликларнинг ўзаро якин қийматлари топилогач, уларнинг ўртача арифметик қиймати $\omega_{\text{ср}}$ аниқланади. Эгилиш тебранишлари асосий шаклининг даври қуйидаги формуладан топилади:

$$T_{\text{с}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{ср}}} \quad (19.23)$$

Силжиш тебранишларининг шакли ва такрорлиги ҳам жадвал кўринишида аниқланади (2- жадвал). Ҳисоблаш тартиби жадвалнинг охириги устунида келтирилган. Силжишдаги бикирлик αGF ни ҳисоблашда, пландаги шакли тўғри тўртбурчак бўлган бинолар учун $\alpha = 0,67$ деб олинади.

Силжиш тебранишларининг асосий такрорлиги тақрибий қийматлари қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\omega_{\text{с}} = \sqrt{\frac{z_i \alpha GF g}{y_i \lambda}} \quad (19.24)$$

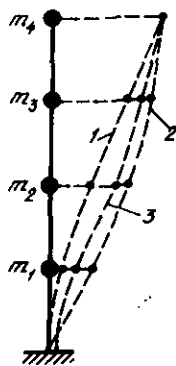
(19.24) асосида такрорликларнинг ўртача арифметик қиймати $\omega_{\text{ср}}$ ва бу асосда давр $T_{\text{с}}$ аниқланади.

Силжиш тебранишларининг шакли 2- жадвалнинг 9- қатори микдорлари асосида қурилади (19.7- расм, 2- пунктир чизик).

Хусусий системанинг эгилиш ва силжиш деформациялари ҳисобга олинган ҳолда эркин тебраниш даври Дункерлай формуласи ёрдамида аниқланади:

$$T_{\text{э.с}} = \sqrt{T_{\text{с}}^2 + T_{\text{с}}^2} \quad (19.25)$$

Иншоот заминининг қайишқоклигидан келиб чиқадиган тебраниш такрорлигини аниқлашда, эластик заминда



19.7- расм

СИЛЖИШ ТЕБРАНИШЛАРИ

№	Механик микдорлар						Қўлайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
1	Йиғиқ куч	300	300	300	300	300		
2	Бикирлик αGF	1	1	1	1	1	$0.24 \cdot 10^6$	
3	Тебраниш шакли $Z_{II}^{(0)}$	1,0	0,9	0,8	0,5	0,0	Z_4	қабул қилнади
4	Инерция кучи	300	270	240	150	0,0	$\omega^2 Z_4 \cdot g$	(1)-(3)
5	Қўндаланг куч Q	300	570	810	960		— $\rightarrow$ —	$\Sigma(4) \rightarrow$
6	Фиктив куч интенсивлиги	300	570	810	960		$\omega^2 Z_4 \cdot \alpha GFg$	(5)-(2)
7	Йиғиқ фиктив куч	0	300	570	810	960	$\lambda \omega^2 Z_4 \cdot \alpha GFg$	Q эпюраси юзаси
8	Солқилик Y_{II}	2640	2340	1770	960	0,0	— $\rightarrow$ —	$\leftarrow \Sigma(7)$
9	Тебраниш шакли $Z_{II}^{(1)}$	1,0	0,89	0,67	0,36	0,0		$(Y_1)(Y_4)$
10	Тебраниш такрорлиги ω_{II}	17,2	17,3	17,2	17,1	0,0		$\omega_{II}^{yp} = 17,2$

жойлашган бикир жисм туридаги хусусий система тебранишлари текширилади.

Иншоотнинг оғишма (ω_ϕ) ва сирпанма (ω_x) тебраниши такрорликлари қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\omega_\phi^2 = \frac{1}{J_0} (c_\phi J_\phi - P_c J_c);$$

$$\omega_x^2 = \frac{1}{M_c} C_x F_\phi \quad (19.26)$$

бу ерда: J_ϕ — пойдевор ости юзасининг инерция моменти; F_ϕ — пойдевор ости юзаси; P_c — иншоотнинг умумий вазни (пойдевор вазни ҳам қўшилади); M_c — иншоот массаси; C_x — грунтнинг текис эластик сирпаниш коэффициентини; C_ϕ — грунтнинг нотекис эластик сиқилиш коэффициентини; J_0 — системанинг кутби 0 дан ўтувчи, тебраниш текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан олинган инерция моменти: $J_0 = \sum r_i^2 m_i$; l_c — пойдевор ости юзасининг оғирлик марказида ётувчи кутб 0 дан системанинг инерция марказигача бўлган масофа: $l_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$; r — кутбдан

массаларгача бўлган масофа.

Ҳисоб натижаларининг аниқлик даражаси кўп жihatдан C_ϕ ва C_x коэффициентларини тўғри танлашга боғлиқ. Ҳар иккала коэффициент замин тупроғининг физик-механик хоссаларига боғлиқ миқдорлар бўлиб, уларни аниқлашда турли усуллар мавжуд. Илмий тадқиқотларнинг кўрсатишича, синчли биноларни ҳисоблашда О. А. Савинов¹ усули, синчсиз биноларда эса СН 18—58² қурилиш нормаларида берилган усул жуда қўл келади.

Хусусий системалар такрорлиги ва уларга мос даври аниқлангач, бикир системанинг қайишқоқ заминдаги эркин тебранишлари даври Дункерлай формуласи билан аниқланади:

$$T_{\phi,x} = \sqrt{T_\phi^2 + T_x^2} \quad (19.27)$$

¹ О. А. Савинов, Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет. Стройиздат, 1964.

² Технические условия проектирования фундаментов под машины с динамическими нагрузками (СН 18—58).

Иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформацияларини, шунингдек замин бўйлаб сирпаниши ва оғишини ҳисобга олувчи эркин тебранишлари даври

$$T_{э.с.ф.х} = \sqrt{T_{э.с}^2 + T_{ф.х}^2} \quad (19.28)$$

кўринишда аниқланади.

Кўриб ўтилган учул «иншоот-замин» системасининг эркин тебранишлари даврини аниқлашда, шунингдек иншоотнинг умумий ишида алоҳида омиллар (бино вертикал ўқининг эгилиши ва силжиши, қайишқок заминда бинонинг оғиши ва сирпаниши) улушига баҳо беришда катта қулайлик туғдиради. Бироқ бу усул «иншоот-замин» системасининг тебранишлари шаклини белгилашда махсус ҳисоб ишлари бажаришни талаб этади. Усулнинг кейинги параграфда кўриб ўтиладиган бошқа варианты системанинг эркин тебранишлари даври ва шаклини, барча омилларни ҳисобга олган ҳолда, бир вақтнинг ўзида аниқлаш имконини беради.

19.7. ИНШООТЛАР ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ ДАВРИ ВА ШАКЛИНИ АНИҚЛАШ¹

Бундан олдинги параграфда «иншоот-замин» системасининг тебранишида алоҳида параметрларни аниқлаш масаласи билан танишиб чиккан эдик. Мазкур параграфда иншоотларнинг эркин тебранишлари даври (такрорлиги) ҳамда шаклини бир йўла аниқлаш усулини кўриб ўтамиз. Бу ерда ҳам усулнинг замирида кетма-кет яқинлашув усули ётади, ҳисоблаш тарҳи ҳам аввалгича қолади (19.5-расмга қаранг).

Усулда қўлланиладиган асосий механик миқдорлар: солқилик бурчаги, эгувчи момент ва кўндаланг кучлар қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi_s + \varphi_c \quad (19.29)$$

$$M = -EI \frac{\partial y}{\partial x}, \quad Q = \alpha GF \varphi_c \quad (19.30)$$

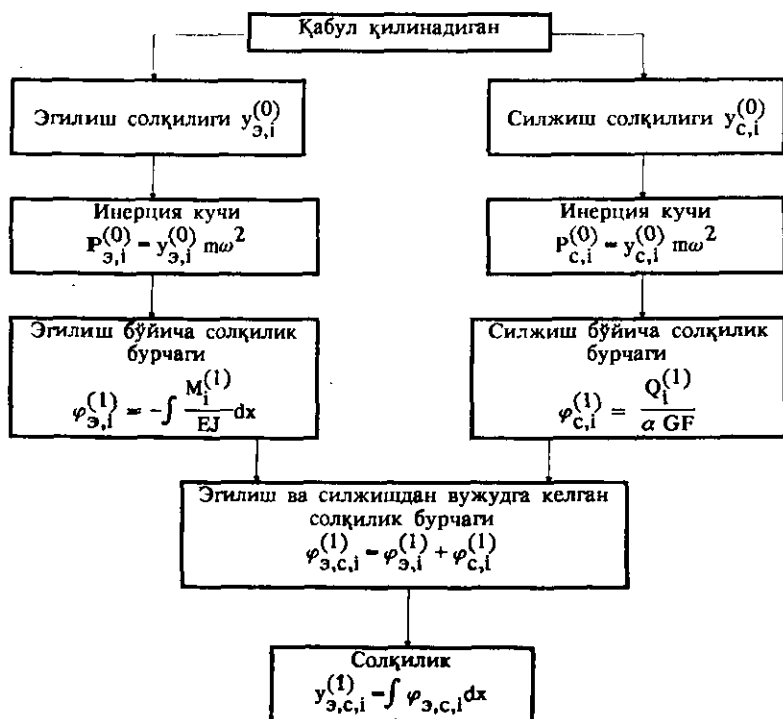
¹. Бу усул К. С. Абдурашидов, Б. А. Хобилов ва В. П. Цой томонидан ишлаб чиқилган.

бу ерда y — иншоот вертикал ўқи нукталарининг эластик оғиши (солқилик); φ — факат эғувчи моментдан ҳосил бўлган оғиш (солқилик) бурчаги; φ_c — кўндаланг кучдан ҳосил бўлган оғиш бурчаги; EI ва GF эгилиш ва силжишдаги бикирликлар; α — кўндаланг кесим шаклига боғлиқ бўлган коэффициент.

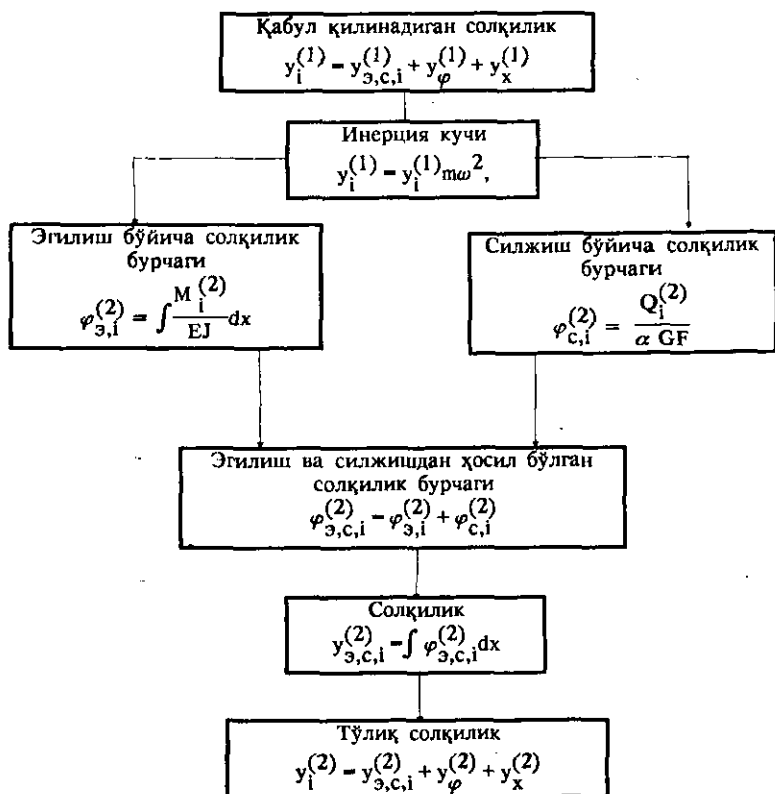
Иншоот вертикал ўқининг солқилиги (19.29) ифодани интеграллаш йўли билан топилади. Интеграллаш алгоритми биринчи ва иккинчи андозаларда берилган.

Ҳисобнинг биринчи босқичи биринчи андозада тасвирланган бўлиб, бунда инерция кучи, эғувчи момент ва қирқувчи кучларни аниқлашда замин қайишқоклиги ҳисобга олинмай, факат иншоотнинг вертикал ўқи солқилиги орқали топилади. Босқич охирида заминга бикир маҳкамланган бинонинг, эгилиш ва силжиш деформацияларидан ташкил топган, солқилиги аниқланади.

Биринчи андоза



Иккинчи андоза



Ҳисобнинг иккинчи босқичида (2- андоза) биринчи яқинлашув учун иншоотнинг тебраниш шакли сифатида қуйидаги ифода қабул қилинади:

$$y_i^{(1)} = y_{z,c,i}^{(1)} + y_\phi^{(1)} + y_x^{(1)}, \quad (a)$$

бу ерда $y_{z,c,i}^{(1)}$ — иншоот вертикал ўқининг эгилиш ва сил- жиш деформацияларидан ташкил топган солқилиги; $y_\phi^{(1)}$ — бинонинг қайишқоқ заминда оғишидан ҳосил бўлган солқилик; $y_x^{(1)}$ — бинонинг замин бўйлаб сирпаниши.

Ўз навбатида кейинги икки микдор қуйидаги формула- лардан топилади:

$$y_\phi^{(1)} = (h_\phi + h_i) \frac{M_{\max}^{(1)}}{c_\phi J_\phi}; \quad y_x^{(1)} = \frac{Q_{\max}^{(1)}}{C_x F_\phi}$$

бу ерда $M_{\max}$ ва $Q_{\max}$ бино асосидаги эгувчи момент ва кўндаланг куч; h_ϕ — пойдевор баландлиги; h_i — пойдевор устжи сиртидан йиғик массаларгача бўлган масофалар.

Иккинчи андозада (a) ифодаси асосида инерция кучлари ҳисобланади. Бу инерция кучлари таъсирида вужудга келадиган эгувчи момент ва кўндаланг кучлар (19.30) формула ёрдамида аниқланади.

Иккинчи андоза бўйича ҳисоб амаллари бажарилиб, бино вертикал ўқининг солқилиги $y_{z,c,i}^{(2)}$ кейин бинонинг тўлиқ горизонтал кўчиши

$$y_i^{(2)} = y_{z,c,i}^{(2)} + y_\phi^{(2)} + y_x^{(2)} \quad (б)$$

аниқланади.

Тебраниш шакллари кетма-кет яқинлаштириш усу- лига биноан

$$y_i^{(2)} = y_i^{(1)} \quad (в)$$

шарти асосида изланаётган такрорликнинг тақрибий киймати, сўнгра тебраниш даври топилади. Тебраниш шакли эса (б) ифодаси асосида аниқланади.

Усулнинг моҳиятини тушунтириш учун мисол келтира- миз. Аввалги параграфда берилган тўрт массали система- нинг тебраниш даври (такрорлиги) ва асосий шаклини аниқлаш талаб этилади, дейлик. Бу сафар ҳам ҳисоб ишларини жадвал кўринишида бажарамиз (3- ва 4- жад- валлар). Қўлай бўлсин учун ҳисоб ишлари андозаларга

мос равишда икки босқичга ажратилган: биринчи босқичда (3- жадвал) замин абсолют бикир деб олиниб, иншоотнинг эгилиш ва силжиш деформациялари натижа-сида ҳосил бўлган кўчишлар аниқланади, иккинчи босқичда эса (4- жадвал) замин қайишқоқлиги эътиборга олинган ҳолда иншоот тебранишининг такрорлиги ва шакли излаб топилади.

Жадвалларнинг «Ҳисоблаш алгоритми» деб номланган охириги устунида навбатдаги қатор рақамларини аввалги қаторлар рақамлари асосида аниқлаш усули берилган. Масалан, (1) · (3) — биринчи қатор рақамларининг учинчи қатор рақамларига мос равишда кўпайтириш лозимлигини англатади; Σ (4) — тўртинчи қатор рақамларини чапдан ўнгга томон йиғиндиси олиниши зарурлигини билдиради. 4- жадвалда кичик қавс билан шу жадвал қаторлари, ўрта қавс билан эса 3- жадвал қаторлари белгиланган. Масалан, [1] · (15) — учинчи жадвалнинг 1- қатори рақамларини 4- жадвалнинг 15- қатори рақамларига кўпайтириш зарур демакдир. Ҳар иккала жадвалда β^2 коэффиценти қуйидаги ифодадан топилади:

$$\beta^2 = \frac{EJ}{\alpha G F \lambda^2};$$

бу ерда λ — йиғиқ массалар орасидаги масофа.

Масала шартда қўйилган саволларга 4- жадвалнинг 20 ва 21- қаторларидан жавоб топамиз. Чунончи, 20- қатор рақамлари тебраниш шаклини англатади. 21- қатор рақамларининг ўртача арифметик қиймати тебраниш такрорлигининг тақрибий қиймати $\omega^y = 9,37$ нг беради. Такрорлиқнинг бу қиймати асосида тебраниш даври аниқланади:

$$T = 0,67 \text{ с.}$$

№	Механик индикторлар							Қўпайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m_4	m_5	m_3	m_2	m_1	x_1		
1	Ҳингик куч	300	300	300	300	300			
2	Бикирлик EJ	1	1	1	1	1		$18 \cdot 10^6$	
3	$y_{s,i}^{(0)} = Z_i^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,7	0,4	0,1	0,0		$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
4	Инерция кучи	300	210	120	30	0,0		$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)(3)
5	Қўндаланг куч Q	300	510	630	660			$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\Sigma(4) \rightarrow$
6	Эгувчи момент M	0,0	300	810	1440	2100		$\lambda \omega^2 y_4 \cdot g$	$\Sigma(5) \rightarrow$
7	Ҳинг фиктив куч	0,0	300	810	1440	2100		$\lambda \omega^2 y_4 \cdot EJg$	(6)(2)
8	Ҳинг фиктив куч	0,0	337,5	810	1440	2100		$\lambda^2 \omega^2 y_4 \cdot EJg$	M эп. юзаси
9	Солқилик бурчаги $\varphi_{s,i}^{(1)}$	4687,5	4350	3540	2100			$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\leftarrow \Sigma(8)$
10	Бикирлик αGF	1	1	1	1			$0,24 \cdot 10^6$	
11	$y_{i,i}^{(0)} = Z_i^{(0)} y_4^{(0)}$	1,0	0,9	0,7	0,3	0,0		$y_4^{(0)}$	қабул қилинади
12	Инерция кучи	300	270	210	90	0,0		$\omega^2 y_4 \cdot g$	(1)(11)
13	Қўндаланг куч Q	300	570	780	870			$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$	$\Sigma(12) \rightarrow$
14	Солқилик бурчаги $\varphi_{s,i}^{(1)}$	300	570	780	870			$\omega^2 y_4 \cdot \alpha GFg$	(13)(10)

№	Механик микдорлар						Қўлайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m_4	m_3	m_2	m_1			
15	$\Phi_{3,i}^{(1)} \cdot \beta^2$	2490	4731	6474	7271		$\lambda^2 \omega^2 y_4 E J g$	(14) $\cdot \beta^2$
16	Солқилик бурчаги $\Phi_{3,i}^{(1)}$	7177,5	9081	10014	9371		— —	(9) + (15)
17	Солқилик $y_{3,i}^{(1)}$	35643,5	28466	19385	9371	0,0	$\lambda^3 \omega^2 y_4 E J g$	$\rightarrow \Sigma (16)$
18	Тебраниш шакли $Z_i^{(1)}$	1,0	0,80	0,54	0,26	0,0		$(y_{3,i})/(y_4)$

№	Механик микдорлар						Қўлайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m_4	m_3	m_2	m_1			
1	Инерция кучлари	300	240	162	78	0,0	$\omega^2 y_4; g$	(1)-(18)
2	Қўдаланг кучлар Q	300	540	702	780		$\rightarrow$	$\Sigma(1) \rightarrow$
3	Эгувчи момент M	0,0	300	840	1542	2322	$\lambda \omega^2 y_4; g$	$\Sigma(2) \rightarrow$
4	$y_1^{(1)} = Z_1^{(1)} y_4^{(1)}$	1,0	0,84	0,58	0,30	0,04	$y_4^{(1)}$	
5	Инерция кучи	300	252	174	90	12	$\omega^2 y_4; g$	[1](4)
6	Қўдаланг куч Q	300	552	726	816	828	$\rightarrow$	$\Sigma(5) \rightarrow$
7	Эгувчи момент M	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda \omega^2 y_4; g$	$\Sigma(6) \rightarrow$
8	Ҳайқ фиктив куч	0,0	300	852	1578	2394 3222	$\lambda \omega^2 y_4; EJg$	(7){12}
9	Ҳйғик фиктив куч	0,0	337,2	852	1578	2399 3222	$\lambda^2 \omega^2 y_4; EJg$	M эп. юзаси
10	Солқилик бурчағи $\varphi_{3,1}^{(2)}$	9393,5	8046	7194	5616	3222	$\rightarrow$	$\rightarrow \Sigma(9)$
11	Солқилик бурчағи $\varphi_{C,1}^{(2)}$	300	552	726	816	828	$\omega^2 y_4; a GFg$	(6){10}
12	$\varphi_{C,1}^{(2)} \cdot \beta^2$	2490	4581,6	6025,8	6772,8	6872,4	$\lambda^2 \omega^2 y_4; EJg$	(11): β^2
13	Солқилик бурчағи $\varphi_{3,с,1}^{(2)}$	10879,5	12627,6	13219,8	12388,8	10094,4	$\rightarrow$	(10)+(12)
14	Солқилик $y_{3,с,1}^{(2)}$	59210,1	48330,6	35703	22483,2	10094,4	$\lambda^3 \omega^2 y_4; EJg$	$\rightarrow \Sigma(13)$
15	Тебраниш шакли $Z_{3,с,1}^{(2)}$	1,0	0,82	0,60	0,38	0,17		$(y_{1,с,1})/(y_4)$

№	Механик микдорлар						Қўлайтувчи	Ҳисоблаш алгоритми
		m_4	m_3	m_2	m_1			
16	Инерция кучи	300	246	180	114	51	$\lambda^3 \omega^2 y_4; E J g$	$[1] + (15)$
17	Қўдаланг куч Q	300	546	726	840	891	$\rightarrow$	$\rightarrow 2(16)$
18	Эгувчи момент M	300	846	1572	2412	3303	$\lambda \omega^2 y_4; g$	$\rightarrow 2(17)$
19	Солқилик $y_4^{(2)}$	74210	59630	43703	26983	11194	$\lambda^3 \omega^2 y_4; E J g$	$(14) + y_9 + y_{11}$
20	Тебраниш шакли $Z_{3,1,9,1}^2$	1.6	0.80	0.59	0.36	0.15		$(y_1)^2; (y_4)^2$
21	Такрорликлар $\omega_1^{(2)}$	9.38	9.36	9.39	9.34	9.36		$\omega_{yp} = 9.37$

МУНДАРИЖА

Кириш	3
1- б о б. Умумий маълумотлар	5
2- б о б. Таъсир чизиклари назарияси	23
3- б о б. Кўп ораликли статик аник балкалар	40
4- б о б. Статик аник фермалар	47
5- б о б. Уч шарнирли аркалар ва рамалар	70
6- б о б. Кўчишлар назарияси	92
7- б о б. Статик ноаниқ рамаларни кучлар усулида ҳисоблаш	123
8- б о б. Кучлар усулини статик ноаниқ балка, ферма ва аркалар ҳисобига тадбики	148
9- б о б. Статик ноаниқ рамаларни кўчишлар усулида ҳисоблаш	172
10- б о б. Статик ноаниқ рамаларни ҳисоблашнинг тақрибий усул - лари	201
11- б о б. Қурилиш механикаси масалаларига матрицалар назария - сининг тадбики	210
12- б о б. Чекли элементлар усули	249
13- б о б. Стерженьли системаларнинг устуворлиги	272
14- б о б. Иншоотлар динамикаси асослари	299
15- б о б. Эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системалар	304
16- б о б. Тебранишлар назариясининг техникага тадбики	327
17- б о б. Эркинлик даражаси бир нечта бўлган системалар	331
18- б о б. Эркинлик даражаси чексиз бўлган системалар	346
19- б о б. Иншоотлар тебранишини тадқиқ этишнинг тақрибий усул - лари	355

Абдурашидов Кабул Садыкович,
Хабилов Батыр Абдумаликович,
Тўйчиев Надыр Джамалович,
Раҳимбаев Анвар Гафурович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» 700129,
Ташкент, Навои, 30.

Бадий муҳаррир Т. Қаноатов
Техник муҳаррир У. Қим
Мусахҳих У. Абдуқодирова

Теришга берилди 20.03.96. Босишга рухсат этилди 11.02.99. Бичим
84×108¹/₃₂. «Таймс» гарнитурда офсет босма усулида босилди.
Шартли бос. т. 20,16. Нашр т. 18,36. Нусхаси 1000. Буюртма № 733.
Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 247—94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг
ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди.
700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30.