ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

РАСУЛОВ ХУДОЙБЕРДИ.

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА АЛГОРИТМЛАР НАЗАРИЯСИ

(МАЪРУЗАЛАР МАТНИ)

Наманган 2011

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Наманган Давлат Университети

РАСУЛОВ ХУДОЙБЕРДИ.

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА АЛГОРИТМЛАР НАЗАРИЯСИ

(Маърузалар матни)

Маърузалар матни университетларнинг 5140100 – математика ва информатика бакалавриат йўналишларида таҳсил олаётган талабалар учун математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси фанидан амалдаги ўқув дастур асосида ёзилган.. Маърузалар матнида математик мантиқ ва алгоритмлар назариясининг дастлабки элементлари – мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби, предикатлар алгебраси, алгоритмлар назарияси элементлари баён қилинган бўлиб, ҳар бир тушунча маъноси характерли мисоллар билан очиб берилган.

Тақризчилар: ф.–м.ф.н., доц. М. Хатамов

НамМПИ "Олий математика" кафедраси катта ўқитувчиси ф.–м.ф.н., Б. Жамолов

Наманган – 2011

Кириш

Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси, математикага оид исботларни ўрганадиган ва математика фанини асослайдиган ҳозирги кундаги изланишларда ҳал қилувчи рол ўйнайди, у барча математикага оид фанлар системасига кириб боради, унинг базасида математика фани—қатъий мантиқан қурилиши мумкин бўлади, яъни зиддиятга эга бўлмайди.

Математикага ва физикага тааллуқли изланишлар жараёни шундай нозик тушунчаларни ўрганишни, айрим муаммоларни ҳал этишни, таҳлил қилишни талаб этадики, уларни фақат математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси ёрдамидагина ҳал этиш мумкин.

1§. Мулоҳазалар алгебраси.

Мулоҳаза тушунчаси.

Мулоҳаза тушунчаси математикадаги бошланғич тушунчалардан бири ҳисобланади.

Математик мантиқда, мулоҳаза деб, рост ёки ёлғонлиги ҳақида гапириш мумкин бўлган ҳар қандай дарак гапга айтилади.

1. Сўроқ ва ундов гаплар мулоҳаза ҳисобланмайдилар. Масалан, «Соли мактабга келасанми?», «Яшасин янги йил!» гаплари мулоҳаза ҳисобланмайдилар.

2. Баъзи гапларнинг рост ёки ёлғонлигини бир қийматли аниқлаш мумкин эмас. Масалан: «Лолахон чиройли қиз», «Ромсозлик қийин касб», «Бугун ҳаво яхши эмас» каби гапларни келтириш мумкин. Бу гапларни рост ёки ёлғонлигини субъектив сабабларга кўра аниқлаш мумкин эмас.

3. Шундай гаплар ҳам борки, бу гапларнинг таркибида қандайдир объектларнинг умумий номлари—номаълумлар иштирок этади. Масалан, «x сон y сонга бўлинади», «x рационал сон», «$sinx+cosx=0$», «$sinx\leq\frac{1}{2}$», «x Норин туманининг маркази», «$x+2=81$», «x қиз y қизнинг дугонаси», «z бугун 60 кг пахта терди». Аниқки, бу гапларни мулоҳаза дея олмаймиз, чунки уларнинг рост ёки ёлғонлигини аниқлашда, гап таркибидаги номаълумлар ҳалақит беради. Аммо, бу гаплар таркибидаги номаълумларни бирор тўпламнинг элементлари билан алмаштирсак, улар рост ёки ёлғон мулоҳазаларга айланиши мумкин. Масалан, биринчи мисолда x ва y ўзгарувчиларга маълум бир бутун сонларни, иккинчи мисолда x ўрнига рационал сонларни, учинчи мисолда x ўрнига ҳақиқий сонларни, тўртинчи мисолда ҳам ҳақиқий сонларни, бешинчи мисолда x ўрнига туман марказлари номларини, олтинчи мисолда x ўрнига натурал сонларни, еттинчи мисолда x ва y лар ўрнига қизлар номларини, саккизинчи мисолда z ўрнига одамларни номларини қўйилганда рост ёки ёлғон мулоҳазаларни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, юқорида кўрсатилган уч типга кирувчи гаплар ҳам мулоҳаза ҳисобланмайдилар.

Бундан сўнг мулоҳазаларни лотин алфавитининг катта A, B, C, ... ҳарфлари билан белгилаймиз. Агар бизга A ва B мулоҳазалари берилган бўлса, улардан «ва», «ёки», «агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади», «шу ҳолда ва фақат шу ҳолда» боғловчилари, ҳамда «эмас» юкламаси ёрдамида янги мулоҳазаларни ҳосил қилишимиз мумкин. Мулоҳазалар ўртасидаги мантиқий боғловчиларни мулоҳазалар устида бажариладиган мантиқий амаллар (операциялар) деб қараш мумкин.

Агар қаралаётган мулоҳаза, камида иккита мулоҳазага бўлинмаса, яъни юқорида келтирилган мантиқий амаллар воситасида камида иккита мулоҳаза орқали ифодаланмаса, у ҳолда бундай мулоҳазани элементар мулоҳаза дейилади.

Масалан, «Ёмғир ёғди», «6 туб сон», «$\sin 0=0$», «4>1», «Бир йил ўн икки ойдан иборат» мулоҳазалари элементар, «Агар тўртбурчакнинг қарама—қарши томонлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак параллелограммдир», «Агар 2>3 бўлса, у ҳолда Лондон шаҳри Германиянинг пойтахтидир» мулоҳазалари эса мураккаб мулоҳазалардир.

Мулоҳазалар мантиқида мулоҳазаларни мазмунига ёки маъносига кўра қаралмасдан, фақат уни ростлиги ёки ёлғонлигини ҳисобга олиб фикр юритилади.

Агар бирор A элементар мулоҳаза рост бўлса, унинг ростлик қиймати— «Рост», ёлғон бўлса, унинг ростлик қиймати— «Ёлғон» қийматни қабул қилади деб, мос равишда A мулоҳазанинг ростлик қийматларини Р (1) ва Ё (0) ҳарфлари (рақамлари) билан белгилаймиз. Мураккаб мулоҳазанинг ростлик қиймати, уни таркибига кирувчи элементар мулоҳазаларнинг ростлик қийматларидан фойдаланиб аниқланади.

Мулоҳазанинг инкори

1—таъриф: A мулоҳаза рост бўлганда ёлғон, ёлғон бўлганда рост бўладиган мулоҳазага, A мулоҳазанинг инкори дейилади.

A мулоҳазанинг инкорини $\rceil A$ ёки $\overline{A}$ билан белгиланади ва уни «A эмас» деб ўқилади.

A мулоҳаза «3 сони 432 сонининг бўлувчисидир» бўлса, у ҳолда $\rceil A$ мулоҳаза «3 сони 432 сонини бўлувчиси эмас» бўлади.

Мулоҳазани инкорининг ростлик қиймати жадвали қуйидагича ифодаланади:

A	$\rceil A$
Р	Ё
Ё	Р

Мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси

A ва B элементар мулоҳазаларни «ёки» боғловчиси билан бирлаштириб, A ва B мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси дейиладиган янги мулоҳазага эга бўламиз.

2—таъриф: A ва B мулоҳазалардан камида биттаси рост бўлганда ва фақат шу ҳолда рост бўладиган мулоҳазага, A ва B мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси дейилади ва уни $A \vee B$ кўринишда белгиланади.

$A \vee B$ мулоҳазани «A ёки B», «A дизъюнкция B» деб ўқилади.

Масалан, «21>3» ва «21=6» элементар мулоҳазалардан «21>3 ёки 21=6» мулоҳазани ҳосил қилайлик. Кўриш қийин эмаски, бу дизъюнкция рост, чунки унинг таркибига кирувчи «21>3» элементар мулоҳаза ростдир.

«Қуёш ойнинг атрофида айланади ёки 24 сони 0 сонига бўлинади» мулоҳазаси ёлғондир, негаки, бу мулоҳазаларни ташкил этувчи мулоҳазаларнинг иккаласи ҳам ёлғондир.

Мулоҳазалар дизъюнкциясининг ростлик қийматлари жадвали қуйидагича аниқланади.

A	B	$A \vee B$
Р	Р	Р
Р	Ё	Р
Ё	Р	Р
Ё	Ё	Ё

Мулоҳазаларнинг конъюнкцияси

A ва B элементар мулоҳазалар бўлсин. Уларни « ва » боғловчиси билан бирлаштириб, A ва B мулоҳазаларнинг конъюнкцияси дейиладиган янги мулоҳазага эга бўламиз. Уни қуйидагича таърифлаш мумкин.

3—таъриф: A ва B мулоҳазалар бир вақтда рост бўлганда ва фақат шу ҳолда рост бўладиган мулоҳазага A ҳамда B мулоҳазаларнинг конъюнкцияси дейилади ва уни $A \wedge B$ кўринишида белгиланади.

Мулоҳазалар конъюнкциясини яна мантиқий кўпайтма ҳам дейилиб, уни кўпинча $A \cdot B$ (ёки AB) кўринишда белгиланади, «$\wedge$»

белги ўрнига эса, баъзан «&» белги ҳам қўлланилади.

A ва *B* мулоҳазаларнинг конъюнкциясини «*A* ва *B*» ёки «*A* конъюнкция *B*» деб ўқилади.

A ва *B* мулоҳазаларни конъюнкциясининг ростлик қийматлари жадвалини, таърифга кўра қуйидагича ифодалаш мумкин:

A	B	$A \wedge B$
Р	Р	Р
Р	Ё	Ё
Ё	Р	Ё
Ё	Ё	Ё

Мулоҳазаларнинг импликацияси

4–Таъриф: *A* мулоҳаза рост, *B* мулоҳаза ёлғон бўлганда ва фақат шу ҳолда ёлғон бўладиган мулоҳаза, *A* ва *B* мулоҳазаларнинг импликацияси дейилади ва уни $A \to B$ кўринишда белгиланади.

A ва *B* мулоҳазаларнинг импликацияси «агар *A* бўлса, у ҳолда *B* бўлади» ёки «*A* мулоҳазадан *B* мулоҳаза келиб чиқади» ёки «*A* импликация *B*» деб ўқилади. *A* импликация *B* дейилганда, *A* мулоҳаза– импликациянинг шарти, *B* мулоҳазага эса унинг хулосаси дейилади.

A мулоҳаза: –«Кеча якшанба эди», *B* мулоҳаза эса «Мен ишда бўлмадим» бўлсин. Бу вазиятда «Агар кеча якшанба бўлса, у ҳолда мен ишда бўлмадим» мураккаб мулоҳазанинг формаси «Агар *A* бўлса, у ҳолда *B* бўлади» кўринишига эга бўлади.

Таърифга кўра *A* ва *B* мулоҳазаларни импликациясининг ростлик қийматлари жадвали қуйидагича бўлади.

A	B	$A \to B$
Р	Р	Р
Р	Ё	Ё
Ё	Р	Р
Ё	Ё	Р

$A \to B$ импликацияда *A* ва *B* мулоҳазаларни ўрнини алмаштириб $B \to A$ импликацияга эга бўламиз.

$B \to A$ импликация $A \to B$ импликацияга тескари импликация дейилади.

Ростлик жадваллари ёрдамида, $A \to B$ импликацияни ростлигидан ҳар доим ҳам унга тескари бўлган $B \to A$ импликациянинг ростлиги келиб чиқавермаслигини текшириб кўриш қийин эмас.

Мулоҳазаларнинг эквиваленцияси

5—таъриф: A ва B мулоҳазалар бир хил қиймат қабул қилгандагина рост бўлиб, қолган барча ҳолларда ёлғон бўладиган мулоҳазага A ва B мулоҳазаларнинг эквиваленцияси дейилади ва уни $A \leftrightarrow B$ кўринишда белгиланади.

A ва B мулоҳазаларнинг эквиваленциясини «A эквивалент B» ёки «A мулоҳазаларнинг бажарилиши учун B мулоҳазанинг бажарилиши зарур ва етарлидир», «A бажарилган ҳолда ва фақат шу ҳолда B бажарилади» деб ўқилади.

A ва B мулоҳазаларнинг эквиваленцияси учун, ростлик қийматлари жадвали қуйидагичадир:

A	B	$A \leftrightarrow B$
Р	Р	Р
Р	Ё	Ё
Ё	Р	Ё
Ё	Ё	Р

Айнан рост, айнан ёлғон ва бажарилувчи мулоҳазалар.

$F(A_1, A_2, ..., A_n)$ мулоҳаза, таркибига фақат $A_1, A_2, ..., A_n$ элементар мулоҳазалар кирган ихтиёрий мураккаб мулоҳаза бўлсин. Юқоридан маълумки, ҳар бир элементар мулоҳаза «рост» ёки «ёлғон» қийматни қабул қилади. Мураккаб мулоҳазага кирган ҳар бир элементар мулоҳазани Р ёки Ё символ билан алмаштирсак, $A_1, A_2, ..., A_n$ элементар мулоҳазаларнинг қийматларидан тузилган, ҳамда Р ва Ё символларидан ташкил топган набор ҳосил бўлади. Бундай наборни умумий ҳолда $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ кўринишда белгилаймиз ва уни $A_1, A_2, ..., A_n$ элементар мулоҳазалар қийматларининг набори деймиз.

Равшанки, бунда α_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ символ Р ёки Ё қийматларидан фақат биттасини қабул қилади. Одатда (Р,Р,...,Р) наборни «биринчи», (Ё,Ё,...,Ё) наборни эса «охирги» набор дейилади. Яна шуни ҳам айтиш керакки, бу наборлардаги символлар сони $F(A_1, A_2,..., A_n)$ мураккаб мулоҳазадаги элементар мулоҳазалар сонига тенг бўлиб биз қараётган ҳолда, символларнинг сони n натурал сонига тенгдир. Бу n сонига наборнинг узунлиги дейилади. n дона символдан ташкил топган иккита наборни бир–биридан фарқлаш мақсадида, наборларнинг тенглиги тушунчасини киритамиз.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$ набор $\beta = (\beta_1, \beta_2,..., \beta_n)$ наборга, $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2,..., \alpha_n = \beta_n$ бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда тенг дейилади.

6–таъриф: Мураккаб мулоҳаза ўзининг таркибига кирувчи элементар мулоҳазаларнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари наборларида рост бўлса, у ҳолда айнан рост мулоҳаза ёки тавтология дейилади.

Равшанки, $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A,\ A \vee 7A,\ A \to A$ мулоҳазалар тавтологиялардир.

$((A \to B) \wedge A) \to B$ мураккаб мулоҳаза ҳам тавтологиядир.

7–таъриф: Мураккаб мулоҳаза, ўзининг таркибига кирувчи элементар мулоҳазаларни қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари наборларидан камида биттасида рост қийматни қабул қилса, уни бажарилувчи мулоҳаза дейилади.

8–таъриф: Мураккаб мулоҳаза ўзининг таркибига кирувчи элементар мулоҳазаларнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари наборларида ёлғон бўлса, уни айнан ёлғон ёки зиддиятли дейилади.

Мулоҳазалар алгебрасининг формулалари

A, *B*, *C*, … символлар элементар мулоҳазаларни билдирсин. Уларни ҳар бири рост ёки ёлғон қийматни қабул қилиши мумкин бўлган ўзгарувчи сифатида қараш мумкин. Одатда бу ўзгарувчилар пропозиционал ўзгарувчилар дейилади, шунингдек уларни элементар формулалар ҳам деб юритилади. Мулоҳазалар алгебрасининг асосий тушунчаларидан бири формула тушунчаси бўлиб, уларни қуриш учун юқорида келтирилган ўзгарувчи символлардан ташқари логик (мантиқий) амал белгилари $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\rceil$ ҳамда (,) чап ва ўнг қавслардан фойдаланамиз. Формула тушунчасини қуйидагича таърифлаймиз.

Таъриф: 1. Ҳар бир пропозиционал ўзгарувчи формуладир.

2. Агар F ва G символлар формула бўлсалар, у ҳолда $(F \leftrightarrow G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $\rceil F$ ифодалар ҳам формулалардир.

3. Мулоҳазалар алгебрасининг формулалари фақат 1—ва 2—пунктлар ёрдамида ҳосил килинади.

1—мисол: $((A \rightarrow B) \vee F)$ ифода формуладир.

2— мисол: $A \vee B$ ифода формула эмас, чунки бу формулада ташқи қавслар етишмайди.

Тенг кучли формулалар ва тенг кучли алмаштиришлар

Мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий формуласи ўзининг ростлик жадвали билан характерланади.

1—мисол. $A \rightarrow B \wedge 7C$ формулага ушбу ростлик жадвали мос келади.

A	B	C	$7C$	$B \wedge 7C$	$A \rightarrow B \wedge 7C$
Р	Р	Р	Ё	Ё	Ё
Р	Р	Ё	Р	Р	Р
Р	Ё	Р	Ё	Ё	Ё
Р	Ё	Ё	Р	Ё	Ё
Ё	Р	Р	Ё	Ё	Р
Ё	Р	Ё	Р	Р	Р
Ё	Ё	Р	Ё	Ё	Р
Ё	Ё	Ё	Р	Ё	Р

Таъриф. Агар мулоҳазалар алгебрасининг $F_1(A_1 A_2,...A_n)$ ва $F_2(A_1 A_2,...A_n)$ формулалари пропозиционал ўзгарувчилар мос қийматларининг барча наборларида бир хил қиймат қабул қилсалар, бу формулаларни тенг кучли формулалар дейилади.

$F_1(A_1 A_2,...A_n)$ ва $F_2(A_1 A_2,...A_n)$ формулаларни тенг кучли эканлигини $F_1(A_1 A_2,...A_n) \equiv F_2(A_1 A_2,...A_n)$ кўринишда ёзилади.

Таърифга кўра 1– ва 2– мисоллардаги формулалар тенг кучлидир, яъни $A \to B \wedge 7C \equiv (7A \vee B) \wedge 7(A \wedge C)$.

Мантиқий амалларнинг таърифидан фойдаланиб баъзи тенг кучлиликларни бевосита исботлаш мумкин, масалан;

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A, \quad 77A \equiv A, \quad 7A \wedge A \equiv \text{Ё}, \quad 7A \vee A \equiv \text{Р}$$

муносабатлар ўринлидир.

Таърифга кўра, формулаларнинг тенг кучли эканлигини аниқлашнинг умумий усули қуйидагича;

Ҳар бир формула учун ростлик жадвали тузилади, пропозиционал ўзгарувчиларнинг бир хил наборларида формулаларнинг қабул қиладиган қийматлари солиштирилади, агар наборларнинг барча мос комбинацияларида формулаларнинг қийматлари бир хил бўлса, бу формулалар тенг кучли бўлади.

Қуйидаги тенгкучлиликлар, мулоҳазалар логикасининг асосий тенг кучлиликлари ҳисобланадилар.

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ / конъюкциянинг ўрин алмашувчанлиги / .
2. $A \vee B \equiv B \vee A$ / дизъюнкциянинг ўрин алмашувчанлиги / .
3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ / конъюнкциянинг ассоциативлиги / .
4. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ / дизъюнкциянинг ассоциативлиги / .
5. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ / дизъюнкциянинг конъюнкцияга нисбатан дистрибутивлиги / .
6. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ / конъюнкциянинг дизъюнкцияга нисбатан дистрибутивлиги / .
7. $A \wedge A \equiv A$ / конъюнкциянинг идемпотентлиги / .
8. $A \vee A \equiv A$ / дизъюнкциянинг идемпотентлиги / .
9. $A \wedge P \equiv A$.
10. $A \vee P \equiv P$.
11. $A \wedge \ddot{E} \equiv \ddot{E}$.
12. $A \vee \ddot{E} \equiv A$.
13. $A \wedge 7A \equiv \ddot{E}$.
14. $A \vee 7A \equiv P$.
15. $7(A \wedge B) \equiv 7A \vee 7B$ / де Морган тенгкучлиликлари / .
16. $7(A \vee B) \equiv 7A \wedge 7B$ / де Морган тенгкучлиликлари / .
17. $A \to B \equiv 7A \vee B$ / импликациянинг инкор ва конъюнкция билан ифодаланиши / .
18. $77A \equiv A$ / қўш инкор тенгкучлилиги / .
19. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Кўрилган тенг кучлиликларнинг ҳар бирининг ўринли эканлигини ростлик жадвалларини тузиш ёрдамида исботлаш мумкин. Бу тенг кучлиликлар ёрдамида, берилган формулага тенг кучли формулаларни ҳосил қилиш, берилган формулаларнинг тенг кучлилигини аниқлаш, формулаларни соддароқ кўринишга келтириш, ҳамда берилган формулани айнан рост, айнан ёлғон, бажарилувчи эканлигини аниқлаш мумкин.

Биз мулоҳазалар алгебрасида формула тушунчасини киритишда мулоҳазалар тўпламидан олинган ҳар қандай элементар мулоҳазага бирор пропозиционал ўзгарувчини мос қўйган эдик. Шу муносабат билан аввал таърифларини келтирганимиз, айнан рост, айнан ёлғон ва бажарилувчи мулоҳазаларни, формула тушунчасини қўллаб, мос равишда айнан рост формула, айнан ёлғон формула, бажарилувчи формула тушунчалари билан бир хил тушунчалар деб қараймиз. Шунингдек, формула тушунчаси ёрдамида таърифлаганимизда тенг кучли формулалар тушунчасини ҳам тенг кучли мулоҳазалар тушунчаси билан бир хил деб ҳисоблаймиз. Умуман мулоҳазалар алгебрасида мулоҳазалар алгебрасининг формуласи деганда қандайдир мулоҳазани назарда тутамиз.

Ҳар қандай мулоҳазага бирор формула мос келиши ва формулалар учун кўриб чиқилган тенг кучлиликларни ҳисобга олиб, мулоҳазалар учун ҳам тенг кучлиликларни қўллаш мумкин, яъни мулоҳазани бошқа бирор тенг кучли мулоҳазага алмаштириш, берилган мулоҳазаларни тенг кучлилигини аниқлаш, мураккаб мулоҳазани айнан рост ёки айнан ёлғон эканлигини аниқлаш мумкин.

Мулоҳазалар алгебрасида ечилиш проблемаси. нормал формалар

Биз юқорида кўрдикки, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай фомуласи ё айнан рост (тавтология), ё айнан ёлғон (зиддиятли), ё бажарилувчи бўлар экан.

Берилган формуланинг юқорида айтилган синфлардан қай бирига тегишли бўлишини аниқлаш масаласи муҳим аҳамиятга эга бўлиб, бу масала мулоҳазалар алгебрасида ечилиш проблемаси номи билан аталади.

Биз юқорида ҳар қандай формула учун бу масалани ҳал қилиш усулларидан бири бўлган жадвал усули билан танишдик. Бу усул жуда содда ва равшан бўлишига қарамай, айрим ноқулайликларга эгадир. Масалан, тўрт пропозиционал ўзгарувчили формулани текшириш учун 2^4 яъни 16 сатрга эга бўлган жадвал тузишга, n ўзгарувчили формулани текшириш учун эса, 2^n сатрга эга бўлган жадвал тузишга тўғри келади. Бундай жадвални тузиб, натижани аниқлаш, амалий жиҳатдан равшанки бир мунча қийинчилик туғдиради. Табиий, шу муносабат билан бу масалани ҳал этишни бошқа, аввалги усулидан фарқли усули бормикан деган савол туғилади. Қуйида бу саволга формулаларнинг «нормал формаси» тушунчаси жавоб беради.

Келтирилган формула.

1—таъриф: Агар формуланинг таркибида мантиқий амаллардан фақат конъюнкция, дизъюнкция ва инкор амалларигина қатнашган бўлиб, инкор амали фақат пропозиционал ўзгарувчиларгагина тегишли бўлса, бундай формула келтирилган формула дейилади.

Дизъюнктив ва конъюнктив нормал формалар

Бундан кейин, ёзувни янада соддалаштириш мақсадида, мулоҳазанинг қиймати ростлигини ифодаловчи **Р** ўрнига 1 рақамидан, ёлғон қийматини ифодаловчи **Ё** ўрнига 0 рақамидан фойдаланамиз. Баъзи ҳолларда эса, $A \wedge B$ формулани $A \cdot B$ кўринишда ёзамиз, ҳамда A, $\rceil A$ формулалар учун ушбу белгилашни киритамиз:

$$A^{\alpha} = \begin{cases} A, & \text{агар } \alpha = 1 \text{ бўлса} \\ 7A, & \text{агар } \alpha = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

яъни, $A^1 = A$, $A^0 = 7A$ деб ҳисоблаймиз.

2—таъриф: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири 0 ёки 1 қийматларни қабул қилганларида

$$A_{i_1}^{\alpha_1} \wedge A_{i_2}^{\alpha_2} \wedge ... \wedge A_{i_n}^{\alpha_n}, \ (i_n \geq 1)$$

формулага элементар конъюнкция дейилади.

3—таъриф: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири 0 ва 1 қийматларни қабул қилганларида

$$A_{i_1}^{\alpha_1} \vee A_{i_2}^{\alpha_2} \vee ... \vee A_{i_n}^{\alpha_n}, \ (i_n \geq 1)$$

формулага элементар дизъюнкция дейилади.

6–таъриф: Элементар дизъюнкцияларнинг ҳар қандай конъюнкциясидан ташкил топган формула конъюнктив нормал форма (КНФ) ёки коньюктив нормал формадаги формула дейилади.

Мукаммал дизъюнктив ва мукаммал конъюнктив нормал формалар.

7–таъриф: Ҳар бир пропозиционал ўзгарувчининг ё ўзи, ё инкори бир мартадан ортиқ қатнашмаган элементар конъюнкция тўғри элементар конъюнкция дейилади.

Мисоллар: Таърифга кўра $A, A \wedge B,\ 7A \wedge B,\ \ 7A \wedge B \wedge C \wedge D$ формулалар тўғри элементар конъюнкциялардир. $A \wedge 7A,\ B \wedge B \wedge C \wedge D \wedge D$ формулалар эса, элементар конъюнкциялар бўлгани ҳолда, тўғри элементар конъюнкциялар эмас, чунки $A \wedge 7A$ элементар конъюнкцияда A ўзгарувчи ўзининг инкори билан, $B \wedge B \wedge C \wedge D \wedge D$ формулада эса B, D пропозиционал ўзгарувчилар икки мартадан қатнашмоқда.

8–таъриф: Ҳар бир пропозиционал ўзгарувчининг ё ўзи ё инкори бир мартадан ортиқ қатнашмаган элементар дизъюнкция тўғри элементар дизъюнкция дейилади.

9–таъриф: $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчилардан ташкил топган тўғри элементар конъюнкцияда, ҳар бир ўзгарувчи роса бир марта қатнашган бўлса, бу тўғри элементар конъюнкция, $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчиларга нисбатан тўлиқ элементар конъюнкция дейилади.

10–таъриф: $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчиларда ташкил топган тўғри элементар дизъюнкцияда, ҳар бир ўзгарувчи роса бир марта қатнашган бўлса, бу тўғри элементар дизъюнкция $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчиларга нисбатан тўлиқ элементар дизъюнкция дейилади.

11–таъриф: Мулоҳазалар алгебрасининг $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчилардан ташкил топган $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ формуласининг мукаммал дизъюнктив нормал форма (МДНФ) си деб, шу формуланинг таркибида бир хил элементар конъюнкциялар бўлмаган, ҳамда барча элементар конъюнкциялари $A_1, A_2, ..., A_n$

ўзгарувчиларга нисбатан тўғри, тўлиқ бўлган ДНФ сига айтилади.

Таърифга биноан, айнан ёлғон формула учун МДНФ мавжуд эмас, чунки агар унинг учун МДНФ мавжуд бўладиган бўлса, бундай МДНФнинг таркибидаги ҳар бир қўшилувчи элементар конъюнкция айнан ёлғон бўлмоғи лозим. Буни бўлиши МДНФ таркибидаги элементар конъюнкцияларда пропозиционал ўзгарувчининг ҳам ўзи, ҳам инкорини қатнашишини тақозо қилади. Бу ҳолат формула учун МДНФ таърифидаги в) пунктни бажарилмаслигини билдиради.

12—таъриф. Мулоҳазалар алгебрасининг $A_1, A_2, ..., A_n$ пропозиционал ўзгарувчилардан ташкил топган $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ формуласининг мукаммал конъюнктив нормал форма (МКНФ) си деб, шу формуланинг таркибида бир хил элементар дизъюнкциялар бўлмаган, ҳамда барча элементар дизъюнкциялари $A_1, A_2, ..., A_n$ ўзгарувчиларига нисбатан тўғри ва тўлиқ бўлган КНФ сига айтилади.

1—теорема: Мулоҳазалар мантиқининг айнон ёлғон бўлмаган ҳар қандай $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ формуласи ягона МДНФга тенг кучлидир.

1—натижа: Тенг кучли формулалар бир хил МДНФ га эга бўлади.

2—натижа: Таркибида n та ҳар хил ўзгарувчилар қатнашган формула айнан рост бўлиши учун унинг МДНФ си роса 2^n та ҳар хил тўлиқ конъюнкциялар дизъюнкциясидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

3—натижа: Мулоҳазалар алгебрасини ҳар қандай формуласининг инкори, шу формула МДНФ сига кирмайдиган тўлиқ конъюнкцияларнинг ва фақат шуларнинг дизъюнкциясидан иборатдир.

Мулоҳазалар алгебрасини формулалари МКНФ си учун ҳам худди юқоридаги каби ушбу теореманинг ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин.

2—теорема: Мулоҳазалар алгебрасининг айнан рост бўлмаган ҳар қандай $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ формуласи ягона МКНФ га тенг кучлидир.

1—натижа: Тенг кучли формулалар бир хил МКНФ га эга бўлади.

2—натижа: Таркибида n та ҳар хил ўзгарувчилар қатнашган формула айнан ёлғон бўлиши учун унинг МКНФ си 2^n та ҳар хил тўлиқ элементар дизъюнкцияларнинг конъюнкциясидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

3—натижа: Мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай формуласининг инкори шу формула МКНФ сига кирмаган тўлиқ элементар дизъюнкцияларнинг ва фақат шуларнинг конъюнкциясидан иборат бўлади.

Юқорида келтирилган теоремалар ва уларнинг натижалари ёрдамида мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай формуласини айнан рост, айнан ёлғон ёки бажарилувчи формула бўлишини ростлик жадвалидан фойдаланмай аниқлаш мумкин. Шунингдек, берилган қийматлар наборларига кўра мулоҳазалар алгебрасининг формуласини тузиш мумкин.

Умуман, мулоҳазалар алгебрасиининг кўпгина масалаларини мукаммал нормал формалар ёрдамида осон ҳал қилиш мумкин.

2§. Теоремалар

Теорема ва унинг исботи.

Ҳар қандай математик назарияда қаралаётган объектни асосий хоссалари, бу объект ҳақидаги тушунчаларнинг мазмунини ташкил этади. Ана шу хоссаларнинг бир қисми қаралаётган тушунчаларни таърифлашга ажратилади. Мазкур объект ҳақида етарлича тасаввурга эга бўлиш мақсадида, унинг бошқа хоссаларини ҳам ўрганилади. Тушунчанинг бошланғич хоссалари исботсиз қабул қилинадиган аксиомаларда очиб берилади.

Масалан, геометриянинг «нуқта», «тўғри чизиқ» каби бошланғич тушунчаларининг хоссалари қуйидаги аксиомаларда киритилган:

1. Тўғри чизиқ қандай бўлишидан қатъий назар, унда ётувчи ва унда ётмайдиган нуқта мавжуд.
2. Ҳар қандай икки нуқтадан тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.

Биз бу ерда берилган тушунчани баъзи хоссаларини очиб берувчи аксиомаларни келтирдик. Умуман олганда, исталган математик назарияни аниқловчи аксиомалар системаси, асосий тушунчаларни хоссаларини очиб бериб уни таърифини ифодалайди. Бу таърифлар, аксиомалар системаси ёрдамида берилган дейиладилар.

Масалан, группалар назариясини қарайлик. Бу назария учун қуйидаги аксиомалар, аксиомалар системаси хизматини ўташ билан бирга, группа тушунчасининг таърифи ҳамдир.

Агар A тўпламда «*» бинар амал аниқланган бўлиб,

1. «*» амал ассоциатив: $\forall x,y,z\in A$, $(x*y)*z=x*(y*z)$.
2. A тўплам «*» амалга нисбатан нейтрал (бирлик) e элементга эга: $\forall x\in A$, $\exists e\in A$, $x*e=e*x=x$.
3. A тўпламнинг ҳар бир x элементи учун симметрик (тескари) x^{-1} элемент мавжуд: $\forall x\in A$, $\exists x^{-1}\in A$, $x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$.

шартлар (аксиомалар) ўринли бўлса, у ҳолда A тўпламни «*» амалга нисбатан группа ташкил этади дейилади.

Ҳар қандай теорема ҳам тузилиши жиҳатдан асосан икки қисмдан иборат бўлиши мумкин бўлиб, бу қисмлар теореманинг шарти ва хулосасидир. Теореманинг шарт қисмини A, хулоса қисмини B ва у ҳолда сўзини «$\to$» логик амал белгиси билан алмаштириб, уни $A\to B$ импликация кўринишида ифодалаш мумкин. Шундай қилиб, баъзи теоремаларнинг умумий ифодаланиши «Агар A бўлса, у ҳолда B бўлади» кўринишида бўлади.

Тўғри ва тескари теорема.

$A\to B$ теорема, ихтиёрий теорема бўлсин. Буни одатда тўғри теорема деб юритилади.

$B\to A$ теорема $A\to B$ теоремага тескари бўлган теорема дейилади.

Бундан кўринадики, тўғри теоремага тескари теорема, тўғри теореманинг шарт ва хулоса қисмларининг ўринларини алмаштириш билан ҳосил қилинар экан.

Масалан, «Агар иккита қўшилувчиларнинг ҳар бири жуфт сон бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси ҳам жуфт сондир» деган теоремани қарайлик. Бунда, A: — «Иккита қўшилувчиларнинг ҳар бири жуфт сон, B: — «Қўшилувчиларнинг йиғиндиси ҳам жуфт сондир». У ҳолда бу теоремага тескари бўлган теорема—«Агар иккита қўшилувчиларнинг йиғиндиси жуфт сон бўлса, у ҳолда қўшилувчиларнинг ҳар бири жуфт сондир» кўринишида бўлади. Кўриб турибмизки бу мисолда тўғри теорема ўринли, лекин унга тескари бўлган теорема ўринли эмас. Бундан, умуман олганда тўғри теорема ўринли бўлгани ҳолда, тескари теорема ҳар доим ҳам ўринли бўлавермаслиги келиб чиқади. Бунинг сабабини тўғри теоремани ифодаловчи $A \to B$ импликация ва тескари теоремани ифодаловчи $B \to A$ импликация, импликация таърифига кўра ҳар доим тенг кучли бўлавермаслигидан осонгина тушуниш мумкин.

Тўғри теоремага қарама−қарши теорема.

$A \to B$ кўринишдаги теоремага қарама−қарши теорема деб, $\neg A \to \neg B$ кўринишдаги теоремага айтилади:

Масалан, $A \to B$: −«Агар тўртбурчак параллелограмм бўлса, унинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади» каби ифодаланган теорема бўлса, унга қарама−қарши теорема $\neg A \to \neg B$: − «агар тўртбурчак параллелограмм бўлмаса, у ҳолда унинг диагоналлари кесишиш нуқтасида ўзаро тенг бўлакларга бўлинмайди» деган мулоҳазадан иборат бўлади.

Тескари теоремага қарама−қарши теорема

Тўғри теорема $A \to B$ формула билан аниқланса, унга тескари теорема $B \to A$ формула билан, унга қарама−қарши теорема эса $\neg A \to \neg B$ формула билан аниқланар эди.

$B \to A$ тескари теоремага қарама−қарши теорема деб, $\neg B \to \neg A$ формула билан аниқланадиган теоремага айтилади.

Масалан, тўғри теорема: −«Агар учбурчакнинг барча томонлари тенг бўлса, унинг барча бурчаклари ҳам тенгдир» бўлсин. Унинг шарт қисми A: −«Учбурчакнинг барча томонлари тенг», хулоса қисми B: − «Учбурчакнинг барча бурчаклари тенг» мулоҳаза бўлиб, у $A \to B$ формула билан ифодаланади.

Унга тескари теорема: $B \to A$ −«Агар учбурчакнинг барча бурчаклари тенг бўлса, унинг томонлари ҳам тенгдир».

Тескари теоремага қарама−қарши теорема: $\neg B \to \neg A$ −«Агар учбурчакнинг барча бурчаклари тенг бўлмаса, унинг томонлари ҳам ўзаро тенг эмас» бўлади.

Зарурий ва етарли шартлар

Тўғри ва тескари теоремалар тушунчалари билан «зарур», «етарли» ва «зарур ва етарли» сўзларининг қўлланилиши яқин боғлиқдир.

$A \to B$ теорема ўринли бўлган вазиятда B мулоҳазани A мулоҳаза учун зарурий шарт дейилади, A мулоҳазани эса B мулоҳаза учун етарли шарт дейилади.

Бу сўзларнинг мазмунига эътибор берсак, хақиқатан ҳам, импликация таърифига кўра $A \to B$ рост бўлганда A нинг ростлигидан B нинг ростлиги бевосита келиб чиқади, яъни бу вазиятда B нинг рост бўлиши зарур.

Шунингдек, B мулоҳаза рост бўлиши учун A мулоҳазанинг рост бўлиши етарлидир, негаки $A \to B$ ва A лар рост бўлганда, импликация таърифига асосан B мулохаза ёлғон бўла олмайди.

Агар теорема таркибида «зарур ва етарли» сўзлари қатнашса, у ҳолда теоремани исботлари зарурий шартни ва етарли шартни исботлашлардан ташкил топади. Бошқача қилиб айтганда, тўғри ва унга тескари теоремаларни алоҳида—алоҳида исботланади, негаки илгари кўриб ўтганимиздек улардан бирининг ростлигидан, иккинчисининг ростлиги ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Баъзи ҳолларда теоремаларда «зарурий ва етарли» сўзлари ўрнига «шу ҳолда ва фақат шу ҳолда», «шунда ва фақат шунда», «агар ва фақат агар» сўзларини ҳам ишлатилади.

3§. Мулоҳазалар ҳисоби.

Мулоҳазалар ҳисоби ва унинг аксиомалари

Мулоҳазалар ҳисоби учун формал аксиоматик L назарияни қуйидагича киритамиз:

—L назариянинг символлари $\rceil$, $\to$, (,) ва A_i ҳарфлардан иборат, бунда i натурал сон бўлиб , биз $\rceil$, $\to$ ларни примитив боғловчилар, A_i ларни эса пропозиционал ҳарфлар деб юритамиз.

— L назарияда формула тушунчасини қуйидагича аниқланади:

(а) Ҳар бир пропозиционал ҳарф формуладир.

(б) Агар A ва B лар формулалар бўлсалар, у ҳолда $(\rceil A)$, $(A \to B)$ лар формулалардир. (Кейинги ўринларда ташқи қавсларни ташлаб ёзишга келишилади).

(в) Ифода, агар у (а) ва (б) пунктлар ёрдамида ҳосил қилинган бўлса ва фақат шу ҳолда формуладир.

— A, B, C лар қандай формулалар бўлишларидан қатъий—назар, қуйидаги формулалар L нинг аксиомаларидир .

(A1) $A\to(B\to A)$.

(A2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

(A3) $(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)$.

— L да ягона келтириб чиқариш қоидаси *modus ponens* (*MP*) дан иборат бўлиб, у қуйидагича ифодаланади :

B формула A ва $A\to B$ формулаларнинг бевосита натижасидир.

Биз кўрамизки, чексиз кўп аксиомалар системаси, бор йўғи учта аксиомалар схемаси билан берилмоқда ва ҳар қандай формуланинг аксиома ёки аксиома эмаслигини аниқлаш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди, бу каби аксиомалаштирилган назариялар эффектив аксиомалаштирилган назариялар дейилади.

Формулаларни қисқароқ ёзиш мақсадида яна $\wedge$, $\vee$, $\equiv$ боғловчиларни қуйидаги таърифлар билан берамиз;

(D1) $(A\wedge B)$ ифода $\neg(A\to\neg B)$ ни билдиради.

(D2) $(A\vee B)$ ифода $\neg A\to B$ ни билдиради.

(D3) $A\equiv B$ ифода $(A\to B)\wedge(B\to A)$ ни билдиради.

L назариянинг формулалари учун исбот тушунчасини қуйидаги таъриф ёрдамида киритамиз.

Таъриф: L назариянинг A формуласи агар L нинг формулаларидан тузилган шундай $A_1,\dots,A_n$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, бунда ҳар-бир A_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, ёки аксиома, ёки ўзидан олдинги формулаларнинг *MP* хулоса қилиш қоидаси бўйича натижасидан иборат бўлса ва A_n формула A формуланинг ўзидан иборат бўлса L назарияда келтириб чиқарилувчи ёки исботга эга дейилади, $A_1,\dots,A_n$ формулалар кетма-кетлиги эса A формуланинг L даги исботи дейилади. Исботга эга бўлган формула теорема дейилади.

n сонига исбот узунлиги дейилади.

Агар A формула L нинг теоремаси бўлса, биз бу ҳолатни $\vdash A$ каби ёзамиз.

Масалан: $\vdash((A\to B)\to A)\to B$ ёзув $((A\to B)\to A)\to B$ формуланинг мулоҳазалар ҳисобида исботга эга эканлигини, яъни теорема эканлигини билдиради.

1 – **мисол:** $A \to A$ формуланинг мулоҳазалар ҳисобида исботга эга эканлигин кўрсатинг. Бунда A мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи.

Ечилиши: Исбот кетма – кетлигини қурамиз:

(1) $(A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$. ($A2$ аксиома).
(2) $(A \to ((B \to A) \to A)$. ($A1$ аксиома).
(3) $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$. ((1), (2) дан MP бўйича).
(4) $(A \to (B \to A))$. ($A1$ аксиома).
(5) $A \to A$. ((3), (4) дан MP бўйича).

Шундай қилиб биз $A \to A$ формула учун таърифда айтилган исбот кетма – кетлигини қура олдик. Бу кетма – кетлик (1), (2), (3), (4), (5) формулалар кетма – кетлигидан иборат. Бу ерда исбот узунлиги n=5 га тенг.

L назариянинг формулаларидан ташкил топган бирор Г тўплам берилган бўлсин. Бу формулалар тўпламидан келтириб чиқарилувчанлик тушунчаси қуйидагича аниқланади.

Таъриф; L назариянинг A формуласи $A=A_n$ бўладиган $A_1,\dots,A_n$ формулалар кетма – кетлиги мавжуд бўлиб, бунда $i \in \{1,\dots,n\}$да ҳар бир A_i ёки L нинг аксиомаси, ёки Г нинг формуласи, ёки ўзидан олдинги формулалардан келтириб чиқариш қоидалари ёрдамида келтириб чиқарилган бўлганда ва фақат шу ҳолда Г нинг формулаларининг натижаси ёки Г дан келтириб чиқарилган дейилади.

n сонига исбот узунлиги дейилади.

Бу $A_1,\dots,A_n$ кетма – кетлик A нинг Г даги исботи дейилади. Бу ҳолда Г нинг формулалари гипотезалар дейилади.

A формула Г дан келиб чиқади, дейиш ўрнига $\Gamma \vdash A$ ёзувдан фойдаланамиз.

Агар Г чекли бўлса $\{B_1,\dots,B_n\} \vdash A$ ёзув ўрнига $B_1, B_2,\dots,B_n \vdash A$ ёзувдан фойдаланамиз.

Масалан; $A, B, A \to (B \to C) \vdash C$ ёзув C формуланинг L назарияда $\{A, B, A \to (B \to C)\}$ формулалар тўпламидан келтириб чиқарилишини, шу формулаларнинг натижаси ёки шу тўпламда исботга эга эканини билдиради. Бу исботни A, B, $A \to (B \to C)$ гипотезалардаги исбот деб айтишимиз мумкин.

Мулоҳазалар ҳисобида дедукция теоремаси.

Теорема; Агар Г формулалар тўплами бўлиб, A, B лар формулалар бўлсалар ва Г, $A\vdash B$ бўлса, у ҳолда $\Gamma\vdash A\rightarrow B$ дир. Хусусан, агар $A\vdash B$ бўлса, у ҳолда $\vdash A\rightarrow B$ дир.

Мулоҳазалар ҳисобининг тўлалиги.

Биз L назарияда берилган формула учун унинг шу назарияда исботланувчи бўлиш ёки бўлмаслиги масаласини ҳал килиш учун бу формуланинг исбот кетма–кетлигини қуришимиз лозим бўлади. Шунга кўра берилган формула учун исбот кетма–кетлигини умуман олганда қуриб бўладими ёки йўқми деган саволга олдиндан жавоб бера олиш, ҳатто шу исботни кандай килиб қуриш керак, деган савол очиқ қолган тақдирда ҳам, нафақат бизнинг L назариямиз, балки ҳар кандай аксиоматик назария учун муҳим масаладир.

Бу масала мулоҳазалар ҳисобида тўлалик муаммоси деб юритилади. Биз бу масалани қуйидаги теоремаларда ойдинлаштирамиз.

1–теорема: L назариянинг ҳар кандай теоремаси мулоҳазалар алгебрасининг айнан рост формуласидир.

Мулоҳазалар ҳисобининг зиддиятсизлиги

Масала L назарияда бир вақтнинг ўзида ҳам ўзи, ҳам инкори теорема бўла оладиган формуланинг бор ёки йўқлиги билан боғлиқ.

Бу масала тўлалик хақидаги теоремаларга асосланиб қийинчиликсиз ҳал килиниши мумкин.

Хақиқатан ҳам, агар L назарияда ҳам A нинг ўзи, ҳам $\neg A$ исботга эга бўладиган A формула мавжуд деб ҳисоб килсак, бу ҳолат хозиргина исбот қилинган теоремага асосан мулоҳазалар алгебрасида ҳам ўзи, ҳам инкори айнан рост бўладиган A формуланинг мавжудлигига олиб келган бўлар эди. Бироқ, мулоҳазалар алгебрасида биз олдинги бўлимларда кўрганимиздек бундай формула йўқ.

Иккинчи томондан, мулоҳазалар ҳисобида бир вақтнинг ўзида ҳам A, ҳам $\neg A$ теорема бўладиган A формуланинг мавжуд бўлиши юкоридаги 6–мисолдаги $\vdash\neg A\rightarrow(A\rightarrow B)$ тасдиққа асосан B формуланинг ва демак, L нинг ихтиёрий формуласининг L да теорема эканлигига олиб келган бўлар эди.

Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг эрклилиги.

Аксиоматик назариядаги аксиомаларнинг эрклилик тушунчаси назария учун танланган аксиомалар системаси ичидан ҳеч қайси аксиома қолган аксиомалардан шу назариядаги келтириб чиқариш қоидалари бўйича келтириб чиқарилмаслигини англатади.

Бизнинг L назариямиз—мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалари системаси учун ушбу теорема ўринли:

Теорема: Мулоҳазалар алгебрасининг аксиомалари системаси эрклидир.

Аксиоматик назарияда бирор аксиоманинг шу назариянинг бошқа аксиомаларидан келтириб чиқариб бўлмаслигини назариянинг келтириб чиқариш қоидаларининг хусусиятларидан келиб чиққан ҳолда ўрнатиш мумкин.

Масалан, Евклид геометрияси аксиомалардан параллеллик аксиомасининг бошқа аксиомалардан келтириб чиқариб бўлмаслигини аниқлаш масаласининг ечилиши узоқ тарихий даврни, Лобачевский томонидан ноевклид геометрияни яратилишигача бўлган даврни, босиб ўтди.

Шундай қилиб биз келтирган L мулоҳазалар ҳисобидан иборат формал аксиоматик назария зиддиятсиз, тўла, эркли аксиомалар системаси асосида қурилган назария экан.

4§. Предикатлар.

Биз мулоҳазалар тўғрисида сўз юритганимизда, таркибида қандайдир объектларнинг умумий номлари—номаълумлар иштирок этадиган, «x сон y сонга бўлинади», «x Норин туманининг маркази», «x+2=81» гапларга алоҳида тўхталишимизга тўғри келади. Бу каби гапларни мулоҳаза дея олмаслигимиз табиий, чунки уларнинг рост ёки ёлғонлигини аниқлашда, гап таркибидаги номаълумлар ҳалақит беради. Аммо, бу гаплар таркибидаги номаълумларни бирор тўпламнинг элементлари билан алмаштирсак, улар рост ёки ёлғон мулоҳазаларга айланиши мумкин. Масалан, биринчи мисолда x ва y ўзгарувчиларга маълум бир бутун сонларни, иккинчи мисолда x ўрнига туман марказлари номларини, учинчи мисолда x ўрнига натурал сонларни қўйилганда рост ёки ёлғон мулоҳазаларни ҳосил қиламиз. Шу турдаги гапларнинг рост—ёлғонлигини аниқлаштириш ва уларнинг умумий тузилиши масаласига кенгроқ тўхталамиз.

Эркин ўзгарувчиларга эга бўлган ва бу ўзгарувчиларнинг ўрнига уларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларни қўйилганда мулоҳазага айланувчи гаплар предикатлар деган ном билан юритилади

Юқоридаги биринчи мисолда эркин ўзгарувчилар x ва y дан, кейинги мисолларда эса x дан иборат. Биринчи мисолда эркин ўзгарувчилар қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари бутун сонлар, иккинчи мисолда туман марказлари номлари, учинчи мисолда натурал сонлар тўпламларидан иборат дейиш мумкин.

Предикатнинг аниқланиши унинг таркибига кирувчи эркин ўзгарувчилар ва уларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами билан боғлиқдир.

Предикатнинг таркибига кирувчи эркин ўзгарувчилар сонига қараб, бир ўринли, икки ўринли ва ҳоказо ўринли предикат тушунчаси аниқланади. Ҳар қандай мулоҳазани нол ўринли предикат деб ҳисоблаймиз. Юқоридаги биринчи мисолимиздаги гап икки ўринли, кейинги иккинчи ва учинчи мисолларимиздаги гаплар эса бир ўринли предикатлардир.

Предикат тушунчасини алгебраик маънодаги муносабат сифатида ҳам қараш мумкин.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламларда аниқланган $n-$ўринли предикат деб, n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларга эга бўлган ва бу ўзгарувчиларнинг ўринларига мос равишда $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламлардан олинган элементларни қўйилганда мулоҳазага айланувчи ифодага айтилади.

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ ўзгарувчилар нол ўринли предикат символлар ёки пропозиционал ўзгарувчилар ҳам дейилади.

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ ўзгарувчиларга эга бўлган $n-$ўринли предикатни $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва ҳоказо каби белгиланади.

Мисоллар:

1. $P(x)$ – "$x^2-6x+8=0$", $x\in\mathbf{R}$;
2. $P(x_1,x_2)$ – "$x_1+x_2=4$", $x_1,x_2\in\mathbf{N}$;
3. $P(x,y)$ – "$x^2+y^2=4$", $x,y\in\mathbf{Z}$**.**

$M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда аниқланган $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатдан $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ўзгарувчиларнинг ўринларига мос равишда $\alpha_1\in M_1$, $\alpha_2\in M_2,\ldots,\alpha_n\in M_n$ элементларни қўйиш билан ҳосил қилинган мулоҳазани $P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ билан белгилаймиз.

Барча шундай ўрнига қўйишларнинг ҳар бирида рост мулоҳазага айланадиган предикатни биз $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ тўпламда ёки $M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда айнан рост предикат деймиз.

Барча шундай ўрнига қўйишларнинг ҳар бирида ёлғон мулоҳазага айланадиган предикатни биз $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ тўпламда ёки $M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда айнан ёлғон предикат деймиз.

Шундай ўрнига қўйишларнинг ҳеч бўлмаганда биттасида рост мулоҳазага айланадиган предикатни биз $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ тўпламда ёки $M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда бажарилувчи предикат деймиз.

$M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда аниқланган $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатнинг ростлик соҳаси деб, $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ тўғри кўпайтманинг $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2,\ldots,x_n=\alpha_n$ бўлганда $P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ ифода рост мулоҳаза бўладиган барча $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ тартибланган $n-$ликларидан тузилган қисм тўпламига айтилади. Бу тўпламни P^+ каби белгилаймиз.

Шундай қилиб

$P^{+}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\ P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ ифода рост мулоҳаза$\}$.

Юқоридаги мисолларда:

1. $P(x)$ – "$x^2-6x+8=0$", $x\in\mathbf{R}$ предикатнинг ростлик соҳаси

   $P^{+}=\{2,\ 4\}\subset\mathbf{R}$.

2. $P(x_1,x_2)$ – "$x_1+x_2=4$", $x_1,x_2\in\mathbf{N}$ предикатнинг ростлик соҳаси

   $P^{+}=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}\subset\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

3. $P(x,y)$ – "$x^2+y^2=4$", $x,y\in\mathbf{Z}$ предикатнинг ростлик соҳаси

   $P^{+}=\{(0,\ 2),\ (2,\ 0),\ (0,\ -2),\ (-2,\ 0)\}\subset\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Айнан бир $M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда аниқланган $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатлар уларнинг ростлик соҳалари тенг бўлганда, яъни $P^{+}=Q^{+}$ бўлганда ва фақат шу ҳолда тенг дейилади ва $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ каби белгиланади.

Мулоҳазалар устида бажариладиган барча мантиқий амаллар предикатлар устида ҳам бажарилиши мумкин.

Масалан, айнан бир $M_1,M_2,\ldots,M_n$ тўпламларда аниқланган $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатларнинг коньюнкцияси деб, $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ билан белгиланадиган ва $M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ тўғри кўпайтманинг $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва $Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатларнинг ҳар бирини ростга айлантирадиган элементларида ва фақат шуларда рост бўладиган предикатга айтилади.

Предикатлар устида мулоҳазалар устидаги мантиқий амаллардан ташқари квантор билан боғлаш деб аталадиган амаллар ҳам бажарилади.

$\forall$ белги умумийлик квантори дейилади. Бу кванторни $P(x)$ бир ўринли предикатдаги x ўзгарувчига нисбатан қўллаб $(\forall x)(P(x))$ ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифода "барча x лар учун $P(x)$ рост" деган мулоҳазани билдиради ва у энди бир ўринли предикат эмасдир.

Масалан, натурал сонлар тўпламида $P(x)$ предикат “x сон туб сондир” деган предикат бўлсин. Бу предикатда x ўзгарувчига нисбатан умумийлик кванторини қўллашдан ҳосил бўлган $(\forall x)(P(x))$ ифода “барча x лар туб сонлардир” деган ёлғон мулоҳазани билдиради.

Умумийлик кванторини $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатнинг ихтиёрий ўзгарувчисига ёки бир неча ўзгарувчиларига нисбатан қўллаш мумкин.

Масалан, $P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ предикатда умумийлик кванторини x_2, x_3 ўзгарувчиларга нисбатан қўллаш билан $(\forall x_2)(\forall x_3)P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифодани x_1,x_4,x_5 ўзгарувчиларга нисбатан предикат сифатида қараш мумкин. Бу вазиятда биз $(\forall x_2)(\forall x_3)P(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ предикатга x_2, x_3 ўзгарувчилар боғлиқ, x_1,x_4,x_5 ўзгарувчилар эса эркин киради деб айтамиз.

$\exists$ белги мавжудлик квантори дейилади. Бу кванторни $P(x)$ бир ўринли предикатдаги x ўзгарувчига нисбатан қўллаб $(\exists x)(P(x))$ ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифода “баъзи x лар учун $P(x)$ рост” деган мулоҳазани билдиради ва у ҳам бир ўринли предикат эмасдир.

Масалан, бутун сонлар тўпламида $P(x)$ предикат “x соннинг квадрати 9 га тенгдир” деган предикат бўлсин. Бу предикатда x ўзгарувчига нисбатан мавжудлик кванторини қўллашдан ҳосил бўлган $(\exists x)(P(x))$ ифода “баъзи x ларнинг квадрати 9 га тенгдир” деган рост мулоҳазани билдиради.

Мавжудлик кванторини ҳам, умумийлик квантори каби, $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатнинг ихтиёрий ўзгарувчисига ёки бир неча ўзгарувчиларига нисбатан қўллаш мумкин.

Масалан, $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ предикатда мавжудлик кванторини x_1, x_3 ўзгарувчиларга нисбатан қўллаш билан $(\forall x_1)(\forall x_3)P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифодани x_2,x_4 ўзгарувчиларга нисбатан предикат сифатида қараш мумкин. Бу вазиятда биз $(\forall x_1)(\forall x_3)P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ предикатга x_1, x_3 ўзгарувчилар боғлиқ, x_2,x_4 ўзгарувчилар эса эркин киради деб айтамиз.

$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикатнинг ўзгарувчиларига нисбатан кванторларни қўллаш предикатни квантор билан боғлаш дейилади.

Предикатлар алгебрасининг формулалари.

Мулоҳазалар алгебрасида бўлганидек, предикатлар алгебрасида ҳам формула тушунчаси индуктив тарзда киритилади.

Таъриф: 1) Ҳар бир нол ўринли предикат символ, яъни предмет ўзгарувчи формуладир.

2) Ҳар бир $n-$ўринли $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ предикат символ формуладир. Бунда $x_1,x_2,\ldots,x_n$ лар эркин предикат символлар.

3) Агар F ва G символлар формула бўлсалар, у ҳолда $(F \leftrightarrow G)$, $(F \to G)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $\rceil F$ ифодалар ҳам формулалардир.

4) Агар F $-$ x ўзгарувчи эркин кирадиган формула бўлса, у ҳолда $(\forall x)(F)$ ва $(\exists x)(F)$ символлар ҳам формула бўлиб, уларда x предмет ўзгарувчи боғлиқ ва шу билан бирга x дан бошқа барча предмет ўзгарувчилар F да эркли бўлса, янги формулаларда ҳам эркли ва F да боғлиқ бўлса, янги формулаларда ҳам боғлиқдир.

5) Предикатлар алгебрасининг формулалари фақат $1)-4)$ қоидалар асосидагина ҳосил килинади.

Предикатлар алгебрасининг формулалари улардаги предикат ўзгарувчиларнинг ўрнига конкрет предикатлар қўйилганда предикатларга айланади.

Предикатлар алгебрасининг формуласи, агар унинг предикат ўзгарувчиларининг ўрнига бирор M тўпламда аниқланган конкрет предикатларни қўйилганда бажарилувчи предикатга айланса, шу M тўпламда бажарилувчи дейилади.

Предикатлар алгебрасининг формуласи, агар унинг предикат ўзгарувчиларининг ўрнига бирор M тўпламда аниқланган конкрет предикатларни қўйилганда айнан рост предикатга айланса, шу M тўпламда айнан рост дейилади.

Предикатлар алгебрасининг формуласи, агар унинг предикат ўзгарувчиларининг ўрнига бирор M тўпламда аниқланган конкрет предикатларни қўйилганда айнан ёлғон предикатга айланса, шу M тўпламда айнан ёлғон дейилади.

Предикатлар алгебрасининг формуласи, агар унинг предикат ўзгарувчиларининг ўрнига ҳар қандай тўпламларда аниқланган ихтиёрий конкрет предикатларни қўйилганда айнан рост (айнан ёлғон) предикатга айланса бундай предикат умумқийматли (зиддиятли) предикат дейилади.

Предикатлар алгебрасининг бир хил предикат ўзгарувчиларга эга бўлган F ва G формулалари, агар улардаги предикат ўзгарувчиларнинг ўринларига ҳар қандай айнан бир тўпламда аниқланган конкрет предикатларни қўйишларда тенг кучли предикатларга айлансалар тенг кучли предикатлар дейиладилар.

F ва G формулаларнинг тенг кучлилиги $F \cong G$ каби белгиланади.

Мустақил ечиш учун машқлар:

1. Қуйидаги ифодалардан қайсилари предикат бўлишини кўрсатинг:

1) “x сон 5 га қолдиқсиз бўлинади”, $x \in \mathbf{N}$;

2) “x дарё Қора денгизга қуйилади;

3) “$x^2 - 5x+9$”, $x \in \mathbf{R}$;

4) “$\sin 0=0$”.

2. Қуйидаги мулоҳазаларни ўқинг, улардан қайсилари рост, қайсилари ёлғонлигини аниқланг:

1) $(\forall x)(\forall y)(x+y=6)$, $x,y\in\mathbf{R}$;

2) $(\forall x)(\exists y)(x+y=6)$, $x,y\in\mathbf{R}$;

3) $(\exists x)(\exists y)(x+y=6)$, $x,y\in\mathbf{R}$;

4) $(\exists x)(\forall y)(x+y=6)$, $x,y\in\mathbf{R}$;

5) $(\forall x)(\forall y)(x+y=6)\to(6=5)$, $x,y\in\mathbf{R}$;

6) $(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2+ax+b=0)$, $x,a,b\in\mathbf{R}$;

6) $(\exists a)(\forall b)(\exists x)(x^2+ax+b=0)$, $x,a,b\in\mathbf{R}$.

3. Кўрсатилган тўпламларда аниқланган қуйидаги предикатларнинг ростлик соҳаларини топинг:

1) $P(x)$ – "x сон 2 га каррали", $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

2) $P(x)$ – "x сон 3 га каррали", $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

3) $P(x)$ – "x сон 6 дан катта", $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

4) $P(x)$ – "$x^2+4>0$", $M=\mathbf{R}$;

4) $P(x)$ – "$x^2+4<0$", $M=\mathbf{R}$;

5) $P(x)$ – "$x^2-x-6=0$", $M=\mathbf{R}$;

6) $P(x)$ – "$x^2+x-12=0$", $M=\mathbf{R}$;

7) $P(x)$ – "$x^2+13x+42=0$", $M=\mathbf{R}$;

8) $P(x)$ – "$\sin x=0$", $M=\mathbf{R}$;

9) $P(x)$ – "$\sin x>1$", $M=\mathbf{R}$;

10) $P(x)$ – "$\sin x<0$", $M=\mathbf{R}$;

11) $P(x)$ – "$x_1^2+x_2^2=0$", $M_1=M_2=\mathbf{R}$;

12) $P(x_1,x_2)$ – "$x_1<x_2$", $M_1=\{1,2,3\}$, $M_2=\{2,3,4,5,6,7\}$;

13) $P(x_1,x_2)$ – "x_1 сон x_2 соннинг бўлувчисидир", $M_1=\{1,2,3\}$, $M_2=\{2,3,4,5,6,7\}$.

14) $P(x_1,x_2)$ – "$x_1+x_2=9$ ", $M_1=M_2=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

15) $P(x_1,x_2,x_3)$ – "x_1,x_2,x_3 сонлар ўзаро туб", $M_1=M_2=$

$=M_3=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

4. **R** тўпламда берилган қуйидаги предикатларнинг ростлик соҳаларини координаталар тўғри чизиғидаги геометрик тасвирини топинг:

1) $P(x)$ – “$x>5$”;

2) $P(x)$ – “$x^2+x-12=0$”;

3) $P(x)$ – “$x^2+x-12<0$”;

4) $P(x)$ – “$x^2+x-12>0$”;

5) $P(x)$ – “$x^2+x-12\leq 0$”;

6) $P(x)$ – “$x^2+x-12\geq 0$”;

7) $P(x)$ – “$|x+3|<6$”;

8) $P(x)$ – “$|x+3|-|2x+5|<0$”.

5. **R**×**R** тўпламда берилган қуйидаги предикатларнинг ростлик соҳаларини координаталар текислигидаги геометрик тасвирини топинг:

1) $P(x)$ – “$x+y=6$”;

2) $P(x)$ – “$|x+y|=6$”;

3) $P(x)$ – “$x^2+y^2=16$”;

4) $P(x)$ – “$x^2+y^2-4x+6y+14=0$”;

5) $P(x)$ – “$x^2\leq y$”;

6) $P(x)$ – “ $y=\dfrac{2}{x}$ ”.

6. Қуйидаги мулоҳазаларни предикатлар алгебраси символлари ёрдамида ифодаланг:

1) Барча натурал сонлар бутун сонлардир;

2) Ҳеч қайси натурал сон бутун сон эмас;

3) Баъзи натурал сонлар бутундир;

4) Баъзи натурал сонлар бутун сонлардир;

5) 12 га бўлинадиган ҳар қандай натурал сон 2, 3, 4 сонларига бўлинади;

6) Тўғри чизиқдаги ихтиёрий иккита устма—уст тушмайдиган нуқталарнинг орасида бу нуқталар билан устма—уст тушмайдиган камида битта нуқта мавжуд;

7) Текисликдаги иккита ҳар хил нуқталар орқали ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкин:

8) Фазодаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта орқали ягона текислик ўтказиш мумкин.

7. Қуйидаги формулаларнинг ҳар бирида ҳар бир ўзгарувчининг эркин ва боғлиқ киришларини кўрсатинг:

1) $(\forall x)(P(x))$;

2) $(\forall x)(P(x))\to(P(y))$;

3) $P(x)\to (\exists x)(Q(x))$;

4) $(\exists x)(Q(x))\wedge P(x))$;

5) $(\forall x)[(\exists y)(P(x,y))\to(Q(x,y,z)]$.

8. Предикатлар алгебрасининг қуйидаги формулаларининг бажарилувчи бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг:

1) $(\exists x)(P(x))$;

2) $(\forall x)(P(x))$;

3) $(\exists x)(\forall y)[P(x,x)\wedge\rceil\, P(x,y)]$;

5) $(\exists x)(\forall y)[P(x)\wedge\rceil\, P(y)]$;

6) $P(x)\to(\forall y)(P(y)$.

5§. Алгоритмлар назарияси элементлари.

Берилган A алфавитдаги алгоритм деб, аниқланиш соҳаси шу алфавитдаги барча сўзлар тўпламининг бирор қисм тўпламидан иборат бўлиб, қиймати ҳам шу алфавитдаги қандайдир сўзлардан иборат бўлган эффектив ҳисобланиши мумкин бўлган функцияга айтилади.

Алгоритмнинг асосий хусусиятлари.

– **дискретлик.** Бу алгоритмга вақт бошида берилган катталиклар системасини вақтга нисбатан қадам — бақадам ўзгартирилиб боришида ифодаланади.

– **бир қийматлилик.** Алгоритмни маълум қадамларидаги катталиклар системаси алгоритмнинг табиатидан бошқа хеч нарса билан боғлиқ бўлмай бир қийматли аниқланади. Масалан, ҳисобловчи ёки ҳисоблаш воситаларига боғлиқ бўлмаслик (детермированность).

– **элементарлик.** Ҳар бир қадамда ҳосил бўлаётган катталиклар системаларидан кейинги қадамдаги катталиклар системасини ҳосил қилиш усулининг оддий ва локал бўлишлиги.

– **йўналганлик.** Агар бирор қадамда олдинги қадамдаги катталиклардан янги катталикларнинг ҳосил қилишни кўрсатиш усули иш бермаса, нимани алгоритмнинг натижаси қилиб кўрсатилиши кераклиги қоидаси.

– **оммавийлик.** Катталикларнинг бошланғич системаларини чексиз кўп шундай системалар ичидан ихтиёрий танлаш мумкинлиги ва бошқалар.

Албатта, биз келтирган таъриф қатъий таъриф сифатида қабул қилиниши мумкин эмас, негаки, бу ерда «эффектив ҳисобланиш» деган таърифланишни талаб этувчи тушунча қатнашмоқда.

Шунга қарамай, алгоритмик ижобий ҳал этиладиган масалаларда бу таърифқониқарли деб қабул қилиниши мумкин.

XX асрнинг бошларига келиб, алгоритмик ҳал қилиниши муаммо бўлиб қолган бир қанча масалалар пайдо бўлиб қолди, масалан, группадаги сўзлар тенглиги, Диофант тенгламаларининг ечимлари ва хоказолар. Бу борада алгоритм тушунчасининг аниқ таърифи масаласи кўтарилиб қолди.

Биз қуйида шу масаланинг икки хил йўналишда ўрганилиши билан танишиб чиқамиз. Улардан бири рекурсив функциялар усули ва иккинчиси Тьюринг машиналаридир.

Ҳисобланувчи функциялар. Қисмий рекурсив ва рекурсив функциялар.

Математик масалаларнинг алгоритмлари охирги хисобда бирор сонли функциянинг қийматларини ҳисобланиши билан характерланади. Шу муносабат билан ушбу таърифни киритамиз.

Таъриф. $g = f(x_1, \ldots, x_n)$ функция, агар унинг қийматларини ҳисоблаш алгоритми мавжуд бўлса,у эффектив ҳисобланувчи функция дейилади.

Бу ерда ҳам албатта эффектив ҳисобланиш тушунчасини интуитив маънода тушунамиз.

«Албатта, ҳар қандай алгоритм ҳам натурал сонлар билан иш кўравериши шарт эмас, бироқ ҳар қандай чекли (саноқли) алфавитдаги сўзларни натурал сонлар билан белгилаш мумкин ва шунга кўра ҳар қандай алгоритмни сонли функцияни ҳисоблашга келтириш мумкин. Шу муносабат билан биз қараётган ёндошувда алгоритмнинг қатъий таърифи, амалда барча ҳисобланувчи арифметик функцияларнинг қандайдир қатъий ва конструктив тавсифига олиб келинади» (М. М.

Глухов).

Алгоритмнинг бу таърифи 1736 йилда берилган. Америкалик математик Чёрч «барча ҳисобланувчи функциялар синфи рекурсив функциялар деб аталувчи функциялар синфи билан устма—уст тушади» деган гипотезани олдинга сурди.Ҳозирги кунда бу Чёрч тезиси деб юритилади.

Клини томонидан рекурсив функциялар синфини қисмий рекурсив функциялар синфигача кенгайтирди ва «қисмий рекурсив функциялар синфи барча қисман аниқланган ҳисобланувчи арифметик функциялар синфи билан устма—уст тушади» деган гипотезани олдинга сурди. Бу гипотеза Клини тезиси деб юритилади.

Қисмий рекурсив функциялар синфи базис функциялар деб аталувчи бир неча функциялар ва улар устидаги бир неча дастлабки амаллар ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин бўлган функциялардан ташкил топади. Қуйида шу базис функциялар ва функциялар устида бажариладиган дастлабки амалларни кўриб ўтамиз.

Базис функциялар қуйидагилар:

1. $s(x)=x+1$ — силжиш функцияси.
2. $\theta(x_1, \dots, x_n)=0$ — константа функция.
3. $I_m^n(x_1, \dots, x_n)=x_m \; (1\le m\le n; n=1,2,3,...)$ — танлаш функцияси.

Биз бу функцияларни операторлар деб ҳам юритамиз.

Операторлар устидаги асосий амаллар қуйидагилардан иборат:

1. Функциялар суперпозицияси.

Ҳар бири m тадан $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчиларга нисбатан n та

$f_1(x_1,\,...\,,x_m),\,...\,,f_n(x_1,\,...\,,x_m)$ сонли функциялар ва n ўринли f функция берилган бўлсин. Бу функциялар ёрдамида ҳосил қилинган m ўринли

$$g(x_1,\,...\,,x_m)=f(f_1(x_1,\,...\,,x_m),\,...\,,f_n(x_1,\,...\,,x_m))$$

функцияни биз $f,f_1,\,...\,,f_n$ функциялардан суперпозиция ёрдамида ҳосил қилинган деймиз.

Масалан, $f(x,y)=x+y$, $\theta^3(x,y,z)=0$, $I_3^3(x,y,z)=z$ бўлсин.

У ҳолда $g(x,y,z)=f(\theta^3(x,y,z),I_3^3(x,y,z))\quad f(0,z)\quad 0+z=z$, яъни $g(x,y,z)=z$ бўлади. Бу амални $S^{n+1}(f,f_1,\,...\,,f_n)$ ёки S^{n+1} каби ифодаланади.

2. Примитив рекурсия амали.

n ўринли $g(x_1,\,...\,,x_n)$ ва $n+2$ ўринли $f(x_1,\,...\,,x_n,y,t)$ функциялардан ушбу

$$h(x_1,\,...\,,x_n,0)=g(x_1,\,...\,,x_n) \qquad (1)$$
$$h(x_1,\,...\,,x_n,y+1)=f(x_1,\,...\,,x_n,y,h(x_1,\,...\,,x_n,y)) \qquad (2)$$

схема бўйича барча натурал $x_1,\,...\,,x_n,y$ ларда $n+1$ ўринли $h(x_1,\,...\,,x_n,x_{n+1}=y+1)$ функцияни ҳосил қилиш **примитив рекурсия** дейилади ва уни символик кўринишда $h=R(g,f)$ каби ёзилади.

Примитив рекурсия амали $n=0$ да ҳам ўринлидир. Бунда g функция нол ўринли, f функция икки ўринли бўлиб, h функция эса бир ўринли бўлади ва примитив рекурсия ушбу схема асосида олиб борилади:

$$\begin{cases} h(0)=a & (3) \\ h(x+1)=f(x,h(x)) & (4) \end{cases}$$

Бу амални ушбу мисол ёрдамида тушунтиришга ҳаракат қилайлик.

Мисол. Нол ўринли $g(x)=2$, икки ўринли $f(x,y)=x+y$ функциялар берилган бўлсин. Бир ўринли $h(x)$ функцияни

$$\begin{cases} h(0)=2 \\ h(x+1)=f(x,h(x)) \end{cases}$$

схема ёрдамида $x=0,1,2,3,...$ бўлгандаги қийматларини ҳисоблайлик:

$x=0$ да $h(0+1)=h(1)=f(0,h(0))\quad f(0,2)\quad 0+2=2$,

$x=1$ да $h(1+1)=h(2)=f(1,h(1))\quad f(1,2)\quad 1+2=3$,

$x=2$ да $h(2+1)=h(3)=f(2,h(2))\quad f(2,3)\quad 2+3=5$,

$x=3$ да $h(3+1)=h(4)=f(3,h(3))\quad f(3,5)\quad 3+5=8$,

ва хоказо. Шундай қилиб, $h(x)$ функция учун

$$h(0)=2$$
$$h(1)=2$$
$$h(2)=3$$
$$h(3)=5$$
$$h(4)=8$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

қийматларга эга бўламиз.

Шу ўринда, ҳар қандай $n+2$ ўринли f функция ва n ўринли g функциялар учун ҳар доим $n+1$ ўринли h функцияни кўрсатиш мумкинми, агар мумкин бўлса, бундай функция ягонами, деган савол пайдо бўлади. Ҳар иккала f ва g функцияларнинг аниқланиш соҳалари N тўплам бўлганлигидан ҳар иккала саволнинг жавоби ижобийдир.

Агар h функция мавжуд бўлса, (1) ва (2) тенгликлардан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$
\begin{aligned}
&h(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n),\\
&h(x_1, \ldots, x_n, 1) = f(x_1, \ldots, x_n, 0, g(x_1, \ldots, x_n)),\\
&h(x_1, \ldots, x_n, 2) = f(x_1, \ldots, x_n, 1, h(x_1, \ldots, x_n, 1)),\\
&h(x_1, \ldots, x_n, 3) = f(x_1, \ldots, x_n, 2, h(x_1, \ldots, x_n, 2)),\\
&\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
&h(x_1, \ldots, x_n, m+1) = f(x_1, \ldots, x_n, m, h(x_1, \ldots, x_n, m)).
\end{aligned}
$$

Бу тенгликлар h функция бир қийматли аниқланганлигини кўрсатмоқда.

Яна бу тенгликлардан агар бирор t да $h(x_1, \ldots, x_n, t)$ нинг қиймати аниқланмаган бўлса, $h(x_1, \ldots, x_n, y)$ функциянинг қиймати барча $y \geq t$ ларда ҳам аниқланмаганлиги кўринади.

(5) тенгликлардан, шунингдек, биз учун жуда мухим бўлган ҳолатни ҳам кузатиш мумкин. Хусусан, агар биз φ ва g функцияларнинг қийматларини қандайдир усул билан «топа билсак», у ҳолда h функциянинг қийматларини жуда осон механик процедура ёрдамида ҳисоблашимиз мумкин. Айнан $h(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ нинг қийматини топиш учун кетма-кет равишда

$$
\begin{aligned}
&b_0 = g(a_1, \ldots, a_n),\\
&b_1 = f(a_1, \ldots, a_n, 0, b_0),\\
&b_2 = f(a_1, \ldots, a_n, 1, b_1),\\
&b_3 = f(a_1, \ldots, a_n, 2, b_2),\\
&\quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&b_{m+1} = f(a_1, \ldots, a_n, m, b_m)
\end{aligned}
$$

ларни ҳисоблаш кифоя. Охирги $m+1$ қадамда топилган b_{m+1} сон h функциянинг $h(a_1, \ldots, a_n, m+1)$ қийматидан иборатдир.

Таъриф. Базис функцияларга суперпозиция ва примитив рекурсия амалларини қўллаш натижасида ҳосил бўладиган сонли функциялар **примитив рекурсив** функциялар дейилади.

Таърифга асосан, бир ўринли $\lambda(x) = s(x) \quad x+1,\ \theta^1(x) = 0,\ I_1^1(x) = x$ функциялар ва n ўринли $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m, m \in \overline{1, n}$ функциялар примитив рекурсив функциялардир.

Қуйида баъзи энг содда функцияларнинг примитив рекурсивлигини кўриб чиқамиз.

1. n ўринли $\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ функцияни $S^2(\theta^1, I_1^n)$ тасвирлаш мумкин ва бу ерда қатнашувчи θ^1, I_1^n лар примитив рекурсив бўлганлигидан $\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ функция ҳам примитив рекурсивдир.

2. n ўринли ихтиёрий $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ ўзгармас функция

$$\underbrace{S^2(\lambda, S^2(\lambda, S^2(\ldots(\lambda, S^2(\lambda, \theta^n(x_1, \ldots, x_n))\ldots)))}_{a \text{ марта}}$$

суперпозиция шаклида тасвирланиши мумкин ва шунга кўра примитив рекурсивдир.

3. $h^2(x, y) = x + y$ функция.

Бу функцияни уч ўринли $f^3(x, y, z) = z + 1 = \lambda(z)$ ва бир ўринли $g^1(x) = x = I_1^1$ примитив рекурсив функциялардан $\begin{cases} h^2(x, 0) = g^1(x) = x \\ h^2(x, y+1) = f^3(x, y, h^2(x, y)) \end{cases}$

схема бўйича ҳосил қилиш мумкин ва шунга кўра $h^2(x, y)$ примитив рекурсив функциядир.

Шу ерда $h^2(x, y)$ функция қийматларини ҳисоблашга тўхталиб ўтсак. Юқоридаги схемага асосан

$h^2(x,0)=x,$

$h^2(x,1)=x+1,$

$h^2(x,2)=(x+1)+1 = x+2,$

$h^2(x,3)=(x+2)+1 = x+3,$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

ларга эга бўламиз.

Термал ёзувда бу функция $h=PR(I_1^1, S(I_3^3, I_1^1, I_2^2, S(\lambda, I_3^3))$ ёки $h(x,y)=PR(I_1^1(x), S\{(I_3^3(x,y,z), I_1^1(x), I_2^2(x,y), S[\lambda(x), I_3^3(x,y,z)]\})$ кўринишда ифодаланади.

4. $h^2(x,y)=x\cdot y$ функция уч ўринли $f^3(x,y,z)=x+z$ ва бир ўринли $\theta(x)=0$ функциялар ёрдамида

$$\begin{cases} h^2(x,0)=0=\theta(x), \\ h^2(x,y)=h^3(x,y,f^2(x,y)) \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x\cdot 0=0 \\ x\cdot(y+1)= x\cdot y+x=h^3(x,y,f^2(x,y)) \end{cases}$$

схема ёрдамида қурилиши мумкин. $f^3(x,y,z)$ ва $\theta(x)$ функциялар примитив рекурсив бўлганлигидан бу функция ҳам примитив рекурсивдир.

Шу каби жуда кўплаб элементар функцияларнинг примитив рекурсивлигини исботлаш мумкин.

Э. Мендельсон примитив рекурсив функцияларни қуйидагича таърифлайди:

f функция, агар у базис функциялардан суперпозиция ва примитив рекурсия амалларини чекли сонда қўллаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, примитив рекурсив дейилади, яъни f функция учун

$f_1, \dots, f_n$ чекли функциялар кетма—кетлигини қуриш мумкин бўлиб, бунда $f_n = f$ ва ҳар бир $i,\ 0 \le i \le n$ учун f_i ёки базис функция ёки ўзидан олдинги функциялардан суперпозиция ёки примитив рекурсия амалларини қўллаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, f функция примитив рекурсив функция дейилади.

3. Минимизация амали.

Айтайлик, бизга бирор $f(x,y)$ функция берилган бўлсин. x нинг қийматини фиксирлаб, қайси y учун $f(x,y)=0$ бўлишини аниқлайлик.

Бу айтилган масалага нисбатан фиксирланган x учун $f(x,y)=0$ бўладиган энг кичик y ни топиш масаласи бирмунча қийинроқдир. Бу масаланинг ечими x нинг қийматига боғлиқ бўлгани учун y нинг $f(x,y)=0$ бўладиган энг кичик қиймати x га нисбатан функцияни беради. Бу функцияни $\varphi(x) = \mu y[f(x,y)=0]$ каби белгилаш қабул қилинган («y нинг $f(x,y)=0$ бўладиган энг кичик қиймати» деб ўқилади).

Бу амални $n+1$ ўзгарувчили $f(x_1, \dots, x_n, y)$ функция учун ҳам $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \mu y[f(x_1, \dots, x_n, y)=0]$ кўринишда қўллаш мумкин.

$n+1$ ўринли $f(x_1, \dots, x_n, y)$ функциядан $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ n ўринли функцияга ўтиш амали **минимизация амали** дейилади ва уни $\varphi = Mf$ каби ёзилади.

φ функциянинг қийматларини ҳисоблаш учун Ушбу кетма—кетликни таклиф қилиш мумкин:

1). $f(x_1, \dots, x_n, 0)$ ни ҳисоблаймиз. Агар бу қиймат нолга тенг бўлса, $\varphi(x_1, \dots, x_n)=0$ деб ҳисоблаймиз. Агар $\varphi(x_1, \dots, x_n) \ne 0$ бўлса, кейинги 2) қадамга ўтамиз.

2). $f(x_1, \dots, x_n, 1)$ ни ҳисоблаймиз. Агар бу қиймат нолга тенг бўлса,

$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда кейинги 3) қадамга ўтамиз ва хоказо.

Бу айтилган ҳисоблаш жараёни қуйидаги ҳолларда чексиз давом этиши мумкин:

— $f(x_1, \ldots, x_n, 0)$ аниқланмаган;

— барча $y \in N$ ларда $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ аниқланган, бироқ у нолга тенг эмас;

— $f(x_1, \ldots, x_n, y_0) = 0$ бўладиган y_0 мавжуд, бироқ шу билан бирга бирор $0 < z < y_0$ да $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ аниқланмаган. Бу ҳолда равшанки, f ни ҳисоблаш жараёни y_0 гача етиб бормайди.

Шу кўрсатилган вазиятларда $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ функция аниқланмаган деб ҳисобланади.

Мисол. Минимизация амали ёрдамида аниқланиши мумкин бўлган $\varphi(x, y) = x - y$ функцияни қарайлик. Бу функцияни $f(x, y, z) = y + z - x$ функциядан минимизация ёрдамида ҳосил қилиш мумкин.

$$\varphi(x, y) = \mu z[y + z - x \quad 0] \quad \mu z[y + z \quad x] = \mu z[I_3^2(x, y, z) + I_3^3(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)].$$

Масалан, $\varphi(7, 2)$ ни ҳисоблаймиз. Бу ерда $x = 7, y = 2.$ z га нисбатан ҳисоб юритамиз:

$z = 0$ да $2+0-7 \neq 0$;

$z = 1$ да $2+1-7 \neq 0$;

$z = 2$ да $2+2-7 \neq 0$;

$z=3$ да $2+3-7\neq 0$;

$z=4$ да $2+4-7\neq 0$;

$z=5$ да $2+5-7=0$.

Шундай қилиб, $\varphi(7,2)=5$ бўлар экан.

Кититилган асосий функционал амаллар ёрдамида қуйидаги таърифни киритишимиз мумкин

.

Таъриф. $f(x_1,\ldots,x_n)$ функция, агар у базис функциялардан суперпозиция, примитив рекурсия ва минимизация амаллари ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин бўлса, **рекурсив функция** дейилади.

Тьюринг машиналари.

Тъюринг машинаси ҳаёлий машини бўлиб, у

– Ташқи алфавит $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, a_0 – бўш символ.

– ички ҳолатлар алфавити $Q=\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$

q_0 – тўхташ ҳолати;

q_1 – бошланғич ҳолат.

– дастур. $T(i,j)$ $(i=\overline{1,k},\ j=\overline{0,n})$

кўринишидаги ифодалар мажмуасидан иборат ва улар қуйидагича шархланади:

а) $q_i\,a_j\to q_k\,a_l$, машина q_i ҳолатда a_j ни кўриб турибди. У q_k ҳолатга ўтиб, ўзи кўриб турган a_j символни ўчириб, унинг ўрнига a_l символни ёзиб қўяди, шундан сўнг олдинги ячейкани кўриб тураверади.

б) $q_i\,a_j\to q_k\,a_l\ П$, машина юқоридагича иш кўриб, ўнгга бир ячейка сурилади.

в) $q_i a_j \to q_k a_l$ $Л$,   машина юқоридагича иш кўриб, чапга бир ячейка сурилади.

Юқоридаги $T(i,j)$ буйруқни бажариб бўлиб, машина навбатдаги $T(k,l)$ буйруқни бажаришга ўтади.

1–мисол.

Ушбу функционал схема

Q	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1 Л$	$q_3 1 П$
*	$q_0 a_0$	$q_2 * Л$	$q_3 * П$

билан берилган Тьюринг машинаси бошланғич стандарт ҳолатдан чиқиб, ушбу а) 111*111   б) 1111*11 сўзларни қандай сўзларга айлантиришини топайлик.

Бошланғич стандарт ҳолат деганда машина q_1 ички ҳолатда тургани ҳолда, қайта ишланиши керак бўлган сўзлар ёзилган ячейкалардан ўнгдаги энг четки ячейкани кўриб турган ҳолатни тушунамиз.

Берилган дастурга кўра иш кўрсак,

	1	1	1	*	1	1	1	

$\uparrow q_1$ $q_2 1$ ҳолат

	1	1	1	*	1	1	a_0	

$\uparrow q_2$ $q_2 1 \to q_2 a_0 Л$

	1	1	1	*	1	1	a_0	

$\uparrow q_2$ $q_2 1 \to q_2 1 Л$

. . .   .

a_0	1	1	1	1	1	1	a_0	

Демак, машина 111*111 сўзни 111111 сўзга айлантирар экан.

2– мисол. Ўнлик саноқ системасида $\lambda(x)=x+1$ ни ҳисобловчи Тьюринг машинасининг ишлаш принципини кўриб чиқайлик.

Функционал схема қуйидагича:

A	q_1
a_0	$q_0 1$
1	$q_0 2$
2	$q_0 3$
3	$q_0 4$
4	$q_0 5$
5	$q_0 6$
6	$q_0 7$
7	$q_0 8$
8	$q_0 9$
9	$q_1 0Л$
0	$q_0 1$

– $\lambda(243)$ ни ҳисоблайлик:

	2	4	3	

$\uparrow q_1$ $q_1 3$ – бошланғич ҳолат.

	2	4	4	

$\uparrow q_0$ $q_1 3 \to q_0 4$

Натижада $\lambda(243)=244$ ҳосил бўлди.

— $\lambda(689)$ ни ҳисоблайлик:

	6	8	9	

$\uparrow q_1$ $\quad q_1 9$ — бошланғич ҳолат.

	6	8	0	

$\uparrow q_1$ $\quad q_1 9 \to q_1 0 Л$

	6	9	0	

$\uparrow q_0$ $\quad q_1 8 \to q_0 9$

Натижа: $\lambda(689) = 700$

Ҳар қандай Тьюринг машинаси бирор А алфавитдаги сўзлар тўпламини ўзининг ичига қисман акслантиради. Шу муносабат билан Тьюринг—Пост тезиси деб аталувчи ушбу гипотезани киритиш мумкин:

«А алфавит устидаги ҳар қандай алгоритм, А га нисбатан, мос Тьюринг (Пост) машинасида бажариладиган алгоритм билан эквивалентдир».

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. Москва Наука,1976.
2. Новиков П.С. элементы математической логики. М., Наука, 1973.
3. Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлери. Т., "Янги аср авлоди". 2006.
4. Юнусов А.С.,Юнусова Д.И.Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси. Маърузалар матни.ТДПУ,2001 й.
5. Тўраев Х.. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т. Ўқитувчи. 2003.
6. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Санкт—Петербург. 1999 г.
7. www.pedagog.uz